

ОПД.Ф.02.02 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ
РАСЧЕТ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН
Методические указания к курсовой работе

Содержатся основные положения по расчету на прочность круглых пластин. Изложены основные положения теории изгиба. Представлены методика расчета и последовательность выполнения работы с графической интерпретацией. Даны многочисленные примеры расчетов пластин различных схем. В приложении приведены расчетные схемы и исходные данные по вариантам. Представлен пример расчета в среде MathCAD. Дан список рекомендуемой литературы.

Ил. 15. Библиогр.: 8 назв. Табл. 2.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Общая теория изгиба круглых пластин.....	6
1.1. <i>Определение радиусов кривизны при осесимметричном изгибе.....</i>	6
1.2. <i>Определение напряжений σ_r и σ_t.....</i>	7
1.3. <i>Определение радиального и тангенциального моментов.....</i>	9
1.4. <i>Определение прогибов и углов поворота.....</i>	10
2. Примеры расчета круглых пластин.....	12
2.1. Осесимметричная пластина с распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой в центре.....	12
2.2. Пластина, с распределенной нагрузкой q зашлеменная по контуру.....	14
2.3. Пластина, с распределенной нагрузкой q свободно опертая по контуру.....	16
2.4. Кольцевая пластина, нагруженная распределенными моментами по контурам.....	17
2.5. Пластина, зашлеменная по внутреннему контуру с распределенной нагрузкой.....	20
Вопросы для самопроверки.....	23
Библиографический список.....	23
3. Численный пример расчета в среде MathCAD.....	24
Таблица 1. Расчетные схемы пластин.....	28
Таблица 2. Исходные данные.....	29
4. Решение задачи в среде MathCAD.....	30

Введение

Методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой специальности 140501 – "Двигатели внутреннего сгорания".

Дисциплиной "Механика материалов и конструкций" предусмотрен расчет тонкостенных элементов (пластин, дисков, оболочек).

Это объясняется тем, что тонкостенные элементы широко применяются в машиностроительных конструкциях, в частности в двигателестроении.

В то же время напряженно-деформированное состояние тонкостенных элементов более сложное, чем теория напряженного состояния бруса; поэтому в курсе "Сопротивление материалов" почти не рассматривается.

Пластиной называется плоское тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с двумя другими параметрами.

В представленных методических указаниях рассматриваются *тонкие пластины с малыми прогибами* при соотношении толщины к радиусу – $0,025 \leq \frac{h}{a} \leq 0,2$.

Срединная поверхность пластины – равноудаленная от наружных поверхностей.

В зависимости от формы контура пластины бывают:

- прямоугольные;
- круглые;
- эллиптические;
- произвольных очертаний.

В тех случаях, когда прогибы w малы в сравнении с ее высотой (толщиной) h , имеется возможность построить вполне удовлетворительную приближенную инженерную теорию изгиба пластины под поперечными нагрузками, основываясь на общих гипотезах Кирхгофа:

1. Гипотеза прямых нормалей – нормали к срединной поверхности при изгибе не искривляются и остаются перпендикулярными к деформируемой срединной поверхности. Эта гипотеза позволяет установить простые зависимости между деформацией в любой точке пластины и ее срединной поверхностью. В срединной поверхности пластина не испытывает никаких деформаций. При изгибе срединная поверхность остается нейтральной. Гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений балки;

2. Прямой отрезок, нормальный к срединной поверхности, не растягивается и не сжимается. Точки пластины, лежащие до нагру-

жения на нормали к срединной поверхности, всегда остаются на этой нормали;

3. Нормальными напряжениями в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности, допустимо пренебрегать.

Основываясь на этих допущениях все компоненты напряжений можно выразить через прогиб w или угол поворота сечения φ от обобщенной координаты – радиуса r для осесимметрично нагруженных пластин. Таким образом, решения уравнений углов поворота и прогибов дают все необходимые исходные данные, чтобы вычислить напряжения для любой точки пластины.

Второе допущение эквивалентно пренебрежению влиянием перерезающих сил на прогиб пластины. Допущение это обычно удовлетворяется, кроме случаев наличия отверстий в пластинах, тогда перерезающие силы приобретают большое значение, и в теорию тонкой пластины приходится вводить некоторые коррективы.

Общая теория изгиба круглых пластин

Детали в виде осесимметричных круглых пластин – днища поршней, резервуаров; различного рода крышки; фланцы; диафрагмы и т. п.

Различают кривизну (соответствующую ей деформацию) радиальную – вдоль оси X и тангенциальную – вдоль оси Y

1.1. Определение радиусов кривизны при осесимметричном изгибе

Рассмотрим деформацию пластины при изгибе. На рис. 1 изображена пластина при осесимметричном изгибе до и после деформации. Имеем два радиуса кривизны. Главный радиус ρ_1 с центром C_1 определяет радиальную кривизну в плоскости XZ для точки A ; вторая тангенциальная кривизна получена вращением радиуса ρ_2 с центром в C_2 и проходящей через точку A . Таким образом, ρ_2 описывает окружность с радиусом r .

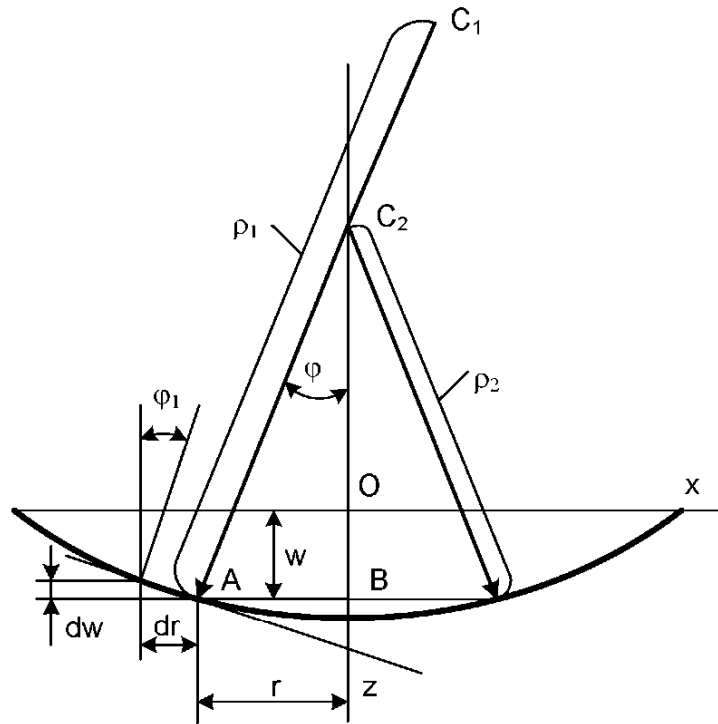


Рис. 1

Начало координат поместим в точку O.

Через точку A проведем касательную с углом наклона φ , который определяет угол поворота сечения пластины. При некотором приращении r на dr прогиб w изменится на dw .

Тогда $\frac{dw}{dr} = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$. Кривизна в сопротивлении материалов равна второй производной прогиба, $\frac{1}{\rho_1} = -\frac{d^2 w}{dr^2}$ (знак минус принят в связи с противоположно направленными прогибом и центром кривизны), следовательно,

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr} \quad (1)$$

Выразим радиус кривизны ρ_2 через угол φ и смещение r . Из треугольника ABC_2 имеем: $\frac{r}{\rho_2} = \sin \varphi \approx \varphi$. Или $\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varphi}{r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr}$.

(2)

1.2. Определение напряжений σ_r и σ_t

На основании закона Гука для плоского напряженного состояния относительные деформации могут быть выражены как

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_t}{E}; \quad (3)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E}. \quad (4)$$

Примечание: На площадках, параллельных срединной поверхности для многих случаев нагружения ($\sigma_z = 0$), кроме сосредоточенной центральной силы.

Относительные удлинения в радиальном и тангенциальном направлениях равны: $\varepsilon_r = \frac{z}{\rho_r}$ и $\varepsilon_t = \frac{z}{\rho_t}$ (см. чистый изгиб прямых стержней [1]).

Подставим в уравнения (3) и (4) ε_r и ε_t , с условиями (1), (2). Определим напряжения σ_r и σ_t :

$$\sigma_r = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right); \quad (5)$$

$$\sigma_t = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \left(\frac{\varphi}{r} + \mu \frac{d\varphi}{dr} \right). \quad (6)$$

Напряжения σ_r и σ_t линейно зависят от координаты Z (см. рис. 2).

