

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Учебное пособие

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие составлено применительно к программам «Сопротивление материалов (спецкурс)» и «Теория упругости» для строительных специальностей высших учебных заведения: «Промышленное и гражданское строительство», «Мосты и транспортные туннели».

Название книги несколько необычно.

«Механика материалов и конструкций» представляет собой раздел прикладной механики, в котором изучается поведение твердых деформируемых тел при различных видах нагружения. Предметом изучения являются, как правило, напряжения, деформации и перемещения конструкций и их элементов. Исторически сложились такие названия соответствующих разделов прикладной механики, различающиеся, в частности, степенью идеализации расчетных моделей: «Сопротивление материалов», «Строительная механика», «Теория упругости, пластичности и ползучести». По мнению авторов, принятое название обобщает и точнее отражает содержание книги.

## ВВЕДЕНИЕ

Почти все конструкционные материалы обладают в какой-то мере свойством упругости. Тело является идеально – упругим, если после снятия вызвавших деформацию внешних сил, оно полностью восстанавливает первоначальную форму.

Основной задачей теории упругости является определение напряжений и перемещений в различных твердых телах. Эта же задача рассматривается и в курсе сопротивления материалов, где главным объектом изучения является стержень.

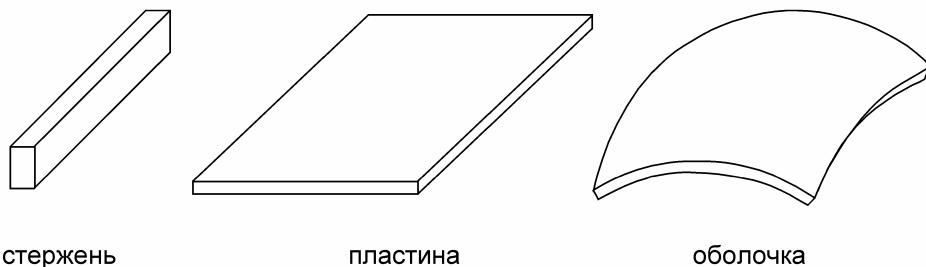


Рис. В.1

В курсе теории упругости рассматривают тела более сложной формы: диски, пластины, оболочки, массивы.

Для указанных тел чаще всего нет возможности получить простые формулы для определения напряжений, деформаций и перемещений. В то же время существуют общие пути решения задач, основанные на уравнениях, описывающих поведение упругой среды под нагрузкой. Эти уравнения (обычно дифференциальные) и методы их решения изучаются в курсе упругости, пластичности и ползучести.

Пластичность – свойство твердых тел при действии внешних сил изменять, не разрушаясь, свою форму и размеры и сохранять остаточные (пластические) деформации после устранения этих сил.

Ползучесть – способность материалов к медленному нарастанию во времени пластических деформаций при действии постоянной нагрузки.

Этими свойствами обладают как традиционные строительные материалы (дерево, бетон, металл при наличии высоких температур или напряжений) так и новые материалы, например полимеры.

В наше время, с усложнением форм строительных конструкций, развитием авиа – и ракетостроения роль методов теории упругости возросла. Сформулируем постановку задач теории упругости, а также основные допущения на которых она базируется.

Рассматриваются тела заданной формы, материал которых имеет известные физико-механические свойства. На тело действуют заданные нагрузки, наложены связи. Требуется найти напряжения, деформации и перемещения.

Будем считать справедливыми следующие допущения.

Материал тела представляет собой **сплошную однородную** среду. Такой важный материал, как сталь, если его рассмотреть под микроскопом, оказывается состоящим из кристаллов разных размеров и разной ориентации. Однако расположены они случайным образом. Пока геометрические размеры рассматриваемого тела достаточно велики по сравнению с размерами одного кристалла, предположение о сплошности и однородности выполняется с высокой степенью точности.

Упругие характеристики кристаллов в разных направлениях могут различаться. Если кристаллы металла ориентированы случайным образом, то этот материал может рассматриваться как **изотропный**.

Если же благодаря, например, прокатке преобладает какая-то определенная ориентация кристаллов, упругие характеристики металла в разных направлениях становятся различными и следует учитывать его **анизотропию**. Примером анизотропного материала является древесина, механические свойства, которой вдоль волокон и поперек волокон различны.

**Деформации в точках тела считаются малыми.** Под действием нагрузок размеры тела существенно не меняются.

В курсе теории упругости предполагается, что материал **идеально упруг** и линейно деформируем (подчиняется закону Гука). Решение задач с учетом пластических и вязких свойств материала сложнее, и обычно опирается на решение аналогичных задач теории упругости.

# ГЛАВА 1

## АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

### 1.1. НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим изображенное на рис. 1.1 тело, находящееся в равновесии под действием внешних сил  $P_1, P_2, \dots, P_7$ . Говорят, что такое тело находится в *напряженном состоянии*. Для того, чтобы изучить внутренние силы, возникающие в этом теле, разделим его плоскостью  $mn$  на две части  $A$  и  $B$  и рассмотрим одну из этих частей, например, часть  $A$ . Эта часть находится в равновесии под действием внешних сил  $P_5, P_6, P_7$  и внутренних сил, равномерно распределенных по плоскости  $mn$ , и представляющих собой действие материала части  $B$  на материал части  $A$ .

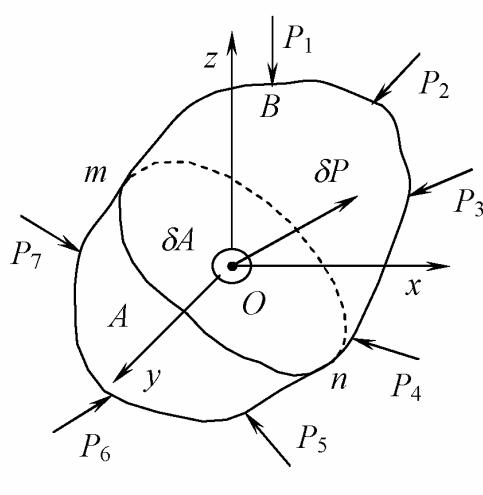


Рис. 1.1

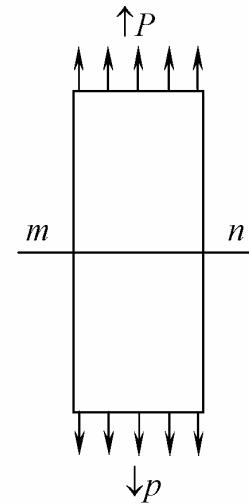


Рис. 1.2

Величина этих последних сил определяется их *интенсивностью* т.е. величиной силы на единицу площади плоскости, на которой они действуют. Эта интенсивность, обычно измеряемая в  $\text{Н}/\text{м}^2$  (или в Па), называется *напряжением*.

В простейшем случае, когда призматический стержень подвержен растяжению силами, равномерно распределенным по его концевым сечениям (рис. 1.2), напряжение в сечении *mn* можно найти, разделив полное значение силы *P* на площадь поперечного сечения *A*. В общем случае, представленном на рис. 1.1, напряжения по сечению *mn* распределены неравномерно. Для того, чтобы определить значение напряжения в некоторой точке *O* этой плоскости предположим, что силы, действующие на элементарной площадке  $\delta A$  в окрестности этой точки сводятся к равнодействующей  $\delta P$ . Назовем напряжением *p* в точке *O* сечения *mn* предел отношения

$$p = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta P}{\delta A}$$

при условии, что *A* стремится к нулю. Напряжение *p* есть вектор. Он может быть разложен на две составляющие: нормальное напряжение, перпендикулярное к площадке  $\delta A$  и касательное напряжение, действующее в плоскости площадки.

## 1.2. ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИЛ И НАПРЯЖЕНИЙ

Будем различать два вида внешних сил. Силы, распределенные по поверхности тела, такие как гидростатическое давление или давление одного тела на другое называются *поверхностными*. Эти силы, отнесенные к единице поверхности, обычно раскладываются на три составляющие, параллельные осям координат  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ . Силы, распределенные по объему тела, такие как гравитационные силы, магнитные силы и силы инерции (последние вводятся в рассмотрение при движении тел), называются *объемными*. Эти силы, отнесенные к единице объема, также раскладываются на три ортогональные составляющие, обозначаемые как *X*, *Y*, *Z*.

Нормальную составляющую вектора напряжений будем обозначать буквой  $\sigma$ , касательную – буквой  $\tau$ . Для того, чтобы зафиксировать направление плоскости, на которой действуют напряжения, буквы  $\sigma$  и  $\tau$  будут снабжаться индексами. Эти индексы, а также положительные направления напряжений показаны на рис. 1.3 и 1.4.

