

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

Содержится минимально необходимый теоретический материал, основной акцент сделан на самостоятельную подготовку студента к тестированию и на решение типовых и тестовых задач по курсу «Сопротивление материалов». Приведенные сведения соответствуют государственным образовательным стандартам второго поколения.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Общие сведения	6
Основные термины и определения.....	9
1 Основные механические характеристики материалов	
при статических нагрузках.	21
Пояснения к решению задачи 1	21
Пример решения задачи 1	23
Пояснения к решению задачи 2	24
Пример решения задачи 2	25
2 Центральное растяжение и сжатие.....	26
Пояснения к решению задачи 3	26
Пример решения задачи 3.....	28
Пояснения к решению задач 4 и 5.....	30
Пример решения задачи 4.....	30
Пример решения задачи 5.....	32
3 Геометрические характеристики плоских сечений	33
Пояснения к решению задачи 6.....	33
Пример решения задачи 6.....	35
4 Теория напряжённого состояния	38
Пояснения к решению задачи 7.....	38
Пример решения задачи 7.....	39
5 Кручение.....	41
Пояснения к решению задачи 8.....	41
Пример решения задачи 8.....	43
Пояснения к решению задачи 9.....	44
Пример решения задачи 9.....	45
6 Изгиб	48
6.1 Построение эпюр и расчёт на прочность балки.....	48
Пояснения к решению задачи 10.....	48
Пример решения задачи 10.....	49
6.2 Дифференциальные зависимости Журавского и проверка	
правильности построения эпюр.....	52
Пояснения к решению задач 11 и 12.....	52
Пример решения задачи 11.....	55
Пример решения задачи 12.....	56
6.3 Перемещения сечений балки.....	58
Пояснения к решению задачи 13.....	58
Пример решения задачи 13.....	61
Пояснения к решению задачи 14.....	63
Пример решения задачи 14.....	64
6.4 Статически неопределимые задачи.....	65
Пояснения к решению задачи 15.....	65
Пример решения задачи 15.....	68
7 Сложное сопротивление.....	70
Пояснения к решению задачи 16.....	70
Пример решения задачи 16.....	71

8 Устойчивость сжатых стержней	73
Пояснения к решению задачи 17	73
Пример решения задачи 17	74
9 Динамическое действие нагрузок	76
Пояснения к решению задачи 18	76
Пример решения задачи 18	77
Вопросы для самопроверки	78
Список рекомендуемой литературы	84
Приложение А. Образцы тестовых задач	85
Приложение Б. Геометрические характеристики простых плоских сечений	93
Приложение В. Площади и координаты центров тяжести простых фигур	95
Приложение Г. Формулы перемножения эпюр по Верещагину	96
Приложение Д. Значение коэффициента приведения длины стержня μ	98
Приложение Е. Основные формулы для решения задач	99

Введение

Учебное пособие подготовлено с целью оказания методической помощи студентам при выполнении тестовых задач по дисциплине «Сопротивление материалов». Тестовые задачи составлены так, что они охватывают основные разделы курса (приложение А).

Выполнение тестовых заданий позволяет студентам освоить теоретический курс и получить определённый навык при решении практических задач.

Перед выполнением тестовых задач необходимо изучить соответствующие разделы курса «Сопротивление материалов» по лекциям, по рекомендованным учебникам и учебным пособиям, по материалам, изложенным в данном пособии.

Порядок и последовательность выполнения тестовых задач приведены в примерах по каждому разделу.

Общие сведения

Условные обозначения величин и их единицы измерения

Линейные размеры

l, a – длина стержня, балки, вала или их участков....м

μl – приведённая длина стержня.....м

μ – коэффициент приведения длины

b, d, h – ширина, диаметр и высота сечения.....м

i – радиус инерции сечения.....м

Нагрузки внешние

P – сосредоточенная сила.....Н, кН

M – сосредоточенный момент.....Н·м, кН·м

q – интенсивность распределённой нагрузки.....Н/м, кН/м

R – реактивная силаН, кН

M_R – реактивный момент.....Н·м, кН·м

Внутренние силы

N – продольная сила.....Н, кН

Q – поперечная сила.....Н, кН

M_k – крутящий момент.....Н·м, кН·м

$M_{\text{из}}$ – изгибающий момент.....Н·м, кН·м

Геометрические характеристики плоских сечений

F – площадь поперечного сечения.....м², см², мм²

S – статический момент сечения..... см³, мм³

J – момент инерции сечения..... см⁴, мм⁴

W – момент сопротивления сечения..... см³, мм³

Напряжения

σ – нормальное напряжение Па, МПа

τ – касательное напряжение Па, МПа

$[\sigma], [\tau]$ – допускаемые напряжения..... Па, МПа

$\sigma_{\text{max}}, \tau_{\text{max}}$ – максимальные напряжения Па, МПа

Деформации и перемещения

Δ, δ – перемещение линейное..... мм

Δl – абсолютная продольная деформация..... мм

ε – относительная продольная деформация

μ – коэффициент Пуассона

φ – угол закручивания при кручении..... рад, град

θ – относительный угол закручивания..... рад /м; град /м

y – прогиб балки..... мм

θ – угол поворота сечения балки при изгибе..... град, рад

λ – гибкость стержня

γ – угол сдвига..... град, рад

Единицы механических величин в Международной системе единиц (СИ)

Величина		Единица СИ		
Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение	Соотношение единиц
Сила	P, Q, N	ньютон	Н	$10 \text{ Н} = 1 \text{ кгс}$
Напряжение	σ, τ	паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$
Модуль упругости	E, G	паскаль	Па	$1 \text{ МПа} = 10 \text{ кгс/см}^2$
Момент силы	M, m	ньютон·метр	Н·м	$1 \text{ Н·м} = 0,1 \text{ кгс·м}$
Погонная нагрузка	q	ньютон на метр	Н / м	$1 \text{ Н / м} = 0,1 \text{ кгс/м}$

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 100 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 1 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}.$$

Кратные и дольные единицы

Приставка	Гига	Мега	Кило	Гекто	Дека	Деци	Санتي	Милли	Микро	Нано
Обозначение	Г	М	к	г	да	д	с	м	мк	н
Множитель	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Перед подстановкой числовых значений необходимо все исходные величины привести к единым согласованным единицам измерения.

Основные термины и определения

Сопротивление материалов – наука об инженерных методах расчета элементов конструкций на *прочность, жёсткость и устойчивость*.

Инженерные методы расчётов в сопротивлении материалов основаны на определенных *допущениях (гипотезах)* о свойствах материала и характере деформаций, основными из которых являются следующие:

- материал однороден, т.е. свойства любых малых частиц совершенно тождественны;
- материал тела полностью заполняет объём тела без каких-либо пустот;
- в известных пределах нагружения материал обладает идеальной (совершенной) упругостью;
- перемещения точек конструкции, обусловленные упругими деформациями, весьма малы по сравнению с размерами элементов конструкции;
- перемещения точек элементов конструкции прямо пропорциональны силам, вызвавшим эти перемещения;
- плоские и перпендикулярные к оси сечения до деформации остаются такими же и в результате деформации;
- результат действия группы сил равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности (принцип независимости действия сил или принцип суперпозиции).

Прочность – способность материала не разрушаться под действием нагрузок.

Жёсткость – способность материала не изменять своих размеров и формы под действием нагрузок.

Устойчивость – способность материала сохранять свою первоначальную форму упругого равновесия под действием нагрузок.

Внешние силы – это *активные* силы, приложенные к рассматриваемой детали, а также *реактивные* силы, возникающие в опорах.

Основными внешними силами являются:

- сосредоточенная сила P , приложенная в точке;
- сосредоточенный момент M , приложенный в сечении;

– распределённая нагрузка q , приложенная по длине балки (может быть равномерно распределённая и неравномерно распределённая).

Внутренние силы – это силы, возникающие внутри тела, препятствующие действию внешних сил (межмолекулярные связи).

Внутренние силы определяются методом сечений, т.е. тело мысленно разрезается плоскостью на две части, одна из которых отбрасывается, а действие отброшенной части уравнивается внутренними силами, противодействующими внешним силам.

Для оставшейся части, как и для целого тела, составляются уравнения равновесия (статики).

Напряжение – это интенсивность внутреннего усилия, приходящаяся на единицу геометрической характеристики сечения (например площадь сечения).

Деформация – это изменение размеров и формы тела под воздействием внешних сил.

Упругость – способность тела восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после удаления внешних сил.

К основным видам деформаций относятся: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение, изгиб. Это так называемые простые виды деформаций. Одновременное действие двух и более простых видов деформаций вызывает так называемое сложное сопротивление.

Конструктивные элементы, встречающиеся в машинах и сооружениях, можно подразделить на следующие виды:

– *брус (стержень)* – это элемент, у которого один из размеров (длина) больше по сравнению с поперечными размерами;

– *пластина* – это элемент, ограниченный двумя параллельными плоскостями, у которого два размера больше по сравнению с третьим;

– *оболочка* – это элемент, ограниченный сферическими, эллипсоидными и другими поверхностями, у которого два размера больше по сравнению с третьим;

– *массив* – элемент, у которого все три размера одного порядка величин.

В курсе сопротивления материалов изучаются главным образом брусья как имеющие широкое распространение в инженерной практике.

Брус, работающий на растяжение (сжатие), называется *стержнем*.

Брус, работающий на изгиб, называется *балкой*.

Брус, работающий на кручение, называется *валом*.

Растяжение или сжатие возникают при действии вдоль оси стержня растягивающих и сжимающих сил. В поперечных сечениях

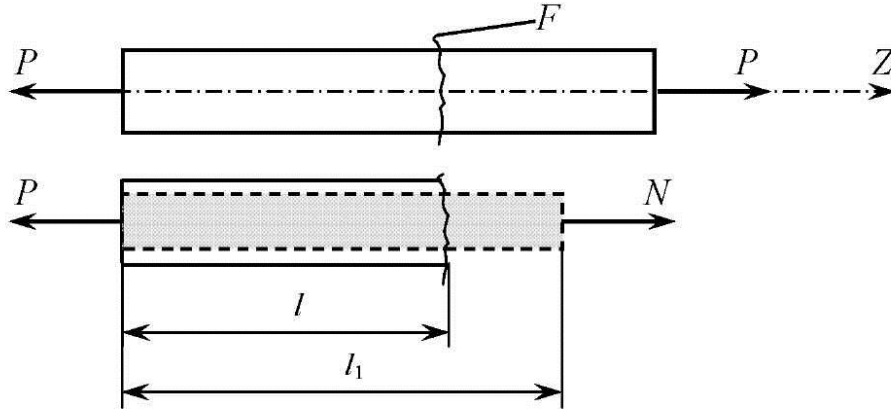


Рисунок 1.1

стержня возникают внутренние силы, равнодействующая которых является нормальной (продольной) силой N (рисунок 1.1).

Нормальная сила N численно равна алгебраической сумме проекций на ось Z всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Нормальное напряжение, возникающее в сечении,

$$\sigma = \frac{N}{F},$$

где σ – нормальное напряжение;

N – нормальная сила;

F – площадь поперечного сечения.

Условие прочности $\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leq [\sigma],$

где $\sigma_{\max}$ – максимальное нормальное напряжение;

$N_{\max}$ – максимальная нормальная сила;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Для пластичных материалов $[\sigma] = \frac{\sigma_{\hat{o}}}{n},$

для хрупких материалов $[\sigma] = \frac{\sigma_{\hat{a}}}{n},$

где σ_{δ} , $\sigma_{\hat{a}}$ – предел текучести и предел прочности соответственно;
 n – коэффициент запаса прочности.

Абсолютная деформация (абсолютное удлинение)

$$\Delta l = l_1 - l,$$

где l_1 – длина после деформирования; l – первоначальная длина.

Относительное удлинение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$.

Закон Гука: $\sigma = E \varepsilon$,

где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

Абсолютное удлинение $\Delta l = \frac{N l}{E F}$.

Эта формула называется вторым выражением закона Гука.

Условие жёсткости $\max \Delta l = \frac{N l}{E F} \leq [\Delta l]$ или $\max \varepsilon = \frac{N}{E F} \leq [\varepsilon]$,

где $[\varepsilon]$ – допускаемая относительная деформация.

Сдвиг, срез, смятие возникают тогда, когда внешние силы смещают два параллельных плоских сечения одно относительно другого при неизменном расстоянии между ними. Линейное перемещение aa' – это абсолютный сдвиг (рисунок 1.2). Отношение aa' к грани ac – это относительный сдвиг,

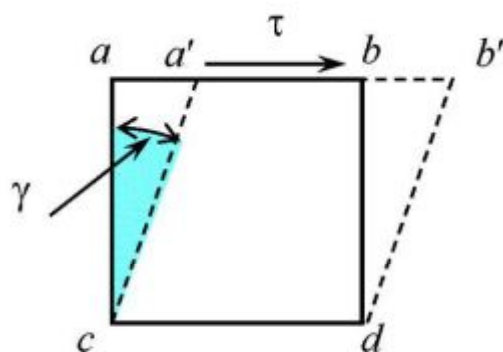


Рисунок 1.2

$$\frac{aa'}{ac} = \operatorname{tg} \gamma \cong \gamma.$$

Закон Гука при сдвиге имеет вид

$$\tau = G \gamma,$$

где τ – касательное напряжение;
 G – модуль упругости второго рода;
 γ – угол сдвига.

Условие прочности при сдвиге

$$\tau_{\bar{n}\delta} = \frac{Q}{F_{\bar{n}\delta}} \leq [\tau_{\bar{n}\delta}],$$

где $\tau_{\bar{n}\delta}$ – расчётное напряжение среза (среднее касательное напряжение в сечении);

Q – поперечная (сдвигающая) сила;

$F_{\bar{n}\delta}$ – расчетная площадь среза;

$[\tau_{\text{до}}]$ – допускаемое напряжение среза.

Кручение прямого бруса вызывается внешними парами сил, действующих в плоскостях, перпендикулярных оси бруса*. Простейший случай кручения имеет место под действием двух равных по величине и противоположно направленных пар сил m (рисунок 1.3).

Моменты внешних пар сил называются *скручивающими* моментами m .

В общем случае на брус могут действовать несколько *скручивающих* моментов, приложенных в различных сечениях и взаимно уравнивающихся. На рисунке 1.3 m – внешний *скручивающий* момент.

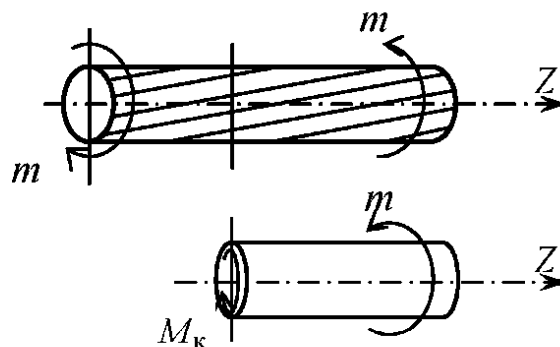


Рисунок 1.3

В поперечном сечении возникает внутренний силовой фактор – **крутящий** момент M_k , который численно равен алгебраической сумме всех внешних *скручивающих* моментов m , взятых по одну сторону от сечения.

$$\text{Касательное напряжение } \tau_{\rho} = \frac{\dot{J}}{J_{\rho}} \hat{e} \rho,$$

где M_k – крутящий момент в сечении (внутренняя сила);

J_{ρ} – полярный момент инерции;

ρ – текущий радиус поперечного сечения вала ($0 \leq \rho \leq R$),

$\rho_{\text{max}} = R$, радиус поперечного сечения вала.

$$\text{Условие прочности при кручении } \tau_{\text{max}} = \frac{\max M \hat{e}}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

где τ_{max} – максимальное касательное напряжение;

$\max M \hat{e}$ – максимальный крутящий момент в сечении;

W_{ρ} – полярный момент сопротивления сечения, $W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{\rho_{\text{max}}}$;

* Напряжения и деформации при кручении существенно зависят от формы поперечного сечения бруса. Гипотеза плоских сечений справедлива лишь для бруса с круглым сплошным или кольцевым сечением, в остальных случаях происходит искажение поперечных сечений. Задача о кручении брусков некруглого профиля решается методом теории упругости.

$[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

Для пластичных материалов $[\tau] \approx 0,5 [\sigma]$.

Угол закручивания (абсолютная деформация при кручении)

$$\varphi = \frac{I \hat{\epsilon} l}{G J_p},$$

где G – модуль упругости второго рода.

Относительный угол закручивания $\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{I \hat{\epsilon}}{G J_p}$.

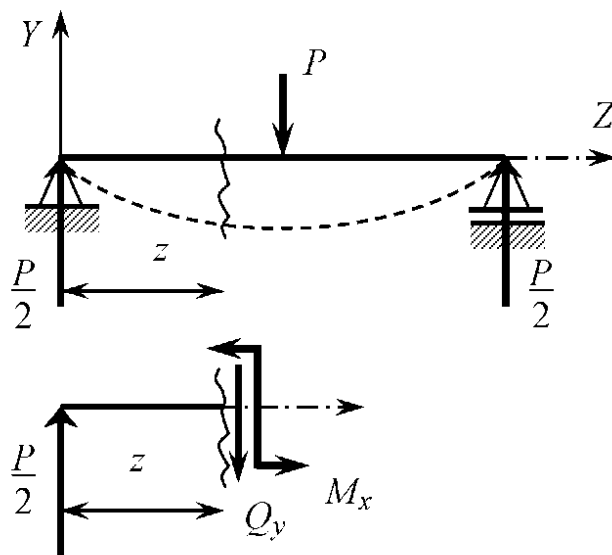
Условие жесткости $\theta_{\max} = \frac{I \hat{\epsilon}}{G J_p} \leq [\theta],$

где $\theta_{\max}$ – максимальный относительный угол закручивания;

$[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

Изгиб заключается в искривлении прямого стержня или изменении кривизны кривого стержня под действием внешних сил (рисунок 1.4).

В сечении бруса возникают два вида внутренних сил: изгибающий момент M_x , который равен алгебраической сумме моментов внешних сил относительно



центра тяжести поперечного сечения, взятых по одну сторону от сечения, и поперечная сила Q_y , которая равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил на ось Y сечения.

Нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{I}{J_x} \delta \phi,$$

где M_x – изгибающий момент (внутренняя сила) в сечении

Рисунок 1.4

относительно оси X ;

J_x – осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси X ;

y – расстояние от нейтральной оси до данной точки.

Условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{\max \dot{I}_x}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $\sigma_{\max}$ – максимальное нормальное напряжение;

$\max \dot{I}_x$ – максимальный изгибающий момент;

W_x – осевой момент сопротивления, $W_x = \frac{J_x}{y}$;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение (его величина берётся такой же, как при растяжении-сжатии).

Касательное напряжение

$$\tau = \frac{Q_{\delta} S_x}{J_x b},$$

где Q_{δ} – поперечная (перерезывающая) сила в поперечном сечении (внутренняя сила);

S_x – статический момент площади относительно нейтральной оси X части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от прямой, проведённой через точку параллельно нейтральной оси;

J_x – осевой момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси;

b – ширина сечения на уровне рассматриваемой точки.

Условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{\max Q_y S_x}{J_x b} \leq [\tau],$$

где $\tau_{\max}$ – максимальное касательное напряжение;

$\max Q_y$ – максимальная поперечная сила;

$[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение.

Кривизна изогнутой оси балки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{I}_{\delta}}{E J_x},$$

где ρ – радиус кривизны изогнутой оси балки;

E – модуль упругости первого рода (такой же, как и при растяжении-сжатии).

Эта формула является основной формулой теории изгиба.

Перемещения при изгибе – для балки постоянного поперечного сечения, находящейся в равновесии под действием приложенных нагрузок и опорных реакций, прогиб y и угол поворота θ сечения $n - n$ (рисунок 1.5) на расстоянии z от начала координат 0^* определяются по универсальным (обобщенным) уравнениям упругой линии балки.

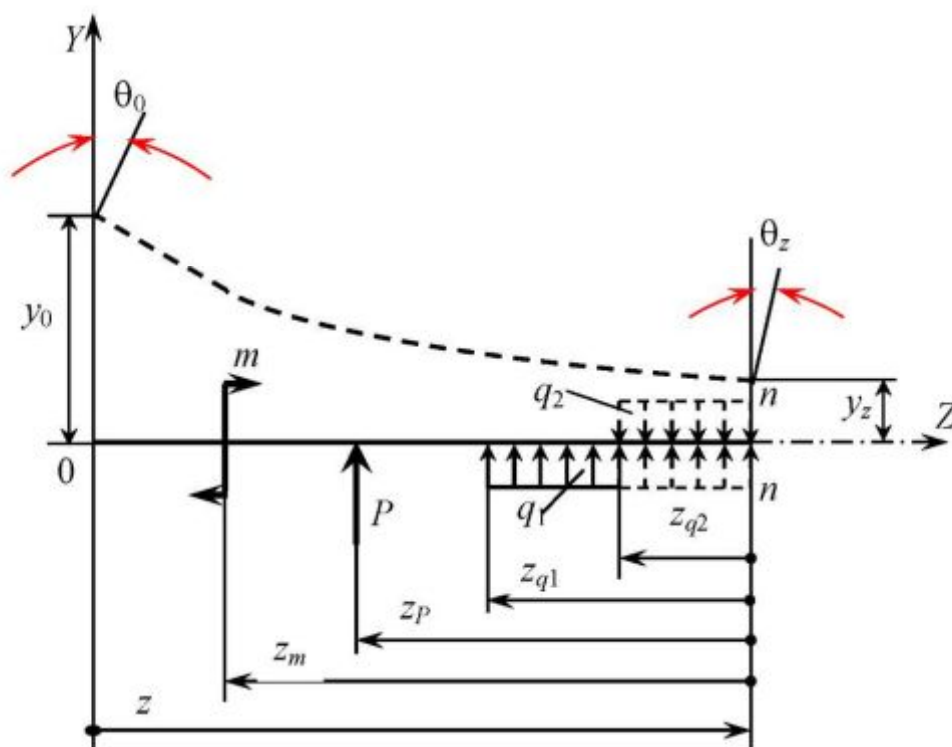


Рисунок 1.5

Прогиб произвольного сечения определяется по формуле

$$\phi_z = \phi_0 + \theta_0 z + \frac{1}{E J_x} \left(\sum \frac{m_i z_m^2}{2!} + \sum \frac{P_i z_P^3}{3!} + \sum \frac{q_{1i} z_{q1}^4}{4!} - \sum \frac{q_{2i} z_{q2}^4}{4!} \right),$$

где y_z – прогиб сечения, находящегося на расстоянии z от начала координат;

y_0 – прогиб сечения в начале координат (начальный параметр);

θ_0 – угол поворота сечения в начале координат (начальный параметр).

* Начало координат располагаем в левом конце балки. Ось Z направим вправо, ось Y направим вверх; можно начало координат располагать на правом конце балки, направив ось Z влево.

Угол поворота произвольного сечения

$$\theta_z = \theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left(\sum m_i z_m + \sum \frac{P_i z_P^2}{2!} + \sum \frac{q_{1i} z_{q_1}^4}{4!} - \sum \frac{q_{2i} z_{q_2}^4}{4!} \right),$$

где θ_z – угол поворота сечения на расстоянии z от начала координат;

θ_0 – угол поворота сечения в начале координат (начальный параметр);

z_m, z_P, z_q – расстояния от рассматриваемого сечения до точки приложения соответствующей нагрузки m, P, q^* .

Формула (интеграл) Мора для определения перемещений

$$\Delta = \int_l \frac{M_x M'}{EJ_x} dz,$$

где Δ – прогиб или угол поворота заданного сечения;

M_x – значение изгибающего момента для заданного сечения от действия внешних нагрузок;

M' – значение изгибающего момента для заданного сечения от действия единичной нагрузки (сосредоточенная сила или сосредоточенный момент), приложенной в заданном сечении;

EJ_x – жесткость балки.

По правилу Верещагина перемещение (прогиб или угол поворота)

$$\Delta = \frac{1}{EJ_x} \Sigma \Omega_{\bar{M}} \eta',$$

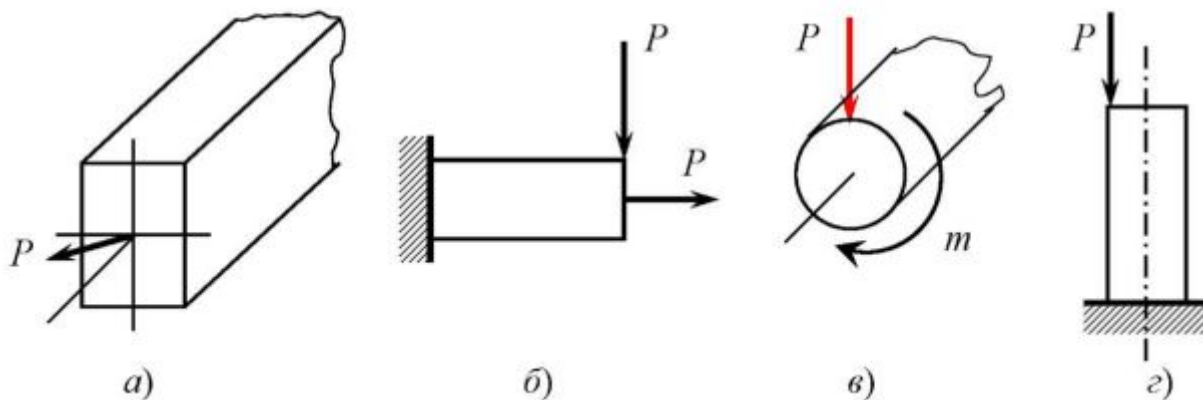
где $\Sigma \Omega_{\bar{M}}$ – площадь эпюры M_x от заданной нагрузки;

η' – ордината эпюры от единичной нагрузки, находящаяся под центром тяжести эпюры M_x .

Под **сложным сопротивлением** подразумевают комбинации простых видов деформаций: косой изгиб (рисунок 1.6,а); растяжение (сжатие) с изгибом (рисунок 1.6,б); изгиб с кручением (рисунок 1.6,в); внецентренное растяжение (сжатие) (рисунок 1.6,г).

* Для q – расстояние от рассматриваемого сечения до начала действия распределённой нагрузки.

