

## **ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА**

Методические указания по выполнению расчетно-графической работы

Приведены краткие теоретические сведения по теме «Сложное сопротивление прямого бруса». Рассмотрены примеры прочностных расчетов балки, работающей в условиях косого изгиба, внецентренно нагруженного короткого стержня и вала круглого сечения при совместном действии изгиба и кручения. Приведены задания к расчетно-графической работе.

# 1 ОБЩИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ПРЯМОГО БРУСА

При загружении бруса разнообразными внешними нагрузками в его поперечных сечениях возникают шесть компонентов внутренних сил – продольная сила  $N_z$ , поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , крутящий момент  $M_z$  и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , связанные с четырьмя простыми деформациями стержня – растяжением (сжатием), сдвигом, кручением и чистым изгибом. На практике одновременное действие всех названных силовых факторов встречается крайне редко. Если при загружении прямого бруса внешними нагрузками возникает такая комбинация внутренних силовых факторов, что они будут действовать в различных главных плоскостях инерции, то мы имеем случай *сложного сопротивления*. Под *главной плоскостью инерции* понимают плоскость, включающую ось бруса  $z$  и одну из главных осей инерции поперечного сечения бруса ( $x$  или  $y$ ).

Плоскость, в которой действуют внешние нагрузки, принято называть *силовой плоскостью*. Если внешние нагрузки приложены в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей инерции, то возникает сложное сопротивление бруса.

Напряженное состояние, возникающее в случае сложного сопротивления бруса, можно получить суммированием напряженных состояний, вызванных действием каждого из внутренних силовых факторов в отдельности. Для этого используют *принцип независимости действия сил*. Принцип независимости действия сил применим во всех случаях, когда деформации материала бруса малы по сравнению с его размерами и подчиняются закону Гука.

В соответствии с указанным принципом необходимо вычислить напряжения от каждого компонента внутренних усилий в отдельности, а затем выполнить их суммирование. Зная нормальные и касательные напряжения в различных точках бруса, а также главные напряжения, можно по той или иной теории прочности проверить его прочность. Аналогично могут быть найдены деформации или перемещения бруса.

В дальнейшем мы будем рассматривать следующие частные случаи сложного сопротивления прямого бруса:

- *косой изгиб* (в поперечном сечении бруса действуют изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ );
- *внецентренное растяжение или сжатие* (в поперечном сечении бруса действуют изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , а также продольная сила  $N_z$ );
- *совместное действие кручения и изгиба* (в поперечном сечении бруса действуют изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , а также крутящий момент  $M_z$ ).

## 1.1 КОСОЙ ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

Косым называют изгиб, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении бруса, не совпадает ни с одной из его главных плоскостей (при этом плоскость действия изгибающего момента обязательно должна проходить через центр тяжести сечения). Далее будем рассматривать только такие брусья, поперечные сечения которых обладают симметрией относительно их главных центральных осей.

### 1.1.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Рассмотрим прямой брус, работающий на косой изгиб (рис. 1.1). Косой изгиб удобнее всего рассматривать как одновременный изгиб в двух главных плоскостях инерции бруса –  $Oyz$  и  $Oxz$ . Действие внешних нагрузок приводит к возникновению в поперечном сечении прямого бруса четырех внутренних силовых факторов: двух поперечных сил  $Q_x$  и  $Q_y$ , а также двух изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ .

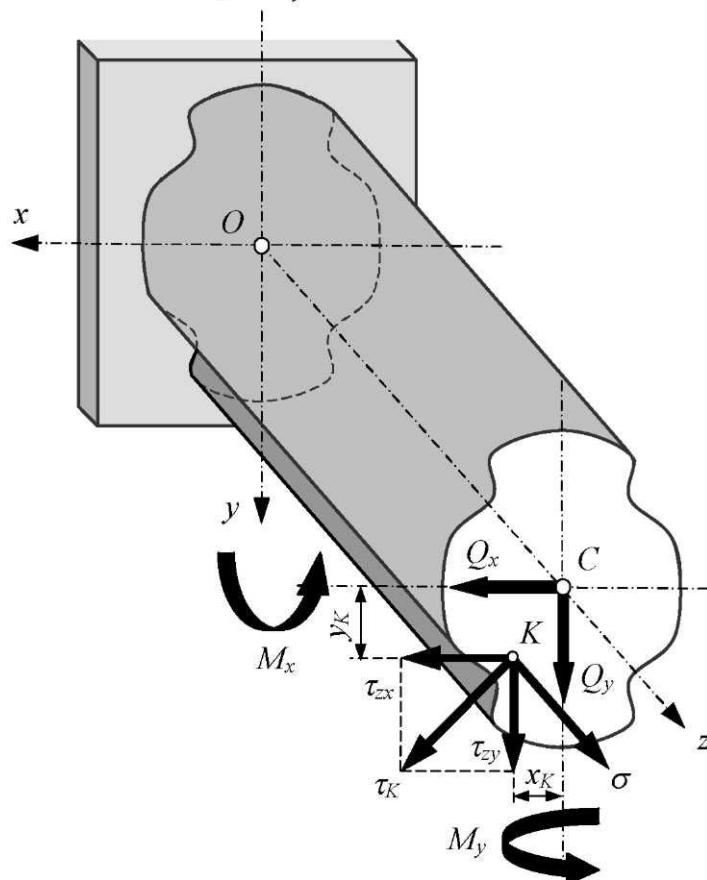


Рисунок 1.1 – Внутренние силовые факторы и напряжения в поперечном сечении прямого бруса при косом изгибе

Если в сечении действуют изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , то в некоторой точке  $K$ , принадлежащей рассматриваемому сечению, возникают

*нормальные напряжения*  $\sigma_K$  (рис. 1.1). При загружении бруса внешними сосредоточенными силами или распределенными нагрузками в его поперечных сечениях возникают поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ . Действие поперечных сил приводит к возникновению двух *касательных напряжений*  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$ . Эти касательные напряжения можно заменить результирующим напряжением  $\tau_K$ . При косом изгибе касательные напряжения  $\tau_K$  обычно малы по сравнению с нормальными напряжениями  $\sigma_K$ . Поэтому проверка прочности бруса, работающего в условиях косого изгиба, выполняется только по нормальным напряжениям. Нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения стержня определяют на основе принципа независимости действия сил по формуле

$$\sigma_K = \pm \frac{M_x}{J_x} \cdot y_K \pm \frac{M_y}{J_y} \cdot x_K, \quad (1.1)$$

где  $M_x$  и  $M_y$  – изгибающие моменты;

$J_x$  и  $J_y$  – главные моменты инерции поперечного сечения бруса;

$x_K$  и  $y_K$  – координаты точки  $K$ , где определяется напряжение.

Изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  в формуле учитываются со знаком «+», если им соответствуют растягивающие нормальные напряжения, и со знаком «-», если они вызывают сжимающие напряжения.

В опасных точках поперечного сечения бруса (крайних точках поперечного сечения), работающего в условиях косого изгиба, возникают максимальные нормальные напряжения, вычисляемые по формуле

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}, \quad (1.2)$$

где  $W_x$  и  $W_y$  – моменты сопротивления поперечного сечения бруса.

В одной из опасных точек сечения будут возникать максимальные растягивающие напряжения  $\sigma_{t,max}$ , а в другой – максимальные сжимающие напряжения  $\sigma_{c,max}$ .

### 1.1.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

При косом изгибе в поперечном сечении бруса появляется нейтральная (нулевая) линия, разделяющая области растяжения и сжатия его продольных волокон. Условием существования нейтральной линии  $N-N$  является равенство нулю выражения (1.1). Обозначим координаты любой точки, принадлежащей нейтральной линии, как  $x_N$  и  $y_N$ . Тогда положение нейтральной линии может быть определено из следующего уравнения:

$$\frac{M_x}{J_x} \cdot y_N + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_N = 0 \quad (1.3)$$

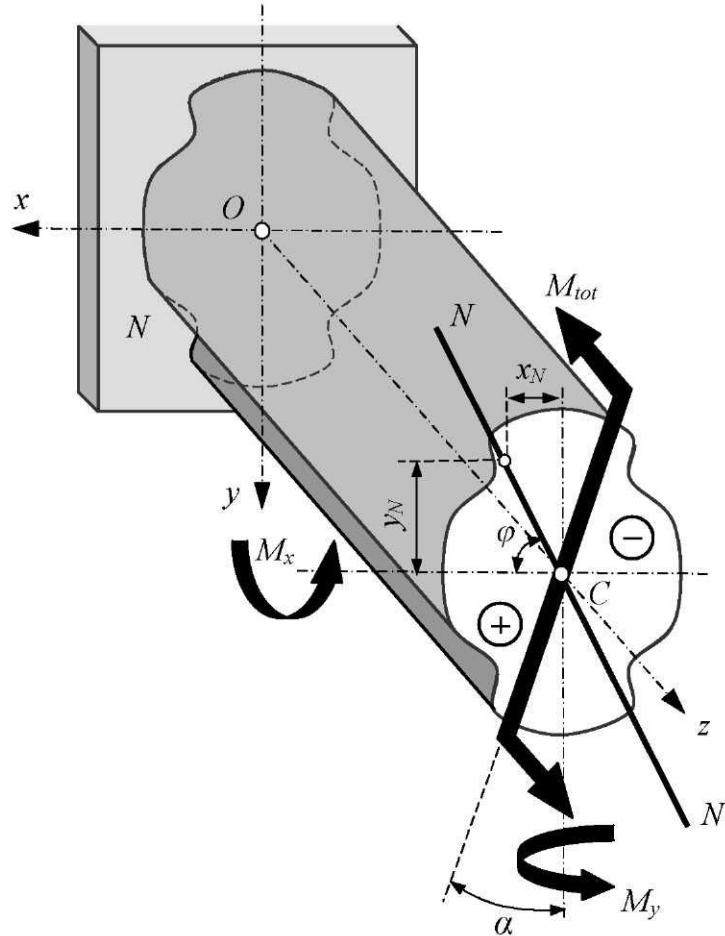


Рисунок 1.2 – Определение положения нейтральной линии при косом изгибе

Координаты  $x_N$  и  $y_N$  связаны линейно, следовательно, полученное уравнение является уравнением прямой. Если  $x_N = 0$  и  $y_N = 0$ , то равенство (1.3) выполняется, поэтому при косом изгибе нейтральная линия  $N-N$  всегда проходит через центр тяжести поперечного сечения бруса.

Для определения положения нейтральной линии рассмотрим отношение координат  $y_N$  и  $x_N$ :

$$-\frac{y_N}{x_N} = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x}. \quad (1.4)$$

Пусть изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  в выбранной системе координат имеют одинаковый знак (рис. 1.2), тогда правая часть выражения (1.4) будет положительной. Следовательно, уравнение удовлетворяется, если знаки координат  $x_N$  и  $y_N$  будут различны. Таким образом, при указанном

направлении изгибающих моментов нейтральная линия  $N-N$  не может проходить через первый и третий квадрант в плоскости поперечного сечения  $xOy$ .

Обозначая угол наклона нулевой линии  $N-N$  к оси  $Ox$  через  $\varphi$  и учитывая, что координаты  $x_N$  и  $y_N$  имеют разные знаки, получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{y_N}{x_N} \text{ или } \operatorname{tg}\varphi = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x}.$$

Результирующий момент равен  $M_{tot} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ . Направление результирующего момента  $M_{tot}$  в рассматриваемом поперечном сечении составляет угол  $\alpha$  с вертикальной осью  $Oy$ , следовательно,  $\operatorname{tg}\alpha = M_y/M_x$ . Окончательно получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha. \quad (1.5)$$

Как следует из уравнения (1.5), нулевая линия не перпендикулярна направлению действия результирующего изгибающего момента  $M_{tot}$ . Если главные моменты инерции поперечного сечения бруса  $J_x = J_y$ , что справедливо для круга или правильного многоугольника, то  $\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\alpha$ . В этом случае нейтральная линия и направление действия результирующего момента перпендикулярны друг другу и брус работает в условиях плоского изгиба.

## 1.2 ВНЕЦЕНТРЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

*Внекентренное растяжение или сжатие* является частным случаем сложного сопротивления прямого бруса. Загружение стержня осуществляется сосредоточенной силой, действующей параллельной его оси  $Oz$ , при этом точка ее приложения не совпадает с центром тяжести поперечного сечения  $C$ .

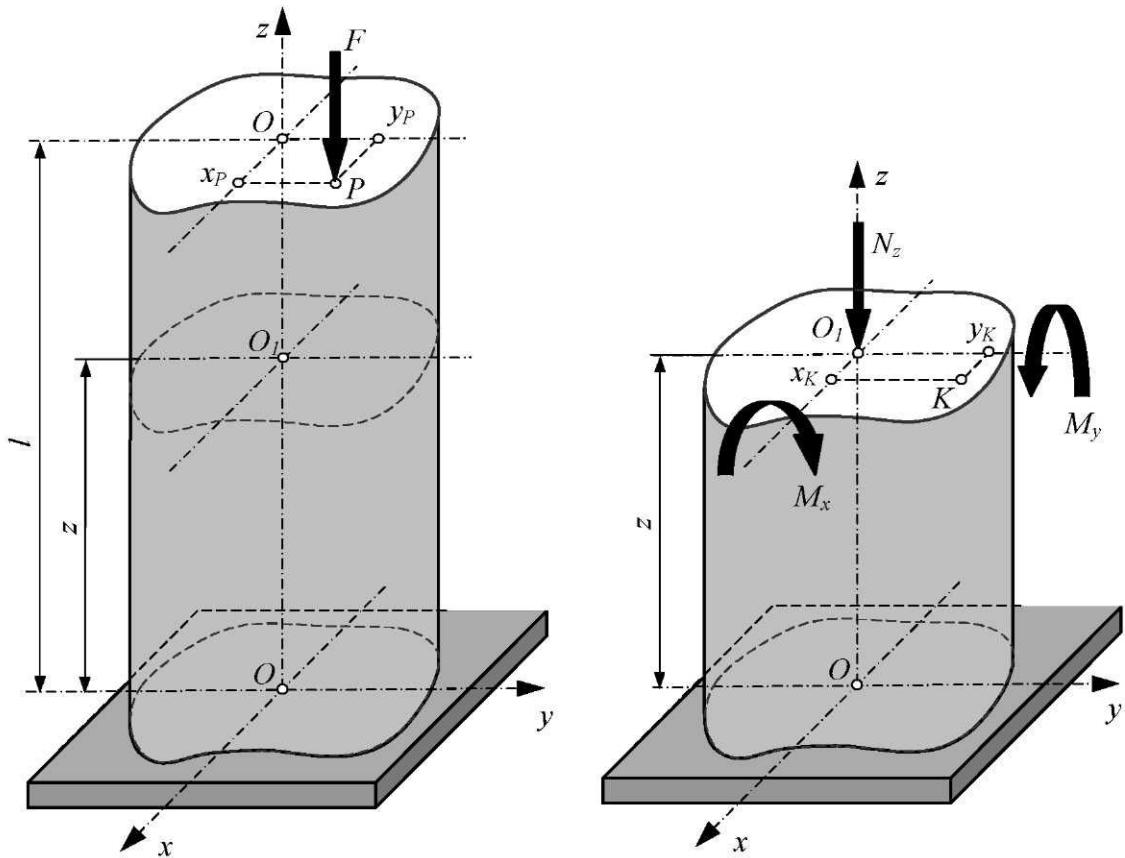
### 1.2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛУЧАЕ ВНЕЦЕНТРЕННОГО РАСТЯЖЕНИЯ ИЛИ СЖАТИЯ

Пусть на массивный стержень постоянного поперечного сечения действует сосредоточенная сжимающая сила  $F$ , приложенная к его торцу в точке  $P$  (рис. 1.3, а). Координаты точки приложения силы в системе главных осей указанного сечения обозначим через  $x_P$  и  $y_P$ . Эти координаты в дальнейшем будем называть эксцентриситетами точки приложения силы.

