

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ ИХ РЕШЕНИЯ
Учебное пособие для студентов дневного обучения
строительных специальностей

В предлагаемом учебном пособии представлены задания для расчетно-проектировочных работ. Здесь же даны примеры решения подобных задач. Опубликование этого пособия преследует цель облегчить получение исходных данных для выполнения расчетных работ и примеров их выполнения, взяв из электронных источников, не обращаясь к преподавателю или в библиотеку.

Пособие предназначено как для студентов II и III курсов строительных специальностей, так и для студентов, обучающихся по другим специальностям, в учебных программах которых имеется данная дисциплина.

ГЛАВА 1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА № 1

Для заданного бруса ступенчато-переменного сечения при осевых нагрузках и геометрических размерах, представленных на рис. 1, требуется: 1) определить реактивную силу в опорном сечении; 2) построить эпюру нормальных сил и эпюру нормальных напряжений; 3) определить абсолютные удлинения (укорочения) участков бруса, вычислить абсолютное удлинение (укорочение) всего бруса и построить эпюру осевых перемещений.

Примечание.

Для уточнения построения эпюры продольных перемещений на участках с равномерно распределенной нагрузкой вычислить величину осевого перемещения в середине участка, а также найти экстремальное значение перемещения, если такое имеется.

Исходные данные для расчета взять из таблицы 1.

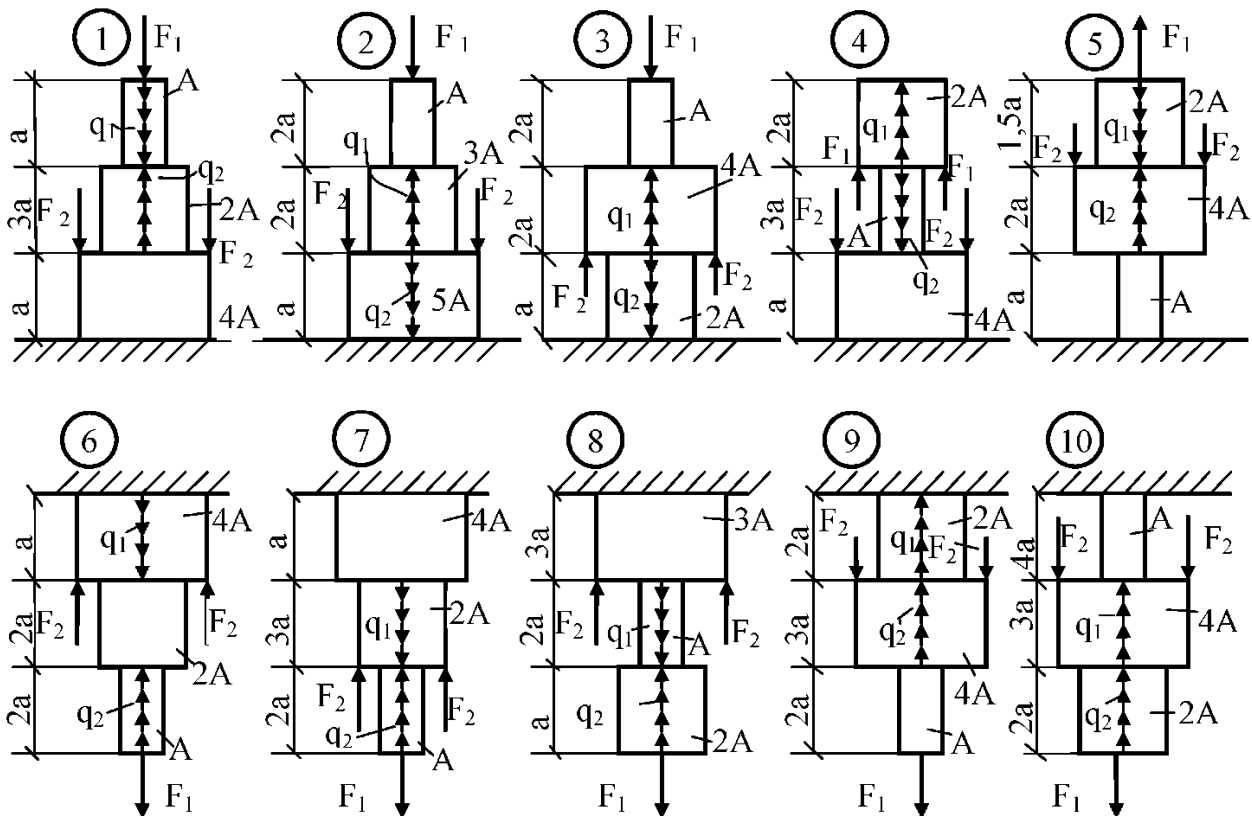


Рис. 1

Таблица 1

№ варианта	Группа 201		Группа 202		Группа 203		Группа 204	
	№ схемы рис.1	№ стр. в табл.2	№ схемы рис.1	№ стр.в табл.2	№ схемы рис.1	№ стр.в табл.2	№ схемы рис.1	№ стр.в табл.2
1	1	1	10	5	5	1	2	15
2	2	2	9	6	6	2	3	20
3	3	3	8	7	7	3	4	19
4	4	4	7	8	8	4	5	18
5	5	5	6	9	9	5	6	17
6	6	6	5	10	10	6	7	16
7	7	7	4	11	1	7	8	15
8	8	8	3	12	2	8	9	14
9	9	9	2	13	3	9	10	13
10	10	10	1	14	4	10	1	15
11	1	11	10	15	5	11	2	20
12	2	12	9	16	6	12	3	12
13	3	13	8	17	7	13	4	16
14	4	14	7	18	8	14	5	3
15	5	15	6	19	9	15	6	4
16	6	16	5	20	10	16	7	2
17	7	17	4	1	1	17	8	3
18	8	18	3	2	2	18	9	20
19	9	19	2	3	3	19	10	19
20	10	20	1	4	4	20	1	2
21	1	3	10	6	5	20	2	9
22	2	4	9	7	6	10	3	16
23	3	5	8	9	7	4	4	17
24	4	6	7	10	8	20	5	13
25	5	7	6	11	9	19	6	20
26	6	8	5	12	10	16	7	10
27	7	9	4	13	1	18	8	11
28	8	10	3	14	2	13	9	10
29	9	11	2	15	3	15	10	14
30	10	12	1	16	4	11	1	8
31	1	13	10	17	5	19	2	5
32	2	14	9	18	6	3	3	7
33	5	15	6	19	9	13	4	12

Таблица 2

№ стр.	a, м	A, см ²	F ₁ , кН	F ₂ , кН	q ₁ , кН/м	q ₂ , кН/м	E, кН/см ²
1	1,0	20	20	10	10	5	100
2	1,1	22	22	12	12	18	200
3	1,2	24	24	14	14	10	300
4	1,3	26	26	16	16	11	400
5	1,4	28	28	18	18	12	500
6	1,5	30	30	20	20	14	600
7	1,6	32	32	22	22	16	700
8	1,7	34	34	26	24	18	800
9	1,8	36	36	28	26	22	900
10	1,9	38	38	15	28	30	1000
11	1,8	40	40	17	30	40	2000
12	1,7	20	45	19	32	21	3000
13	1,6	21	50	20	34	19	4000
14	1,5	23	55	23	36	17	5000
15	1,4	25	60	28	38	15	6000
16	1,3	27	65	40	40	13	7000
17	1,2	29	70	45	42	11	1·10 ⁴
18	1,1	31	75	50	44	9	2·10 ⁴
19	1,0	33	80	55	46	7	3·10 ⁴
20	1,5	35	90	45	48	6	4·10 ⁴

ЗАДАЧА № 2

Абсолютно жесткий брус АВ, прикрепленный к неподвижному шарниру и поддерживаемый круглыми стальными стержнями 1 и 2 (рис. 2), нагружен постоянной нагрузкой $F_{\text{п}}$ и временной $F_{\text{в}}$. Величины нагрузок, геометрические размеры системы и соотношения площадей стержней A_1 и A_2 приведены в табл. 3.

В задаче требуется: 1) определить расчетные нагрузки, приняв коэффициенты перегрузки для постоянной нагрузки $K_{\text{п}} = 1,1$, а для временной – $K_{\text{в}} = 1,4$; 2) определить усилия, возникающие в стержнях 1 и 2 (собственным весом бруса пренебречь); 3) подобрать поперечные сечения стержней, обеспечив заданное расчетное сопротивление для стали $R = 21 \text{ кН/см}^2$; 4) произвести расчет по разрушающей нагрузке и, приняв предел текучести для стали $\sigma_{\text{т}} = 23 \text{ кН/см}^2$, определить, во сколько раз можно увеличить нагрузку, чтобы система разрушилась. Найти реальный коэффициент запаса по отношению к нормативной нагрузке.

Исходные данные взять из табл.4.

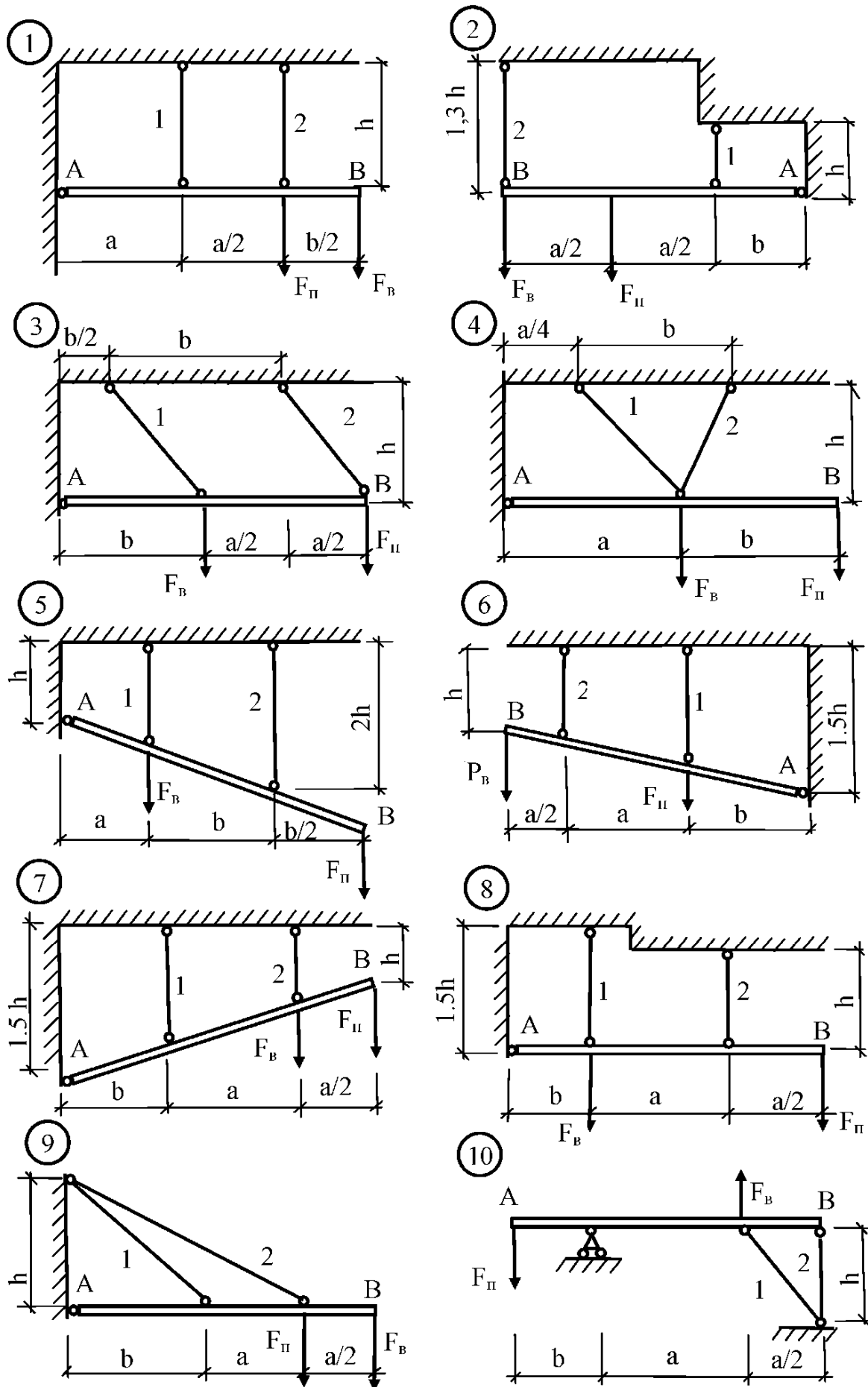
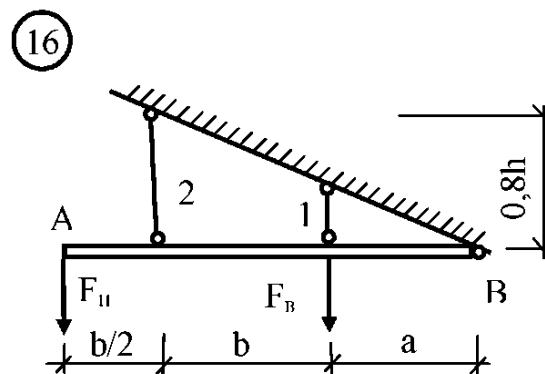
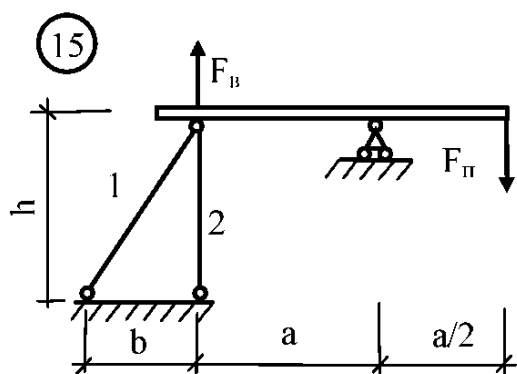
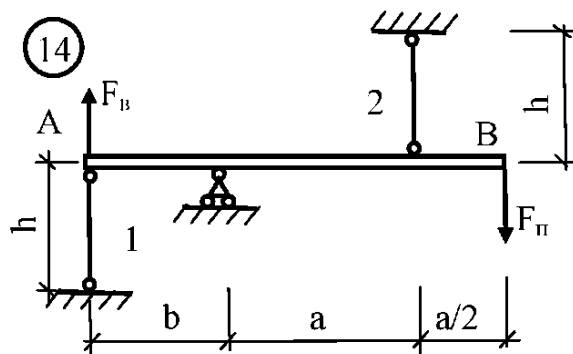
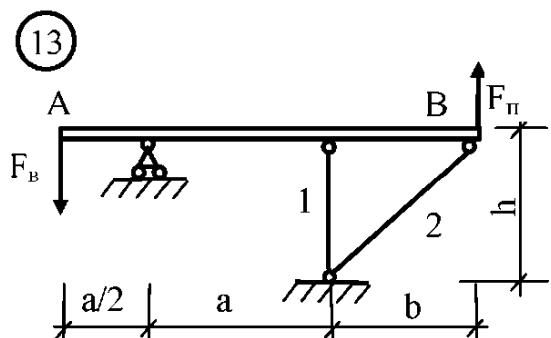
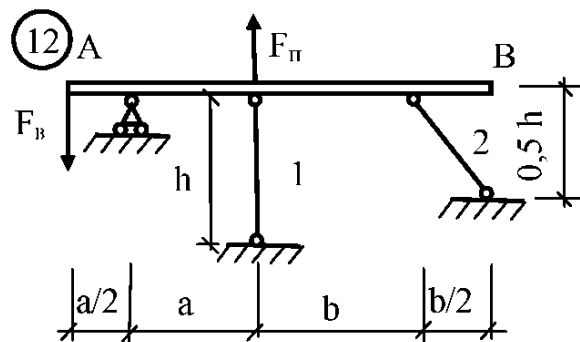
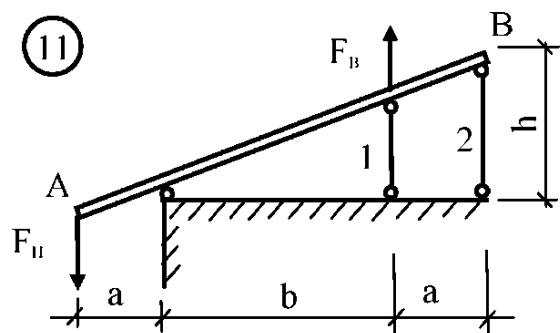


Рис. 2



Окончание рис. 2

Таблица 3

№ строки	a, м	b, м	h, м	A_1/A_2	F_{II} , кН	F_B , кН
1	2,0	1,4	1,2	2,0	80	70
2	2,2	1,6	1,0	1,5	120	60
3	2,6	1,8	1,0	1,2	150	40
4	2,4	1,6	1,2	1,4	160	90
5	2,2	1,4	1,3	1,5	120	100
6	2,0	1,2	1,1	2,0	100	130
7	2,4	1,2	1,0	1,6	150	170
8	2,6	1,4	1,6	2,2	250	190
9	2,0	1,8	1,5	2,0	150	100
10	2,4	1,6	1,3	1,2	200	130

Таблица 4

№ варианта	Группа 201		Группа 202		Группа 203		Группа 204	
	№ схемы рис.2	№ стр. в табл.3	№ схемы рис.2	№ стр.в табл.3	№ схемы рис.2	№ стр.в табл.3	№ схемы рис.2	№ стр.в табл.3
1	1	1	16	10	10	5	10	1
2	2	2	15	9	11	6	8	2
3	3	3	14	8	12	7	9	4
4	4	4	13	7	13	8	7	6
5	5	5	12	6	14	9	6	9
6	6	6	11	5	15	10	5	2
7	7	7	10	4	1	4	4	3
8	8	8	9	3	2	3	3	4
9	9	9	8	2	3	2	1	10
10	10	10	7	1	4	1	2	9
11	11	1	6	10	5	5	16	8
12	12	2	5	9	6	7	15	7
13	13	3	4	8	7	8	14	6
14	14	4	3	7	8	9	13	5
15	15	5	2	6	9	7	12	5
16	16	6	1	5	10	6	11	10
17	1	7	16	4	11	5	16	10
18	2	8	15	3	12	4	15	2
19	3	9	14	2	13	3	13	4
20	4	10	13	1	14	2	12	3
21	5	1	12	10	15	1	11	8
22	6	2	11	9	16	5	10	3
23	7	3	10	8	1	3	9	6
24	8	4	9	7	2	4	8	1
25	9	5	8	6	3	5	7	2
26	10	6	7	5	4	6	6	5
27	11	7	6	4	5	7	5	7
28	12	8	5	3	6	8	4	8
29	13	9	4	2	7	9	3	6
30	14	10	3	1	8	10	1	8
31	15	1	2	10	9	1	2	7
32	16	2	1	9	10	2	3	9
33	1	3	16	8	11	3	4	5

ЗАДАЧА № 3

Для изображенной на схеме плоской фигуры (рис. 3) требуется: 1) определить положение центра тяжести сечения; 2) вычислить осевые и центробежный моменты инерции относительно произвольных осей, проходящих через центр тяжести сечения; 3) определить положение главных центральных осей инерции и вычислить значения главных моментов инерции относительно этих осей; 4) вычислить радиусы инерции относительно главных осей и построить эллипс инерции.

Исходные взять из табл. 6.

Примечания.

1. Размеры неравнобоких уголков приведены по ГОСТ 8510-86; размеры двутавров и швеллеров по ГОСТ 8239-89 и 8240-89. Пользоваться более ранними сортаментами не разрешается.

2. Из табл. 5 следует взять только те элементы, которые входят в заданную схему.

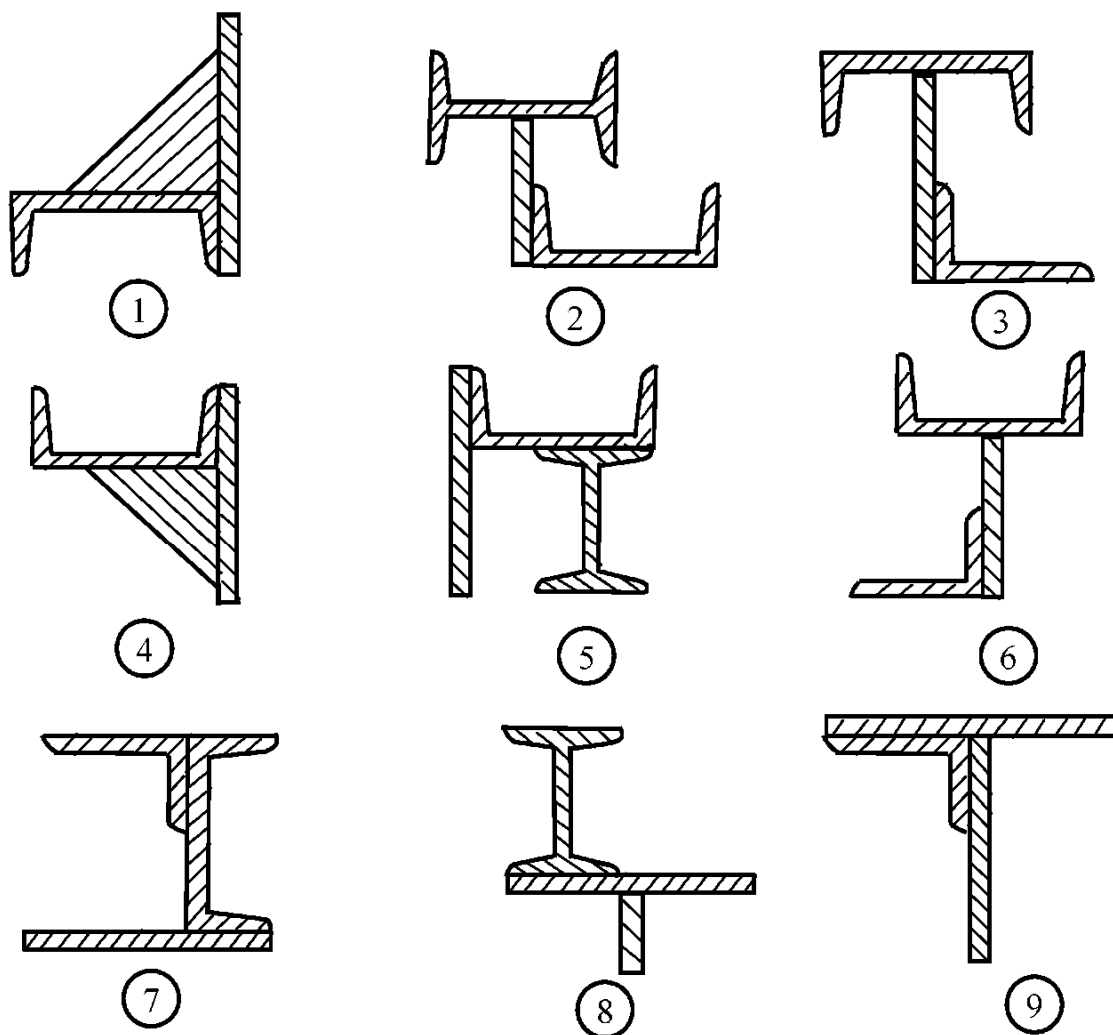
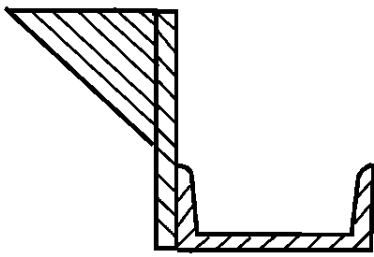
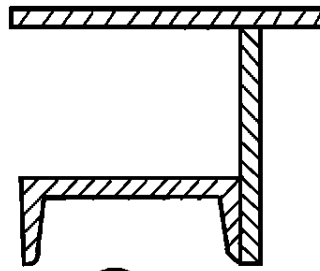


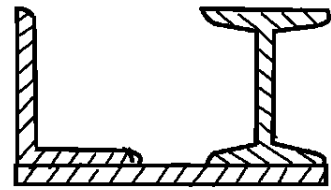
Рис. 3



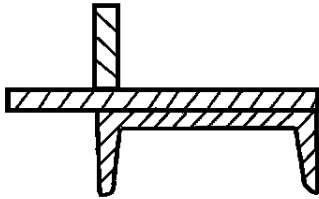
10



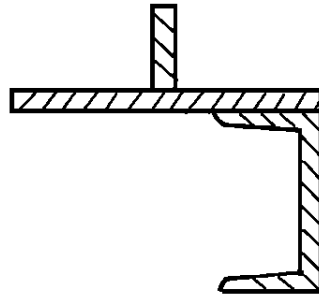
11



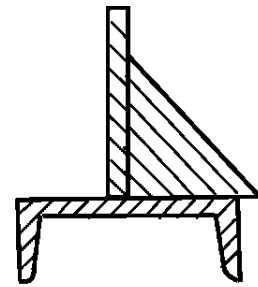
12



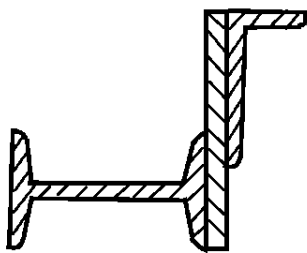
13



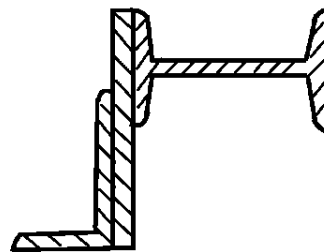
14



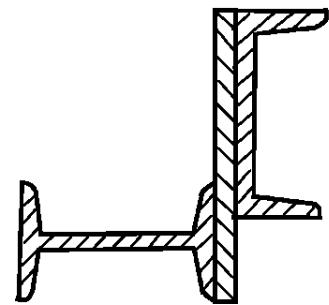
15



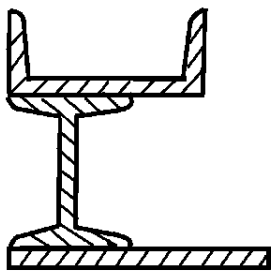
16



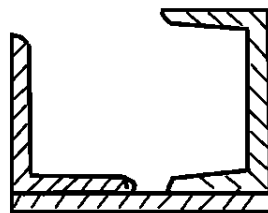
17



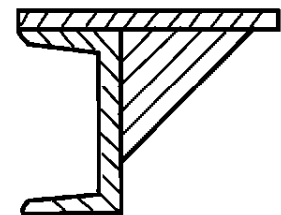
18



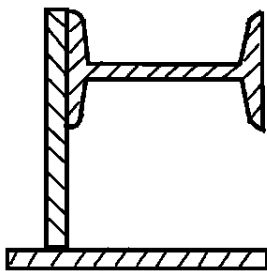
19



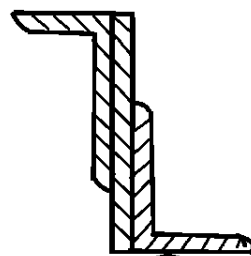
20



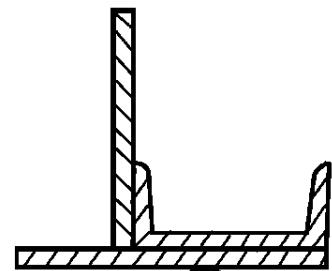
21



22

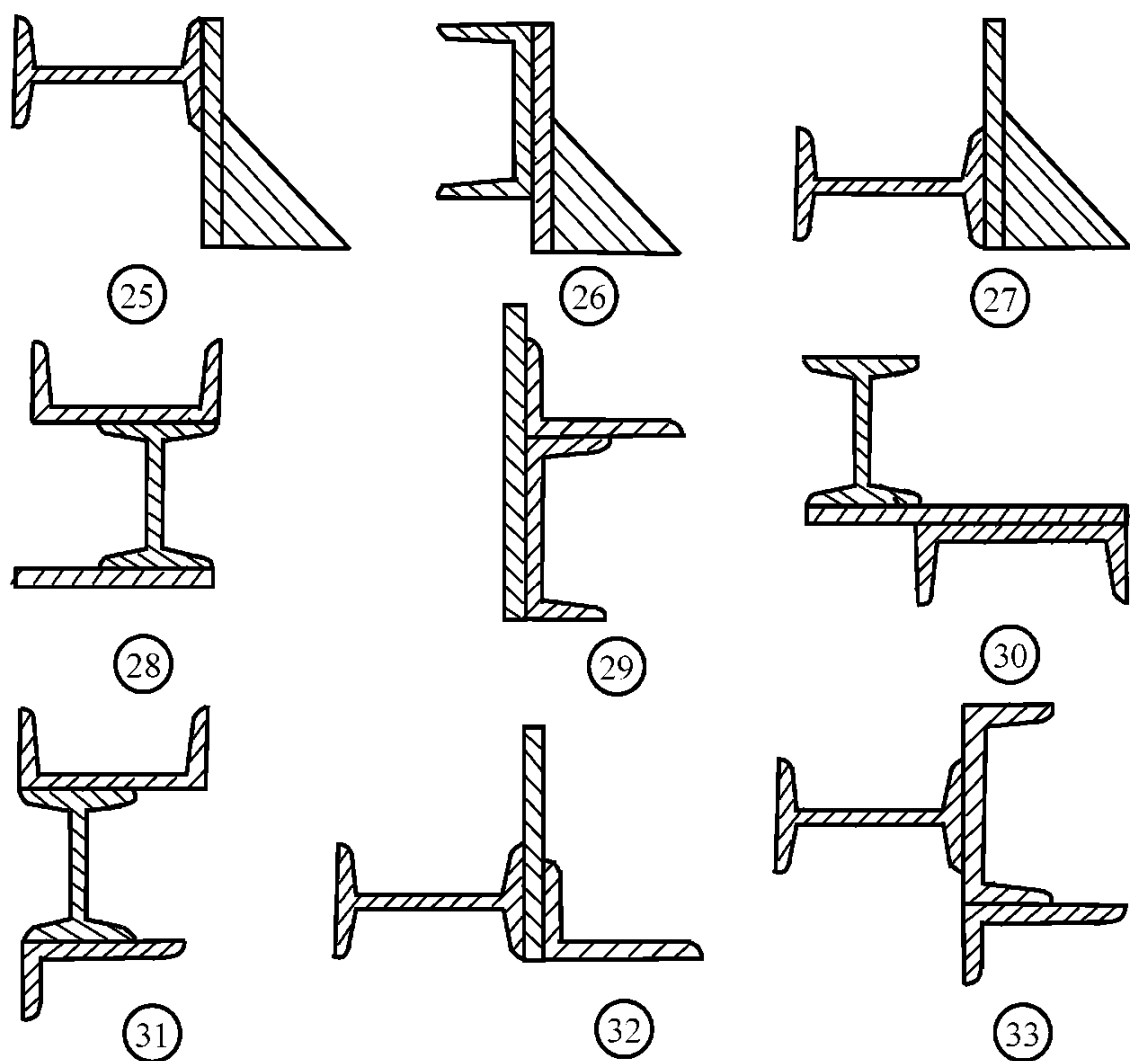


23



24

Продолжение рис. 3



Окончание рис. 3

Таблица 5

№ строки	Высота катета треугольника, мм	Неравнобе- кий угол	Верти- кальный лист, мм	Горизон- тальный лист, мм	№ двутавра	№ швелле- ра
1	150	100x63x10	500x10	400x10	24	16
2	160	110x70x8	400x12	300x10	27	18
3	170	125x80x10	450x10	280x12	30	20
4	180	125x80x8	350x10	300x12	33	22
5	190	140x90x10	500x12	300x10	36	24
6	100	160x100x12	600x16	300x10	40	27
7	185	180x110x12	300x10	450x12	22	30
8	195	200x125x12	420x12	290x10	50	33
9	205	75x50x5	600x20	350x10	16	36
10	210	90x56x8	410x10	360x12	45	40

Таблица 6

№ варианта	Группа 201		Группа 202		Группа 203		Группа 204	
	№ схемы рис.2	№ стр. в табл.5	№ схемы рис.2	№ стр.в табл.5	№ схемы рис.2	№ стр.в табл.5	№ схемы рис.2	№ стр.в табл.5
1	1	1	33	3	17	5	15	2
2	2	2	32	4	18	6	16	3
3	3	1	31	3	19	5	17	4
4	4	2	30	4	20	6	18	5
5	5	1	29	3	21	5	19	6
6	6	2	28	4	22	6	20	7
7	7	1	27	3	23	5	21	8
8	8	2	26	4	24	6	22	9
9	9	1	25	3	25	5	23	10
10	10	2	24	4	26	6	24	1
11	11	1	23	3	27	5	25	2
12	12	2	22	4	28	6	26	3
13	13	1	21	3	29	5	27	4
14	14	2	20	4	30	6	28	5
15	15	1	19	3	31	5	29	6
16	16	2	18	4	32	6	1	7
17	17	1	17	3	33	5	2	8
18	18	2	16	4	1	6	3	9
19	19	1	15	3	2	5	4	10
20	20	2	14	4	3	6	5	2
21	21	1	13	3	4	5	6	3
22	22	2	12	4	5	6	7	4
23	23	1	11	3	6	5	8	5
24	24	2	10	4	7	6	9	6
25	25	1	9	3	8	5	10	7
26	26	2	8	4	9	6	11	8
27	27	1	7	3	10	5	12	9
28	28	2	6	4	11	6	13	10
29	29	1	5	3	12	5	14	1
30	30	2	4	4	13	6	15	2
31	31	1	3	3	14	5	30	3
32	32	2	2	4	15	6	31	4
33	33	1	1	3	16	5	32	5

ЗАДАЧА № 4

Для четырех балок и рамы (рис.4) требуется: 1) определить расчетные нагрузки и при этом считать, что сосредоточенные силы являются постоянными нагрузками, а распределенные нагрузки и моменты – временными (коэффициенты перегрузки для постоянных нагрузок $K_p = 1,1$, для временных $K_v = 1,4$; 2) определить опорные реакции и построить эпюры поперечных и продольных сил и изгибающих моментов (на эпюрах показать величины всех характерных ординат, а также положение точек пересечения эпюр Q , M , N с осями эпюр). Исходные данные взять из табл. 7.