На рис. 1.3 изображен бесконечно малый элемент, вырезанный из тела плоскостями, перпендикулярными осям координат *x*, *y*, *z*. Нормальное напряжение считается положительным, когда оно вызывает растяжение и отрицательным, когда оно вызывает сжатие. Индекс *x* напряжения  $\sigma_x$  показывает, что напряжение действует на плоскость, нормальную к оси *x*. Для обозначения касательных напряжений используются два индекса: первый обозначает направление нормали к плоскости, второй – направление напряжения. За положительное направление составляющих касательного напряжения взято положительное направление осей координат, если растягивающее напряжение, действующее на ту же грань, совпадает с положительным направлением соответствующей оси.

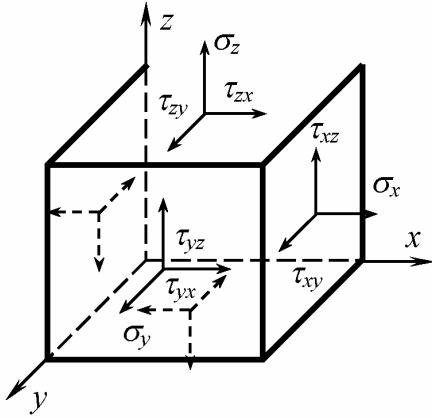


Рис. 1.3

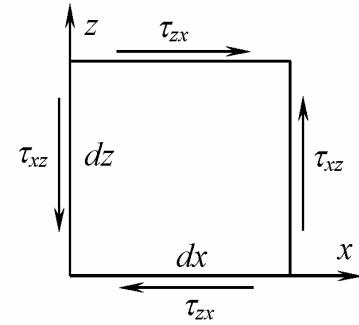


Рис. 1.4

Как видно из рис. 1.3 на гранях малого элемента с длиной ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  действуют три нормальных и шесть касательных напряжений, совокупность которых образует тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Если пренебречь объемными силами (а они малы по сравнению с поверхностными) и приращениями напряжений, то составляя уравнение равновесия для моментов относительно оси  $y$ , получим

$$\tau_{xz} dx dy dz - \tau_{zx} dx dy dz = 0.$$

Аналогичные уравнения можно записать и относительно осей  $x$  и  $z$ . Из этих трех уравнений получим

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.2)$$

Следовательно, тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали, и для определения напряженного состояния в произвольной точке тела достаточно иметь шесть составляющих напряжений

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}.$$

Если эти шесть составляющих известны, то напряжения на произвольной наклонной плоскости, проходящей через ту же самую точку, можно найти из уравнений равновесия следующим образом. Пусть  $O$  – некоторая точка тела, находящегося в напряженном состоянии (рис. 1.5).

Для того, чтобы найти напряжение на любой наклонной плоскости  $BCD$ , проходящей вблизи точки  $O$ , вырежем очень малый тетраэдр  $BCDO$ . Записывая уравнения равновесия, будем пренебрегать объемными силами. Если через

$A$  обозначить площадь грани  $BCD$ , то площади трех остальных граней тетраэдра перпендикулярных осям  $x$ ,  $y$  и  $z$

$$A_x = lA, \quad A_y = mA, \quad A_z = nA,$$

где через  $l$ ,  $m$  и  $n$  обозначены направляющие косинусы нормали  $N$

$$\cos(N, x) = l, \quad \cos(N, y) = m, \quad \cos(N, z) = n. \quad (1.3)$$

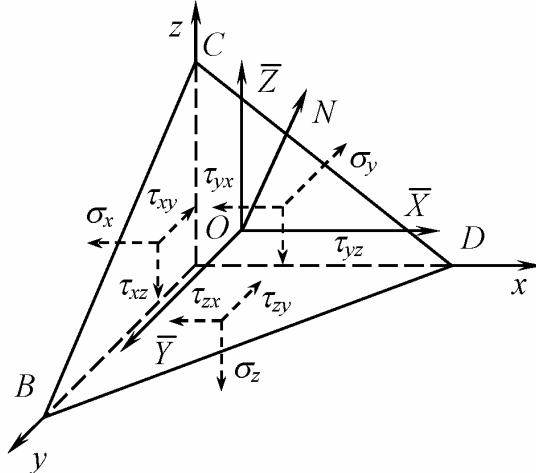


Рис. 1.5

Пусть  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  – три составляющие напряжения, действующего на наклонной грани  $BCD$ . Тогда составляющая в направлении оси  $x$  равна  $A\bar{X}$ . Уравнение проекций сил на ось  $x$  имеет вид

$$A\bar{X} - Al \sigma_x - Am \tau_{xy} - An \tau_{zx} = 0.$$

Аналогичные уравнения можно записать и для осей  $y$  и  $z$ . После сокращения на общий множитель  $A$  приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_{xl} + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n, \\ \bar{Y} &= \tau_{xyl} + \sigma_y m + \tau_{zy}n, \\ \bar{Z} &= \tau_{xzl} + \tau_{yz}m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

### 1.3. О ПОНЯТИИ ТЕНЗОРА. ИНДЕКСНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В механике много фундаментальных понятий связано с векторными величинами: сила, скорость, ускорение и т.д. Вектор в трехмерной системе координат можно представить в виде столбца

$$\{a\}^T = \{a_x, a_y, a_z\},$$

где  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  – три скалярные величины – проекции вектора на оси координат.

Для векторных величин определены аналитические операции: сложение, вычитание, умножение. Однако напряженное состояние в точке деформируемого тела нельзя описать с помощью векторной величины. Поэтому введено понятие тензора. Тензор характеризуется уже девятью скалярными величинами, которые записываются в виде матрицы (1.1).

Введенные здесь обозначения для компонент усилий, напряжений и далее для перемещений и деформаций, стали общепринятыми во многих странах, в особенности для инженерных расчетов. Нами они будут использоваться повсюду. Однако для сжатого представления более удобна и часто применяется система индексных обозначений. В этой системе для обозначения координат вместо  $x, y, z$  используются  $x_1, x_2, x_3$  или просто  $x_i$ .

Тензор напряжений в компактной записи будет таким

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \sigma_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Соотношения (1.2), которые сводят девять компонент напряжений к шести можно выразить в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i \neq j.$$

Действия над тензорами во многих случаях совпадают с действиями над матрицами, однако, не всегда. Кроме того, использование индексных обозначений требует дополнительных навыков и обычно не используется во многих разделах механики сплошной среды.

#### 1.4. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ИНВАРИАНТЫ НАПРЯЖЕНИЙ

Определим теперь нормальную составляющую напряжения  $\sigma_n$ , действующего на площадке  $BCD$ .

$$\sigma_n = \bar{X}l + \bar{Y}m + \bar{Z}n. \quad (1.5)$$

Подставляя сюда выражение (1.4) получим

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{zy}mn + 2\tau_{zx}nl. \quad (1.6)$$

Изменение  $\sigma_n$  с изменением направления нормали можно геометрически представить таким образом. Отложим из точки  $O$  (см. рис. 1.5) в направлении нормали  $N$  вектор  $r$

$$r = k/\sqrt{|\sigma_n|}, \quad (1.7)$$

где  $k$  – произвольно выбранная постоянная. Координаты конца этого вектора будут равны

$$x = lr, \quad y = mr, \quad z = nr,$$

откуда

$$l = \frac{x}{r}, \quad m = \frac{y}{r}, \quad n = \frac{z}{r}.$$

Подставляя эти значения направляющих косинусов в (1.6) и учитывая соотношение (1.7) получим

$$k^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy}xy + 2\tau_{yz}yz + 2\tau_{zx}zx. \quad (1.8)$$

Если плоскость  $BCD$  поворачивать вокруг точки  $O$ , то конец вектора  $r$  будет все время лежать на поверхности второго порядка, описываемой уравнением (1.8). Эта поверхность полностью определяется напряженным состоянием в точке  $O$  и не зависит от выбора осей координат  $x, y, z$ . Из геометрии известно, что для поверхности второго порядка всегда можно выбрать такие направления осей  $x, y, z$ , что коэффициенты при произведениях координат обращаются в нуль. Это означает, что всегда можно найти такие три взаимно перпендикулярные плоскости, для которых  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , обращаются в нуль.

Эти плоскости называются главными плоскостями, а напряжения, действующие на них – главными напряжениями. Соответствующие оси координат называются главными осями.

Допустим, что площадка  $BCD$  является главной. Тогда нормальное напряжение  $\sigma$  на этой площадке – главное. Проекции этого напряжения на координатные оси  $x, y, z$  определяются равенствами

$$\bar{X} = \sigma l, \quad \bar{Y} = \sigma m, \quad \bar{Z} = \sigma n.$$

С другой стороны, согласно уравнений (1.4)

$$\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_{xl} + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n, \\ \sigma m &= \tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{zy}n, \\ \sigma n &= \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Представим систему уравнений (1.9) в виде

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Как видим, система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $l, m, n$  является однородной. Ненулевое решение системы уравнений (1.10) можно получить приравняв нулю определитель, составленный из её коэффициентов

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (1.11)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 - J_2 \sigma - J_3 = 0, \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ J_2 &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2, \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Три корня кубического уравнения (1.12) дают значения трех главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Подставляя каждое из этих напряжений в уравнения (1.10), используя два из них и зависимость (1.11), можно найти три системы направляющих косинусов для трех главных площадок.