Внекентренное растяжение (сжатие) испытывают короткие стержни. Все сечения являются равноопасными, поэтому нет необходимости в построении эпюор внутренних силовых факторов. При загружении стержня

внецентренной силой в его произвольном поперечном сечении возникают три внутренних силовых фактора: продольная сила  $N_z$  и два изгибающих момента  $M_x$  и  $M_y$ . Величины внутренних усилий могут быть определены из уравнений статического равновесия:

$$\sum z = 0; \quad N_z = F; \quad \sum m_x = 0; \quad M_x = F \cdot y_P; \quad \sum m_y = 0; \quad M_y = F \cdot x_P.$$



а) внецентренное загружение стойки      б) внутренние усилия в сечении

Рисунок 1.3 – Внецентренное сжатие прямого бруса

Рассмотрим поперечное сечение стержня на расстоянии  $z$  от начала координат. Вычислим нормальные напряжения в некоторой точке  $K$ , принадлежащей этому сечению. Точка  $K$  в системе главных центральных осей (рис. 1.3, б) имеет положительные координаты  $x_K$  и  $y_K$ . При действии данной силы продольное волокно стержня, которому принадлежит точка  $K$ , будет испытывать сжатие (рис. 1.3, б), как от продольной силы  $N_z$ , так и от изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ . Воспользовавшись принципом независимости действия сил, получаем

$$\sigma_K = -\frac{N_z}{A} - \frac{M_x}{J_x} y_K - \frac{M_y}{J_y} \cdot x_K = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_P \cdot y_K}{i_x^2} + \frac{x_P \cdot x_K}{i_y^2} \right). \quad (1.6)$$

Полученная формула позволяет вычислять нормальные напряжения в любой точке внецентренно сжатого стержня. Следует заметить, что знак в уравнении (1.6) зависит от заданного направления внешней внецентренно действующей силы. Если сила направлена от сечения (внеклентренное растяжение), то нужно использовать знак «плюс». Если же заданная сила, как в рассматриваемом случае, направлена к сечению (внеклентренное сжатие), то необходимо использовать знак «минус».

### 1.2.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ РАСТЯЖЕНИИ ИЛИ СЖАТИИ

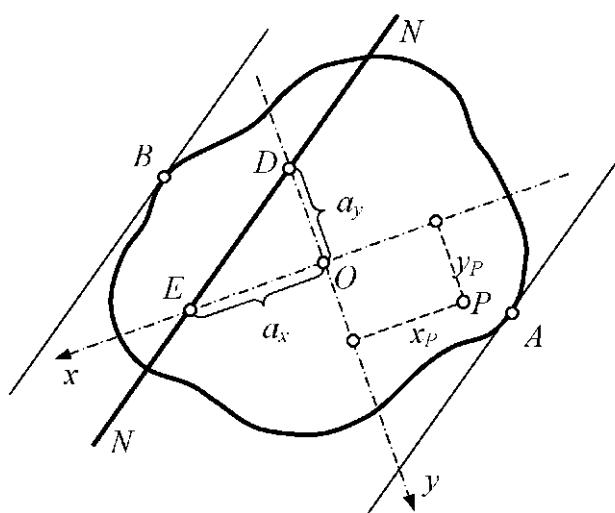


Рисунок 1.4 – Определение положения нейтральной линии

точки, принадлежащей нейтральной линии, как  $x_N$  и  $y_N$ . Тогда положение нейтральной линии может быть определено из следующего уравнения:

$$1 + \frac{y_P \cdot y_N}{i_x^2} + \frac{x_P \cdot x_N}{i_y^2} = 0. \quad (1.7)$$

Обозначим отрезки, отсекаемые нейтральной линией от главных осей поперечного сечения стержня, как  $a_x$  и  $a_y$ . Тогда из уравнения (1.7) получаем

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_P} \quad \text{и} \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_P}. \quad (1.8)$$

Полученные отрезки  $a_x$  и  $a_y$  в выбранном масштабе показываем на чертеже. В результате на главных осях поперечного сечения имеем две точки  $E$  и  $D$  соответственно. Соединяя эти точки прямой  $N-N$ , получаем искомое положение нейтральной линии (рис. 1.4).

Определение положения нейтральной линии играет важную роль при выполнении прочностных расчетов в случае внецентренного растяжения

При внецентренном растяжении или сжатии короткой стойки в ее поперечном сечении появляется нейтральная линия, разделяющая области растяжения и сжатия продольных волокон (рис. 1.4). Таким образом, при внецентренном растяжении или сжатии поперечное сечение поворачивается вокруг нейтральной линии.

Условием существования нейтральной линии является равенство нулю выражения (1.6). Обозначим координаты любой

(сжатия) прямого бруса. Перемещая нейтральную линию  $N-N$  параллельно самой себе до тех пор, пока она не станет касательной к внешнему контуру рассматриваемого сечения (рис. 1.4), можно установить положение опасных точек (точки  $A$  и  $B$ ). Так, если в точке  $P$  приложена внецентренная сжимающая сила, то в точке  $A$  возникают максимальные сжимающие напряжения, а в точке  $B$  – максимальные растягивающие. Следовательно, условия прочности в наиболее напряженных точках поперечного сечения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \sigma_A = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_P \cdot y_A}{i_x^2} + \frac{x_P \cdot x_A}{i_y^2} \right) \leq R_c; \\ \sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_P \cdot y_B}{i_x^2} + \frac{x_P \cdot x_B}{i_y^2} \right) \leq R_t, \end{cases} \quad (1.9)$$

где  $R_c$  – расчетное сопротивление материала стержня сжатию;

$R_t$  – расчетное сопротивление материала стержня растяжению.

### 1.2.3 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О ЯДРЕ СЕЧЕНИЯ

В большинстве случаев строительные конструкции изготавливаются из хрупких материалов (кирпич, бетон, железобетон). Эти материалы хорошо работают на сжатие, но имеют низкую прочность при растяжении, поэтому при их использовании необходимо определить положение ядра сечения.

Рассмотрим случай внецентренного сжатия стойки произвольного поперечного сечения (рис. 1.5). Предположим, что точка приложения внецентренной силы  $F$  перемещается по прямым, проходящим через центр тяжести  $C$  поперечного сечения стойки. Каждая из нейтральных линий будет перемещаться параллельно самой себе. При приложении сжимающей силы  $F$  в некоторых граничных точках  $I$ ,  $II$  и  $III$ , принадлежащих ранее указанным прямым, нейтральные линии  $I-I$ ,  $II-II$  и  $III-III$  становятся касательными к внешнему контуру поперечного сечения. Так как эти нейтральные линии не пересекают сечение стойки, то все ее продольные волокна будут работать только на сжатие. Если через центр тяжести сечения  $O$  провести бесчисленное множество прямых, то для каждой из них можно установить такое положение граничных точек, когда ней-

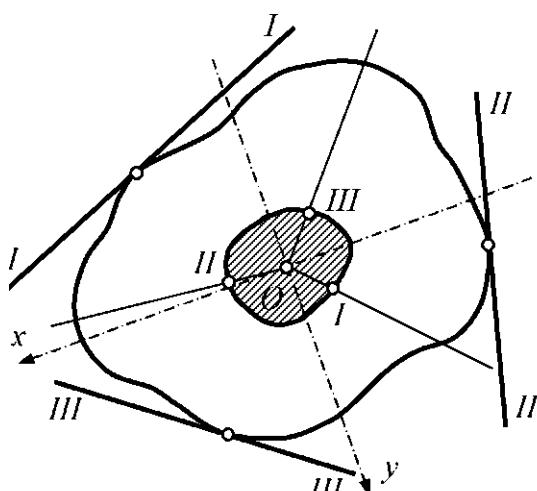


Рисунок 1.5 – Ядро сечения

жащих ранее указанным прямым, нейтральные линии  $I-I$ ,  $II-II$  и  $III-III$  становятся касательными к внешнему контуру поперечного сечения. Так как эти нейтральные линии не пересекают сечение стойки, то все ее продольные волокна будут работать только на сжатие. Если через центр тяжести сечения  $O$  провести бесчисленное множество прямых, то для каждой из них можно установить такое положение граничных точек, когда ней-

тральная линия становится касательной к внешнему контуру поперечного сечения. Совокупность этих точек образует границу некоторой замкнутой области, называемой *ядром сечения*. Любая продольная сила, приложенная внутри ядра сечения, будет вызывать только сжимающие или растягивающие нормальные напряжения. Из уравнений (2.3) получаем следующие выражения для вычисления координат точек, принадлежащих границе ядра сечения:

$$x_{\alpha} = -\frac{i_y^2}{a_x} \quad \text{и} \quad y_{\alpha} = -\frac{i_x^2}{a_y}. \quad (1.10)$$

Таким образом, *ядром сечения называется замкнутая выпуклая область, очерченная вблизи центра тяжести поперечного сечения, характеризующаяся тем, что внецентренная сосредоточенная сила, приложенная внутри этой области, создает во всех волокнах стойки один вид простой деформации – растяжение или сжатие.*

Чтобы построить ядро сечения, необходимо провести все возможные касательные к внешнему контуру поперечного сечения внецентренно нагруженной стойки, предполагая, что эти касательные являются нейтральными линиями. Для каждой касательной можно определить отрезки  $a_x$  и  $a_y$ , отсекаемые ими от главных центральных осей поперечного сечения стойки и определяемые в соответствии с выражениями (1.10) координаты граничных точек ядра сечения. Соединяя полученные точки, получаем исконое ядро сечения.

### 1.3 СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА С КРУЧЕНИЕМ

Многие элементы строительных машин и механизмов работают как на изгиб, так и на кручение. Наиболее характерными деталями машин, работающими в таких условиях, являются валы. Подавляющее большинство валов имеют круглое или кольцевое поперечное сечение.

В общем случае на вал действует система внешних сил (давление на зубья шестерен, натяжение ремней, собственный вес вала и шкивов и т.д.). Под действием внешних нагрузок в поперечных сечениях вала возникают следующие внутренние силовые факторы: крутящий момент  $M_z$ , изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$  (рис. 1.6). Таким образом, в произвольном поперечном сечении вала одновременно возникают нормальные напряжения от изгиба в двух плоскостях, а также касательные напряжения от кручения и изгиба.

Необходимо отметить, что в расчетах вала на прочность влиянием касательных напряжений от действия поперечных сил пренебрегают, так как они значительно меньше касательных напряжений, вызванных кручением.

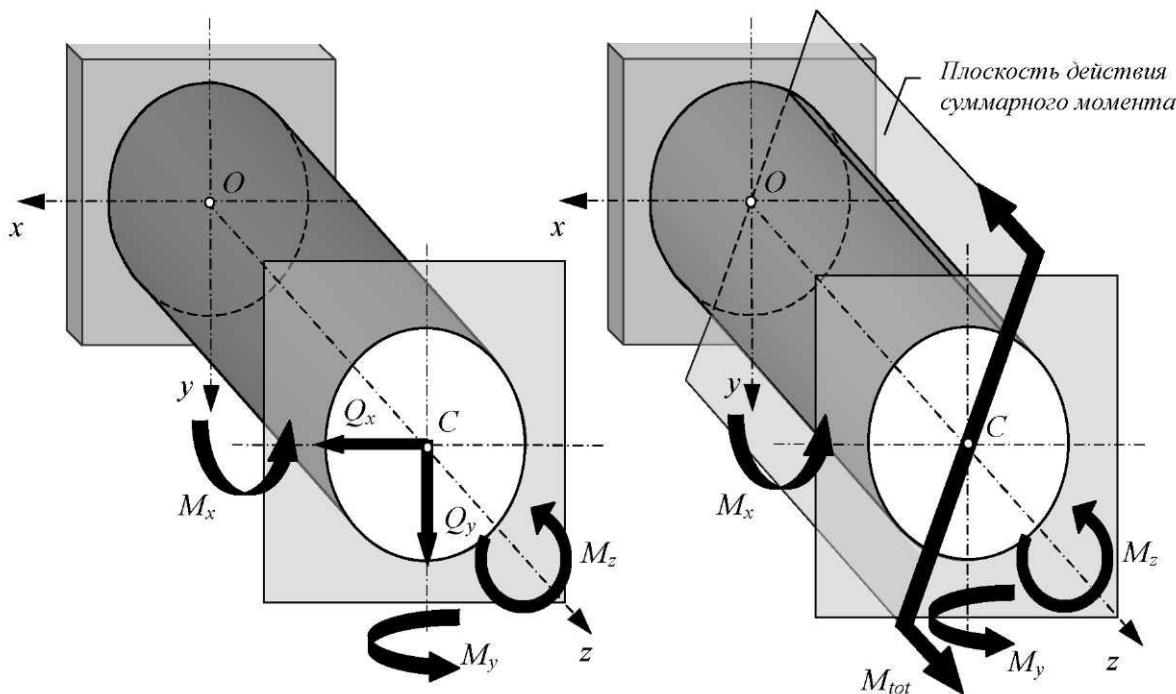


Рисунок 1.6 – Внутренние усилия в поперечном сечении вала

При расчете вала, прежде всего, необходимо установить положение опасных сечений. Для этого следует построить эпюры крутящих моментов  $M_z$  и изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ . Изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  в каждом поперечном сечении вала могут быть заменены результирующим изгибающим моментом

$$M_{tot} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (1.11)$$

Вектор результирующего момента  $M_{tot}$  при перемещении поперечного сечения вдоль оси вала может иметь различные направления. Поэтому даже при отсутствии распределенных нагрузок эпюра  $M_{tot}$  может быть криволинейной. Величины суммарного изгибающего момента  $M_{tot}$  вычисляют только на границах грузовых участков. Эти ординаты на эпюре суммарного изгибающего момента откладывают в масштабе по одну сторону от нулевой оси и соединяют кривой линией.