Задачи сложного сопротивления решаются суммированием напряжённых состояний простых видов деформаций на основе использования принципа независимости действия сил (принцип суперпозиций).



a – косой изгиб; $б$ – изгиб с растяжением;
 $в$ – изгиб с кручением; $г$ – внецентренное сжатие

Рисунок 1.6

Общая методика решения задач сложного сопротивления заключается в следующем:

- определяют внутренние усилия в поперечных сечениях стержня и строят их эпюры;
- находят положение наиболее напряженного сечения;
- вычисляют напряжения от каждого усилия в отдельности и находят точку, в которой суммарные напряжения достигают наибольшей величины;
- проверяют выполнение условия прочности для материала стержня.

Условия прочности:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \leq [\sigma] \text{ – для косоого изгиба;}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \leq [\sigma] \text{ – для растяжения (сжатия) с изги-}$$

бом и для внецентренного растяжения (сжатия),

где N – нормальная сила;

F – площадь поперечного сечения;

M_x и M_y – изгибающие моменты относительно осей X и Y ;

J_x и J_y – осевые моменты инерции относительно осей X и Y ;

x и y – расстояния до рассматриваемой точки от осей X и Y .

При **изгибе с кручением** круглого стержня материал в опасной точке находится в сложном напряжённом состоянии.

Проверка прочности в этом случае производится с помощью одной из теорий прочности по обобщённой формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_{\text{экв}}} \leq [\sigma],$$

где $\sigma_{\text{экв}}$ – эквивалентное напряжение (приведённое к одноосному напряжённому состоянию);

$M_{\text{экв}}$ – расчётный эквивалентный момент

(например, по III теории прочности $M_{\text{экв III}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}$;

по IV теории прочности $M_{\text{экв IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 M_{\text{кр}}^2}$);

$W_{\text{изг}}$ – осевой момент сопротивления относительно нейтральной оси;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение материала при простом растяжении (сжатии).

Устойчивым считается стержень при центральном сжатии до тех пор, пока сжимающие силы не превысят так называемого критического значения.

Превышение ее значения влечёт за собой изгиб (выпучивание) стержня (рисунок 1.7).

Критическая сила по формуле Эйлера

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{мин}}}{(\mu l)^2},$$

где $J_{\text{мин}}$ – наименьший осевой момент инерции;

μ – коэффициент приведения длины стержня (зависит от способа закрепления стержня);

l – длина стержня;

μl – приведённая длина стержня.

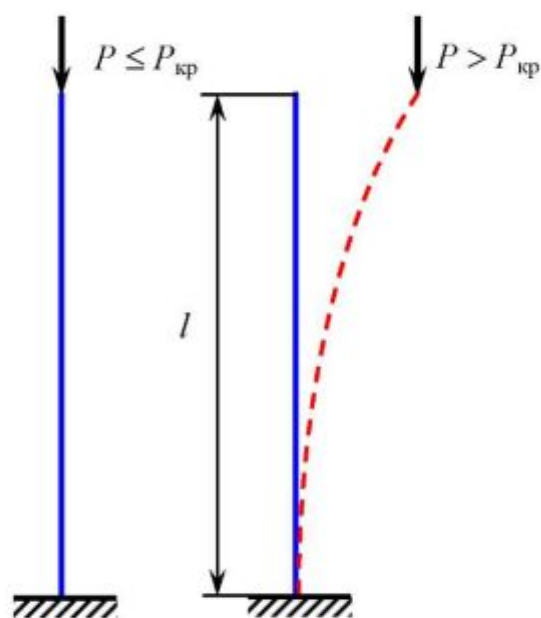


Рисунок 1.7

$$\text{Критическое напряжение } \sigma_{\hat{\epsilon}\delta} = \frac{\pi^2 \hat{A}}{\lambda_{\hat{a}}^2},$$

здесь $\lambda_{\hat{a}}$ – гибкость стержня *геометрическая* (зависит от приведённой длины, формы и размеров поперечного сечения стержня);

$$\lambda_{\hat{a}} = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

здесь $i_{\min}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения.

Формула Эйлера применима при условии $\lambda_{\hat{a}} \geq \lambda_{\phi}$, где λ_{ϕ} – гибкость стержня физическая (зависит только от физико-механических свойств материала), $\lambda_{\phi} = \pi \sqrt{\frac{\hat{A}}{\sigma_{i\phi}}}$,

здесь $\sigma_{\text{пл}}$ – предел пропорциональности.

Эмпирическая формула Ясинского применяется, если $\lambda_{\hat{a}} < \lambda_{\phi}$.

$$\text{Формула Ясинского } \sigma_{\hat{\epsilon}\delta} = a - b\lambda + c\lambda^2,$$

где a, b, c – коэффициенты, зависящие от свойств материала;

λ – гибкость стержня (физическая).

Пределы применимости соответствующих формул (рисунок 1.8):

- при $\lambda_{\hat{a}} \geq \lambda_{\phi}$ – формула Эйлера;
- при $\lambda_{\hat{a}} < \lambda_{\phi}$ – формула Ясинского;
- при $\sigma_{\text{кр}} \leq \sigma_{\text{т}}$ – простое центральное сжатие.



К задачам **динамики** в сопротивлении материалов относят:

- расчёты элементов конструкций с учётом сил инерции;
- расчёты при колебаниях;
- расчёты на усталость;

– расчёты на действие ударных нагрузок.

Общий метод динамического расчёта основан на принципе Д'Аламбера.

1 Основные механические характеристики материалов при статических нагрузках

Пояснения к решению задачи 1 (приложение А)

На рисунке 1.1,*а* представлена диаграмма растяжения стандартного образца с первоначальным размером поперечного сечения F_0 и расчётной длиной l_0 .

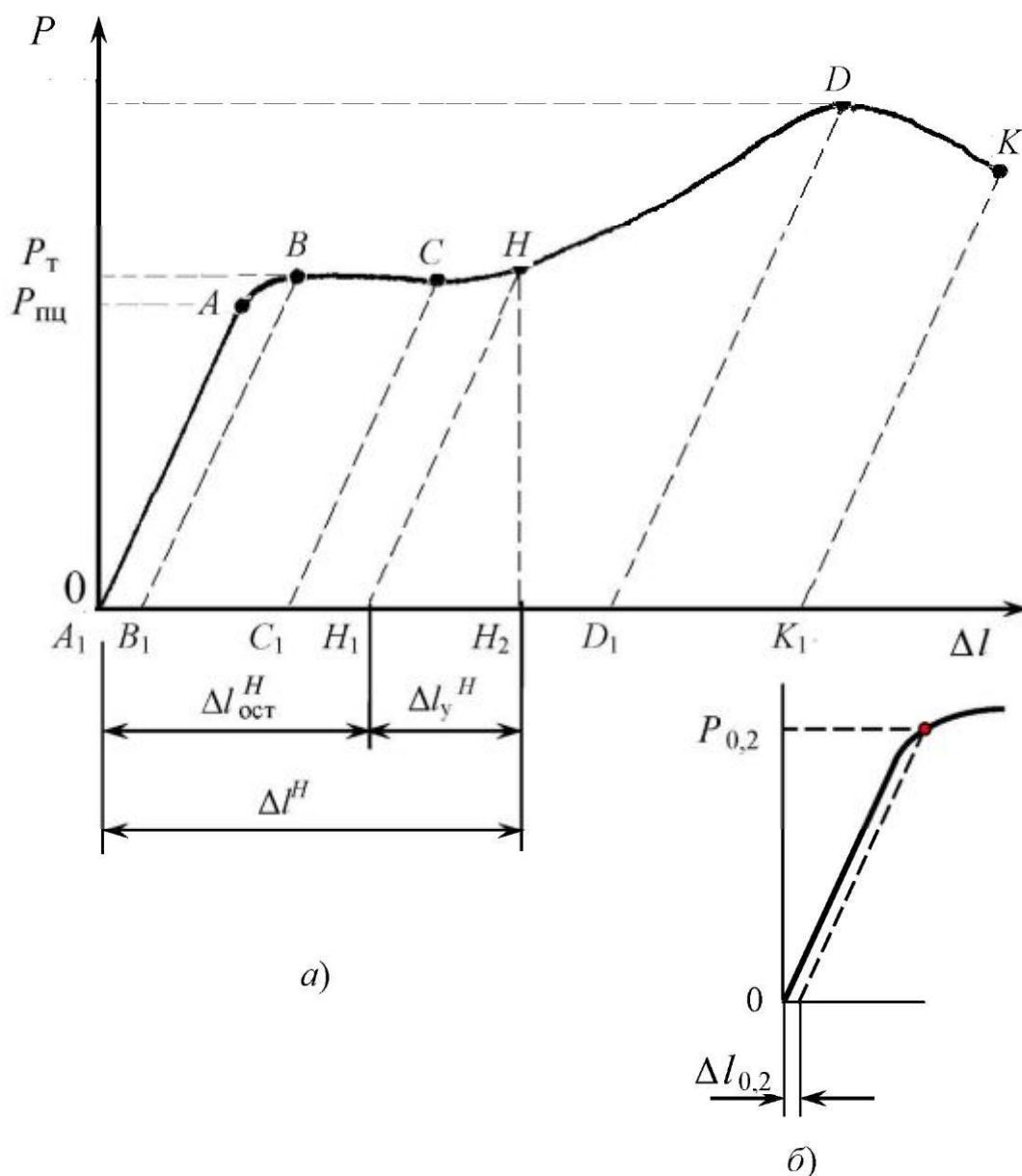


Рисунок 1.1

Диаграмма на рисунке 1.1,*а* даёт возможность по известным силам P_i и первоначальной площади поперечного сечения образца определить механические характеристики материала, т.е. соответствующие пределы напряжений:

$$\sigma_{\text{i}\ddot{o}} = \frac{P_{\text{i}\ddot{o}}}{F_0} \text{ – предел пропорциональности (точка } A);$$

$$\sigma_{\dot{o}} = \frac{P_{\dot{o}}}{F_0} \text{ – предел текучести (точки } B-C);$$

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0} \text{ – предел текучести (условный) – это напряжение,}$$

при котором остаточная деформация образца достигает 0,2 % расчетной длины l_0 (рисунок 1.1,б). Условный предел текучести $\sigma_{0,2}$ определяют в том случае, если диаграмма растяжения для исследуемого пластичного материала не имеет выраженной площадки текучести;

$$\sigma_{\text{a}} = \frac{P_{\text{max}}}{F_0} \text{ – предел прочности (временное сопротивление,}$$

точка D) – это условное напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца;

$$\sigma_{\hat{e}} = \frac{P_{\hat{e}}}{F_{\hat{e}}} \text{ – истинное сопротивление разрыву. Это напряже-}$$

ние, определяемое отношением нагрузки $P_{\hat{e}}$ в момент разрыва (точка K) к истинной площади F_K поперечного сечения в месте разрыва.

Если процесс испытания остановить, например, в состоянии, соответствующем точке H , и разгрузить образец, то линия разгрузки пойдёт по линии HH_1 (практически параллельно линии AA_1). Этот же процесс будет соответствовать любым точкам диаграммы.

Величина OH_1 – остаточная деформация $\Delta l_{\text{i}\ddot{o}}^H$;

H_1H_2 – упругая деформация $\Delta l_{\dot{o}}^H$;

OH_2 – полная деформация Δl^H .

Аналогично можно найти все виды деформаций для любой точки диаграммы (см. рисунок 1.1,а).

При повторном нагружении образца (для точки H) диаграмма сначала пойдёт по прямой линии, практически совпадающей с линией H_1H , а затем по кривой HDK .

По диаграмме растяжения можно определить соответствующие напряжения ($\sigma_{\text{шц}}$, $\sigma_{\text{т}}$, $\sigma_{\text{в}}$), виды деформаций (упругая $\Delta l_{\text{о}}$, остаточная $\Delta l_{\text{ост}}$, полная Δl). Кроме того, по диаграмме можно определить модуль упругости первого рода E испытываемого образца (по участку, соответствующему закону Гука – прямая линия OA): $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

$$\text{Отсюда } \dot{A} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{P}{F_0} \cdot \frac{l}{\Delta l},$$

т.е. для определения модуля упругости E необходимо замерить величины P , F , l , Δl или по диаграмме определить σ и ε , соответствующие $\sigma_{\text{ю}}$.

Пример решения задачи 1

По диаграмме на рисунке 1.2 определить предел пропорциональности $\sigma_{\text{ю}}$, предел текучести $\sigma_{\text{о}}$, предел прочности $\sigma_{\text{â}}$, модуль упругости E , остаточную деформацию для точки A .

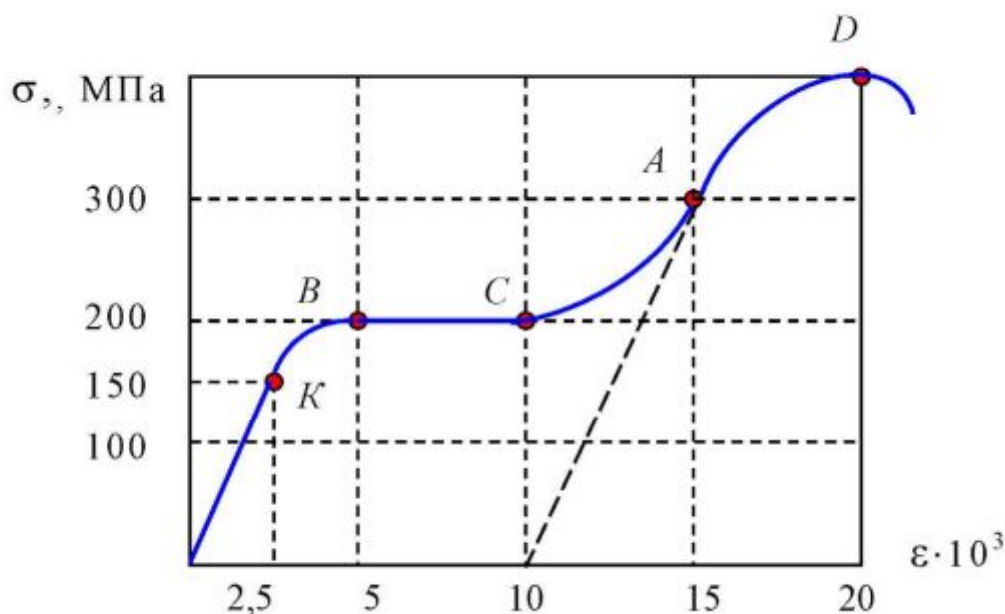


Рисунок 1.2

Предел пропорциональности $\sigma_{\text{ю}}$ соответствует точке, где заканчивается прямая линия – это точка K , что соответствует $\sigma_{\text{ю}} = 150$ МПа.

Предел текучести соответствует точкам B и C , что соответствует $\sigma_{\text{о}} = 200$ МПа.

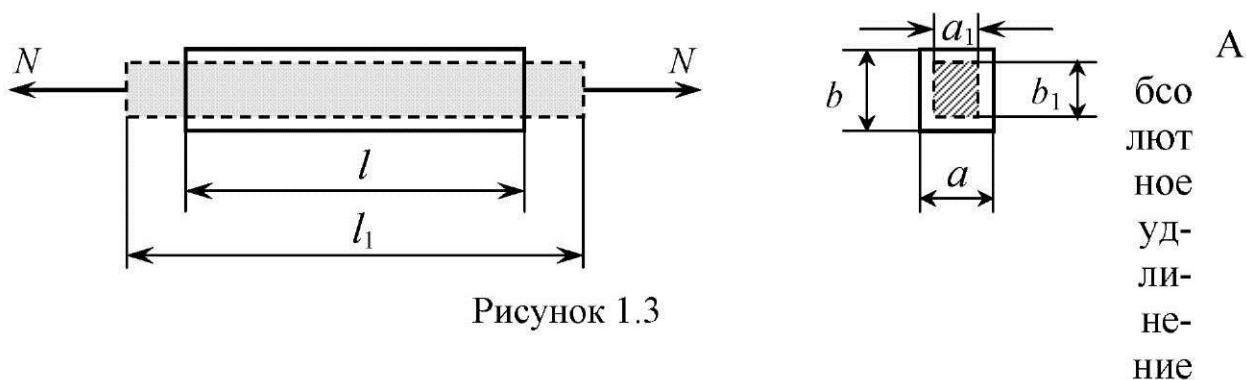
Предел прочности соответствует точке D , это $\sigma_{\text{â}} = 400$ МПа.

Модуль упругости $E = \frac{\sigma^K}{\varepsilon^K} = \frac{150}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 60 \cdot 10^3 \text{ МПа.}$

Остаточная деформация для точки A : $\varepsilon_{\text{ост}} = 10 \cdot 10^{-3}$.

Пояснения к решению задачи 2 (условия тестовой задачи 2 – в приложении А)

При растяжении стержень удлиняется, его поперечные размеры уменьшаются (рисунок 1.3).



или укорочение стержня

$$\Delta l = l_1 - l.$$

Относительное удлинение или укорочение стержня

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.1)$$

Нормальное напряжение $\sigma = \frac{N}{F}. \quad (1.2)$

Закон Гука, по которому существует прямая линейная зависимость между нормальным напряжением σ и относительной продольной деформацией ε , имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.3)$$

где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга), который характеризует физико-механические свойства материала.

Подставляя в выражение (1.3) зависимости (1.1) и (1.2), получим

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \quad (1.4)$$

Изменение поперечного размера (абсолютная поперечная деформация)

$$\Delta a = a_1 - a; \quad \Delta b = b_1 - b.$$

Относительная поперечная деформация $\varepsilon' = \frac{\Delta \dot{a}}{\dot{a}} = \frac{\Delta b}{b}$.

При растяжении $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' < 0$; при сжатии $\varepsilon < 0$, $\varepsilon' > 0$.

В границах применимости закона Гука относительная поперечная деформация пропорциональна относительной продольной деформации и обратна ей по знаку:

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon \quad (1.5)$$

или
$$\varepsilon' = -\mu \frac{\sigma}{A}, \quad (1.6)$$

где μ – коэффициент Пуассона; $\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$.

Коэффициент Пуассона размерности не имеет, и его величина для изотропных материалов колеблется в пределах $0 \leq \mu \leq 0,5$.

Пример решения задачи 2

Определить относительную поперечную деформацию ε' и действующую силу P , если известны:

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}; \quad \mu = 0,35; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad F = 4 \text{ см}^2 \text{ (рисунок 1.4)}.$$

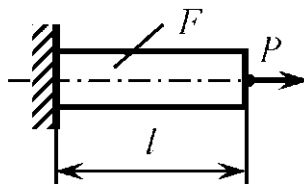


Рисунок 1.4

Определим ε' по формуле (1.5):

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon = -0,35 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = -0,7 \cdot 10^{-4}.$$

Определим P по формуле (1.2):

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{D}{F}, \quad \text{отсюда} \quad P = \sigma F.$$

По формуле (1.3) $\sigma = E\varepsilon$.

Тогда $P = \sigma F = E\varepsilon F$.

Величины ε , F , E заданы по условию задачи:

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}; \quad F = 4 \text{ см}^2 = 4 \cdot 10^2 \text{ мм}^2; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2.$$

$$P = E\varepsilon F = 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^2 = 16 \cdot 10^3 \text{ Н} = 16 \text{ кН}.$$

$$P = 16 \text{ кН}.$$

2 Центральное растяжение и сжатие

Пояснения к решению задачи 3 (см. приложение А)

Растяжением или сжатием называется такой вид деформации стержня, когда в его поперечных сечениях возникают внутренние силы, равнодействующая которых направлена вдоль оси Z стержня – это нормальная (продольная) сила N .

При растяжении нормальная сила направлена по внешней нормали к сечению, а при сжатии – по внутренней.

Нормальную силу, соответствующую растяжению, считают положительной, а сжатую – отрицательной.

а) Построение эпюры N .

Из условия равновесия любой отсечённой части стержня нормальная сила N в каждом сечении численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, взятых по одну сторону от сечения.

Эпюрой нормальных сил N называется график изменения этих сил по длине стержня.

Штриховка на эпюре N всегда должна быть перпендикулярна продольной оси стержня, а следовательно, оси эпюры.

Ординаты эпюр, отложенные в определённом масштабе, должны сопровождаться числовой характеристикой, а поле эпюры знаком плюс «+» или знаком минус «-».

«Скачки» на эпюре N возникают в сечениях, где приложены сосредоточенные силы и по величине равны их значениям.

Аналогичным образом строятся эпюры нормальных напряжений σ , которые определяются по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i},$$

где σ_i – напряжение в i -м сечении;

N_i – внутренняя сила в i -м сечении;

F_i – площадь поперечного сечения в i -м сечении.

б) Подбор поперечного сечения из условия прочности.

Предельным, или опасным, напряжением $\sigma_{\text{пред}}$ называется напряжение, при котором образец из данного материала разрушается или в нём возникают недопустимые пластические деформации.

За предельные напряжения принимают:

- для пластичных материалов – предел текучести

$$\sigma_{\text{гддд}} = \sigma_{\text{д}} \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{гддд}} = \sigma_{0,2};$$

- для хрупко-пластичных материалов – условный предел текучести

$$\sigma_{\text{гддд}} = \sigma_{0,2};$$

- для хрупких – предел прочности

$$\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}.$$

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ всегда меньше предельного

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{гддд}}}{n},$$

где n – требуемый или заданный (нормативный) коэффициент запаса прочности.

$$\text{Для пластичных материалов } [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{д}}}{n};$$

$$\text{для хрупких материалов } [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{в}}}{n}.$$

Величина n зависит от многих факторов: физико-механических свойств материала, разброса в величине предельного напряжения, определяемого из опыта, точности применяемого метода расчёта, характера конструкции, условий и срока её работы, характера и достоверности определения действующих нагрузок и др. При выборе требуемого коэффициента запаса прочности необходимо учитывать имеющийся опыт эксплуатации аналогичных конструкций отрасли.

В обычных расчётах величины n принимают в следующих пределах:

$$n_{\text{т}} = 1,4 \dots 2,0;$$

$$n_{\text{в}} = 2,5 \dots 5,0.$$

Фактический коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{\sigma_{\text{гддд}}}{\sigma_{\text{max}}},$$

где σ_{max} – наибольшее напряжение (расчётное).

Условие прочности при осевом растяжении или сжатии имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma];$$

для хрупких материалов в правой части условия при растяжении – $[\sigma_r]$, а при сжатии – $[\sigma_{сж}]$.

Если $\sigma_{\max}$ превышает допускаемое не более чем на 5 %, то прочность элемента считается достаточной, так как допускаемое напряжение значительно меньше предельного.

Различают три вида расчёта на прочность.

1 Проверка прочности (проверочный расчёт):

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma].$$

По этой формуле можно установить, обеспечена ли прочность при известных N , F и $[\sigma]$.

2 Подбор сечения (проектный расчёт): $F = \frac{N}{[\sigma]}$.

По этой формуле определяют необходимую площадь поперечного сечения при заданных N и $[\sigma]$.

3 Определение допускаемой нагрузки: $[N] = [\sigma]F$.

Пример решения задачи 3

а) Для стержня (рисунок 2.1,а) построить эпюру N .

Разобьём стержень на три участка (I, II, III), где нормальные силы изменяются по одному закону (см. рисунок 2.1,а).

Нормальную силу на каждом участке определяем методом сечений, проводя сечения, перпендикулярные оси Z на каждом участке (1–1, 2–2, 3–3).

Отбрасывая правые отсечённые части на каждом участке и заменяя их действие внутренней силой N_i , направим их в сторону положительного направления оси Z (рисунок 2.1,б,в,г).

Рассмотрим равновесия каждой отсечённой части на каждом участке и определим N_i :

I участок: $\sum Z = 0$; $3 \text{ кН} - N_1 = 0$; $N_1 = 3 \text{ кН}$.

(Знак «–» при N_1 показывает, что эта сила является сжимающей и направлена в противоположную сторону).

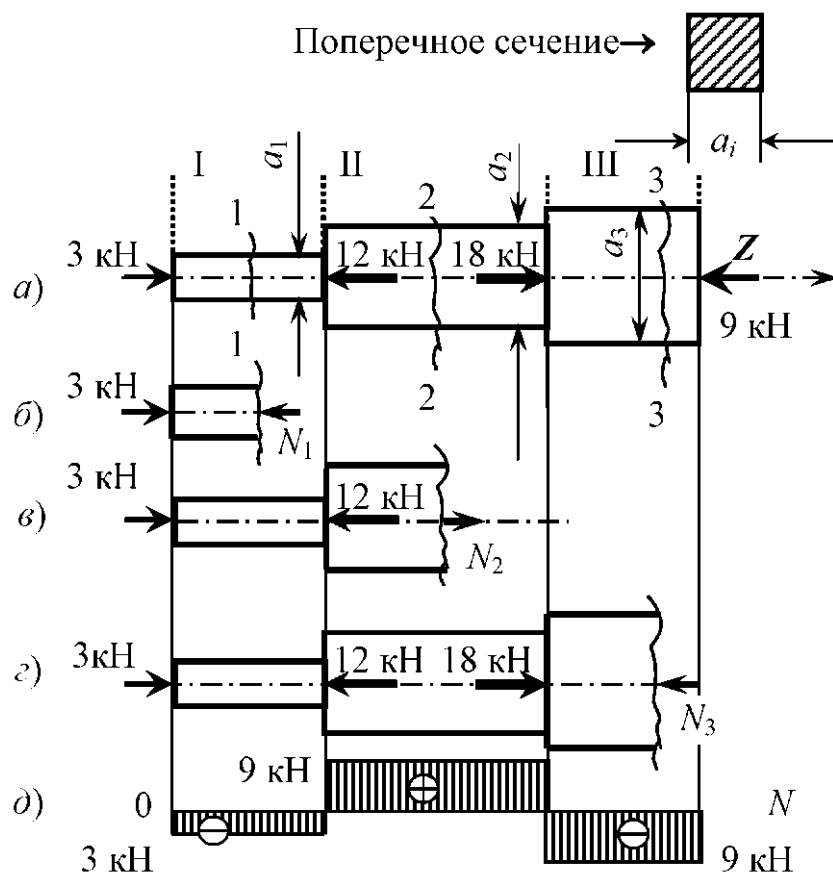


Рисунок 2.1

II участок: $\sum Z = 0$; $3 \text{ кН} - 12 \text{ кН} + N_2 = 0$;

$N_2 = 9 \text{ кН}$ (сила растягивающая).

III участок: $\sum Z = 0$; $3 \text{ кН} - 12 \text{ кН} + 18 \text{ кН} - N_3 = 0$;

$N_3 = 9 \text{ кН}$ (сила сжимающая).