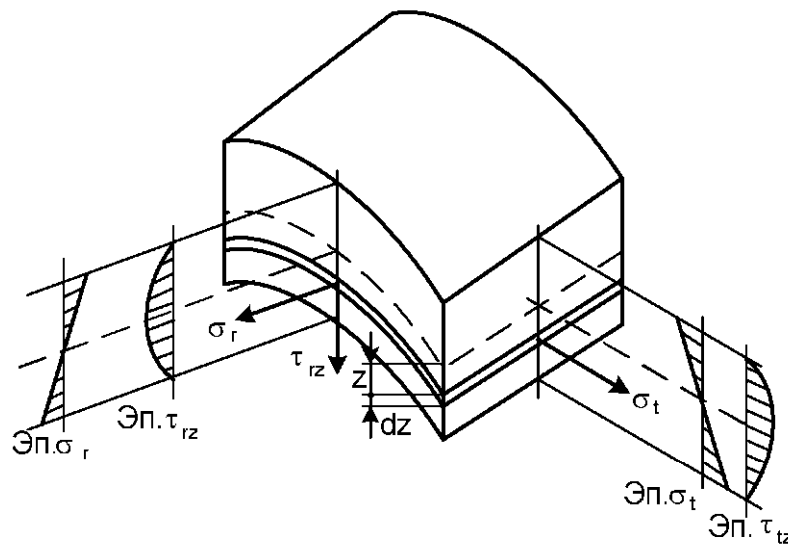


Рис. 2

Кроме нормальных напряжений возникают касательные напряжения τ_{rz} перпендикулярные срединной поверхности. Напряжения распределены по параболическому закону (см. поперечный изгиб прямых стержней [1]). Роль касательных напряжений невелика ввиду незначительной толщины пластины h по отношению к диаметру и много меньше нормальных. Однако равнодействующей касательных напряжений – поперечной силой $Q = \tau_{rz} \cdot r \cdot d\varphi \cdot h$ пренебрегать нельзя, ибо она играет важную роль в уравнениях равновесия элемента пластины (см. рис. 3, а).

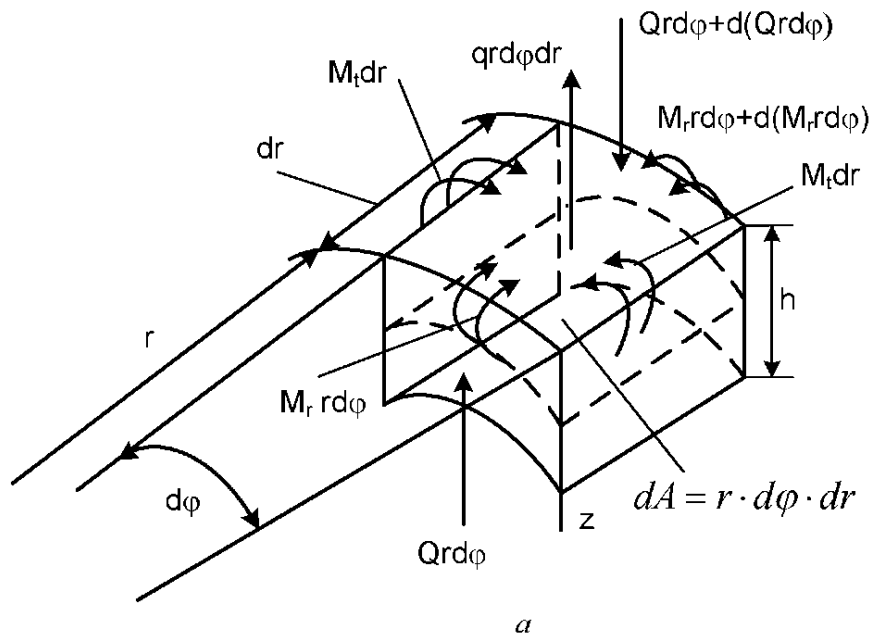


Рис. 3

1.3. Определение радиального и тангенциального моментов

При интегрировании по площади граней элемента пластины нормальные напряжения можно привести к распределенным изгибающим моментам M_r и M_t , а касательные – к поперечной распределенной силе Q . Размерности распределенных моментов и силы – Нм/м и Н/м, соответственно.

Момент в радиальном направлении представим в виде интеграла:

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r \cdot z \cdot dz. \quad (7)$$

Интегрируем (7) с учетом (5)

$$\begin{aligned} M_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E \cdot z^2}{1 - \mu^2} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right) dz = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right) \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \\ &= \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right) = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость.

Аналогично поступим с моментом в окружном направлении:

$$M_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t \cdot z \cdot dz. \quad (9)$$

$$\text{Или, с учетом (6), } M_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + \mu \frac{d\varphi}{dr} \right), \quad (10)$$

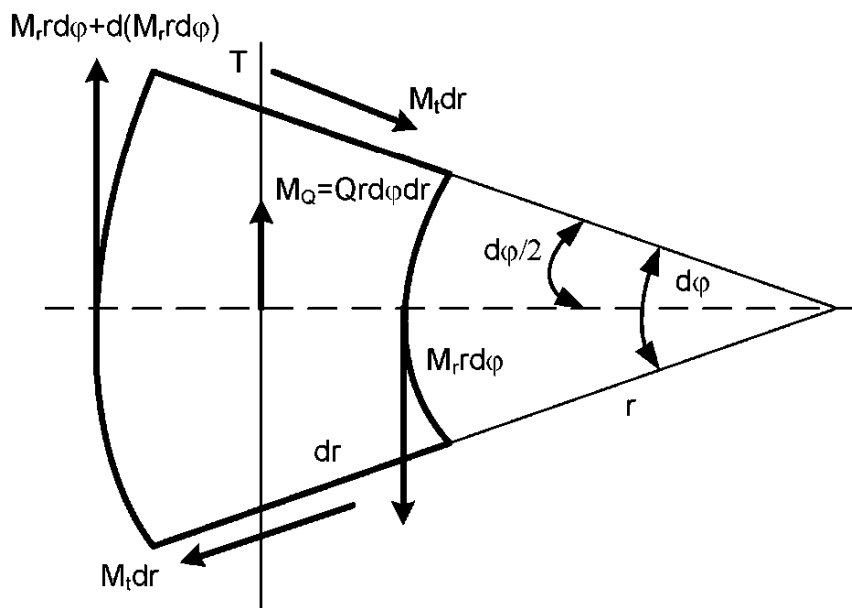
Уравнения (5), (6), (8) и (10) определяют напряжения и моменты по функции φ , характеризующей угол поворота нормали к срединной плоскости изгиба ZOX . Функция φ пока не определена. Её можно определить из условия равновесия бесконечно малого элемента пластины (рис. 3 а).

Согласно рис. 3, а в окружных сечениях действуют поперечная сила $Q \cdot r \cdot d\varphi$ и момент $M_r \cdot r \cdot d\varphi$. В радиальных сечениях тангенциальные силы (в виду симметрии) отсутствуют и момент равен

$M_t \cdot dr$. При переходе на наружную грань с приращением радиуса на dr сила Q и момент M_r получают приращения $d(Q \cdot r \cdot d\varphi)$ и $d(M_r \cdot r \cdot d\varphi)$.

1.4. Определение прогибов и углов поворота

Для составления уравнения равновесия моменты изобразим в виде векторов (рис. 3, б). Проведем ось T через середину элемента пластины перпендикулярно линии симметрии. Величиной приращения поперечной силы $d(Q \cdot r \cdot d\varphi)$ как функцией второго порядка малости пренебрегаем. Тогда момент от пары сил Q вокруг оси T сведем к $M_Q = Q \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr$, где dr – плечо.



б
Рис. 3

Спроецируем векторы моментов на ось T , считая $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$:

$$\Sigma T = Q \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr + (M_r + dM_r)(r + dr)d\varphi - M_t \cdot dr \cdot \frac{d\varphi}{2} - M_t \cdot dr \cdot \frac{d\varphi}{2} - M_r \cdot r \cdot d\varphi = 0.$$

После сокращения на $d\varphi$ и отбрасывания произведения $dM_r \cdot dr$ (величина второго порядка малости), получим $Q \cdot r \cdot dr + M_r \cdot dr + dM_r \cdot r - M_t \cdot dr = 0$. При умножении на $\frac{1}{r \cdot dr}$ и разделении слагаемых, имеем:

$$\frac{1}{r}(M_r - M_t) + \frac{dM_r}{dr} = -Q.$$

С учетом (8) и (10), а также $\frac{dM_r}{dr} = D \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\mu \cdot \varphi}{r^2} \right)$, окончательно принимаем: $D \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} = -Q \right)$, или

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{Q}{D}, \quad (11)$$

где $Q = \frac{\int_0^{r_1} q_{r_1} \cdot 2\pi \cdot r_1 dr_1}{2\pi \cdot r_1}$ – погонная поперечная сила в круговом сечении радиусом r_1 ; q_{r_1} – распределенная нагрузка на площади $\pi \cdot r_1^2$.