По построенным эпюрам определяем опасные сечения, в которых одновременно велики абсолютные значения  $M_z$  и  $M_{tot}$ . Теперь в опасном сечении следует найти опасные точки. Круглое поперечное сечение обладает бесконечным множеством главных центральных осей, поэтому нормальные напряжения в произвольной точке  $K$ , возникающие от действия суммарного изгибающего момента  $M_{tot}$ , равны

$$\sigma_K = \frac{M_{tot}}{J} \cdot y_K . \quad (1.12)$$

Понятно, что максимальные нормальные напряжения возникают в точках, принадлежащих внешнему контуру сечения когда  $y = r$  (здесь  $r$  – радиус поперечного сечения вала). Отсюда получаем

$$\sigma_{max} = \frac{M_{tot}}{J} \cdot r = \frac{M_{tot}}{W}, \quad (1.13)$$

где  $W$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения вала.

От действия крутящих моментов  $M_z$  в круглом поперечном сечении вала возникают касательные напряжения  $\tau_K$ , изменяющиеся по закону

$$\tau_K = \frac{M_z}{J_p} \cdot \rho_K , \quad (1.14)$$

где  $J_p$  – полярный момент инерции поперечного сечения вала;

$\rho_K$  – полярная координата рассматриваемой точки.

Максимальные касательные напряжения возникают в точках, принадлежащих внешнему контуру сечения вала, при  $\rho = r$ , следовательно,

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{J_p} \cdot r = \frac{M_z}{W_p}, \quad (1.15)$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления вала.

В окрестности наиболее опасной точки вала при совместном действии изгиба с кручением реализуется плоское напряженное состояние. Аналогичное напряженное состояние возникает и в случае поперечного изгиба бруса.

При совместном действии изгиба с кручением валы круглого поперечного сечения рассчитываются на прочность, как балки, работающие на изгиб, при действии на нее расчетного момента  $M_{calc}$ :

$$\frac{M_{calc}}{W} \leq R . \quad (1.16)$$

Для проверки прочности элемента, выделенного в окрестности опасной точки, нужно выбрать соответствующую теорию прочности. Величина расчетных моментов по четырем классическим гипотезам прочности определяются по следующим формулам:

– гипотеза наибольших нормальных напряжений:

$$M_{calcI} = \frac{1}{2} \left( M_{tot} + \sqrt{M_{tot}^2 + M_z^2} \right);$$

- гипотеза наибольших относительных удлинений (при коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,3$ ):

$$M_{calcII} = 0,35M_{tot} + 0,65\sqrt{M_{tot}^2 + M_z^2};$$

- гипотеза наибольших касательных напряжений:

$$M_{calcIII} = \sqrt{M_{tot}^2 + M_z^2};$$

- гипотеза потенциальной энергии формоизменения:

$$M_{calcIV} = \sqrt{M_{tot}^2 + 0,75M_z^2}.$$

## 2 ПРИМЕР РАСЧЕТА БАЛКИ НА КОСОЙ ИЗГИБ

Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения с соотношением размеров  $h/b = 2/1$  загружена системой внешних нагрузок, приложенных в вертикальной и горизонтальной плоскости (рис. 2.1). В опорных устройствах балки возникают реактивные усилия, действующие как направлении оси  $x$ , так и оси  $y$ . Требуется:

- 1) показать схемы работы балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях и построить эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ ;
- 2) установить положение опасного сечения;
- 3) из условия прочности при косом изгибе подобрать необходимые размеры поперечного сечения балки при расчетном сопротивлении материала  $R = 10$  МПа;
- 4) определить положение нейтральной линии в опасном сечении балки и построить для указанного сечения эпюру распределения нормальных напряжений в аксонометрии.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматриваем загружение балки в вертикальной плоскости. Воспользовавшись уравнениями статики, находим вертикальные опорные реакции

$$\sum m_A = 0;$$

$$V_B = \frac{F_1 \cdot (a+b+c) + q_2 \cdot (a+b)^2 / 2}{(a+b)} = \frac{2,0 \cdot 4,0 + 1,4 \cdot 3,3^2 / 2}{3,3} = 4,734 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0;$$

$$V_A = \frac{-F_1 \cdot c + q_2 \cdot (a+b)^2 / 2}{(a+b)} = \frac{-2,0 \cdot 0,7 + 1,4 \cdot 3,3^2 / 2}{3,3} = 1,886 \text{ кН}.$$

## Проверка

$$\sum y = 0; -V_A - V_B + F_1 + q_2 \cdot (a+b) = -1,886 - 4,734 + 2,0 + 1,4 \cdot 3,3 = 0.$$

Используя полученные значения опорных реакций балки, строим эпюру моментов  $M_x$ , вызывающих изгиб бруса в вертикальной плоскости.

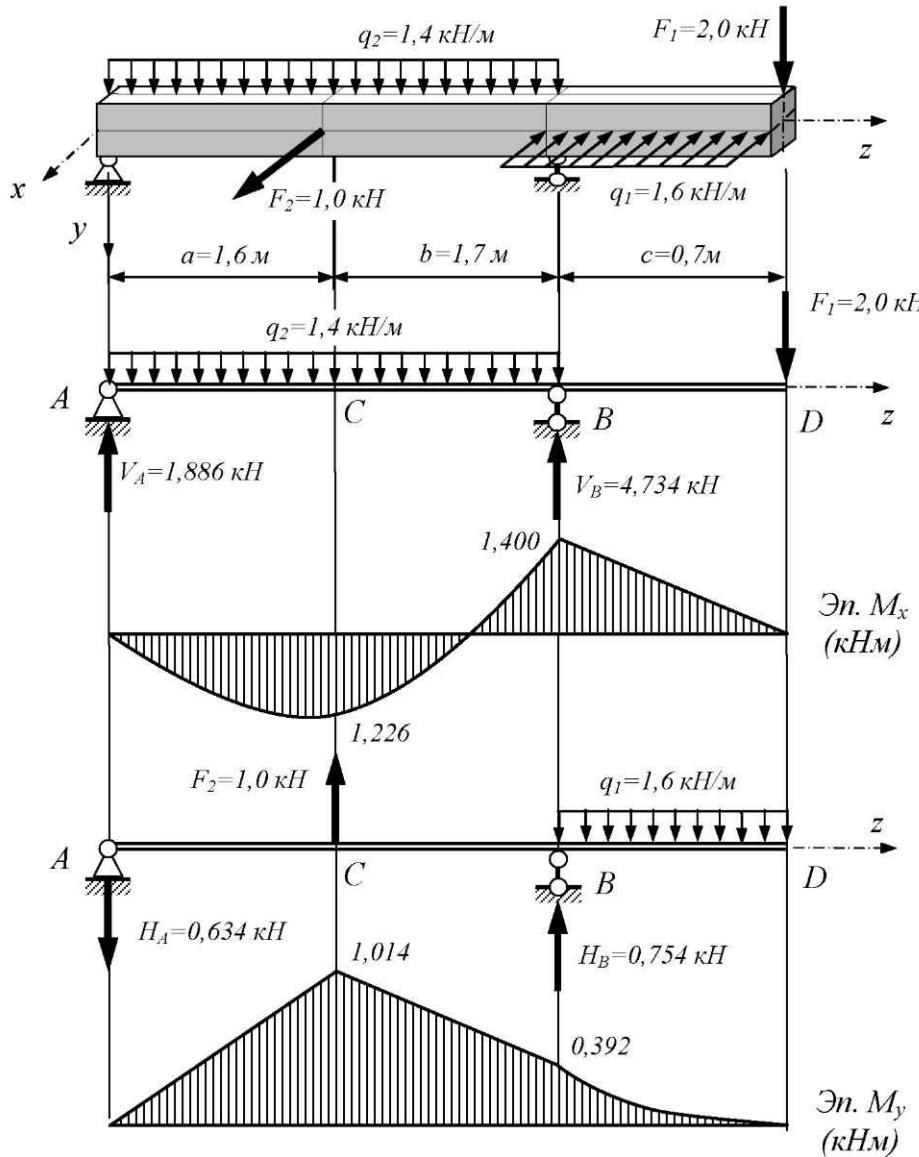


Рисунок 2.1 – К расчету балки, работающей на косой изгиб

Аналогичным образом рассматриваем работу балки в горизонтальной плоскости. Используя уравнения статики, определяем горизонтальные опорные реакции

$$\sum m_A = 0;$$

$$H_B = \frac{-F_2 \cdot a + q_1 \cdot c \cdot (a+b+c/2)}{(a+b)} = \frac{-1,0 \cdot 1,6 + 1,6 \cdot 0,7 \cdot 3,65}{3,3} = 0,754\text{ kH};$$

$$\sum m_B = 0; \quad H_A = \frac{F_2 \cdot b + q_1 \cdot c^2 / 2}{(a+b)} = \frac{1,0 \cdot 1,7 + 1,6 \cdot 0,7^2 / 2}{3,3} = 0,634 \text{ кН.}$$

Проверка

$$\sum x = 0; \quad -H_A + H_B + F_2 - q_1 \cdot c = -0,634 + 0,754 + 1,0 - 1,6 \cdot 0,7 = 0.$$

Используя найденные значения опорных реакций, строим эпюру моментов  $M_y$ , изгибающих заданную балку в горизонтальной плоскости. Анализируя построенные эпюры, приходим к выводу, что опасное сечение балки расположено в точке  $C$ , где моменты  $M_x$  и  $M_y$  достигают значительных величин.

Запишем выражения для вычисления геометрических характеристик заданного прямоугольного сечения. Учитывая заданное соотношение сторон  $h/b = 4/1$ , получаем

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(2b)^3}{12} = 0,667b^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{2b(b)^3}{12} = 0,167b^4;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 0,667b^3; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{2b(b)^2}{6} = 0,333b^3.$$

Определяем положение нейтральной линии в опасном сечении

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = \frac{0,667b^4}{0,167b^4} \cdot \frac{1,014}{1,226} = 3,302; \quad \varphi = 73,15^\circ.$$

Полученный угол откладываем от оси  $Ox$ . Направление действия результирующего момента  $M_{tot}$  в рассматриваемом сечении бруса составляет угол  $\alpha$  с вертикальной осью  $Oy$ , тогда,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_y}{M_x} = \frac{1,014}{1,226} = 0,827; \quad \alpha = 39,59^\circ.$$

Подбор размеров поперечного сечения выполняем по условию прочности по максимальным нормальным напряжениям при косом изгибе

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

Подставляя в это условие ранее полученные выражения для моментов сопротивления поперечного сечения, получаем

$$\sigma_{max} = \frac{1,226 \cdot 10^3}{0,667b^3} + \frac{1,014 \cdot 10^3}{0,333b^3} \leq R = 10 \cdot 10^6,$$

откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{4,883 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0,0787 \text{ м.}$$

Округляем полученные размеры поперечного сечения деревянной балки до целых сантиметров и окончательно принимаем  $b = 8 \text{ см}$ ,  $h = 16 \text{ см}$ .

Определяем значения нормальных напряжений в угловых точках поперечного сечения 1, 2, 3 и 4. В опасном сечении изгибающий момент  $M_x$  растягивает грань 3–4 и сжимает грань 1–2, а изгибающий момент  $M_y$  растягивает грань 1–4 и сжимает грань 2–3.

$$\sigma_{(1)} = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{1,226 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,08^3} + \frac{1,014 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,08^3} = -3,590 + 5,947 = 2,357 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{(2)} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{1,226 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,08^3} - \frac{1,014 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,08^3} = -3,590 - 5,947 = -9,537 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = \frac{1,226 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,08^3} - \frac{1,014 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,08^3} = 3,590 - 5,947 = -2,357 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{(4)} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{1,226 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,08^3} + \frac{1,014 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,08^3} = 3,590 + 5,947 = 9,537 \text{ МПа.}$$

По найденным значениям строим эпюру распределения нормальных напряжений в опасном сечении в аксонометрии.

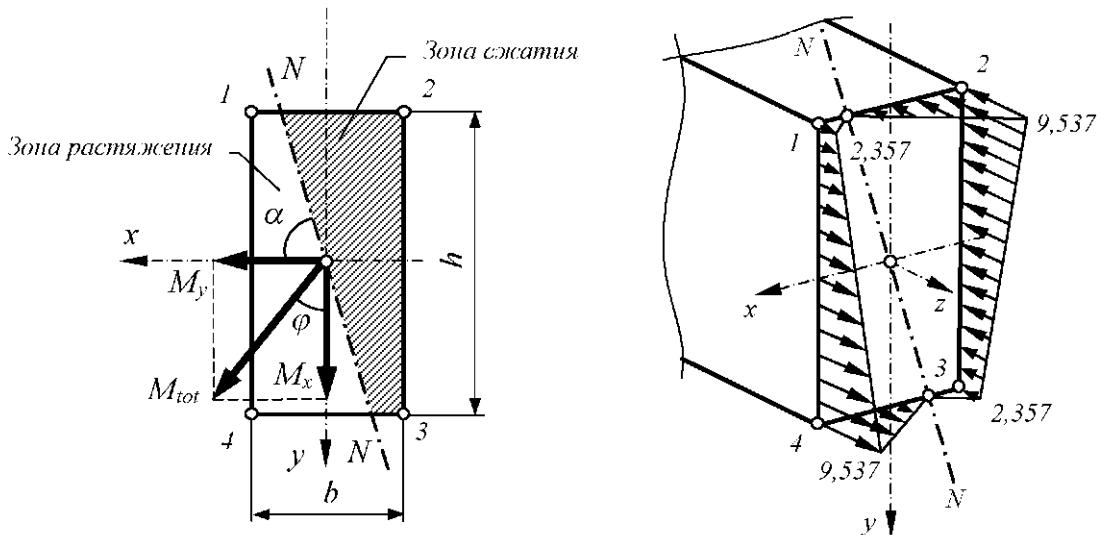


Рисунок 2.2 – Построение эпюры нормальных напряжений  $\sigma$

### 3 ПРИМЕР РАСЧЕТА КОРОТКОЙ ЧУГУННОЙ СТОЙКИ НА ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рисунке 3.1, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $A$ . Расчетные сопротивления материала: на сжатие  $R_c = 120$  МПа, на растяжение  $R_t = 30$  МПа. Для заданной стойки требуется:

- 1) определить положение главных центральных осей инерции и вычислить необходимые геометрические характеристики;
- 2) найти положение нейтральной линии при приложении силы в заданной точке поперечного сечения;
- 3) установить положение и определить координаты опасных точек сечения;
- 4) из условия прочности материала в опасных точках определить допускаемую величину продольной силы;
- 5) построить ядро сечения;
- 6) построить эпюры распределения нормальных напряжений по сечению при перемещении точки приложения нормальной силы вдоль прямой, соединяющей заданную точку ее приложения с центром тяжести поперечного сечения. Напряжения вычислять при следующих точках приложения силы: а) в заданной точке; б) в точке пересечения ранее указанной прямой с границей ядра сечения; в) в середине отрезка между точкой, лежащей на границе ядра сечения и центром тяжести; г) в центре тяжести сечения.