Считая, что напряженное состояние задано, т.е. заданы главные напряжения и главные оси, мы можем описать его с помощью компонент напряжений в любой системе координат  $x, y, z$ . Вне зависимости от выбора ориентации осей уравнение (1.12) должно дать для  $\sigma$  те же корни. Следовательно, и коэффициенты этого уравнения должны быть всегда одними и теми же. Отсюда можно сделать вывод, что коэффициенты уравнения (1.12) инвариантны по отношению к повороту осей координат. Особенно просто первый  $J_1$ , второй  $J_2$  и третий  $J_3$  инвариантны тензора напряжений определяются через главные напряжения

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_2 = -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1, \quad J_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3. \quad (1.14)$$

Сам тензор напряжений в главных осях имеет вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Можно заключить, что напряженное состояние в точке вполне определяется главными напряжениями и ориентацией главных площадок.

## 1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Пусть через  $x, y, z$  обозначены главные оси, в силу чего  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения;  $l, m, n$  – направляющие косинусы некоторой заданной площадки.

Тогда квадрат полного напряжения на этой площадке равен

$$p^2 = \bar{Z}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2.$$

Нормальная составляющая полного напряжения равна

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (1.16)$$

Квадрат касательной составляющей определяется зависимостью

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \quad (1.17)$$

Для определения положения площадок, на которых действуют наибольшие касательные напряжения, необходимо исследовать функцию  $\tau$  на экстремум.

Исключив при помощи (1.11) один из направляющих косинусов, например  $n$ , и приравняв производные по  $l$  и  $m$  нулю, получим следующие уравнения для определения направляющих косинусов площадок, на которых  $\tau$  достигает экстремума.

$$\begin{aligned} l &\left[ (\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \right] = 0, \\ m &\left[ (\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)/2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Приняв, например  $l = 0$ , найдем из второго уравнения, что  $m = \pm 1/\sqrt{2}$ ; тогда из (1.11)  $n = \pm 1/\sqrt{2}$ . Отсюда вытекает, что экстремальные касательные напряжения возникают на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам.

Подставляя направляющие косинусы в формулу (1.17) получим следующие значения главных касательных напряжений

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (1.19)$$

Из (1.19) следует, что максимальные касательные напряжения действуют на площадке, делящей пополам угол с площадками  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , и что их величины равны половине разности между этими напряжениями.

Если принять, что оси  $x, y, z$  на рис. 1.5 являются главными и если  $OB = OC = OD$ , то нормаль к наклонной грани имеет направляющие косинусы

$$l = m = n = 1/\sqrt{3}.$$

Согласно (1.16) нормальное напряжение на этой грани, так называемое среднее напряжение, равно

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (1.20)$$

Касательное напряжение на этой же грани, согласно (1.17)

$$\tau_{okm} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}, \quad (1.21)$$

это касательное напряжение называется октаэдрическим, поскольку грань, на которой оно действует, является гранью правильного октаэдра, вершины которого располагаются на осях. Это напряжение часто используется в теории пластичности. Октаэдрические касательные напряжения мало отличаются от максимальных касательных напряжений.

## 1.6. ШАРОВОЙ ТЕНЗОР И ДЕВИATOR НАПРЯЖЕНИЙ

Шаровой тензор напряжений соответствует равномерному всестороннему растяжению или сжатию и выражается через средние напряжения (1.20)

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Девиатор напряжений характеризует отклонение данного напряженного состояния от состояния всестороннего растяжения или сжатия

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Переход от основного напряженного состояния к девиаторному показан на рис. 1.6.

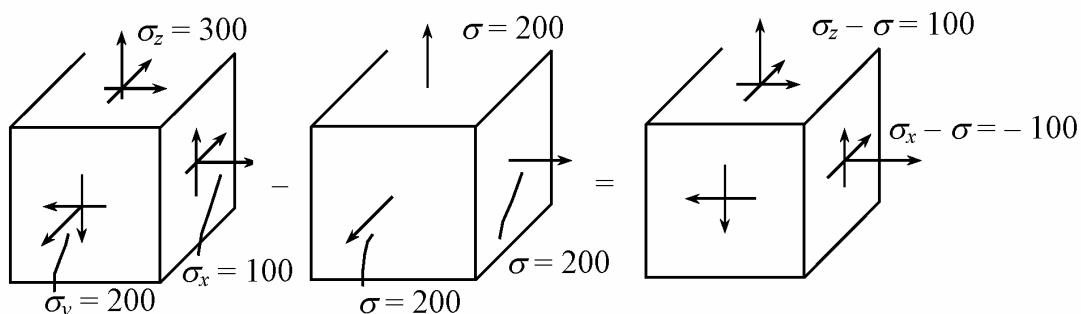


Рис. 1.6

Нормальные напряжения даны в Н/м<sup>2</sup>. Касательные напряжения при переходе не меняются.

Очевидно, что  $T_\sigma = S_\sigma + D_\sigma$ .

Первый инвариант шарового тензора напряжений  $S_\sigma$  совпадает с первым инвариантом тензора напряжений  $T_\sigma$

$$J_1^S = 3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (1.24)$$

Первый инвариант девиатора напряжений равен нулю. Действительно

$$(\sigma_x - \sigma) + (\sigma_y - \sigma) + (\sigma_z - \sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma = 0.$$

Для определения второго инварианта, девиатора напряжений  $J_2^D$  воспользуемся выражением (1.13) для  $J_2$  подставив в него вместо напряжений разности координатных и средних напряжений. После несложных преобразований получим

$$J_2^D = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (1.25)$$

или в главных напряжениях

$$J_2^D = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (1.26)$$

Приведенные здесь зависимости понадобятся в дальнейшем, при формировании моделей упругости и пластичности.

## 1.7. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ

При рассмотрении деформаций в упругом теле предполагается, что существуют связи, препятствующие его перемещению как жесткого тела. Таким образом, какое-либо перемещение точек тела может происходить лишь за счет его деформации. Как уже отмечалось, будем рассматривать только малые деформации, которые имеют место в инженерных конструкциях. Малые перемещения точек при деформировании тела разложим на составляющие  $u, v, w$ , параллельные соответствующим осям координат  $x, y, z$ . Можно предположить, что эти малые величины непрерывно меняются по всему объему тела.

Рассмотрим определение линейной деформации тела в точке  $A$  (рис. 1.7).

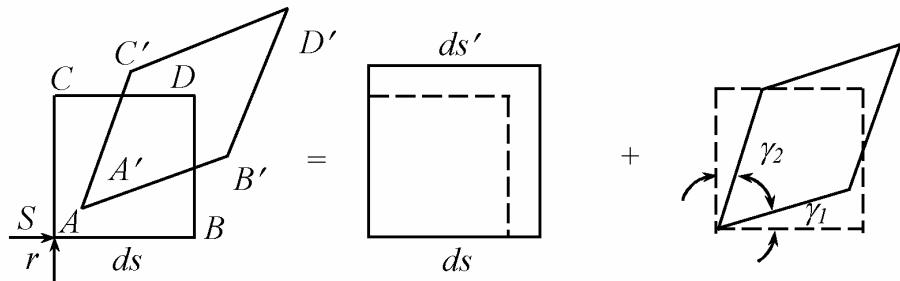


Рис. 1.7

Пусть линейная деформация определяется в направлении вектора  $s$ . Будем называть линейной деформацией в точке  $A$  в направлении  $s$  следующую величину

$$\varepsilon_s = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{ds' - ds}{ds},$$

где  $ds'$  – длина отрезка  $ds$  после деформации. Как видно из рис. 1.7, возможно не только изменение линейных размеров элемента, но и перекос граней. Переход из недеформированного состояния  $ABC$  в деформированное  $A'B'C'$  осуществляется за счет изменения длины граней элемента и за счет изменения углов.

Изменение угла между двумя взаимно перпендикулярными до деформации направлениями называется угловой деформацией или деформацией сдвига. Деформация сдвига  $\gamma_{sr}$

$$\gamma_{sr} = \gamma_1 + \gamma_2,$$

где  $\gamma_1, \gamma_2$  – углы поворота граней элемента в плоскости  $sr$  относительно первоначальных направлений. Отметим, что на рис. 1.7 показаны положительные направления деформаций.