Строим эпюру N , откладывая относительно нулевой линии N (кН), в масштабе: выше – положительные значения, а ниже – отрицательные (рисунок 2.1,г). На эпюре N видны скачки в сечениях, где приложены сосредоточенные силы, равные по величине этим силам.

б) Из условия прочности подобрать безопасные размеры квадратных сечений a_i ступенчатого стержня (см. рисунок 2.1) при следующих данных: материал – сталь Ст3, $\sigma_r = 210 \text{ МПа}$, $n_r = 2$.

Определим безопасные площади поперечных сечений для каждой ступени стержня по формуле $F_i = \frac{N_i}{[\sigma]}$.

Значения N_i берём по эпюре N , $|\sigma| = \frac{\sigma_{\text{до}}}{n} = \frac{210}{2} = 105 \text{ МПа}$.

$$F_1 = \frac{3 \cdot 10^3}{105} = 28,57 \text{ кН};$$

$$F_2 = \frac{9 \cdot 10^3}{105} = 85,71 \text{ кН}; \quad F_3 = \frac{9 \cdot 10^3}{105} = 85,71 \text{ кН}.$$

Определим размер a_i :

$$a_i = \sqrt{F_i}; \quad a_1 = \sqrt{28,57} = 5,3 \text{ м}; \quad a_2 = a_3 = \sqrt{85,71} = 9,3 \text{ м}.$$

Пояснения к решению задач 4 и 5 (см. приложение А)

Стержневые системы, в которых все или часть внутренних силовых факторов не могут быть определены с помощью уравнений статики (равновесия), называются статически неопределимыми. *В статически неопределимых системах число независимых усилий превышает число уравнений статики.* Недостающие уравнения составляются из рассмотрения схемы деформации системы (условие совместности деформаций элементов конструкции).

Степень статической неопределимости – это разность между количеством неизвестных усилий в уравнениях статики и количеством самих уравнений.

Пример решения задачи 4

Составить с помощью метода сечений все возможные уравнения равновесия.

Определить степень статической неопределимости (рисунок 2.2,а).

1) Составим схему сил.

Для этого мысленно рассечём стержни 1 и 2.

Отбросим опору С.

В опоре О возникнут реактивные силы Y_O и Z_O .

В стержнях возникнут внутренние силы N_1 и N_2 , (рисунок 2.2,б).

2) Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma Y = 0; \quad \Sigma Z = 0; \quad \Sigma M_O = 0.$$

$$\Sigma Y = 0; \quad -P + Y_O - N_2 - N_1 \cdot \sin \alpha = 0.$$

$$\Sigma Z = 0; \quad Z_O - N_1 \cdot \cos \alpha = 0.$$

$$\Sigma M_O = 0; \quad -Pa + N_2 \cdot 2a + N_1 \cdot \sin \alpha (2a + a) = 0.$$

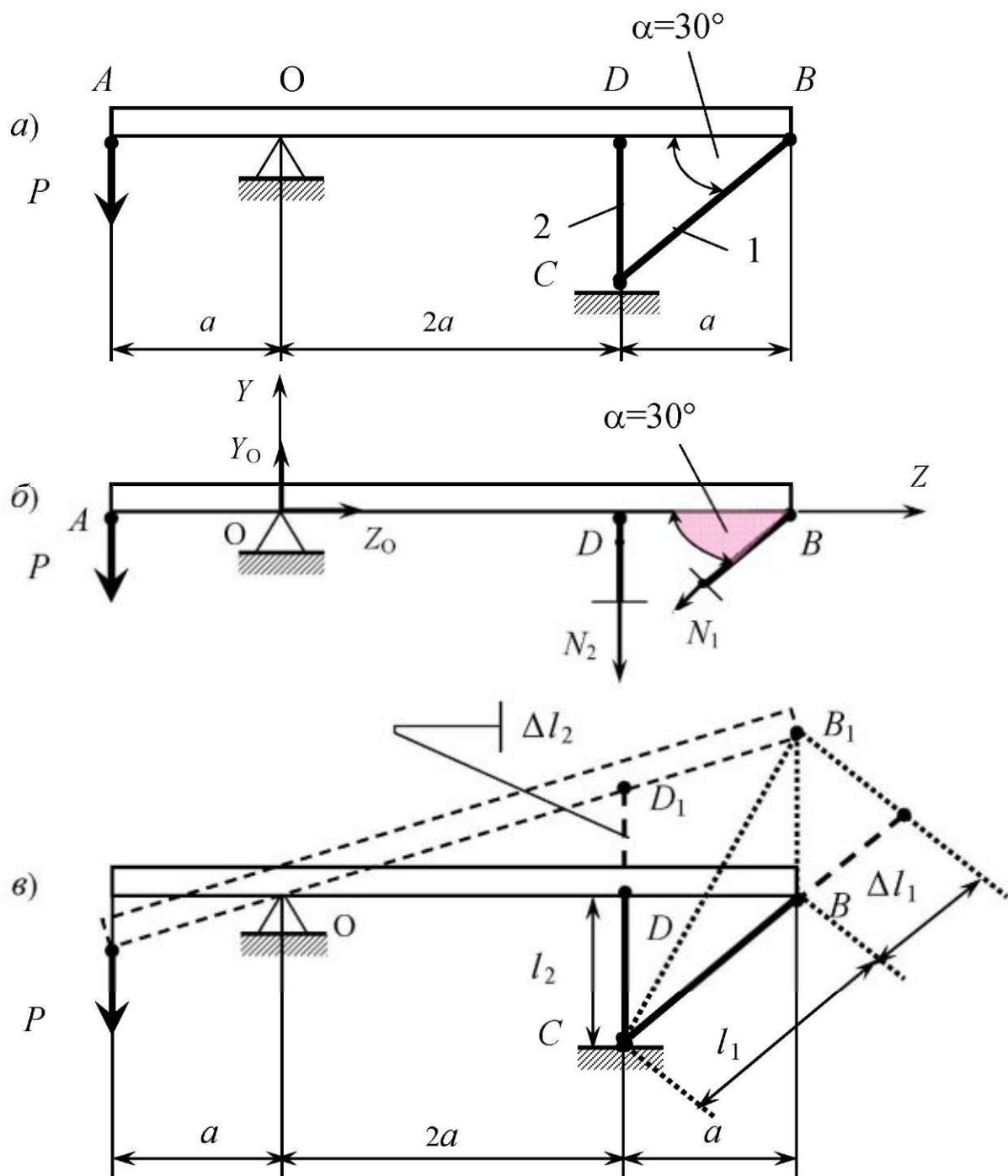


Рисунок 2.2

Получили три уравнения статики.

Количество неизвестных – четыре: Y_O , Z_O , N_1 , N_2 .

3) Определим степень статической неопределимости:

$$n = 4 - 3 = 1.$$

Пример решения задачи 5

Построить деформированную схему один раз статически неопределимой конструкции (см. рисунок 2.2,а).

Составить уравнение совместности деформаций.

1) Рассмотрим новое положение балки (см. рисунок 2.2,а,в) после её поворота около шарнира О вследствие деформаций стержней 1 и 2. На схеме перемещений (см. рисунок 2.2,в) удлинения стержней 1 и 2 и перемещения шарниров D и B показаны с большим преувеличением.

Действительные перемещения точек D и B балки по дугам заменяем перемещениями по вертикальным прямым BB_1 и DD_1 .

Из схемы перемещений видно:

$$\hat{A}\hat{A}_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ} = 2\Delta l_1; \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad BB_1 = 2\Delta l_1; \quad DD_1 = \Delta l_2.$$

2) Составим уравнение совместности деформаций стержней 1 и 2.

Из подобия треугольников ODD_1 и OBB_1 следует

$$\frac{\hat{A}\hat{A}_1}{DD_1} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2},$$

но $BB_1 = 2\Delta l_1$ и $DD_1 = \Delta l_2$,

тогда
$$\frac{2\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{3}{2}.$$

Отсюда
$$\Delta l_1 = \frac{3}{4}\Delta l_2.$$

Выразим это уравнение через усилия, используя второе выражение закона Гука:
$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E_i F_i};$$

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}.$$

Таким образом, получили уравнение совместности деформаций.

Решая совместно уравнения статики и уравнение совместности деформаций, можно определить неизвестные силы N_1 и N_2 , т.е. раскрыть статическую неопределимость.

3 Геометрические характеристики плоских сечений

Пояснения к решению задачи 6 (см. приложение А)

К геометрическим характеристикам плоских сечений относятся:

F – площадь сечения, см^2 ;

S_x, S_y – статические моменты площади, см^3 ;

J_x, J_y – осевые моменты инерции, см^4 ;

J_{xy} – центробежный момент инерции, см^4 ;

J_p – полярный момент инерции, см^4 ;

W_x, W_y – осевые моменты сопротивления, см^3 ;

W_p – полярный момент сопротивления, см^3 .

Статические моменты площади (рисунок 3.1) определяются по формулам

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF.$$

Если известны положения центра тяжести сечения и его площадь, то

$$S_x = Fy_0; \quad S_y = Fx_0,$$

где y_0, x_0 – координаты центра тяжести сечения.

Относительно центральных осей S_x и S_y равны нулю.

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен алгебраической сумме статических моментов всех элементарных частей относительно той же оси.

Координаты центра тяжести сложного сечения определяются по формулам

$$x_0 = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_0 = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}. \quad (3.1)$$

Если сечение имеет ось симметрии (например ось X), то центр тяжести лежит на этой оси и его положение определяется одной ко-

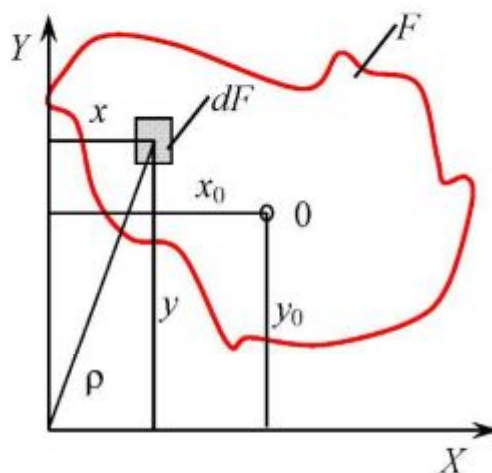


Рисунок 3.1

ординатой – y_0 . Если сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести лежит на пересечении этих осей.

Моменты инерции представляют собой интегралы

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_p = \int_F \rho^2 dF; \quad J_{xy} = \int_F xy dF.$$

Осевой момент инерции сложного сечения равен алгебраической сумме осевых моментов инерции составляющих его элементов:

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3} + \dots + J_n = \sum_{i=1}^n J_{x_i}.$$

Поэтому при определении осевого момента инерции сложного сечения это сечение разбивают на фигуры, моменты инерции которых относительно своих центральных осей или известны, или легко определяются.

При переносе центральных осей элементарных фигур к центральным осям всей сложной фигуры пользуются теоремой о параллельном переносе осей:

$$J_{x_{C_i}} = J_{x_i} - F_i a_i^2, \quad (3.2)$$

где $J_{x_{C_i}}$ – момент инерции элементарной фигуры относительно центральных осей всей сложной фигуры;

J_{x_i} – момент инерции элементарных фигур относительно своих центральных осей;

F_i – площади элементарных фигур;

a_i – расстояния между центральными осями элементарных фигур и центральными осями всей сложной фигуры.

При повороте осей пользуются формулами теоремы о повороте осей:

$$J_x = J_{x_1} \cos^2 \alpha + J_{y_1} \sin^2 \alpha - J_{x_1 y_1} \sin 2\alpha;$$

$$J_y = J_{x_1} \sin^2 \alpha + J_{y_1} \cos^2 \alpha + J_{x_1 y_1} \sin 2\alpha,$$

где J_{x_1} , J_{y_1} , $J_{x_1 y_1}$ – осевые и центробежный моменты инерции относительно осей X_1 и Y_1 ;

J_x , J_y – осевые моменты инерции относительно новых осей, повернутых на угол α ;

α – угол поворота между старыми и новыми осями.

Угол α определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2 J_{x_1 y_1}}{J_{x_1} - J_{y_1}}.$$

Две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции, а осевые моменты инерции относительно этих осей называются главными моментами инерции.

Главные моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести, называются главными центральными моментами инерции.

Пример решения задачи 6

а) Определение центра тяжести сложного сечения (рисунок 3.2).

Заштрихованную площадь можно рассматривать как разность площадей большего (фигура I) и меньшего (фигура II) прямоугольников.

Для данного сечения ось Y является осью симметрии, поэтому одна координата будет лежать на этой оси $x_0 = 0$. Следовательно, положение центра тяжести определяется одной координатой y_0 .

Проведём вспомогательную ось X_1 , совпадающую с нижней гранью сечения.

Определим площади фигур I и II по формуле $F = bh$:

$$F_I = 6 \cdot 5 = 30 \text{ см}^2.$$

$$F_{II} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ см}^2.$$

Определим S_{x_i} фигур I и II по формуле $S_{x_i} = F_i y_i$, для которых

$$F_I = 30 \text{ см}^2, \quad F_{II} = 16 \text{ см}^2,$$

$$y_I = 2,5 \text{ см}, \quad y_{II} = 2,0 \text{ см};$$

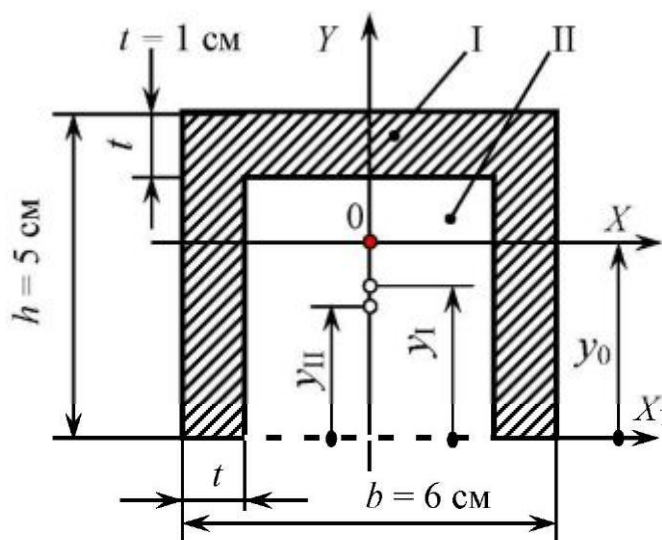


Рисунок 3.2

$$S_{x_1}^I = 30 \cdot 2,5 = 75 \text{ см}^3; \quad S_{x_1}^{II} = 16 \cdot 2 = 32 \text{ см}^3.$$

Определим y_0 по формуле (3.1):

$$y_0 = \frac{\sum S_{x_1}^i}{\sum F_i} = \frac{S_{x_1}^I - S_{x_1}^{II}}{F_1 - F_2};$$

$$y_0 = \frac{75 - 32}{30 - 16} = \frac{43}{14} = 3,07 \text{ см.}$$

б) Определение главных центральных моментов инерции (рисунок 3.2).

Моменты инерции относительно оси X_1 :

J_{X_1} – момент инерции всего сечения относительно оси X_1 :

$$J_{X_1} = J_{X_1}^I - J_{X_1}^{II};$$

$J_{X_1}^I$ – момент инерции фигуры I относительно оси X_1 :

для прямоугольника I $J_{X_1}^I = \frac{b_I h_I^3}{3} = \frac{6 \cdot 5^3}{3} = 250 \text{ см}^4;$

$J_{X_1}^{II}$ – момент инерции фигуры II относительно оси X_1 :

для прямоугольника II $J_{X_1}^{II} = \frac{b_{II} h^3}{3} = \frac{4 \cdot 4^3}{3} = 85,33 \text{ см}^4.$

В результате получим $J_{X_1} = 250 - 85,33 = 164,67 \text{ см}^4.$

Момент инерции относительно главной центральной оси – главный центральный момент инерции (см. формулу 3.2):

$$J_X = J_{X_1} - F y_0^2,$$

где F – площадь сечения заданной фигуры,

$$F = F_1 - F_{II} = 30 - 16 = 14 \text{ см}^2;$$

$$J_X = 164,67 - 14 \cdot 3,07^2 = 32,72 \text{ см}^4.$$

Так как ось Y является центральной для обоих прямоугольников, то

$$J_Y = J_Y^I - J_Y^{II},$$

где J_Y^I и J_Y^{II} – момент инерции прямоугольников I и II относительно центральной оси Y;

$$J_Y^I = \frac{hb^3}{12} = \frac{5 \cdot 6^3}{12} = 90 \text{ см}^4; \quad J_Y^{II} = \frac{4 \cdot 4^3}{12} = 21,33 \text{ см}^4.$$

$$J_Y = 90 - 21,33 = 68,67 \text{ см}^4.$$

Таким образом, главные центральные моменты инерции

$$J_X = 32,72 \text{ см}^4;$$

$$J_Y = 68,67 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивления $W_X = \frac{J_X}{|y_{\max}|}; \quad W_Y = \frac{J_Y}{|x_{\max}|}.$

4 Теория напряжённого состояния

Пояснения к решению задачи 7 (см. приложение А)

При объёмном напряжённом состоянии тела среди бесчисленного множества площадок, которые можно провести через любую точку внутри тела, есть три взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Эти площадки называются главными, а возникающие на них нормальные напряжения называются главными напряжениями. Их обозначают $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Индексы расставляют таким образом, чтобы соблюдалось условие $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Для данной точки σ_1 – наибольшее значение, а σ_3 – наименьшее значение (алгебраически).

Различают объёмное (трёхосное), плоское (двухосное) и линейное (одноосное) напряжённые состояния.

При плоском напряжённом состоянии в окрестностях точки можно выделить элементарный параллелепипед, у которого две грани свободны от напряжений (главные нулевые площадки), а среди семейства площадок, перпендикулярных нулевой главной площадке, можно найти две взаимно перпендикулярные главные площадки, в которых возникают наибольшее и наименьшее главные напряжения.

Положение главных площадок определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\tau_{x(y)}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.1)$$

Для этого площадки, в которых действуют σ_x и σ_y , следует повернуть оси на угол α против часовой стрелки (при $\alpha > 0$) или по часовой стрелке (при $\alpha < 0$).

Величины главных напряжений, возникающих на этих главных площадках, определяются по формуле

$$\sigma_{\text{гс}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{x(y)}^2}. \quad (4.2)$$

Индексы главных напряжений устанавливаются после вычисления этих напряжений.

Экстремальные касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau_{\text{max/min}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{x(y)}^2}. \quad (4.3)$$

Площадки, по которым действуют $\tau_{\max/\min}$, располагаются под углом 45° к главным площадкам.

Экстремальные касательные напряжения действуют в направлениях от $\sigma_{\min}$ к $\sigma_{\max}$, как показано на рисунке 4.1.

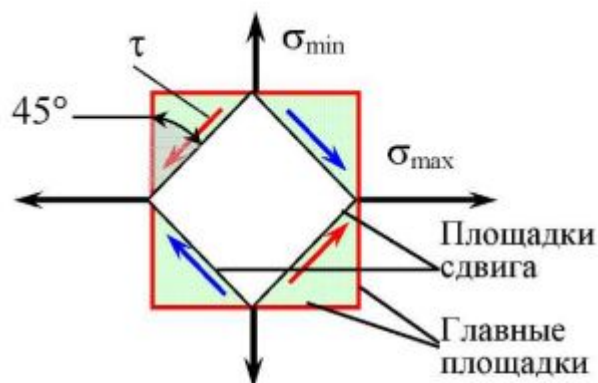


Рисунок 4.1

В формулы (4.1), (4.2) и (4.3) исходные напряжения подставляются со своими знаками.

Напряжения σ_x и σ_y – положительные, если они растягивающие, и, наоборот, – отрицательные, если они сжимающие.

Пример решения задачи 7

а) Определение главных напряжений.

Определить значения главных напряжений

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

для изображённого напряжённого состояния на рисунке 4.2.

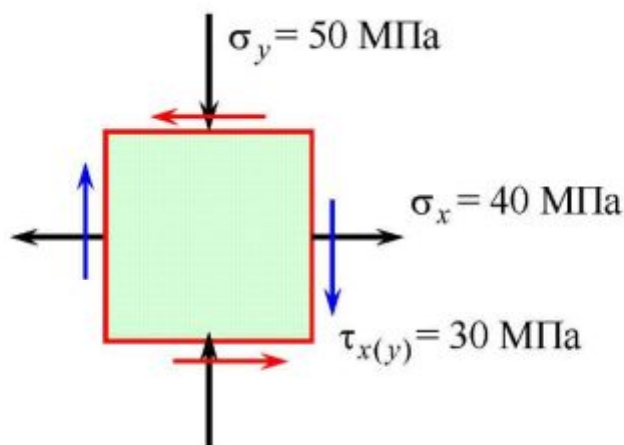


Рисунок 4.2

Определим величины главных напряжений по формуле (4.2):

$$\sigma_{\text{г.е.}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{\text{г.е.}} = \frac{40 + (-50)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(40 - (-50))^2 + 4 \cdot 30^2} = -5 \pm 54 = \begin{matrix} +49 \\ -59 \end{matrix}.$$

Анализируя полученные результаты, определим главные напряжения:

$$\sigma_1 = 49 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -59 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

б) Определение положения главных площадок для напряжённого состояния (см. рисунок 4.2).

Определим положение главных площадок по формуле (4.1):

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\tau_{x(y)}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 30}{40 - (-50)} = -0,666; \quad \alpha = -33^\circ 40'.$$

Площадки с напряжениями σ_x и σ_y надо повернуть на угол $\alpha = -33^\circ 40'$ по часовой стрелке.

в) Определение экстремальных касательных напряжений (см. рисунок 4.2).

Определим экстремальные касательные напряжения по формуле (4.3):

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{x(y)}^2} =$$

$$= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(40 - (-50))^2 + 4 \cdot 30^2} = \pm 49,7 \text{ МПа}.$$

5 Кручение

Пояснения к решению задачи 8 (см. приложение А)

Деформация прямого вала, вызываемая внешними парами сил, действующими в плоскостях, перпендикулярных к оси вала, называется кручением. Моменты внешних пар называют *скручивающими* моментами m .

Внутренняя сила в сечении, возникающая под действием внешних скручивающих моментов m , называется *крутящим моментом* M_k .

Крутящий момент M_k по величине равен алгебраической сумме всех внешних *скручивающих* моментов m , взятых по одну сторону от сечения.

Знак крутящего момента физического смысла не имеет, и общепринятого правила знаков нет; однако для расчётов примем такое правило знаков: **крутящий момент M_k в сечении считается положительным, если смотреть в сторону сечения, внешний *скручивающий* момент m вращается против часовой стрелки, и наоборот.**

Для расчёта вала на прочность и жёсткость при кручении необходимо знать величину крутящего момента M_k в любом сечении вала.

Закон изменения крутящих моментов по длине вала, представленный в виде графика (диаграммы), называется *эпюрой крутящих моментов*. При построении эпюры крутящих моментов их величины откладываются в определённом масштабе, при этом выше нулевой линии положительные, ниже нулевой линии – отрицательные. Каждая ордината M_k даёт величину крутящего момента в соответствующем поперечном сечении вала. В сечениях, где приложены сосредоточенные внешние моменты M_i , на эпюре M_k получаются «скачки», равные по величине внешним скручивающим моментам.

При кручении в поперечных сечениях вала возникают касательные напряжения, определяемые по формуле

$$\tau_\rho = \frac{J}{J_\delta} \hat{\epsilon} \rho,$$

где τ_ρ – касательное напряжение в точке на расстоянии ρ от центра сечения;

$M_{\hat{e}}$ – крутящий момент в сечении;

J_p – полярный момент инерции поперечного сечения.

Наибольшее касательное напряжение в сечении возникает в крайних точках при $\rho = r_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{\dot{I} \hat{e} r}{J_p} = \frac{\dot{I} \hat{e}}{W_p},$$

где $W_p = \frac{J_p}{r}$ – полярный момент сопротивления;

– для круга $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3;$

– для кольца $W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - \tilde{n}^4) \approx 0,2d^3 (1 - \tilde{n}^4),$

здесь $\tilde{n} = \frac{d_0}{d}$ (d_0 – внутренний диаметр вала).

Условие прочности вала состоит в том, что наибольшее касательное напряжение в опасном сечении не должно превышать допускаемого касательного напряжения:

$$\max \tau \leq [\tau].$$

Опасным сечением считается сечение, где τ имеет максимальное значение.

Пользуясь условием прочности, можно решить три типа задач:

1 Проверка прочности (проверочный расчёт):

$$\max \tau = \frac{\max M_{\hat{e}}}{W_p} \leq [\tau].$$

Для пластичных материалов $[\tau] \approx 0,5[\sigma_t]$.

2 Подбор сечения (проектный расчёт):

$$W_p = \frac{\max M_{\hat{e}}}{[\tau]}.$$

Тогда для сплошного круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot \max M_{\hat{e}}}{\pi [\tau]}}.$$

3 Определение допускаемого крутящего момента

$$[\max M_{\hat{e}}] = [\tau] W_p.$$

Пример решения задачи 8

Построить эпюру крутящих моментов M_k и из условия прочности подобрать диаметры поперечных сечений вала (рисунок 5.1) при следующих исходных данных: материал – сталь 30;

$$\sigma_T = 300 \text{ МПа};$$

$$n = 2;$$

$$m = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Разбиваем вал на два характерных участка I и II, у которых внутренние силы M_k и напряжения τ изменяются по одному закону (рисунок 5.1, а).

Из условия равновесия найдём реактивный момент в защемлении*:

$$\sum m_i = 0;$$

$$m_A - 2m - 3m = 0;$$

$$m_A = 5m = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Реактивный момент можно не рассчитывать, если определять крутящие моменты M_k при взгляде со стороны свободного конца вала на защемлённый конец.

Реактивный момент можно определить после построения эпюры M_k .

Реактивный момент будет равен величине «скачка» на эпюре в сечении А.

Пользуясь методом сечений, определим крутящие моменты в произвольном сечении каждого участка, идя от свободного конца вала.