Выражение (11) определяет углы поворота нормалей в сечениях r к срединной поверхности пластины.

Считая $\varphi = -\frac{dw}{dr}$, уравнение (11) представим выражением

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D}. \quad (12)$$

Уравнение (12) – дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности осесимметрично изогнутой пластины.

2. Примеры расчета круглых пластин

2.1. Осесимметричная пластина с распределенной загрузкой и сосредоточенной силой в центре

Вырежем из круглой пластины элемент радиусом r и загрузим распределенной нагрузкой q с дополнительной центральной силой F (см. рис. 4).

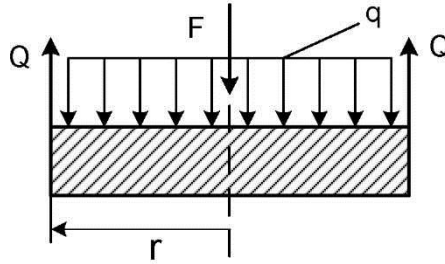


Рис. 4

Произведем преобразование левой части уравнения (11).

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi}{dr} r + \varphi \right) \right) = \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(\varphi \cdot r)}{dr} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Погонная сила Q в радиусном сечении r составляет $Q \cdot 2\pi \cdot r$ и является реакцией внешнего нагружения в этом сечении $F + q \cdot \pi \cdot r^2$. Составим уравнение равновесия сил:

$$\sum F_z = Q \cdot 2\pi \cdot r - F - q \cdot \pi \cdot r^2 = 0, \text{ или } Q = \frac{F}{2\pi \cdot r} + \frac{q \cdot r}{2}. \quad (2.2)$$

В выражение (11) подставим (2.1) и (2.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(\varphi \cdot r)}{dr} \right) &= - \left(\frac{F}{2\pi \cdot r} + \frac{q \cdot r}{2} \right) / D \text{ или} \\ d \left(\frac{1}{r} \frac{d(\varphi \cdot r)}{dr} \right) &= - \frac{F \cdot dr}{2\pi \cdot r D} - \frac{q \cdot r}{2D} dr. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Дважды проинтегрируем (2.3) по dr , получим уравнение углов поворота нормалей к срединной изогнутой поверхности пластины для данной схемы.

$$\begin{aligned} \int d \left(\frac{1}{r} \frac{d(\varphi \cdot r)}{dr} \right) &= \int \left(- \frac{F \cdot dr}{2\pi \cdot r D} - \frac{q \cdot r}{2D} dr \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{d(\varphi \cdot r)}{dr} \right) = \\ &= - \frac{F}{2\pi \cdot D} \ln r - \frac{q}{4D} \cdot r^2 + C_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Умножим (2.4) на $r \cdot dr$

$d(\varphi \cdot r) = -\frac{F}{2\pi \cdot D} r \cdot \ln r \cdot dr - \frac{q}{4D} r^3 \cdot dr + C_1 \cdot r \cdot dr$. Интеграл данного выражения

$$\int d(\varphi \cdot r) = \int \left(-\frac{F}{2\pi \cdot D} r \cdot \ln r \cdot dr - \frac{q}{4D} r^3 \cdot dr + C_1 \cdot r \cdot dr \right)^* = \varphi \cdot r =$$

$$= -\frac{F}{8\pi \cdot D} r^2 (2 \ln r - 1) - \frac{q}{16D} \cdot r^4 + C_1 \cdot \frac{r^2}{2} + C_2. \quad (2.5)$$

Умножив (2.5) на $1/r$, имеем уравнение углов наклона нормали к изогнутой поверхности пластины

$$\varphi = -\frac{F}{8\pi \cdot D} r (2 \ln r - 1) - \frac{q}{16D} \cdot r^3 + C_1 \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (2.6)$$

Произведем замену $\varphi = -\frac{dw}{dr}$. Умножим обе части (2.6) на $(-dr)$.

$dw = \left(\frac{F}{8\pi \cdot D} r (2 \ln r - 1) + \frac{q}{16D} \cdot r^3 - C_1 \cdot \frac{r}{2} - \frac{C_2}{r} \right) dr$. Интеграл от dw/dr примет вид:

$$w = \int \left(\frac{F}{8\pi \cdot D} r (2 \ln r - 1) + \frac{q}{16D} \cdot r^3 - C_1 \cdot \frac{r}{2} - \frac{C_2}{r} \right) dr = \frac{F}{8\pi \cdot D} r^2 (\ln r - 1) +$$

$$+ \frac{q}{64D} \cdot r^4 - C_1 \cdot \frac{r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) определяет величину прогибов срединной поверхности пластины.

Примечание: Интегралы выражений:

$$\int r \ln r \cdot dr^* = \int \left(\frac{2r \ln r \cdot dr}{2} + \frac{r}{2} dr - \frac{r}{2} dr \right) = \frac{1}{2} \int \left(2r \ln r \cdot dr + \frac{r^2}{r} dr - r \cdot dr \right) =$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \ln r \cdot dr - \frac{r^2}{4} = \frac{1}{4} r^2 (2 \ln r - 1), \text{ так как } \frac{d}{dr} (r^2 \ln r) = 2r \ln r + \frac{r^2}{r}.$$

$$\int \underbrace{r(2 \ln r - 1) dr}_{\text{}} = 2 \int r \ln r \cdot dr - \int r \cdot dr = \frac{2r^2(2 \ln r - 1)}{4} - \frac{r^2}{2} = r^2 (\ln r - 1).$$

2.2. Пластина, с распределенной нагрузкой q защемленная по контуру

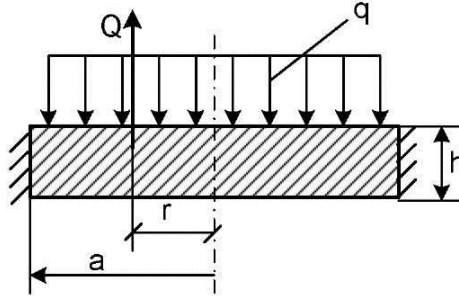


Рис. 5

В соответствии с рис. 5 в уравнениях (2.6) и (2.7) примем $F = 0$, получим значения углов поворота и прогибы, соответственно,

$$\varphi = -\frac{q}{16D} \cdot r^3 + C_1 \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}; \quad (2.8)$$

$$w = \frac{q}{64D} \cdot r^4 - C_1 \cdot \frac{r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3. \quad (2.9)$$

Граничные условия:

1. $r = 0$; $\varphi = 0$;
2. $r = a$; $\varphi = 0$;
3. $r = a$; $w = 0$,

где a – радиус внешнего контура.

Согласно уравнению (2.8) по первому и второму граничным условиям, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_{(r=0)} &= \left(-\frac{qr^3}{16D} + C_1 \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \right)_{r=0} = 0; \\ \varphi_{(r=a)} &= \left(-\frac{qa^3}{16D} + C_1 \cdot \frac{a}{2} + \frac{C_2}{a} \right)_{r=a} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $C_2 = 0$; $C_1 = \frac{q \cdot a^2}{8D}$. Окончательно уравнение (2.8) примет вид:

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} = \frac{qr}{16D} (a^2 - r^2). \quad (2.10)$$

Из преобразованного уравнения (2.9) вычислим C_3 , согласно третьему условию:

$$w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{q \cdot a^2 \cdot r^2}{32D} + C_3 = 0; \quad C_3 = \frac{q \cdot a^4}{64D}.$$

Окончательно уравнение прогибов (2.9) запишем как

$$w = \frac{q \cdot r^4}{64D} - \frac{q \cdot a^2 \cdot r^2}{32D} + \frac{q \cdot a^4}{64D} = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (2.11)$$

Максимальный прогиб при $r = 0$ (в центре) $w_{\max} = \frac{q \cdot a^4}{64D}$.