#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Определяем геометрические характеристики сечения. Сечение разбиваем на четыре элемента. Площади элементов сечения равны:

$$A_1 = 2a \cdot a = 12 \cdot 6 = 72 \text{ см}^2; A_2 = 2b \cdot b = 8 \cdot 4 = 32 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = -b \cdot b = -4 \cdot 4 = -16 \text{ см}^2; A_4 = \pi \cdot b^2 / 2 = 3,14 \cdot 4^2 / 2 = 25,12 \text{ см}^2.$$

Выбираем вспомогательную систему координат  $\xi$  и  $\eta$ , направляя эти оси, как показано на рисунке. Определяем координаты центров тяжести элементов сечения. Ввиду симметрии заданного сечения относительно горизонтальной оси,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$  см.

$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = \xi_3 = \frac{6}{2} + \frac{4}{2} = 5 \text{ см}; \quad \xi_4 = \frac{6}{2} + 4 + \frac{4 \cdot 4}{3,14 \cdot 3} = 8,70 \text{ см}.$$

Находим координаты центра тяжести сечения в целом:

$$\eta_c = \frac{\sum A_i \eta_i}{\sum A_i} = 0 \text{ см}; \xi_c = \frac{\sum A_i \xi_i}{\sum A_i} = \frac{72 \cdot 0 + 32 \cdot 5,0 - 16 \cdot 5,0 + 25,12 \cdot 8,7}{72 + 32 - 16 + 25,12} = 2,64 \text{ см.}$$

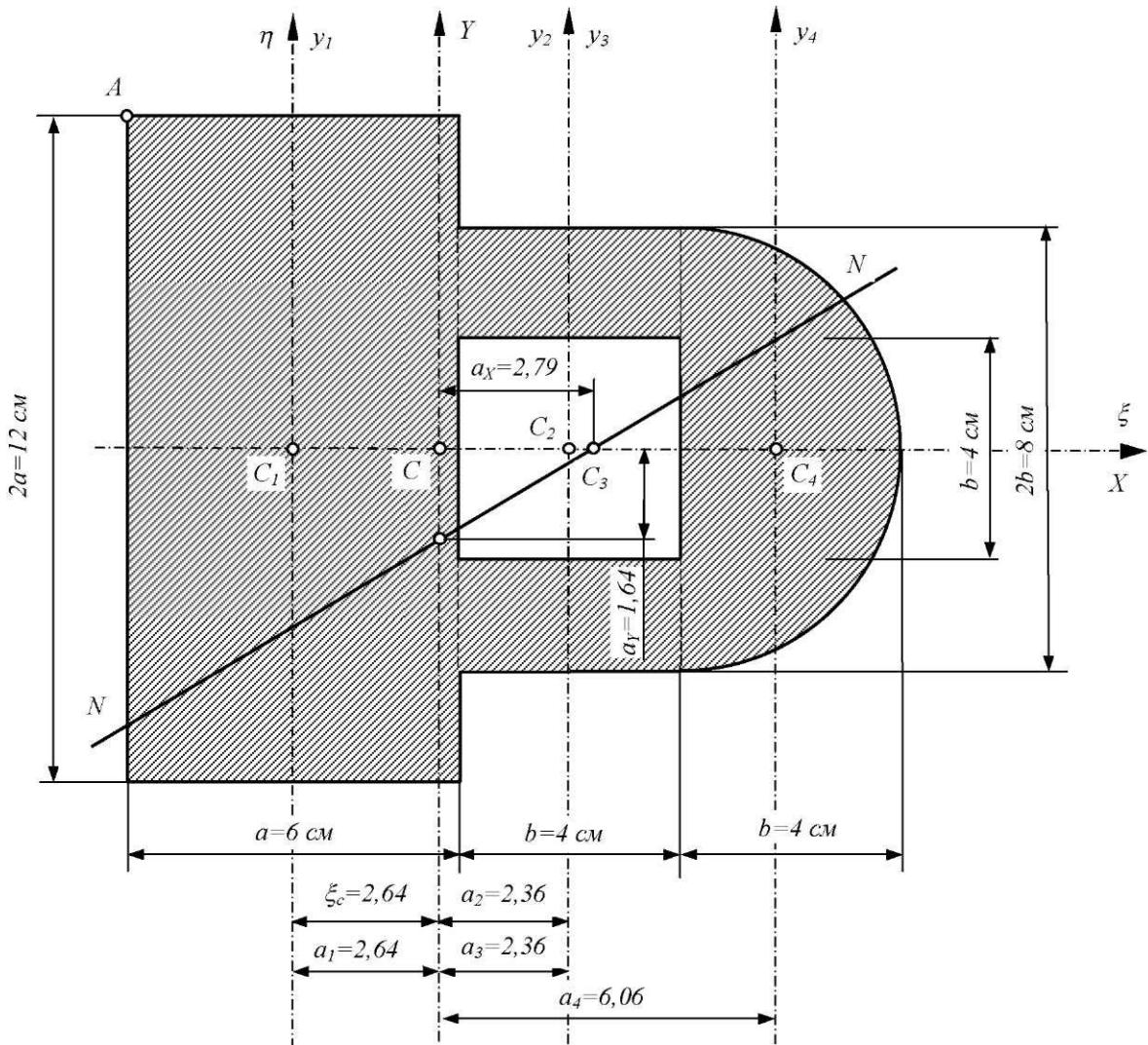


Рисунок 3.1 – Определение геометрических характеристик сечения стойки

Через полученную точку центра тяжести сечения проводим центральные оси  $X$  и  $Y$ . Координаты центров тяжести элементов в системе главных осей:

$$a_1 = \xi_1 - \xi_c = 0 - 2,64 = -2,64 \text{ см}; \quad a_2 = a_3 = \xi_2 - \xi_c = 5 - 2,64 = 2,36 \text{ см};$$

$$a_4 = \xi_4 - \xi_c = 8,70 - 2,64 = 6,06 \text{ см.}$$

Находим суммарную площадь поперечного сечения стойки:

$$A = \sum A_i = 72 + 32 - 16 + 25,12 = 113,12 \text{ см}^2.$$

Вычисляем осевые моменты инерции:

$$\begin{aligned}
J_X &= J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3} + J_{x_4} = \frac{12^3 \cdot 6}{12} + \frac{8^3 \cdot 4}{12} - \frac{4^4}{12} + \frac{3,14 \cdot 8^4}{128} = 1113,81 \text{ см}^4; \\
J_Y &= (J_{y_1} + a_1^2 A_1) + (J_{y_2} + a_2^2 A_2) + (J_{y_3} + a_3^2 A_3) + (J_{y_4} + a_4^2 A_4) = \\
&= \left( \frac{12 \cdot 6^3}{12} + (-2,64)^2 \cdot 72 \right) + \left( \frac{8 \cdot 4^3}{12} + 2,36^2 \cdot 32 \right) - \left( \frac{4^4}{12} + 2,36^2 \cdot 16 \right) + \\
&\quad + \left( 0,14 \cdot \frac{3,14 \cdot 8^4}{64} + 6,06^2 \cdot 25,12 \right) = 1778,89 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Определяем квадраты главных радиусов инерции:

$$i_X^2 = \frac{J_X}{A} = \frac{1113,81}{113,12} = 9,85 \text{ см}^2; \quad i_Y^2 = \frac{J_Y}{A} = \frac{1778,89}{113,12} = 15,73 \text{ см}^2.$$

По чертежу определяем координаты приложения сжимающей силы  $F$  в системе главных центральных осей  $X$  и  $Y$ .

$$X_F = -5,64 \text{ см}; \quad Y_F = 6 \text{ см}.$$

Определяем опасные точки поперечного сечения, для чего находим положение нейтральной линии. Вычисляем величину отрезков, отсекаемых этой линией от главных центральных осей инерции сечения:

$$a_X = -\frac{i_Y^2}{X_F} = -\frac{15,73}{(-5,64)} = 2,79 \text{ см}; \quad a_Y = -\frac{i_X^2}{Y_F} = -\frac{9,85}{6} = -1,64 \text{ см}.$$

Откладываем полученные отрезки на чертеже и проводим нейтральную линию для заданного сечения. Опасными точками сечения будут точки  $A$  и  $B$ , как наиболее удаленные от нейтральной линии. По чертежу определяем координаты опасных точек:

$$X_A = -5,64 \text{ см}; \quad Y_A = 6 \text{ см}; \quad X_B = 6,31 \text{ см}; \quad Y_B = -3,52 \text{ см}.$$

В точке  $A$  рассматриваемого сечения возникают максимальные сжимающие, а в точке  $B$  – максимальные растягивающие напряжения. Исходя из условия прочности в опасных точках поперечного сечения стойки, работающей на внецентренное растяжение или сжатие, определяем величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_A &= -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{X_F \cdot X_A}{i_Y^2} + \frac{Y_F \cdot Y_A}{i_X^2} \right] = -\frac{F}{113,12 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[ 1 + \frac{(-5,64) \cdot (-5,64)}{15,73} + \frac{6 \cdot 6}{9,85} \right] = \\
&= -590,26 F \leq R_c = 120 \text{ МПа};
\end{aligned}$$

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{X_F \cdot X_B}{i_y^2} + \frac{Y_F \cdot Y_B}{i_x^2} \right] = -\frac{F}{113,12 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[ 1 + \frac{(-5,64) \cdot 6,31}{15,73} + \frac{6 \cdot 3,52}{9,85} \right] = 301,16 F \leq R_t = 30 \text{ МПа.}$$

$$F \leq \frac{120 \cdot 10^6}{590,26} = 203,30 \text{ кН}; \quad F \leq \frac{30 \cdot 10^6}{301,16} = 99,61 \text{ кН.}$$

В качестве допускаемой сжимающей силы для заданной стойки следует принять наименьшее из двух полученных значений. Следовательно, допускаемая нагрузка равна:  $[F] = 99,61 \text{ кН}$ .

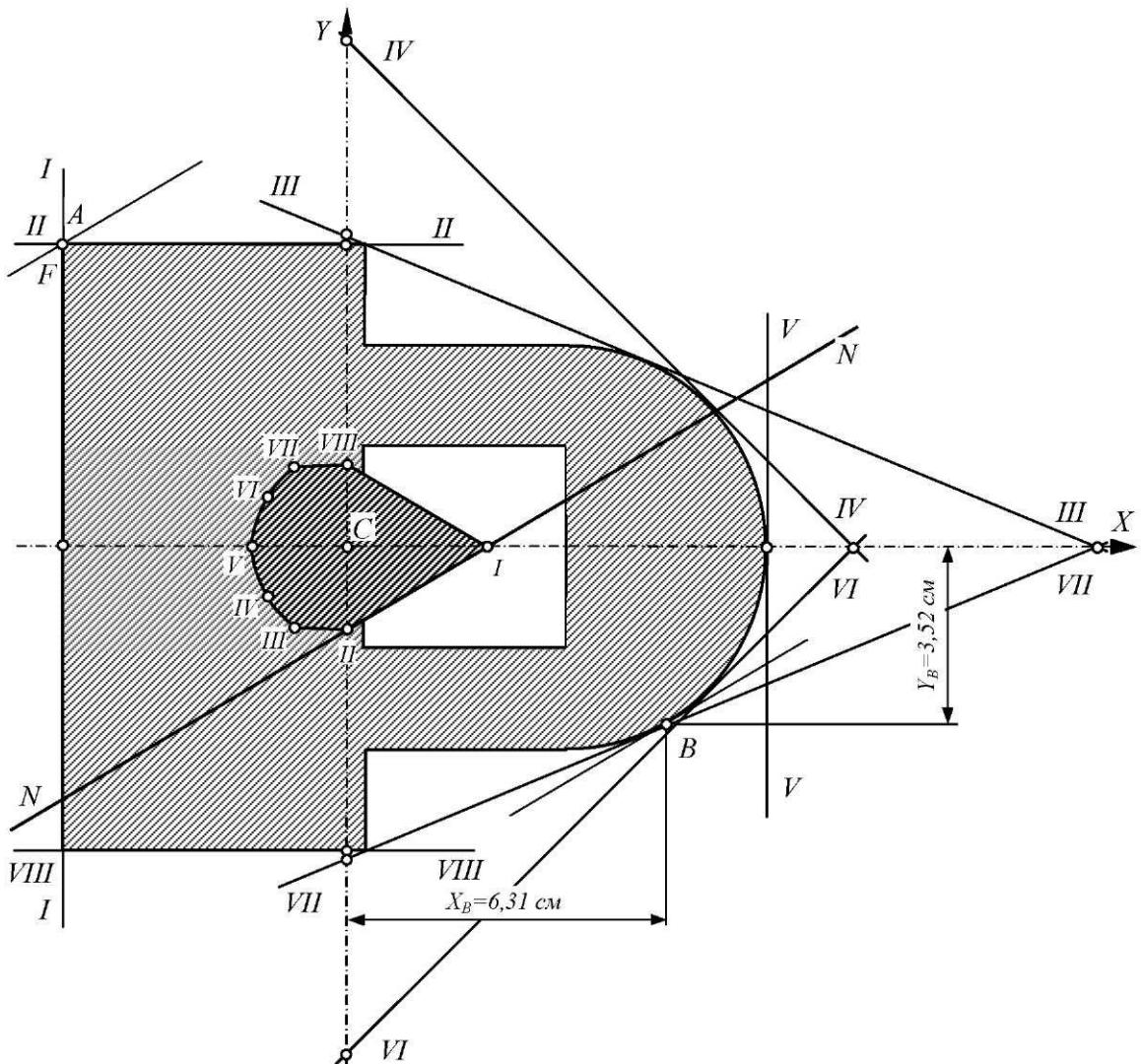


Рисунок 3.2 – Построение ядра сечения

Для построения ядра сечения проводим все возможные касательные к внешнему контуру поперечного сечения внецентренно нагруженной стойки, предполагая, что эти касательные являются нейтральными линия-

ми. Для каждой касательной можно определить отрезки  $a_x$  и  $a_y$ , отсекаемые ими от главных центральных осей поперечного сечения стойки. Координаты граничных точек ядра сечения находим по формулам

$$X_A = -\frac{i_Y^2}{a_X} \text{ и } Y_A = -\frac{i_X^2}{a_Y}.$$

Результаты расчета приведены в табличной форме (табл. 3.1).

Таблица 3.1 – Построение ядра сечения

Касательная	$a_x$ (см)	$a_y$ (см)	$X_A$ (см)	$Y_A$ (см)
I – I	-5,64	$\infty$	2,75	0
II – II	$\infty$	6,0	0	-1,64
III – III	14,96	6,18	-1,05	-1,59
IV – IV	10,08	10,08	-1,56	-0,98
V – V	8,36	$\infty$	-1,88	0

Так как заданное сечение симметрично относительно горизонтальной оси, то и ядро сечения будет симметрично относительно оси  $X$ . Поэтому координаты остальных граничных точек ядра сечения можно не вычислять, а для их определения воспользоваться указанной симметрией. Соединяя полученные точки, получаем искомое ядро сечения.