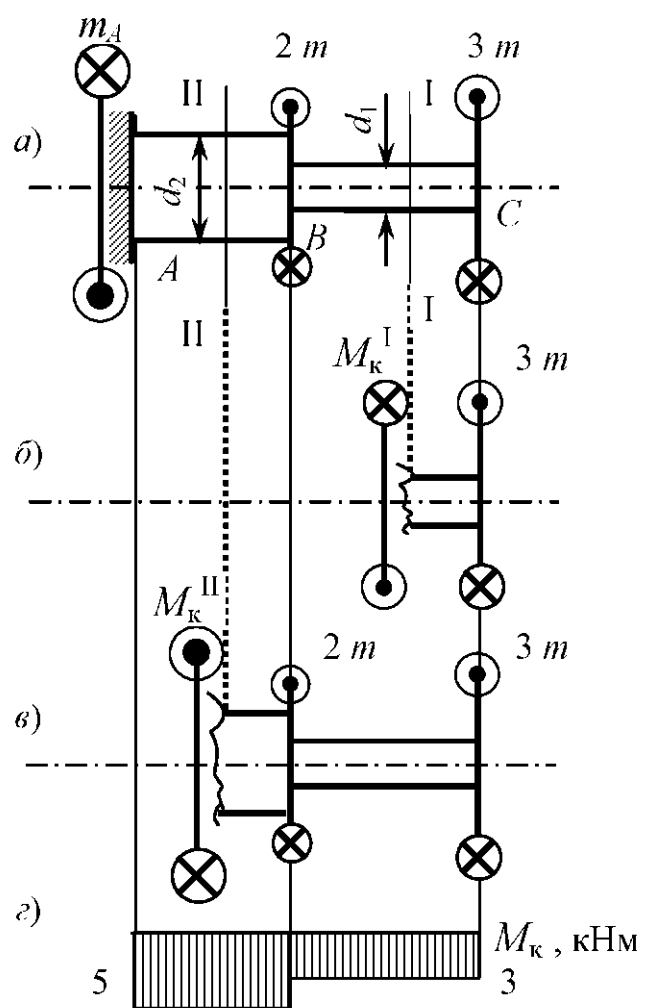


Рисунок 5.1

* Направление m_A проставляем произвольно. После вычисления положительное значение m_A указывает на верно выбранное направление.

I участок: $\dot{I}_{\hat{e}}^I = -3m = -3 \hat{e}H \cdot i$ (рисунок 5.1,б).

II участок: $\dot{I}_{\hat{e}}^{II} = -3 - 2 = -5m = -5 \hat{e}I \cdot i$ (рисунок 5.1,в).

По полученным данным построим эпюру M_K (рисунок 5.1,г).

На эпюре M_K видно, что в сечениях, где приложены сосредоточенные *скручивающие* моменты m , получаются «скачки», равные приложенным m_i , в том числе в сечении A «скачок» равен 5 кН·м, т.е. реактивный момент $m_A = 5$ кН·м.

Определим диаметры вала d_1 и d_2 .

Из условия прочности $d_i = \sqrt[3]{\frac{16 M_{\hat{e}i}}{\pi [\tau]}}$,

где d_i – диаметр вала на каждом участке;

M_{K_i} – крутящий момент на каждом участке;

$[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение,

причём $[\tau] = 0,5[\sigma_0]$, $[\sigma_0] = \frac{\sigma_0}{n} = \frac{300}{2} = 150$ МПа.

$[\tau] = 0,5[\sigma_0] = 0,5 \cdot 150 = 75$ МПа.

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 M_{\hat{e}}^I}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 75 \cdot 10^6}} = 0,0588 \text{ м}. \text{ Принимаем } d_1 = 60 \text{ мм.}$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16 M_{\hat{e}}^{II}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 75 \cdot 10^6}} = 0,0697 \text{ м}. \text{ Принимаем } d_2 = 70 \text{ мм.}$$

Пояснения к решению задачи 9 (см. приложение А)

Статически неопределимые задачи при кручении возникают в том случае, если внутренние силовые факторы в заданной системе не могут быть определены с помощью только уравнений равновесия (статики). При решении таких задач необходимые дополнительные уравнения составляются из условия совместности деформаций. Метод решения таких задач не отличается от метода решения статически неопределимых задач при растяжении (сжатии):

– составляют уравнение статики – сумма всех скручивающих моментов сил (внешние моменты, включая реактивные моменты) вокруг продольной оси Z , равна нулю:

$$\sum m_i = 0;$$

– составляют дополнительное уравнение исходя из условия деформаций элементов, входящих в систему, т.е. деформационное уравнение с использованием второго выражения закона Гука:

$$\varphi_i = \frac{M_{\hat{e}_i} l_i}{G J_P}; \Sigma \varphi_i = 0;$$

– решают совместно уравнение статики и деформационное уравнение и определяют неизвестные реактивные моменты в заделках, т.е. раскрывают статическую неопределимость;

– определяют величины внутренних сил (крутящих моментов) по участкам и строят их эпюру.

Пример решения задачи 9

Определить, какая эпюра крутящих моментов соответствует расчётной схеме (рисунок 5.2).

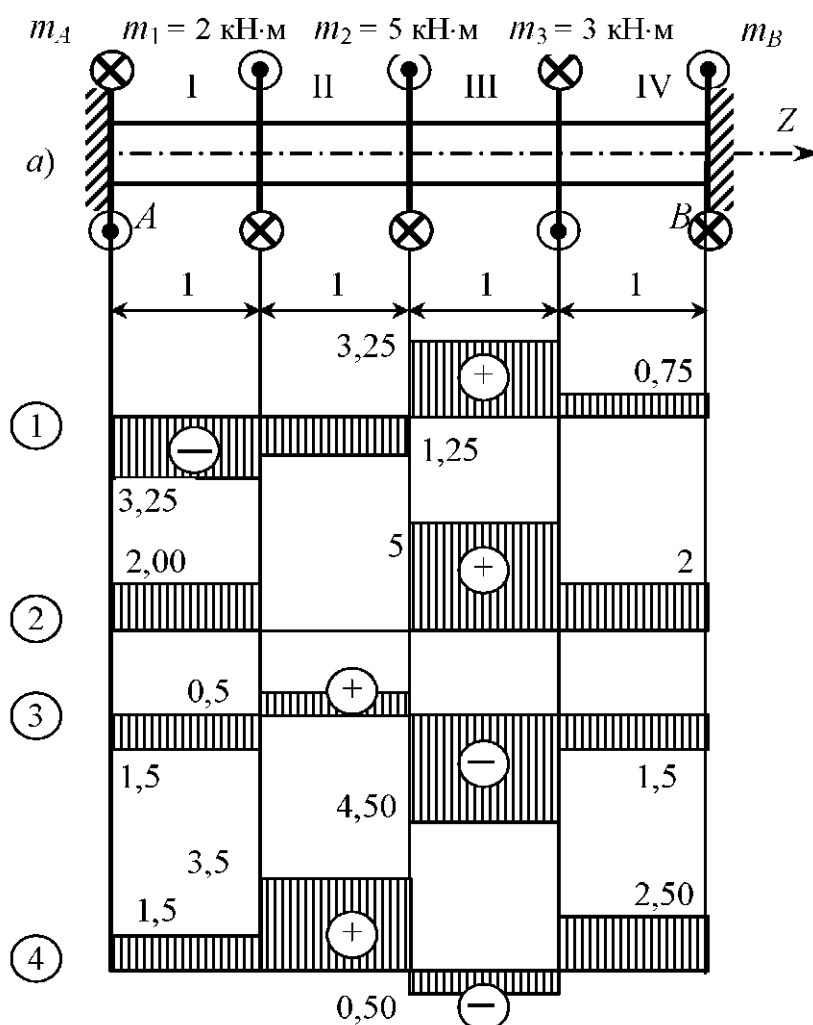


Рисунок 5.2

В местах жёсткого заземления возникнут реактивные моменты

$$m_A \text{ и } m_B.$$

Их направление выберем произвольно (рисунок 5.2,а). После их вычисления положительный знак укажет на правильно выбранное направление. Разбиваем вал на участки I, II, III, IV (см. рисунок 5.2,а).

Составляем уравнения статики:

$$\begin{aligned} m_A - m_1 - m_2 + m_3 - m_B &= 0; \\ m_A - 2 - 5 + 3 + m_B &= 0; \\ m_A - m_B &= -4. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Задача статически неопределимая, так как имеем одно уравнение с двумя неизвестными. Составим дополнительное уравнение из условия совместности деформаций (угол поворота сечения B при суммарных углах поворота каждого участка будет равен нулю):

$$\varphi_B = \sum \varphi_i (M_{k_i}) = 0. \quad (5.2)$$

Составим выражения крутящих моментов M_k^i для каждого участка, используя правило знаков:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{\hat{e}}^I &= -m_A; \\ \dot{I}_{\hat{e}}^{II} &= -m_A + m_1 = -m_A + 2; \\ \dot{I}_{\hat{e}}^{III} &= -m_A + m_1 + m_2 = -m_A + 2 + 5; \\ \dot{I}_{\hat{e}}^{IV} &= -m_A + m_1 + m_2 - m_3 = -m_A + 2 + 5 - 3. \end{aligned} \right\} M_k^i \quad (5.3)$$

Запишем уравнение (5.2), используя закон Гука $\varphi_i = \frac{M_{\hat{e}}^i l_i}{G J_p}$:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\hat{e}}^I l_1}{G J_p} + \frac{M_{\hat{e}}^{II} l_2}{G J_p} + \frac{M_{\hat{e}}^{III} l_3}{G J_p} + \frac{M_{\hat{e}}^{IV} l_4}{G J_p} &= 0; \\ \frac{-m_A \cdot 1}{G J_p} + \frac{(-m_A + 2) \cdot 1}{G J_p} + \frac{(-m_A + 2 + 5) \cdot 1}{G J_p} + \frac{(-m_A + 2 + 5 - 3) \cdot 1}{G J_p} &= 0; \\ -m_A - m_A + 2 - m_A + 2 + 5 - m_A + 2 + 5 - 3 &= 0; \\ -4 m_A + 13 &= 0; \quad m_A = \frac{13}{4} = 3,25 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Подставляя m_A в (5.1), получим:

$$m_A - m_B = -4; \quad 3,25 - m_B = -4; \quad m_B = -7,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Статическая неопределимость раскрыта.

Реактивный момент получился со знаком «-». Следовательно, его направление надо поменять (см. рисунок 5.2,*а*).

Подставляя значение m_d в (5.3), получим M_k^i по участкам:

$$M_k^I = -3,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_k^{II} = -3,25 + 2 = -1,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_k^{III} = -3,25 + 2 + 5 = 3,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_k^{IV} = -3,25 + 2 + 5 - 3 = 0,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сравнивая все эпюры, можно видеть, что верная эпюра будет под номером 1.

6 Изгиб

6.1 Построение эпюр и расчёт на прочность балки

Пояснения к решению задачи 10 (см. приложение А)

а) Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Поперечная сила Q_y в сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения на ось Y , проходящую через центр тяжести сечения.

Q_y считается положительной, если внешняя сила направлена вверх для левой отсечённой части балки, и вниз – для правой отсечённой части балки, как бы вращая обе отсечённые части балки по часовой стрелке относительно оси X , проходящей через центр тяжести поперечного сечения; против часовой стрелки – отрицательной.

Изгибающий момент M_x в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения относительно оси X , проходящей через центр тяжести этого сечения.

M_x считается положительным для левой и для правой отсечённых частей, если внешняя сила изгибает отсечённую часть балки выпуклостью вниз; и отрицательным – если выпуклостью вверх.

Графики (диаграммы), изображающие законы изменения Q_y и M_x вдоль оси балки, называются соответственно эпюрой поперечных сил Q_y и эпюрой изгибающих моментов M_x . При построении эпюр Q_y и M_x положительные их значения в определённом масштабе откладываются выше нулевой линии, а отрицательные – ниже.

б) Подбор поперечных сечений балки из условия прочности.

Условие прочности по нормальным напряжениям для балок, материал которых одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma] ,$$

где $\sigma_{\max}$ – максимальное нормальное напряжение;

$\max M_x$ – максимальный изгибающий момент (его величина выбирается из эпюры M_x для сечения, имеющего наибольшее значение M_x);

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение (его величина берётся такой же, как и при растяжении-сжатии);

$$W_x = \frac{J_x}{|y_{\max}|} \text{ – осевой момент сопротивления сечения балки,}$$

здесь J_x – осевой момент инерции;

$y_{\max}$ – координата наиболее удалённой точки от нейтральной оси.

Если нейтральная линия является осью симметрии, то

$$y_{\max} = \frac{h}{2}.$$

Эта формула используется для проверочных расчётов.

Для подбора размеров сечения балки (проектный расчёт) из условия прочности определяют необходимую величину осевого момента сопротивления:

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]}. \quad (6.1)$$

Величина осевого момента сопротивления W_x зависит от формы и размеров поперечного сечения, а также его расположения относительно направления действующих нагрузок (системы координат).

Размеры площадей, величины осевых моментов инерции J и осевых моментов сопротивления W для некоторых простых плоских фигур (сечений) приведены в приложении Б.

Пример решения задачи 10

а) Построение эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x для заданной балки (рисунок 6.1).

Определяем реактивные силы в опорах, направив их предварительно вверх (рисунок 6.1,а):

$$\Sigma m_A = 0;$$

$$Pa - R_B 2a + (q a) (2,5a) + m = 0.$$

$$R_B = \frac{Pa + q2,5a^2 + m}{2a}, \quad R_B = \frac{10 \cdot 1 + 10 \cdot 2,5 \cdot 1^2 + 10}{2} = 22,5 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m_B = 0; \quad R_A 2a - Pa + (qa)(0,5a) + m = 0.$$

$$R_A = \frac{Pa - q0,5a^2 - m}{2a};$$

$$R_A = \frac{10 \cdot 1 - 10 \cdot 0,5 \cdot 1^2 - 10}{2} = -2,5 \text{ кН}.$$

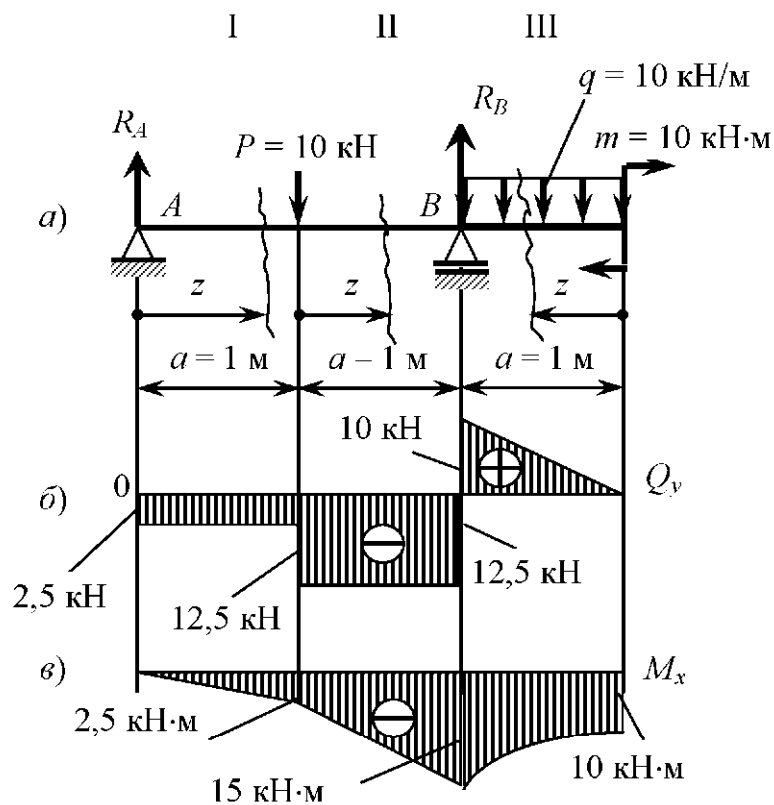


Рисунок 6.1

Знак «—» показывает, что направление реакции A нужно поменять на обратное.

Проверка:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$-R_A - P + R_B - qa = 0;$$

$$-2,5 - 10 + 22,5 - 10 \cdot 1 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Выделим на балке три участка (I, II, III), где поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x изменяются по одному и тому же закону (см. рисунок 6.1, а).

Внутренние силы Q_y и M_x определяем методом сечений, проводя произвольные поперечные сечения на каждом участке.

Эти сечения проводим на расстоянии z от начала или конца каждого участка.

Составим уравнения Q_y и M_x для произвольных сечений каждого участка.

I участок ($0 \leq z \leq a = 1$ м):

$$Q_y^I = -R_A = -2,5 \text{ кН}; \quad M_x^I = -R_A z = -2,5z.$$

Из этих уравнений видно, что Q_y^I – величина, постоянная на всём участке, а M_x^I изменяется по линейному закону.

Проанализируем M_x^I :

$$\text{при } z = 0 \quad M_x^I = 0;$$

$$\text{при } z = 1 \text{ м} \quad M_x^I = -2,5 \cdot 1 = -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Аналогично определяем Q_y и M_x на остальных участках.

II участок ($0 \leq z \leq a = 1$ м):

$$Q_y^{II} = -R_A - P = -2,5 - 10 = -12,5 \text{ кН (постоянная величина)}.$$

$$M_x^{II} = -R_A (a + z) - P z = -2,5(1 + z) - 10 z \text{ (линейный закон)},$$

$$\text{при } z = 0 \quad M_x^{II} = -2,5 (1 + 0) - 10 \cdot 0 = -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z = 1 \text{ м} \quad M_x^{II} = -2,5 (1 + 1) - 10 \cdot 1 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

III участок ($0 \leq z \leq a = 1$ м):

$$Q_y^{III} = q z = 10 \cdot z \text{ (линейный закон)},$$

$$\text{при } z = 0 \quad Q_y^{III} = 0;$$

$$\text{при } z = 1 \text{ м} \quad Q_y^{III} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН}.$$

$$M_x^{III} = -m - q z \left(\frac{z}{2} \right).$$

$$M_x^{III} = -m - q \frac{z^2}{2} \text{ (квадратное уравнение – парабола);}$$

$$\text{при } z = 0 \quad M_x^{\text{III}} = -10 - 10 \frac{0^2}{2} = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } z = 1 \text{ м } M_x^{\text{III}} = -10 - q \frac{1,0^2}{2} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным данным построим эпюру Q_y и эпюру M_x , откладываем положительные значения выше нулевой линии, а отрицательные значения – ниже нулевой линии: эпюра Q_y – на рисунке 6.1,б, эпюра M_x – на рисунке 6.1,в.

б) Подбор размеров поперечного сечения.

Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размер квадратного сечения балки (см. рисунок 6.1) при следующих данных:

материал – сталь 15; $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$; $n_T = 1,5$.

Определяем допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{до}}}{n_{\text{до}}} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}$.

По эпюре M_x определяем $\max M_x$ – сечение В:

$$\max M_x = 15 \text{ кН}\cdot\text{м} = 15 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

Определяем из условия прочности W_x по формуле (6.1):

$$W_x = \frac{\max M_x}{[\sigma]}; \quad W_x = \frac{15 \cdot 10^6}{160} = 0,938 \cdot 10^5 \text{ м}^3 = 93,8 \text{ см}^3.$$

Для квадратного сечения (размер поперечного сечения b)

$$W_x = \frac{b^3}{6}, \quad \text{отсюда } b = \sqrt[3]{6 \cdot W_x}; \quad b = \sqrt[3]{6 \cdot 93,8} = 8,25 \text{ см}; \quad b = 8,25 \text{ см}.$$

6.2 Дифференциальные зависимости Журавского и проверка правильности построения эпюр

Пояснения к решению задач 11 и 12 (см. приложение А)

Изгибающий момент M_x , поперечная сила Q_y и интенсивность распределённой нагрузки q связаны между собой следующими дифференциальными зависимостями Журавского:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= \frac{dM_x}{dz}; \\ q &= \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2 M_x}{dz^2} \end{aligned} \right\}. \quad (6.2)$$

Таким образом:

– первая производная от изгибающего момента по абсциссе поперечного сечения балки равна поперечной силе;

– первая производная от поперечной силы (или вторая производная от изгибающего момента) по абсциссе поперечного сечения балки равна интенсивности распределённой нагрузки.

Из (6.2) вытекают следующие интегральные зависимости:

$$M_x = \int_{z_0}^z Q_y dz + M_0; \quad Q_y = \int_{z_0}^z q dz + Q_0, \quad (6.3)$$

где M_0 – изгибающий момент в начале участка;

Q_0 – поперечная сила в начале участка.

Из приведённых зависимостей (6.2) и (6.3) можно сделать следующие выводы.

Пункт 1. На участке, где отсутствует распределённая нагрузка, эпюра Q_y имеет вид горизонтальной прямой, а эпюра M_x имеет вид наклонной прямой (рисунок 6.2, участки $a-b$, $b-v$).

Пункт 2. На участке, где имеется равномерно распределённая нагрузка q , эпюра Q_y имеет вид наклонной прямой, а эпюра M_x изменяется по квадратичной параболе (рисунок 6.2, участки $v-z$, $z-d$).

Пункт 3. На участке балки (идём слева направо):

- если Q_y положительна, то M_x возрастает (участки $a-b$, $b-v$, $v-c$, $z-d$);
- если Q_y отрицательна, то M_x убывает (участок $c-z$);
- если $Q_y = 0$, то $M_x = \text{const}$ (чистый изгиб).

Если идём справа налево – всё наоборот.

Пункт 4. На участке, где эпюра Q_y пересекает ось Z , M_x достигает экстремального значения (сечения c и z).

Если эпюра Q_y меняет знак с плюса на минус (когда идём слева направо), то момент M_x имеет положительный экстремум (сечение c).

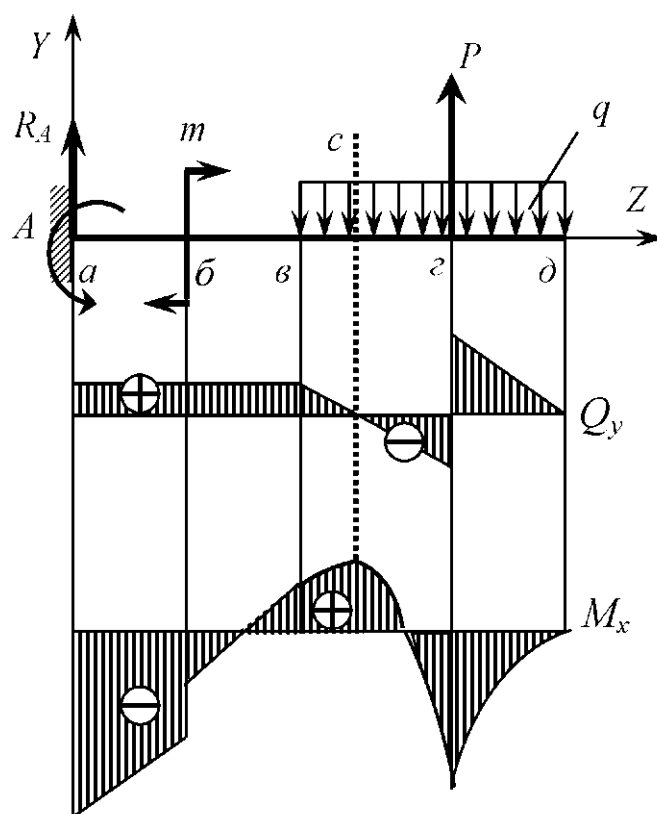


Рисунок 6.2

Если эпюра Q_y меняет знак с минуса на плюс, то M_x имеет отрицательный экстремум (сечение c).

Пункт 5. Поперечная сила в любом сечении численно равна площади эпюры распределённой нагрузки от начала участка до рассматриваемого сечения, сложенной с поперечной силой в начале участка (с учётом знаков, если распределенная нагрузка направлена вниз – знак минус, и наоборот).

Изгибающий момент в любом сечении численно равен площади эпюры поперечной силы от начала участка до рассматриваемого сечения (с учетом знаков), сложенный с изгибающим моментом в начале участка.

При рассмотрении правой части балки площади эпюр Q_y и M_x надо брать с обратным знаком.

Пункт 6. На криволинейном участке эпюры M_x её выпуклость направлена в сторону, противоположную направлению распределённой нагрузки (участки $в-с$, $с-г$, $г-д$).

Пункт 7. В сечении, где к балке приложена сосредоточенная сила P , на эпюре Q_y происходит скачкообразное изменение ординаты («скачок») на величину приложенной силы (сечения a и $г$).

На эюре M_x в этом месте происходит излом эюры, т.е. смежные участки эюры не имеют плавного сопряжения (сечения a и z).

Пункт 8. В сечении, где к балке приложен сосредоточенный момент сил m , на эюре M_x происходит «скачок» ординат на величину приложенного момента (сечение b).

Эти пункты выводов используются для проверки правильности построения эюр Q_o и M_x в характерных сечениях балки без составления уравнений Q_o и M_x для отдельных её участков.

Пример решения задачи 11

Проверить правильность построения эюр Q (см. рисунок 6.3).