Определение значений изгибающих моментов

$$M_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right) \text{ и } M_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + \mu \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

Подставим в уравнения моментов выражение (2.10). При этом производная $d\varphi / dr$ равна:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{q \cdot a^2}{16D} - \frac{3q \cdot r^2}{16D} \right) = \frac{q}{16D} (a^2 - r^2); \quad \frac{\varphi}{r} = \frac{q}{16D} (a^2 - r^2).$$

$$\begin{aligned} M_r &= D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right) = D \left(\frac{q \cdot a^2}{16D} - \frac{3q \cdot r^2}{16D} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{q \cdot a^2 \cdot r}{16D} - \frac{\mu}{r} \cdot \frac{q \cdot r^3}{16D} \right) = \\ &= \frac{q}{16} (a^2 - 3r^2 + \mu \cdot a^2 - \mu \cdot r^2) = \frac{q}{16} (a^2(1 + \mu) - r^2(3 + \mu)); \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} M_t &= D \left(\frac{\varphi}{r} + \mu \frac{d\varphi}{dr} \right) = D \left(\frac{q \cdot a^2}{16D} - \frac{q \cdot r^2}{16D} + \mu \frac{q \cdot a^2}{16D} - \mu \frac{3q \cdot r^2}{16D} \right) = \\ &= \frac{q}{16} (a^2 - r^2 + \mu \cdot a^2 - 3\mu \cdot r^2) = \frac{q}{16} (a^2(1 + \mu) - r^2(1 + 3\mu)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

При $r = a$ найдем моменты в защемлении:

$$M_{r(r=a)} = -\frac{q \cdot a^2}{8}; \quad M_{t(r=a)} = -\mu \frac{q \cdot a^2}{8}. \quad (2.14)$$

$$\text{В центре пластинки, где } r = 0, \quad M_r = M_t = \frac{q \cdot a^2}{16} (1 + \mu). \quad (2.15)$$

Максимальное напряжение на контуре пластинки равно:

$$\sigma_{r \max} = -\frac{6M_r}{h^2} = \frac{3}{4} \frac{q \cdot a^2}{h^2}.$$

В соответствии с условием жесткости,

$$\sigma_{r \max} = \frac{6 \cdot M_{r \max}}{h^2} \leq [\sigma]_{\text{изг}} - 5\%, \text{ производим корректировку толщины сечения } h.$$

2.3. Пластина, с распределенной нагрузкой q свободно опертая по контуру

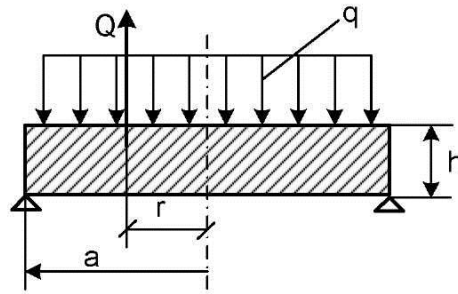


Рис. 6

Воспользуемся расчетами предшествующей схемы.

Согласно рис. 6 запишем граничные условия:

1. $r = 0$; $\varphi = 0$;
2. $r = a$; $M_r = 0$;
3. $r = a$; $w = 0$.

По первому условию в уравнении (2.8) – $C_2 = 0$. Следовательно,

$$\varphi = -\frac{q \cdot r^3}{16D} + C_1 \frac{r}{2}. \text{ Уравнение (2.9) примет вид:}$$

$$w = \frac{q \cdot r^4}{64D} - C_1 \frac{r^2}{4} + C_3.$$

Производная $\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{3q \cdot r^2}{16D} + \frac{C_1}{2}$; $\frac{\varphi}{r} = -\frac{q \cdot r^2}{16D} + \frac{C_1}{2}$. Запишем второе условие в развернутом виде:

$$M_r = -\frac{3q \cdot a^2}{16} + \frac{C_1 D}{2} - \mu \frac{q \cdot a^2}{16} + \mu \frac{C_1 D}{2} = 0; C_1 = \frac{q \cdot a^2}{8D} \left(\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right).$$

$$\text{По третьему условию } w = \frac{q \cdot a^4}{64D} - \frac{q \cdot a^4}{32D} \left(\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right) + C_3 = 0.$$

$$C_3 = \frac{q \cdot a^4}{64D} \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} \right).$$

Окончательно, уравнения (2.8) и (2.9) запишем как:

$$\varphi = -\frac{q \cdot r^3}{16D} + \frac{q \cdot a^2 \cdot r}{16D} \left(\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right) - \text{уравнение углов поворота;}$$

$$w = \frac{q}{64D} \left(r^4 - 2a^2 \cdot r^2 \left(\frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right) + a^4 \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} \right) \right) - \text{уравнение прогибов.}$$

$M_r = \frac{q}{16} (3 + \mu) (a^2 - r^2)$ – радиальный момент в произвольном сечении.

$$M_t = \frac{q}{16} (a^2 (3 + \mu) - r^2 (1 + \mu^2)) - \text{окружной момент.}$$

Радиальные и окружные нормальные напряжения определим по зависимостям $\sigma_r = \frac{6 \cdot M_r}{h^2}$ и $\sigma_t = \frac{6 \cdot M_t}{h^2}$. В соответствии с условием жесткости $\sigma_{r \max} = \frac{6 \cdot M_{r \max}}{h^2} \leq [\sigma]_{\text{изг}} - 5\%$ производим корректировку толщины сечения h .

2.4. Кольцевая пластинка, нагруженная распределенными моментами по контурам

Пластинка, свободно опертая по внешнему радиусу и нагруженная погонными моментами по обоим контурам (см. рис. 7). Перерезающая сила Q при этом равна нулю.

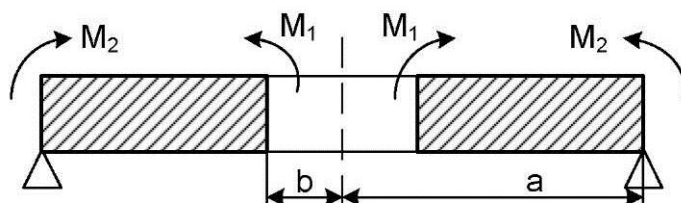


Рис. 7

Общее уравнение равновесия изогнутой срединной поверхности пластины примет вид

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(\varphi \cdot r)}{dr} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Интегрируя по dr , получим угол поворота сечения пластинки

$$\varphi = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}; \quad (2.17)$$

$$\text{Прогиб } w = -\frac{C_1 \cdot r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3 \text{ или } w = -\frac{C_1 \cdot r^2}{4} - C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3. \quad (2.18)$$

Граничные условия для расчетной схемы, (рис. 7):

1. $r = b$; $M_r = M_1$;
2. $r = a$; $M_r = M_2$;
3. $r = a$; $w = 0$.

Согласно выражению $M_r = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r}\right)$, определим значения слагаемых уравнения (2.17) $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}$; (2.19)

$$\frac{\varphi}{r} = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}. \quad (2.20)$$

Подставим граничные условия в уравнение радиального момента, получим $D\left(\frac{C_1}{2}(1+\mu) - \frac{C_2}{b^2}(1-\mu)\right) = M_1$; (2.21)

$$D\left(\frac{C_1}{2}(1+\mu) - \frac{C_2}{a^2}(1-\mu)\right) = M_2. \quad (2.22)$$

Совместное решение уравнений (2.21) и (2.22) определяет постоянные интегрирования C_1 и C_2 : $C_1 = \frac{2(M_2 a^2 - M_1 b^2)}{D(1+\mu)(a^2 - b^2)}$; (2.23)

$$C_2 = \frac{a^2 b^2 (M_2 - M_1)}{D(1-\mu)(a^2 - b^2)}. \quad (2.24)$$

Для определения C_3 (2.18), используем третье граничное условие. Тогда второе слагаемое превращается в нуль и

$$C_3 = \frac{C_1}{4} a^2 = \frac{a^2 (M_2 a^2 - M_1 b^2)}{2D(1+\mu)(a^2 - b^2)}. \quad (2.25)$$

Подставив постоянные C_1 , C_2 , C_3 в (2.18), получим уравнения углов поворота и прогибов в общем виде

$$\varphi = \frac{(M_2 \cdot a^2 - M_1 \cdot b^2) \cdot r}{D(1+\mu)(a^2 - b^2)} + \frac{a^2 \cdot b^2 (M_2 - M_1)}{D(1-\mu)(a^2 - b^2)} \cdot \frac{1}{r}; \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} w = & -\frac{(M_2 \cdot a^2 - M_1 \cdot b^2) \cdot r^2}{D(1+\mu)(a^2 - b^2)} - \frac{a^2 \cdot b^2 (M_2 - M_1)}{D(1-\mu)(a^2 - b^2)} \cdot \ln \frac{r}{a} + \\ & + \frac{a^2 (M_2 \cdot a^2 - M_1 \cdot b^2)}{2D(1+\mu)(a^2 - b^2)} = \frac{(M_2 \cdot a^2 - M_1 \cdot b^2)}{2D(1+\mu)(a^2 - b^2)} (a^2 - 2r^2) + \\ & + \frac{a^2 \cdot b^2 (M_2 - M_1)}{D(1-\mu)(a^2 - b^2)} \cdot \ln \frac{r}{a}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Для определения постоянной C_3 в уравнение (2.18) подставим C_1 и C_2 при $r = a$ $w = -\frac{C_1 \cdot a^2}{4} - C_2 \ln \frac{a}{a} + C_3 = 0$. Таким образом,

$$C_3 = \frac{C_1 \cdot a^2}{4}. \quad (2.28)$$

Радиальный и окружной моменты с учетом (2.26) равны

$$M_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right); \quad (2.29)$$

$$M_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + \mu \frac{d\varphi}{dr} \right). \quad (2.30)$$

Радиальные и окружные нормальные напряжения определим по зависимостям $\sigma_r = \frac{6 \cdot M_r}{h^2}$ и $\sigma_t = \frac{6 \cdot M_t}{h^2}$. В соответствии с условием жесткости $\sigma_{r \max} = \frac{6 \cdot M_{r \max}}{h^2} \leq [\sigma]_{\text{изг}} - 5\%$ производим корректировку толщины сечения h .