Строим эпюры распределения нормальных напряжений по поперечному сечению стойки при перемещении точки приложения нормальной силы вдоль прямой  $FC$ . Координаты заданной точки приложения сжимающей силы равны:

$$X_F = -5,64 \text{ см}; \quad Y_F = 6 \text{ см}.$$

Находим величину нормальных напряжений в опасных точках поперечного сечения стойки от действия допускаемой силы  $[F] = 99,61 \text{ кН}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{X_F \cdot X_A}{i_Y^2} + \frac{Y_F \cdot Y_A}{i_x^2} \right] = \\ &= -\frac{99,61 \cdot 10^3}{113,12 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[ 1 + \frac{(-5,64) \cdot (-5,64)}{15,73} + \frac{6 \cdot 6}{9,85} \right] = -58,80 \text{ МПа}; \\ \sigma_B &= -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{X_F \cdot X_B}{i_Y^2} + \frac{Y_F \cdot Y_B}{i_x^2} \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{99,61 \cdot 10^3}{113,12 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[ 1 + \frac{(-5,64) \cdot 6,31}{15,73} + \frac{6 \cdot 3,52}{9,85} \right] = 29,998 \approx 30 \text{ МПа.}$$

Определяем по чертежу координаты точки пересечения прямой  $FC$  с границей ядра сечения:

$$X_{F1} = -1,28 \text{ см}; \quad Y_{F1} = 1,36 \text{ см.}$$

Вычисляем нормальные напряжения в опасных точках сечения при новом положении сжимающей силы

$$\begin{aligned} \sigma_{A1} &= -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{X_{F1} \cdot X_A}{i_Y^2} + \frac{Y_{F1} \cdot Y_A}{i_x^2} \right] = \\ &= -\frac{99,61 \cdot 10^3}{113,12 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[ 1 + \frac{(-1,28) \cdot (-5,64)}{15,73} + \frac{1,36 \cdot 6}{9,85} \right] = -20,36 \text{ МПа;} \\ \sigma_{B1} &= -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{X_{F1} \cdot X_B}{i_Y^2} + \frac{Y_{F1} \cdot Y_B}{i_x^2} \right] = \\ &= -\frac{99,61 \cdot 10^3}{113,12 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[ 1 + \frac{(-1,28) \cdot 6,31}{15,73} + \frac{1,36 \cdot 3,52}{9,85} \right] = 0,005 \approx 0 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Координаты точки, находящейся в середине отрезка между границей ядра сечения и центром тяжести поперечного сечения равны

$$X_{F2} = -0,64 \text{ см}; \quad Y_{F2} = 0,68 \text{ см.}$$

Нормальные напряжения в опасных точках сечения при этом положении точки сжимающей силы

$$\begin{aligned} \sigma_{A2} &= -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{X_{F2} \cdot X_A}{i_Y^2} + \frac{Y_{F2} \cdot Y_A}{i_x^2} \right] = \\ &= -\frac{99,61 \cdot 10^3}{113,12 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[ 1 + \frac{(-0,64) \cdot (-5,64)}{15,73} + \frac{0,68 \cdot 6}{9,85} \right] = -14,58 \text{ МПа;} \\ \sigma_{B2} &= -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{X_{F2} \cdot X_B}{i_Y^2} + \frac{Y_{F2} \cdot Y_B}{i_x^2} \right] = \\ &= -\frac{99,61 \cdot 10^3}{113,12 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[ 1 + \frac{(-0,64) \cdot 6,31}{15,73} + \frac{0,68 \cdot 3,52}{9,85} \right] = -4,41 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

При приложении продольной силы в центре тяжести сечения получаем

$$\sigma_{A3} = \sigma_{B3} = -\frac{F}{A} = -\frac{99,61 \cdot 10^3}{113,12 \cdot 10^{-4}} = -8,81 \text{ МПа.}$$

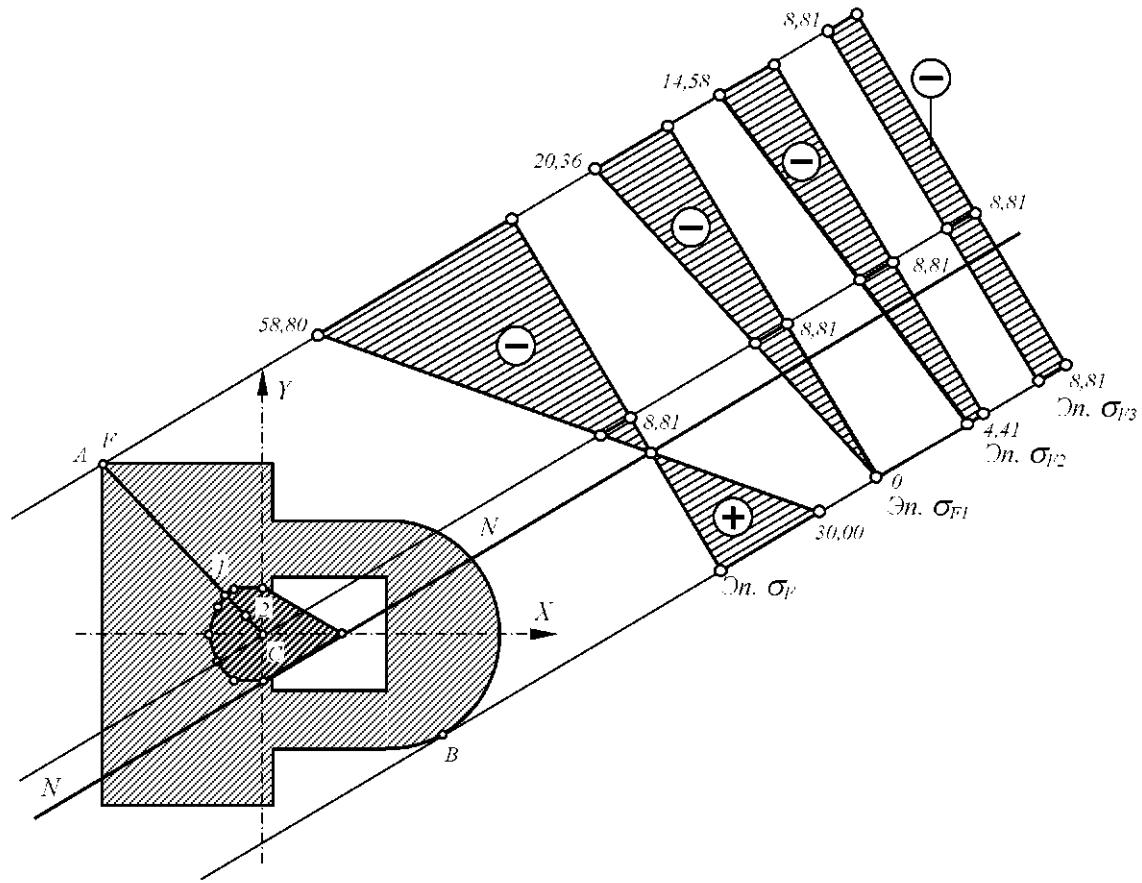


Рисунок 3.3 – Эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении внецентренно сжатой стойки

По полученным значениям строим эпюры распределения нормальных напряжений по поперечному сечению внецентренно сжатой стойки. Необходимо отметить, что при всех положениях точки приложения силы  $F$  напряжения в центре тяжести сечения одинаково. Нулевая линия при построении эпюр нормальных напряжений перпендикулярна нейтральной линии  $N-N$ . Как следует из чертежа (рис. 3.3), центр тяжести делит нулевую линию в пропорции  $0,4327/0,5673$ . Тогда напряжения в центре тяжести поперечного сечения при различных точках приложения силы  $F$  равны:

- точка  $A$ :  $\sigma_C = 30 - (30 + 58,80) \cdot 0,4327 = -8,424 \text{ МПа};$
- точка 1:  $\sigma_{C1} = -20,36 \cdot 0,4327 = -8,810 \text{ МПа};$
- точка 2:  $\sigma_{C2} = -4,41 - (14,58 - 4,41) \cdot 0,4327 = -8,811 \text{ МПа};$
- точка  $C$ :  $\sigma_{C3} = -8,810 \text{ МПа.}$

## 4 ПРИМЕР РАСЧЕТА ВАЛА НА СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

Шкив с диаметром  $D_1$  и с углом наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_1$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  (делает  $n$  оборотов в минуту) и передает мощность  $N$  кВт (рис. 4.1). Два других шкива имеют одинаковый диаметр  $D_2$  и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_2$ . Каждый из них передает мощность  $N/2$ .

Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам  $N$  и  $n$ ;
- 2) построить эпюру крутящих моментов  $M_z$ ;
- 3) определить окружные усилия  $t_1$  и  $t_2$ , действующие на шкивы по найденным моментам и диаметрам шкивов  $D_1$  и  $D_2$ ;
- 4) определить давления на вал;
- 5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
- 6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил  $M_{гор}$  и вертикальных сил  $M_{верт}$ ;
- 7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов, используя формулу  $M_u = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2}$ ;
- 8) найти опасное сечение и определить величину максимального расчетного момента (по третьей теории прочности);
- 9) подобрать необходимый диаметр вала  $d$  при расчетном сопротивлении материала  $R = 70$  МПа.

Исходные данные задачи:  $N = 40$  кВт;  $n = 600$  об/мин;  $a = 1,8$  м;  $b = 1,4$  м;  $c = 1,6$  м;  $D_1 = 1,4$  м;  $D_2 = 0,6$  м;  $\alpha_1 = 40^\circ$ ;  $\alpha_2 = 60^\circ$ .

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Используя заданные значения мощности  $N$  и числа оборота вала в минуту  $n$ , находим крутящий момент  $M_1$ , приложенный к ведущему шкиву

$$M_1 = 9736 \frac{N}{n} = 9736 \cdot \frac{40}{600} = 649,1 \text{Нм} = 0,649 \text{ кНм}$$

Крутящие моменты, приложенные к ведомым, шкивам равны

$$M_2 = \frac{M_1}{2} = \frac{0,649}{2} = 0,325 \text{ кНм.}$$

Определяем крутящие моменты, действующие на грузовых участках заданного вала:

$$M_{zI} = M_{zII} = M_2 = 0,325 \text{ кНм};$$

$$M_{zIII} = M_{zIV} = M_2 - M_1 = 0,325 - 0,649 = -0,325 \text{ кНм.}$$

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов.

Определяем окружные усилия, действующие на шкивы. Окружные усилия, приложенные к шкиву диаметром  $D_1$ :

$$M_1 = \frac{T_1 \cdot D_1}{2} - \frac{t_1 \cdot D_1}{2} = \frac{t_1 \cdot D_1}{2}, \text{ тогда } t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,649}{1,4} = 0,927 \text{ кН.}$$

Окружные усилия, приложенные к шкиву диаметром  $D_2$ :

$$M_2 = \frac{T_2 \cdot D_2}{2} - \frac{t_2 \cdot D_2}{2} = \frac{t_2 \cdot D_2}{2}, \text{ тогда } t_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,325}{0,6} = 1,083 \text{ кН.}$$

Вычисляем давления, передаваемые в местах крепления шкивов на вал:

$$F_1 = 3t_1 = 3 \cdot 0,927 = 2,781 \text{ кН; } F_2 = 3t_2 = 3 \cdot 1,083 = 3,249 \text{ кН.}$$

Определяем силы, изгибающие вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 2,781 \cdot 0,7660 = 2,130 \text{ кН;}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 3,242 \cdot 0,5000 = 1,621 \text{ кН;}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 2,781 \cdot 0,6428 = 1,788 \text{ кН;}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 3,242 \cdot 0,8660 = 2,808 \text{ кН.}$$

Используя полученные значения проекций сил, действующих на вал, строим эпюры изгибающих моментов в вертикальной ( $M_x$ ) и горизонтальной ( $M_y$ ) плоскостях.

Рассмотрим силы, действующие на вал в вертикальной плоскости. Определяем опорные реакции вала:

$$\sum m_A = 0; \quad V_B \cdot (b+c) + F_{2y} \cdot a - F_{1y} \cdot b - F_{2y} \cdot (a+b+c) = 0;$$

$$V_B = \frac{-2,808 \cdot 1,8 + 1,788 \cdot 1,4 + 2,808 \cdot (1,8 + 1,4 + 1,6)}{(1,4 + 1,6)} = 3,642 \text{ кН;}$$

$$\sum m_B = 0; \quad V_A \cdot (b+c) + P_{2y} \cdot a - P_{1y} \cdot c - P_{2y} \cdot (a+b+c) = 0;$$

$$V_A = \frac{-2,808 \cdot 1,8 + 1,788 \cdot 1,6 + 2,808 \cdot (1,8 + 1,4 + 1,6)}{(1,4 + 1,6)} = 3,762 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum y = 0; \quad V_A + V_B - 2F_{2y} - F_{1y} = 0;$$

$$3,642 + 3,762 - 2 \cdot 2,808 - 1,788 = 7,404 - 7,404 = 0,$$

следовательно, опорные реакции вала в вертикальной плоскости найдены верно. Используя полученные значения опорных реакций, строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости  $M_x$ .

Рассмотрим силы, действующие на вал в горизонтальной плоскости. Определяем опорные реакции вала:

$$\sum m_A = 0; \quad H_B \cdot (b + c) + F_{2x} \cdot a + F_{1x} \cdot b - F_{2x} \cdot (a + b + c) = 0;$$

$$H_B = \frac{-1,621 \cdot 1,8 - 2,130 \cdot 1,4 + 1,621 \cdot (1,8 + 1,4 + 1,6)}{(1,4 + 1,6)} = 0,627 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0; \quad H_A \cdot (b + c) + F_{2x} \cdot a + F_{1x} \cdot c - F_{2x} \cdot (a + b + c) = 0;$$

$$H_A = \frac{-1,621 \cdot 1,8 - 2,130 \cdot 1,6 + 1,621 \cdot (1,8 + 1,4 + 1,6)}{(1,4 + 1,6)} = 0,485 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum x = 0; \quad H_A + H_B - 2F_{2x} + F_{1x} = 0;$$

$$0,485 + 0,627 - 2 \cdot 1,621 + 2,130 = 3,242 - 3,242 = 0,$$

следовательно, опорные реакции вала в горизонтальной плоскости найдены верно. Используя полученные значения опорных реакций, строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости  $M_y$ .