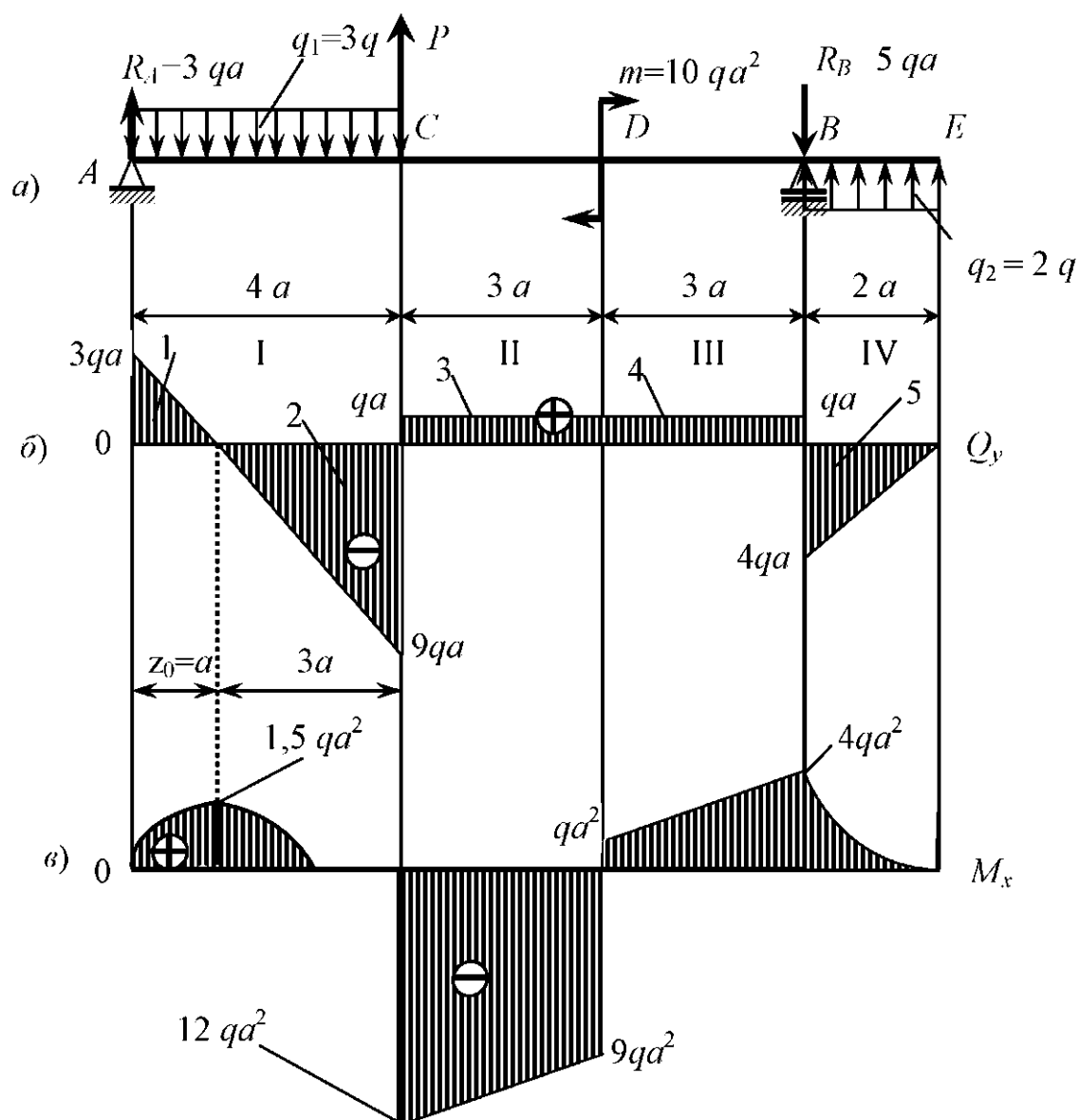


Рисунок 6.3

Идём слева направо.

Вычисляем значения Q в характерных сечениях A, C, D, B, E , которые ограничивают характерные участки I, II, III, IV.

В сечении A сила R_A направлена вверх (Q_A имеет «+»):

$$Q_A = R_A = 3qa.$$

Скачок равен $3qa$; знак «+» (см. пункт 7 выводов).

В конце участка (в сечении на бесконечно близком расстоянии от сечения C) Q_C равна Q_A в начале участка плюс площадь эпюры от распределённой нагрузки (со знаком «-», так как распределённая нагрузка направлена вниз):

$$Q_{\tilde{C}}^{\text{св}} = 3qa - 3q \cdot 4a = -9qa \text{ (пункт 5).}$$

Эпюра Q на I участке имеет вид наклонной прямой (пункт 1).

Так как в сечении C приложена сосредоточенная сила $P = 10qa$ и направлена вверх, то Q на границе I и II участков возрастает на величину $10qa$ скачкообразно:

$$Q_C^{\text{прав}} = -9qa + 10qa = qa \text{ (пункт 2).}$$

От начала II участка и до конца III участка поперечная сила остаётся постоянной, так как на этом участке отсутствует распределённая нагрузка:

$$Q_C^{\text{прав}} = Q_B^{\text{лсв}} = qa \text{ (пункт 1).}$$

В конце III участка на расстоянии, бесконечно близком к сечению B , $Q_y = qa$. В самом сечении приложена сосредоточенная сила $R_B = -5qa$, направленная вниз (отрицательная).

Следовательно, в начале IV участка будет скачок, равный силе R_B :

$$Q_C^{\text{прав}} = qa - 5qa = -4qa \text{ (скачок, пункт 7).}$$

В конце участка IV Q_E равна Q_B плюс площадь эпюры распределённой нагрузки:

$$Q_E = -4qa + 2q \cdot 2a = 0 \text{ (пункт 5), } Q_E = 0.$$

Эпюра участка IV представляет собой наклонную прямую (пункт 2).

Пример решения задачи 12

Проверить правильность построения эпюры M_x (см. рисунок 6.3).

В любом сечении участка I $Q_y = R_A - 3qz$.

Найдём положение сечения z_0 , где эпюра поперечной силы Q_y пересекает линию Z , т.е. $Q_y = 0$:

$$R_A - 3qz_0 = 0, \quad z_0 = \frac{R_A}{3q} = \frac{3qa}{3q} = a.$$

Найдём значения M_x в характерных сечениях A, C, D, B, E и в сечении при $z_0 = a$.

В сечении A : $M_A = 0$.

В сечении C : M_C = площадь треугольника 1 минус площадь треугольника 2 плюс M_A , т.е.

$$M_C = \frac{1}{2} 3a \cdot a - \frac{1}{2} 9qa \cdot 3a + 0 = -12qa^2 \text{ (пункт 5).}$$

В сечении C на эпюре M_x произойдёт излом, так как приложена сосредоточенная сила (пункт 7).

Определим экстремум на участке I (при $z = a$):

$$\dot{M}_{\max} = 3qa \cdot z_0 - 3qa \frac{z^2}{2} = 3qa \cdot a - 3qa \cdot \frac{a}{2} = 1,5qa^2.$$

Значение $M_{\max} = 1,5qa^2$, следовательно, экстремум положительный (пункт 4).

На эпюре Q_1 :

– треугольник 1 – положительный, эпюра M_x возрастает (пункт 3);

– треугольник 2 – отрицательный, эпюра M_x убывает (пункт 3).

Эпюра на участке I имеет выпуклость навстречу распределённой нагрузке (пункт 6).

В сечении D (слева):

M_D = площадь прямоугольника 3 + M_C ;

$$M_D^{\text{лев}} = qa \cdot 3a - 12qa^2 = 3qa^2 - 12qa^2 = -9qa^2 \text{ (пункт 5).}$$

В самом сечении D приложен сосредоточенный момент $m = 10qa^2$ (положительный).

Следовательно, в сечении D произойдёт «скачок», равный $m = 10qa^2$.

$$M_D^{\text{прав}} = -9qa^2 + 10qa^2 = qa^2 \text{ (пункт 7).}$$

Эпюра M_x на участке II возрастает, так как эпюра Q_y положительна (пункт 3).

В сечении B : $M_B = \text{площадь прямоугольника } 4 + M_D^{\text{прав.}}$;

$$M_B = qa \cdot 3a + qa^2 = 4qa^2 \text{ (пункт 5).}$$

Эпюра M_x на участке III возрастает, так как эпюра Q_y положительна (пункт 3).

В сечении E $M_E = 0$. В сечении B произойдёт излом в эпюре, так как в этом сечении приложена сосредоточенная сила (пункт 7).

На участке IV эпюра M_x имеет вид параболы, направленной выпуклостью вниз (пункт 6). Эпюра M_x на участке IV убывает, так как эпюра Q_y отрицательна (пункт 3).

6.3 Перемещения сечений балки

Пояснения к решению задачи 13 (см. приложение А)

Под действием внешних сил, вызывающих прямой изгиб балки, её первоначальная прямая ось изгибается, превращаясь в кривую линию, называемую изогнутой осью, или упругой линией балки (рисунок 6.4).

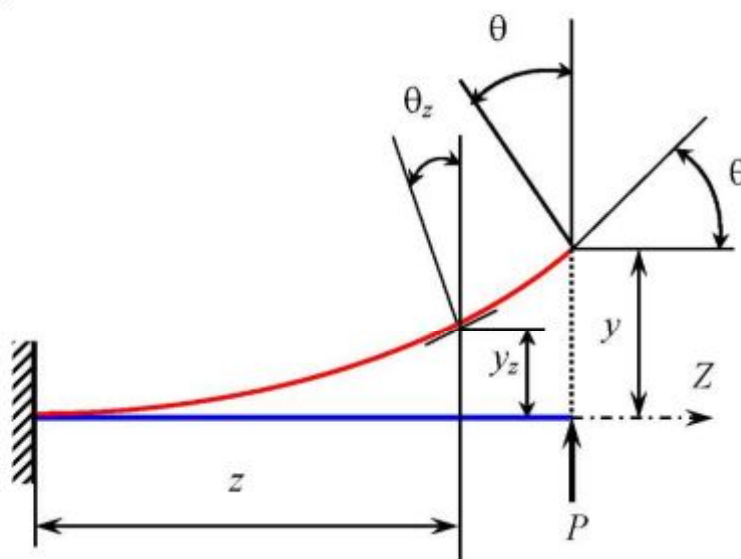


Рисунок 6.4

Вследствие изгиба центр тяжести поперечного сечения балки получает линейное перемещение, перпендикулярное к первоначальной оси балки, которое называется прогибом сечения y , а поперечное сечение, оставаясь плоским и перпендикулярным к изогнутой оси балки, поворачивается вокруг нейтральной оси X на угол θ , который называется углом поворота сечения.

Перемещения балки y_z и θ_z , находящиеся на любом расстоянии z от начала координат, можно определить методом начальных параметров с помощью обобщённых или универсальных уравнений упругой линии*:

$$EJ y_z = EJ y_0 + EJ \theta_0 z + \sum \frac{m_i z_m^2}{2} + \sum \frac{P_i z_p^3}{6} + \sum \frac{q_{1i} z_{q1}^4}{24} - \sum \frac{q_{2i} z_{q2}^4}{24}, \quad (6.4)$$

$$EJ \theta_z = EJ \theta_0 + \sum m_i z_m + \sum \frac{P_i z_p^2}{2} + \sum \frac{q_{1i} z_{q1}^3}{6} - \sum \frac{q_{2i} z_{q2}^3}{6}, \quad (6.5)$$

где EJ – жёсткость сечения балки;

y_z и θ_z – прогиб и угол поворота сечения балки на расстоянии z от начала координат;

y_0 и θ_0 – прогиб и угол поворота сечения балки в начале координат;

m , P и q – внешние нагрузки, приложенные к балке (активные и реактивные);

z_m , z_p , z_q – расстояния от рассматриваемого сечения до точки приложения, соответствующей внешней нагрузке (z_q – до начала действия соответствующей распределённой нагрузке).

Начало координат необходимо располагать в левом конце балки, а ось Z направить вправо (можно наоборот).

Значения начальных параметров y_0 и θ_0 определяются из граничных условий или условий поведения балки на опорах.

Если начало координат совпадает с защемлением балки (рисунок 6.5,а), то оба начальных параметра θ_0 и y_0 равны нулю.

* Метод основан на непосредственном интегрировании основной формулы теории изгиба балки при использовании специальных приёмов рационального интегрирования:

– интегрирование выражений, содержащих скобки, проводится без раскрытия скобок;

– если на балку действует сосредоточенный момент, то этот момент при решении уравнения умножают на выражение в скобке, равное 1;

– если на балку действует распределённая нагрузка, не доходящая до конца балки, то её продолжают до конца, и для сохранения первоначального условия прикладывают распределённую нагрузку, равную добавленной, но с обратным знаком.

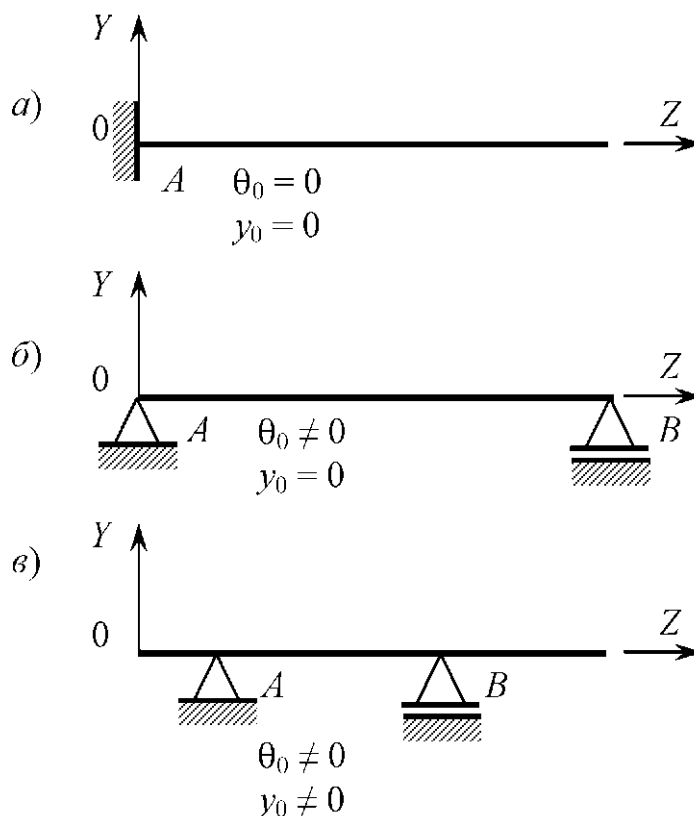


Рисунок 6.5

Если начало координат совпадает с шарнирной опорой (рисунок 6.5,б), то $y_0 = 0$, а θ_0 определяется из условия равенства нулю прогиба на опоре B ($y_B = 0$).

Если начало координат совпадает со свободным концом балки (рисунок 6.5,в), то оба начальных параметра θ_0 и y_0 определяются из условия равенства нулю прогибов на опорах A и B :

$$y_A = 0; \quad y_B = 0.$$

Подставив найденные значения θ_0 и y_0 в универсальные уравнения упругой линии балки, можно определить прогиб и угол поворота любого поперечного сечения на расстоянии z от начала координат.

В соответствующие уравнения включаются только те нагрузки, которые приложены к балке от начала координат до рассматриваемого сечения z , включая нагрузки, приложенные в начале координат.

Нагрузки, приложенные по другую сторону от сечения, исключаются.

Нагрузки m , P и q подставляются в универсальные уравнения со своими знаками: со знаками плюс, если они вызывают в рассматриваемом сечении положительные изгибающие моменты (балка изгибается выпуклостью вниз), и наоборот.

При отсутствии какого-либо вида нагрузки соответствующее этой нагрузке значение в универсальном уравнении отсутствует.

Значение y положительное, если прогиб y совпадает с положительным направлением оси Y , значение θ положительное, если поперечное сечение балки повернулось против часовой стрелки.

Пример решения задачи 13

Определить прогиб и угол поворота сечения C балки (рисунок 6.6) при $EJ = 2 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 = 2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.

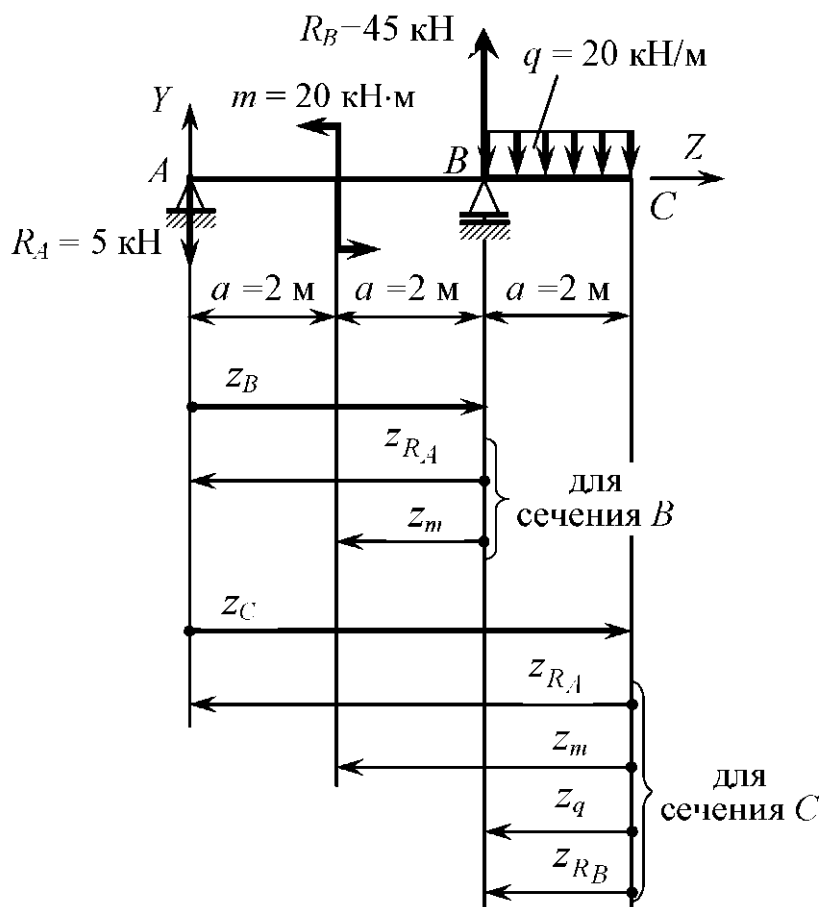


Рисунок 6.6

Выберем начало координат в сечении A , ось Z направим вправо:

- прогиб в сечении A $y_A = y_0 = 0$;
- угол поворота сечения A $\theta_0 \neq 0$.

Определим θ_0 из условия, что $y_B = 0$.

Запишем уравнение (6.4) для сечения B с координатой $z_B = 4 \text{ м}$.

От этого сечения реакция R_A находится на расстоянии 4 м , а точка приложения момента m – на расстоянии 2 м , т.е.

$$z_A = 4 \text{ м}; \quad z_m = 2 \text{ м};$$

$$EJy_A = EJy_0 + EJ\theta_0 z_B + \frac{R_A z_{RA}^3}{6} + \frac{mz_m^2}{2} = 0; \quad (6.6)$$

$$EJy_A = EJ \cdot 0 + EJ\theta_0 \cdot 4 + \left(\frac{-5 \cdot 4^3}{6} \right) + \left(\frac{-20 \cdot 2^2}{2} \right) = 0;$$

$$EJ\theta_0 \cdot 4 - \frac{5 \cdot 4^3}{6} - \frac{20 \cdot 4}{2} = 0; \quad EJ\theta_0 \cdot 4 - 53,33 - 40 = 0;$$

$$EJ\theta_0 = \frac{53,33 + 40}{4} = 23,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\theta_0 = \frac{23,33}{EJ} = \frac{23,33}{2 \cdot 10^4} = 0,0012 \text{ рад}; \quad \theta_0 = 0,0012 \text{ рад}.$$

Определим перемещения в сечении C ($z_C = 6 \text{ м}$), для которого

$$z_{RA} = 6 \text{ м}; \quad z_m = 4 \text{ м};$$

$$z_q = 2 \text{ м}; \quad z_{RB} = 2 \text{ м}.$$

Начальные параметры:

$$EJy_0 = 0;$$

$$EJ\theta_0 = 23,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Запишем и решим уравнение (6.6) для данной задачи (для прогиба в сечении C):

$$AJy_C = AJy_0 + AJ\theta_0 z + \frac{R_A z_{RA}^3}{6} + \frac{mz_m^2}{2} + \frac{R_B z_{RB}^3}{6} + \frac{qz_q^4}{24}. \quad (6.7)$$

$$AJy_C = 0 + 23,33 \cdot 6 + \left(\frac{-5 \cdot 6^3}{6} \right) + \left(\frac{-20 \cdot 4^2}{2} \right) + \frac{45 \cdot 2^3}{6} + \left(\frac{-20 \cdot 2^4}{24} \right) =$$

$$= 0 + 23,33 \cdot 6 - \frac{5 \cdot 216}{6} - \frac{20 \cdot 16}{2} + \frac{45 \cdot 8}{6} - \frac{20 \cdot 16}{24}.$$

$$y_C = -\frac{153,35 \cdot 216^3}{2 \cdot 10^4} = -0,0077 \text{ м}.$$

Запишем и решим уравнение (6.7) для данной задачи (для угла поворота сечения C):

$$AJ\theta_N = AJ\theta_0 + \frac{R_A z_{RA}^2}{2} + mz_m + \frac{R_B z_{RB}^2}{2} + \frac{qz_q^3}{6}. \quad (6.8)$$

$$AJ\theta_N = 23,33 + \left(\frac{-5 \cdot 6^2}{2} \right) + (-20 \cdot 4) + \frac{45 \cdot 2^2}{2} + \left(\frac{-20 \cdot 2^3}{6} \right) =$$

$$= 23,33 - 90 - 80 + 90 - 26,67 = -83,34.$$

$$\theta_N = \frac{-83,34}{AJ} = \frac{-83,34}{2 \cdot 10^4} = -0,0042 \text{ рад.}$$

$$y_N = -0,0077 \text{ м.}$$

Перемещения y_C и θ_C получились со знаком минус.

Это означает, что сечение C опустилось вниз и повернулось по часовой стрелке.

Пояснения к решению задачи 14 (см. приложение А)

На основе полной потенциальной энергии, накопленной в балке при прямом поперечном изгибе, выведена формула (интеграл) Мора для определения линейных и угловых перемещений для конкретного сечения:

$$y_z(\theta_z) = \frac{1}{EJ_x} \int \dot{I}^P_{\delta} \cdot M^1_{\delta} dz,$$

где $y_z, (\theta_z)$ – прогиб сечения (угол поворота сечения);

$\dot{I}^P_{\delta}$ – уравнение изгибающего момента от действия внешних сил;

M^1_{δ} – уравнение изгибающего момента от действия единичной силы (или единичного момента), приложенной в сечении, где определяется перемещение.

Интеграл Мора можно вычислить по правилу Верещагина.

Сущность правила Верещагина при определении перемещений заключается в том, что интеграл Мора вычисляют графо-аналитическим способом, путём «правила перемножения эпюр»:

$$\int \dot{I}^P_{\delta} \cdot M^1_{\delta} dz = \omega \cdot \eta;$$

$$y_z(\theta_z) = \frac{1}{EJ_{\delta}} \sum \omega_i \cdot \eta_i,$$

где ω – площадь эпюры изгибающего момента от действия внешних нагрузок (грузовая эпюра);

η – ордината эпюры изгибающего момента от действия единичной нагрузки, взятая под центром тяжести грузовой эпюры (единичная эпюра).

Произведение $\omega \cdot \eta$ берётся со знаком «+», если эпюры $\dot{I}^P_{\delta}$ и M^1_{δ} расположены по одну сторону от нулевой линии эпюры, и со знаком «–», если они расположены по разные стороны от нулевой линии.

Суммирование произведений $\omega \cdot \eta$ распространяется на все участки, число которых устанавливается с учётом эпюры моментов от заданных сил и от единичной нагрузки.

Для упрощения вычислений рекомендуется сложную конфигурацию эпюр разбивать на простые фигуры (прямоугольник; треугольник; парабола и др.) и перемножать площади простых фигур грузовой эпюры на соответствующие им ординаты единичной эпюры.

Положительное перемещение соответствует направлению действия единичной нагрузки и наоборот.

Если на рассматриваемом участке бруса обе эпюры (грузовая и единичная) прямолинейны, то безразлично, из какой эпюры брать площадь и из какой – ординату.

В приложении В приведены значения площадей и положение центров тяжести простых фигур.

В приложении Г приведены формулы перемножения эпюр изгибающих моментов ($\dot{I}^P_{\delta}$ и M^1_{δ}).

Пример решения задачи 14

Дано: $m = 10$ кН; $l = 2$ м. Определить прогиб в точке C (рисунок 6.7)

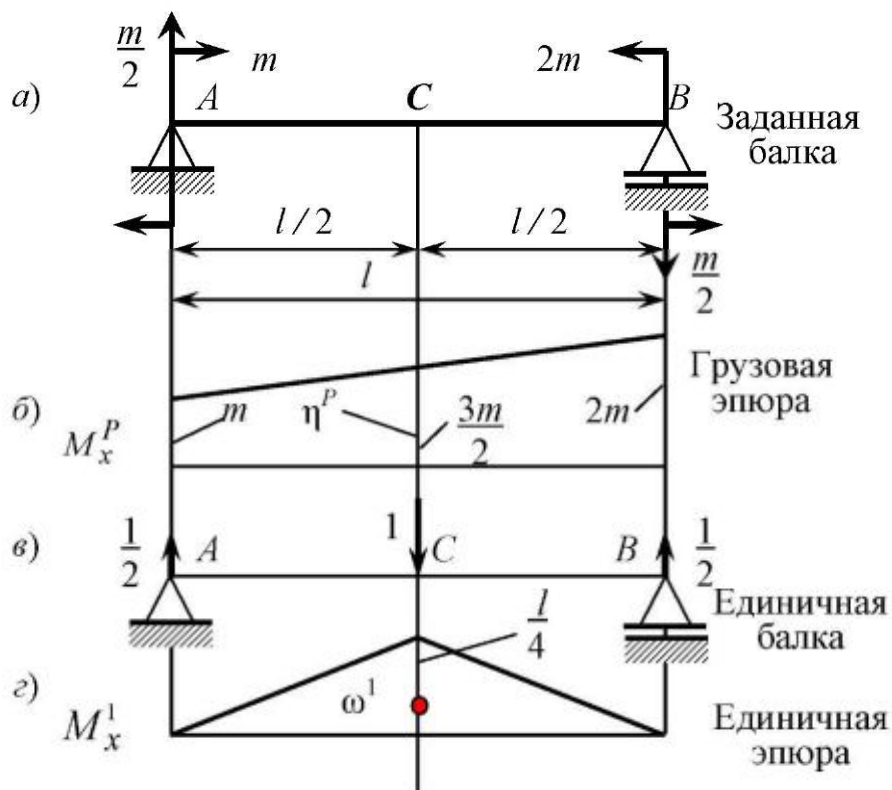


Рисунок 6.7

Определим опорные реакции в заданной балке (рисунок 6.7,а).

Строим эпюру M_x^P (рисунок 6.7,б) – грузовую эпюру.

Определяем опорные реакции в балке с единичной нагрузкой в точке С (рисунок 6.7,в) в единичной балке.

Строим эпюру M_x^1 (рисунок 6.7,г) – единичную эпюру.

В нашем случае грузовая эпюра является прямолинейной на всей длине балки, а единичная эпюра представляет собой ломаную линию, составленную из прямых участков.

Поэтому можно взять площадь единичной эпюры и умножить её на ординату грузовой эпюры, находящейся под центром (над центром) тяжести единичной эпюры, т.е. $\omega^1 \eta^P$:

$$y_C = \frac{1}{EJ_x} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{4} \right)}_{\omega^1} \underbrace{\frac{3}{2} m}_{\eta^P} = \frac{3ml^2}{16 EJ_x}.$$

После подстановки $m = 10$ кН и $l = 2$ м получим

$$y_C = \frac{3ml^2}{16 EJ_x} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 2^2}{16 EJ_x} = \frac{120}{16 EJ_x}.$$

6.4 Статически неопределимые задачи

Пояснения к решению задачи 15 (см. приложение А)

Для расчёта статически неопределимых систем существует несколько методов, основным из которых является метод сил*.