Примечание. Нагрузки, имеющие знак минус, следует приложить в обратном направлении и принять их со знаком плюс.

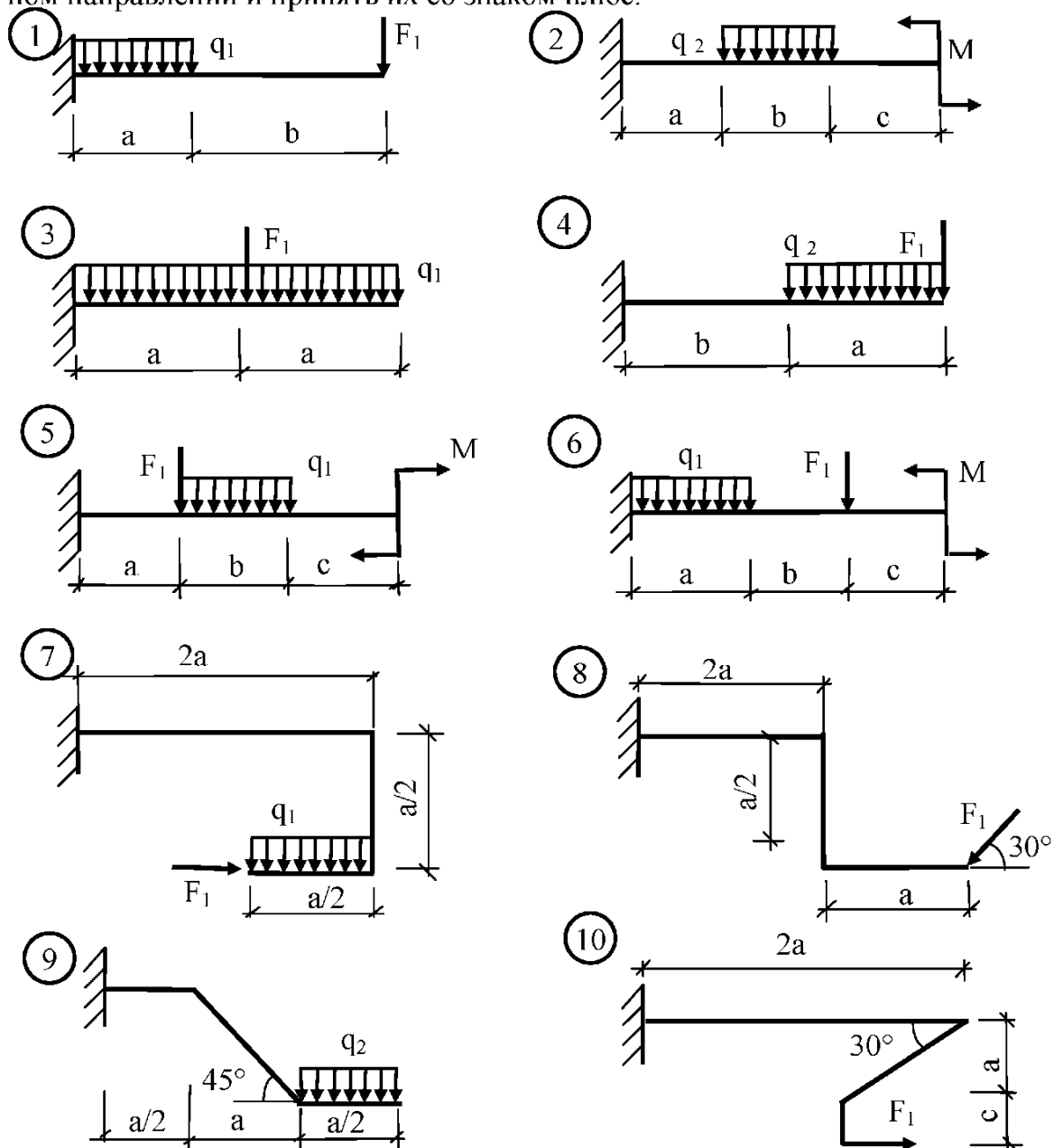
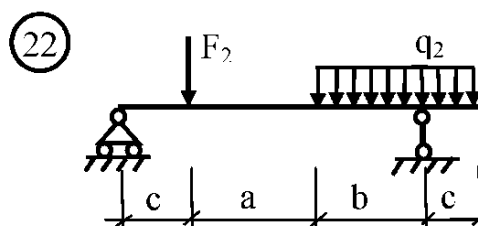
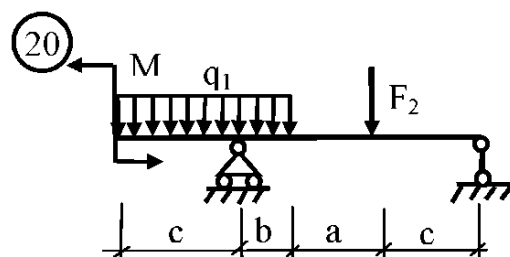
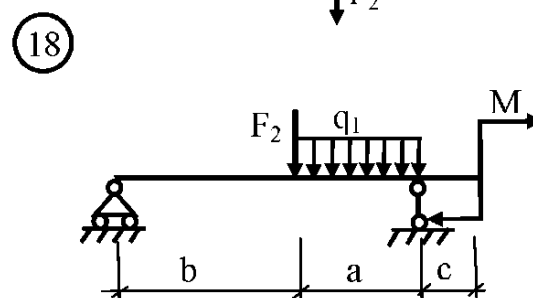
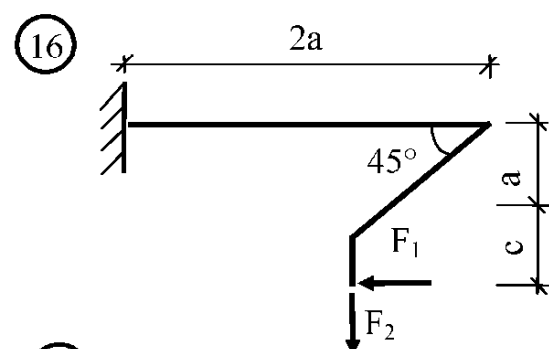
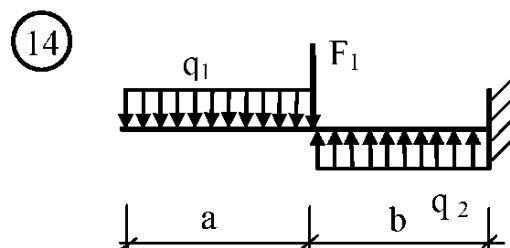
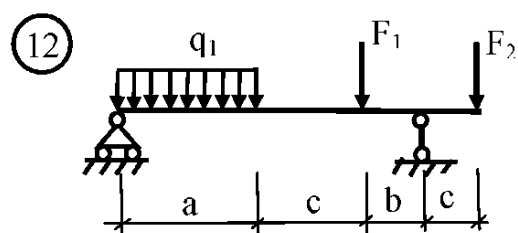
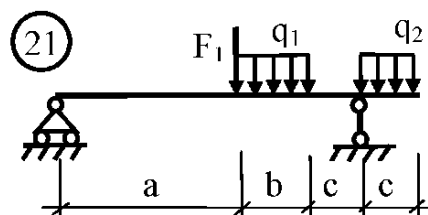
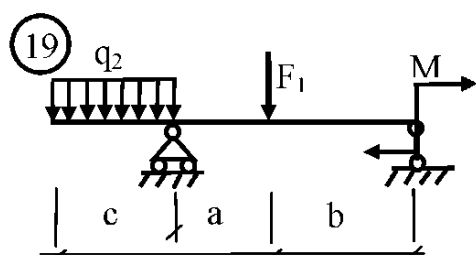
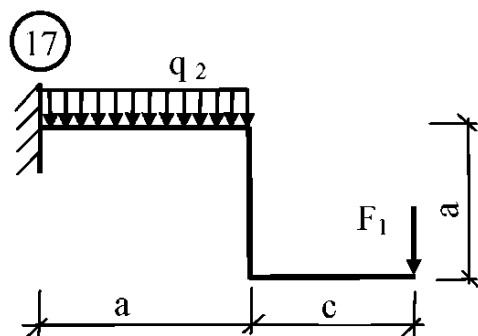
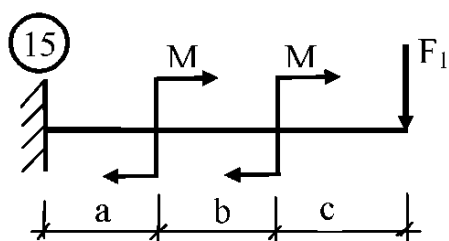
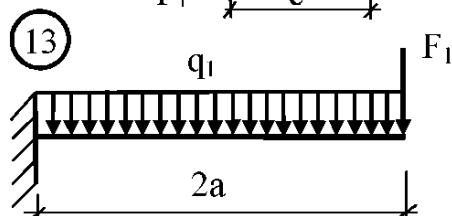
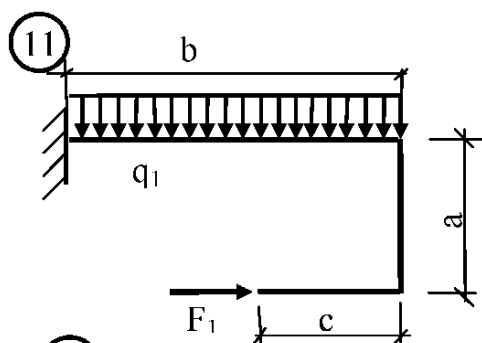
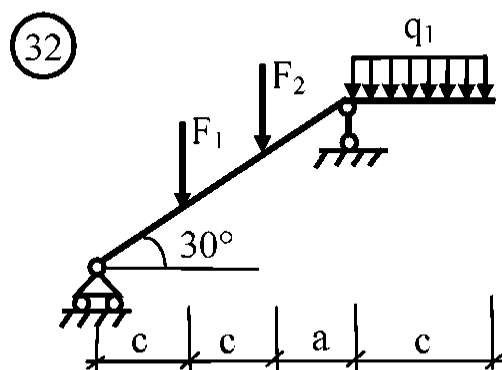
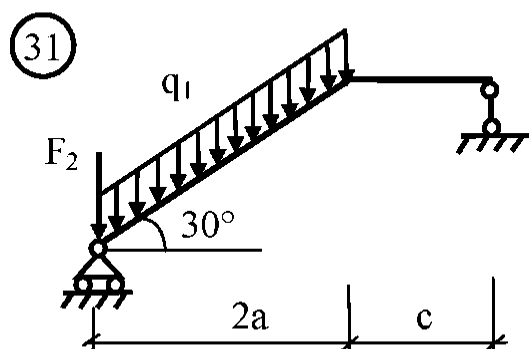
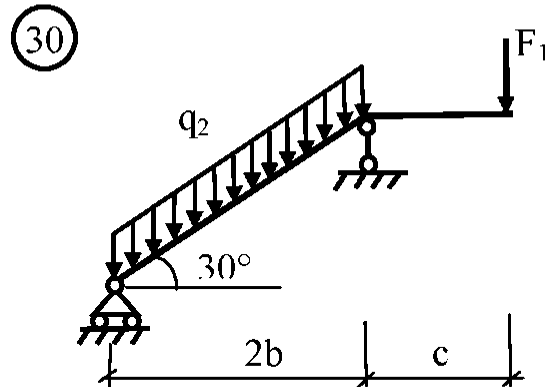
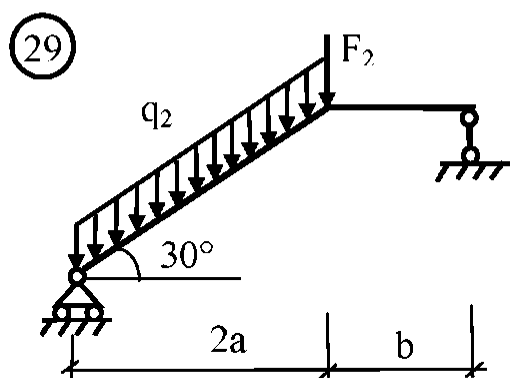
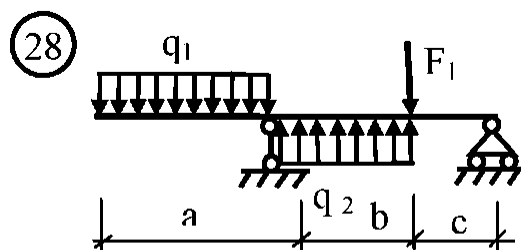
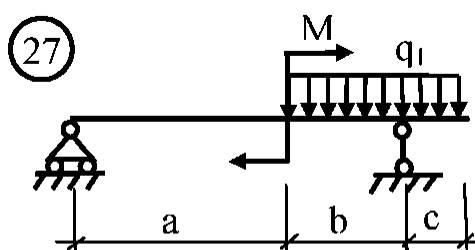
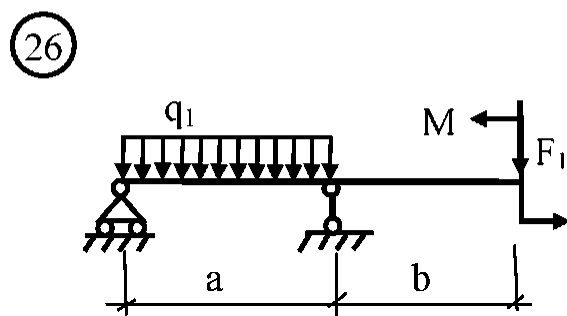
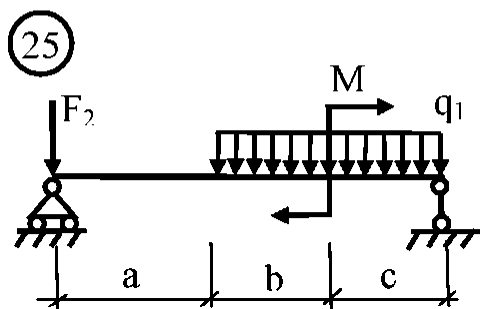
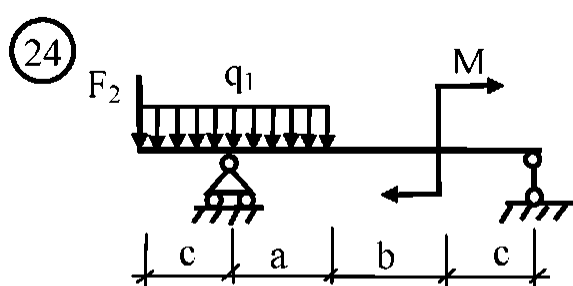
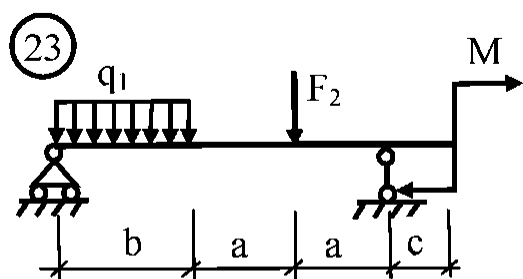


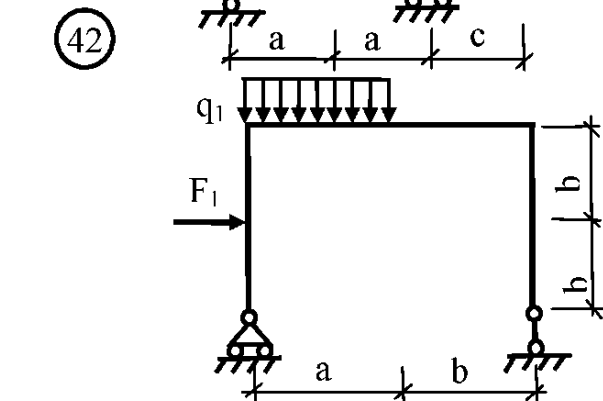
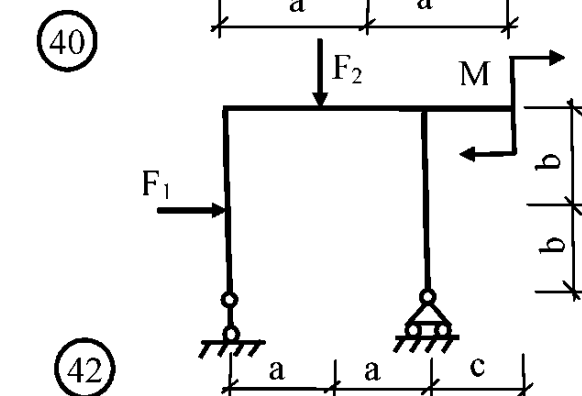
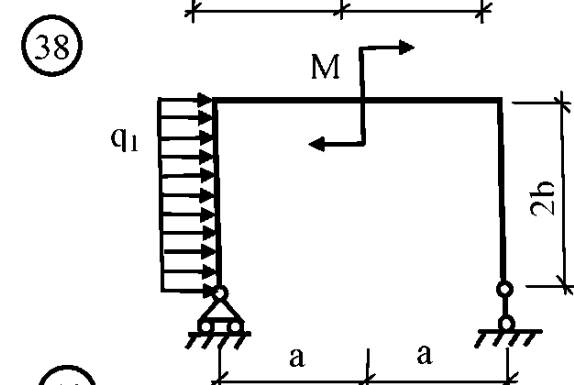
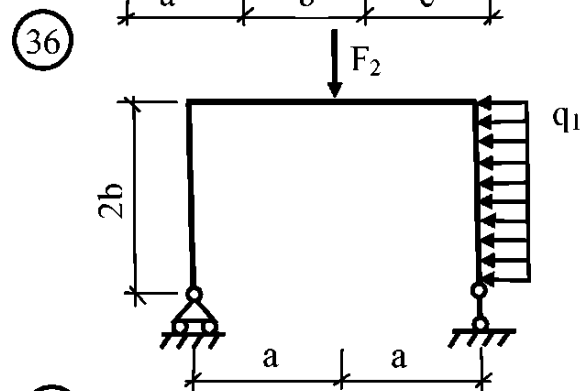
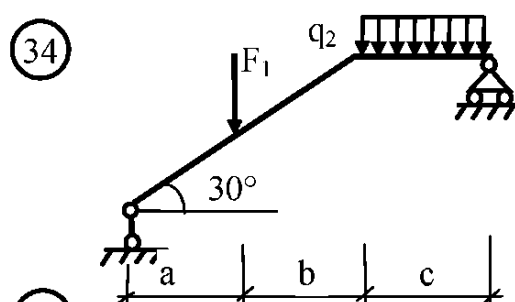
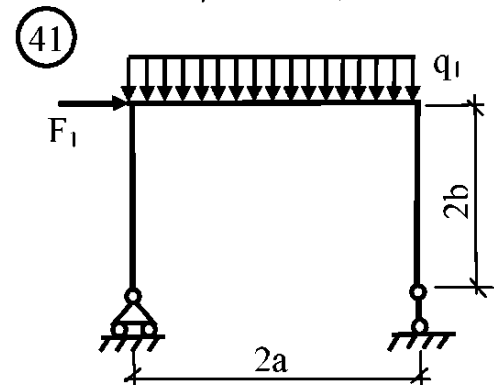
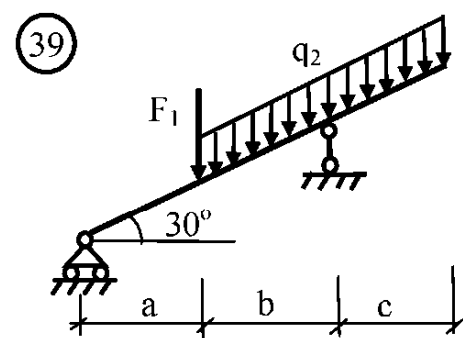
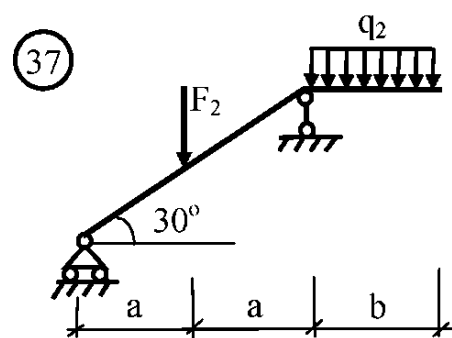
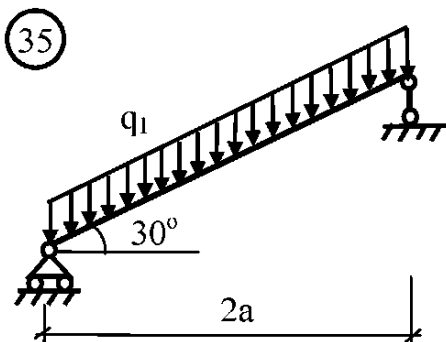
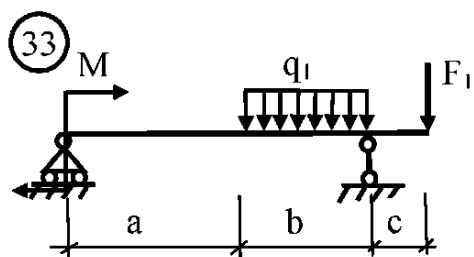
Рис. 4



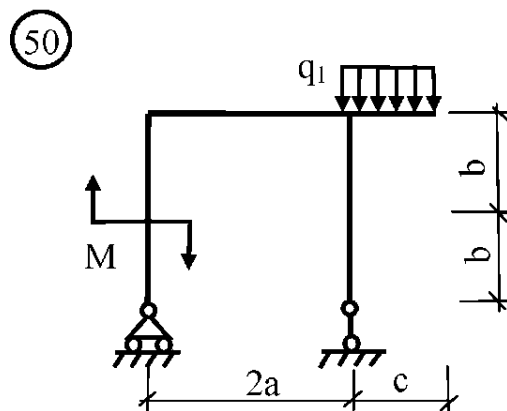
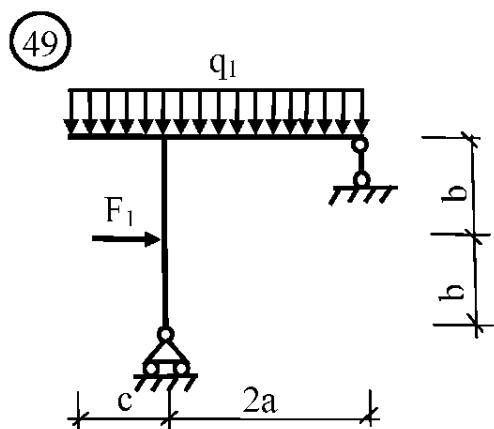
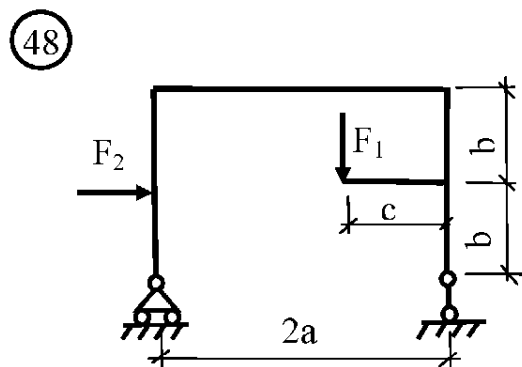
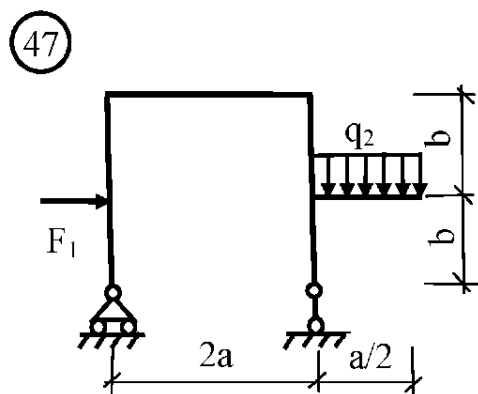
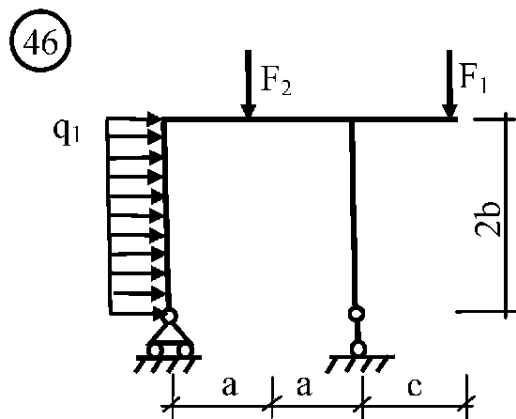
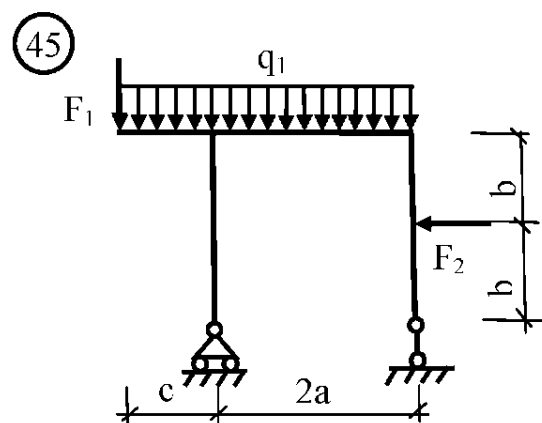
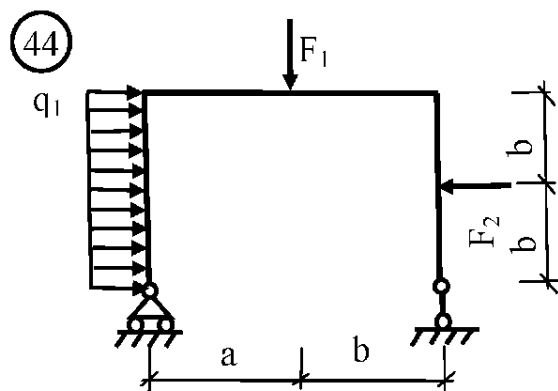
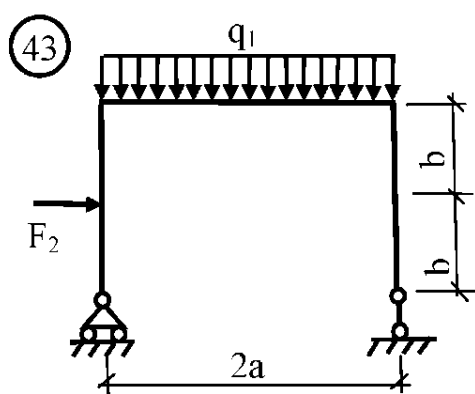
Продолжение рис. 4



Продолжение рис. 4



Продолжение рис. 4



Окончание рис. 4

Таблица 7

№ варианта	Группа 201			Группа 202		
	№ строки в табл. 8	№ строки в табл.9	№ строки в табл.10	№ строки в табл. 8	№ строки в табл.9	№ строки в табл.10
1	1	1	1	2	6	1
2	2	2	2	3	2	7
3	3	3	3	4	3	7
4	4	4	4	5	4	6
5	5	5	5	6	5	10
6	6	6	1	7	6	6
7	7	7	2	8	7	7
8	8	8	3	9	8	8
9	9	9	4	10	9	9
10	10	10	5	11	10	10
11	11	1	2	12	1	8
12	12	2	1	13	2	8
13	13	3	4	1	3	8
14	1	4	3	2	4	7
15	2	5	1	3	5	9
16	3	6	2	4	6	7
17	4	7	3	5	7	6
18	5	8	2	6	8	9
19	6	9	5	7	9	8
20	7	10	1	8	10	6
21	8	1	3	9	1	7
22	9	2	3	10	2	10
23	10	3	5	11	3	9
24	11	4	2	12	4	8
25	12	5	3	13	5	8
26	13	6	3	1	6	10
27	1	7	4	2	7	8
28	2	8	1	3	8	10
29	3	9	2	4	9	7
30	4	10	3	5	10	7

№ ва- рианта	Группа 203			Группа 204		
	№ строки в табл. 8	№ строки в табл.9	№ строки в табл.10	№ строки в табл. 8	№ строки в табл.9	№ строки в табл.10
1	3	1	4	13	10	2
2	4	2	2	12	3	4
3	5	3	1	11	5	5
4	6	4	5	10	4	2
5	7	5	6	9	5	5
6	8	6	3	8	3	8
7	9	7	2	7	1	3
8	10	8	6	6	3	10
9	11	9	10	5	9	3
10	12	10	2	4	10	5
11	13	1	4	3	7	5
12	1	2	4	2	7	4
13	2	3	1	1	5	5
14	3	4	10	13	10	6
15	4	5	9	12	9	7
16	5	6	8	11	6	8
17	6	7	9	10	7	9
18	7	8	6	9	4	10
19	8	9	1	8	5	1
20	9	10	4	7	2	2
21	10	1	4	6	1	3
22	11	2	5	5	2	4
23	12	3	6	4	8	5
24	13	4	9	3	10	6
25	1	5	7	2	8	7
26	2	6	9	1	6	8
27	3	7	10	12	7	9
28	4	8	4	13	8	10
29	1	9	3	10	9	1
30	2	10	4	9	10	2

Таблица 8

№ строки	Расчетные схемы				
1	1	10	33	30	38
2	2	11	18	31	36
3	3	7	19	32	40
4	4	8	20	29	41
5	5	9	21	31	42
6	6	17	22	35	43
7	13	16	23	39	44
8	14	11	24	37	45
9	15	7	25	32	46
10	13	16	26	34	47
11	2	10	27	37	48
12	5	17	28	30	49
13	4	8	33	35	50

Таблица 9

№ строки	Нормативные нагрузки				
	F ₁ , кН	F ₂ , кН	q ₁ , кН/м	q ₂ , кН/м	M, кН·м
1	30	50	12	31	30
2	– 35	30	14	29	40
3	40	40	16	27	20
4	45	20	– 18	25	25
5	50	25	20	23	29
6	23	39	22	21	31
7	18	– 44	24	19	34
8	32	52	26	17	35
9	– 48	33	28	15	36
10	39	29	– 30	13	24

Таблица 10

№ строки	Геометрические размеры балок		
	a, м	b, м	c, м
1	2	2	2
2	1,5	2,1	1,9
3	1,8	2,0	1,4
4	1,7	2,4	2,1
5	1,4	1,8	3,1
6	2,5	1,9	2,2
7	2,4	2,9	1,3
8	2,7	3,0	1,5
9	3,0	1,7	1,0
10	3,2	1,0	1,7

ЗАДАЧА № 5

Для балок (рис. 4), имеющих горизонтальную ось, от расчетных нагрузок (см. задачу 4): 1) подобрать сечения балок (шарнирно опертой – из стального двутавра, а балки с жестким защемлением – из дерева с расчетными сопротивлениями соответственно $R=21 \text{ кН/см}^2$ и $R=1,3 \text{ кН/см}^2$, при этом высоту деревянной балки принять в полтора раза больше ее ширины); 2) в двутавровой стальной балке для сечения, отстоящего от левой опоры на $1/4$ длины пролета балки, построить эпюры нормальных и касательных напряжений.