В частном случае, когда $M_2 = 0$, C_1 , C_2 , C_3 соответственно равны: $C_1 = -\frac{2b^2 \cdot M_1}{D(1+\mu)(a^2-b^2)}$; $C_2 = -\frac{a^2 b^2 \cdot M_1}{D(1-\mu)(a^2-b^2)}$;

$$C_3 = -\frac{a^2 b^2 \cdot M_1}{2D(1+\mu)(a^2-b^2)}.$$

Уравнения углов поворота нормалей к срединной линии пластины и ее прогиб, в общем виде, имеют следующие выражения:

$$\varphi = \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot (a^2 - b^2)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \frac{r}{a^2} \right); \quad (2.31)$$

$$w = \frac{b^2 M_1}{2D(1+\mu) \cdot (a^2 - b^2)} (a^2 - r^2) + \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot (a^2 - b^2)} \ln \frac{r}{a}. \quad (2.32)$$

2.5. Кольцевая пластина, защемленная по внутреннему контуру с распределенной нагрузкой

Определим действие погонной силы $Q \cdot 2\pi \cdot r$ в произвольном сечении пластины радиуса r (см. рис.8). С учетом неподвижности центрального стержня диаметром $2b$ усилия от внешнего воздействия равны: $Q \cdot 2\pi \cdot r = q \cdot \pi (a^2 - b^2) + q \cdot \pi \cdot b^2$. Последнее слагаемое

показывает противодействие распределенной нагрузки на площади неподвижного стержня. Тогда

$$Q = \frac{q \cdot \pi(a^2 - b^2) + q \cdot \pi \cdot b^2}{2\pi \cdot r} = \frac{q \cdot a^2}{2r}.$$

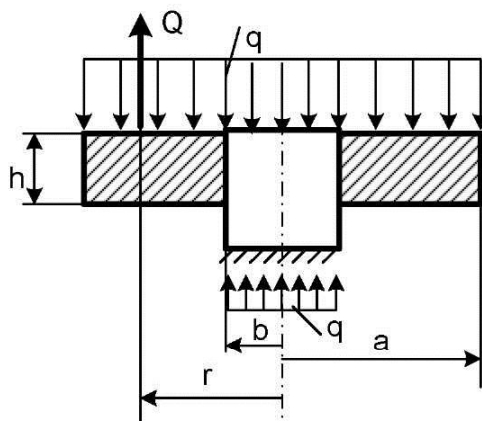


Рис. 8

Общее уравнение равновесия изогнутой срединной поверхности пластины примет вид

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(\varphi \cdot r)}{dr} \right) = -\frac{q \cdot a^2}{2rD}. \quad (2.33)$$

Произведем преобразования, аналогичные 2.6 (без учета первого слагаемого), получим уравнения углов поворота и прогибов пластины:

$$\varphi = -\frac{q \cdot a^2 \cdot r}{8D} (2 \ln r - 1) + \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}; \quad (2.34)$$

$$w = \frac{q \cdot a^2 \cdot r^2}{8D} (\ln r - 1) - \frac{C_1 \cdot r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3. \quad (2.35)$$

Граничные условия, (см. рис. 8):

1. $r = b$; $\varphi = 0$;
2. $r = a$; $M_r = 0$;
3. $r = b$; $w = 0$.

Определение постоянных интегрирования C_1 и C_2 по условиям

$$1 \text{ и } 2: \varphi = -\frac{q \cdot a^2 \cdot b}{8D} (2 \ln b - 1) + \frac{C_1}{2} b + \frac{C_2}{b} = 0; \quad (2.36)$$

$$M_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right) = -\frac{q \cdot a^3}{8} (2 \ln a (1 + \mu)(1 - \mu)) + \frac{C_1 D}{2} (1 + \mu) - \frac{C_2 D}{a^2} (1 - \mu) = 0, \quad (2.37)$$

$$\text{где } \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{q \cdot a^2}{8D} (2 \ln r + 1) + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}; \quad (2.38)$$

$$\frac{\varphi}{r} = -\frac{q \cdot a^2}{8D} (2 \ln r - 1) + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}. \quad (2.39)$$

Совместным решением (2.36) и (2.37) определяем

$$C_1 = \frac{q \cdot a^2}{4D} \cdot \frac{(a^2 (2 \ln a (1 + \mu) + 1 - \mu) + b^2 (2 \ln b - 1)(1 - \mu))}{a^2 (1 + \mu) + b^2 (1 - \mu)}, \quad (2.40)$$

$$C_2 = \frac{q \cdot a^2 \cdot b^2}{4D} \cdot (2 \ln b - 1) - C_1 \cdot \frac{b^2}{2}. \quad (2.41)$$

По третьему условию, при известных C_1 и C_2 , находим C_3 :

$$C_3 = \frac{q \cdot a^2 \cdot b^2}{8D} (2 \ln b - 1) - \frac{C_1}{4} b^2 + C_2 \ln b. \quad (2.42)$$

Определение значений изгибающих моментов

$$M_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu \frac{\varphi}{r} \right); \quad (2.43)$$

$$M_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + \mu \frac{d\varphi}{dr} \right). \quad (2.44)$$

Подставим (2.38) и (2.39) в уравнения моментов с учетом известных C_1 , C_2 , (согласно (2.40), (2.41)), построим эпюры моментов.

Определение значений прогибов пластины

По формуле $w = \frac{q \cdot a^2 \cdot r^2}{8D} (\ln r - 1) - \frac{C_1 \cdot r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3$, при определенных ранее C_1 , C_2 и C_3 , строим эпюру прогибов.

Радиальные и окружные нормальные напряжения определим по зависимостям $\sigma_r = \frac{6 \cdot M_r}{h^2}$ и $\sigma_t = \frac{6 \cdot M_t}{h^2}$. В соответствии с условием жесткости $\sigma_{r \max} = \frac{6 \cdot M_{r \max}}{h^2} \leq [\sigma]_{\text{изг}} - 5\%$ производим корректировку толщины сечения h .

Вопросы для самопроверки

1. Какое тело называется тонкой пластиной?
2. Что такое срединная поверхность (плоскость)?
3. Формы контура пластины?
5. Гипотезы Кирхгофа, определяющие инженерную теорию изгиба пластин?
6. Какие напряжения приняты при изгибе круглых пластин?
7. Моменты изгибающие, возникающие при изгибе?
8. Углы и прогибы при изгибе пластин, их определение?
9. Граничные условия для расчетных схем закрепления пластин?
10. Как определяют правую часть дифференциальных уравнений углов поворота срединных поверхностей (согласно расчетным схемам)?
11. В чем заключается проверочный расчет круглой пластины?

Библиографический список

1. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. Уч. пособие для студентов вузов. – М.: Машиностроение, 1973.
2. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки: Пер. с англ./ Под ред. Э.И. Григлюка. – М.: Наука, 1982.
3. Искрицкий Д.Е. Строительная механика элементов машин. – Л.: Судостроение, 1969.
4. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Уч. курс. – СПб.: Питер, 2005.
5. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad. – СПб.: БХВ – Петербург, 2004.
6. Папкович П.Ф. Тр. По строительной механике корабля в 4-х томах. Т. 3. Сложный изгиб стержней и изгиб пластин./ Под общ. Ред. В.В. Екимова. – Л. Судостроение, 1962.
7. Погорелов В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций. – СПб.: БХВ – Петербург, 2007.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966.