Методом сил называется метод определения усилий в статически неопределимых системах, при котором в качестве неизвестных выбираются силы (например реакции связей).

Заданная система – это расчётная схема статически неопределимой балки.

Основная система получается из заданной системы путём удаления действующей нагрузки и лишних связей.

Эквивалентная система – это основная система, загруженная действующей нагрузкой и силами, заменяющими действие отбро-

* К методам раскрытия статической неопределимости, кроме метода сил, относится метод перемещений (деформаций). В пособии рассматривается метод сил как метод, имеющий наибольшее распространение в машиностроении.

шенных связей X_i . Неизвестные силы X_i по величине и направлению действия равны соответствующим реактивным силам.

В эквивалентной и заданной системах усилия, возникающие в соответствующих сечениях, и их перемещения соответственно одинаковы.

Применение метода Мора и способа Верещагина приводит к удобной стандартной (канонической) форме уравнений.

Неизвестные силовые факторы X_i определяются из условия равенства нулю перемещений в сечениях, где приложены неизвестные силы X_i взамен отброшенных связей:

$$\Delta_i(X_i, P) = \Delta_{iX_k} + \Delta_{iP} = 0, \quad (6.9)$$

где Δ_{iX_k} – перемещение по направлению силы X_i под действием силы X_k ;

Δ_{iP} – перемещение по направлению силы X_i под действием силы P .

Учитывая линейную зависимость между силами и деформациями, можно представить выражение Δ_{iX_k} как перемещение от единичной силы δ_{ik} , увеличенной в X_k раз:

$$\Delta_{iX_k} = \delta_{ik} \cdot X_k,$$

где δ_{ik} – перемещение в направлении действия силы X_i в направлении силы X_k .

Ввиду того, что действия отброшенных связей заменены неизвестными силами X_k (отсутствие перемещений в этих сечениях) и, учитывая принцип независимости действия сил, формулу (6.9) можно записать в следующем виде:

$$\Delta_i(X_i, P) = \delta_{ik} \cdot X_k + \Delta_{iP} = 0, \quad (6.10)$$

где $\Delta_i(X_i, P)$ – перемещения в i -м направлении от действия сил (X_i, P) ;

X_i – неизвестные силовые факторы;

δ_{ik} – перемещение в i -м направлении от X_k сил;

Δ_{iP} – перемещения в i -м направлении от внешних силовых факторов P .

При n лишних неизвестных система n раз статически неопределима; следовательно, уравнение (6.10) можно записать в виде системы n уравнений перемещений:

[illegible]

или в общем виде $\Delta_i = \sum \delta_{ik} X_k + \Delta_{ip} = 0$.

Для решения канонических уравнений методом сил необходимо предварительно вычислить коэффициенты при неизвестных (единичные перемещения) δ_{ik} , которые не зависят от заданной нагрузки, и свободные члены (грузовые перемещения) Δ_{ip} , зависящие от заданной нагрузки.

Единичные перемещения с одинаковыми индексами называются главными, а с разными индексами — побочными.

Главные перемещения (δ_{ii}) всегда положительны, а побочные (δ_{ik}) и грузовые перемещения (Δ_{ip}) могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

На основании теоремы о взаимности перемещений (теорема Максвелла) побочные коэффициенты, расположенные симметрично относительно главной диагонали системы канонических уравнений, равны друг другу:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}, \text{ т.е. } \delta_{12} = \delta_{21}; \delta_{13} = \delta_{31}; \delta_{23} = \delta_{32} \text{ и т.д.}$$

При вычислении коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений для балок пользуются формулой Мора:

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{(M'_i)^2}{EJ} dz; \quad \delta_{ik} = \sum \int \frac{M'_i \cdot M'_k}{EJ} dz; \quad \delta_{ip} = \sum \int \frac{M'_i \cdot M_p}{EJ} dz.$$

Для простых балок интеграл Мора проще вычислять графо-аналитическим методом по способу перемножения эпюр (правило Верещагина). Для этого необходимо построить одну грузовую эпюру моментов M_p для основной системы, загруженной заданной нагрузкой и построить n единичных эпюр M_i для той же основной системы, загруженной поочерёдно только одной единичной силой:

$$X_i = 1,$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (n – степень статической неопределимости).

Единичные перемещения δ_{ik} вычисляются перемножением единичных эпюр M'_i и M'_k , а грузовые Δ_{iP} – перемножением единичной эпюры M'_i на грузовую M_P .

При вычислении главных перемещений δ_{ii} площадь и ординату следует брать из одной и той же эпюры.

Пример решения задачи 15

Определить коэффициенты канонического уравнения для заданной системы (рисунок 6.8).

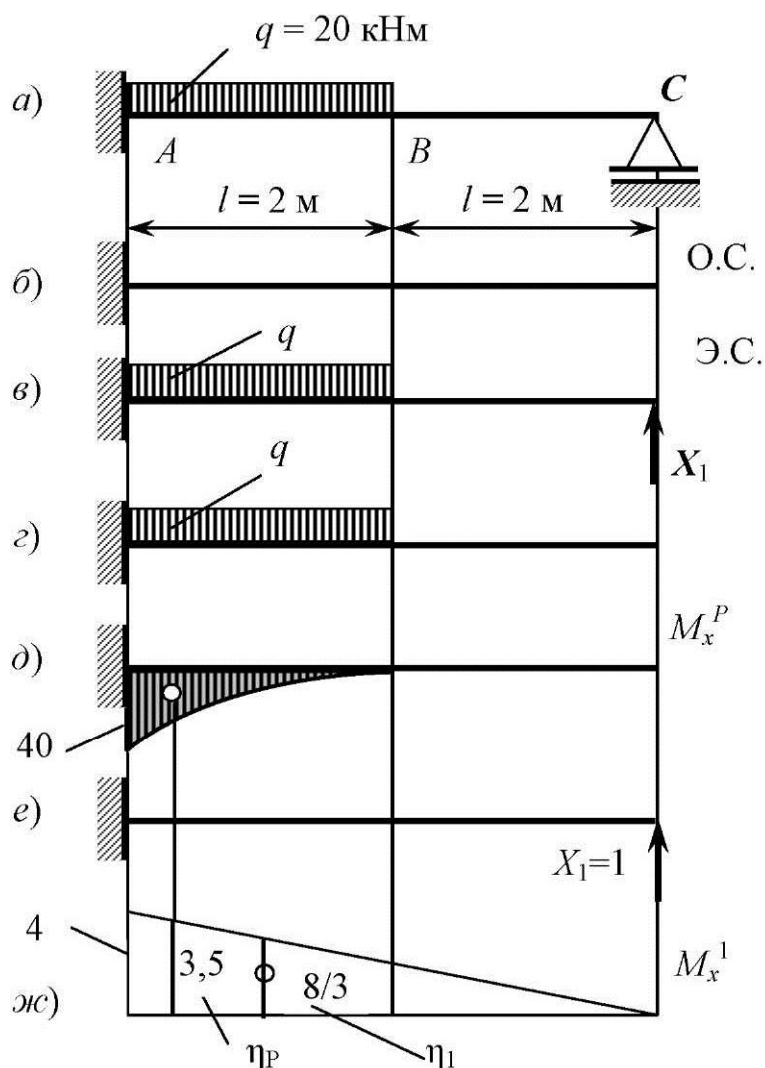


Рисунок 6.8

Заданная система (рисунок 6.8,а) является один раз статически неопределимой, так как в сечении А – три связи, в сечении С – одна связь (четыре неизвестных реактивных силы, а уравнений статики – три).

Раскрытие статической неопределимости решаем методом сил.

Принимая вертикальную связь в сечении C за лишнюю, выбираем основную систему (О.С.), отбрасывая опору C (рисунок 6.8,б).

Загружая О.С. заданной нагрузкой q и неизвестной силой X_1 в сечении C , получаем эквивалентную систему (Э.С.) (рисунок 6.8,в).

В заданной и в эквивалентной системах перемещение центра тяжести сечения C (прогиб) равно нулю.

Это условие запишем в форме канонического уравнения метода сил:

$$\Delta_{\tilde{N}} = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1D} = 0,$$

где δ_{11} – перемещение сечения C в направлении силы X_1 от действия силы X_1 ;

Δ_{1D} – перемещение сечения C в направлении силы X_1 от действия силы P (P – это обобщённый индекс любой внешней нагрузки – в нашем примере это q).

Для вычисления коэффициентов δ_{11} и Δ_{1D} примем способ Верещагина.

Используя принцип независимости действия сил, построим эпюры для балки с заданной нагрузкой (рисунок 6.8,з) – эпюра грузовая M_P (рисунок 6.8,д) и для балки с единичной силой $X_1 = 1$ (рисунок 6.8,е) – эпюра единичная (рисунок 6.8,ж)*.

Перемножая площадь единичной эпюры на ординату, находящуюся под её центром тяжести (см. рисунок 6.8,ж), получим

$$\delta_{11} = \int \frac{M^1 M^1}{EJ} = \omega_1 \eta_1 \cdot \frac{1}{EJ} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4}_{\omega_1} \cdot \underbrace{\frac{8}{3}}_{\eta_1} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{64}{3EJ}.$$

Перемножая значение грузовой эпюры (см. рисунок 6.8,д) на значение единичной эпюры (рисунок 6.8,ж), получим

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_P \cdot M^1}{EJ} = \omega_P \eta_P \cdot \frac{1}{EJ} = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 2}_{\omega_P} \cdot \underbrace{3,5}_{\eta_P} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{280}{3EJ}.$$

* На самом деле перемножаем площадь единичной эпюры на ординату, проходящую через центр тяжести этой же эпюры (так называемый «метод перемножения эпюры саму на себя»).

7 Сложное сопротивление

Пояснения к решению задачи 16 (см. приложение А)

Под сложным сопротивлением понимают различные комбинации простых напряжённых состояний, например, такие как: изгиб и сжатие, внецентренное нагружение, изгиб и кручение и т.п.

Задачи сложного сопротивления решаются суммированием напряжённых состояний, вызванных отдельно каждым видом простого нагружения, с использованием принципа суперпозиции (принципа независимости действия сил). Следует иметь в виду, что принцип суперпозиции применим в тех случаях, когда деформации малы по сравнению с размерами самого тела и материал подчиняется закону Гука.

Общая методика решения таких задач заключается в следующем:

- находят в поперечных сечениях стержня внутренние усилия и строят их эпюры;
- находят положение наиболее напряжённого сечения (опасного сечения); таких сечений может быть больше одного;
- вычисляют напряжения от каждого внутреннего усилия в отдельности и, исследуя их распределение, находят опасную точку, в которой суммарное напряжение достигает наибольшей величины;
- проверяют выполнение условия прочности материала стержня или из условия прочности выбирают безопасные размеры.

Совместное действие изгиба и кручения является наиболее характерным случаем нагружения валов. При их расчёте используется принцип суперпозиции, т.е. определяются значения изгибающих моментов M_x и M_y в плоскостях координатной системы XYZ относительно осей XU .

Геометрическим суммированием вычисляют результирующий максимальный изгибающий момент $M_{из}$.

Затем определяют значения крутящих моментов в опасных сечениях.

Ввиду того, что нормальные напряжения σ действуют перпендикулярно к сечению, а касательные напряжения действуют в плоскости сечения, их суммирование производят по одной из теорий прочности.

Чаще всего для одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов используют третью и четвёртую теории прочности:

– третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений):

$$\sqrt{\sigma_{\text{с}}^2 + 4\tau_{\text{с}}^2} \leq [\sigma];$$

– четвёртая теория прочности (энергетическая теория):

$$\sqrt{\sigma_{\text{с}}^2 + 3\tau_{\text{с}}^2} \leq [\sigma].$$

Эти формулы можно выразить через $M_{\text{н}}$ и $M_{\text{к}}$.

Учитывая, что $\sigma_{\text{с}} = \frac{I_{\text{с}}}{W_{\text{с}}}$ и $\tau_{\text{с}} = \frac{I_{\text{с}}}{W_{\text{Д}}}$, а $W_{\text{Д}} = 2W_{\text{с}}$, можно получить значения так называемых эквивалентных моментов и эквивалентных напряжений:

$$I_{\text{с}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{с}}^2 + 0,75M_{\text{с}}^2}; \quad \sigma_{\text{с}}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{с}}^{\text{III}}}{W_{\text{с}}} \leq [\sigma];$$

$$I_{\text{с}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{с}}^2 + 0,75M_{\text{с}}^2}; \quad \sigma_{\text{с}}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{с}}^{\text{IV}}}{W_{\text{с}}} \leq [\sigma],$$

где $W_{\text{н}}$ – осевой момент сопротивления ($W_{\text{с}} = \frac{\pi d^3}{32}$).

Пример решения задачи 16

Определить диаметр круглого сплошного поперечного сечения ломаного стержня (рисунок 7.1) из расчёта по третьей теории прочности, приняв $[\sigma] = 210$ МПа.

Длина каждого колена – $a = 2$ м.

Эпюры изгибающих моментов $M_{\text{н}}$ построены на «сжатых волокнах»*.

Их значения вычислены для конкретных сечений, если смотреть на свободный конец стержня в сторону заделки (не определяя опорные реакции).

Ординаты эпюры $M_{\text{к}}$ отложены в произвольном направлении от оси стержня.

Из рассмотрения эпюр видно, что наиболее опасным сечением будет сечение в заделке, где

$$M_{\text{н}} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ и } M_{\text{к}} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

* Ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются со стороны «сжатых волокон» непосредственно на заданной расчетной схеме. Применение такого способа придает наглядный вид, особенно в аксонометрическом изображении.

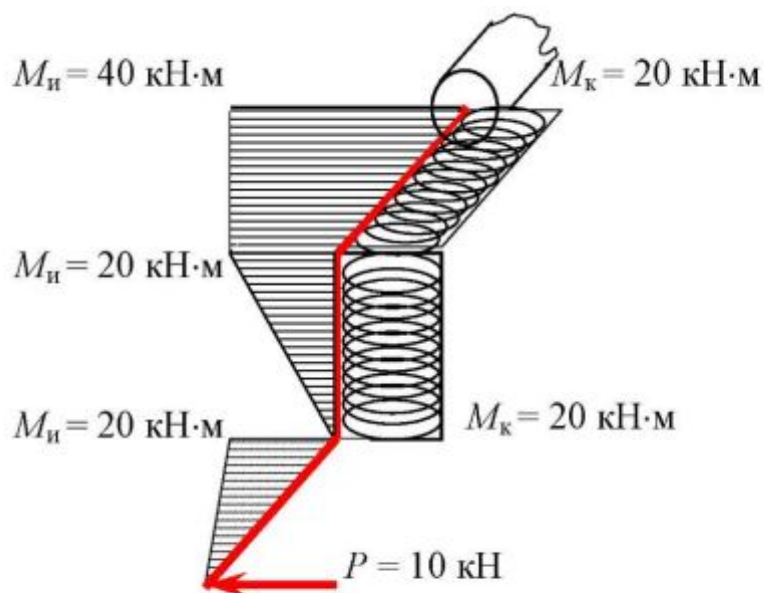


Рисунок 7.1

Эквивалентный момент по третьей теории прочности равен

$$M_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2},$$

$$M_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{40^2 + 20^2} = 44,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для круглого сплошного поперечного сечения условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{III}}}{W_{\text{с}}} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{III}}}{\pi d^3/32} \leq [\sigma].$$

Тогда в результате расчёта по третьей теории прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{III}}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 44700}{3,14 \cdot 210 \cdot 10^6}} \cong 13,0 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 13 \text{ мм}.$$

8 Устойчивость сжатых стержней

Пояснения к решению задачи 17 (см. приложение А)

Устойчивость сжатого стержня зависит от величины сжимающей силы (нагрузки), размеров и формы поперечного сечения, длины и способов закрепления стержня, а также от физико-механических свойств материала. В пределах пропорциональности материала (когда выполняется закон Гука) расчёт устойчивости производится по формуле Эйлера:

$$P_{\text{êð}} = \frac{\pi^2 E J_{\text{min}}}{(\mu l)^2}, \quad (8.1)$$

где $P_{\text{кр}}$ – критическая сила;

E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга);

J_{min} – минимальный осевой момент инерции;

μ – коэффициент приведения длины, зависящий от способов закрепления стержня (значения μ для разных способов закрепления приведены в приложении Д);

l – длина стержня.

Критическое напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{êð}} = \frac{P_{\text{êð}}}{F}.$$

Критическое напряжение при использовании формулы Эйлера имеет вид

$$\sigma_{\text{êð}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{ïð}}, \quad (8.2)$$

где $\sigma_{\text{ïð}}$ – предел пропорциональности материала;

λ – гибкость стержня.

Гибкость стержня, зависящая от геометрических характеристик стержня $\lambda_{\text{ã}}$, определяется по формуле

$$\lambda_{\text{ã}} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{min}}},$$

где i_{min} – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{F}}.$$

Для определения гибкости стержня λ_ϕ , зависящей от физико-механических свойств материала, применяют выражение

$$\lambda_\phi = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{ю}}}}.$$

При $\lambda_r \geq \lambda_\phi$ расчёт на устойчивость проводится по формуле Эйлера [формулы (8.1) и (8.2)].

При $\lambda_{\text{а}} < \lambda_\phi$ критическое напряжение определяется по эмпирической формуле Ясинского:

$$\sigma_{\text{ед}} = a - b\lambda + c\lambda^2,$$

где a, b, c – коэффициенты, зависящие от материала.

В этом случае $\sigma_{\text{ед}}$ тоже не должно превышать предела пропорциональности, т.е.

$$\sigma_{\text{ед}} \leq \sigma_{\text{ю}}.$$

На практике при расчёте сжатых стержней на устойчивость используют допускаемое напряжение на сжатие, уменьшенное на соответствующий поправочный коэффициент φ :

$$\sigma_{\text{на}} = \frac{P}{F} \leq \varphi [\sigma_{\text{на}}],$$

где φ – коэффициент продольного изгиба (значения в зависимости от λ_r для разных материалов даны в справочной литературе).

Пример решения задачи 17

Стальной стержень прямоугольного поперечного сечения сжимается силой P (рисунок 8.1). Определить гибкость стержня, если: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{\text{тл}} = 200$ МПа; $l = 1$ м; $h = 5$ см; $b = 3$ см.

Какую формулу (Эйлера, Ясинского) можно применить для расчётов?

$$\text{Гибкость стержня } \lambda_{\text{а}} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{min}}};$$

$$\mu = 1 \text{ (см. приложение Д); } l = 1 \text{ м;}$$

$$\text{радиус инерции } i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{F}}.$$

Определим J_x и J_y для прямоугольника:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = 31,25 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = 11,25 \text{ см}^4.$$

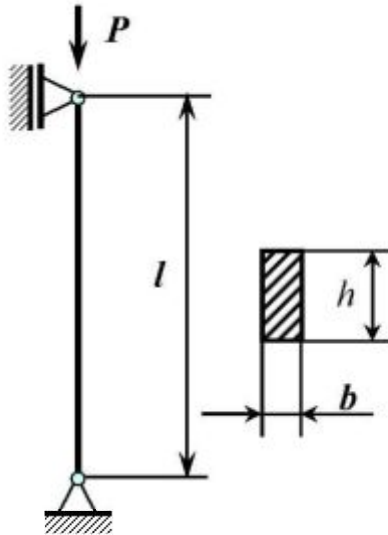


Рисунок 8.1

Из двух найденных значений осевых моментов инерции выберем $J_{\min}$:

$$J_{\min} = 11,25 \text{ см}^4.$$

Площадь поперечного сечения $F = b h = 15 \text{ см}^2$.

$$\text{Радиус инерции } i_{\min} = \sqrt{\frac{11,25}{15}} = 0,87 \text{ см}.$$

$$\text{Гибкость стержня } \lambda_{\text{г}} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 100}{0,87} = 114,9.$$

Определим гибкость стержня физическую $\lambda_{\text{ф}}$, при которой можно применить формулу Эйлера:

$$\lambda_{\text{д}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{ю}}}}, \quad \lambda_{\text{д}} = 3,14 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} = 99,3.$$

Гибкость стержня геометрическая в случае применения формулы Эйлера должна быть больше физико-механической, т.е. $\lambda_{\text{г}} \geq \lambda_{\text{ф}}$. В нашем случае $\lambda_{\text{г}} > \lambda_{\text{ф}}$ ($114,9 > 99,3$).

Следовательно, при определении $P_{\text{кр}}$ и $\sigma_{\text{кр}}$ можно использовать формулу Эйлера.

9 Динамическое действие нагрузок

Пояснения к решению задачи 18 (см. приложение А)

Общий подход к решению систем при воздействии на них динамических нагрузок основан на использовании известного из теоретической механики принципа Д'Аламбера.

Согласно этому принципу определяются нагрузки, вызываемые ускорениями, которые получают тела при их работе (динамические нагрузки).

Считая эти динамические нагрузки как бы приложенными статически, в зависимости от этого определяют деформации и напряжения. Затем суммируют эти деформации и напряжения с деформациями и напряжениями, полученными от статического приложения нагрузок. Эти суммарные напряжения и деформации не должны превышать допускаемых при статическом нагружении.

К задачам динамики в сопротивлении материалов относятся:

- расчёты элементов конструкций с учётом сил инерции;
- расчёты на колебания;
- расчёты на усталость;
- расчёты на действие ударных нагрузок.

Приближённый расчёт на удар основан на следующих допущениях:

- напряжения, возникающие при ударе, не превышают предела пропорциональности (закон Гука);
- удар является неупругим (после удара тела не отделяются друг от друга);
- ударяющее тело является абсолютно жёстким и не деформируется;
- сопротивление движению не учитывается;
- масса ударяемой конструкции в расчёт не принимается.

Напряжения и перемещения при ударе определяются по формулам

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}}; \quad \Delta_{\text{д}} = k_{\text{д}} \Delta_{\text{ст}},$$

где $\sigma_{\text{д}}$ и $\Delta_{\text{д}}$ – динамические напряжения и перемещения при ударе;
 $\sigma_{\text{ст}}$ и $\Delta_{\text{ст}}$ – напряжения и перемещения, вызванные статическим приложением силы, равной весу ударяющего груза.

Динамический коэффициент определяется по формуле

$$k_{\ddot{a}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_c}},$$

где h – высота, с которой падает ударяющее тело.

При большой величине соотношения $\frac{2h}{\Delta_{\ddot{n}}}$ можно пренебречь

единицей перед корнем и единицей под корнем: $k_{\ddot{a}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_c}}$.

Пример решения задачи 18

При каком усилии, приложенном статически, упругая балка (рисунок 9.1) прогнётся на ту же величину, что и при падении груза с высоты?

Для того, чтобы прогиб $\Delta_{\ddot{n}}$ от статического приложения нагрузки P_c был равен прогибу Δ_d от удара груза Q , вес груза, приложенного статически, должен быть увеличен на коэффициент динамичности k_d , т.е. статическая сила P_c равна

$$P_c = k_d Q,$$

но $k_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_c}$.

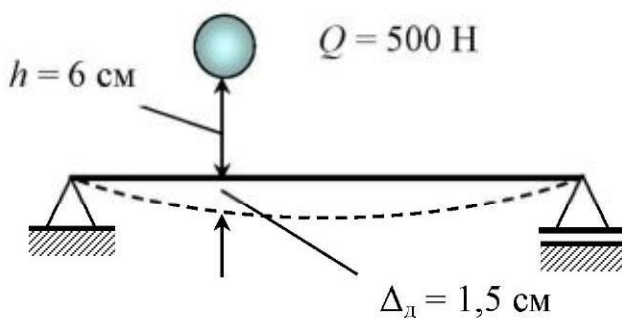


Рисунок 9.1

Выразим $\Delta_{\ddot{n}}$ через Δ_d : $\Delta_{\ddot{a}} = k_{\ddot{a}} \Delta_{\ddot{n}} = \left(\sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\ddot{n}}}} \right) \Delta_{\ddot{n}},$

или $\Delta_{\ddot{a}}^2 = \frac{2h}{\Delta_{\ddot{n}}} \Delta_{\ddot{n}}^2 = 2h \Delta_{\ddot{n}},$ откуда $\Delta_{\ddot{n}} = \frac{\Delta_{\ddot{a}}^2}{2h}.$

Тогда $k_{\ddot{a}} = \frac{\Delta_{\ddot{a}}}{\Delta_{\ddot{n}}} = \frac{\Delta_{\ddot{a}} \cdot 2h}{\Delta_{\ddot{a}}^2} = \frac{2h}{\Delta_{\ddot{a}}} = \frac{2 \cdot 6}{1,5} = 8,$

$$P_c = 8 \cdot 500 = 4000 \text{ Н} = 4 \text{ кН}.$$

Вопросы для самопроверки

Общие вопросы

- 1 Какие основные задачи рассматриваются в сопротивлении материалов?
- 2 Какие нагрузки являются внешними?
- 3 Какие основные гипотезы и допущения принимаются в сопротивлении материалов?
- 4 Что называется деформацией?
- 5 Какая деформация является упругой, какая – пластической?
- 6 Дайте определение бруса (стержня), пластины, тела.
- 7 В чём состоят особенности упругого равновесия? Сколько уравнений равновесия можно составить для линейного, плоского и объёмного состояния?
- 8 Что такое метод плоских сечений и для чего он применяется? Расшифруйте аббревиатуру РОЗУ.
- 9 Какое напряжение называется нормальным, касательным, полным?
- 10 В чём состоит принцип независимости действия сил?

Центральное растяжение и сжатие

- 1 Как формулируется закон Гука?
- 2 Что называется модулем упругости материала и какова его размерность?
- 3 Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести, пределом прочности материала и какова их размерность?
- 4 Что называется допускаемым напряжением? Как оно определяется для пластичных и хрупких материалов?
- 5 Как формулируется условие прочности? Какие различают три вида расчёта на прочность?
- 6 Что такое абсолютная и относительная деформация при растяжении (сжатии)?
- 7 По какой эпюре можно найти опасное сечение?
- 8 По какой эпюре можно указать части бруса, работающие на растяжение и сжатие?
- 9 По какой эпюре можно определить направление перемещений сечений по оси бруса?