Исходные данные взять из табл. 7.

Примечание. Нагрузки, имеющие знак минус, следует приложить в обратном направлении и принять их со знаком плюс.

ЗАДАЧА № 6

Для заданных двух схем балок (рис. 5), нагруженных нормативной нагрузкой (см. табл. 11), требуется: 1) построить эпюры Q и M от расчетных нагрузок, при этом считать, что распределенная нагрузка является постоянной ($k_n = 1,1$), а сосредоточенная сила и момент – временные ($k_b = 1,4$); 2) подобрать сечения балок из стального двутавра (материал Ст3 с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа и модулем упругости $E = 210$ ГПа); 3) пользуясь методом начальных параметров, для балки на двух шарнирных опорах построить эпюры прогибов и углов поворота от нормативных нагрузок; 4) по правилу Верещагина вычислить прогиб и угол поворота в свободном конце консольной балки от нормативных нагрузок; Исходные данные взять из табл. 12.

Примечание. Нагрузки, имеющие знак минус, следует направить в сторону, противоположную направлению, представленному на рис. 5, и принять их со знаком плюс.

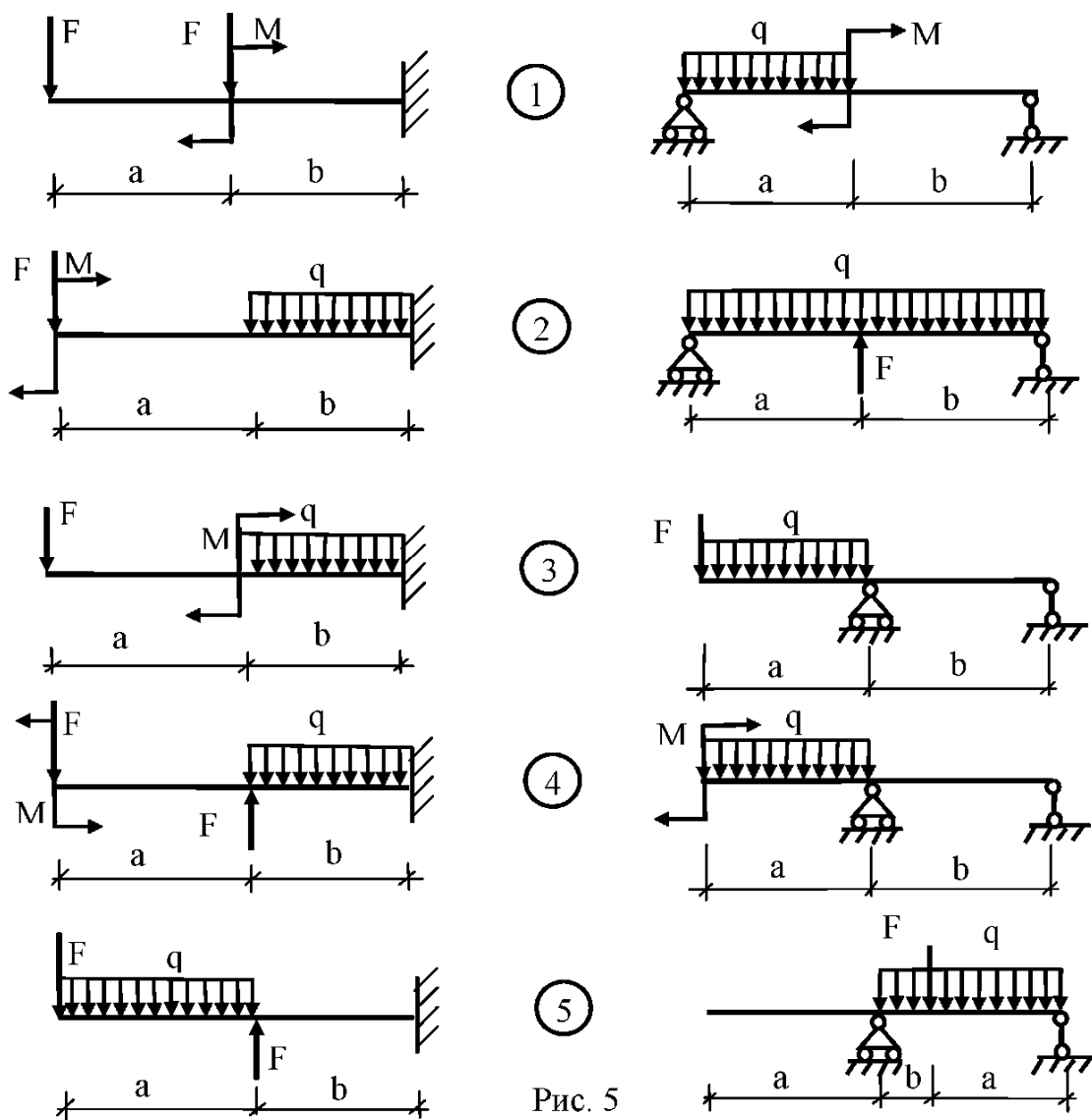
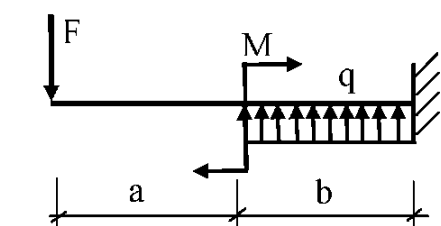
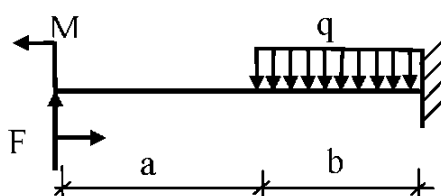
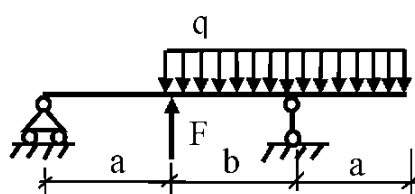


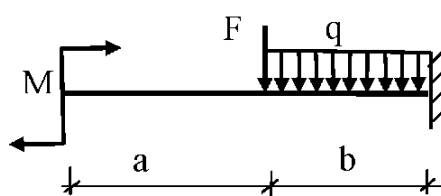
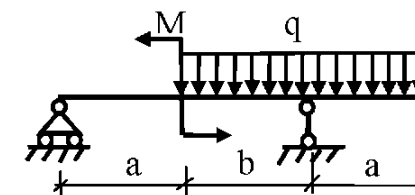
Рис. 5



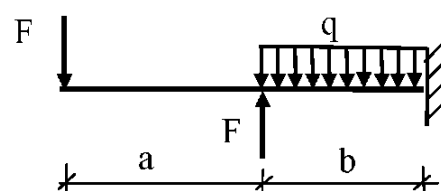
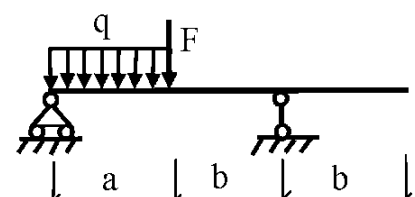
6



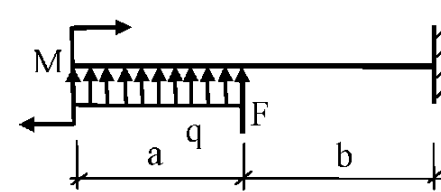
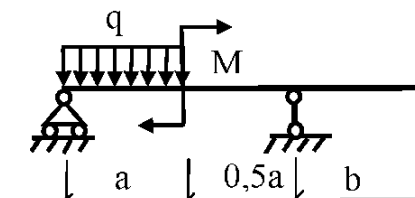
7



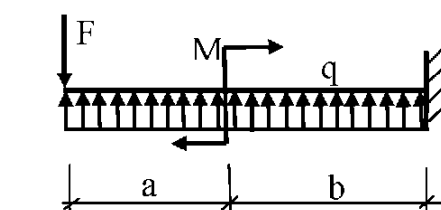
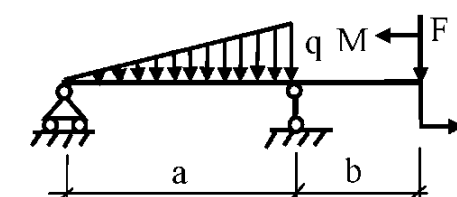
8



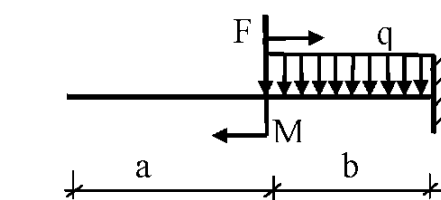
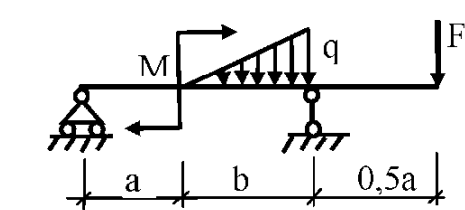
9



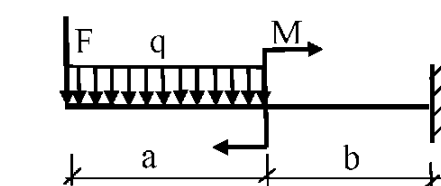
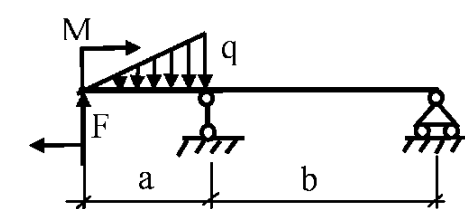
10



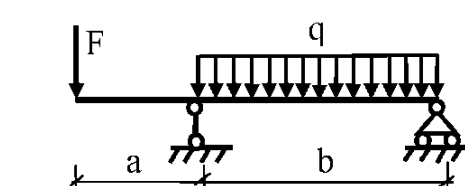
11



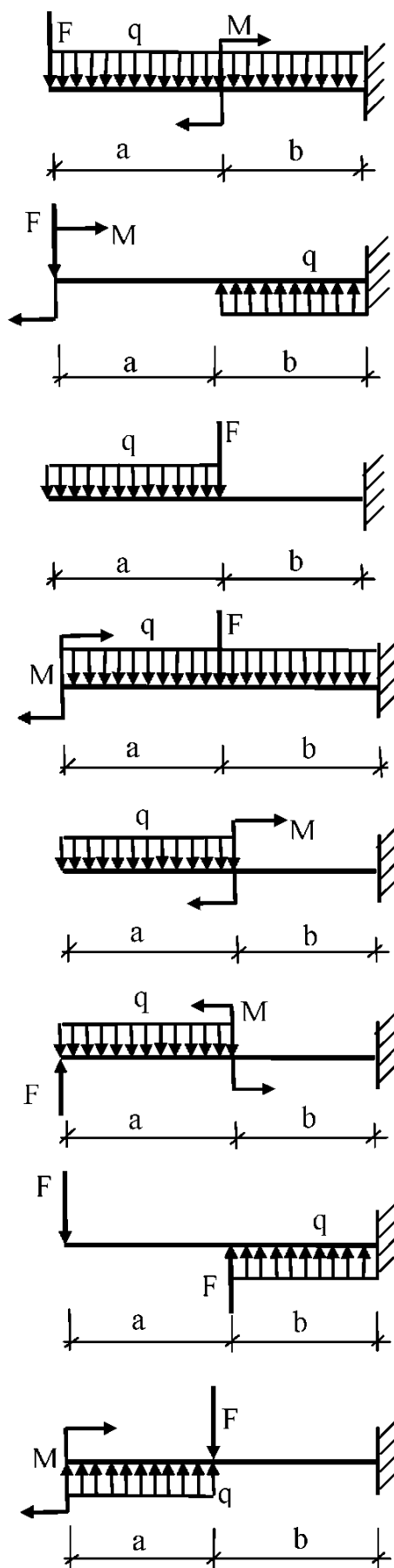
12



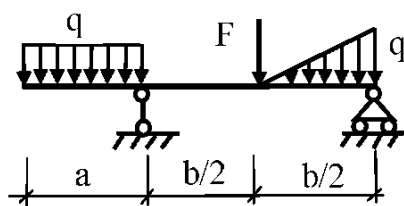
13



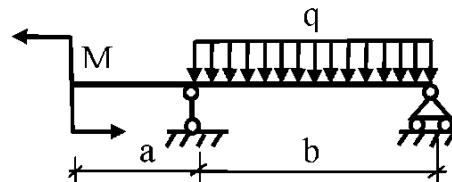
Продолжение рис. 5



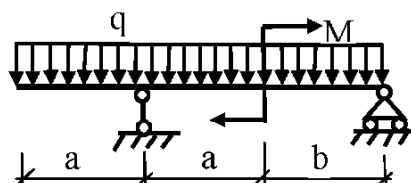
14



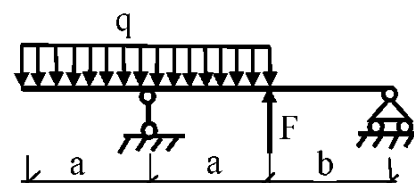
15



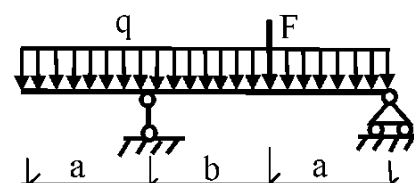
16



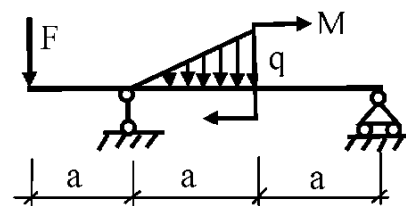
17



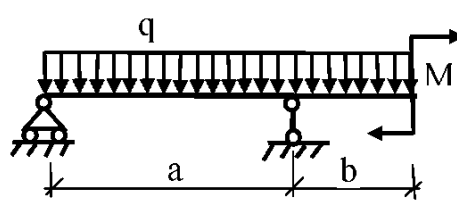
18



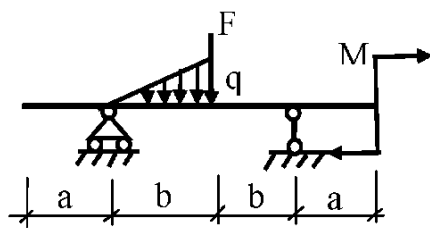
19



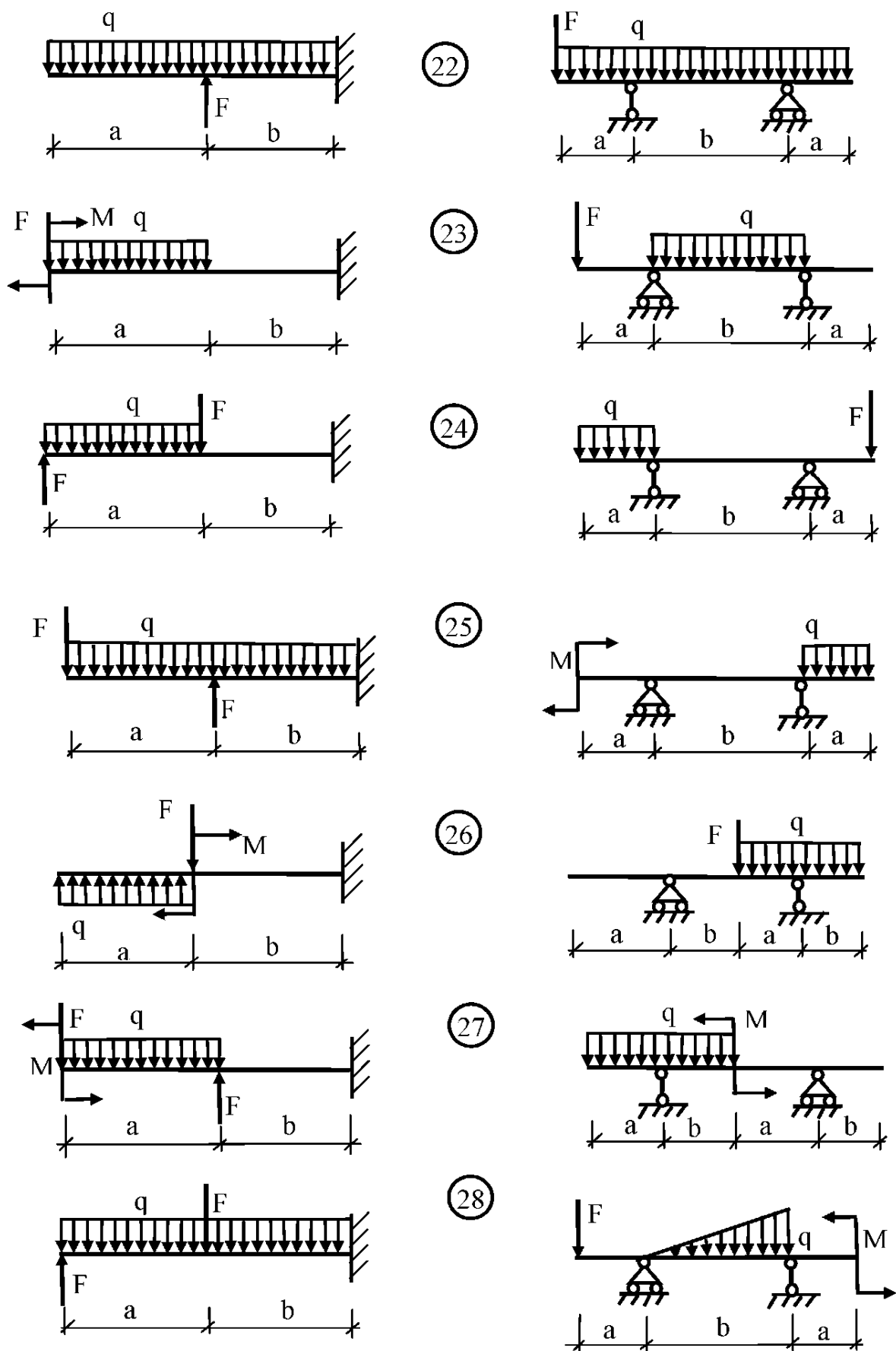
20



21



Продолжение рис. 5



Окончание рис. 5

Таблица 11

№ строки	Нагрузки и геометрические размеры балок				
	F, кН	M, кН·м	q, кН/м	a, м	b, м
1	20	– 40	8	1,5	2,1
2	30	20	– 9	1,6	2,2
3	40	30	10	1,7	2,3
4	– 50	25	11	1,8	2,4
5	60	35	12	1,6	2,5
6	– 75	20	17	1,5	2,6
7	35	45	16	2,0	2,7
8	55	– 22	15	2,3	2,2
9	65	10	– 14	1,5	2,0
10	70	23	13	1,6	1,8

Таблица 12

№ варианта	Группа 201		Группа 202		Группа 203		Группа 204	
	№ схемы рис.5	№ стр. в табл.11	№ схемы рис.5	№ стр.в табл.11	№ схемы рис.5	№ стр.в табл.11	№ схемы рис.5	№ стр.в табл.11
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	28	4	14	7	3	1
2	2	2	27	5	15	8	4	2
3	3	3	26	6	16	9	5	3
4	4	1	25	4	17	10	6	4
5	5	2	24	5	18	7	7	5
6	6	9	23	6	19	8	8	6
7	7	1	22	4	20	9	9	7
8	8	2	21	5	21	10	10	8
9	9	3	20	6	22	7	11	9
10	10	1	19	4	23	8	12	10
11	11	2	18	5	24	9	13	1
12	12	3	17	6	25	10	14	2
13	13	1	16	4	26	7	15	3
14	14	2	15	5	27	8	16	4
15	15	3	14	6	28	9	17	5
16	16	1	13	4	1	10	18	6
17	17	2	12	5	2	7	19	7
18	18	3	11	6	3	8	20	8
19	19	1	10	4	4	9	21	9
20	20	2	9	5	5	10	22	10

1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	21	3	8	6	6	7	23	1
22	22	1	7	4	7	8	24	2
23	23	2	6	5	8	9	25	3
24	24	3	5	6	9	10	26	4
25	25	4	4	7	10	7	27	5
26	26	1	3	4	11	8	28	6
27	18	4	24	6	4	9	1	7
28	13	2	12	7	16	10	2	8
29	17	3	20	5	7	7	3	9
30	21	8	10	3	8	3	4	10
31	20	5	6	4	6	3	5	1

ЗАДАЧА № 7

Для балки, испытывающей косой изгиб, требуется: 1) подобрать от расчетных нагрузок сечение балки, если на нее действуют нагрузки F , M и q (рис. 6), приняв сосредоточенную силу и изгибающий момент постоянными нагрузками ($k_n = 1,1$), распределенную нагрузку – временной ($k_b = 1,2$), коэффициент условной работы $\gamma_c = 0,9$; 2) определить полный прогиб балки от нормативных нагрузок (шарнирно опертой – в середине пролета АВ, консольной – на свободном конце); 3) построить эпюры нормальных напряжений от расчетных нагрузок для наиболее напряженного сечения. Исходные данные взять из табл. 13.

Примечание. Приведенная в табл. 14 сосредоточенная сила относится только к схеме 2 (рис. 6).

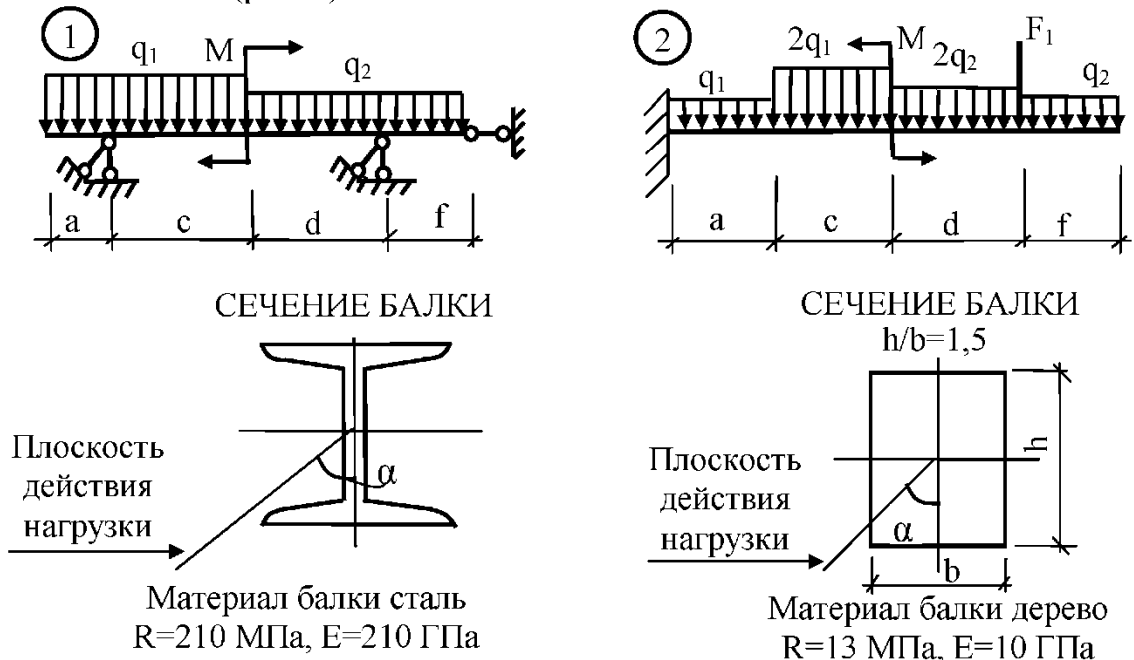


Рис. 6

Таблица 13

№ вари- анта	№ схемы на рис. 6		№ стр. в табл. 14		Угол на- клона на- грузки, град.		№ схемы на рис. 7		№ стр. в табл. 15	
	Группа									
	201	202	201	202	201	202	201	202	201	202
1	1	2	1	5	10	30	1	1	1	3
2	2	1	2	6	15	40	2	3	2	9
3	1	2	3	7	20	50	3	5	3	10
4	2	1	4	8	25	60	4	7	3	6
5	1	2	5	9	30	70	5	8	2	5
6	2	1	6	10	35	80	6	2	1	10
7	1	2	7	1	40	20	7	4	3	8
8	2	1	8	2	46	40	8	6	2	9
9	1	2	9	3	59	45	8	8	4	10
10	2	1	10	4	55	25	7	1	1	9
11	1	2	2	5	60	35	6	3	2	8
12	2	1	3	5	65	45	5	6	3	10
13	1	2	4	6	70	55	4	7	2	10
14	2	1	5	7	75	65	3	2	1	8
15	1	2	6	8	80	75	2	4	3	10
16	2	1	7	9	75	80	1	6	2	8
17	1	2	8	10	70	35	8	8	1	8
18	2	1	9	5	65	80	5	3	1	10
19	1	2	10	4	60	35	4	5	3	9
20	2	1	1	3	55	40	3	1	2	10
21	1	2	7	2	50	50	2	7	1	9
22	2	1	9	1	45	60	1	5	3	8
23	1	2	8	1	40	70	2	2	1	9
24	2	2	7	2	35	80	3	4	2	9
25	1	2	6	3	30	30	4	7	1	7
26	2	1	6	4	25	40	5	8	3	6
27	1	2	4	5	20	50	6	3	3	9
28	2	1	3	6	15	60	7	4	2	5
29	1	2	2	7	10	70	8	5	3	4
30	2	1	1	8	85	80	1	6	8	3
31	1	2	2	9	75	10	2	7	4	2
32	2	1	4	10	15	20	3	8	5	1

№ вари- анта	№ схемы на рис. 6		№ стр. в табл. 14		Угол на- клона на- грузки, град.		№ схемы на рис. 7		№ стр. в табл. 15	
	Группа									
	203	204	203	204	203	204	203	204	203	204
1	2	1	10	10	60	20	2	1	4	10
2	2	2	9	8	75	83	8	2	5	8
3	1	1	8	9	65	77	7	3	6	9
4	2	2	7	6	55	66	6	4	7	7
5	2	1	6	5	45	55	5	6	4	6
6	1	2	5	7	35	43	4	7	5	5
7	2	1	8	8	25	47	3	8	6	4
8	2	2	3	4	10	70	1	8	4	2
9	2	1	2	2	40	30	2	7	6	1
10	1	2	1	1	50	38	2	6	5	1
11	2	1	2	2	60	53	3	5	7	2
12	1	2	2	2	70	12	4	3	7	3
13	2	1	3	3	80	23	5	4	5	4
14	1	2	4	4	20	33	6	2	5	5
15	2	1	5	5	10	56	6	3	6	6
16	2	2	6	3	15	63	8	1	7	7
17	2	1	8	6	40	71	8	3	4	8
18	1	2	9	9	30	84	1	6	5	9
19	2	1	1	1	20	62	1	7	6	10
20	1	2	3	3	60	48	2	5	7	1
21	2	1	4	4	70	37	3	4	4	2
22	1	2	5	5	80	27	4	2	6	3
23	2	1	6	6	70	25	5	3	6	4
24	2	2	7	8	60	15	6	5	7	5
25	2	1	8	8	40	12	7	4	4	6
26	1	2	9	9	30	20	8	4	6	7
27	2	1	10	10	20	30	8	5	8	8
28	1	2	4	4	25	40	1	3	7	9
29	2	1	5	5	35	50	2	4	4	10
30	1	2	6	6	45	60	3	5	5	1
31	2	1	7	7	65	70	4	6	6	2
32	1	2	8	8	75	80	5	7	6	3

Таблица 14

№ строки	Нормативные нагрузки				Геометрические размеры балки			
	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	F , кН	M , кН·м	a , м	c , м	d , м	f , м
1	28	0	0	0	0	2,0	0	2
2	18	0	0	0	2,5	0	2	0
3	25	13	0	0	2,0	2,0	1	0
4	0	15	0	0	2,4	0	2	0
5	0	10	0	0	0	2,0	3	1
6	0	0	0	15	0	2,0	0	3
7	0	0	20	28	0	2,3	3	0
8	0	0	30	20	2,0	0	4	0
9	0	0	10	30	1,8	3,2	0	0
10	0	0	0	25	0	3,0	0	2

ЗАДАЧА № 8

Для внецентренно сжатой короткой колонны с поперечным сечением, представленным на рис. 7, требуется: 1) определить величину расчетной сжимающей силы F , если расчетное сопротивление для материала колонны $R = 210$ МПа, а коэффициент условия работы колонны $\gamma_c = 0,9$; 2) определить положение нулевой линии; 3) построить от действия расчетной силы F эпюру нормальных напряжений для поперечного сечения колонны; 4) построить ядро сечения.

Исходные данные взять из табл. 13.

Примечание. Из табл. 15 следует взять только те элементы, составляющие заданное сечение, которые входят в схему (рис. 7).