3. Численный пример расчета в среде MathCAD

Пластина, с распределенной нагрузкой q
защемленная по контуру (по рис. 5)

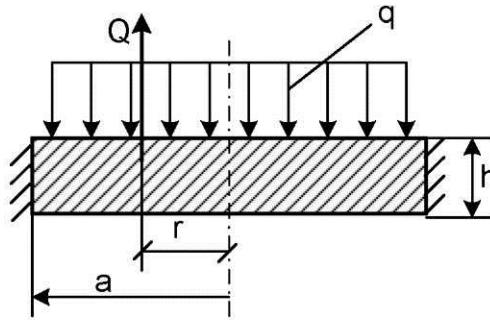


Рис. 5

Исходные данные:

Распределенная нагрузка $q = 40$ кН/м

1. Толщина $h = 0.003$ м;
2. Радиус $a = 0.15$ м;
3. Коэффициент Пуассона $\mu = 0.25$;
4. Модуль упругости $E = 200$ ГПа.

Примечание: В виду симметрии эпюры изображены на радиусе.

Основные формулы

Угол поворота нормалей сечений к срединной поверхности пластины $\varphi = -\frac{dw}{dr} = \frac{qr}{16D}(a^2 - r^2)$, рад – (рис. 5.1).

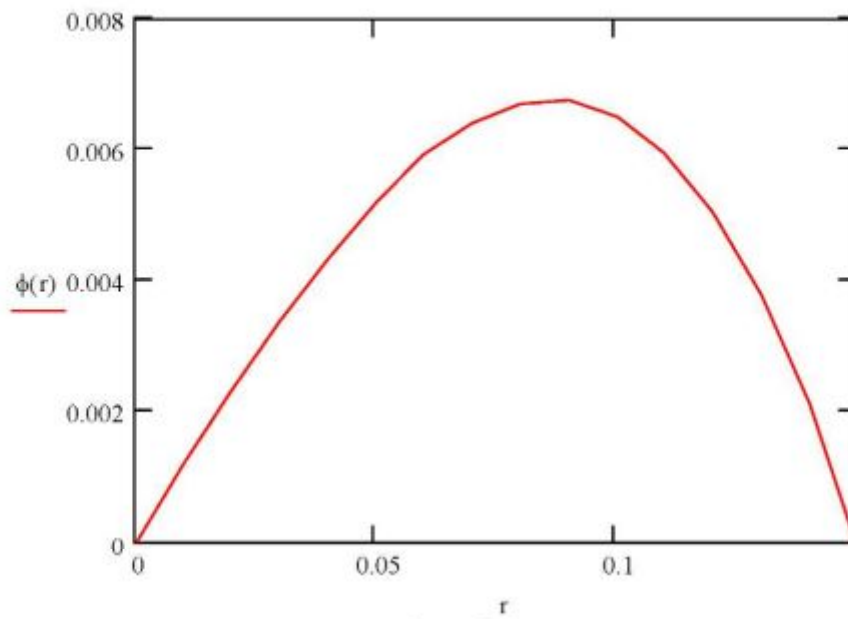


Рис. 5.1

Прогиб пластины $w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2$, м –

(рис. 5.2).

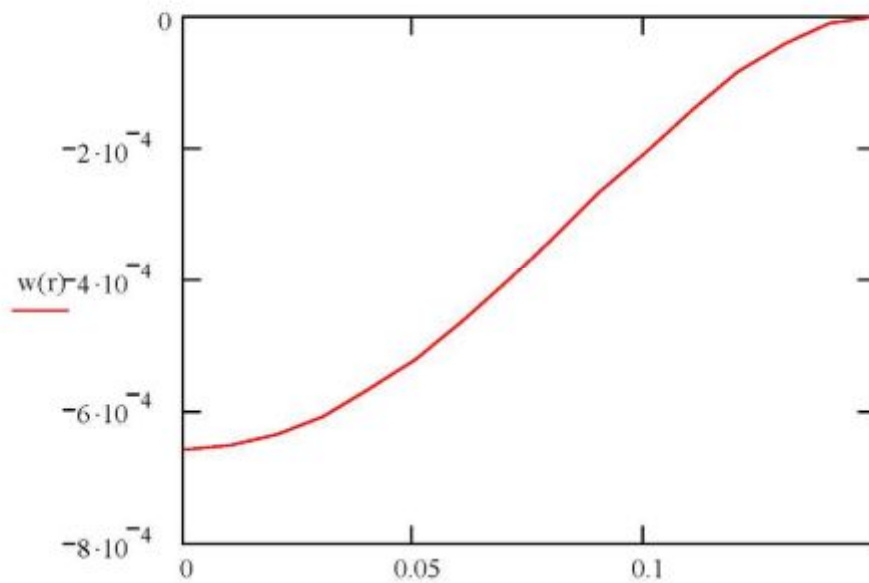


Рис. 5.2

Момент изгибающий радиальный $M_r = \frac{q}{16} (a^2(1 + \mu) - r^2(3 + \mu))$, Нм/м – (рис. 5.3).

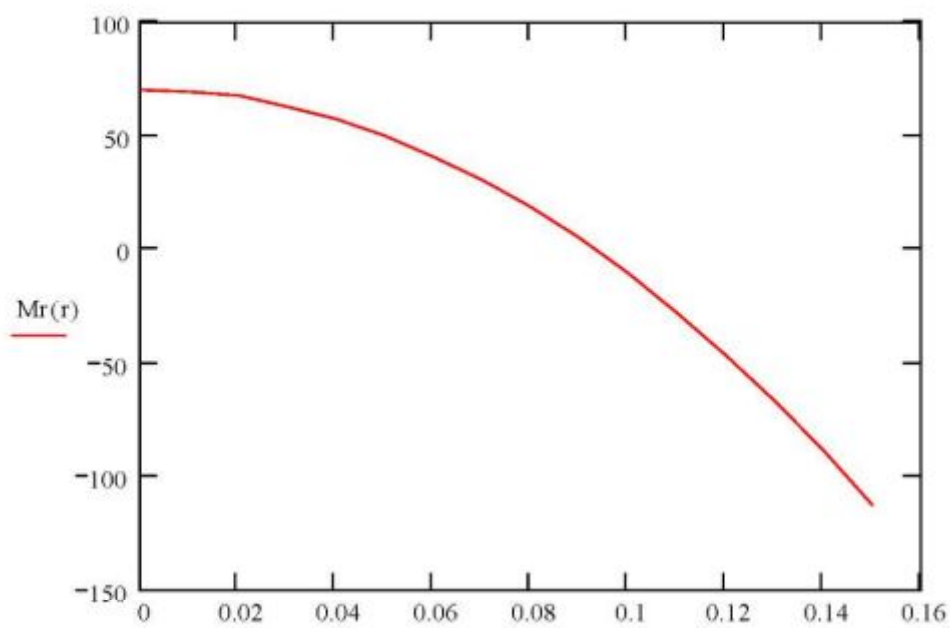


Рис. 5.3

Момент изгибающий тангенциальный, Нм/м – (рис. 5.4)

$$M_t = \frac{q}{16} (a^2(1 + \mu) - r^2(1 + 3\mu)), \text{ Нм}$$

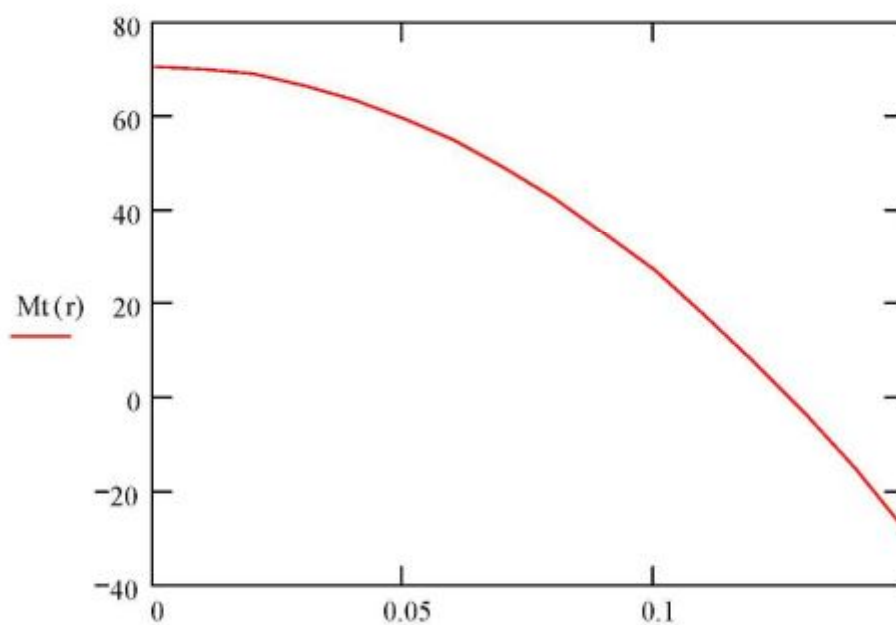


Рис. 5.4

Напряжение радиальное $\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2}$, Н/м² – (рис. 5.5).