10 В чём состоит расчёт бруса на прочность и жёсткость?

11 Как выбрать размер поперечного сечения бруса из условия прочности и жёсткости?

12 Какие задачи называются статически неопределимыми? Как определяется степень статической неопределимости?

13 Что называется уравнением перемещений?

Геометрические характеристики плоских сечений

1 Что называется статическим моментом площади плоской фигуры? Каковы их свойства?

2 Как определить координаты центра тяжести плоской фигуры?

3 Назовите моменты инерции плоских сечений. Каковы их свойства?

4 Что происходит с величинами осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе их осей?

5 Что происходит с величинами осевых моментов инерции и их суммой при повороте осей?

6 Какие оси являются главными осями инерции?

7 Какие величины называются радиусами инерции?

8 В чём особенности определения геометрических характеристик плоских сечений с одной осью симметрии?

9 Чему равны осевой момент инерции и осевой момент сопротивления для прямоугольника, квадрата?

10 Чему равны полярный момент инерции и полярный момент сопротивления для круга, кольца?

Расчёт на прочность и жёсткость валов круглого поперечного сечения при кручении

1 Что называется чистым сдвигом и при каких условиях он получается?

2 Как формулируется закон Гука при сдвиге?

3 При какой нагрузке на брус получается деформация, называемая кручением?

4 Что называется крутящим моментом? Каково правило знаков крутящего момента?

5 Как определяется скручивающий момент по мощности, передаваемой валом, и по числу оборотов в минуту?

6 По каким формулам определяется касательное напряжение в сечении?

7 Как распределяются касательные напряжения по площади круглого сечения при кручении?

8 Как определяются абсолютный и относительный углы закручивания вала?

9 Как рассчитывается вал на прочность и жёсткость (условия прочности и жёсткости)?

10 Как выбрать размер диаметра вала из условия прочности и жёсткости?

11 Какие валы при кручении считаются статически неопределимыми?

12 Каков порядок раскрытия статической неопределимости валов при кручении?

13 Из какого условия составляется дополнительное уравнение (уравнение совместности деформаций)?

Расчёт балок на прочность и жёсткость при изгибе

1 При какой нагрузке на брус получается явление, называемое чистым изгибом?

2 Какой изгиб балки называется плоским поперечным?

3 Как распределяются нормальные и касательные напряжения по сечению балки?

4 Что называется нейтральным слоем и нейтральной линией балки?

5 Как определяются поперечная сила и изгибающий момент в поперечном сечении балки? Какое правило знаков существует для поперечной силы и изгибающего момента?

6 Какие дифференциально-интегральные зависимости существуют между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью распределённой нагрузки?

7 Какие основные следствия вытекают из дифференциальных зависимостей?

8 Какие основные принципы заложены при построении упругой линии балки?

9 Как определяются нормальные и касательные напряжения при изгибе?

10 Как рассчитываются балки на прочность (условия прочности и жёсткости)?

11 Как выбрать размеры поперечного сечения балки из условия прочности?

12 Какие виды перемещений возникают в поперечном сечении балки?

13 Какие основные методы определения перемещений существуют?

14 В чём заключается метод начальных параметров? Какие существуют основные правила и приёмы при интегрировании?

15 Как рассчитываются балки на жёсткость?

Расчёт статически неопределимых балок при изгибе

1 Какие балки при изгибе называются статически неопределимыми?

2 Как определить степень статической неопределимости?

3 Какие основные методы применяются для раскрытия статической неопределимости?

4 В чём заключается метод сил для раскрытия статической неопределимости? Какой основной принцип заложен при составлении эквивалентной системы?

5 Как записывается система канонических уравнений для определения перемещений?

6 Какой формулой выражается интеграл Мора для определения перемещений?

7 Как формулируется правило Верещагина для определения перемещений по эпюрам?

8 Что означает отрицательный знак, получаемый в конечном результате при определении перемещения по интегралу Мора или правилу Верещагина?

9 В чём заключается деформационная проверка правильности раскрытия статической неопределимости?

Сложное сопротивление

1 Какие напряжённые состояния возникают в теле при действии нагрузок?

2 Как выражается обобщённый закон Гука?

3 В чём выражается закон парности касательных напряжений?

4 Назовите основные виды сложного сопротивления.

5 В каких условиях получается косой изгиб?

6 Как при косом изгибе располагается в плоскости сечения нейтральная линия по отношению к силовой линии?

7 Как определить прогиб балки при косом изгибе?

- 8 В чём заключается внецентренное нагружение?
- 9 Как определяется нормальное напряжение в сечении при одновременном действии растяжения и изгиба?
- 10 В каких точках сечения сочетание напряжений получается наиболее опасным для прочности вала?
- 11 Как находится опасное сечение вала, работающего на изгиб и кручение?
- 12 Какие основные теории прочности используются при одновременном действии в сечении нормальных и касательных напряжений?
- 13 По каким формулам определяются эквивалентные напряжения и эквивалентные моменты по третьей и четвертой теориям прочности?

Устойчивое равновесие деформируемых систем

- 1 Что называется продольным изгибом?
- 2 Что называется критической силой?
- 3 Как определяется запас устойчивости?
- 4 По какой формуле определяется критическая сила при большой гибкости (формула Эйлера)?
- 5 По какой формуле определяется критическое напряжение при средней гибкости (формула Ясинского)?
- 6 Что такое «приведённая длина стержня»?
- 7 Как учитывается влияние способа закрепления концов сжатого стержня на величину критической силы?
- 8 Как определяется гибкость стержня?
- 9 От чего зависит минимальный радиус инерции поперечного сечения?
- 10 На чём основывается установление границ применимости формулы Эйлера?
- 11 В чём заключается поверочный расчёт на устойчивость по коэффициенту φ ?
- 12 Каков порядок расчёта стержня на устойчивость при проектировочном расчёте с использованием коэффициента φ ?

Динамическое действие нагрузок

- 1 Какие виды нагрузок встречаются в машиностроении?
- 2 В чём заключается принцип Д'Аламбера?

- 3 Что представляет собой динамический коэффициент?
- 4 Как определяется динамическое напряжение?
- 5 Какие колебания называются свободными или собственными?
- 6 Какие колебания называются вынужденными?
- 7 В каких условиях возможно явление резонанса?
- 8 Какие предпосылки положены в основу приближённого способа определения частот собственных колебаний?
- 9 Как учитывается сила инерции в динамических расчётах?
- 10 Каков общий принцип расчёта на прочность при действии динамических нагрузок?

Список рекомендуемой литературы

Основная

- 1 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1979. – 540 с.
- 2 Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Высш. шк., 1976. – 608 с.
- 3 Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1974. – 704 с.
- 4 Минин, Л. С. Расчётные и тестовые задачи по сопротивлению материалов : учеб. пособие для втузов / Л. С. Минин. – М. : Высш. шк., 2003. – 224 с.
- 5 Лихарев, К. К. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов» : учеб. пособие для машиностроительных вузов / К. К. Лихарев. – М. : Машиностроение, 1980. – 224 с.
- 6 Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. В. К. Качурина. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1970. – 432 с.

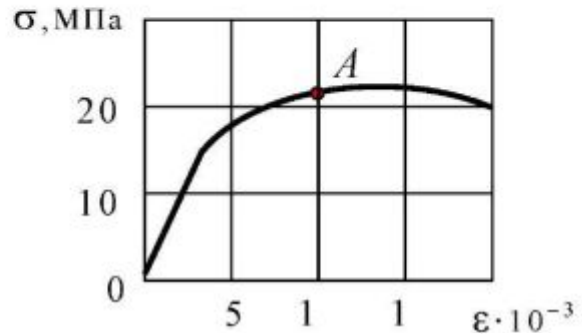
Дополнительная

- 7 Гонтарь, И. Н. Сопротивление материалов : учеб. пособие для выполнения курсовых работ / И. Н. Гонтарь, Н. И. Волчихина. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. – 264 с.
- 8 Феодосьев, В. И. Избранные задачи по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1973. – 536 с.

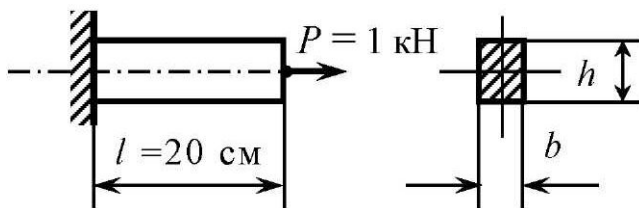
Образцы тестовых задач

Задача 1

Определить величину упругой деформации, соответствующей точке A на диаграмме.



Задача 2



Из опыта нашли относительные продольную и поперечную деформации:
 $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ и $\epsilon' = 0,33 \cdot 10^{-3}$.
 $F = 1 \text{ см}^2$.

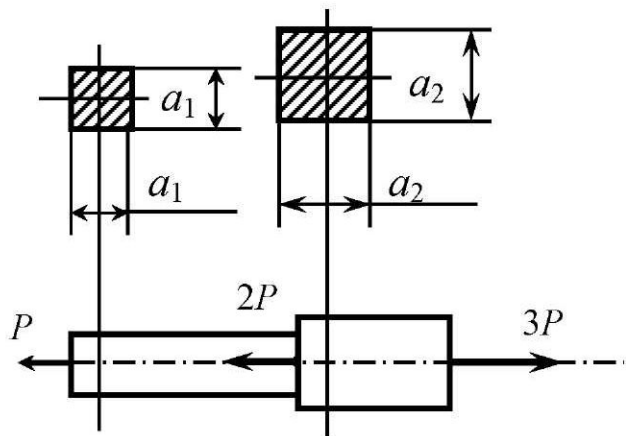
Найти модуль упругости E , коэффициент Пуассона μ и полное удлинение стержня.

Задача 3

Построить эпюру N .

Из условия прочности подобрать безопасные размеры a_i квадратных сечений ступенчатого стержня при следующих исходных данных:

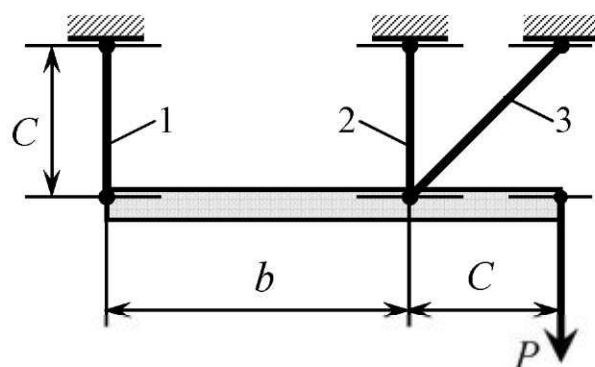
материал – Ст3,
 $\sigma_T = 210 \text{ МПа}$,
 $n = 2$, $P = 10 \text{ кН}$.



Задача 4

Для заданной стержневой конструкции составить с помощью метода сечений все возможные уравнения равновесия.

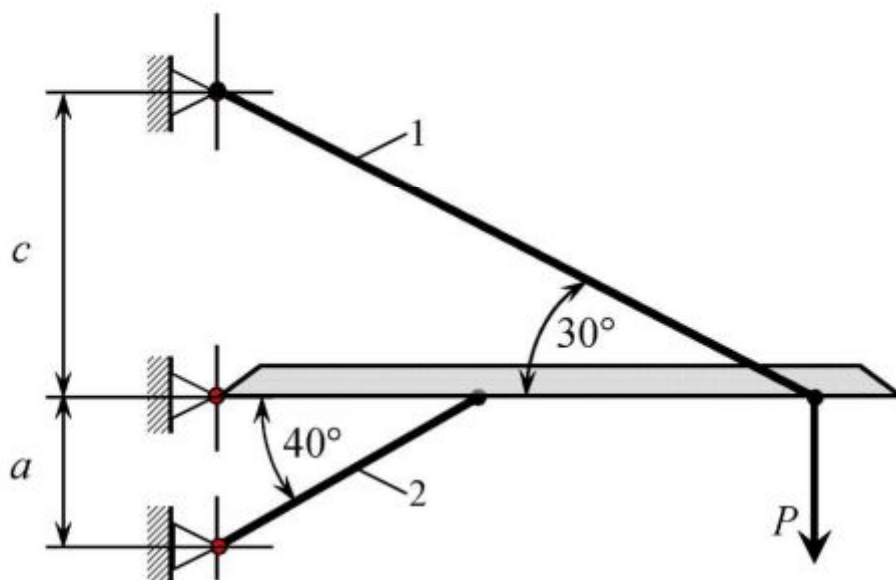
Определить степень статической неопределимости (ССН).



Задача 5

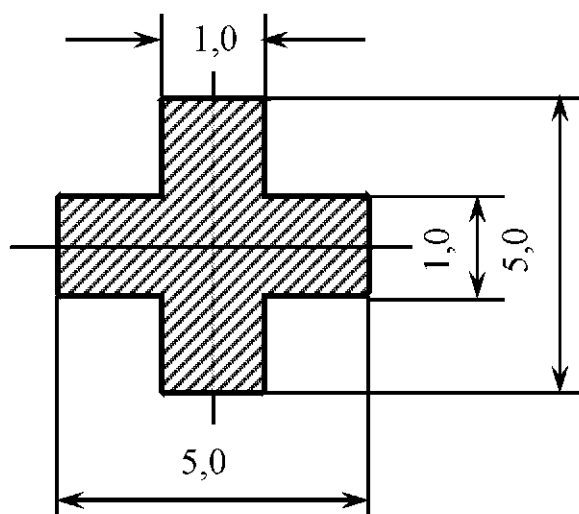
Построить деформированную схему один раз статически неопределимой конструкции.

Составить уравнение совместности деформаций.



Задача 6

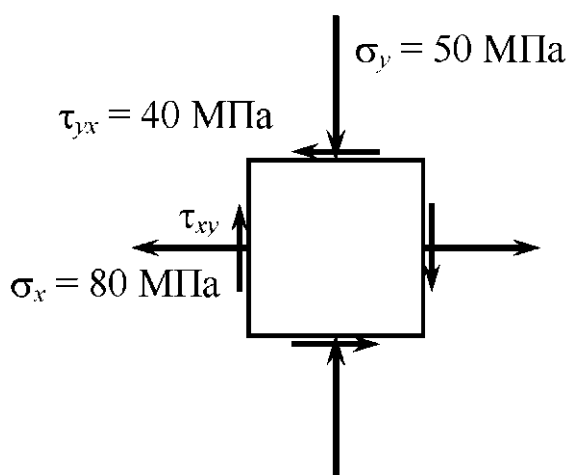
Вычислить главные центральные моменты инерции заданного сечения балки (размеры даны в см).



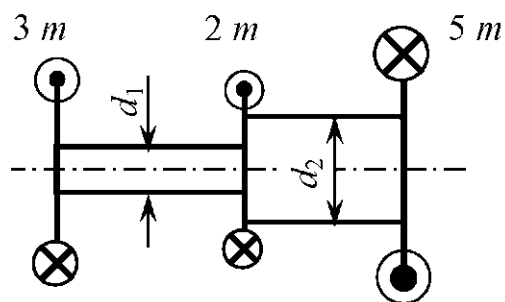
Задача 7

Какие из приведённых значений напряжений (МПа) соответствуют главным напряжениям σ_1 , σ_2 , σ_3 для напряжённого состояния:

- 1) 80, 0, -50;
- 2) 78, 33, 0;
- 3) 91, 0, 61;
- 4) 55, 0, -85?



Задача 8



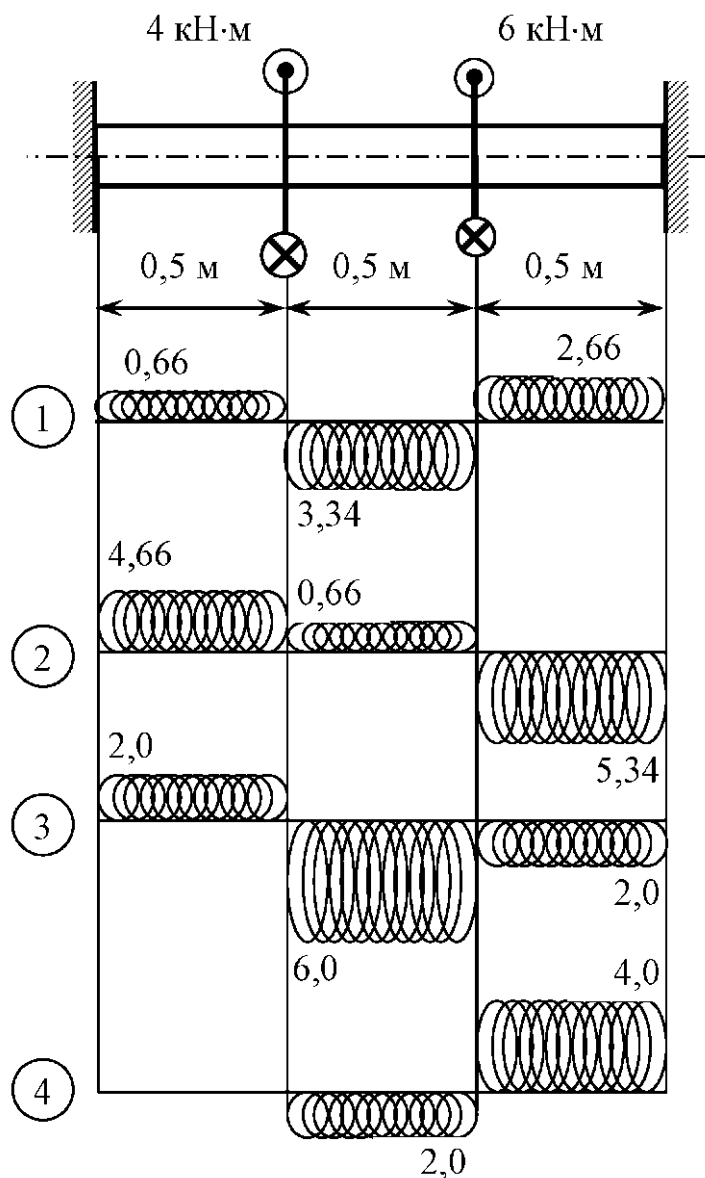
Построить эпюру крутящих моментов M_k и из условия прочности подобрать диаметры поперечных сечений вала при следующих исходных данных:

материал – Ст5 ($\sigma_T = 260$ МПа, $\sigma_B = 500$ МПа), $m = 5$ кН·м.

Задача 9

Определить, какая эпюра крутящих моментов соответствует расчётной схеме вала. Значения крутящих моментов на эпюрах показаны в кН·м.

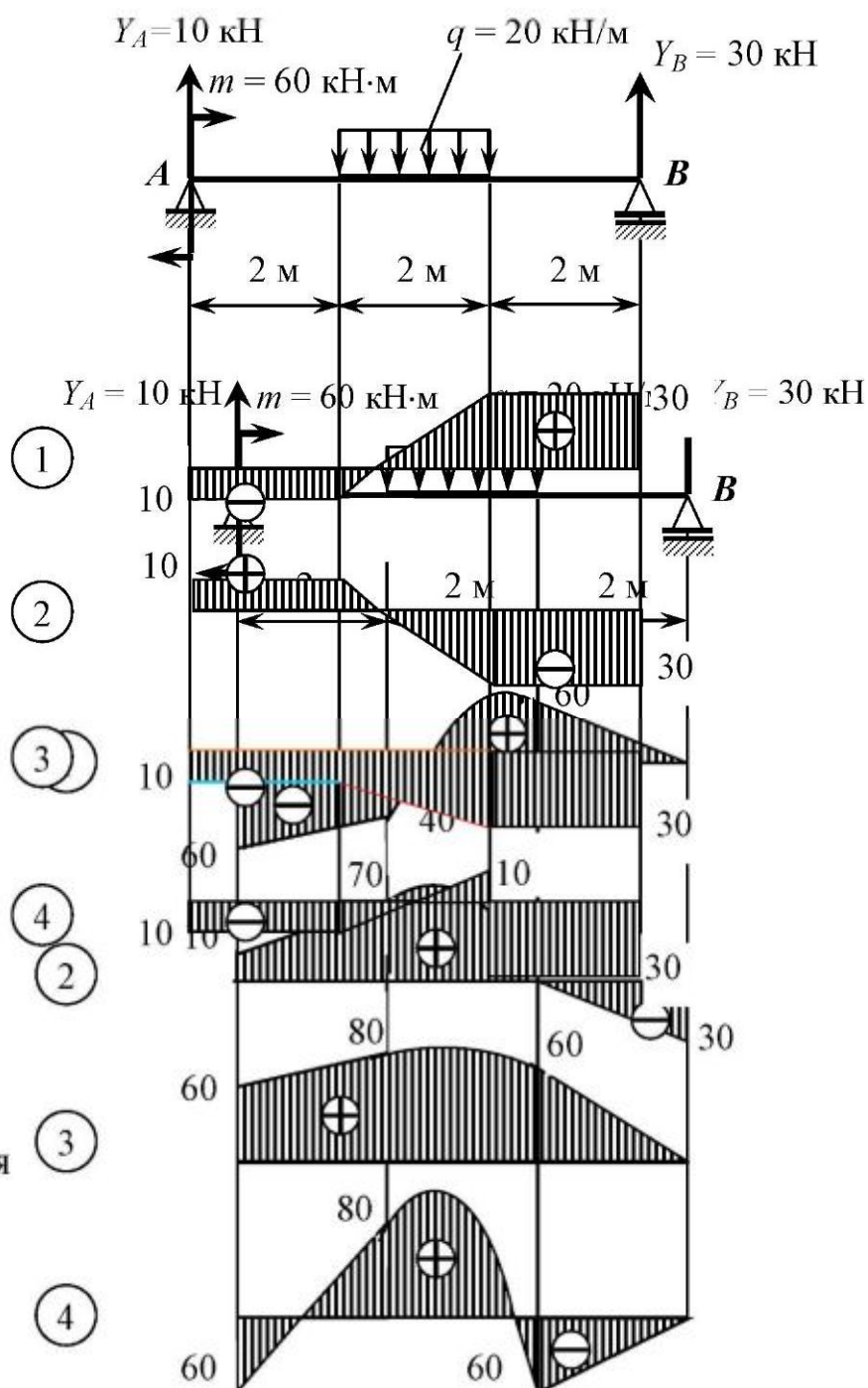
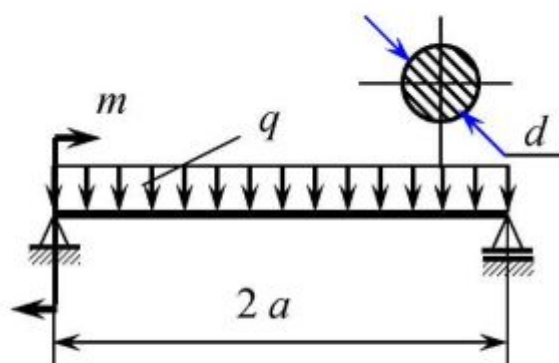
Задача 10



Построить эпюры Q_y , M_x и подобрать из условия прочности по нормальным напряжениям размер поперечного сечения балки, если $a = 2$ м, $q = 20$ кН/м, $m = 40$ кН·м, материал – сталь 20. ($\sigma_T = 270$ МПа, $\sigma_B = 420$ МПа).

Задача 11

Определить, какая эпюра поперечных сил соответствует расчётной схеме балки. Значения поперечных сил на эпюрах показаны в кН.



Задача 12

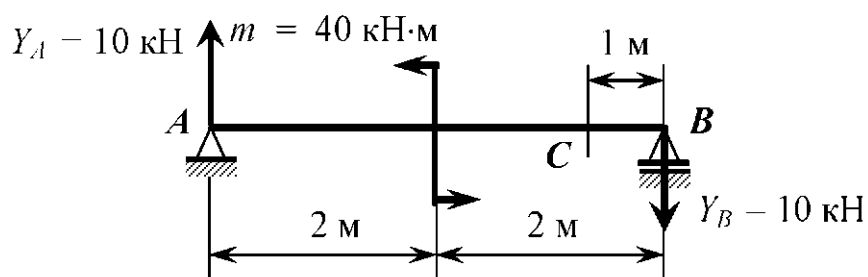
Опре-
лить, какая

дели

эпюра изгибающих моментов соответствует расчётной схеме балки.

Задача 13

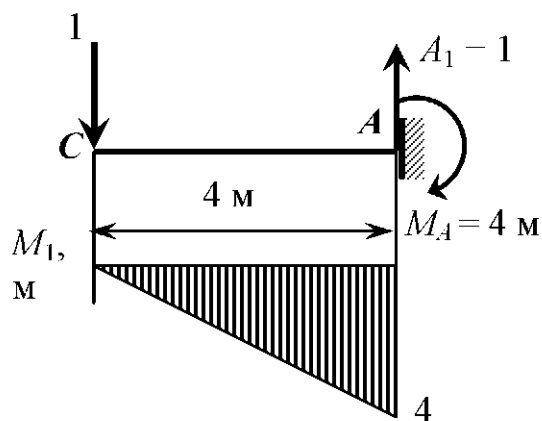
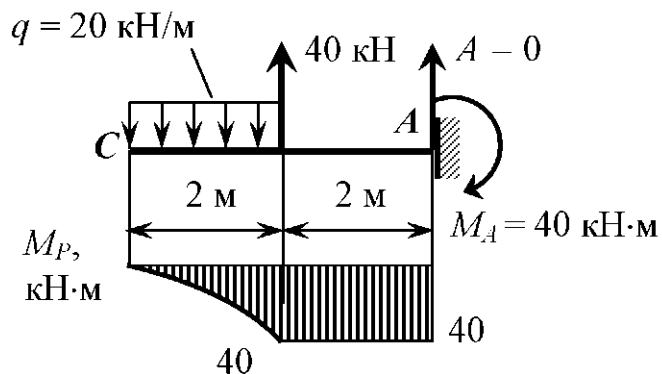
Определить прогиб сечения C , если жёсткость изображённой балки $EJ_x = 2 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$.