Деформированное состояние в произвольной точке тела полностью характеризуется тензором деформаций  $T_\varepsilon$ , имеющим структуру, аналогичную тензору напряжений

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Оевые деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – характеризуют изменение объема в направлении осей  $x, y, z$ .

Деформации сдвига  $\gamma$  характеризуют изменение формы. Индексы при угловой деформации указывают плоскость сдвига. Как и в случае касательных напряжений, деформации сдвига обладают взаимностью, т.е.

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}. \quad (1.28)$$

Величина, например,  $\varepsilon_{xy} = 1/2\gamma_{xy}$  называется тензорной компонентой сдвига.

## 1.8. ГЛАВНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ. ШАРОВОЙ ТЕНЗОР И ДЕВИATOR ДЕФОРМАЦИЙ

По аналогии с напряжениями можно показать, что в каждой точке тела существуют три ортогональные направления, по которым оно испытывает только осе-

вые деформации, а деформации сдвига равны нулю. Эти деформации называются главными:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Они могут быть найдены из уравнения

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 - J_2 \varepsilon - J_3 = 0, \quad (1.29)$$

в котором инварианты тензора деформаций определяются выражениями

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$J_2 = -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_z^2}{4},$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (1.30)$$

Напомним, что инвариантами называются величины, не зависящие от выбора системы координат.

Тензор деформаций  $T_\varepsilon$  можно представить в виде суммы шарового тензора деформаций  $S_\varepsilon$

$$S_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$  – средняя деформация, и девиатора деформаций

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Шаровой тензор деформаций характеризует изменение объема  $e = 3\varepsilon$ , а девиатор деформаций – изменение формы. Очевидно, что первый инвариант девиатора деформаций равен нулю, а его второй инвариант  $J_2^D$  равен

$$J_2^D = \frac{1}{6} \left( (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \right). \quad (1.33)$$

## ГЛАВА 2

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Выше обсуждались напряжения в точке, принадлежащей упругому телу. Рассмотрим теперь изменение напряжений при переходе к соседней точке. Для этого исследуем условия равновесия малого прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $dx, dy, dz$  (рис. 2.1).

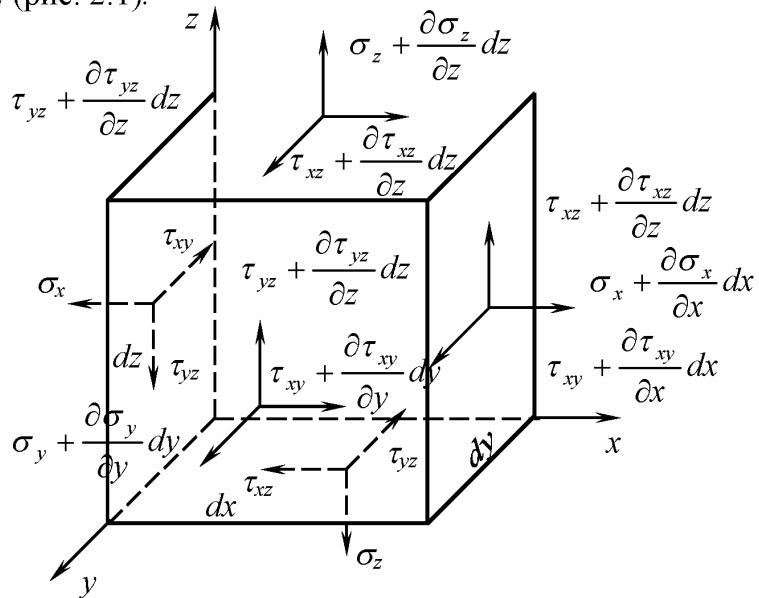


Рис. 2.1

В обозначениях на рис. 2.1 учтена взаимность касательных напряжений (1.2). Прослеживая малые изменения составляющих напряжений, показанные на рис. 2.1, а также суммируя все силы, действующие на элемент в направлении оси  $x$ , получим следующее уравнение равновесия

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xy} dx dy + X dx dy dz = 0.$$

Аналогично можно записать уравнения равновесия в направлении осей  $y$  и  $z$ . После упрощения три уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $X, Y, Z$  – проекции объемных сил на оси  $x, y, z$ .

Три уравнения моментов относительно осей  $x, y, z$  лишь подтверждают взаимность касательных напряжений. Уравнения (2.1) должны удовлетворяться по всему объему тела. При достижении поверхности они должны находиться в равновесии с внешними силами, действующими на поверхности тела. Условия на поверхности получим из уравнений (1.4) выбрав тетраэдр (рис. 1.5) так, чтобы его грань  $BCD$  совпала с поверхностью тела. Тогда  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  – поверхностные силы,  $l, m, n$  направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела в данной точке.

Если задача состоит в определении напряженного состояния тела под действием внешних сил, то необходимо решить уравнения (2.1) и решение это должно удовлетворять граничным условиям (1.4). Трех уравнений, содержащих шесть напряжений  $\sigma_x \dots \tau_{yz}$ , недостаточно для определения этих компонент. Задача является статически неопределенной. Чтобы получить ее решение, необходимо рассмотреть упругие деформации тела.

## 2.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ

Ввиду принятия предпосылки о малости деформаций, для определения линейной деформации в заданном направлении достаточно рассмотреть проекции перемещения точек на заданное направление. Иными словами для определения деформаций  $\varepsilon_x$  вдоль оси  $x$  достаточно принять во внимание только составляющие перемещения  $u$  (рис. 2.2).

Если тело подвергается деформированию, а  $u, v$  и  $w$  являются составляющими перемещения в точке  $O$ , то деформация  $\varepsilon_x$  в этой точке определяется следующим образом:

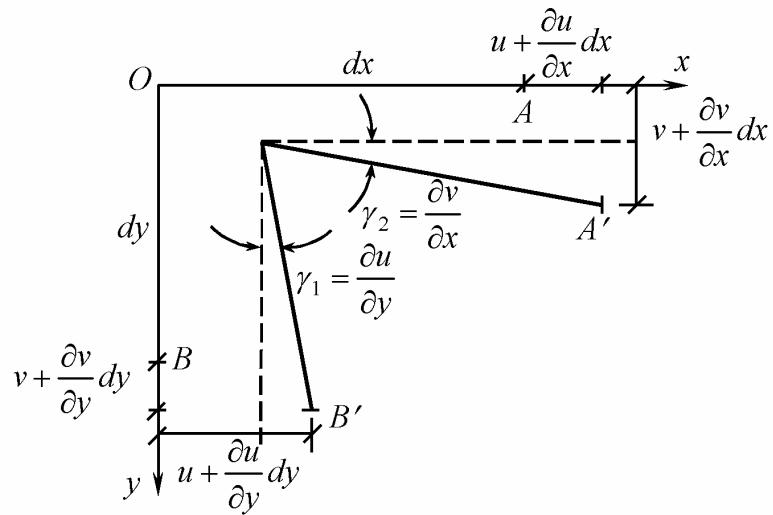


Рис. 2.2

$$\varepsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогичным образом определяются удлинения в направлении осей  $y$  и  $z$ .

Рассмотрим теперь изменение угла между отрезками  $OA$  и  $OB$ , которые до деформирования тела были взаимно перпендикулярными. Как видно из рис. 2.2 отрезок  $OA'$  составляет со своим первоначальным положением  $OA$  угол  $\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x}$ . Подобным образом угол  $\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Таким образом, деформация сдвига  $\gamma_{xy}$  между плоскостями  $xz$  и  $yz$  равна

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично можно найти деформации сдвига между плоскостями  $xy$  и  $xz - \gamma_{yz}$ , а также между плоскостями  $yx$  и  $yz - \gamma_{xz}$ . Таким образом

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Геометрические уравнения, связывающие между собой деформации и перемещения, носят название *уравнений Коши*.

Шесть компонент деформаций в каждой точке тела полностью определяются тремя компонентами перемещений. Следовательно, компоненты деформаций не могут быть произвольными, а должны подчиняться условиям, вытекающим из уравнений (2.2).

Из (2.2) можно получить, что

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.3)$$

Два других соотношения такого рода можно получить циклической перестановкой индексов  $x, y, z$ .

Подобным образом, учитывая выражения для производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

найдем

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \quad (2.4)$$

Еще два соотношения вида (2.4) можно получить перестановкой индексов. Таким образом, мы пришли к следующим дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Соотношения (2.5) называются условиями совместности деформаций Сен-Венана.

### 2.3. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Допустим, что образец в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, подвергается действию нормальных напряжений  $\sigma_x$ , равномерно распределенных по двум противоположным граням. Эксперименты показывают, что для изотропного материала величина деформации  $\varepsilon_x$  пропорциональна приложенному напряжению, т.е.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

где  $E$  – модуль упругости. Раствжение в направлении оси  $x$  сопровождается сужением в поперечных направлениях, равных

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (2.6)$$

Постоянный множитель  $\nu$  называется *коэффициентом Пуассона*. Для стали он равен 0,3. Продольное сжатие сопровождается расширением в поперечном направлении. Постоянные  $E$  и  $\nu$  сохраняют свои значения.