Таблица 15

№ строки	№ швеллера	№ двутавра	Уголок, мм	t , см	k , см
1	16	40	90x90x8	10	10
2	18	36	100x100x10	15	7
3	20	33	125x125x10	0	15
4	22	30	70x70x6	5	10
5	24	27	63x63x6	8	12
6	27	24	56x56x5	14	6
7	30	22	75x75x7	20	0
8	33	20	80x80x7	7	10
9	36	18	50x50x5	12	8
10	40	16	110x110x8	6	13

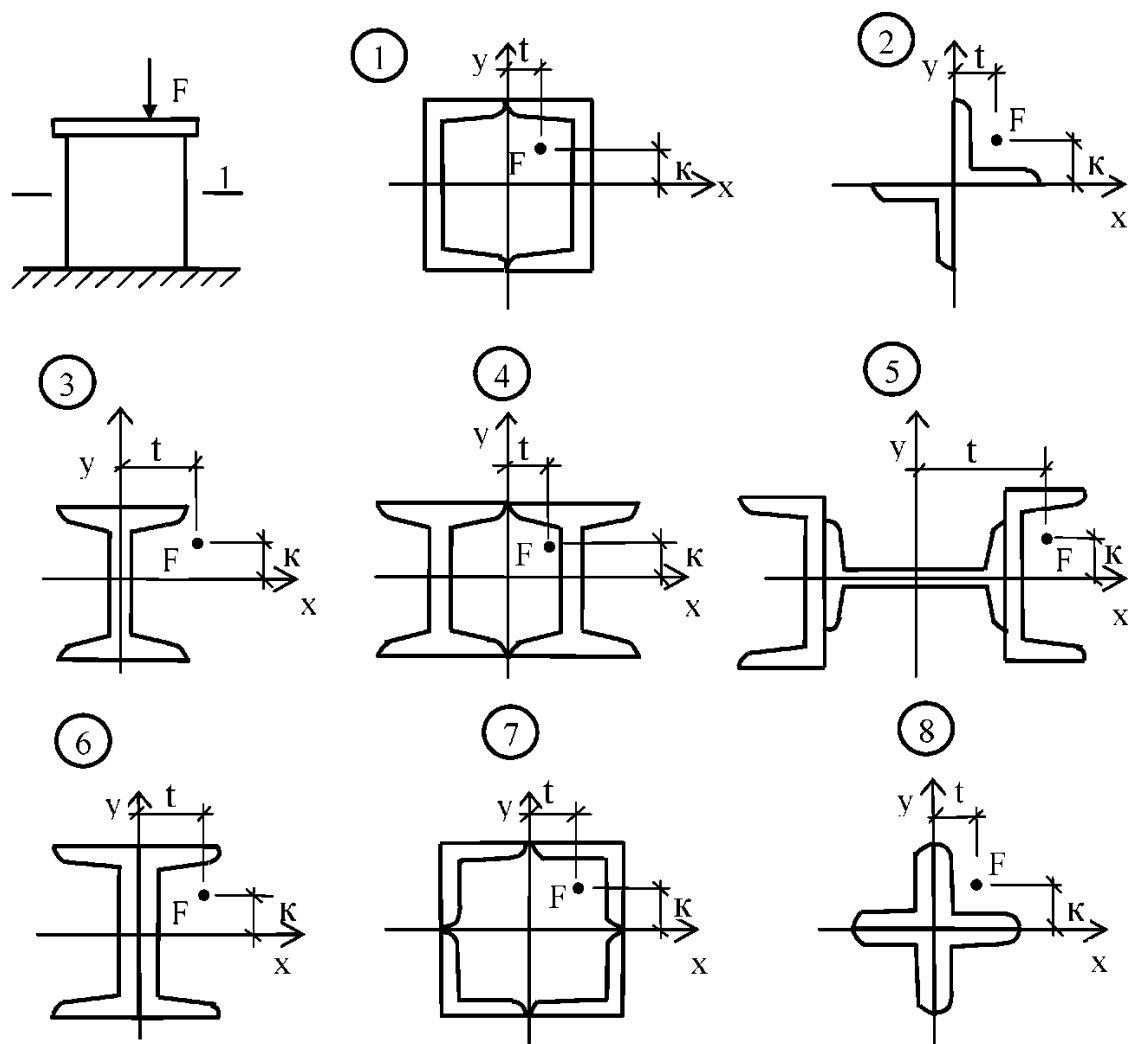


Рис. 7

ЗАДАЧА № 9

Для стальной стойки (рис. 8), нагруженной продольной (нормативной) силой, проходящей через центр тяжести поперечного сечения, требуется: 1) определить величину расчетной сжимающей силы, если коэффициент перегрузки $K_{\text{п}} = 1,2$; 2) подобрать сечение стойки (рис.9) и проверить устойчивость стойки; 3) определить критическую силу и установить коэффициент запаса по отношению к нормативной силе. Материал стержней Ст3 с расчетным сопротивлением $R = 21 \text{ кН/см}^2$ и модулем упругости $E = 210 \text{ ГПа}$.

Примечание.

Нормативная сила и высота стойки даны в табл. 16, откуда следует взять только те значения, которые необходимы для заданной стойки (рис. 8).

Исходные данные взять из табл. 17.

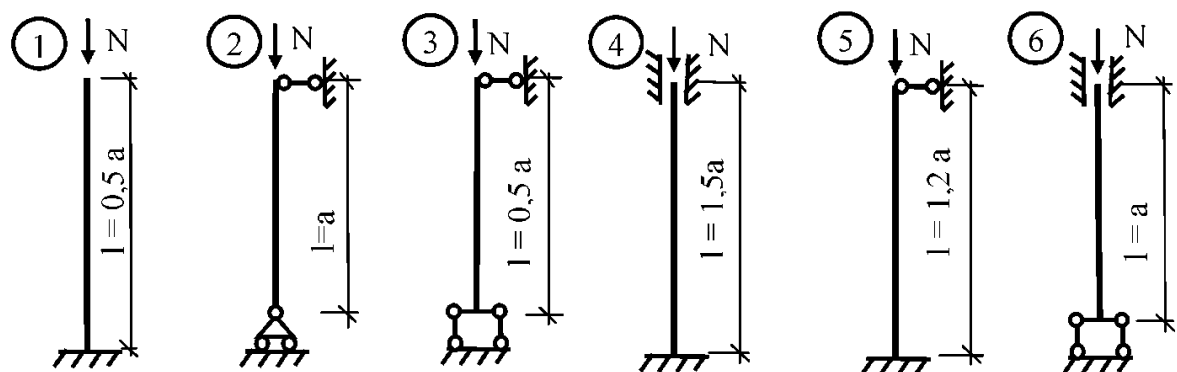


Рис. 8

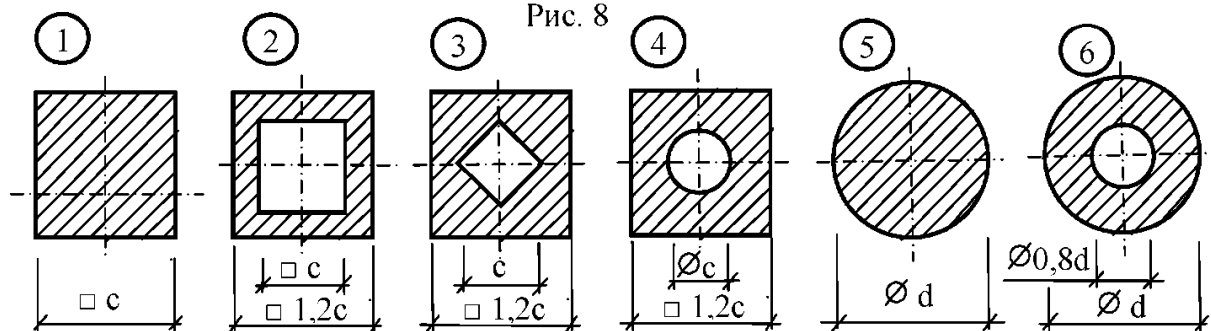


Рис. 9

Таблица 16

№ строки	N, кН	q, кН/м	F, кН	a, м
1	300	10	10	5,0
2	350	15	20	5,1
3	400	12	30	5,2
4	450	17	40	5,3
5	500	11	15	5,4
6	550	16	10	5,5
7	600	14	30	5,6
8	200	40	30	5,7
9	230	20	15	5,8
10	280	22	20	5,9
11	330	18	15	6,0
12	380	20	25	6,1
13	430	25	35	6,2
14	480	19	13	6,3
15	530	22	25	6,4
16	590	12	22	4,5
17	250	15	36	4,6

18	340	25	35	4,7
19	470	10	22	4,8
20	560	30	17	4,5

Таблица 17

№ варианта	№ строки в табл. 16				№ схемы на рис. 8, 10				№ сечения на рис. 9, 12			
	Группа											
	201	202	203	204	201	202	203	204	201	202	203	204
1	1	20	6	10	1	5	4	1	1	5	4	3
2	2	19	7	11	2	4	5	2	3	1	5	4
3	3	18	8	12	3	1	6	3	5	1	6	5
4	4	17	9	13	4	2	1	4	1	2	1	6
5	5	16	10	14	5	3	2	5	4	3	2	1
6	6	15	11	15	6	4	3	6	5	4	3	2
7	7	14	12	16	1	5	4	2	2	5	4	3
8	8	13	11	17	2	6	5	3	4	6	5	4
9	9	12	13	18	3	1	6	4	6	1	6	5
10	10	11	14	19	4	2	1	5	2	2	1	5
11	11	10	15	20	5	3	2	6	4	3	2	6
12	12	9	16	19	6	4	3	1	5	4	3	1
13	13	8	17	18	1	5	4	3	2	5	4	2
14	14	7	18	17	2	6	5	3	4	6	5	3
15	15	6	19	16	3	1	6	5	6	1	6	4
16	16	5	20	15	4	2	1	6	1	2	1	4
17	17	4	1	14	5	3	2	1	3	3	2	5
18	18	3	2	13	6	4	3	2	5	4	3	3
19	19	2	3	12	1	5	4	4	4	5	4	4
20	20	1	4	11	2	6	5	6	5	6	5	5
21	1	2	5	10	3	1	6	1	2	1	6	1
22	2	3	6	9	4	2	1	2	3	2	1	2
23	3	4	7	8	5	3	2	3	6	3	2	3
24	4	5	8	7	6	4	3	4	2	4	3	4
25	5	6	9	6	1	5	4	5	3	5	4	5
26	6	7	10	5	2	6	5	6	6	6	5	6
27	7	8	11	4	3	1	6	1	1	1	6	1
28	8	9	12	3	4	2	1	2	3	2	1	2
29	9	10	13	2	5	3	2	3	5	3	2	3
30	10	11	14	1	6	4	3	4	1	4	3	5
31	11	12	15	2	1	5	4	5	3	5	4	6
32	12	13	16	3	2	6	5	6	2	6	5	4
33	13	14	17	4	3	1	6	1	1	1	6	3

ЗАДАЧА № 10

Стойка нагружена вертикальной осевой силой N и горизонтальной поперечной нагрузкой согласно схеме (рис. 10). Опорные закрепления стойки показаны на том же рисунке. В каждой трети высоты стойки имеются шарнирные связи, препятствующие перемещению этих точек из плоскости конструкции (рис. 11).

Для заданной стойки требуется: 1) определить расчетные нагрузки, при этом считать, что для вертикальной нагрузки коэффициент перегрузки $K_B = 1,2$, а для горизонтальной — $K_B = 1,3$; 2) подобрать из условия прочности сечение стойки из стального двутавра или двух рядом стоящих швеллеров (рис. 12), при этом считать, что расстояние между швеллерами равно нулю и они жестко связаны между собой, проверить выбранное сечение на прочность и устойчивость в плоскости действия нагрузки; 3) проверить стойку на устойчивость в плоскости, перпендикулярной плоскости действия поперечной нагрузки (расчетная схема для этого случая представлена на рис. 11 (материал стойки Ст3 с расчетным сопротивлением $R = 21 \text{ кН/см}^2$ и модулем упругости $E = 210 \text{ ГПа}$).

Исходные данные взять из табл. 17.

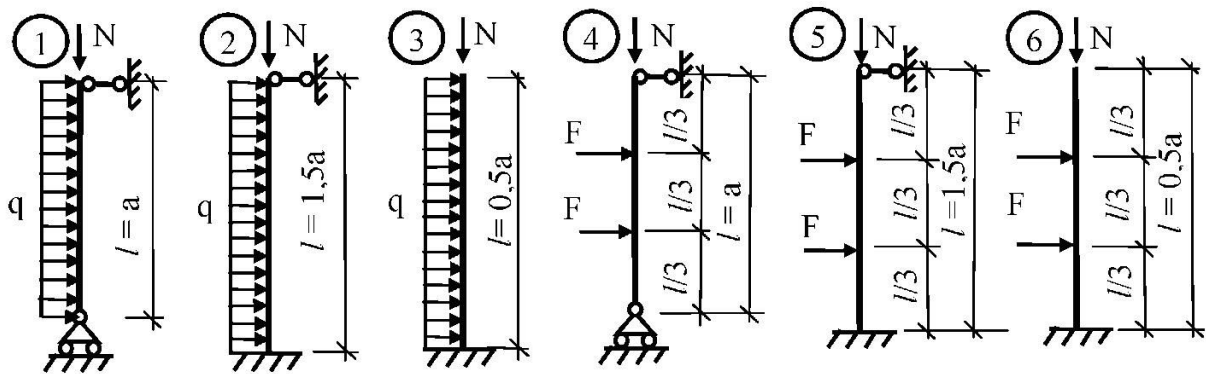


Рис. 10

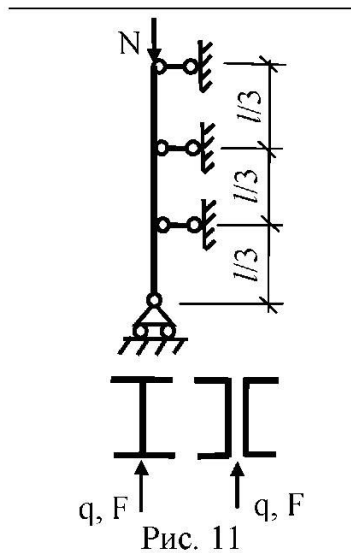


Рис. 11

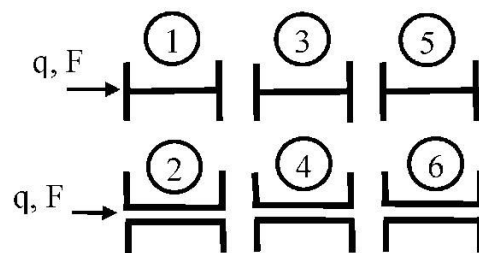


Рис. 12

ЗАДАЧА № 11

Произвести расчет трубы с внутренним радиусом r_v , наружным r_n , подвергнутой внутреннему давлению P_v и наружному P_n (рис. 13). Модуль упругости и коэффициент Пуассона E и μ . Требуется: 1) определить нормальные напряжения в трубе; 2) проверить прочность по теории небольших касательных напряжений (третья теория прочности) при допуске напряжении $[\sigma]$, в случае большого запаса прочности или перенапряжения изменить наружный диаметр трубы и расчет повторить; 3) построить эпюру нормальных напряжений; 4) определить увеличение (уменьшение) внутреннего и наружного радиусов трубы от действия давлений. Исходные данные взять из табл. 18.

Примечание. Нагрузки, имеющие знак минус (рис. 13), следует направить в противоположную сторону.

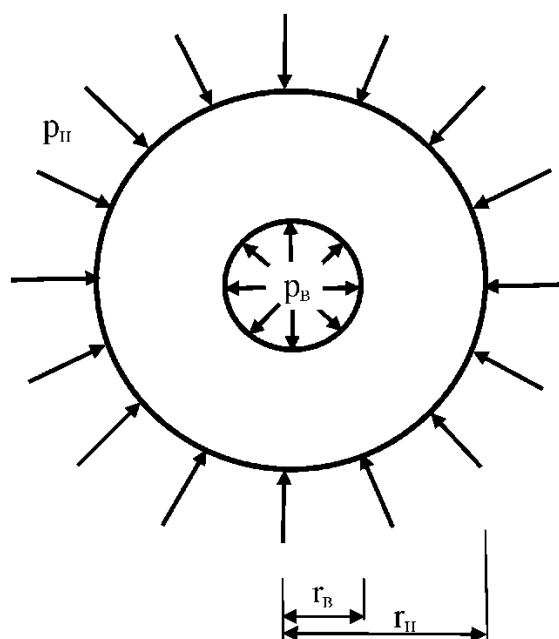


Рис. 13

Таблица 18

№ варианта	Группа 301		Группа 302		Группа 303		Группа 304	
	№ строки табл. 19	№ строки табл. 20	№ строки табл. 19	№ строки табл. 20	№ строки табл. 19	№ строки табл. 20	№ строки табл. 19	№ строки табл. 20
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	12	1	5	3	2	6
2	2	2	11	2	6	5	3	6

3	3	3	10	3	7	4	4	6
4	4	4	9	5	8	2	5	6

Продолжение табл. 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	5	5	8	4	9	1	6	5
6	6	1	7	1	10	1	7	1
7	7	2	6	2	11	5	8	6
8	8	3	5	4	12	4	9	6
9	9	4	4	1	13	4	10	6
10	10	5	3	2	4	5	11	6
11	11	1	2	3	3	5	12	6
12	12	2	1	5	2	4	13	6
13	13	3	2	4	1	3	12	2
14	1	4	3	4	2	1	11	4
15	2	5	4	3	13	1	10	5
16	3	1	5	1	4	5	9	2
17	4	2	6	3	5	2	8	3
18	5	3	7	3	6	6	7	2
19	6	4	8	5	7	6	6	1
20	7	5	9	3	8	6	5	4
21	8	1	10	4	9	6	4	1
22	9	2	11	3	12	6	3	5
23	10	3	12	3	11	6	2	3
24	11	4	13	5	9	2	1	6
25	12	5	1	2	10	6	2	3

Таблица 19

№ строки	r_B , см	r_H , см	P_B , МПа	P_H , МПа
1	10	20	40	0
2	20	30	0	70
3	15	20	-35	6
4	7	9	10	60
5	40	55	20	0
6	15	23	50	10
7	25	32	5	-40
8	45	55	30	7
9	35	45	0	60
10	30	38	-55	0
11	22	30	35	15

Таблица 20

12	27	39	4	30
13	32	43	20	65

№ строки	$[\sigma]$, МПа	E , МПа	μ
1	140	$2 \cdot 10^4$	0,35
2	100	$1,8 \cdot 10^4$	0,33
3	160	$2,2 \cdot 10^4$	0,32
4	130	$1,5 \cdot 10^4$	0,30
5	110	$1,2 \cdot 10^4$	0,28
6	170	$2,7 \cdot 10^4$	0,25

3 ЗАДАЧА № 12

Для тонкостенного стержня, схема нагружения и тип сечения которого показаны на рис. 14 и 15, требуется: 1) определить положение центра тяжести и главных центральных осей инерции сечения; 2) вычислить моменты инерции сечения относительно этих осей; 3) определить координаты центра изгиба; 4) определить положение главной секториальной нулевой точки; 5) вычислить главный секториальный момент инерции сечения, момент чистого кручения и изгибно-крутильную характеристику; 6) для заданного сечения, расположенного на расстоянии l_n от конца балки, вычислить изгибно-крутящий бимомент B , изгибно-крутящий момент M_{ω} , момент чистого кручения M_k , изгибающий момент M и поперечную силу Q ; 7) для этого сечения построить эпюру секториальных нормальных напряжений; 8) определить суммарные нормальные и касательные напряжения в точке K принятого сечения.

Исходные данные взять из табл. 21.

Примечания.

1. На рис. 14 величина d – расстояние от плоскости действия сил до центральной оси стержня. 2. Из табл. 22 следует взять только ту нагрузку, которая входит в заданную схему (рис. 14).

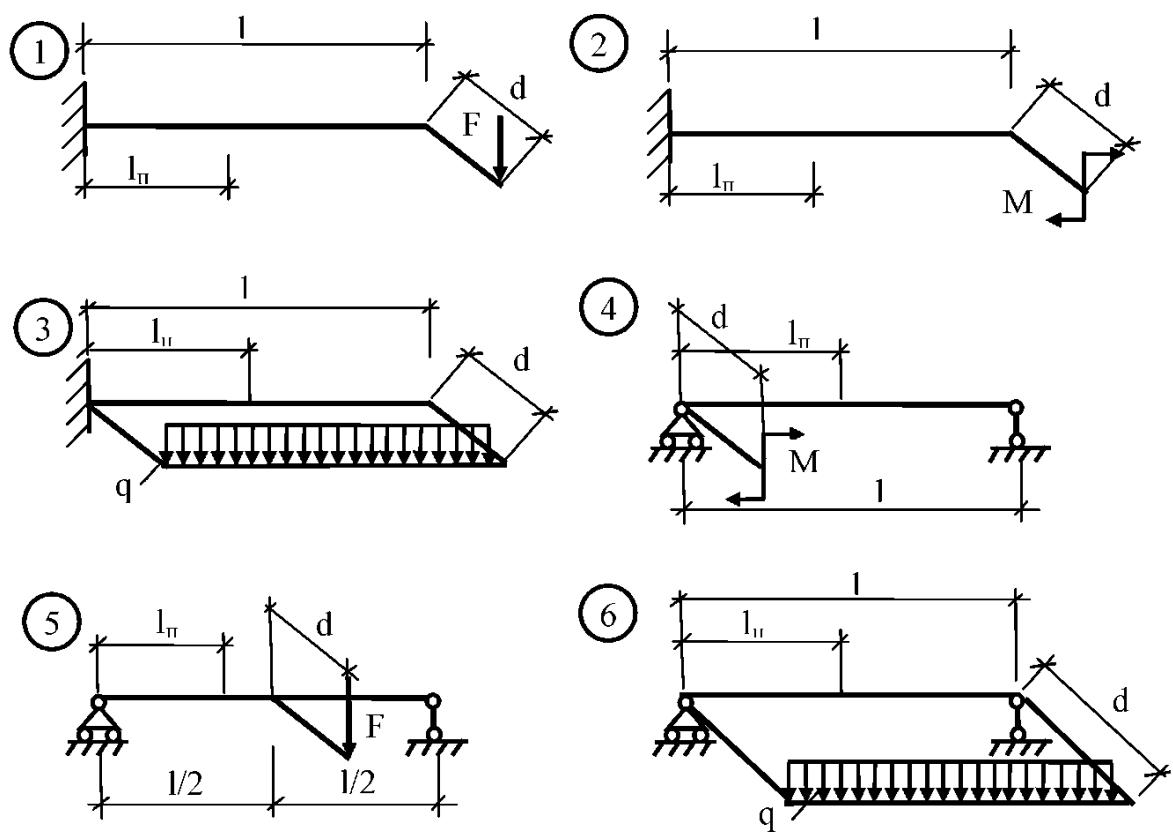


Рис. 14

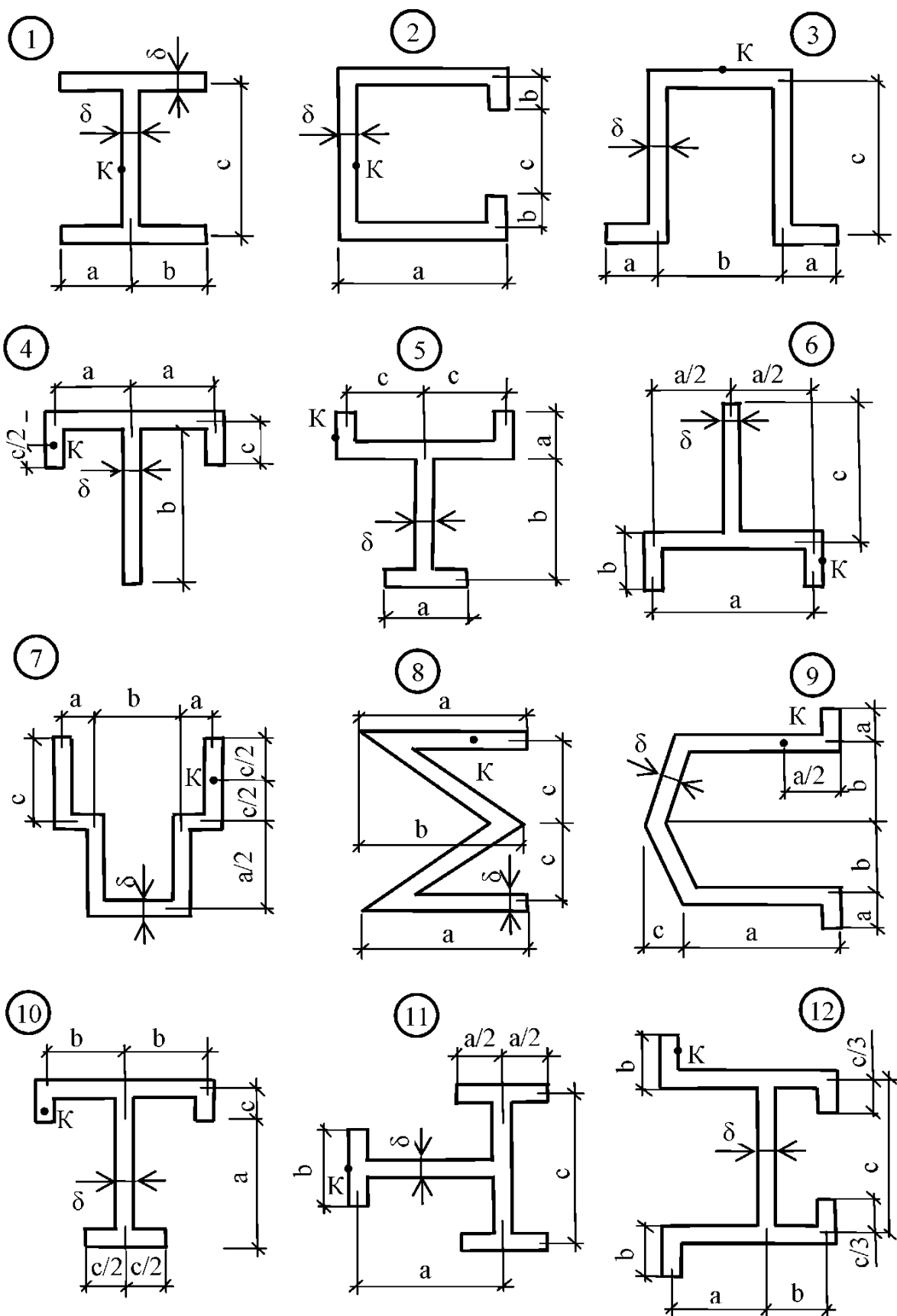


Рис. 15

Таблица 21

№ варианта	№ схемы на рис. 14				№ типа сечения на рис. 15				№ строки в табл. 22			
	Группа											
	301	302	303	304	301	302	303	304	301	302	303	304
1	1	1	1	6	1	12	6	5	1	4	8	7
2	2	3	2	5	2	11	7	6	2	5	9	1
3	3	5	3	4	3	10	8	7	3	6	10	2
4	4	6	4	3	4	9	9	8	1	4	8	3
5	5	2	5	2	5	8	10	9	2	5	9	4
6	6	3	6	1	6	7	11	10	3	6	10	5
7	1	4	1	6	7	6	12	11	1	4	8	6
8	2	5	2	5	8	5	1	12	2	5	9	7
9	3	1	3	4	9	4	2	1	3	6	10	8
10	4	2	4	3	10	3	3	2	1	4	9	9
11	5	3	5	2	11	2	4	3	2	5	7	10
12	6	4	6	1	12	1	5	4	3	6	8	1
13	2	5	1	3	1	12	6	5	1	4	9	2
14	3	6	2	4	2	11	7	6	2	5	10	3
15	4	1	3	5	3	10	8	7	3	6	7	4
16	5	2	4	6	4	9	9	8	1	4	8	5
17	6	3	5	1	5	8	10	9	2	5	9	6
18	1	4	6	2	6	7	11	10	3	6	10	7
19	2	5	1	3	7	6	12	11	1	4	8	9
20	3	6	2	4	8	5	1	12	2	5	9	8
21	4	1	3	5	9	4	2	1	3	6	10	11
22	5	2	4	6	10	3	3	2	1	4	8	10
23	6	3	5	1	11	2	4	3	2	5	9	1
24	1	4	6	2	12	1	5	4	3	6	10	3
25	2	5	1	3	1	12	6	5	1	4	8	4
26	3	6	2	4	2	11	7	6	2	5	9	5
27	5	1	3	5	3	10	8	7	3	6	10	6
28	6	2	4	6	4	9	9	8	1	4	8	7
29	1	3	5	1	5	8	10	9	2	5	9	8
30	2	4	6	2	6	7	11	10	3	6	10	9
31	3	5	1	3	7	6	12	11	1	4	8	10
32	4	6	2	4	8	5	1	12	2	5	9	1
33	5	1	3	5	9	4	2	1	3	6	10	2

Таблица 22

№ строки	Размеры сечения, см				Расчетные нагрузки			Длина, м		
	a	b	c	δ	F, кН	q, кН/м	M, кН·м	l	l_{II}	d
1	10	20	18	1,0	40	20	30	1,8	0,8	0,15
2	20	16	26	1,2	30	32	22	2,0	0,9	0,20
3	26	24	16	1,4	40	24	24	1,9	0,5	0,20
4	22	10	14	0,8	50	26	26	2,2	0,6	0,10
5	24	12	20	1,0	25	28	28	2,4	0,7	0,13
6	26	18	22	1,6	75	20	30	2,3	0,8	0,20
7	16	26	24	1,8	45	21	39	2,5	1,0	0,22
8	18	28	12	2,0	55	22	21	2,6	1,3	0,24
9	28	22	16	1,8	58	23	34	2,7	1,1	0,17
10	30	14	18	1,2	67	24	36	2,8	1,9	0,19

ЗАДАЧА № 13

Для ломаного бруса, зашпеленного одним концом (рис. 16), требуется:

1) по заданной расчетной нагрузке (табл. 23) построить (в аксонометрии) эпюры всех силовых факторов (M , Q , N); 2) определить положение наиболее напряженных точек в опасном сечении ломаного бруса квадратного сечения; 3) подобрать размеры поперечного сечения бруса на наиболее опасном участке, используя условие прочности по гипотезе наибольших касательных напряжений. Расчетное сопротивление $R=210$ МПа.

Исходные данные взять из табл. 24.

Примечания. 1) Из табл. 23 взять только те нагрузки, которые входят в заданную схему. 2) Нагрузки, имеющие знак минус, следует направить в обратном направлении и в дальнейшем считать положительными.