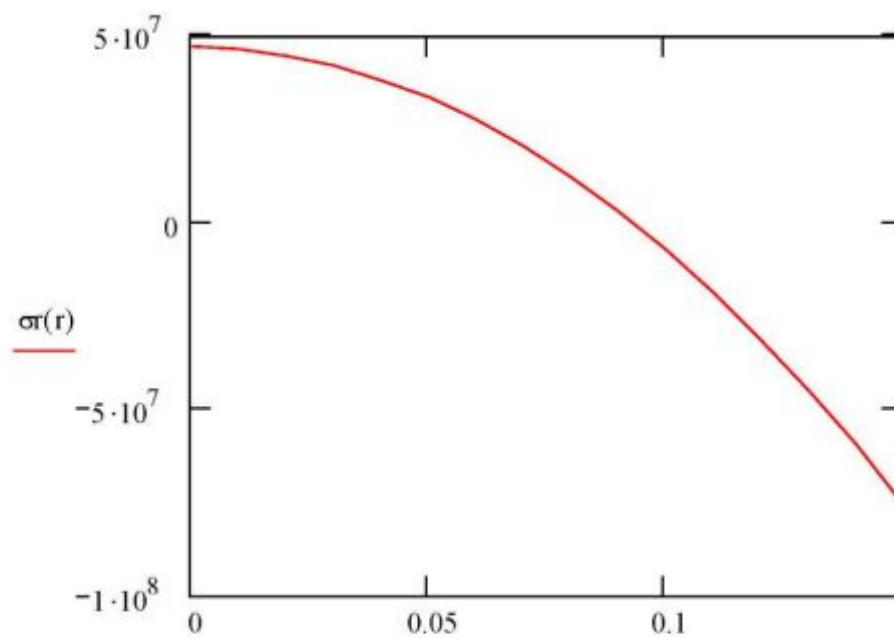


Рис. 5.5^r

Напряжение тангенциальное, $\sigma_t = \frac{6M_t}{h^2}$, Н/м² – (рис. 5.6).

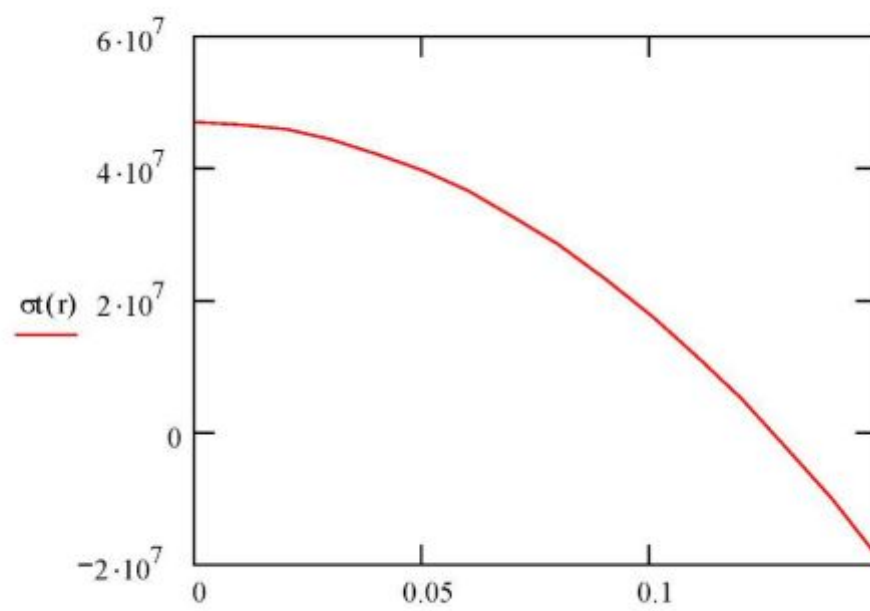
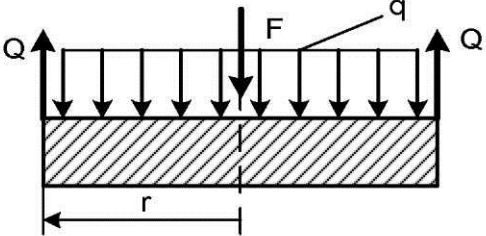
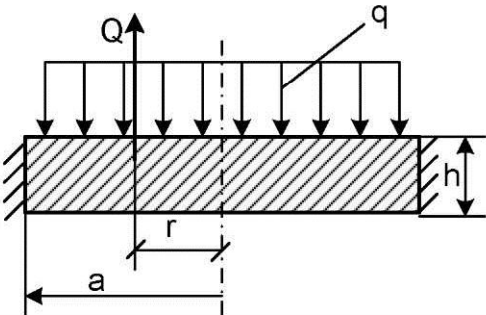
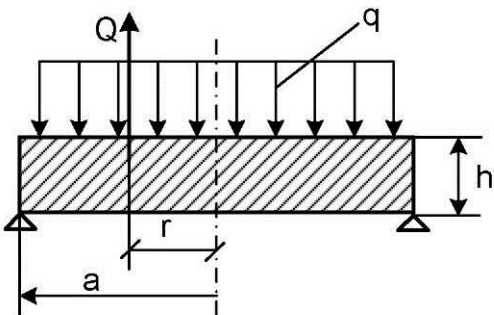
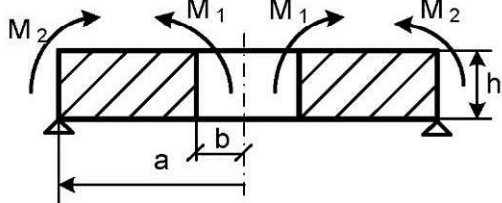
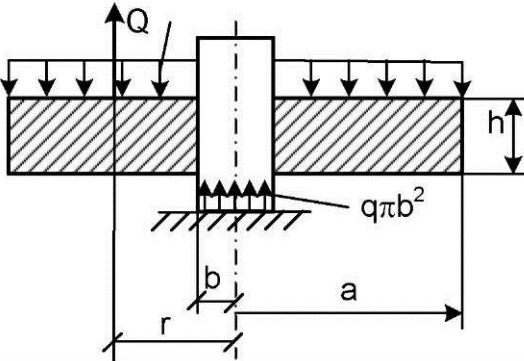


Рис. 5.6^r

Расчетные схемы пластин

Таблица 1

№ п/п	Схема	Нагрузка $Q(r)$	Формулы	Граничные условия
1		$F + \frac{q \cdot r}{2}$	(2.6); (2.7)	Общие условия
2		$q \frac{r}{2}$	(2.10); (2.11); (2.12); (2.13)	$r = 0; \varphi = 0;$ $r = a; \varphi = 0;$ $r = a; w = 0$
3		$q \frac{r}{2}$	(2.10); (2.11); (2.12); (2.13)	$r = 0; \varphi = 0;$ $r = a; M_r = 0;$ $r = a; w = 0$
4		M_1 M_2	(2.26); (2.27); (2.29); (2.30)	1. $r = b; M_r = M_1;$ 2. $r = a; M_r = M_2;$ 3. $r = a; w = 0$
5		$\frac{qa^2}{2r}$	(2.34); (2.35); (2.43); (2.44)	$r = b; \varphi = 0$ $r = a; M_r = 0$ $r = b; \varphi = 0$

Исходные данные

Таблица 2

№ вар.	Исходные данные					
	Схема	q кН/м ² M ₁ ; M ₂ кНм/м	h м	a м	μ	E ГПа
1	2	40	0,004	0,15	0,25	210
2	3	35	0,005	0,18	0,25	210
3	5	30	0,003	0,16	0,3	200
4	2	25	0,0025	0,14	0,3	200
5	4	0,4; 0,2	0,006	0,12	0,25	210
6	4	3; 2	0,0045	0,13	0,25	200
7	2	32	0,003	0,10	0,3	200
8	3	36	0,004	0,12	0,25	210
9	5	44	0,006	0,16	0,25	210
10	2	46	0,009	0,18	0,3	200
11	4	0,4; 0,5	0,008	0,18	0,3	200
12	5	20	0,003	0,12	0,25	210
13	2	25	0,003	0,13	0,3	210
14	3	28	0,0025	0,12	0,3	200
15	4	0,4; 0,2	0,005	0,13	0,3	200
16	5	35	0,006	0,14	0,25	210
17	3	38	0,006	0,15	0,25	200
18	2	35	0,007	0,18	0,3	200
19	4	0,3; 0,2	0,008	0,19	0,3	210
20	5	45	0,008	0,20	0,25	200
21	3	35	0,006	0,15	0,25	200
22	2	30	0,005	0,15	0,3	210
23	4	0,4; 0,1	0,006	0,16	0,3	200
24	4	0,4; 0,2	0,007	0,14	0,25	200
25	5	30	0,005	0,15	0,3	210

Примечание: размер центрального защемления в схеме 5 равен $b = a/4$.