Если образец подвергается действию нормальных и касательных напряжений, то связь между ними и деформациями в ортогональной системе координат следующая

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)), \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

где модуль упругости при сдвиге

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.8)$$

Эти зависимости выражают закон Гука для случая изотропного материала. Связь между деформациями и напряжениями является линейной и полностью определяется двумя постоянными  $E$  и  $\nu$ , которые называются *упругими постоянными*.

В случае необходимости учета теплового расширения в правую часть первых трех уравнений (2.7) необходимо добавить температурную деформацию  $\varepsilon_T$

$$\varepsilon_T = \alpha T,$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения,  $T$  – изменение температуры при нагреве.

В сокращенной форме уравнения (2.7) можно представить так

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}, \quad (2.9)$$

где  $\{\varepsilon\}$  – вектор деформаций,  $\{\sigma\}$  – вектор напряжений

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}, \quad (2.10)$$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\}. \quad (2.11)$$

$[C]$  – матрица упругой податливости

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Складывая три первых равенства закона Гука (2.7) находим

$$\varepsilon = \frac{1-2\nu}{E} \sigma = \frac{\sigma}{E^*}, \quad E^* = \frac{E}{1-2\nu}. \quad (2.13)$$

где  $\sigma$  – среднее напряжение,  $\varepsilon$  средняя деформация. Вычитая из уравнения для  $\varepsilon_x$  величину средней деформации  $\varepsilon$  получим

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{2(1+\nu)}{E} \left( \sigma_x + \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right) = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_x - \sigma).$$

В результате приходим к девиаторной форме закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_x - \sigma) = \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma), \quad \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}, \\ \varepsilon_y - \varepsilon &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_y - \sigma) = \frac{1}{2G} (\sigma_y - \sigma), \quad \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}, \\ \varepsilon_z - \varepsilon &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_z - \sigma) = \frac{1}{2G} (\sigma_z - \sigma), \quad \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Во многих задачах оказывается необходимым выразить компоненты напряжений в функции от компонент деформаций. Эти зависимости легко получить из соотношений (2.13), (2.14)

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x + \sigma - \varepsilon \frac{E}{1+\nu} = 2G\varepsilon_x + \varepsilon \left( \frac{E}{1-2\nu} - \frac{E}{1-\nu} \right).$$

Подобные зависимости можно найти для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль сдвига,  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  – постоянная Ламе. В сокращенной форме уравнения (2.15) принимают вид

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (2.16)$$

где матрица упругости  $[D]$

$$[D] = \begin{bmatrix} 2G + 3\lambda & 3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 2G + 3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda & 2G + 3\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Соотношения упругости для изотропного материала содержат два физических параметра  $E$  и  $\nu$ , либо  $G$  и  $\lambda$ . В случае ортотропного материала соответствующая матрица  $[C]$  содержит 12 параметров: модули упругости в направлении координатных осей  $E_x, E_y, E_z$ ; модули сдвига  $G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$ ; коэффициенты Пуассона  $\nu_{xy}, \dots, \nu_{yz}$ . В общем случае анизотропии матрица  $[C]$  содержит 21 независимый параметр.

## 2.4. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И НАПРЯЖЕНИЯХ.

Искомыми в задачах теории упругости являются три компоненты перемещения  $u, v, w$ , шесть компонент напряжений (2.11) и шесть компонент деформаций (2.10). Для решения такой задачи получены 15 уравнений (три статические (2.1), шесть геометрических (2.2) и шесть физических (2.7) либо (2.15)), которые справедливы для каждой точки внутри тела и условия на поверхности (1.4).

Приведем основные уравнения теории упругости в индексной (тензорной) форме записи:

статические уравнения

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ji} + x_i = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

при этом  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ;

геометрические уравнения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты перемещений рассматриваемой точки по направлению осей координат  $x_1, x_2, x_3$ ;

физические уравнения

$$\sigma_{ij} - \delta\sigma = 2G(\varepsilon_{ij} - \delta\varepsilon), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$\delta = 1$  при  $i = j$  и  $\delta = 0$  при  $i \neq j$ .

Значительную трудность представляет решение прямой задачи теории упругости: задачи определения напряжений, деформаций и перемещений точек тела по заданным объемным и поверхностным силам и кинематическим воз-

действиям. В зависимости от того, какие величины принять за основные неизвестные, можно выделить два основных пути решения.

I. *Решение в перемещениях.* Исключим компоненты напряжений из уравнений равновесия (2.1) и условий не поверхности (1.4).

Из уравнений (2.15) с помощью (2.2) имеем

$$\sigma_x = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda e, \quad \tau_{xy} = G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{xz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (2.18)$$

где  $e = 3\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ .

Дифференцируя (2.18), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial e}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Внося это в первое из уравнений группы (2.1), после простых преобразований получим

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0, \quad (2.19)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.20)$$

дифференциальный оператор Лапласа второго порядка.

Два других уравнения группы (2.1) можно преобразовать подобным образом. Тогда, придем к следующей системе уравнений равновесия

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

эти уравнения называются *уравнениями Ламе*.

Подставляя выражения для напряжений, определяемые по формулам вида (2.18), в граничные условия (1.4), находим

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lambda e l + G \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right), \\ \bar{Y} &= \lambda e m + G \left( \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + G \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\bar{Z} = \lambda en + G \left( \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + G \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right).$$

Уравнения (2.21) совместно с поверхностными условиями (2.22) полностью определяют функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Затем по формулам (2.2) можно найти деформации, а из (2.15) – напряжения.

II. *Решение в напряжениях.* Подставляя в условия совместности (2.5) вместо составляющих деформаций их выражения через составляющие напряжения, задаваемые формулами (2.7) закона Гука, и используя уравнения равновесия (2.1), можно получить уравнения совместности деформаций, записанные через напряжения. В случае постоянства или отсутствия объемных сил эти уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} &= 0, \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} &= 0, \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

где

$$\theta = 3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

Эти уравнения называются *уравнениями Бельтрами*.

При интегрировании шести уравнений (2.23), входящие в общее решение этих уравнений произвольные функции определяются из условий на поверхности

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Затем по формулам (2.7) можно найти деформации, а при помощи формул (2.2) – перемещения.

## 2.5. КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ.

Интегрирование систем дифференциальных уравнений (2.21) или (2.23) – задача весьма сложная. Это уравнения в частных производных; аналитическое решение таких уравнений затруднительно.

Рассмотрим так называемый *полуобратный метод*, который успешно используется для решения ряда важных задач. Если известны силы, действующие на упругое тело, и необходимо найти напряжения, то используются уравнения равновесия (2.1). Шесть составляющих напряжения, входящие в эти уравнения, должны удовлетворять также условиям совместности деформаций (2.23) и условиям на поверхности (2.24). Последнее означает, что выражения для состав-

ляющих напряжения должны быть такими, чтобы для элемента тела у границы приложенные поверхностные силы и напряжения находились бы в равновесии.

Иногда можно угадать вид выражений для некоторых из шести составляющих напряжения. Если при этом удается найти остальные составляющие в такой форме, что все указанные выше уравнения будут удовлетворены, то это означает, что получено точное решение задачи. Метод решения, в котором сначала вводятся допущения относительно некоторых составляющих напряжения, а затем определяются остальные составляющие, называется *полуобратным методом*. Покажем применение этого метода к задаче о кручении стержня.

Пусть призматический стержень произвольного поперечного сечения закреплен в точке  $O$  и закручивается, как показано на рис. 2.4.