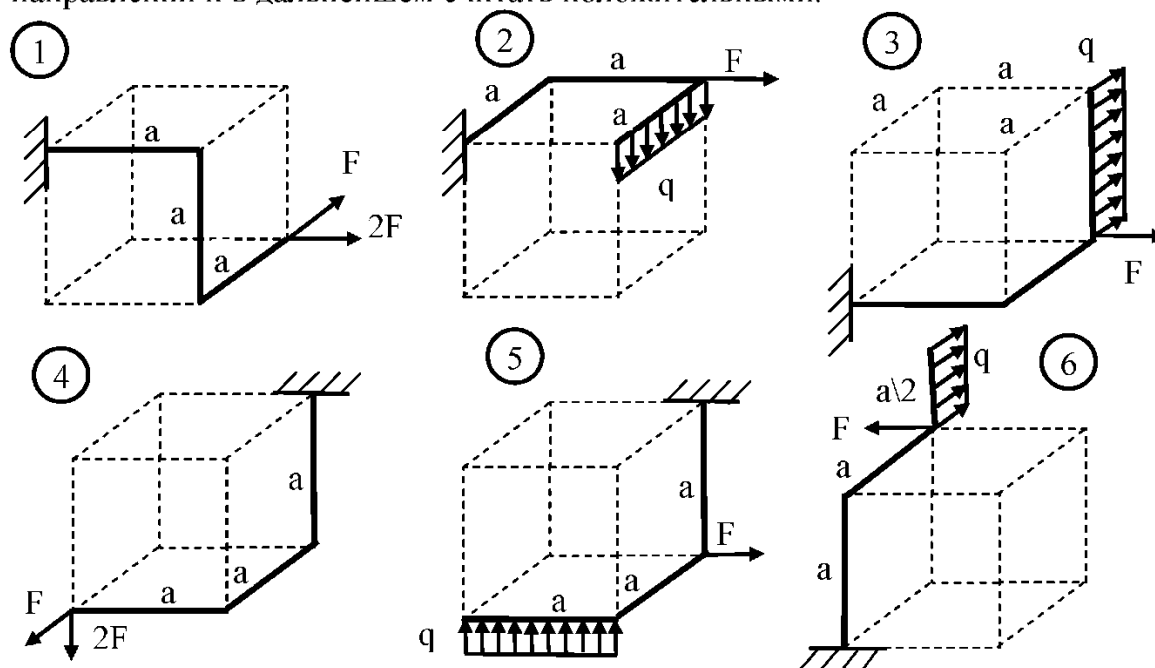
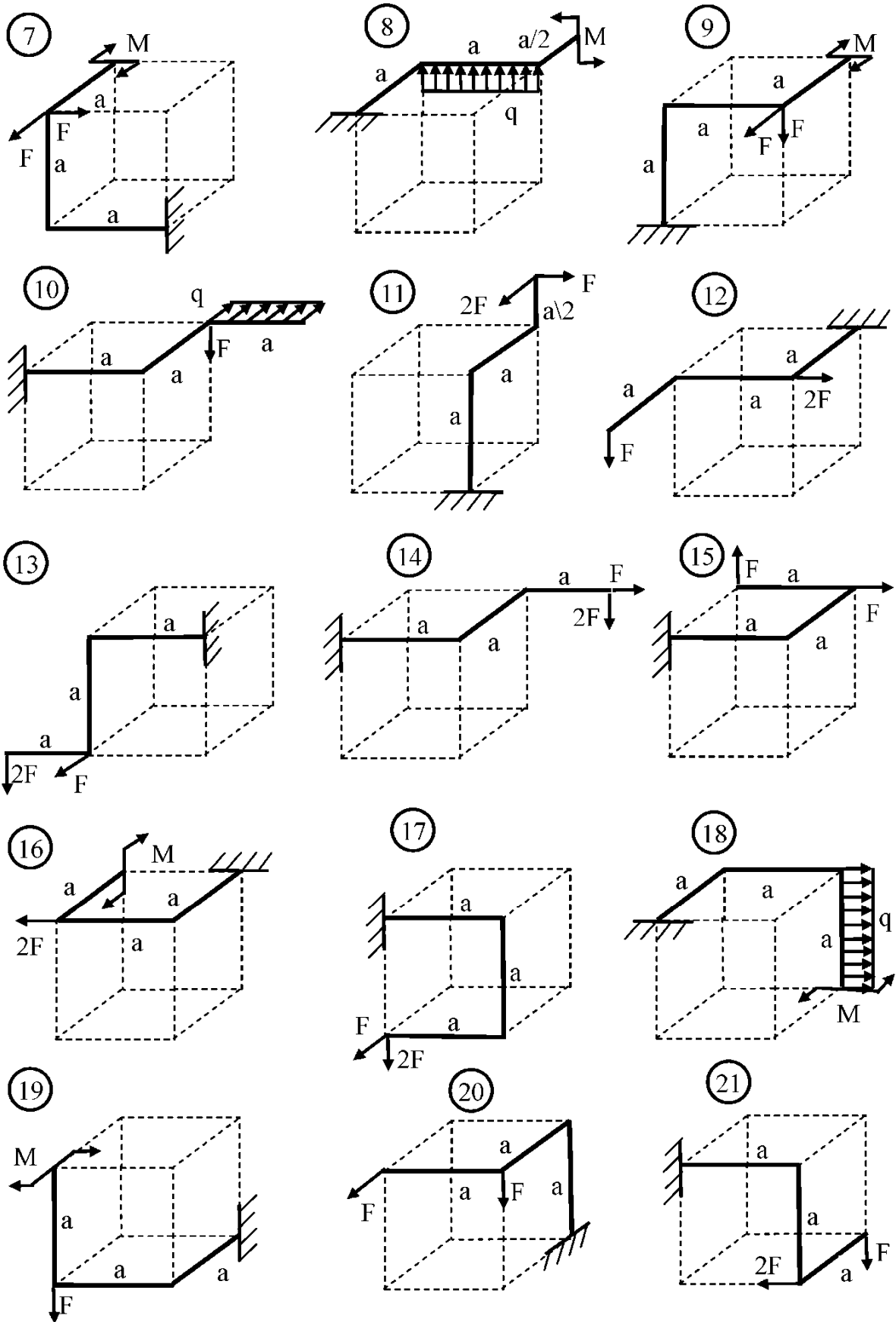
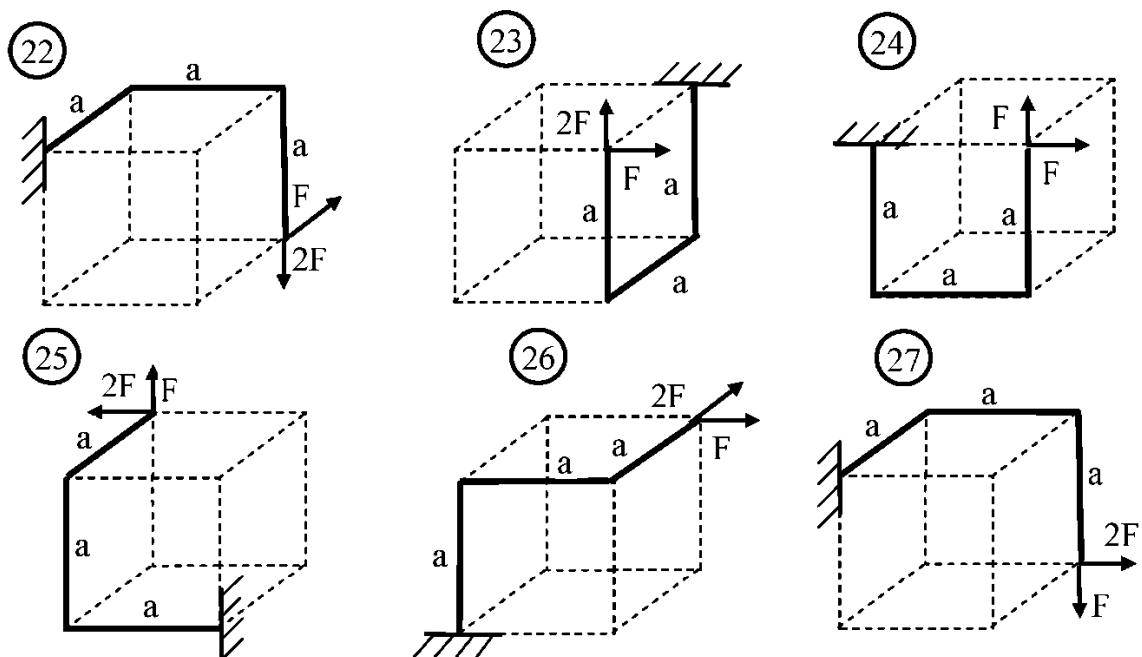


Рис. 16



Продолжение рис. 16



Окончание рис. 16

Таблица 23

№ стр.	a , м	q , кН/м	F , кН	M , кН·м
1	0,5	0,2	-0,4	1,2
2	0,6	0,3	0,5	0,5
3	0,7	0,5	0,6	0,6
4	0,8	0,6	0,7	1,0
5	0,9	0,7	0,8	1,2
6	0,7	0,8	0,9	1,3
7	1,1	0,9	-1,0	1,4
8	1,2	1,0	1,1	1,5
9	1,3	1,1	1,2	1,6
10	1,4	1,2	1,3	1,7
11	1,5	1,5	-1,0	1,8
12	1,0	1,2	2,0	1,9
13	1,3	-2,0	1,0	2,0
14	0,7	1,6	1,3	0,7
15	0,6	1,7	1,2	0,6
16	0,9	1,3	2,5	0,9
17	1,3	1,9	0,9	-0,3
18	1,6	2,5	1,5	1,4
19	1,7	1,3	2,1	1,2
20	1,8	1,5	2,0	1,1

Таблица 24

№ варианта	Группа 201		Группа 202		Группа 203		Группа 204	
	№ схемы рис. 16	№ стр. в табл. 23	№ схемы рис. 16	№ стр. в табл. 23	№ схемы рис. 16	№ стр. в табл. 23	№ схемы рис. 16	№ стр. в табл. 23
1	1	1	2	3	3	7	4	9
2	2	2	3	4	4	8	5	10
3	3	3	4	5	5	9	6	11
4	4	4	5	6	6	10	7	12
5	5	5	6	7	7	11	8	13
6	6	6	7	8	8	12	9	14
7	7	7	8	9	9	13	10	15
8	8	8	9	10	10	14	11	16
9	9	9	10	11	11	15	12	17
10	10	10	11	12	12	16	13	18
11	11	11	12	13	13	17	14	19
12	12	12	13	14	14	18	15	20
13	13	13	14	15	15	19	16	7
14	14	14	15	16	16	20	17	8
15	15	15	16	17	17	5	18	6
16	16	16	17	18	18	6	19	5
17	17	17	18	19	19	7	20	4
18	18	18	19	20	20	8	21	3
19	19	19	20	1	21	9	22	2
20	20	20	21	2	22	10	23	1
21	21	1	22	3	23	11	24	4
22	22	2	23	4	24	12	25	5
23	23	3	24	5	25	13	26	6
24	24	4	25	6	26	14	27	7
25	25	5	26	7	27	15	24	8
26	26	6	27	8	3	16	23	9
27	27	7	2	9	4	17	22	10
28	1	8	3	10	5	18	21	11
29	2	9	4	11	6	19	20	12
30	3	10	5	12	7	20	11	13

ГЛАВА 2. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ.

ЗАДАЧА 1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ, НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

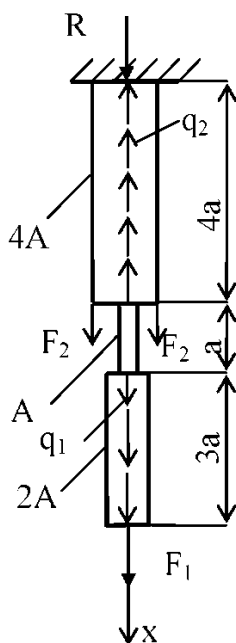


Рис. 1

При действии на тело внешних нагрузок в нем возникают внутренние силы, для определения которых применяется метод сечений. Изучаемый стержень мысленно разрезается плоскостью на две части. Предполагается, что каждая из них будет находиться в равновесии под действием внешних нагрузок и внутренних сил, возникающих в сечении. Равнодействующая внутренних сил в сечении называется усилием, а величина внутренней силы, приходящейся на единицу площади сечения, - напряжением в данной точке сечения. Если внешние нагрузки и все реакции (опорные) в связях стержня известны, то внутренние усилия определяются из уравнений равновесия. При растяжении стержня внутреннее усилие направлено от сечения и считается положительным. Рассмотрим пример определения внутренних усилий, напряжений и перемещений сечений в стержне с построением их эпюр.

При построении окончательных эпюр внутренних усилий, напряжений и перемещений вид с боку ступенчатого бруса по возможности изобразить длину и ширину участка в масштабе в соответствии с исходными данными, представив, что поперечные сечения участков имеют квадратную форму.

Пример. Для заданного бруса ступенчато-переменного сечения (рис.1) требуется: а) определить реактивную силу в опорном сечении; б) построить эпюру нормальных сил и эпюру нормальных напряжений; в) найти абсолютные удлинения (укорочения) участков бруса; г) вычислить абсолютное удлинение (укорочение) всего бруса и построить эпюру осевых перемещений.

Дано: $a = 1$ м; $F_1 = 70$ кН; $F_2 = 20$ кН; $q_1 = 80$ кН/м; $q_2 = 100$ кН/м; модуль упругости $E = 500$ кН/см²; площадь поперечного сечения $A = 100$ см².

Решение.

1. Определяем реактивное усилие в заделке. Для этого направляем опорную реакцию вдоль оси x (рис. 1) и составляем уравнение равновесия:

$$\sum x = 0; R + F_1 + q_1 \cdot 3a + 2F_2 - q_2 \cdot 4a = 0,$$

откуда $R = -70 - 80 \cdot 3 - 2 \cdot 20 + 100 \cdot 4 = 50$ кН.

Опорная реакция получилась положительной. Следовательно, действительное направление реакции совпадает с принятым.

2. Построим эпюры N и σ . Брус состоит из трех участков. Расчет начинаем со свободного нижнего конца.

Участок 1 ($0 \leq x_1 < 3$ м) (рис. 2а):

$$\sum x = 0; N_1 - 70 - 80x_1 = 0, N_1 = 70 + 80x_1.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad N_1 = 70 \text{ кН}; \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{70}{2 \cdot 100} = 0,35 \text{ кН/см}^2;$$

$$\text{при } x_1 = 3 \text{ м} \quad N_1 = 70 + 80 \cdot 3 = 310 \text{ кН}; \quad \sigma_1 = \frac{310}{200} = 1,55 \text{ кН/см}^2.$$

Участок 2 ($3 \leq x_2 \leq 4$ м) (рис. 2б):

$$\sum x = 0; N_2 - 70 - 80 \cdot 3 = 0; \quad N_2 = 310 \text{ кН}.$$

$$\text{При } x_2 = 3 \text{ м} \quad N_2 = 310 \text{ кН}; \quad \sigma_2 = \frac{310}{100} = 3,1 \text{ кН/см}^2;$$

$$\text{при } x_2 = 4 \text{ м} \quad N_2 = 310 \text{ кН}; \quad \sigma_2 = 3,1 \text{ кН/см}^2.$$

На этом участке продольные силы и напряжения постоянны.

Участок 3 ($4 \leq x_3 \leq 8$ м) (рис. 2в):

$$\sum x = 0; N_3 - 70 - 240 - 40 + 100 \cdot (x_3 - 4) = 0;$$

$$N_3 = 350 - 100 \cdot (x_3 - 4).$$

$$\text{При } x_3 = 4 \text{ м} \quad N_3 = 350 \text{ кН};$$

$$\sigma_3 = \frac{350}{4A} = \frac{350}{400} = 0,875 \text{ кН/см}^2;$$

$$\text{при } x_3 = 8 \text{ м} \quad N_3 = 350 - 400 = -50 \text{ кН};$$

$$\sigma_3 = -\frac{50}{400} = -0,125 \text{ кН/см}^2.$$

На этом участке продольная сила меняет знак. Найдем сечение x_3 , где продольная сила равна нулю: $N_3 = 350 - 100 \cdot (x_3 - 4) = 0$. Откуда $x_3 = 7,5$ м.

Значения N и σ , полученные при расчете, использованы для построения эпюр продольных сил и нормальных напряжений (рис. 3 а, б).

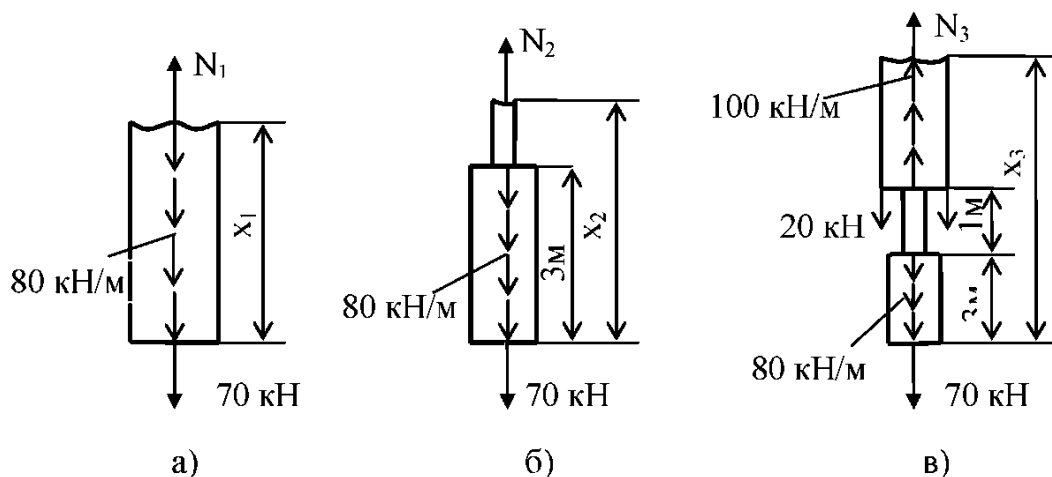


Рис. 2

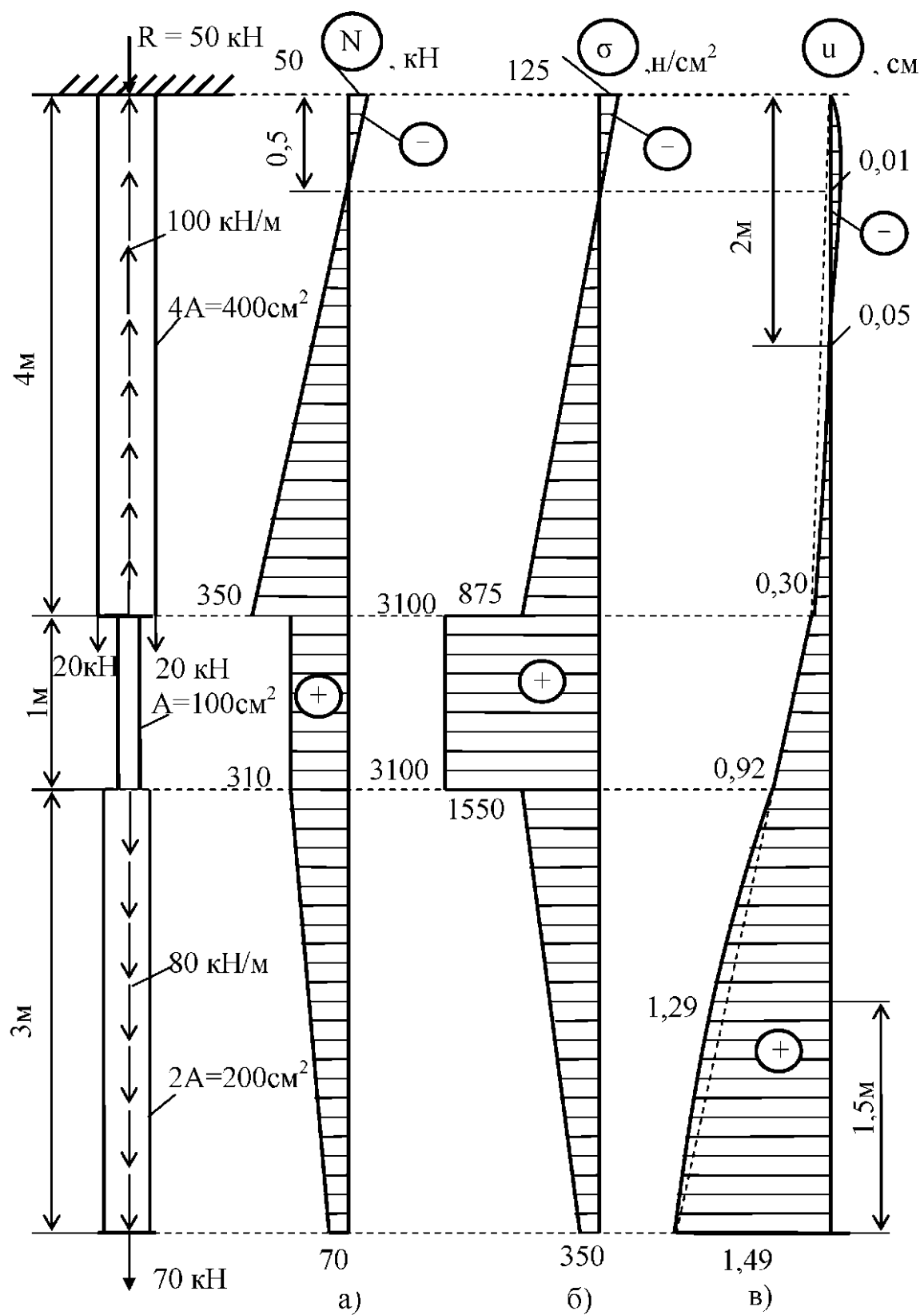


Рис. 3

3. Определим абсолютное удлинение (укорочение) бруса. Для нахождения абсолютных линейных деформаций воспользуемся формулой $\Delta \ell = \frac{\Omega_{\sigma}}{E}$, где Ω_{σ} – площадь эпюры σ на соответствующем участке бруса.

$$\text{Участок 1. } \Omega_{\sigma} = 300 \frac{0,350 + 1,550}{2} = 285 \text{ кН/см; } \Delta \ell_1 = \frac{285}{500} = 0,57 \text{ см.}$$

$$\text{Участок 2. } \Omega_{\sigma} = 3,1 \cdot 100 = 310 \text{ кН/см; } \Delta \ell_2 = \frac{310}{500} = 0,62 \text{ см.}$$

$$\text{Участок 3. } \Omega_{\sigma} = 400 \frac{0,875 - 0,125}{2} = 150 \text{ кН/см; } \Delta \ell_3 = \frac{150}{500} = 0,30 \text{ см.}$$

Абсолютное удлинение всего бруса равно сумме удлинений его участков: $\Delta \ell = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 + \Delta \ell_3 = 0,57 + 0,62 + 0,30 = 1,49 \text{ см.}$

4. Построим эпюру осевых перемещений u . Для этого определим перемещения в характерных сечениях.

$$\text{При } x=0; \quad u_0=0;$$

$$\text{при } x=4\text{м; } u_4 = \Delta \ell_3 = 0,30 \text{ см,}$$

$$\text{при } x=5\text{м; } u_5 = \Delta \ell_3 + \Delta \ell_2 = 0,30 + 0,62 = 0,92 \text{ см,}$$

$$\text{при } x=8\text{м; } u_8 = \Delta \ell_3 + \Delta \ell_2 + \Delta \ell_1 = 0,30 + 0,62 + 0,57 = 1,49 \text{ см.}$$

На участках с равномерно распределенной нагрузкой осевые перемещения изменяются по закону квадратной параболы. Для построения квадратных парабол необходимо вычислить их стрелы f , а также экстремальные значения перемещений, если они имеются. Для участка 3, примыкающего к заделке, получаем:

$$f_3 = \frac{q_2 \cdot \ell^2}{8E \cdot (4A)} = \frac{1,00 \cdot 400^2}{8 \cdot 500 \cdot 400} = 0,1 \text{ см;}$$

На третьем участке на расстоянии 0,5м от замещения эпюры σ меняет знак. Здесь найдём перемещение по формуле:

$$u_{0,5} = u_0 + \Omega_{\sigma}/E$$

где u_0 - перемещение в конце участка (в защемлении),

Ω_{σ} - площадь эпюры σ между концом участка и точкой, в которой определяется перемещение.

Учитывая что, $u_0=0$ получаем:

$$u_{0,5} = u_0 - \frac{1}{2} \cdot 0,125 \cdot 50 \cdot \frac{1}{500} = -0,00625 \approx -0,01 \text{ см.}$$

Для построения параболы от точки C_3 отложим f_3 и получим точку C с ординатой $0,30/2 - 0,10 = 0,05 \text{ см}$ (рис. 4а). Парабола пройдет через точки a, b, c, d .

$$\text{Для нижнего участка 1 } f_1 = \frac{q_1 \cdot \ell^2}{8E(2A)} = \frac{0,8 \cdot 300^2}{8 \cdot 500 \cdot 200} = 0,09 \text{ см.}$$

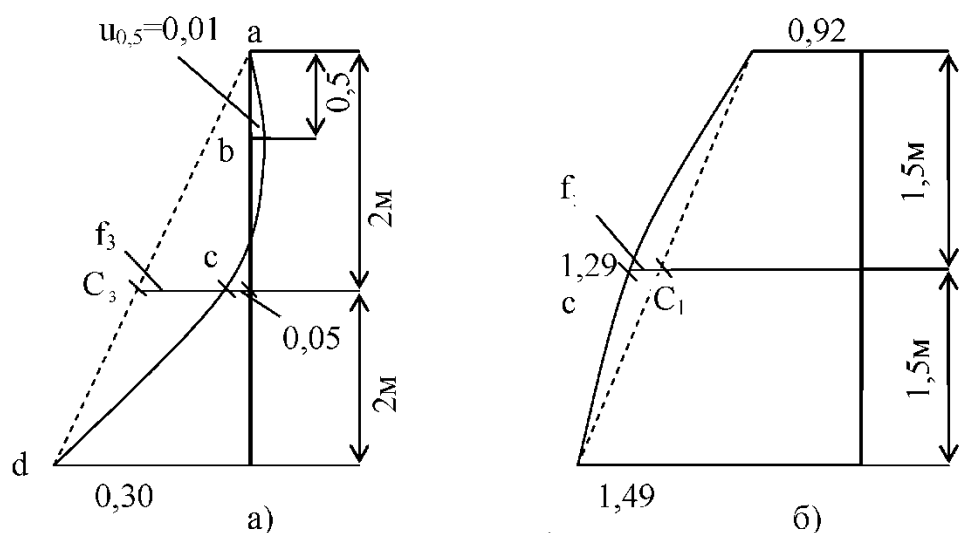


Рис. 4

Для построения параболы от точки C_1 надо отложить стрелу f_1 в левую сторону (рис. 4б), так как распределенная нагрузка q_1 имеет иное направление по сравнению с q_2 . Окончательная эпюра осевых перемещений показана на рис. 3б.

ЗАДАЧА 2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ

Усилия в элементах статически неопределимых систем невозможно найти, используя только уравнения равновесия статики. Определение усилий в элементах статически неопределимой системы производится путем добавления к уравнениям статики твердого тела недостающих уравнений, полученных из рассмотрения упругих деформаций системы.

Пример. Абсолютно жесткий брус АД, прикрепленный к неподвижному шарниру В и поддерживаемый круглыми стальными стержнями 1,2 (рис.5), нагружен расчетными нагрузками F_1 и F_2 .

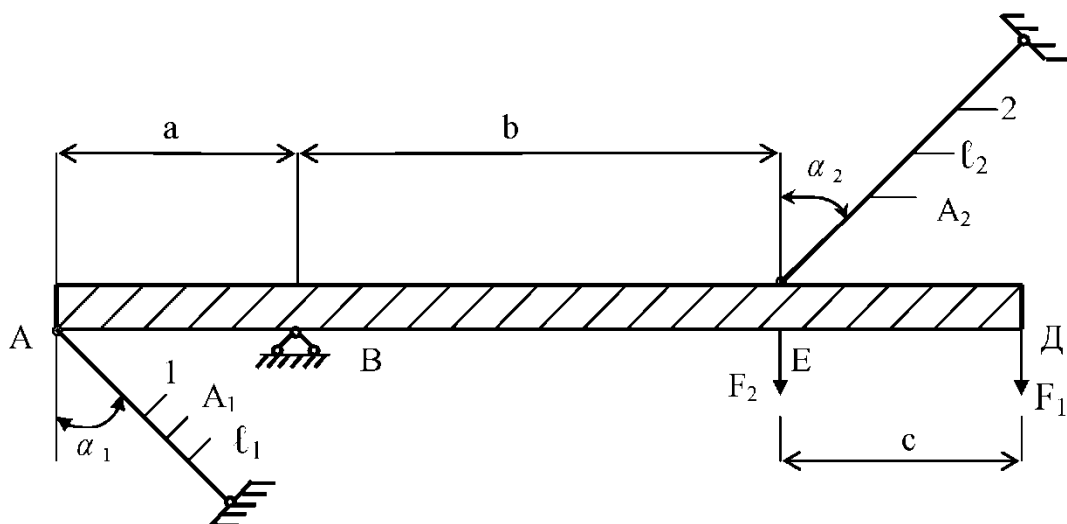


Рис. 5

В задаче требуется: а) определить усилия, возникающие в стержнях 1,2 (собственным весом бруса пренебречь); б) подобрать поперечные сечения стержней, обеспечив заданное соотношение площадей A_1/A_2 . Расчетное сопротивление для стали $R=21 \text{ кН/см}^2$; в) произвести расчет по разрушающей нагрузке и, приняв предел текучести для стали $\sigma = 23 \text{ кН/см}^2$, определить, во сколько раз можно увеличить нагрузку, чтобы система разрушилась; г) найти реальный коэффициент запаса по отношению к расчетной нагрузке.

Дано: $a = 2\text{м}$; $b = 3\text{м}$; $c = 2\text{м}$; $\alpha_1 = 30^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$; $\frac{A_1}{A_2} = 0,5$; $F_1 = 110 \text{ кН}$; $F_2 = 70 \text{ кН}$; $\ell_1 = 4\text{м}$; $\ell_2 = 5\text{м}$.

Решение.

1. Составим уравнение равновесия. Разрежем стержни 1 и 2 и заменим действие отброшенных частей усилиями N_1 и N_2 (рис. 6).

Реакция опоры В имеет горизонтальную составляющую H_B и вертикальную V_B . Таким образом, имеются четыре неизвестные реакции, а уравнений равновесия для плоской системы сил можно составить только три. Следовательно, данная система один раз статически неопределима и для её решения требуется составить одно дополнительное уравнение. По условию задачи необходимо определить усилия N_1 и N_2 , поэтому достаточно из трех возможных уравнений равновесия достаточно использовать одно:

$$\sum M_B = 0; -N_1 \cdot a \cdot \cos \alpha_1 - N_2 \cdot b \cdot \cos \alpha_2 + F_1 \cdot (b + c) + F_2 \cdot b = 0.$$

Подставив в это уравнение соответствующие значения, получаем:

$$N_1 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ - N_2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ + 110 \cdot (3 + 2) + 70 \cdot 3 = 0.$$

$$\text{Отсюда } 1,15 N_1 + N_2 = 506,66.$$

(1)

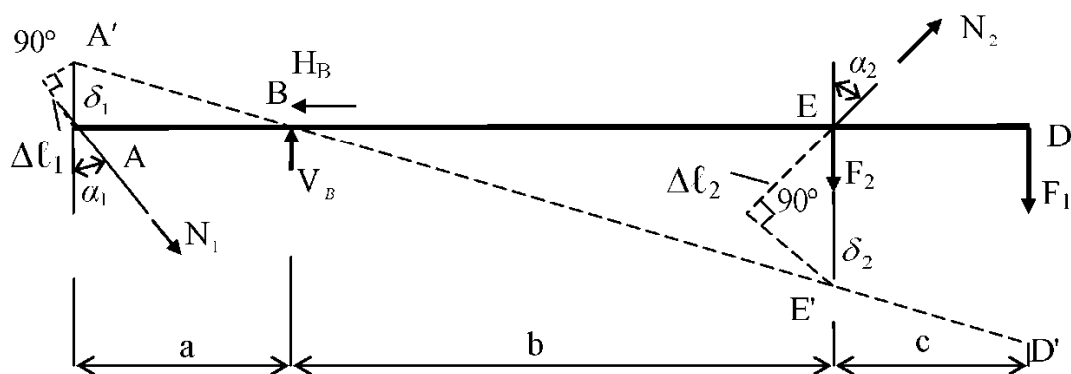


Рис. 6

2. Для составления дополнительного уравнения рассмотрим деформированное состояние системы. На рис. 6 штриховой линией показана ось бруса после деформации системы. Из подобия треугольников AA'B и EE'B можно составить следующее соотношение:

$$\delta_1 / \delta_2 = a/b. \quad (2)$$

Выразим удлинения $\Delta \ell_1$ и $\Delta \ell_2$ через δ_1 и δ_2 : $\delta_1 = \Delta \ell_1 / \cos \alpha_1$; $\delta_2 = \Delta \ell_2 / \cos \alpha_2$. Подставив значения δ_1, δ_2 ; в уравнение (2), получим:

$$\frac{\Delta \ell_1 \cos \alpha_2}{\Delta \ell_2 \cos \alpha_1} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\Delta \ell_1}{\Delta \ell_2} = \frac{2 \cdot \cos 30^\circ}{3 \cdot \cos 60^\circ} = 1,15. \quad (3)$$

По закону Гука имеем

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot A_1}; \quad \Delta \ell_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot A_2}. \quad (4)$$

Подставив значения деформаций из выражений (4) в соотношение (3), будем иметь:

$$\frac{N_1 \cdot \ell_1 \cdot A_2}{N_2 \cdot \ell_2 \cdot A_1} = 1,15.$$

Подставив соответствующие значения, получим

$$\frac{N_1 \cdot 4}{N_2 \cdot 5 \cdot 0,5} = 1,15,$$

откуда $N_1 = 0,719 N_2$. (5)

3. Определяем величины усилий N_1, N_2 . Для этого нам необходимо решить систему уравнений (1), (5).

$$1,15 N_1 + N_2 = 506,66;$$

$$N_1 = 0,719 N_2.$$

Отсюда $N_1 = 199,39$ кН, $N_2 = 277,32$ кН.