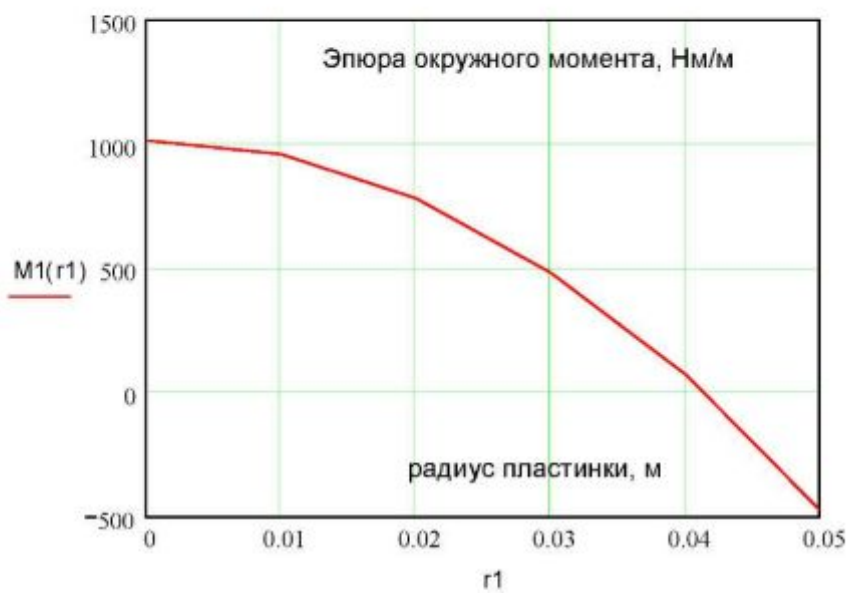
Решение задачи в среде MathCAD

Круглая пластина с распределенной нагрузкой,
защемленная по контуру

$$q := 5 \cdot 10^6 \quad a := 0.05 \quad r1 := 0, 0.01 \dots 0.05 \quad \mu := 0.3$$

$$M1(r1) := \frac{q \cdot [a^2(1 + \mu) - r1^2(1 + 3\mu)]}{16}$$

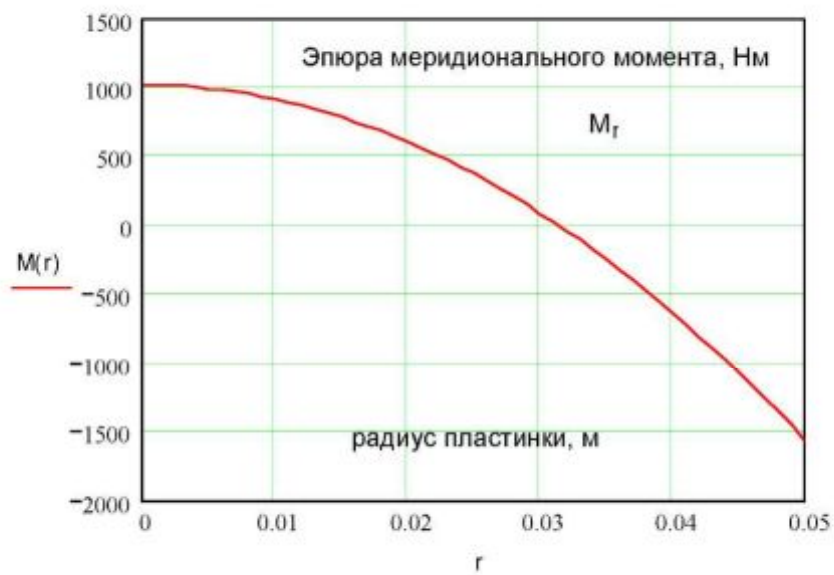
$r1 =$	$M1(r1) =$
0	$1.016 \cdot 10^3$
0.01	956.25
0.02	778.125
0.03	481.25
0.04	65.625
0.05	-468.75



$$q := 5 \cdot 10^6 \quad a := 0.05 \quad r := 0, 0.01 \dots 0.05 \quad \mu := 0.3$$

$$M(r) := \frac{q \cdot [a^2(1 + \mu) - r^2(3 + \mu)]}{16}$$

r =	M(r) =
0	1.016 · 10 ³
1 · 10 ⁻³	1.015 · 10 ³
2 · 10 ⁻³	1.012 · 10 ³
3 · 10 ⁻³	1.006 · 10 ³
4 · 10 ⁻³	999.125
5 · 10 ⁻³	989.844
6 · 10 ⁻³	978.5
7 · 10 ⁻³	965.094
8 · 10 ⁻³	949.625
9 · 10 ⁻³	932.094
0.01	912.5
0.011	890.844
0.012	867.125
0.013	841.344
0.014	813.5
0.015	783.594
0.016	751.625



Круглая пластина с защемлением по контуру

Определение прогиба в пластинке, м

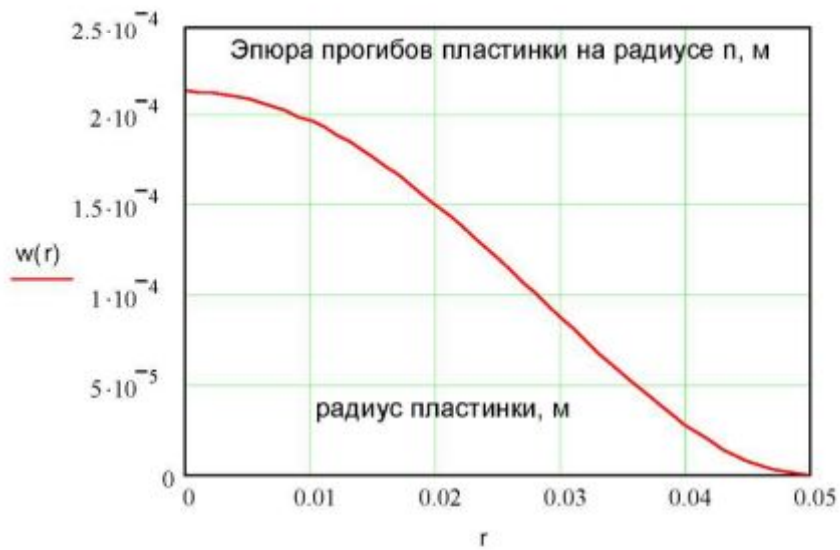
$$q := 5 \cdot 10^6 \quad a := 0.05 \quad r := 0, 0.01.. 0.05 \quad \mu := 0.3 \quad h := 0.005$$

$$E := 200 \cdot 10^9$$

$$D := E \cdot \frac{h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$$

$$w(r) := q \cdot \frac{(a^2 - r^2)^2}{64 \cdot D}$$

$r =$	$w(r) =$
0	$2.133 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$2.131 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-3}$	$2.126 \cdot 10^{-4}$
$3 \cdot 10^{-3}$	$2.117 \cdot 10^{-4}$
$4 \cdot 10^{-3}$	$2.106 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^{-3}$	$2.09 \cdot 10^{-4}$
$6 \cdot 10^{-3}$	$2.072 \cdot 10^{-4}$
$7 \cdot 10^{-3}$	$2.05 \cdot 10^{-4}$
$8 \cdot 10^{-3}$	$2.025 \cdot 10^{-4}$
$9 \cdot 10^{-3}$	$1.997 \cdot 10^{-4}$
0.01	$1.966 \cdot 10^{-4}$
0.011	$1.931 \cdot 10^{-4}$
0.012	$1.894 \cdot 10^{-4}$
0.013	$1.854 \cdot 10^{-4}$
0.014	$1.811 \cdot 10^{-4}$
0.015	$1.766 \cdot 10^{-4}$



Определение угла поворота в пластинке

$$r := 0, 0.001 .. 0.05$$

$$\phi(r) := q \cdot r \cdot \frac{(a^2 - r^2)}{16 \cdot D}$$