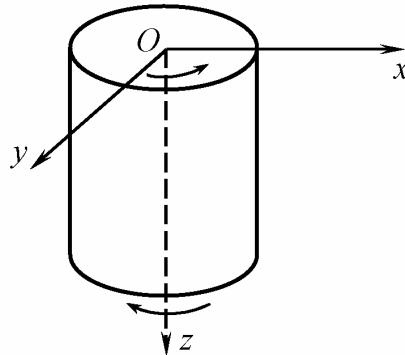


Рис. 2.4

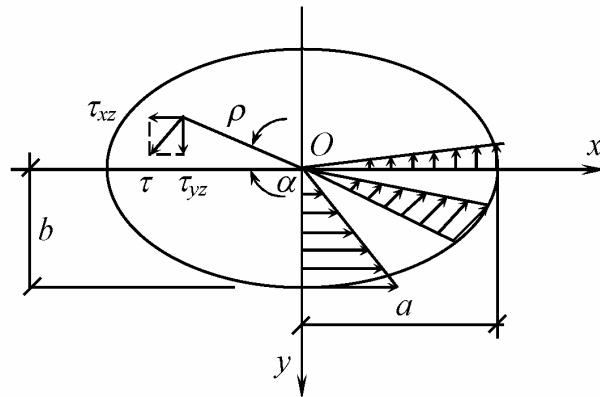


Рис. 2.5

Согласно элементарной теории кручения круглого стержня в этом случае

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0.$$

Только две составляющие напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  отличны от нуля. Предположим, что такое напряженное состояние имеет место и для стержня с произвольным сечением. Тогда система уравнений (2.1) при отсутствии объемных сил принимает вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Для того, чтобы удовлетворить первым двум из этих уравнений, составляющие напряжений должны зависеть только от  $x$  и  $y$ . Для того, чтобы выполнялось и третье уравнение, выразим напряжения через функцию напряжений  $F$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (2.25)$$

С учетом введенного предположения о напряжениях, условия совместности (2.23) приводятся к двум

$$\nabla^2 \tau_{yz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{xz} = 0,$$

или, с учетом (2.25),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Это означает, что выражения в скобках постоянны

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = C. \quad (2.26)$$

Рассмотрим теперь граничные условия. Поскольку стержень закручивается силами, приложенными на торцах, то на боковой поверхности составляющие  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  в уравнениях (2.24) обращаются в нуль. Направляющий косинус  $n=0$ . Тем самым первые два уравнения в (2.24) удовлетворяются, а третье принимает вид

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0.$$

Следовательно, равнодействующее касательное напряжение  $\tau$  направлено по касательной к контуру сечения, а функция напряжений на контуре постоянна.

В качестве примера, рассмотрим кручение стержня эллиптического сечения. Уравнение контура имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (2.27)$$

Для функции напряжений примем следующее выражение

$$F = \frac{ca^2b^2}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (2.28)$$

которое удовлетворяет уравнению (2.26). Эта функция обращается на контуре в нуль в силу (2.27). Таким образом, выражение (2.28) является искомой функцией напряжений.

Определим, крутящий момент на торцах стержня

$$M_k = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy = - \iint \left( x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy.$$

После интегрирования по частям

$$M_k = 2 \iint F dx dy = 2 \iint \frac{ca^2b^2}{2(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx dy = -\frac{\pi a^3 b^3 c}{2(a^2 + b^2)},$$

откуда

$$c = -\frac{2M_k(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}. \quad (2.29)$$

Следовательно,

$$F = -\frac{M_k}{\pi ab} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (2.30)$$

а

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_k y}{\pi ab^3}, \quad \tau_{yz} = -\frac{2M_k x}{\pi a^3 b}. \quad (2.31)$$

Это распределение напряжений показано на рис. 2.5. Максимальное касательное напряжение расположено на концах малой оси эллипса.

Для стержня с круговым поперечным сечением  $b=a$

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_k y}{\pi a^4}, \quad \tau_{yz} = -\frac{2M_k x}{\pi a^4}. \quad (2.32)$$

Равнодействующая касательного напряжения

$$\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{2M_k}{\pi a^4} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2M_k}{\pi a^4} \rho,$$

где  $\rho$  – расстояние до точки A от центра сечения (рис. 2.5). Учитывая, что полярный момент инерции кругового сечения

$$J = \frac{\pi a^4}{2}, \quad \tau = \frac{M_k}{J} \rho. \quad (2.33)$$

Направление напряжений  $\tau$  перпендикулярно радиус-вектору  $\rho$ . Полученное здесь точное решение задачи о кручении стержня с круговым сечением совпадает с решением, полученным в курсе сопротивления материалов.

## 2.6. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО ТЕЛА

Важное значение в механике твердого тела имеет понятие об *энергии деформации*. Полная энергия  $\mathcal{E}$  состоит из потенциальной энергии  $U$  деформации тела (потенциала внутренних сил) и энергии (потенциала)  $\Pi$  внешних сил

$$\mathcal{E} = U + \Pi. \quad (2.34)$$

Условно будем считать, что в начальном, недеформированном состоянии  $\mathcal{E} = 0$ , рис. 2.6, (а).

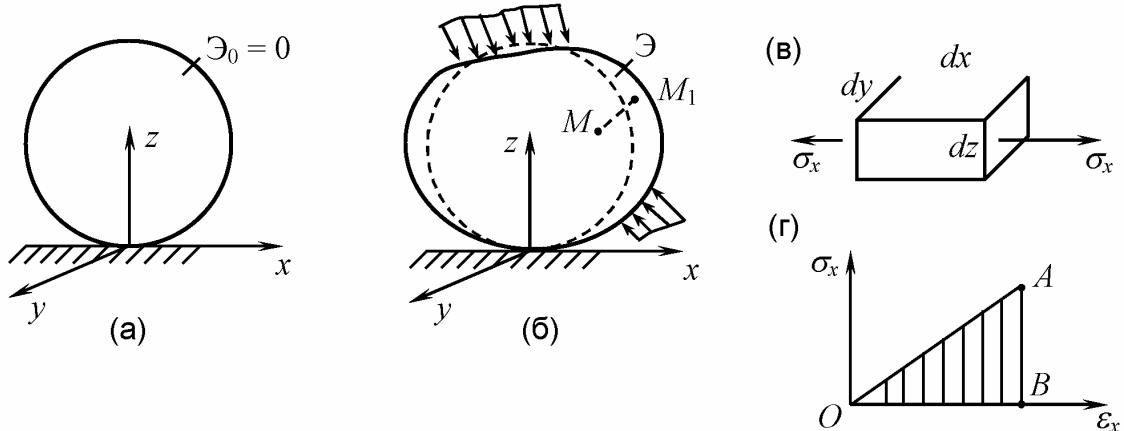


Рис. 2.6

Следовательно, полная энергия  $\mathcal{E}$  представляет собой изменение энергии внешних и внутренних сил при переходе тела из начального (а) в деформированное состояние (б).

Энергия любой системы сил измеряется работой, которую могут совершить эти силы при возвращении тела из конечного в начальное, нулевое состояние.

Составим вначале выражение для потенциала внутренних сил  $U$ . Поскольку деформации в разных точках тела разные, то и энергия деформации в объеме тела также распределена неравномерно. Введем понятие плотности потенциальной энергии деформации

$$dU = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V},$$

где  $\Delta V$  – элементарный объем. В случае упругого материала, и линейного напряженного состояния (рис. 2.6, (в))  $dU$  выражается площадью диаграммы деформирования (рис. 2.6, (г))  $dU = 0,5 \sigma_x \varepsilon_x$ . Обобщая эту формулу на случай объемного напряженного состояния, получим

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (2.36)$$

В сокращенной форме записи, с использованием для деформаций и напряжений обозначений (2.10) и (2.11) представим (2.36) в виде

$$dU = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}. \quad (2.37)$$

Для всего объема тела энергия деформации

$$U = \iiint_V dU dV. \quad (2.38)$$

Подчеркнем, что при определении  $dU$  как работы, во внимание берут именно внутренние упругие силы. Эти силы, стремясь восстановить первоначальную форму тела, дают положительный вклад в общий баланс энергии.

Составим теперь выражение для потенциала внешних сил, считая, что значения этих сил не зависят от перемещения точки приложения силы. При переходе тела в недеформированное состояние поверхностная точка  $M_1$  перейдет в положение  $M$ . Поверхностные силы совершают отрицательную (по знаку) работу на перемещениях  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Следовательно,

$$d\Pi_1 = -(\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w)dS$$

где  $dS$  – размер элементарной площадки.

Подобным образом для объемных сил

$$d\Pi_2 = -(Xu + Yv + Zw)dV.$$

Интегрируя по поверхности  $S$  и объему  $V$  тела найдем потенциал внешних сил

$$\Pi = - \iint_S (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w)dS - \iiint_V (Xu + Yv + Zw)dV. \quad (2.39)$$

В сокращенной форме записи

$$\Pi = - \iint_S \{p\}^T \{u\} dS - \iiint_V \{g\}^T \{u\} dV. \quad (2.40)$$

где

$$\{p\} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}, \quad \{g\} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad \{u\} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Покажем, что величины  $\mathbf{U}$  и  $\Pi$ , а следовательно и  $\mathcal{E}$ , вполне определяются заданием компонент перемещений. Используя закон Гука в форме (2.16) выражение для  $d\mathbf{U}$  можно привести к виду

$$d\mathbf{U} = \frac{1}{2} ([D]\{\varepsilon\})^T \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\}. \quad (2.42)$$

Деформации, как известно, с помощью уравнений Коши (2.2) выражаются через перемещения

$$\{\varepsilon\} = [A]^T \{u\}, \quad (2.43)$$

где  $[A]^T$  – транспонированная матрица  $A$ , содержащая операторы дифференцирования

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Теперь выражение для  $d\mathbf{U}$  приобретает вид

$$d\mathbf{U} = \frac{1}{2} ([A]^T \{u\})^T [D][A]^T \{u\} = \frac{1}{2} \{u\}^T [A][D][A]^T \{u\}. \quad (2.45)$$

Следовательно, полная энергия тела  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iiint_V \{u\}^T [A][D][A]^T \{u\} dV - \iint_S \{p\}^T \{u\} dS - \iiint_V \{g\}^T \{u\} dV \quad (2.46)$$

является функционалом, то есть скалярной величиной, зависящей от выбора трех функций-аргументов  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Если первое слагаемое в выражении (2.46) сохранить в виде

$$\iiint_V [\sigma]^T \{\varepsilon\} dV,$$

то это выражение пригодно и для тел, выполненных из неупругого материала.