4. Подберем сечения стержней и проверим их на прочность.

$$A_1 = \frac{N_1}{R} = \frac{199,39}{21} = 9,49 \text{ см}^2.$$

Из соотношения $A_1/A_2 = 0,5$ получаем: $A_2 = \frac{A_1}{0,5} = 18,96 \text{ см}^2$.

Проверка: $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{277,32}{18,98} = 14,61 < 21 \text{ кН/см}^2$. Определяем диаметры стержней:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9,49}{3,14}} = 3,48 \text{ см}, \quad d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 18,98}{3,14}} = 4,92 \text{ см}.$$

5. Для вычисления разрушающей нагрузки первоначально определим разрушающие усилия в каждом из стержней;

$$N_{1T} = A_1 \sigma_T = 9,49 \cdot 23 = 218,27 \text{ кН}; \quad N_{2T} = A_2 \cdot \sigma_T = 18,98 \cdot 23 = 436,54 \text{ кН}.$$

Вычислим разрушающий момент:

$$M_{\text{разр}} = N_{1T} a \cos \alpha_1 + N_{2T} b \cos \alpha_2 = 218,27 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ + 436,54 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 1032,86 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Момент от расчетных нагрузок:

$$M_b = F_1(b+c) + F_2 b = 110 \cdot (3 + 2) + 70 \cdot 3 = 760 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим коэффициент увеличения нагрузки:

$$K = \frac{M_{\text{разр}}}{M_b} = \frac{1032,86}{760} = 1,36.$$

Таким образом, достаточно момент от расчетной нагрузки увеличить в 1,36 раза, чтобы система разрушилась.

ЗАДАЧА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ФИГУР

Для изображенной на схеме плоской фигуры (рис. 7) требуется: а) определить положение центра тяжести сечения; б) вычислить осевые и центробежный моменты инерции относительно произвольных осей, проходящих через центр тяжести сечения; в) определить положение главных центральных осей инерции; г) вычислить значения главных моментов инерции относительно этих осей; д) построить эллипс инерции.

Решение.

Выпишем данные из таблиц сортаментов:

– для двутавра № 36:

$h = 360 \text{ мм}$, $b = 145 \text{ мм}$, $d = 7,5 \text{ мм}$, $t = 12,3 \text{ мм}$, $A = 61,9 \text{ см}^2$, $J_x = 13380 \text{ см}^4$, $J_y = 516 \text{ см}^4$;

– для швеллера № 24:

$h = 240 \text{ мм}$, $b = 90 \text{ мм}$, $d = 5,6 \text{ мм}$, $t = 10 \text{ мм}$, $A = 30,6 \text{ см}^2$, $J_x = 208 \text{ см}^4$, $J_y = 2900 \text{ см}^4$, $z_0 = 2,42 \text{ см}$;

– для вертикального листа $500 \times 12 \text{ мм}$:

$$A = 60 \text{ см}^2, J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 50^3}{12} = 12500 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{1,2^3 \cdot 50}{12} = 7,2 \text{ см}^4.$$

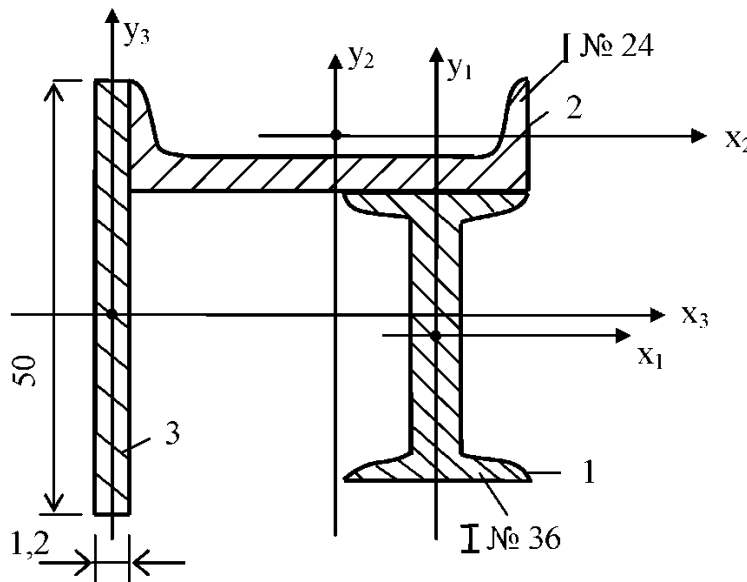


Рис. 7

$$y_0 = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{0 + 30,6 \cdot 20,42 + 60 \cdot 2}{152,2} = 4,9 \text{ cm.}$$

2. Вычислим осевые и центробежный моменты инерции:

$$J_{x_0y_0} = \sum (J_{xyi} + A_i a_i b_i) = (0 + 61,9 \cdot (-4,9) \cdot 7,78) + (0 + 30,6 \cdot 15,52 \times 3,03) + (0 + 60 \cdot (-2,9) \cdot (-9,57)) = 742,51 \text{ cM}^4.$$



Определим положение главных центральных осей инерции. Угол их наклона по отношению к исходным осям x_0 и y_0 найдем по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{x_0y_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}}.$$

Подставив соответствующие значения, получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 742,51}{12948,96 - 35450,61} = -\frac{1485,02}{22501,65} = -0,066.$$

$$2\alpha = -3,78^\circ; \alpha = -1,89^\circ;$$

Отложим значение угла α от оси x_0 по ходу часовой стрелки и проведем главные оси U и V (рис.8).

$$\sin \alpha = -0,033; \sin 2\alpha = -0,066;$$

$$\cos \alpha = 0,999; \cos 2\alpha = 0,998.$$

4. Главные моменты инерции сечения вычислим по формулам:

$$J_u = J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{x_0y_0} \sin 2\alpha;$$

$$J_v = J_{x_0} \sin^2 \alpha + J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{x_0y_0} \sin 2\alpha. \text{ Подставив цифровые значения, получим:}$$

$$J_u = 35450,61 \cdot 0,999^2 + 12948,96 \cdot (-0,033)^2 - 742,51 \cdot (-0,066) = 35475,08 \text{ см}^4.$$

$$J_v = 35450,61 \cdot (-0,033)^2 + 12948,96 \cdot (0,998)^2 + 742,51 \cdot (-0,066) = 12924,49 \text{ см}^4.$$

Положение главных осей U и V представлено на рис. 8.

5. Вычислим радиусы инерции:

$$r_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}} = \sqrt{\frac{35475,08}{152,5}} = 15,25 \text{ см};$$

$$r_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}} = \sqrt{\frac{12924,49}{152,5}} = 9,2 \text{ см}.$$

Отложим значения r_u и r_v построим эллипс инерции (рис.8). Значение r_u принято откладывать по оси V , а значение r_v по оси U .

ЗАДАЧА 4. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ В БАЛКАХ И РАМАХ

А). **Правило знаков.** В поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия: поперечная сила Q и изгибающий момент M . В рамах и наклонных балках кроме Q и M возникает продольная сила N .

Сила Q в произвольном сечении балки будет положительной, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по часовой.

Изгибающий момент M в любом поперечном сечении балки будет положительным, если слева от сечения он стремится повернуть отсеченную часть балки относительно данного сечения по часовой стрелке, а справа – против нее.

Б). **Правила и порядок построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.**

1. Если на некотором участке балки действует равномерно распределенная нагрузка, то эпюра поперечных сил на этом участке изменяется по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов – по закону квадратной параболы.

2. Если на некотором участке балки отсутствует распределённая нагрузка, то эпюра поперечных сил на этом участке параллельна оси балки, а эпюра изгибающих моментов представляет собой наклонную прямую.

3. В сечении, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент достигает своего экстремального значения, то есть имеет максимальное и минимальное значение.

4. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная нагрузка F , перпендикулярная оси балки, эпюра поперечных сил изменяется скачкообразно на величину этой силы, а эпюра изгибающих моментов имеет излом.

5. В сечении, где приложен момент, на эпюре изгибающих моментов будет скачок на величину этого сосредоточенного момента; на эпюру поперечных сил внешний сосредоточенный момент влияния не оказывает.

6. Если в сечении на свободном или шарнирно опёртом конце балки не приложен внешний сосредоточенный момент, то изгибающий момент равен нулю, а если приложен, то будет равен величине этого внешнего сосредоточенного момента.

7. В сечении, совпадающем с заделкой, поперечная сила и изгибающий момент численно равны соответственно опорной реакции и реактивному изгибающему моменту.

8. Для определения внутренних усилий балка разбивается на участки, границами которых являются точки приложения внешних сосредоточенных сил и моментов, а также начала и окончания действия распределённых нагрузок или изменения их характера.

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов следует придерживаться следующего порядка:

1. Составляется расчётная схема балки с изображением действующих на нее внешних нагрузок, на которой указываются направление и начало отсчёта «х» для каждого участка.

2. Составляются и решаются уравнения равновесия балки, в результате чего определяются величины опорных реакций и указываются их обозначения и направления на опорах балки.

3. Составляются уравнения для определения величин поперечных сил изгибающих моментов для каждого участка балки и по ним вычисляются ординаты эпюр для наиболее характерных сечений балки в количестве, достаточном для их построения.

4. Определяются сечения, в которых поперечная сила равна нулю, а следовательно, действуют экстремальные по величине изгибающие моменты $M_{\max}$ и $M_{\min}$ и вычисляют их значения. Там, где в сечении начинается или кончается распределённая нагрузка (если в этом сечении не приложена сосредоточенная сила), эпюра изгибающих моментов не имеет излома, т.е. парабола и прямая в этих точках имеют общую касательную.

5. По полученным значениям величин поперечных сил и изгибающих моментов в рассмотренных сечениях строятся эпюры. При этом положительные моменты M – вниз (в сторону растянутых волокон).

Пример 1. Для заданной шарнирно опертой балки с консолями (рис. 9) требуется: записать выражения Q и M для каждого участка и построить их эпюры; найти максимальный момент.

Дано: $F = 40 \text{ кН}$; $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 20 \text{ кН/м}$; $a = 2 \text{ м}$.

Решение.

Определим реакции, для чего составим уравнения суммы моментов всех внешних сил относительно точек A и B и приравняем их к нулю:

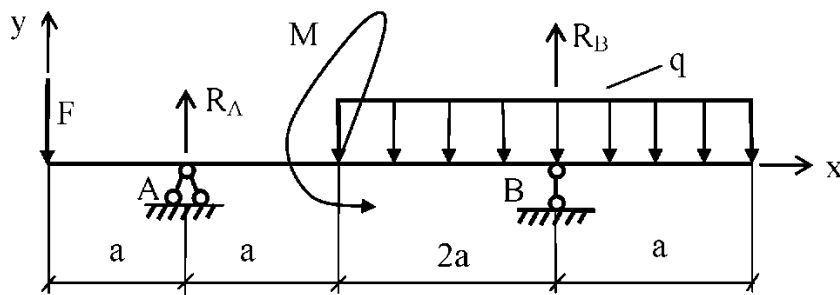


Рис. 9

$$\sum M_A = 0; \quad -Fa - M + q \cdot 3a \cdot 2,5a - R_B \cdot 3a = 0;$$

$$-40 \cdot 2 - 30 + 20 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2,5 \cdot 2 - R_B \cdot 3 \cdot 2 = 0;$$

$$R_B = 81,66 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad -F \cdot 4a - M - q \cdot 2 \cdot a \cdot a + q \cdot a \cdot 0,5a + R_A \cdot 3a = 0;$$

$$-40 \cdot 4 \cdot 2 - 30 - 20 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 20 \cdot 2 \cdot 1 + R_A \cdot 3 \cdot 2 = 0;$$

$$R_A = 78,33 \text{ кН}.$$

Используем для проверки правильности вычисления опорных реакций уравнение $\sum y = 0$. Тогда

$$-F + R_A - q \cdot 3a + R_B = 0;$$

$$-40 + 78,33 - 20 \cdot 3 \cdot 2 + 81,66 = 0,01 \approx 0.$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно и по знаку, и по величине.

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. По расположению внешней нагрузки балка имеет четыре участка загрузки (рис. 10). Начало координат принимаем на левом конце балки.

Участок I ($0 \leq x_1 \leq a$):

$$Q_1 = -F; \quad M_1 = -Fx_1 = -40x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad Q_1 = -40 \text{ кН}; \quad M = 0;$$

$$\text{при } x_1 = a = 2 \text{ м} \quad Q_1 = -F = -40 \text{ кН}; \quad M_1 = -Fx_1 = -40 \cdot 2 = -80 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II ($a \leq x_2 \leq 2a$):

$$Q_2 = -F + R_A;$$

$$M_2 = -Fx_2 + R_A(x_2 - a);$$

$$\text{при } x_2 = a = 2 \text{ м} \quad Q_2 = -40 + 78,33 = 38,33 \text{ кН};$$

$$M_2 = -40 \cdot 2 + 78,33 \cdot (2 - 2) = -80 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } x_2 = 2a = 4 \text{ м} \quad Q_2 = -40 + 78,33 = 38,33 \text{ кН};$$

$$M_2 = -40 \cdot 4 + 78,33(4 - 2) = -3,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Участок III ($2a \leq x_3 \leq 4a$):

$$Q_3 = -F + R_A - q(x_3 - 2a);$$

$$M_3 = -F x_3 + R_A (x_3 - a) - q(x_3 - 2a) \frac{(x_3 - 2a)^2}{2} - M;$$

$$\text{при } x_3 = 2a = 4 \text{ м } Q_3 = -40 + 78,33 - 20 \cdot (4 - 4) = 38,33 \text{ кН};$$

$$M_3 = -40 \cdot 4 + 78,33(4 - 2) - \frac{20(4 - 4)^2}{2} - 30 = -190 + 156,66 = -33,34 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_3 = 4a = 8 \text{ м } Q_3 = -40 + 78,33 - 20(8 - 4) = -41,67 \text{ кН};$$

$$M_3 = -40 \cdot 5 + 78,33(8 - 2) - \frac{20(8 - 4)^2}{2} - 30 = -40,02 \text{ кН} \cdot \text{м} \approx -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок IV ($4a \leq x_4 \leq 5a$):

$$Q_4 = -F + R_A - q(x_4 - 2a) + R_B;$$

$$M_4 = -F x_4 + R_A (x_4 - a) - M - \frac{q(x_4 - 2a)^2}{2} + R_B (x_4 - 4a).$$

$$Q_4 = -F + R_A - q(x_4 - 2a) + R_B.$$

$$\text{при } x_4 = 4a = 8 \text{ м } Q_4 = -40 + 78,33 - 20(8 - 4) + 81,66 = 39,99 \text{ кН};$$

$$M_4 = -40 \cdot 4 + 78,33(8 - 2) - 30 - \frac{20(8 - 4)^2}{2} + 81,66(8 - 8) = -40,02 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_4 = 5a = 10 \text{ м } Q_4 = -40 + 78,333 + 20(10 - 4) + 81,666 = -150 + 159,999 \approx 0;$$

$$M_4 = -40 + 78,333(10 - 2) - 30 - \frac{20(10 - 4)^2}{2} + 81,666(10 - 8) = -790 + 789,999 \approx 0.$$

Так как поперечная сила в пределах третьего участка меняет знак, то следует определить положение сечения, где $Q = 0$ и вычислить в этом сечении величину изгибающего момента. Положение сечения определим из подобия треугольников $сfd$ и dfk (см.рис. 10):

$$\frac{38,33}{41,67} = \frac{x}{4 - x}; \quad x = 1,91 \text{ м}.$$

Полученное значение x подставляем в уравнение моментов третьего участка, откуда при $x_3 = 2a + x = 2 \cdot 2 + 1,91 = 5,91$ м имеем:

$$M = -F x_3 + R_A (x_3 - a) - \frac{q(x_3 - 2a)^2}{2} - M = -40 \cdot 5,91 + 78,33(5,91 - 2) - \frac{20(5,91 - 4)^2}{2} - 30 = 3,79 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным ординатам построены эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (см. рис. 10). Наибольший изгибающий момент $M = -80 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

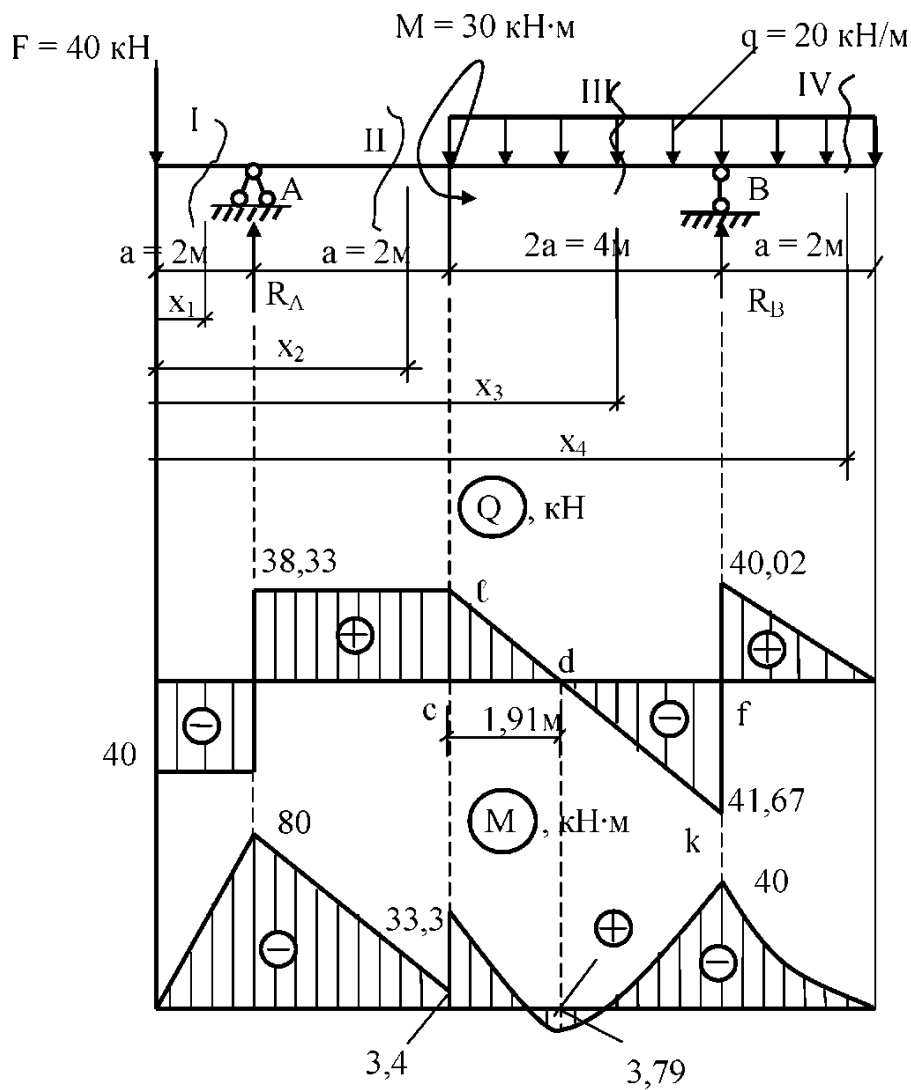


Рис. 10

Пример 2. Балка с наклонным участком

Построить эпюры продольных и поперечных сил и изгибающих моментов для балки с наклонным участком (рис. 11).

Решение.

Определим величину опорных реакций. Для этого составим уравнения равновесия статики:

$$\sum M_A = 0;$$

$$M - R_B \cdot 2 - q \cdot 2 / \cos 30^\circ \cdot 1 = 0, \text{ где}$$

$q \cdot 2 / \cos 30^\circ$ – длина наклонного стержня. Откуда:

$$R_B = \frac{-M + q \cdot 2,325}{2} = \frac{-30 + 46,5}{2} = 8,25 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 2 - q \cdot 2 / \cos 30^\circ \cdot 1 - M = 0;$$

$$R_A = \frac{46,5 + 30}{2} = 38,25 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum y = 0$; $R_A - q \cdot 2 / \cos 30^\circ + R_B = 38,25 + 8,25 - 46,5 = 0$.

Условие равновесия удовлетворено.

Разбиваем балку на силовые участки и на каждом из них проводим поперечное сечение.

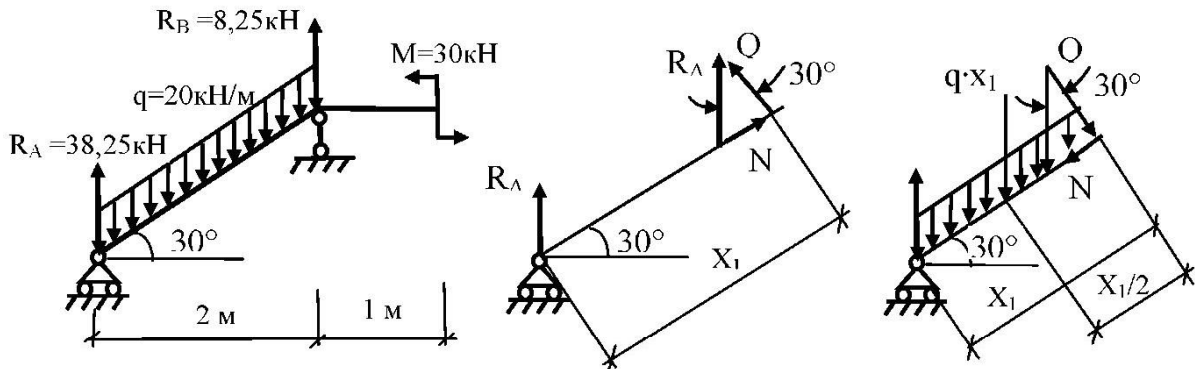


Рис. 11

I участок.

Рассмотрим действие реакции R_A и распределенной нагрузки q в отдельности.

$$Q_1 = R_A \cdot \cos 30^\circ - q \cdot x_1 \cdot \cos 30^\circ = 32,895 - 17,2 \cdot x_1.$$

$$0 \leq x_1 \leq 2 / \cos 30^\circ \text{ или } 0 \leq x_1 \leq 2,32 \text{ м;}$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad Q_1 \approx 32,9;$$

$$\text{При } x_1 = 2,32 \text{ м. } Q_1 = 32,895 - 39,904 \approx 7 \text{ кН.}$$

Определяем значение x_0 , при котором поперечная сила отсутствует:

$$32,895 - 17,2 \cdot x_0 = 0, \text{ отсюда}$$

$$x_0 = 32,895 / 17,2 \approx 1,9 \text{ м;}$$

Изгибающий момент определим по формуле:

$$M_1 = R_A \cdot x_1 \cdot \cos 30^\circ - \frac{q \cdot x_1^2}{2} \cdot \cos 30^\circ;$$

$$0 \leq x_1 \leq 2,32 \text{ м;}$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$\text{При } x_1 = 1,9 \text{ м } M_1 = 62,5 - 31,046 \approx 4 \text{ кН;}$$

$$\text{При } x_1 = 2,32 \text{ м } M_1 = 76,32 - 46,28 \approx 4 \text{ кН.}$$

Определим продольную силу:

$$N_1 = -R_A \cdot \sin 30^\circ + q \cdot x_1 \cdot \sin 30^\circ = -19,125 + 10 \cdot x_1.$$

$$0 \leq x_1 \leq 2,32 \text{ м;}$$

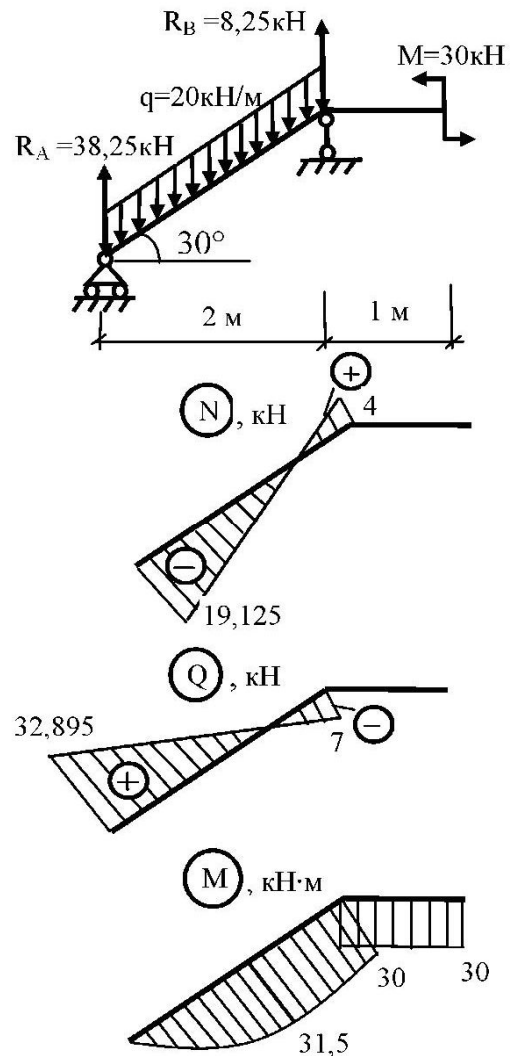


Рис. 12

При $x_1 = 0$ $N_1 = -19.125$ кН;
При $x_1 = 2,32$ $N_1 = -19.125 + 23,2 \approx 4$ кН.

II участок.

$Q_2 = 0$; $M_2 = M = 30$ кН·м; $N_2 = 0$.

По результатам вычислений построены эпюры N , Q , M (рис. 12).

Пример 3. Построить эпюры внутренних усилий для рамы, изображенной на рисунке.

Рассмотрим жесткозащемленную плоскую раму (рис. 13) В жесткой заделке рамы в общем случае нагружения возникают три опорные реакции: две силы (H_A и R_A) и опорный момент (M_A). Для построения эпюр определение этих реакций не является безусловной необходимостью: расчет, как и в случае жесткозащемленной балки, можно вести от свободного конца, то есть всякий раз так выбирать отсеченную часть для рассматриваемого сечения, чтобы в нее не попадала опора с неизвестными опорными реакциями. Тем не менее, иногда целесообразно вычислить опорные реакции. Это позволяет проверить построение эпюр или облегчить их построение.

Построим эпюры N , Q , M для рассматриваемой рамы, не вычисляя опорные реакции.

Методика построения эпюр аналогична ранее рассмотренной для балок, то есть сначала необходимо наметить характерные сечения.

Построение эпюры N . Следуя установленным правилам, в рассматриваемой раме можно выделить 8 характерных сечений. Продольная сила в любом из них численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня. При этом следует учитывать, что положение продольной оси будет изменяться в зависимости от того, чему принадлежит рассматриваемое сечение – стойкам или ригелю.

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2 = N_3 = N_4 = 0; \\ N_5 &= N_6 = -F = -20 \text{ кН}; \\ N_7 &= N_8 = -q \cdot 4 = -40 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Построение эпюры Q . Поперечная сила в любом сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на поперечную ось рамы. Положение поперечной оси также будет изменяться в зависимости от принадлежности данного сечения стойкам или ригелю. С учетом правила знаков, двигаясь от свободного конца к жесткой заделке, получим для Q :

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 = 0; \\ Q_3 &= Q_4 = F = 20 \text{ кН}; \\ Q_5 &= 0; \\ Q_6 &= q \cdot 4 = 40 \text{ кН}; \\ Q_7 &= Q_8 = -F = -20 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Необходимо обратить внимание на тот факт, что $Q_7 = -Q_4$, то есть на то, что поперечная сила в верхних сечениях противоположных стоек от действия

силы, приложенной к правой стойке (при заделке, расположенной слева, и наоборот) имеет противоположные знаки. Отчасти это можно объяснить противоположными направлениями оси y для сечений 4 и 7.

Построение эпюры M . Изгибающий момент в любом сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех нагрузок, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно этого сечения. Обратим внимание на два важных замечания:

1) составляющая момента M от действия сосредоточенного момента M всегда одинакова и равна M ;

2) под плечом силы всегда понимается длина перпендикуляра, опущенного из центра тяжести данного сечения на линию действия силы. Это означает, что, например, плечо силы F для сечений 4-7 одинаково и равно 3 м.

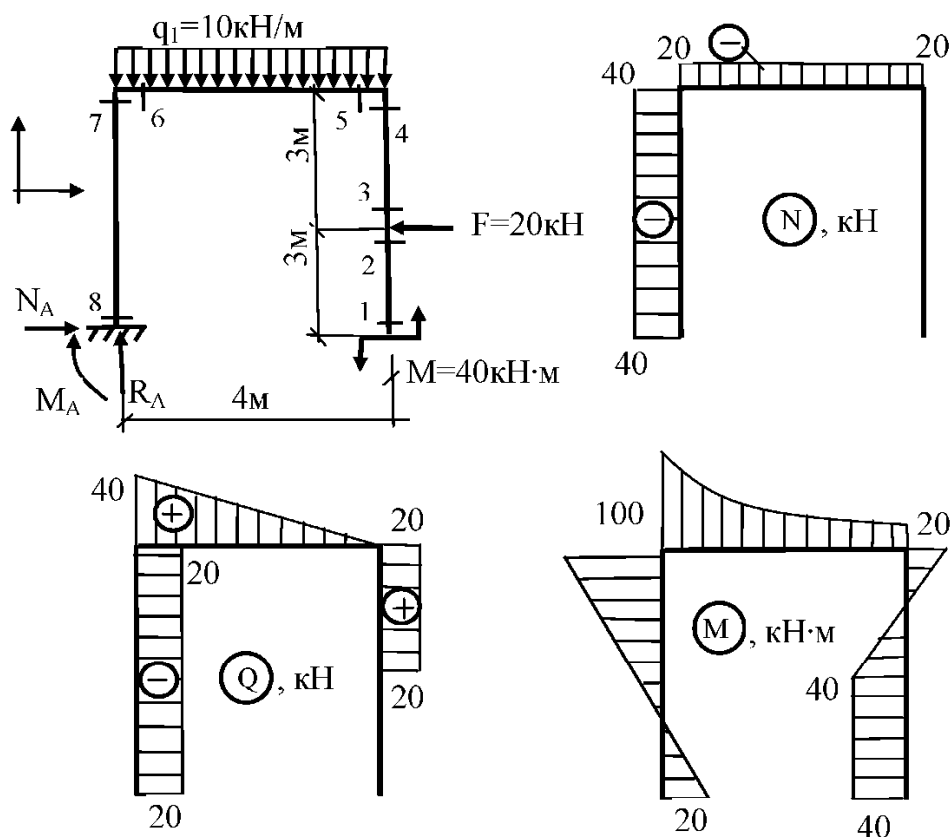


Рис. 13

Таким образом, для сечений 1-8 получим:

$M_1 = M_2 = M_3 = M = -40$ кН·м (растянутым является волокно в сечениях 1-3, поэтому ордината отложена влево от оси стойки);

$M_4 = M_5 = -M + F \cdot 3 = 20$ кН·м (знаки «+» и «-» здесь имеют относительный характер; результирующий момент растягивает правые волокна в сечении 4 и верхние волокна в сечении 5, поэтому ордината «20» откладывается соответственно вправо и вверх);

$M_6 = -M + F \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 = 100$ кН·м (растянуты верхние волокна);

$M_7=M_6=100 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (растянуты левые волокна);
 $M_8=-M-F\cdot 3+q\cdot 4\cdot 2=20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (растянуты правые волокна)

Пример 4.