Строим суммарную эпюру изгибающих моментов  $M_{tot}$  по формуле:

$$M_{tot} = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2};$$

$$M_{totA} = \sqrt{5,054^2 + 2,918^2} = 5,836 \text{ кНм};$$

$$M_{totF} = \sqrt{3,720^2 + 4,508^2} = 5,845 \text{ кНм};$$

$$M_{totB} = \sqrt{5,054^2 + 2,918^2} = 5,836 \text{ кНм}.$$

Определяем положение опасного сечения вала. В опасном сечении  $F$  действуют следующие внутренние силовые факторы:

$$M_{tot}^{on} = 5,845 \text{ кНм}; \quad M_z^{on} = 0,325 \text{ кНм}.$$

Расчетный момент по третьей гипотезе прочности равен

$$M_{calcIII} = \sqrt{(M_{tot}^{on})^2 + (M_z^{on})^2} = \sqrt{5,845^2 + 0,325^2} = 5,854 \text{ кНм}.$$

Определяем диаметр вала из условия прочности при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{calcIII}}{W} \leq R = 70 \text{ МПа},$$

где  $W = \frac{\pi d^3}{32}$  – осевой момент сопротивления круглого сечения.

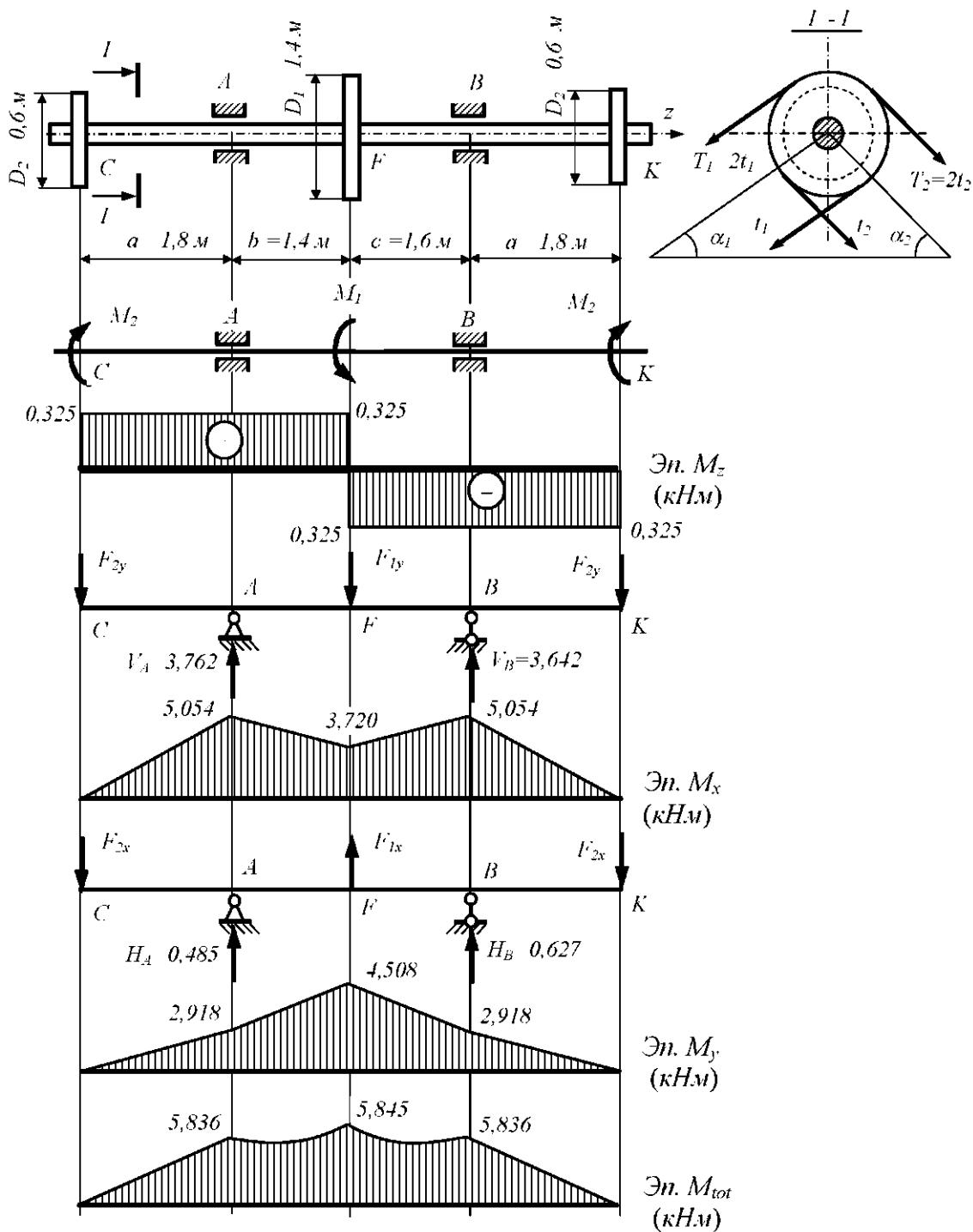


Рисунок 4.1 – Расчет вала на совместное действие изгиба и кручения

Тогда требуемый диаметр сечения вала равен:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{calcIII}}{\pi R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5,854 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,048 \text{ м.}$$

Воспользовавшись предпочтительным рядом чисел (30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм), определяем необходимые размеры поперечного сечения вала. Окончательно принимаем его диаметр  $d = 50$  мм.

## 5 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

В состав расчетно-графической работы входят две задачи: расчет короткой стойки на внецентренное растяжение или сжатие (рис. 5.1) и расчет деревянной балки на косой изгиб (рис. 5.2).

Задание выдается трехзначным шифром. Первая пара цифр обозначает номер схемы для первой задачи, вторая пара – номер схемы для второй задачи, третья пара – номер строки исходных данных из таблиц 5.1 и 5.2.

При выполнении расчетно-графической работы в пояснительной записке должны быть отражены следующие этапы расчета:

### 1 Внецентренное растяжение-сжатие короткой стойки.

- 1.1 Для заданного поперечного сечения стойки определить положение главных центральных осей инерции и вычислить необходимые геометрические характеристики.
- 1.2 Найти положение нейтральной линии при приложении силы в заданной точке поперечного сечения. Установить положение и определить координаты опасных точек сечения.
- 1.3 Из условия прочности в опасных точках определить допускаемую величину растягивающей или сжимающей силы.
- 1.4 Построить ядро сечения.
- 1.5 Построить эпюры распределения нормальных напряжений по сечению при перемещении точки приложения нормальной силы вдоль прямой, соединяющей заданную точку ее приложения с центром тяжести поперечного сечения. Напряжения вычислять при следующих точках приложения силы: а) в заданной точке; б) в точке пересечения указанной прямой с границей ядра сечения; в) в середине отрезка между точкой, лежащей на границе ядра сечения и центром тяжести; г) в центре тяжести сечения.

### 2 Косой изгиб прямого бруса.

- 2.1 Для заданной балки построить эпюры изгибающих моментов, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях.
- 2.2 Установить положение опасного сечения.
- 2.3 Из условия прочности подобрать необходимые размеры прямоугольного поперечного сечения деревянной балки.
- 2.4 Вычислить нормальные напряжения в крайних точках поперечного сечения.

2.5 Определить положение нейтральной линии в опасном сечении и построить для этого сечения эпюру нормальных напряжений в аксонометрии.

Таблица 5.1 – Исходные данные к задаче «Внекентренное растяжение или сжатие короткой стойки

№ п/п	$a$ , см	$b$ , см	$x_r$ , см	$y_r$ , см	Направление силы	$R_c$ , МПа	$R_t$ , МПа
1	1,0	1,9	2,5	2,0	сжатие	500	120
2	1,1	1,8	2,6	2,2	растяжение	520	130
3	1,2	1,7	2,7	2,2	растяжение	540	140
4	1,3	1,6	2,8	2,3	сжатие	560	150
5	1,4	1,5	2,9	2,4	сжатие	580	160
6	1,5	1,4	2,0	2,5	растяжение	600	180
7	1,6	1,3	2,2	2,6	растяжение	610	200
8	1,7	1,2	2,2	2,7	сжатие	620	210
9	1,8	1,1	2,3	2,8	растяжение	640	220
10	1,9	1,0	2,4	2,9	сжатие	660	230
11	1,5	1,0	2,5	2,0	сжатие	680	240
12	1,6	1,1	2,6	2,2	растяжение	700	250
13	1,7	1,2	2,7	2,2	растяжение	690	230
14	1,8	1,3	2,8	2,3	сжатие	680	210
15	1,9	1,4	2,9	2,4	растяжение	670	190
16	1,0	1,5	2,0	2,5	сжатие	660	170
17	1,1	1,6	2,2	2,6	сжатие	650	150
18	1,2	1,7	2,2	2,7	растяжение	640	130
19	1,3	1,8	2,3	2,8	растяжение	630	120
20	1,4	1,9	2,4	2,9	сжатие	620	130
21	1,9	1,5	2,0	2,0	сжатие	610	140
22	1,8	1,6	2,2	2,2	растяжение	600	150
23	1,7	1,7	2,2	2,2	растяжение	590	160
24	1,6	1,8	2,3	2,3	сжатие	580	170
25	1,5	1,9	2,4	2,4	сжатие	570	180
26	1,4	1,0	2,5	2,5	растяжение	560	190
27	1,3	1,1	2,6	2,6	растяжение	550	200
28	1,2	1,2	2,7	2,7	сжатие	540	210
29	1,1	1,3	2,8	2,8	растяжение	530	220
30	1,0	1,4	2,9	2,9	сжатие	520	230
31	2,0	1,5	2,0	2,0	сжатие	510	240
32	1,0	2,0	2,5	2,5	растяжение	500	250