Приведем пример составления функционала полной энергии  $\mathcal{E}$  (2.46) для балки, показанной на рис. 2.7.

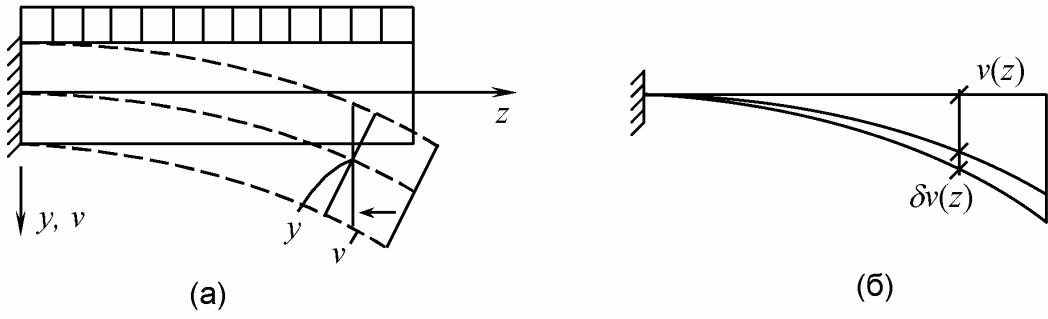


Рис. 2.7

Будем считать справедливой гипотезу прямых нормалей. Тогда  $\sigma_x = \sigma_y = \tau = 0$ . В этом случае

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_z \epsilon_z = \frac{1}{2} E \epsilon_z^2.$$

Перемещение  $w$  точек сечения за счет его поворота  $w = -v' y$ ; следовательно,

$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -v'' y$ , а  $dU = \frac{1}{2} E (v'')^2 y^2$  (штрихом обозначено дифференцирование по  $z$ ). Согласно (2.38)

$$U = \iiint_V 0,5 E (v'')^2 y^2 dx dy dz = \int_0^l 0,5 E J_x (v'')^2 dz.$$

В этом выражении для  $U$  интеграл  $\iint_A y^2 dx dy = J_x$ , где  $J_x$  момент инерции сечения балки.

Окончательно функционал полной энергии (2.42) получает следующий вид

$$\mathcal{E} = U + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l E J_x (v'')^2 dz - \int_0^l q v dz. \quad (2.47)$$

## 2.7. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА.

При решении задач теории упругости иногда удобно использовать *принцип возможной (виртуальной) работы*. Для случая одной частицы этот принцип гласит: *если частица находится в состоянии равновесия, то полная работа всех сил, действующих на нее, на любом возможном перемещении равна нулю*.

Если  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta w$  – суть компоненты возможного перемещения в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\Sigma X$ ,  $\Sigma Y$ ,  $\Sigma Z$  – суммы проекций всех сил на эти направления, то принцип возможной работы дает

$$\delta u \Sigma X = 0, \quad \delta v \Sigma Y = 0, \quad \delta w \Sigma Z = 0. \quad (2.48)$$

Эти уравнения выполняются для любого возможного перемещения, если выполняются условия равновесия

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0. \quad (2.49)$$

Обратно, если даны уравнения (2.49), то умножая их на произвольные множители  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , получим (2.48).

Упругое тело, находящееся в состоянии покоя под действием объемных и поверхностных сил, представляет собой систему частиц, на каждую из которых действует уравновешенная система сил. На любом возможном перемещении полная работа всех сил, совершенная над каждой частицей, равна нулю; следовательно, обращается в нуль и полная работа.

В качестве возможного перемещения в случае упругого тела можно принять любое малое перемещение, допускаемое условиями сплошности и наложенным на тело связями.

Если в выражении для  $\mathcal{E}$  (2.46) вектор перемещений  $\{u\}$  заменить вектором возможных перемещений  $\{\delta u\}$ , а затем знак вариации вынести из под знаков интегралов, то получим следующее уравнение

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (2.50)$$

Уравнение (2.50) показывает, что *действительные перемещения u, v и w при заданных внешних силах и заданных условиях закрепления таковы, что для любого возможного перемещения вариация полной потенциальной энергии равна нулю; тем самым полная потенциальная энергия стационарна*. Это и есть принцип вариации перемещений – *принцип Лагранжа*. Отметим, что *вариацией* называется искусственное малое приращение малой величины. Операция варьирования аналогична операции дифференцирования.

Вариационное уравнение  $\delta \mathcal{E} = 0$ , в интегральной форме выражает условия равновесия деформируемого тела. Оно включает в себя соответствующие дифференциальные уравнения равновесия и условия на поверхности тела. Вариационная формулировка задач используется обычно в двух случаях.

1. На основе уравнения (2.50) строят численные методы решения прямой задачи теории упругости – метод Ритца-Тимошенко, метод конечных элементов и другие. В этом случае в явной форме дифференциальные уравнения равновесия не используются.
2. Из уравнения (2.50) получают дифференциальные (или разностные) уравнения равновесия и граничные условия задачи. Такой путь оправдан для тел сложной формы и структуры, например для расчета многослойных оболочек.

Для случая пространственной задачи, когда  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v, w)$  из (2.50) можно получить уравнения Ламе (2.21), то есть уравнения равновесия, записанные в перемещениях.

## 2.8. Метод Ритца-Тимошенко.

Одним из основных применений вариационного принципа Лагранжа, является его использование для приближенного расчета конструкций, для кото-

рых получить точное решение невозможно. При этом необходимо представить полную энергию Э в виде функции перемещений. В случае если рассматриваемая система является континуальной, аппроксимировать истинную форму конструкции можно приближенно функцией формы, содержащей один или несколько параметров перемещений. Тогда потенциальную энергию Э можно вычислить на основе этой функции. Это означает, что энергия Э будет представлена как функция неизвестных параметров перемещения.

Затем необходимо взять частные производные от потенциальной энергии по каждому из параметров перемещений и приравнять их нулю. Эта процедура приведет к системе алгебраических уравнений, содержащих в качестве неизвестных величин параметры перемещений; решив эти уравнения можно найти параметры. Тем самым деформированная форма конструкции будет установлена; она будет приближенно соответствовать истинной.

На основе найденной функции формы определяют из уравнений Коши деформации, а при помощи зависимостей закона Гука – напряжения. Эти значения будут менее точными, чем сами перемещения, поскольку для их определения используется процедура дифференцирования функций перемещений. Поэтому следует выбирать функцию формы так, чтобы она достаточно хорошо соответствовала действительной форме перемещений. В любом случае функция формы должна выбираться так, чтобы она удовлетворяла геометрическим граничным условиям, например, условиям, накладываемым на прогибы и углы поворотов. Чем больше параметров перемещений используется для описания функции формы, тем точнее решение, но и тем сложнее.

Описанный здесь метод Ритца-Тимошенко является исключительно мощным и используется при исследовании пластин и оболочек, для изучения колебаний и устойчивости конструкций. Он также является основой метода, конечных элементов. Его можно применять для расчета конструкций выполненных из неупругого материала.

Покажем применение метода на простом примере изгиба защемленной левым концом балки постоянного сечения под действием равномерной нагрузки (рис. 2.7).