Рассмотрим раму той же конфигурации, размеров и с теми же нагрузками, что и в предыдущем примере, но с шарнирным опиранием (рис. 14).

Здесь также имеем 8 характерных сечений, но для построения эпюр необходимо вычислить сначала опорные реакции, так как ни для одного из сечений нельзя выбрать отсеченную часть так, чтобы избежать попадания в нее опоры с неизвестной реакцией.

Для определения опорных реакций в плоских шарнирных рамах используются следующие уравнения равновесия:

- 1) $\sum F_y=0$ (или $\sum F_x=0$);
- 2) $\sum M_A=0$;
- 3) $\sum M_B=0$.

Первое уравнение равновесия используется в том из двух приведенных вариантов, который будет содержать одну неизвестную опорную реакцию.

Так, в рассматриваемом примере этим условием будет $\sum F_x=0$, которое будет содержать неизвестную реакцию H_A (в то время как условие $\sum F_y=0$ содержало бы две неизвестных реакции). Если бы опоры располагались так, что вертикальным является один стержень, то в качестве первого шага использовалось бы условие $\sum F_y=0$.

Второе и третье уравнения равновесия ($\sum M_A=0$, $\sum M_B=0$) – такие же, как и для балок, но в одно из них обязательно войдет реакция, вычисленная из первого уравнения (иногда – с нулевым плечом).

В качестве проверки вычисленных реакций используется условие, противоположное первому, то есть $\sum F_y=0$ (или $\sum F_x=0$).

Построение эпюр N , Q , M в шарнирных рамах выполняется так же, как и в защемлениях, но «с меньшими затратами», так как после вычисления реакций опор направление обхода рамы не играет роли, и выбор отсеченной части в каждом случае определяется ее простотой.

Вычислим реакции опор рамы (рис. 14).

Составим уравнения равновесия статики:

- 1) $\sum F_x=0$: $H_A-F=0$; $H_A=F=20 \text{ кН}$;
- 2) $\sum M_A=0$: $q\cdot 4\cdot 2-F\cdot 3-M-R_B\cdot 4=0$; $R_B=-5 \text{ кН}$;
- 3) $\sum M_B=0$: $R_A\cdot 4-q\cdot 4\cdot 2-F\cdot 3-M=0$; $R_A=45 \text{ кН}$.

Знак «-», полученный при вычислении реакции R_B говорит о том, что принятое для нее направление не совпадает с действительным. Выполним проверку:

- 4) $\sum F_y=0$: $R_A-q\cdot 4+R_B=45-40-5=0$,
то есть реакции опор вычислены правильно.

Построение эпюры N .

Двигаясь по оси рамы от сечения 1 к сечению 6, получим:

$$N_1=N_2=N_3=N_4=R_B=5 \text{ кН};$$
$$N_5=N_6=-F=-20 \text{ кН}.$$

Для сечений 7 и 8 проще рассматривать отсеченную часть, продвигаясь от опоры А к сечению 7:

$$N_8 = N_7 = -R_A = -45 \text{ кН.}$$

Этот же результат получим из рассмотрения отсеченной части 1-6:

$$N_7 = N_8 = -R_B - q \cdot 4 = -5 - 10 \cdot 4 = -45 \text{ кН.}$$

Пор вычисленным значениям построена эпюра N (рис. 14)

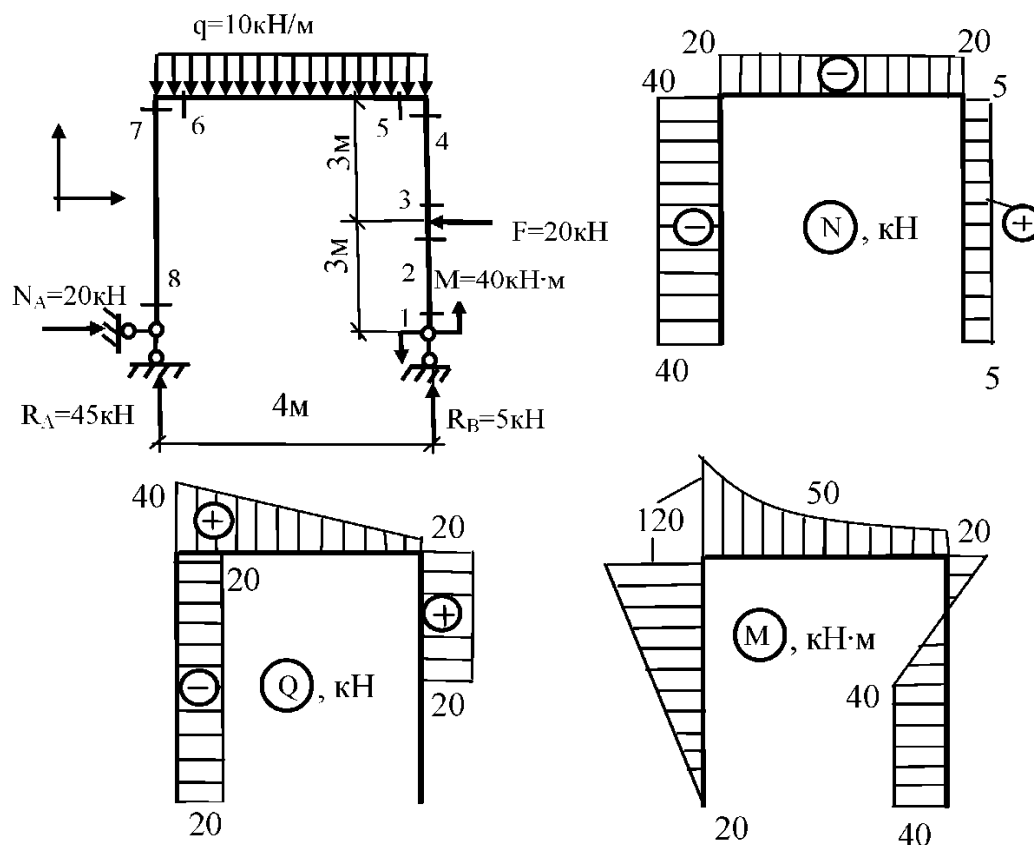


Рис. 14

Построение эпюры Q.

Из рассмотрения отсеченной части 1-5:

$$Q_1 = Q_2 = 0;$$

$$Q_3 = Q_4 = F = 20 \text{ кН;}$$

$$Q_5 = R_B = 5 \text{ кН.}$$

Из рассмотрения отсеченной части 8-6:

$$Q_8 = Q_7 = -R_A = -20 \text{ кН;}$$

$$Q_6 = R_A = 45 \text{ кН.}$$

Эпюра Q, построенная по вычисленным значениям, показана на рис. в.

Построение эпюры M.

Из рассмотрения отсеченной части 1-5:

$$M_1 = M_2 = M = 40 \text{ кН·м (растянуты левые волокна стойки);}$$

$M_3=M_2 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (плечо силы F равно нулю);

$M_4=M_5 = M - F \cdot 3 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (растянуты правые волокна стойки в сечении 4 и верхние волокна ригеля в сечении 5).

Поскольку на ригеле имеется распределенная нагрузка q , вычислим изгибающий момент в середине участка 5-6:

$$M_5=M_6 = M - F \cdot 3 - qx^2/2 + R_B \cdot x = 40 - 60 - 10 \cdot 2^2 + (-5) = -50 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из рассмотрения отсеченной части 8-6:

$$M_8 = 0;$$

$M_7 = M_6 = H_A \cdot 6 = 120 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (растянуты левые волокна стойки и верхние волокна ригеля в сечениях 7 и 6 соответственно).

Эпюра M показана на рис. 14.

ЗАДАЧА 5. РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ

Расчет балок на прочность при изгибе производится по наибольшим нормальным напряжениям, которые возникают в опасном поперечном сечении балки. Опасным будет являться то сечение, в котором возникает больший изгибающий момент. Если сечение симметрично относительно нейтральной оси, то для расчета на прочность используется формула

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R,$$

откуда

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R}.$$

Здесь W_x – осевой момент сопротивления, который является геометрической характеристикой балки, работающей на изгиб. Для круглого сечения $W_x = \pi d^3 / 32$, а для прокатных профилей по величине W_x подбирается по ГОСТу соответствующий номер проката.

Пример I. Для заданной схемы балки несущей расчетные нагрузки F , M , q с защемлением (рис. 15) требуется: написать выражения для поперечных сил и изгибающих моментов каждого участка; построить эпюры Q и M и подобрать балку круглого поперечного сечения.

Дано: $F = 30 \text{ кН}$; $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 20 \text{ кН/м}$; $a = 3 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$. $R = 1,4 \text{ кН/см}^2$

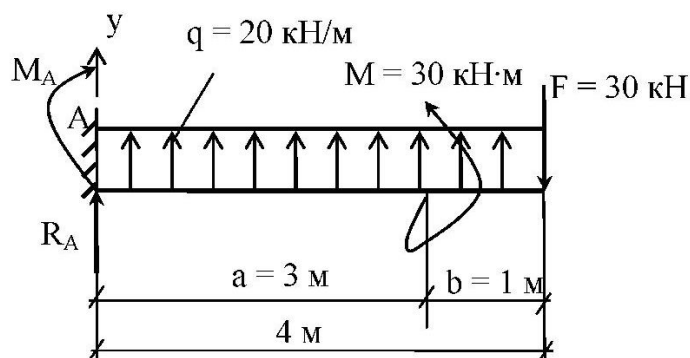


Рис. 15

Решение.

1. Определим опорную реакцию, для этого составим следующее уравнение:

$$\sum y = 0; R_A + q(a+b) - F = 0,$$

откуда

$$R_A = F - q(a+b) = 30 - 20 \cdot (3+1) = -50 \text{ кН}.$$

2. Определим опорный момент на опоре А. Для этого составим уравнение: $\sum M_A = 0$;

$$M_A - \frac{q \cdot (a+b)^2}{2} - M + F(a+b) = 0; \text{ откуда}$$

$$M_A = \frac{q \cdot (a+b)^2}{2} + M - F \cdot (a+b) = \frac{20 \cdot (3+1)^2}{2} + 30 - 30(1+3) = 70 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3. Балку (рис. 21) разобьем на два участка и построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для каждого из них.

Участок I. Рассмотрим часть балки, лежащую справа от сечения ($0 \leq x_1 \leq 1$):

$$Q = F - qx_1 = 30 - 20x_1;$$

$$M = -Fx_1 + \frac{qx_1^2}{2} = -30x_1 + 10x_1^2.$$

Определим значения Q и M на границах участка:

– при $x_1 = 0$; $Q = 30 \text{ кН}$; $M = 0$;

– при $x_2 = 1 \text{ м}$; $Q = 10 \text{ кН}$; $M = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Эпюра поперечных сил – наклонная прямая, эпюра изгибающих моментов – квадратная парабола.

Участок II. ($1 \leq x_2 \leq 4$):

$$Q = F - qx_2; \quad (8)$$

$$M = -Fx_2 + \frac{qx_2^2}{2} + M. \quad (9)$$

Найдём значения Q и M на границах участка:

– при $x_2 = 1 \text{ м}$; $Q_2 = 10 \text{ кН}$; $M_2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

– при $x_2 = 4 \text{ м}$; $Q_2 = -50 \text{ кН}$; $M_2 = 70 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Так как поперечная сила в пределах второго участка меняет знак, то следует определить положение сечения, где она равна нулю, и вычислить в этом сечении величину изгибающего момента. Для этого уравнение (8) приравняем к нулю, отсюда найдём x_2 :

$$F - qx_2 = 0; 30 - 20 \cdot x_2 = 0; x_2 = 1,5 \text{ м}.$$

Полученное значение x_2 подставим в уравнение (9), из которого определим значение изгибающего момента:

$$M = -30 \cdot 1,5 + \frac{20 \cdot 1,5^2}{2} + 30 = 7,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным значениям ординат Q и M строим эпюры (рис. 16) и убеждаемся, что эпюра поперечных сил на этом участке – наклонная прямая, а изгибающих моментов – квадратная парабола.

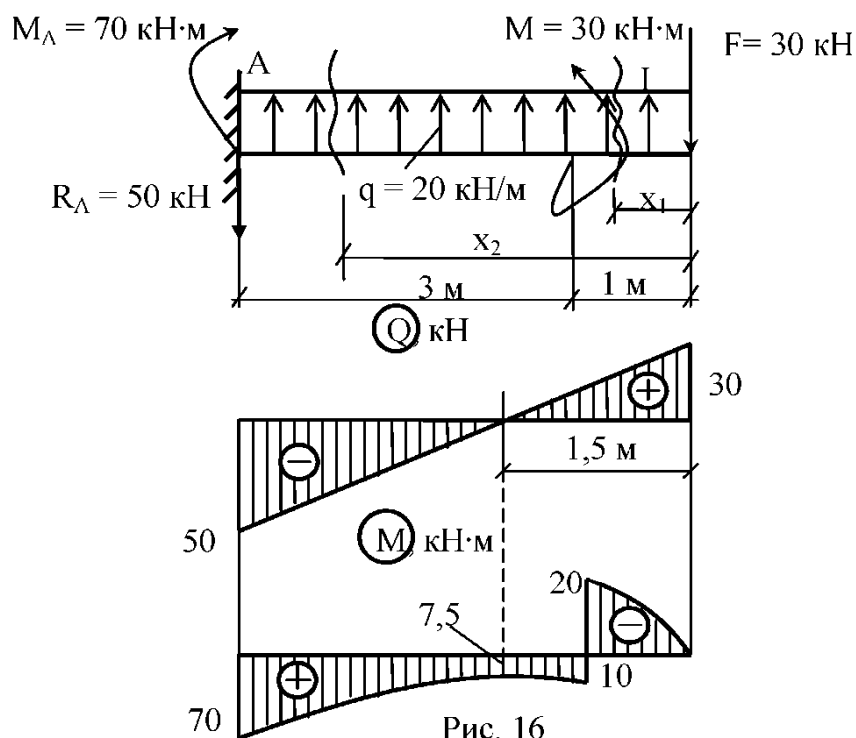


Рис. 16

Подбор сечений балки. Наибольшее напряжение возникает в крайних волокнах опасного сечения. Таковым является сечение у опоры А, где изгибающий момент имеет наибольшее значение $M_{\max} = 70 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Условие прочности запишется в виде

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq R,$$

откуда

$$W = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{70 \cdot 100}{1,4} = 5\,000 \text{ см}^3.$$

Тогда диаметр балки

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W}{3,14}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5\,000}{3,14}} = 37,08 \text{ см}.$$

Принимаем $d=38 \text{ см}$.

ЗАДАЧА 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ

6.1. Определение перемещений методом начальных параметров

Метод начальных параметров позволяет записать одно уравнение углов поворота и одно – для прогибов, которые пригодны для всех участков балки.

Поэтому данные уравнения называются универсальными, или обобщенными. Не вдаваясь в подробности получения уравнений, ограничимся способами их применения. Рассмотрим произвольно нагруженную консольную балку (рис. 17).

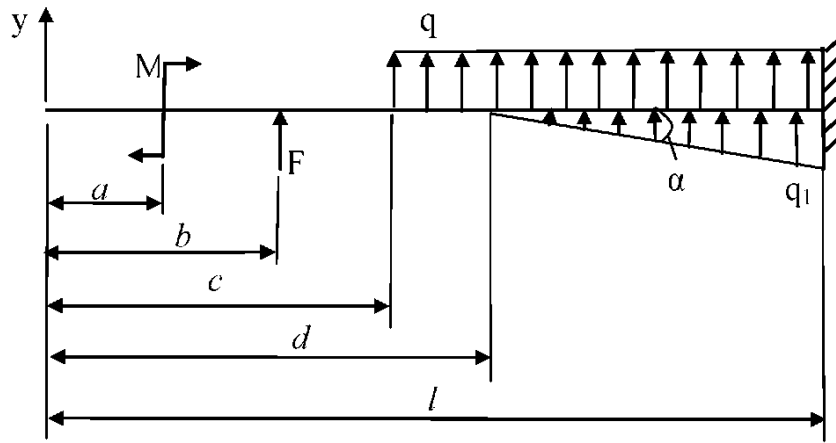


Рис. 17

Уравнение для углов поворота имеет вид:

$$EI\theta = EI\theta_0 + \sum M(x-a) + \sum \frac{F(x-b)^2}{2} + \sum \frac{q(x-c)^3}{6} + \sum \frac{\operatorname{tg}\alpha(x-d)^4}{24}; \quad (1)$$

уравнение для прогибов

$$EIv = EIv_0 + EI\theta_0 x + \sum \frac{M(x-a)^2}{2} + \sum \frac{F(x-b)^3}{6} + \sum \frac{q(x-c)^4}{24} + \sum \frac{\operatorname{tg}\alpha(x-d)^5}{120}, \quad (2)$$

где θ_0 и v_0 – угол поворота и прогиб в начале координат, определяемые из условия опирания балки;

a, b, c, d – расстояния от начало координат соответственно до момента, сосредоточенной силы, до начала равномерно распределенной нагрузки и до начала неравномерно распределенной нагрузки;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{q_1}{l-d}$ – тангенс угла наклона неравномерно распределенной нагрузки;

M, F, q, q_1 – момент, сосредоточенная сила (включая реакции опор), равномерно распределенная нагрузка и неравномерно распределенная нагрузка, расположенные между началом координат и рассматриваемым сечением балки на расстоянии x ; знаки суммы включены из-за возможности повторения однотипных нагрузок.

При расчетах необходимо учитывать следующее.

1. Если какая-либо нагрузка имеет иное направление, чем принято на рис. 17, то ее надо включить в формулы (1) и (2) со знаком минус.

2. Если распределенная нагрузка не доходит до рассматриваемого сечения, то ее надо продолжить до этого сечения, одновременно приложив на свободном участке такую же нагрузку с противоположным направлением (рис. 18). В этом

случае следует в уравнения (1) и (2) включить распределенные нагрузки в таком виде:

а) в случае равномерно распределенной нагрузки

$$EJ\theta = \dots + \frac{q(x-c)^3}{6} - \frac{q(x-\kappa)^3}{6}; \quad (3)$$

$$EJv = \dots + \frac{q(x-c)^4}{24} - \frac{q(x-\kappa)^4}{24}. \quad (4)$$

б) в случае неравномерно распределенной нагрузки

$$EJ\theta = \dots + \frac{tg\alpha(x-d)^4}{24} - \frac{tg\alpha(x-f)^4}{24} - \frac{q_1(x-f)^3}{6}; \quad (5)$$

$$EJv = \dots + \frac{tg\alpha(x-d)^5}{120} - \frac{tg\alpha(x-f)^5}{120} - \frac{q_1(x-f)^4}{24}. \quad (6)$$

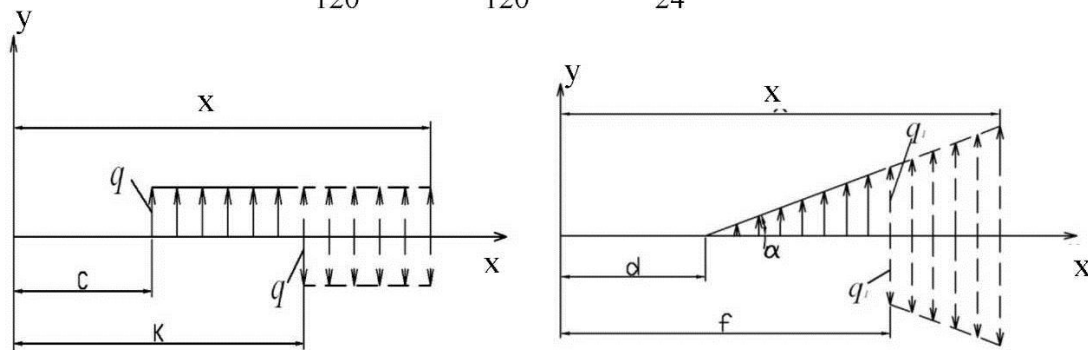


Рис. 18

Пример 1. Для балки (рис. 19) построить эпюры углов поворота и прогибов.
Решение. Найдем вначале опорные реакции. Из условия равновесия имеем

$$\sum M_B = 0, \quad R_a l - q \frac{l}{2} - \frac{3}{4} q l = 0,$$

откуда $R_a = \frac{3}{8} q l$. Из уравнения $\sum y = 0$ получаем $R_b = \frac{q l}{2} - \frac{3}{8} q l = \frac{1}{8} q l$.

Воспользуемся уравнениями (1), (2). Найдем начальные параметры θ_0 и v_0 . Для этого примем следующие условия:

- а) при $x = 0$ прогиба не будет, то есть $v = 0$;
- б) при $x = l$ прогиб также отсутствует ($v = 0$).

Подставим условие (а) в уравнение (2). Получим $v_0 = 0$. Подставим условие (б) в уравнение (2) с учетом выражения (4). При этом включим только те нагрузки, которые действуют на балку. Будем иметь

$$0 = EJ\theta_0 l + \frac{\frac{3}{8} q l (l-0)^3}{6} - \frac{q(l-0)^4}{24} + \frac{q(l-\frac{l}{2})^4}{24},$$

откуда
$$EJ\theta_0 = -\frac{9ql^3}{384}.$$

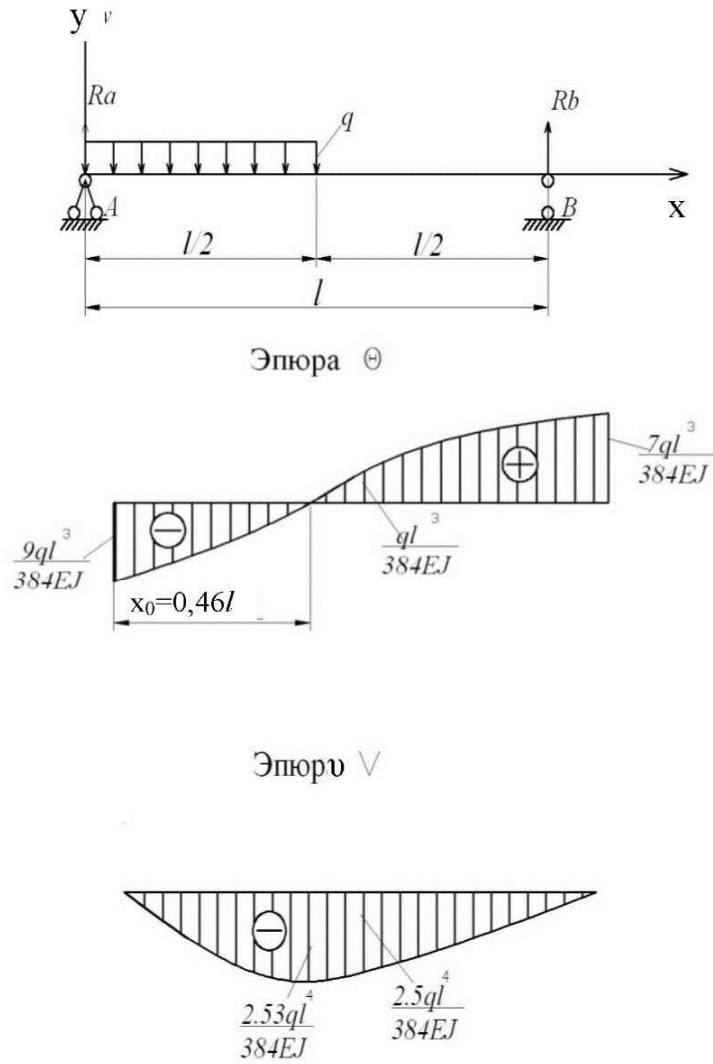


Рис. 19

Подставив значения полученных параметров в уравнения (1) и (2), будем иметь следующие выражения.

Для левой половины балки

$$EJ\theta = -\frac{9ql^3}{384} + \frac{\frac{3}{8}ql(x-0)^2}{2} - \frac{q(x-0)^3}{6}, \quad (7)$$

$$EJV = -\frac{9ql^3}{384}x + \frac{\frac{3}{8}ql(x-0)^3}{6} - \frac{q(x-0)^4}{24}. \quad (8)$$

Для правой половины запишем с учетом выражений (3) и (4):

$$EJ\theta = -\frac{9ql^3}{384} + \frac{\frac{3}{8}ql(x-0)^2}{2} - \frac{q(x-0)^3}{6} + \frac{q(x-\frac{l}{2})^3}{6}, \quad (9)$$

$$EJV = -\frac{9ql^3}{384}x + \frac{\frac{3}{8}ql(x-0)^3}{6} - \frac{q(x-0)^4}{24} + \frac{q(x-\frac{l}{2})^4}{24}. \quad (10)$$

При $x = 0$ из выражений (7) и (8) получаем

$$\theta = -\frac{9ql^3}{384EJ}, \quad v = 0.$$

При $x = \frac{l}{2}$ выражения (7) и (8) или же (9) и (10) дают

$$\theta = \frac{ql^3}{384EJ}, \quad v = -\frac{2,5ql^4}{384EJ}.$$

При $x = l$ формулы (9) и (10) приводят к результатам

$$\theta = \frac{7ql^3}{384EJ}, \quad v = 0.$$

Известно, что в тех сечениях, где угол поворота равен нулю, прогиб будет иметь экстремальное значение. Приравняем правую часть выражения (7) к нулю:

$$-\frac{9ql^3}{384} + \frac{\frac{3}{8}ql(x-0)^2}{2} - \frac{q(x-0)^3}{6} = 0,$$

откуда $x = 0,46l$. Приняв в формуле (8) $x = 0,46l$, получаем:

$$v = -\frac{2,53ql^4}{384EJ}.$$

Следует отметить, что прогиб посередине пролета незначительно отличается от максимального (расхождение 1,2 %). Установлено, что в шарнирно-опертой по двум концам балки без консолей при нагрузках, вызывающих однозначные прогибы, максимальный прогиб мало отличается от прогиба посередине пролета.

Пример 2. Для балки (рис. 20), нагруженной распределенной нагрузкой q и моментом M , требуется: 1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от расчетных нагрузок, считая, что заданная распределенная нормативная нагрузка является постоянной, а заданный нормативный момент – временным; 2) от расчетных нагрузок подобрать сечение балки из стального двутавра, с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа; 3) пользуясь методом начальных параметров, вычислить деформации балки и построить эпюры прогибов и углов поворота от нормативной нагрузки, если модуль упругости материала балки $E = 210$ ГПа.

Исходные данные: общая длина балки 8,2 м, нормативная распределенная нагрузка $q = 12$ кН/м, нормативный момент $M = 35$ кН·м. Коэффициент перегрузки для постоянной нагрузки $k = 1,1$, для временной $k = 1,4$.

Примечание. В соответствии со СНиП с 1956 года расчеты строительных конструкций осуществляются не по допускаемым напряжениям, а по расчетным сопротивлениям R . Исходя из этих соображений, данный пример представлен в таком варианте.

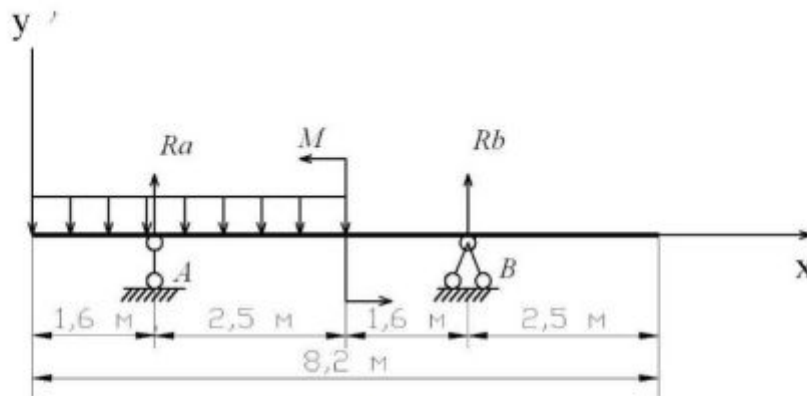


Рис. 20

Решение. Вычислим расчетные нагрузки.

$$q = 12 \cdot k = 12 \cdot 1,1 = 13,2 \text{ кН/м}, \quad M = 35 \cdot 1,4 = 49 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

1. Определим опорные реакции:

$$\sum y = 0; \quad -q(1,6+2,5) + R_a + R_b = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M + R_a(1,6 + 2,5) - q(1,6 + 2,5)\left(\frac{1,6 + 2,5}{2} + 1,6\right) = 0;$$

$$R_a = \frac{49 + 13,2(1,6 + 2,5)/(1,6 + 2,5)/2 + 1,6)}{1,6 + 2,5} = 60,13 \text{ кН},$$

$$R_b = q(1,6 + 2,5) - R_a = 13,2(1,6 + 2,5) - 60,13 = -6,01 \text{ кН}.$$

2. Построим эпюры Q и M от расчётных нагрузок.

Участок 1 ($0 \leq x_1 \leq 1,6 \text{ м}$) (рис. 21)

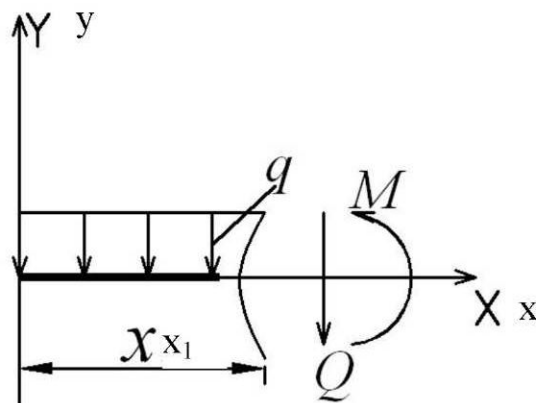


Рис. 21

$$-Q - qx_1 = 0; \quad Q = -qx_1 = -13,2x_1$$

$$\text{При } x_1 = 0; \quad Q_1 = 0.$$

$$\text{При } x_1 = 1,6 \text{ м}; \quad Q_1 = -13,2 \cdot 1,6 = -21,12 \text{ кН};$$

$$-M_1 - q \frac{x^2}{2} = 0; \quad M_1 = -\frac{qx_1^2}{2}.$$

При $x_1 = 0$; $M_1 = 0$.

$$\text{При } x_1 = 1,6 \text{ м; } M_1 = \frac{-13,2 \cdot 1,6^2}{2} = -16,896 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{При } x_1 = 0,8 \text{ м; } M_1 = \frac{-13,2 \cdot 0,8^2}{2} = -4,224 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Полученные значения Q и M отложены на эпюрах (рис. 25), изображенных ниже после расчета всех участков.