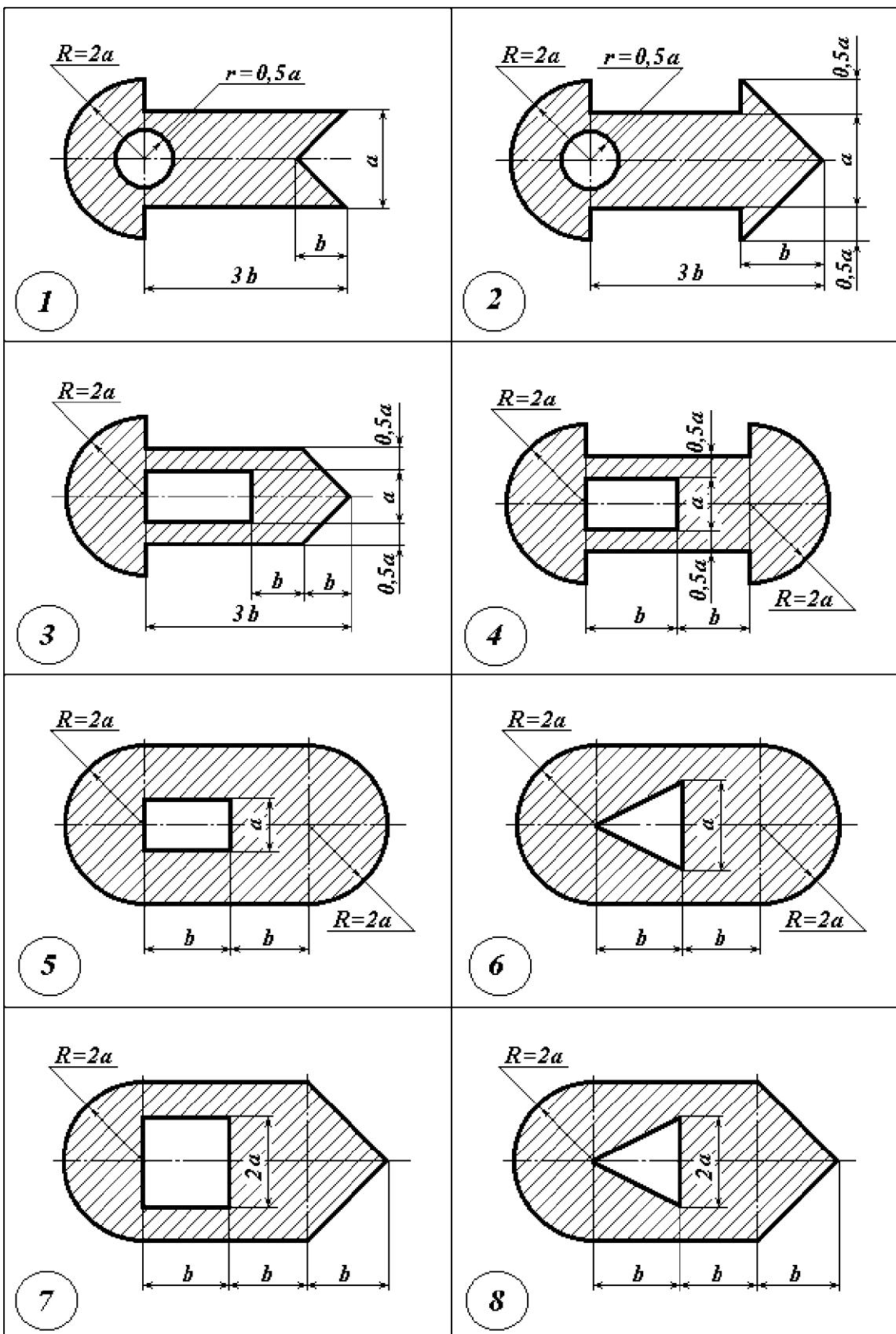


Рисунок 5.1 – Схемы сечений внешнецентренно нагруженной стойки

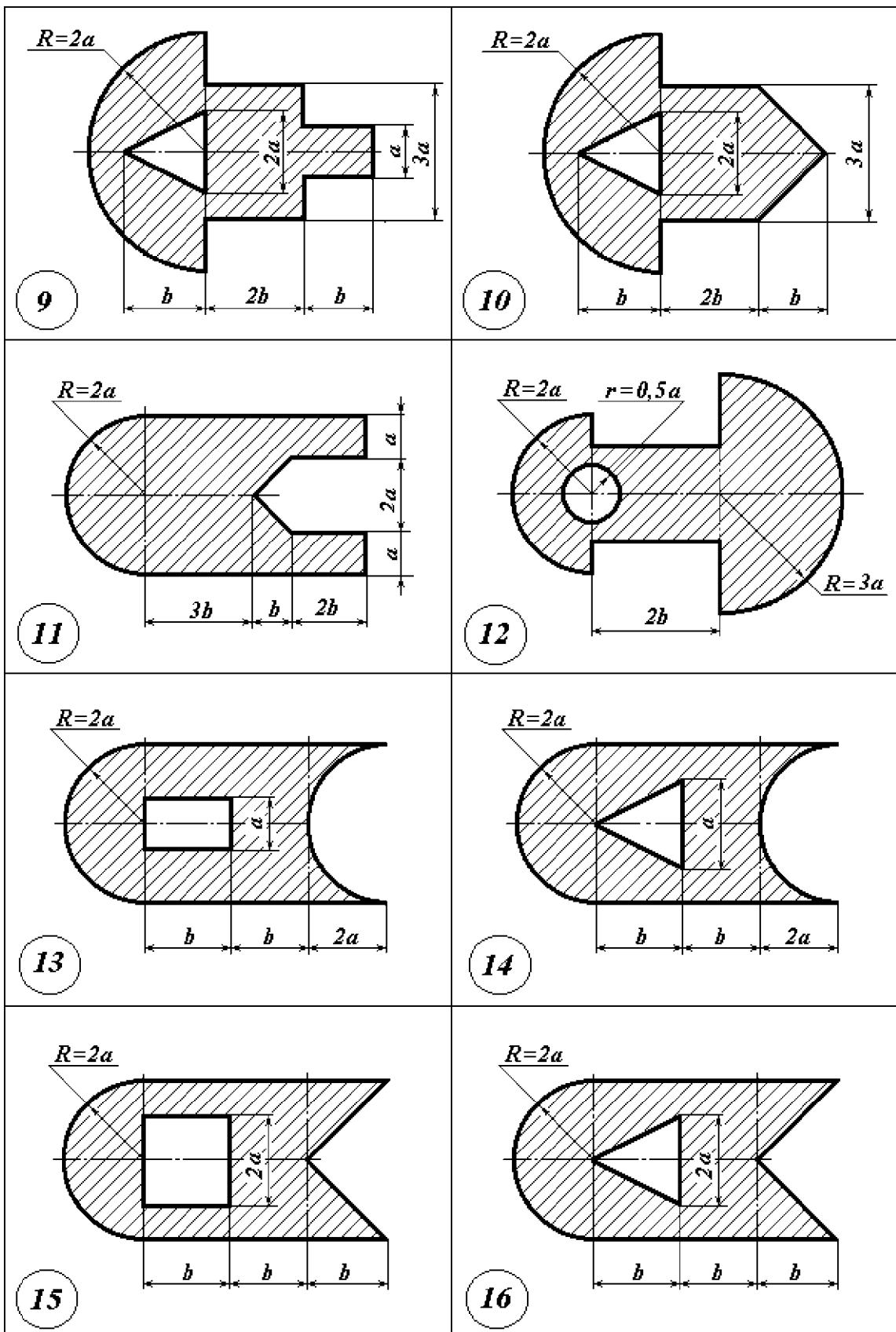


Рисунок 5.1 – Продолжение

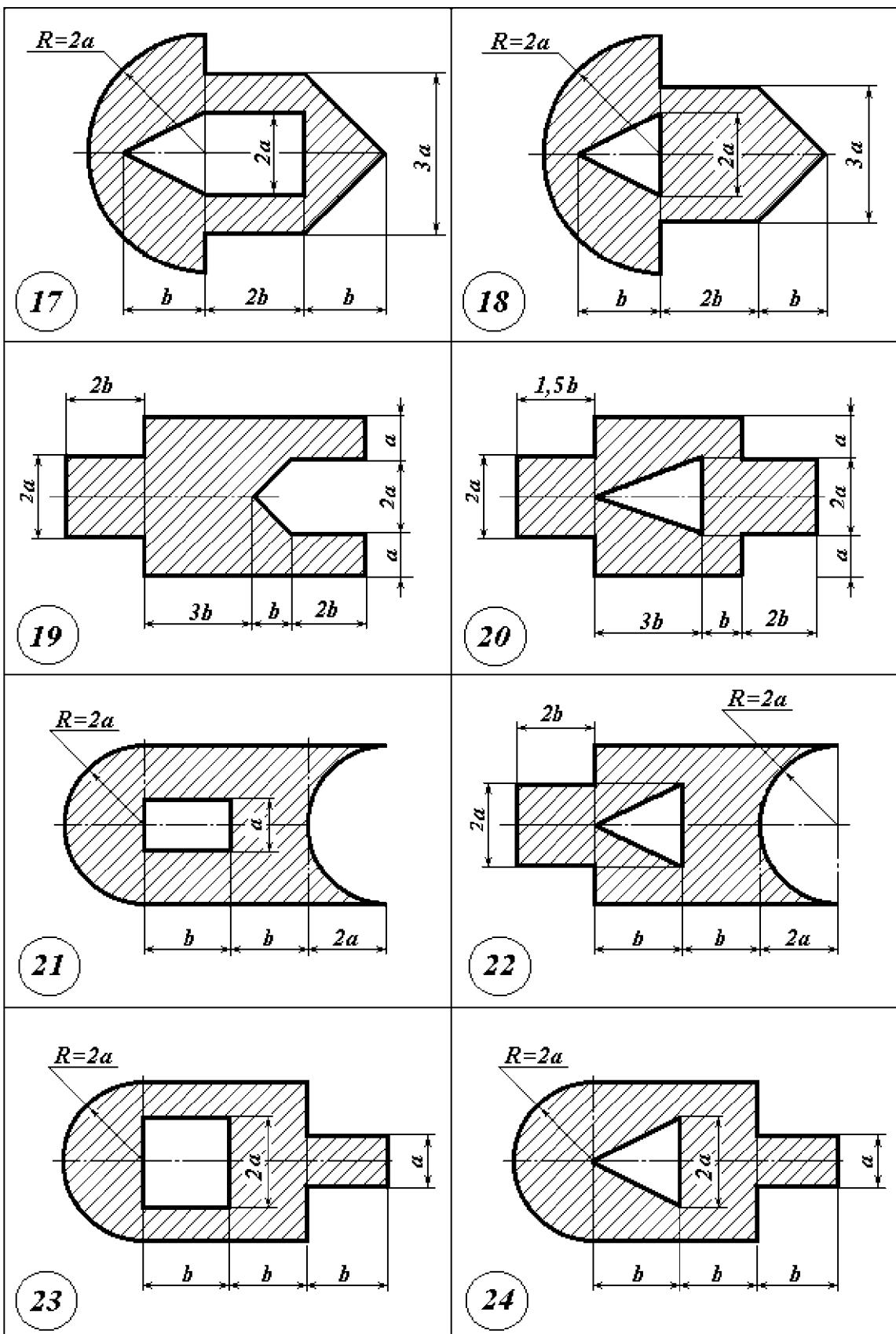


Рисунок 5.1 – Продолжение

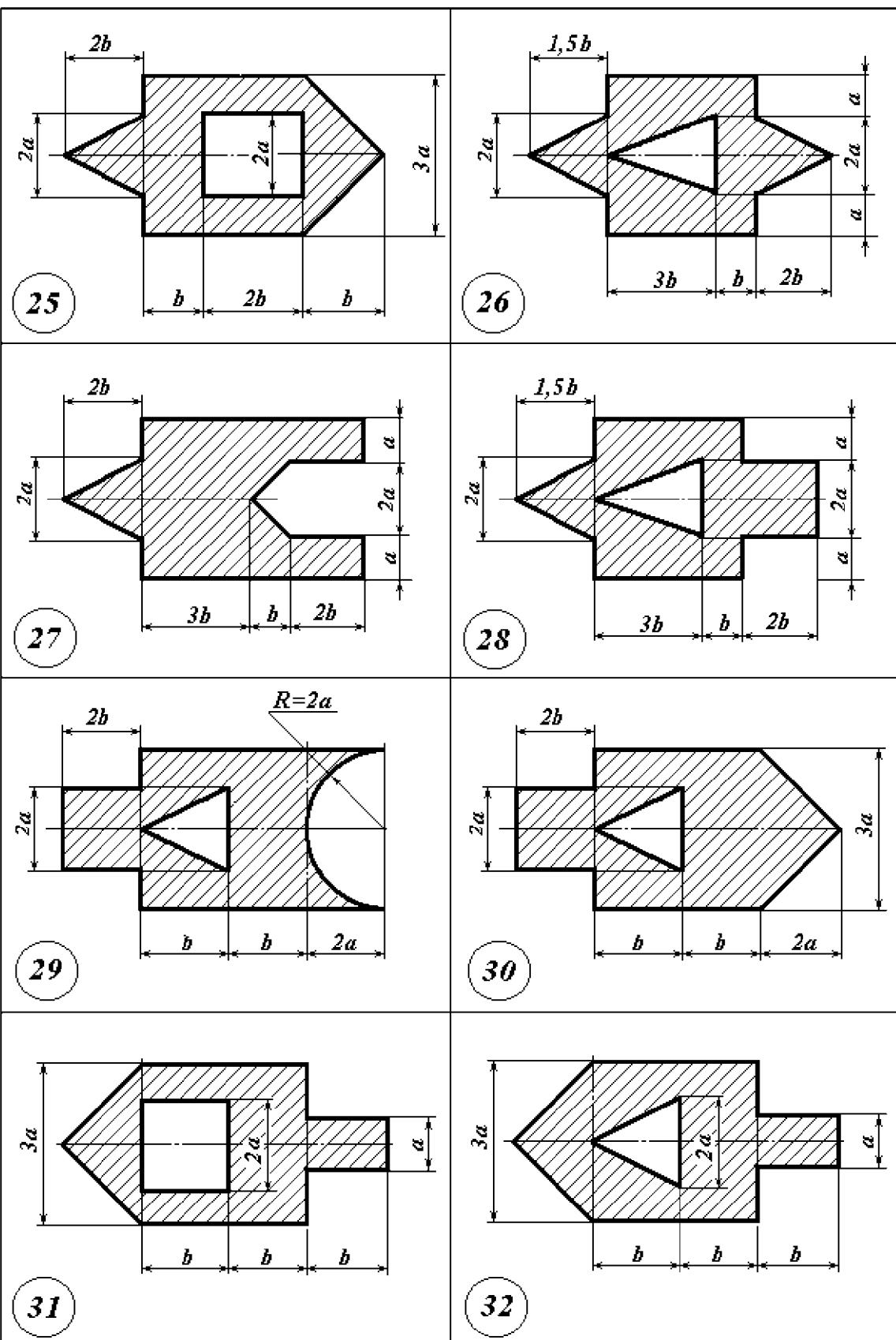


Рисунок 5.1 – Продолжение

Таблица 5.2 – Исходные данные к задаче «Косой изгиб прямого бруса

№ п/п	$a$ , м	$c$ , м	$d$ , м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$\alpha$ , град.	$\beta$ , град.	$\frac{b}{h}$
1	1,0	1,9	1,5	10	20	6,0	4,0	10	45	1,00
2	1,1	1,8	1,6	12	22	8,0	5,5	15	40	0,75
3	1,2	1,7	1,7	14	24	7,5	5,0	20	35	0,50
4	1,3	1,6	1,8	16	26	9,0	4,5	25	30	0,33
5	1,4	1,5	1,9	18	28	9,5	4,0	30	25	0,25
6	1,5	1,4	1,0	20	30	10,0	5,5	35	20	0,75
7	1,6	1,3	1,1	22	28	8,5	6,0	40	15	0,50
8	1,7	1,2	1,2	24	26	8,0	4,5	45	10	0,33
9	1,8	1,1	1,3	26	24	7,5	4,0	45	15	0,25
10	1,9	1,0	1,4	28	22	6,0	4,5	40	20	1,00
11	1,5	1,0	1,5	30	20	6,5	4,0	35	25	0,50
12	1,6	1,1	1,6	15	10	5,0	4,5	30	30	0,33
13	1,7	1,2	1,7	20	12	7,5	5,5	25	35	0,25
14	1,8	1,3	1,8	25	14	10,0	6,0	20	40	0,75
15	1,9	1,4	1,9	30	16	6,5	5,5	15	45	0,25
16	1,0	1,5	1,0	30	10	9,0	4,0	10	10	1,00
17	1,1	1,6	1,1	30	12	9,5	4,5	20	30	0,75
18	1,2	1,7	1,2	25	14	7,0	6,0	30	40	0,50
19	1,3	1,8	1,3	20	16	6,5	5,5	40	20	0,33
20	1,4	1,9	1,4	15	18	8,0	5,0	15	25	0,25
21	1,9	1,5	1,0	10	20	9,0	4,0	25	35	0,75
22	1,8	1,6	1,1	12	22	6,0	5,0	35	45	0,50
23	1,7	1,7	1,2	14	24	7,0	4,0	45	15	0,33
24	1,6	1,8	1,3	16	26	6,0	5,0	10	35	0,25
25	1,5	1,9	1,4	18	28	6,5	5,5	15	40	1,00
26	1,4	1,0	1,5	20	30	9,0	6,0	20	45	0,50
27	1,3	1,1	1,6	22	15	8,5	5,5	25	10	0,33
28	1,2	1,2	1,7	24	20	8,0	4,0	30	15	0,25
29	1,1	1,3	1,8	26	25	7,5	5,5	35	25	0,75
30	1,0	1,4	1,9	28	30	7,0	6,0	40	30	0,25
31	2,0	1,5	1,0	25	35	6,5	4,5	45	40	0,50
32	1,0	2,0	1,5	35	25	6,0	5,0	45	45	0,75