Полная потенциальная энергия деформации согласно (2.47)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l E J_x (v'')^2 dz - \int_0^l q v dz. \quad (2.51)$$

Допустим, что функция формы прогибов  $v(z)$  может быть представлена рядом

$$v(z) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(z), \quad (2.52)$$

где  $c_i$  – параметры, подлежащие определению;  $f_i(z)$  – возможные функции формы прогиба; они должны удовлетворять наложенным на балку связям. Для левого конца балки, где заделка, прогиб и угол поворота равны нулю

$$f_i(0) = 0, \quad f'_i(0) = 0. \quad (2.53)$$

Этим условиям удовлетворяют функции

$$f_1 = \left(\frac{z}{l}\right)^2, \quad f_2 = \left(\frac{z}{l}\right)^3, \dots, f_i = \left(\frac{z}{l}\right)^{i+1}.$$

Удержим два члена ряда (2.52)

$$v(z) = c_1 \left(\frac{z}{l}\right)^2 + c_2 \left(\frac{z}{l}\right)^3, \quad v''(z) = 2 \frac{c_1}{l^2} + 6 \frac{c_2 z}{l^3}.$$

Внося эти значения  $v$  и  $v''$  в равенство (2.51) получим

$$\mathcal{E} = \frac{EJ_x}{2} \int_0^l \left( 2 \frac{c_1}{l^2} + 6 \frac{c_2 z}{l^3} \right)^2 dz - q \int_0^l \left( c_1 \left(\frac{z}{l}\right)^2 + c_2 \left(\frac{z}{l}\right)^3 \right) dz.$$

Дифференцируя это соотношение по  $c_1$  и  $c_2$ , получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_1} &= EJ_x \int_0^l \left( 2 \frac{c_1}{l^2} + 6 \frac{c_2 z}{l^3} \right) \frac{2}{l^2} dz - q \int_0^l \left(\frac{z}{l}\right)^2 dz = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_2} &= EJ_x \int_0^l \left( 2 \frac{c_1}{l^2} + 6 \frac{c_2 z}{l^3} \right) \frac{6z}{l^3} dz - q \int_0^l \left(\frac{z}{l}\right)^3 dz = 0, \end{aligned}$$

или

$$c_1 + \frac{3}{2} c_2 = \frac{1}{12} \frac{ql^4}{EJ_x}, \quad c_1 + 2c_2 = \frac{1}{24} \frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Из этих уравнений находим

$$c_1 = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ_x}, \quad c_2 = -\frac{1}{12} \frac{ql^4}{EJ_x}, \quad v(z) = \frac{5}{24} \frac{ql^2 z^2}{EJ_x} - \frac{1}{12} \frac{ql z^3}{EJ_x}$$

Наибольшее значение прогиба при  $z = l$ ,  $v(l) = \frac{ql^4}{8EJ_x}$ , что совпадает с точным

решением.

## 2.9. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП КАСТИЛЬЯНО.

Выше рассмотрен принцип вариации перемещений и соответствующее уравнение Лагранжа. Другой принцип – *принцип вариации напряжений* – основан на сравнении двух близких напряженных состояний, каждое из которых удовлетворяет уравнениям равновесия и условиям на поверхности. Вариационное уравнение эквивалентно условиям совместности деформаций.

В связи с тем, что варьируемыми параметрами здесь являются напряжения, приходится использовать понятие дополнительной энергии (рис. 2.8). Напомним прежде, что энергия деформации, в случае нелинейно-упругого материала при одноосном растяжении определяется зависимостью

$$U = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon . \quad (2.54)$$

Интеграл в выражении (2.54) равняется площади, лежащей ниже кривой зависимости напряжения–деформация.

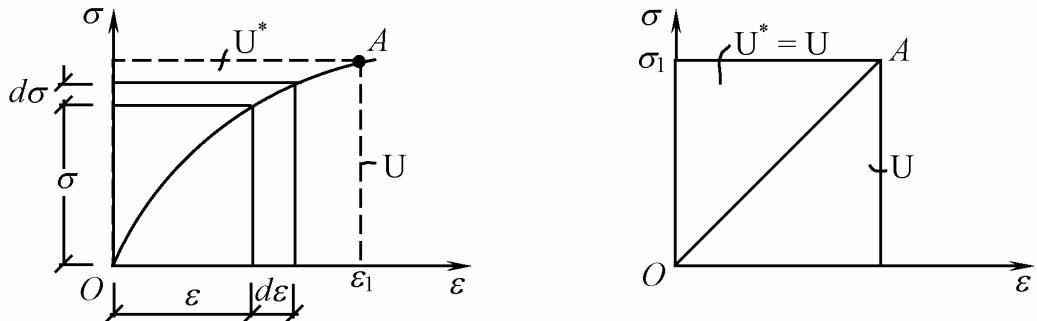


Рис. 2.8

Дополнительную энергию  $U^*$  можно определить следующим образом

$$U^* = \int_0^{\varepsilon_1} \varepsilon d\sigma . \quad (2.55)$$

Дополнительная энергия представляет собой площадь, заключенную между кривой зависимости напряжения–деформация, вертикальной осью и горизонтальной  $\sigma = \sigma_1$ . Она не имеет столь наглядного смысла, как энергия деформации  $U$ . Отметим, однако, справедливость равенства

$$U + U^* = \sigma \cdot \varepsilon . \quad (2.56)$$

В случае если материал линейно упруг (рис.2.8, (б))

$$U + U^* = 0,5\sigma \cdot \varepsilon . \quad (2.57)$$

Иногда дополнительную энергию называют также энергией напряжения.

Пусть состояние тела характеризуется напряжениями  $\{\sigma\}$ , которые удовлетворяют уравнениям равновесия при заданных нагрузках  $\{P_{S_1}\}$  на части поверхности тела  $S_1$  и заданным перемещениям  $\{u_{S_2}\}$  на части поверхности  $S_2$ , где наложены связи (рис.2.9, (а)).

Рассмотрим два напряженные состояния тела: истинное  $\{\sigma\}$  и второе с напряжениями  $\{\sigma\} + \{\delta\sigma\}$ . Те и другие напряжения уравновешивают внешнюю нагрузку  $\{P_{S_1}\}$ . Очевидно, что вариации напряжений  $\{\delta\sigma\}$  отвечает отсутствие нагрузки на части поверхности  $S_1$ ; напряжения  $\{\delta\sigma\}$  самоуравновешены. Тем не менее, на части поверхности  $S_2$  они вызывают реактивные поверхностные силы  $\{\delta P_{S_2}\}$  (рис.2.9, (б)). Для всего объема тела вариация дополнительной энергии (энергия напряжений)

$$\delta U^* = \iiint_V \{\varepsilon\}^T \{\delta \sigma\} dV. \quad (2.58)$$

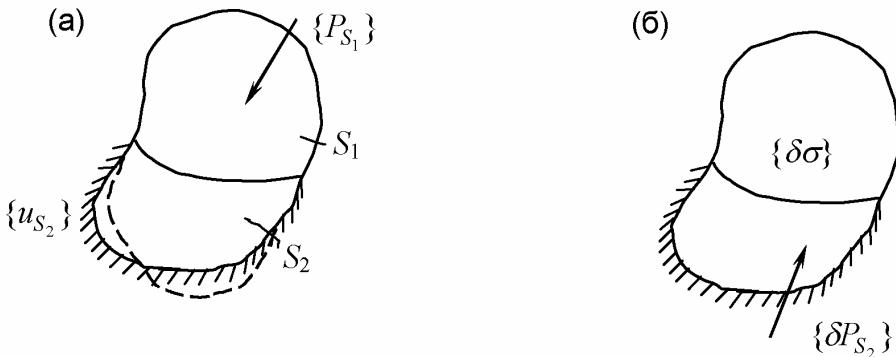


Рис. 2.9

Вариация дополнительной энергии, создаваемой реактивными усилиями  $\{\delta P_{S_2}\}$

$$\delta \Pi^* = - \iint_{S_2} \{u_{S_2}\}^T \{\delta P_{S_2}\} dS_2. \quad (2.59)$$

Вариационное уравнение в этом случае можно представить так

$$\delta \mathcal{E}_k = \delta U^* + \delta \Pi^* = 0. \quad (2.60)$$

Равенство (2.60) выражает принцип Кастильяно: *из множества статически допустимых напряжений, удовлетворяющих условиям равновесия внутри тела и на той части поверхности, где заданы поверхностные силы, те напряжения, которые удовлетворяют условиям совместности, придают дополнительной энергии стационарное значение.*

В частном случае линейно упругого тела

$$U^* = U = \iiint_V \{\sigma\}^T [C] \{\sigma\} dV. \quad (2.61)$$

В случае отсутствия вынужденных смещений  $\{u_{S_2}\} = 0$  вариационное уравнение (2.60) упрощается

$$\delta U = 0. \quad (2.62)$$

Отметим, что по-прежнему операция варьирования аналогична операции дифференцирования, но теперь по некоторому напряжению  $\sigma_i$ . Естественно, что функционал  $\mathcal{E}_k$  и  $U$  должен быть представлен в напряжениях. Уравнение (2.60) в интегральной форме выражает условие совместности деформаций. Оно позволяет получить для случая постоянных объемных сил уравнения Бельтрами (2.23) – условия совместности, выраженные через напряжения.

В настоящее время сформулированы и более общие вариационные принципы, в которых варьируются одновременно напряжения и перемещения. Соответствующий функционал Рейснера откосится к разряду смешанных.