Задача 14

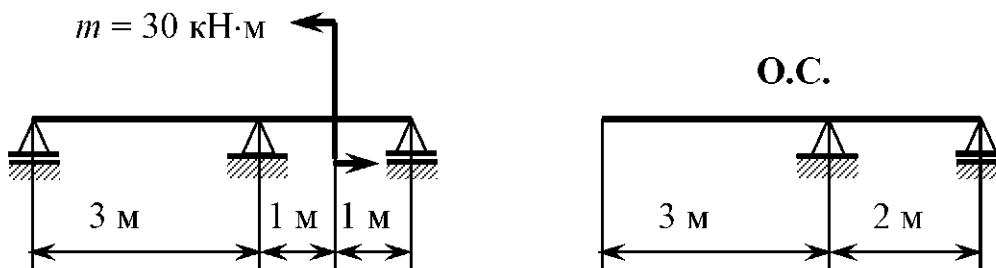
Определить способом Верещагина, какой из перечисленных ответов соответствует прогибу сечения C изображенной балки.

- 1) $\frac{280}{EJ_x}$; 2) $\frac{560}{EJ_x}$; 3) $\frac{420}{EJ_x}$; 4) $\frac{220}{EJ_x}$.



Задача 15

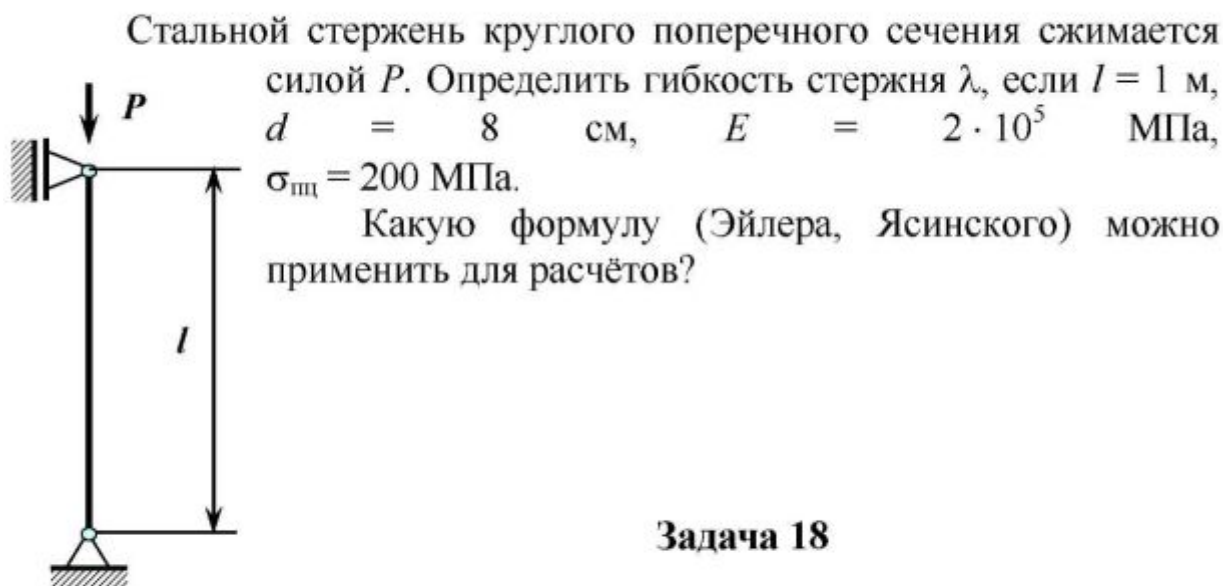
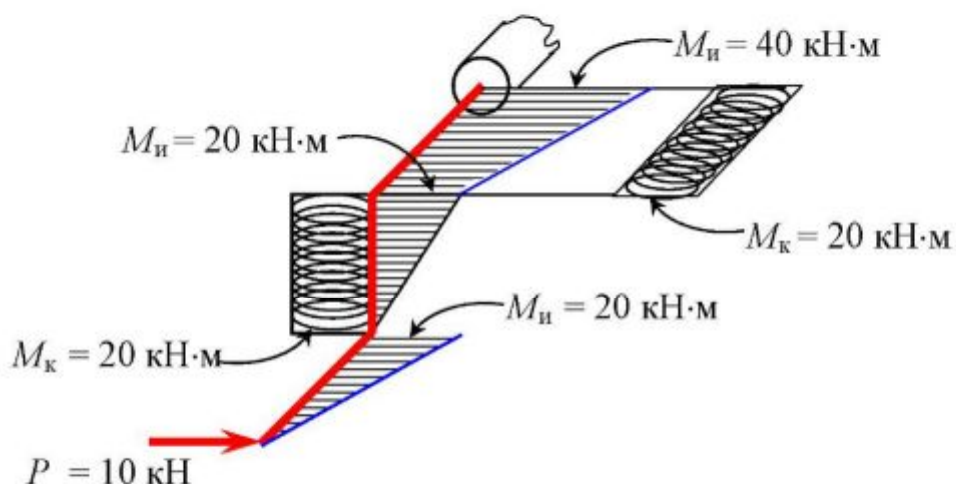
Для заданной и приведенной основной системы (О.С.) вычислить коэффициент канонического уравнения Δ_{1P} .



Задача 16

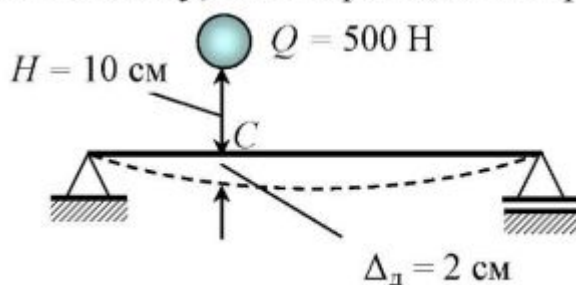
Определить диаметр круглого сплошного сечения ломаного стержня из расчёта по третьей теории прочности, приняв $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$; длина каждого колена $a = 2 \text{ м}$.

Задача 17



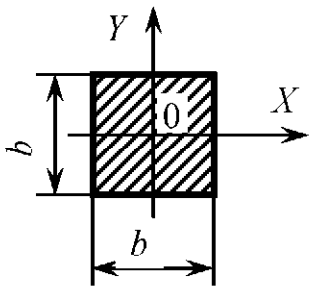
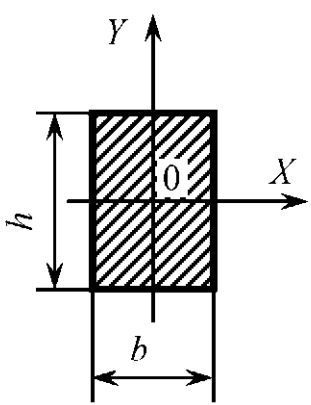
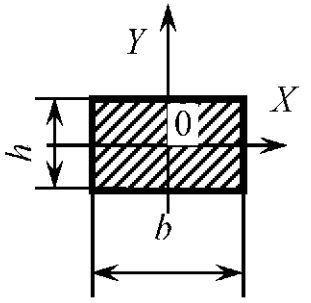
Задача 18

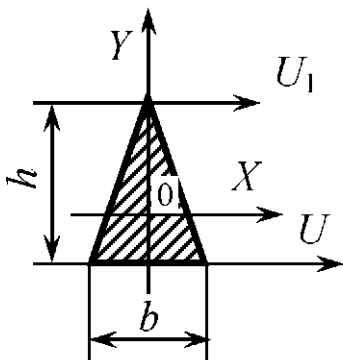
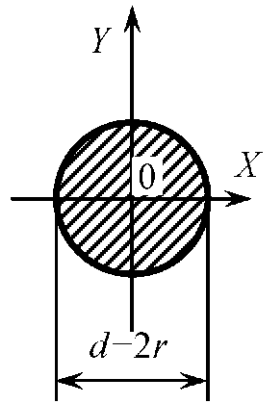
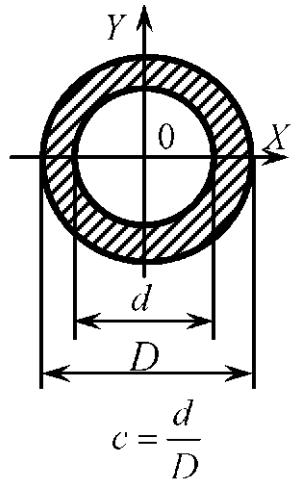
Какую статическую силу нужно приложить в сечении C , чтобы упругая балка прогнулась на ту же величину, что и при падении груза Q ?



Приложение Б

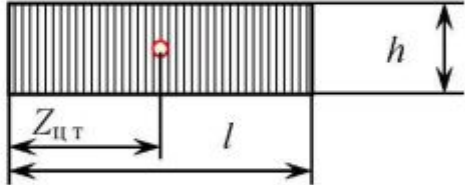
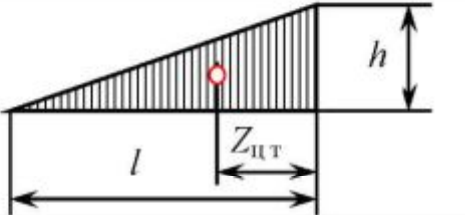
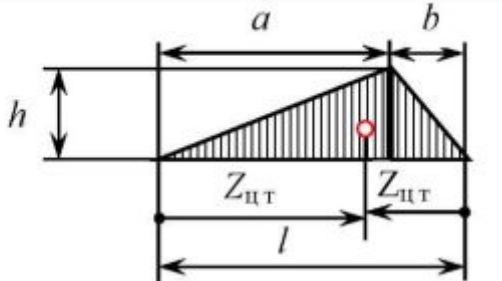
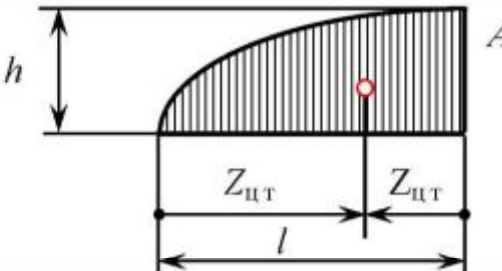
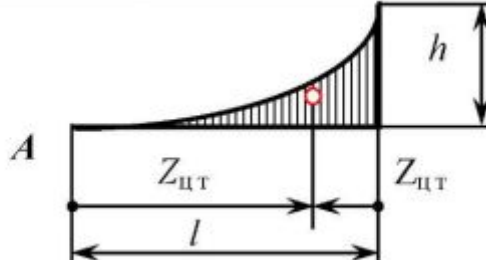
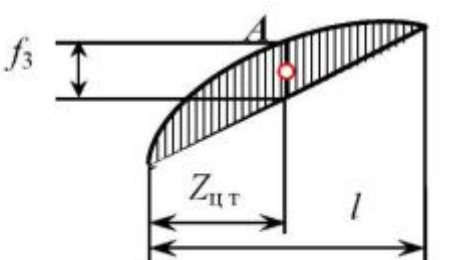
Геометрические характеристики простых плоских сечений

Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см ²	Осей момент инерции, см ⁴	Осей момент сопротивления, см ³
	b^2	$J_x = J_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = \frac{b^3}{6};$
	bh	$J_x = \frac{bh^3}{12};$ $J_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6};$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$
	bh	$J_x = \frac{bh^3}{12};$ $J_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6};$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$

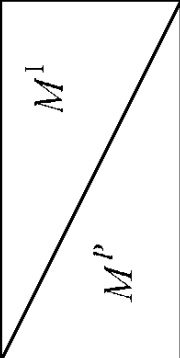
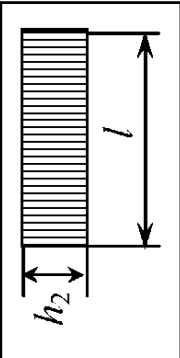
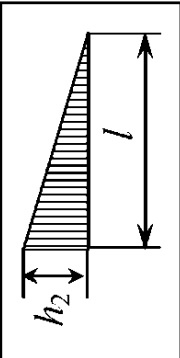
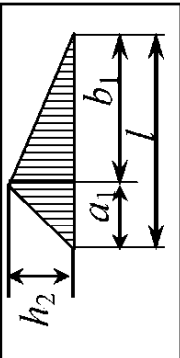
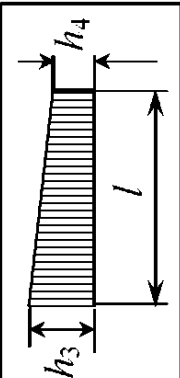
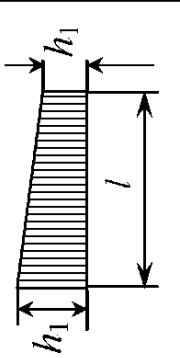
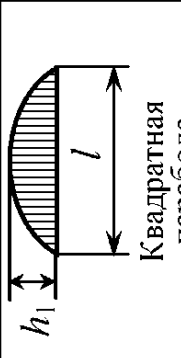
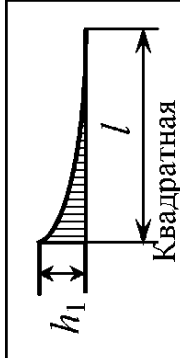
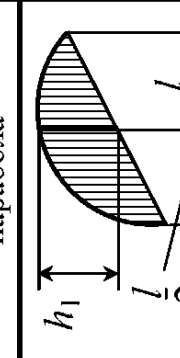
Форма поперечного сечения	Площадь сечения, см^2	Осевой момент инерции, см^4	Осевой момент сопротивления, см^3
	$\frac{1}{2}bh$	$J_x = \frac{bh^3}{36};$ $J_{U_1} = \frac{bh^3}{4};$ $J_U = \frac{bh^3}{12}$	При определении напряжения в вершине $W_x = \frac{bh^2}{24}.$ При определении напряжения в основании $W_x = \frac{bh^2}{12}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} =$ $= \frac{\pi r^4}{4};$ $J_x = J_y \approx 0,05 d^4$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} =$ $= \frac{\pi r^3}{4};$ $W_x = W_y \approx 0,1 d^3$
	$\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$	$J_x = J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64};$ $J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - c^4);$ $J_x = J_y \approx 0,05 D^4(1 - c^4)$	$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4);$ $W_x = W_y \approx 0,1 D^3(1 - c^4)$

Приложение В

Площади и координаты центров тяжести простых фигур

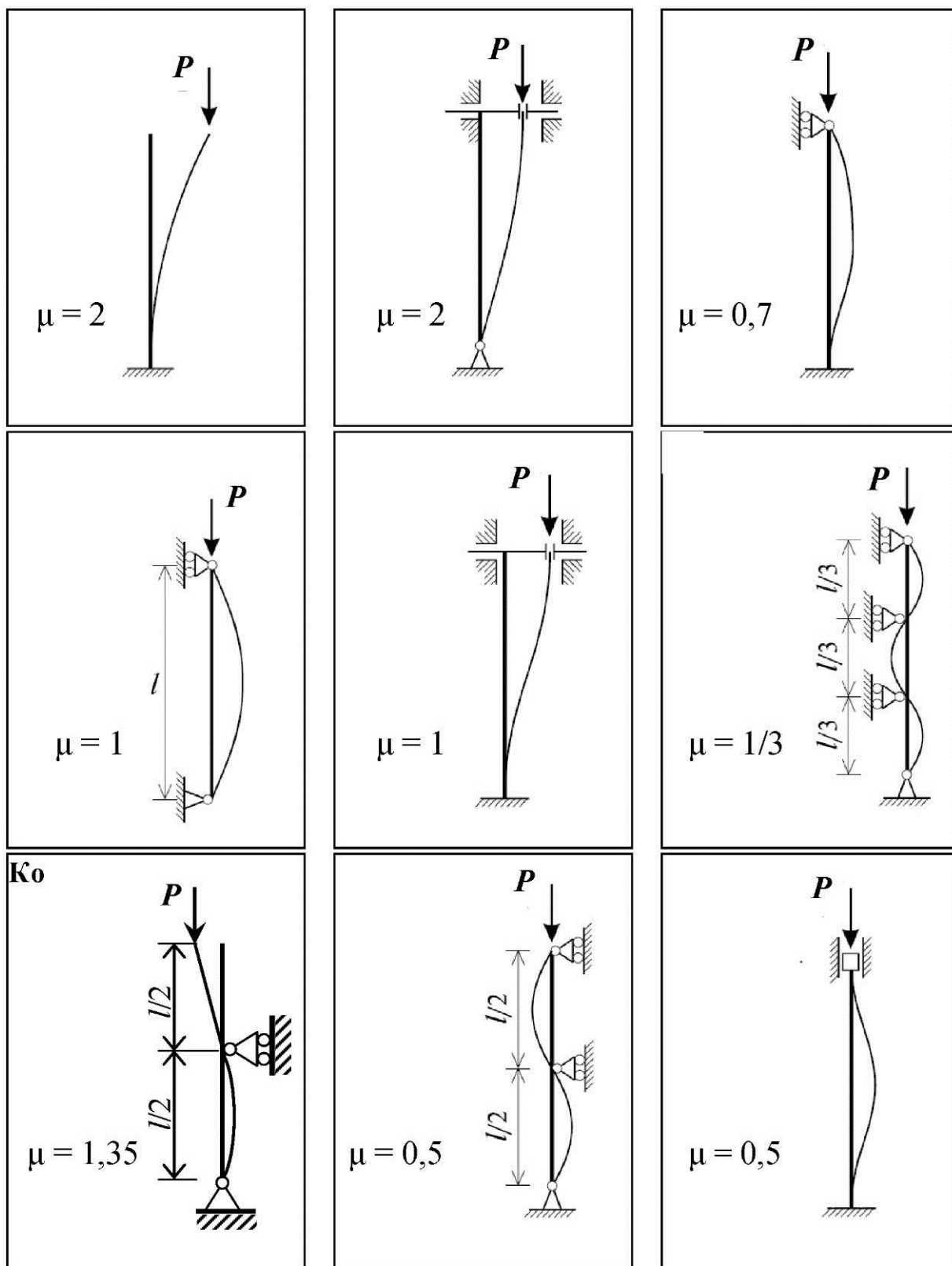
Форма элементарной фигуры	Координата центра тяжести площади	Величина площади
	$Z_{\text{цт}} = \frac{1}{2}l$	$\Omega = lh$
	$Z_{\text{цт}} = \frac{1}{3}l$	$\Omega = \frac{1}{2}lh$
	Слева направо $Z_{\text{цт}} = \frac{1}{3}(2l - a)$ Справа налево $Z_{\text{цт}} = \frac{1}{3}(l + b)$	$\Omega = \frac{1}{2}lh$
	Слева направо $Z_{\text{цт}} = \frac{5}{8}l$ Справа налево $Z_{\text{цт}} = \frac{3}{8}l$	Квадратная парабола $\Omega = \frac{2}{3}lh$ Вершина в точке A
	Слева направо $Z_{\text{цт}} = \frac{3}{4}l$ Справа налево $Z_{\text{цт}} = \frac{1}{4}l$	Квадратная парабола $\Omega = \frac{1}{3}lh$ Вершина в точке A
	$Z_{\text{цт}} = \frac{1}{2}l$	Квадратная парабола $\Omega = \frac{2}{3}f_3l$ Вершина в точке A

M^1	$h_1 h_2 l$	$\frac{h_1 h_2 l}{2}$	$\frac{h_1 h_2 l}{2}$	$\frac{h_1 h_2 l}{2}$	$\frac{h_1 (h_3 + h_4) l}{2}$
	$\frac{h_1 h_2 l}{2}$	$\frac{h_1 h_2 l}{3}$	$\frac{h_1 h_2 l}{6}$	$\frac{h_1 h_2 (l + b_1)}{6}$	$\frac{h_1 (2h_3 + h_4) l}{6}$
	$\frac{h_1 h_2 l}{2}$	$\frac{h_1 h_2 l}{6}$	$\frac{h_1 h_2 (l + \dot{a}_1)}{6}$	$\frac{h_1 h_2 l}{6} \left[2 - \frac{(b_1 - b)^2}{b_1 a} \right]$	$\frac{h_1 (h_3 + 2h_4) l}{6}$
	$\frac{h_1 h_2 l}{2}$	$\frac{h_1 h_2 (l + b)}{6}$	$\frac{h_1 h_2 l}{6} \left[2 - \frac{(a_1 - a)^2}{a_1 b} \right]$	$\frac{h_1 h_2 (l + b)}{6}$	$\frac{h_1 (h_3 + h_4) l}{6}$
	$\frac{h_1 h_2 l}{2}$	$\frac{h_1 h_2 (l + b)}{6}$	$\frac{h_1 h_2 l}{6} \left[2 - \frac{(a_1 - a)^2}{a_1 b} \right]$	$\frac{h_1 h_2 (l + b)}{6}$	$\frac{h_1 (h_3 + h_4) l}{6}$

				
	$\frac{(h+h_1)h_2l}{2}$	$\frac{(2h+h_1)h_2l}{6}$	$\frac{h_2h}{6} \left[h(l+b_1) + h_1(l+a_1) \right]$	$\frac{1}{6} \left[h(2h_3+h_4) + h_1(2h_4+h_3) \right]$
	$\frac{2h_1h_2l}{3}$	$\frac{2h_1h_2l}{3}$	$h_1h_2(l^2+a_1b_1)$	$\frac{h_1l}{3}(h_3+h_4)$
	$\frac{h_1h_2l}{3}$	$\frac{2h_1h_2l}{3}$	$\frac{h_1h_2}{12} \left(l+b_1 + \frac{b_1^2}{1} \right)$	$\frac{h_1l}{12}(3h_3+h_4)$
	$\frac{2h_1h_2l}{3}$	$\frac{2h_1h_2l}{3}$	$h_1h_2(l^2+a_1b_1)$	$\frac{h_1l}{3}(h_3+h_4)$

Приложение Д

Значение коэффициента приведения длины стержня μ



Основные формулы для решения задач

Растяжение и сжатие	
1 Напряжение	$\sigma = \frac{N}{F}$
2 Абсолютная деформация	Δl
3 Относительная деформация	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$
4 Закон Гука	$\sigma = E\varepsilon$
5 Коэффициент Пуассона	$\mu = \left \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right $
6 Потенциальная энергия упругой деформации	$U = A = \frac{N^2 l}{2EF}$
7 Допускаемое напряжение	$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{доп}}}{n}$
8 Условие прочности	$\max \sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$
9 Условие жёсткости	$\varepsilon_{\max} = \frac{N}{EF} \leq [\varepsilon]$
10 Температурное удлинение стержня	$\Delta l' = \alpha l \Delta t$
Геометрические характеристики плоских сечений	
11 Статические моменты площади сечения	$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF$
12 Координаты центра тяжести сечения	$X_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum F_i}, \quad Y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum F_i}$
13 Осевые моменты инерции	$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF$

14 Центробежный момент инерции	$J_{xy} = \int_F x \cdot y \, dF$
15 Полярный момент инерции	$J_P = \int_F \rho^2 \, dF, \quad J_P = J_x + J_y$
16 Моменты сопротивлений	$W_x = \frac{J_x}{y}, \quad W_y = \frac{J_y}{x}, \quad W_P = \frac{J_P}{\rho}$
17 Теорема о параллельном переносе осей	$J_{x1} = J_x + a^2 F,$ $J_{y1} = J_y + b^2 F$
18 Радиусы инерции	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
19 Определение главных осей	$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x}$
20 Главные моменты инерции	$J_U = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha,$ $J_V = J_x \cdot \sin^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha$
Кручение	
21 Напряжение	$\tau = \frac{M_{\hat{e}}}{J_P} \rho, \quad \tau = \frac{M_{\hat{e}}}{W_P}$
22 Абсолютный угол закручивания	$\varphi = \frac{M_{\hat{e}} l}{G J_P}$
23 Относительный угол закручивания	$\theta = \frac{M_{\hat{e}}}{G J_P}$
24 Закон Гука при сдвиге	$\tau = \gamma G$
25 Потенциальная энергия упругой деформации	$U = A = \frac{M_{\hat{e}}^2 l}{2 G J_P}$
26 Условие прочности	$\tau_{\max} = \frac{\max \dot{I}}{W_P} \hat{e} \leq [\tau]$

27 Условие жёсткости	$\theta_{\max} = \frac{M_K}{GJ_P} \leq [\theta], \text{ рад/м}$ $\theta_{\max} = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{100 \cdot M_K}{GJ_P} \leq [\theta^\circ],$ град / м
28 Если мощность выражена в киловаттах* и обороты в минутах, то $\dot{M} = 97360 \frac{N}{n} \frac{(\hat{A} \hat{O})}{(\hat{A} \cdot \hat{I})} (\hat{A} \cdot \hat{I})$ скручивающий момент от мощности	$M = 9,55 \frac{N}{n}, \text{ кН} \cdot \text{м}$ (скручивающий момент от силы)
Изгиб	
29 Дифференциальные зависимости Журавского	$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{d^2M}{dz^2}$
30 Кривизна изогнутой оси балки (основная формула теории изгиба)	$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$
31 Нормальное напряжение	$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \max \sigma = \frac{M_x}{W_x}$
32 Касательное напряжение	$\tau = \frac{Q_y S_x}{J_x b}$
33 Условие прочности по нормальным напряжениям	$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$
34 Условие прочности по касательным напряжениям	$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x}{J_x b} \leq [\tau]$
35 Потенциальная энергия упругой деформации	$U = A = \int_l \frac{M_x^2 dz}{EJ_x} + \int_l \frac{kQ_y dz}{GF}$

* 1 кВт приближённо равен 102 кгм/с. В системе СИ N – мощность (ватт).

Продолжение приложения Е

43 Напряжения при растяжении и изгибе	$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M_x}{J_x} y$
44 Эквивалентные напряжения при изгибе и кручении	По третьей теории прочности $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{с}}^2 + 4\tau_{\text{с}}^2},$ по четвертой теории прочности $\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{с}}^2 + 3\tau_{\text{с}}^2}$
45 Эквивалентные моменты при изгибе и кручении	По третьей теории прочности $I_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{с}}^2 + M_{\text{к}}^2},$ по четвертой теории прочности $I_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{с}}^2 + 0,75 M_{\text{к}}^2}$
Устойчивое равновесие деформируемых систем	
46 Формула Эйлера	$P_{\text{сд}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$
47 Гибкость стержня	$\lambda = \frac{\mu l}{i}$
48 Пределы правомерности формулы Эйлера	$\lambda_{\text{г}} \geq \lambda_{\text{ф}}$
49 Формула Ясинского	$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2$
50 Условие устойчивости	$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{у}}$
51 Допускаемое напряжение на устойчивость	$[\sigma]_{\text{д}} = \varphi[\sigma]$
Динамическое действие нагрузок	
52 Сила инерции	$P_{\text{сд}} = ma = \frac{P + \gamma Fz}{g} a$
53 Динамическое напряжение	$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma$
54 Коэффициент динамичности	$k_{\text{д}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}$