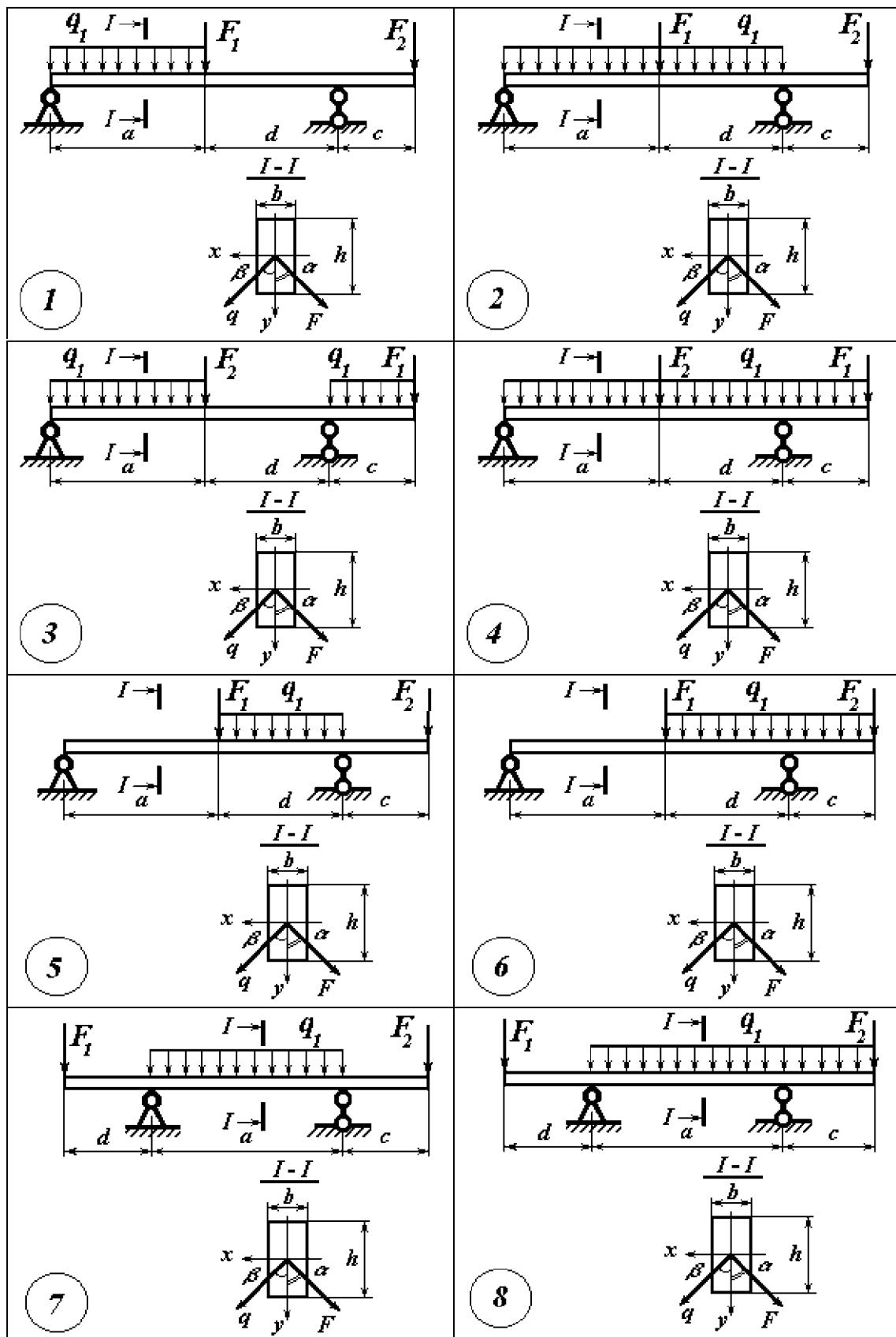


Рисунок 5.2 – Схемы балок, работающих на косой изгиб

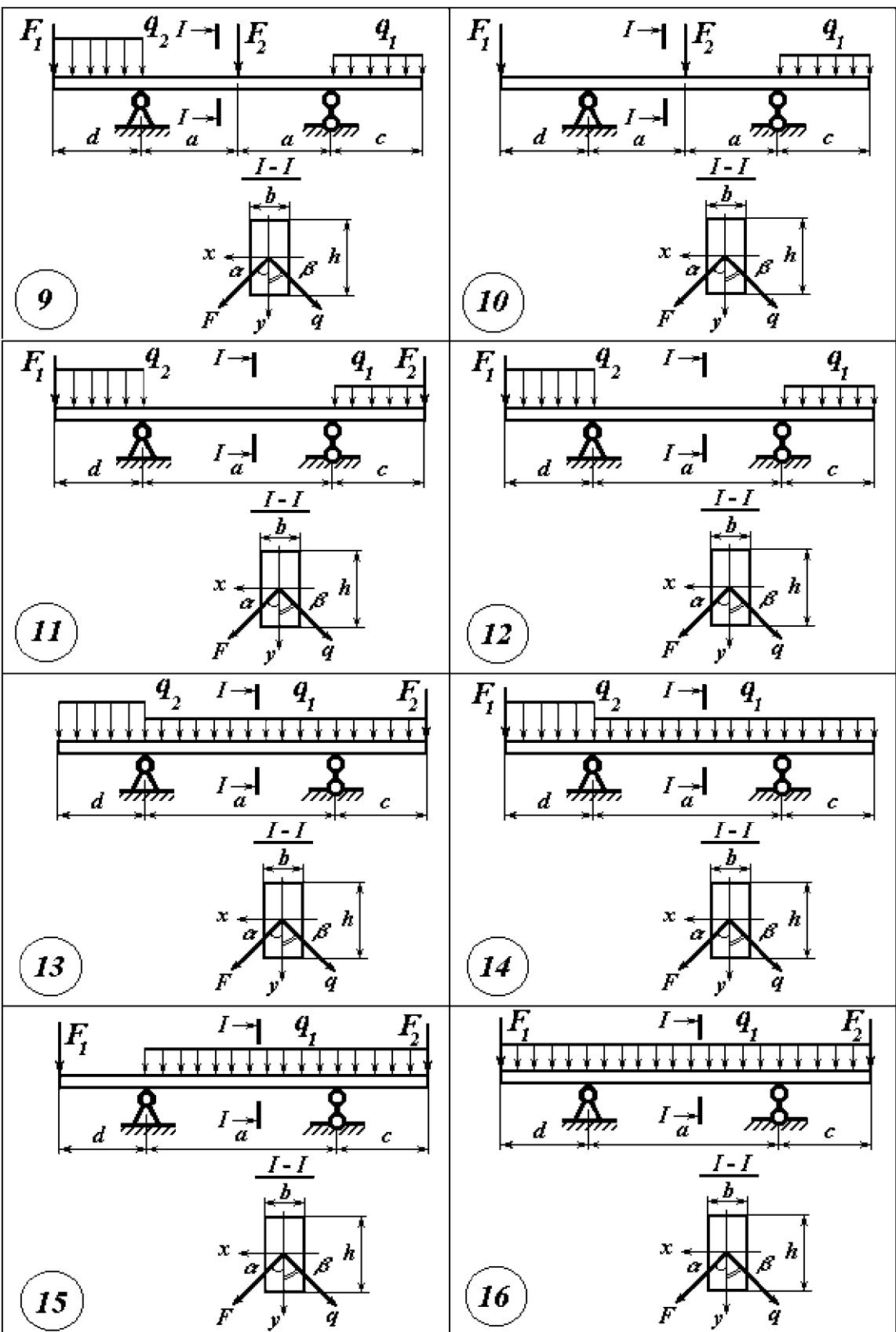


Рисунок 5.2 – Продолжение

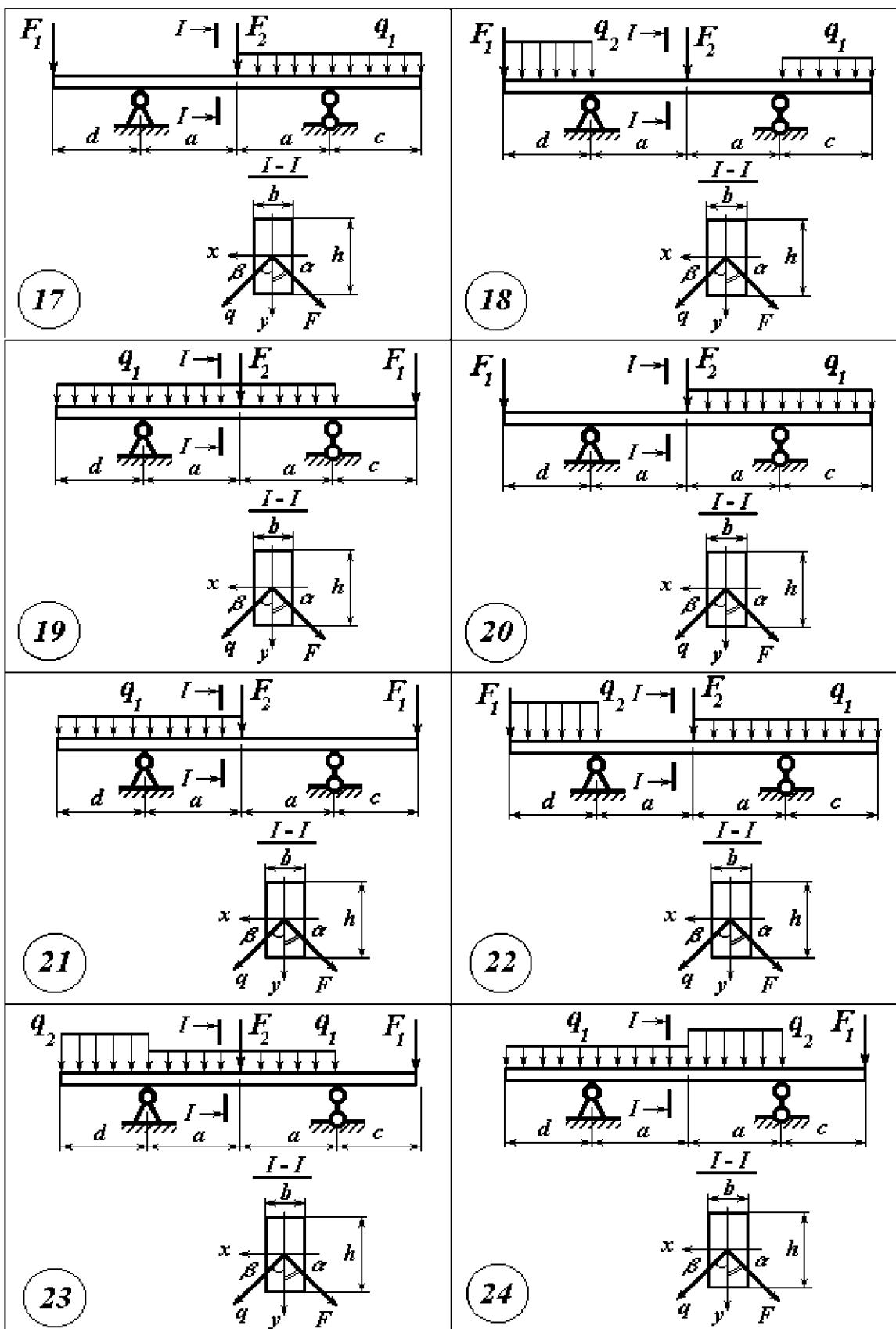


Рисунок 5.2 – Продолжение

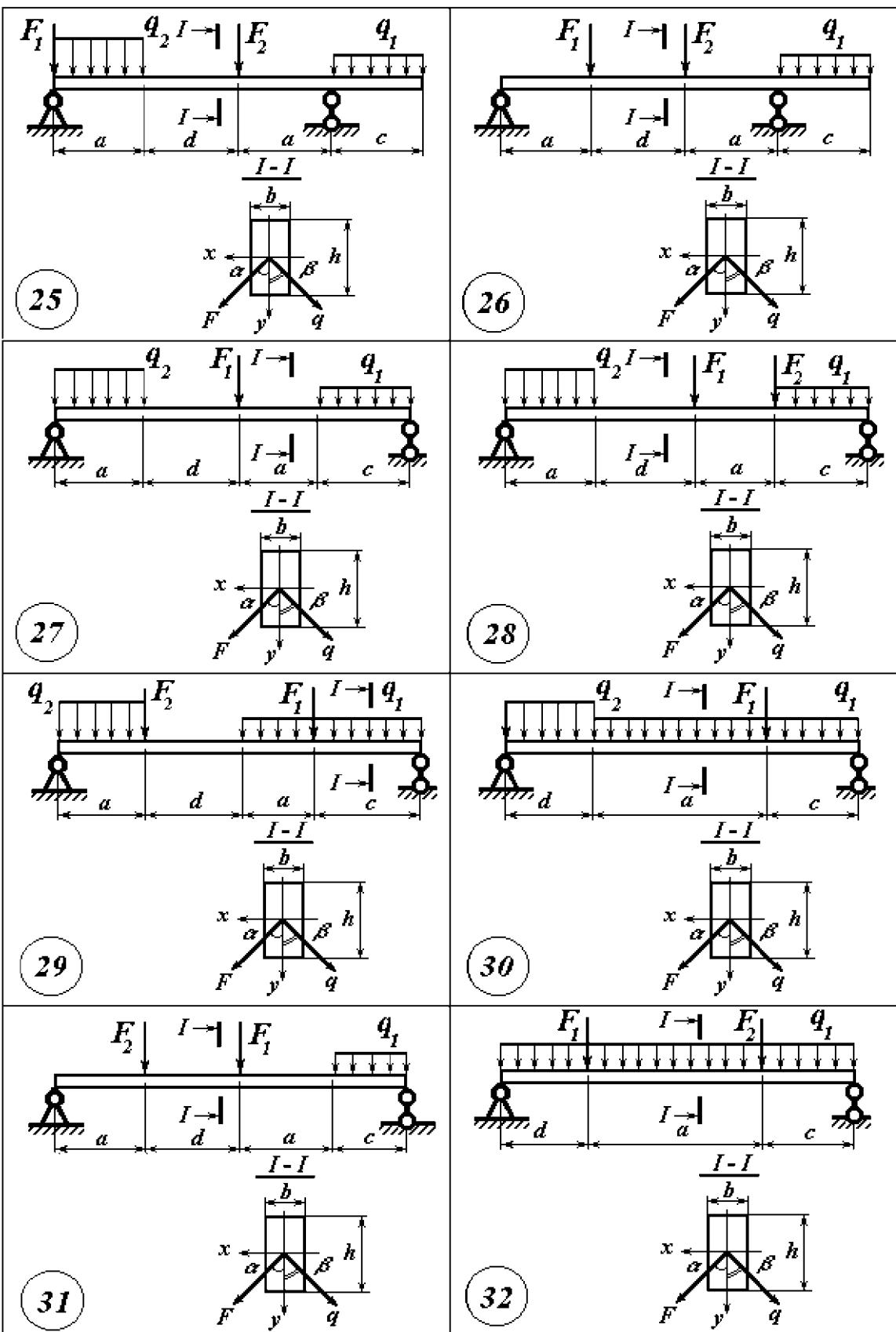


Рисунок 5.2 – Продолжение

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов /А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. Под ред. А.В. Александрова. – 3-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 2000. – 560 с.
2. Сопротивление материалов: Учебник / Н.М. Атаров, А.А. Горшков. Под ред. Г.С. Варданяна. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 480 с.
3. Икрин В.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Учебник для студентов, обучающихся по направлению 653500 «Строительство». – М.: Изд. АСВ, 2004. – 424 с.
4. Горшков А.Г., Трошин В.М., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов. Учеб. пос. 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
5. Вольмир А.С. и др. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
6. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.; Отв. ред. Писаренко Г.С. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.
7. Справочник по сопротивлению материалов / Фесик С.П. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Будівельник, 1982. – 280 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 Основные теоретические сведения о сложном сопротивлении прямого бруса . . . . .	3
1.1 Косой изгиб прямого бруса . . . . .	4
1.1.1 Определение нормальных напряжений при косом изгибе . . . . .	4
1.1.2 Определение нейтральной линии . . . . .	5
1.2 Внекентрное действие продольных сил . . . . .	7
1.2.1 Определение нормальных напряжений в случае внекентренного растяжения или сжатия . . . . .	7
1.2.2 Определение положение нейтральной линии при внекентренном растяжении или сжатии. . . . .	9
1.2.3 Общие понятия о ядре сечения . . . . .	10
1.3 Совместное действие изгиба с кручением . . . . .	11
2 Пример расчета балки на косой изгиб . . . . .	14
3 Пример расчета короткой чугунной стойки на внекентренное сжатие . . . . .	18
4 Пример расчета вала на совместное действие изгиба и кручения . . . . .	25
5 Исходные данные к расчетно-графической работе . . . . .	29
Список литературы . . . . .	40