Участок 2 (рис. 22) ($1,6 \leq x_2 \leq 4,1 \text{ м}$)

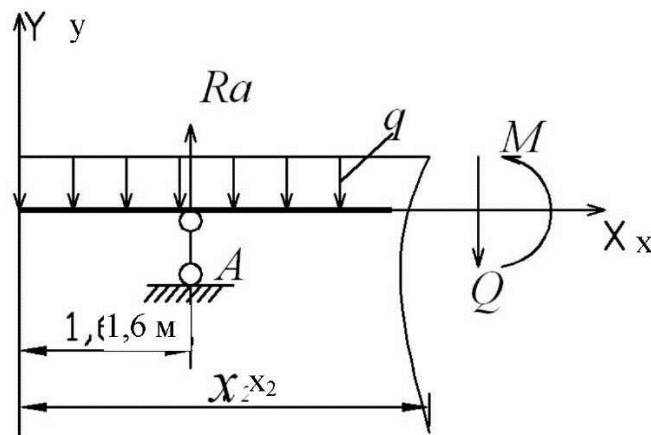


Рис. 22

$$-Q_2 - qx_2 + Ra = 0;$$

$$Q_2 = -qx_2 + Ra = -13,2 \cdot x_2 + 60,13;$$

$$-M_2 + Ra(x_2 - 1,6) - \frac{qx_2^2}{2} = 0;$$

$$M_2 = Ra(x_2 - 1,6) - \frac{qx_2^2}{2};$$

$$M_2 = 60,13(x_2 - 1,6) - \frac{13,2x_2^2}{2}.$$

$$\text{При } x_2 = 1,6 \text{ м; } Q_2 = -13,2 \cdot 1,6 + 60,13 = 39,01 \text{ кН};$$

$$M_2 = 60,13(1,6 - 1,6) - \frac{13,2 \cdot 1,6^2}{2} = -16,896 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{При } x_2 = 4,1 \text{ м; } Q_2 = -13,2 \cdot 4,1 + 60,13 = 6,01 \text{ кН};$$

$$M_2 = 60,13(4,1 - 1,6) - \frac{13,2 \cdot 4,1^2}{2} = 39,379 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 3 (рис. 23) ($4,1 \leq x_3 \leq 5,7 \text{ м}$)

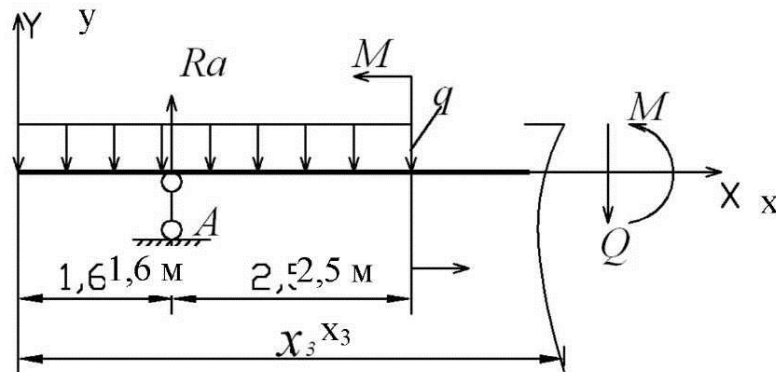


Рис. 23

$$Q_3 = 6,01 \text{ кН}; \quad Q_3 = \text{const};$$

$$-M_3 - M + Ra(x_3 - 1,6) - q(1,6 + 2,5)(x_3 - \frac{(1,6 + 2,5)}{2}) = 0;$$

$$M_3 = -49 + 60,13(x_3 - 1,6) - 13,2 \cdot 4,1(x_3 - 2,05).$$

При $x_3 = 4,1 \text{ м}; \quad M_3 = -49 + 60,13 \cdot 2,5 - 13,2 \cdot 4,1(4,1 - 2,05) = -9,62 \text{ кН} \cdot \text{м};$

При $x_3 = 5,7 \text{ м}; \quad M_3 = -49 + 60,13(5,7 - 1,6) - 13,2 \cdot 4,1(5,7 - 2,05) = 0.$

Участок 4 (рис. 24) ($0 \leq x_4 \leq 2,5 \text{ м}$)

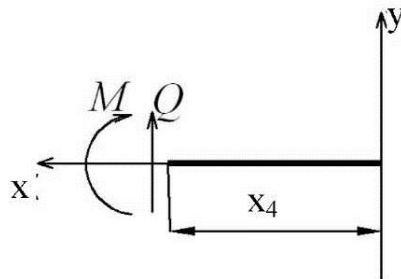


Рис. 24

$Q = 0 = \text{const}; \quad M = 0$ – на участке нагрузки не действуют.

Подбираем сечения балки из стального двутавра. Из условия прочности

$$\frac{M_{\max}}{W_x} \leq R; \quad R = 21 \text{ кН/см}^2;$$

$$M_{\max} = 39,38 \text{ кН} \cdot \text{м} = 3938 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$W_x \geq \frac{3938}{21} = 187,47 \text{ см}^3.$$

Примем двутавр № 22 с моментом сопротивления $W_x = 232 > 187,47 \text{ см}^3$. Для подобранной балки имеем:

$$W_X = 232 \text{ см}^3;$$

$$J_X = 2550 \text{ см}^4.$$

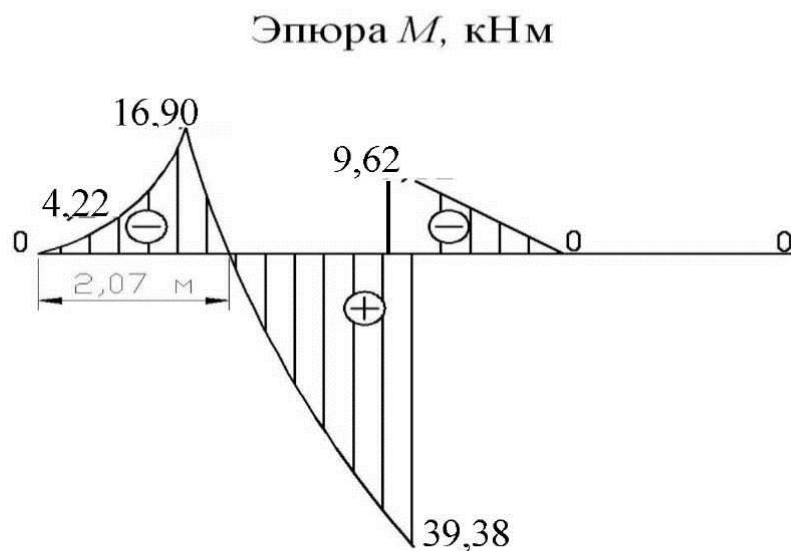
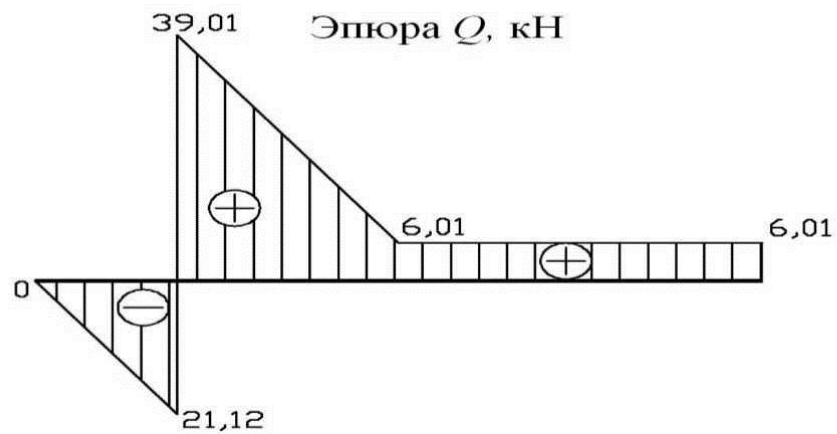
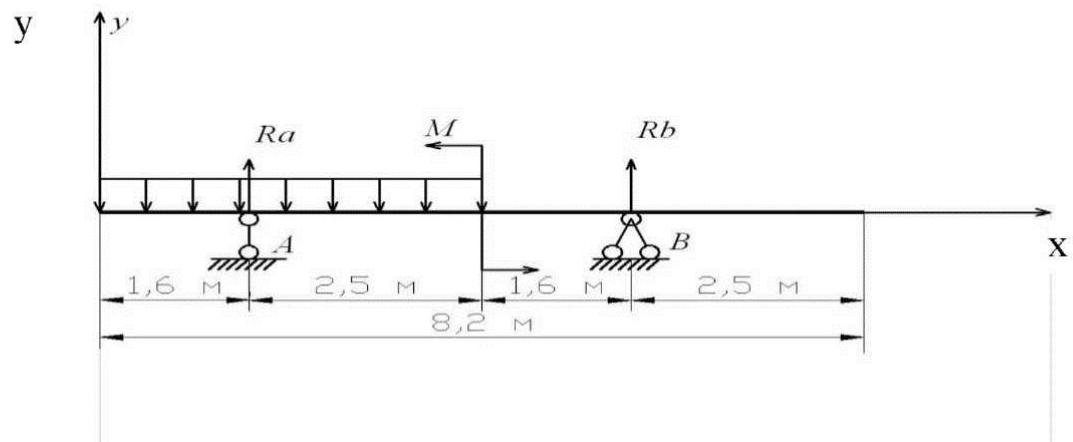


Рис. 25

Построим эпюры прогибов и углов поворота от нормативных нагрузок.
Найдем опорные реакции:

$$\begin{aligned}\sum y &= 0; \quad Ra + Rb - q(1,6 + 2,5) = 0; \\ \sum M_0 &= 0; \quad Ra(1,6 + 2,5) - \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^2}{2} + \frac{q1,6^2}{2} - M = 0; \\ Ra &= \frac{35 + \frac{12(2 \cdot 1,6 + 2,5)^2}{2} - \frac{12 \cdot 1,6^2}{2}}{1,6 + 2,5} = 52,33 \text{ кН}; \\ Rb &= q(1,6 + 2,5) - Ra = 12 \cdot 4,1 - 52,33 = -3,13 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (2). Запишем обобщенное уравнение упругой линии балки:

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x + \sum \frac{M(x-a)^2}{2} + \sum \frac{p(x-b)^3}{6} + \sum \frac{q(x-c)^4}{24}.$$

Найдем угол поворота и прогиба в начале координат согласно обобщенному уравнению. Так как при $x=1,6$ м и $x=5,7$ м $v=0$, запишем

$$\begin{cases} 0 = EJv_0 + EJ\theta_0 1,6 - \frac{q1,6^4}{24}; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} 0 = EJv_0 + EJ\theta_0 (2 \cdot 1,6 + 2,5) - \frac{M1,6^2}{2} + \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24} + \frac{q1,6^4}{24}. \end{cases} \quad (12)$$

Из уравнения (11) $EJv_0 = \frac{q1,6^4}{24} - EJ\theta_0 1,6.$ (13)

Подставим это выражение в уравнение (12).

$$\begin{aligned}0 &= \frac{q1,6^4}{24} - EJ\theta_0 1,6 + EJ\theta_0' (2 \cdot 1,6 + 2,5) - \frac{M1,6^2}{2} + \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24} + \frac{q1,6^4}{24}; \\ 0 &= \frac{2q1,6^4}{24} + EJ\theta_0 4,1 - \frac{M1,6^2}{2} + \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24}; \\ EJ\theta_0 (4,1) &= \frac{M1,6^2}{2} + \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24} - \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q1,6^4}{12}; \\ \theta_0 &= \frac{\frac{M1,6^2}{2} + \frac{q(2 \cdot 1,6 + 2,5)^4}{24} - \frac{R_A(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{q1,6^4}{12}}{EJ(4,1)}; \\ \theta_0 &= \frac{35 \cdot 1,6^2 + \frac{12(3,2 + 2,5)^4}{24} - \frac{52,33(1,6 + 2,5)^3}{6} - \frac{12 \cdot 1,6^4}{12}}{5355 \cdot (1,6 + 2,5)} = -0,001596 \text{ рад}.\end{aligned}$$

Из выражения (13) имеем $v_0 = \frac{\frac{q1,6^4}{24} - EJ\theta_0 1,6}{EJ};$

$$v_0 = \frac{12 \cdot 1,6^4 - 5355(-0,001596) \cdot 1,6}{5355} = 0,003166 \text{ м.}$$

По формулам (1) и (2) найдем угол поворота и прогиб в некоторых сечениях и построим их эпюры (рис. 26).

Участок 1 ($0 \leq x \leq 1,6 \text{ м}$)

$$EJv = EJ\theta_0 x + EJv_0 - \frac{qx^4}{24};$$

$$EJ\theta = EJ\theta_0 - \frac{qx^3}{6};$$

$$v = \theta_0 x + v_0 - \frac{qx^4}{24EJ}; \quad \theta = \theta_0 - \frac{qx^3}{6EJ}.$$

При $x = 0,8 \text{ м}$

$$v = -0,001596 \cdot 0,8 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 0,8^4}{24 \cdot 5355} = 0,0018509 \text{ м} = 0,185 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 0,8^3}{6 \cdot 5355} = -0,0017872 \text{ рад.}$$

При $x = 1,6 \text{ м}$

$$v = -0,001596 \cdot 1,6 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 1,6^4}{24 \cdot 5355} = 0 \text{ м};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 1,6^3}{6 \cdot 5355} = -0,003125 \text{ рад};$$

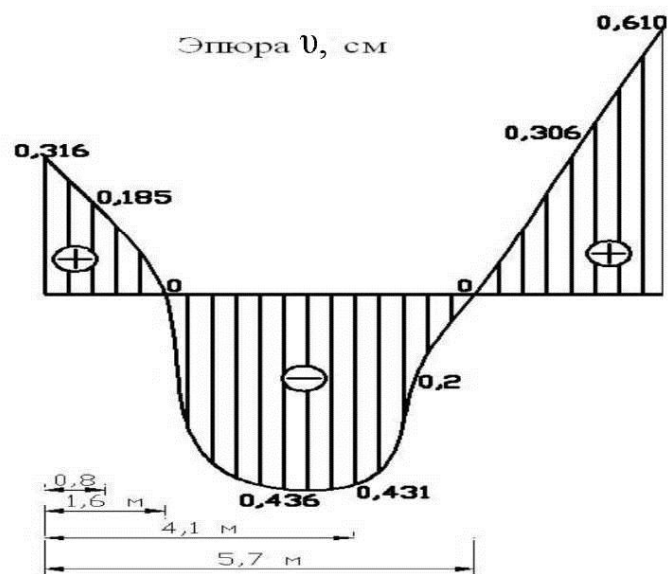
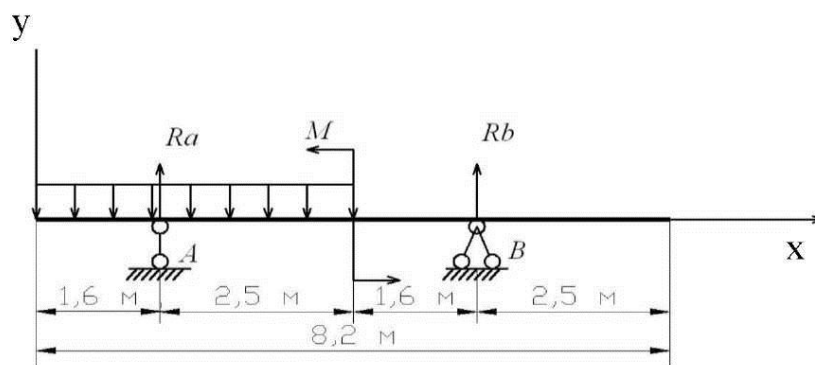
Участок 2 ($1,6 \leq x_2 \leq 4,1 \text{ м}$)

$$EJv = EJ\theta_0 x + EJv_0 - \frac{qx^4}{24} + R_A \frac{(x-1,6)^3}{6};$$

$$EJ\theta = EJ\theta_0 - \frac{qx^3}{6} + \frac{R_A(x-1,6)^2}{2};$$

$$v = \theta_0 x + v_0 - \frac{qx^4}{24EJ} + \frac{R_A(x-1,6)^3}{6EJ};$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{qx^3}{6EJ} + \frac{R_A(x-1,6)^2}{2EJ}.$$



Эпюра θ , рад

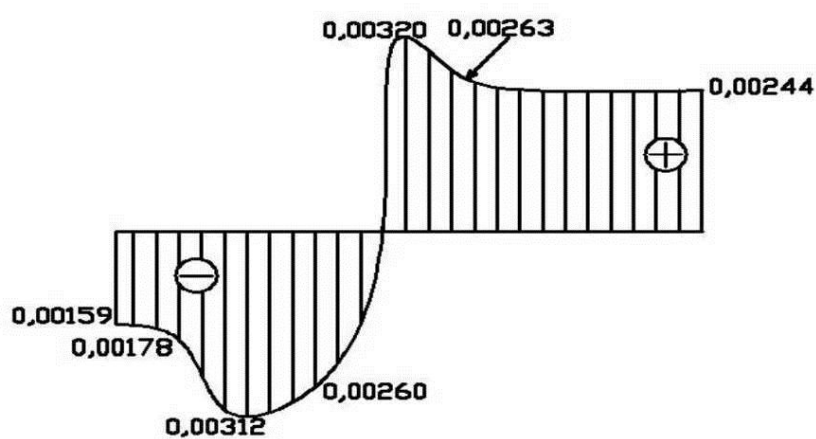


Рис. 26

При $x = 2,85$ м

$$v = -0,001596 \cdot 2,85 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 2,85^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(2,85 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} = -0,00436 \text{ м} = -0,436 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 2,85^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33(2,85 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} = -0,002607 \text{ рад.}$$

При $x = 4,1$ м

$$v = -0,001596 \cdot 4,1 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 4,1^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(4,1 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} = -0,00431 \text{ м} = 0,431 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 4,1^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33(4,1 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} = 0,0032 \text{ рад.}$$

Участок 3 ($4,1 \leq x_3 \leq 5,7$ м)

$$v = \theta_0 x + v_0 - \frac{qx^4}{24EJ} + \frac{q(x - 1,6 - 2,5)^4}{24EJ} + \frac{R_A(x - 1,6)^3}{6EJ} - \frac{M(x - 1,6 - 2,5)^2}{2EJ};$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{qx^3}{6EJ} + \frac{q(x - 1,6 - 2,5)^3}{6EJ} + \frac{R_A(x - 1,6)^2}{2EJ} - \frac{M(x - 1,6 - 2,5)}{EJ}.$$

При $x = 4,9$ м

$$v = -0,001596 \cdot 4,9 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 4,9^4}{24 \cdot 5355} + \frac{12(4,9 - 1,6 - 2,5)^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(4,9 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} -$$

$$- \frac{35(4,9 - 1,6 - 2,5)^2}{2 \cdot 5355} = -0,0020 \text{ м} = -0,2 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 4,9^3}{6 \cdot 5355} + \frac{12(4,9 - 1,6 - 2,5)^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33(4,9 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} -$$

$$- \frac{35(4,9 - 1,6 - 2,5)}{5355} = 0,00263 \text{ рад.}$$

При $x = 5,7$ м

$$v = 0;$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 5,7^3}{6 \cdot 5355} + \frac{12 \cdot 1,6^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33 \cdot 4,1^2}{2 \cdot 5355} - \frac{35 \cdot 1,6}{5355} = 0,00244 \text{ рад.}$$

Участок 4 ($5,7 \leq x \leq 8,2$ м)

При $x = 6,95$ м

$$v = -0,001596 \cdot 6,95 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 6,95^4}{24 \cdot 5355} + \frac{12(6,95 - 1,6 - 2,5)^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(6,95 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} -$$

$$- \frac{35(6,95 - 1,6 - 2,5)^3}{6 \cdot 5355} = 0,00306 \text{ м} = 0,306 \text{ см};$$

$$\theta = -0,001596 - \frac{12 \cdot 6,95^3}{6 \cdot 5355} + \frac{12(6,95 - 4,1)^3}{6 \cdot 5355} + \frac{52,33(6,95 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} - \frac{32(6,95 - 4,1)}{5355} +$$

$$+ \frac{(-3,13) \cdot (6,95 - 3,2 - 2,5)^2}{2 \cdot 5355} = 0,00244 \text{ рад.}$$

При $x = 8,2$ м

$$\begin{aligned}
v &= -0,001596 \cdot 8,2 + 0,003166 - \frac{12 \cdot 8,2^4}{24 \cdot 5355} + \frac{12(8,2 - 4,1)^4}{24 \cdot 5355} + \frac{52,33(8,2 - 1,6)^3}{6 \cdot 5355} - \\
&- \frac{35(8,2 - 4,1)^2}{2 \cdot 5355} + \frac{(-3,13) \cdot (8,2 - 3,2 - 2,5)^3}{6 \cdot 5355} = 0,0061 \text{ м} = 0,61 \text{ см}, \\
\theta &= -0,001596 - \frac{12 \cdot 8,2^3}{6 \cdot 5355} + \frac{12(8,2 - 4,1)^3}{6 \cdot 5355} - \frac{52,33(8,2 - 1,6)^2}{2 \cdot 5355} - \frac{32(8,2 - 4,1)}{5355} + \\
&+ \frac{(-3,13) \cdot (8,2 - 5,7)^2}{2 \cdot 5355} = 0,00243 \text{ рад}.
\end{aligned}$$

6.2. Определение перемещений методом Мора и по правилу Верещагина

Интеграл Мора

Иногда интересует не вся упругая линия балки, а только ее перемещение в каком-либо сечении. В этом случае удобно использовать метод Мора. Не загромождая подробными выкладками настоящую работу, изложим суть метода расчета в элементарном варианте (рис. 27).

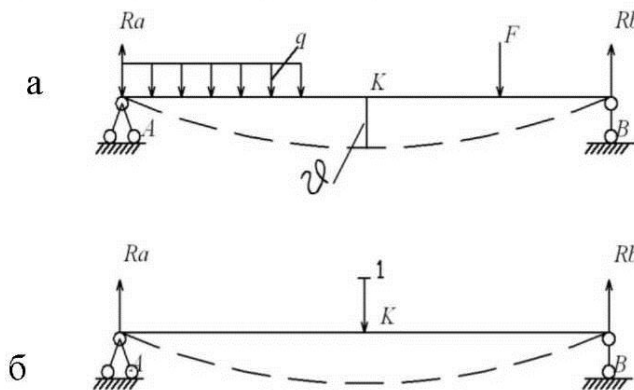


Рис. 27

Балка, представленная на рис. 27 а, изгибается от приложенной нагрузки. Требуется определить прогиб v в сечении k . Возьмем такую же балку и приложим к ней силу, равную 1 (единичную силу) в том же сечении k (рис. 27 б). Затем сообщим ей дополнительно совершенно такие же прогибы, какие имеет первая балка. Дополнительная потенциальная энергия U , накопленная вследствие этого, будет равна работе единичной силы на искомом перемещении v , то есть

$$U = 1 \cdot v. \quad (14)$$

Эту дополнительную энергию можно получить и другим способом. Из механики известно, что работа пары сил (момента) равняется моменту, умноженному на угол поворота. Мысленно вырежем из второй балки бесконечно малый элемент длиной dx (рис. 28).

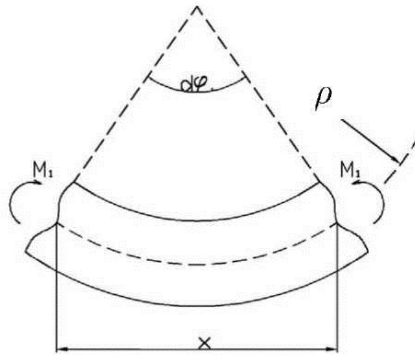


Рис. 28

Потенциальная энергия для этого участка будет

$$dU = M_1 d\varphi, \quad (15)$$

где M_1 – изгибающий момент, действующий на малый элемент от единичной силы; $d\varphi$ – угол поворота поперечных сечений, вызванный моментом M от нагрузки, действующей на первую балку, так как второй балке после нагружения единичной силой были сообщены прогибы первой балки.

Из рис. 28 имеем

$$d\varphi = \frac{dx}{\rho}.$$

Из курса сопротивления материалов известно, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}.$$

Тогда

$$d\varphi = \frac{Mdx}{EJ}.$$

Подставив значение $d\varphi$ в выражение (15), получаем:

$$dU = M_1 \frac{Mdx}{EJ}.$$

Потенциальная энергия всей балки, нагруженной единичной силой, будет

$$U = \int_0^l M_1 \frac{Mdx}{EJ}. \quad (16)$$

Из сравнения выражений (23) и (25), будем иметь

$$\nu = \int_0^l \frac{MM_1}{EJ} dx, \quad (17)$$

где M – изгибающий момент от заданной нагрузки; M_1 – изгибающий момент от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения.

Формула (17) называется интегралом Мора. Если требуется найти угловое перемещение какого-либо сечения (угол поворота), то по его направлению следует приложить единичный момент. Тогда по формуле (17) получим θ .

Пример 3. Определить прогиб и угол поворота среднего сечения консоли, нагруженной сосредоточенной силой на конце (рис. 29).

Решение

Определение прогиба. Изгибающий момент от заданной нагрузки $M = -Fx$ (рис. 29 а). Приложим в среднем сечении балки единичную силу (рис. 29 б) и составим уравнения изгибающих моментов от силы, равной 1. На левом участке $M_1 = 0$. На правом участке имеем

$$M_1 = -1(x - l/2) = l/2 - x.$$

Применим формулу (17). Интеграл запишем дважды, так как имеем два участка:

$$v = \int_0^{l/2} \frac{MM_1}{EJ} dx + \int_{l/2}^l \frac{MM_1}{EJ} dx.$$

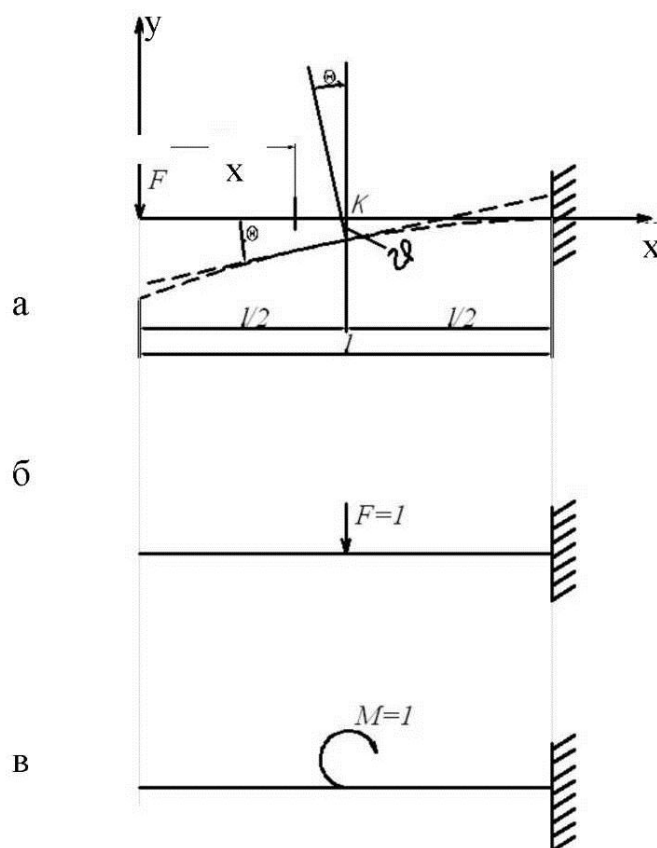


Рис. 29

Подставив соответствующие значения, получаем:

$$v = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} (-Fx) dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (-Fx) \left(\frac{l}{2} - x \right) dx \right] = -\frac{F}{EJ} \int_{\frac{l}{2}}^l x \left(\frac{l}{2} - x \right) dx =$$

$$= -\frac{F}{EJ} \left(\frac{lx^2}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{l}{2}}^l = -\frac{F}{EJ} \left(\frac{l^3}{4} - \frac{l^3}{3} - \frac{l^3}{16} + \frac{l^3}{24} \right) = -\frac{5}{48} \frac{Fl^3}{EJ}.$$

Результат получили со знаком минус. Это свидетельствует о том, что сечение перемещается вниз.

Определение угла поворота. Вместо силы в рассматриваемом сечении приложим единичный момент (рис. 29 в). Тогда на левом участке $M_1 = 0$, на правом $M_1 = 1$.

Учитывая, что определяем прогиб, поменяем в формуле (17) обозначение прогиба на угол поворота и воспользуемся этой же формулой.

$$\theta = \frac{1}{EJ} \int_{\frac{l}{2}}^l (-Fx) l dx = -\frac{F}{EJ} \int_{\frac{l}{2}}^l x dx = -\frac{Fx^2}{2EJ} \Big|_{\frac{l}{2}}^l = -\frac{F}{2EJ} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right) = -\frac{3}{8} \frac{Fl^2}{EJ}.$$

Знак минус указывает на то, что поворот происходит в сторону, противоположную направлению единичного момента, то есть против хода часовой стрелки.

Правило Верещагина

Техника определения перемещений значительно упрощается благодаря применению специального графического приема вычисления интеграла Мора. Заметим, что в прямолинейном стержне эпюра моментов от единичной силы всегда будет состоять из прямолинейных участков. Пусть на участке АВ стержня эпюра M_1 прямолинейна, а вторая эпюра M может иметь любое очертание (рис. 30).

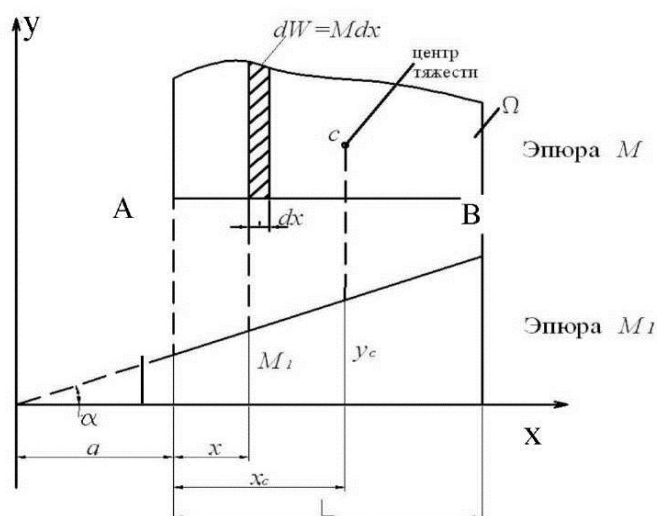


Рис. 30

Для прямолинейной эпюры можно записать:

$$M_1 = (x + a) \operatorname{tg} \alpha.$$

Если жесткость балки постоянная, выражение $\int_0^l M M_1 dx$ примет вид:

$$\int_0^l M M_1 dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) M dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) d\Omega,$$

где $M dx = d\Omega$ – дифференциал площади Ω эпюры M (см. рис. 30).

Интеграл $\int_0^l (x + a) d\Omega$ – представляет собой статический момент площади Ω эпюры M относительно оси y (см. рис. 30), который можно записать в виде:

$$\int_0^l (x + a) d\Omega = \Omega (x_c + a),$$

где x_c – абсцисса центра тяжести площади Ω эпюры M . После этого интегральное выражение можно представить в следующем виде:

$$\int_0^l M M_1 dx = (x_c + a) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \Omega.$$

Поскольку $(x_c + a) \operatorname{tg} \alpha = y_c$, будем иметь:

$$\int_0^l M M_1 dx = \Omega \cdot y_c.$$

Левая часть полученного равенства отличается от интеграла Мора отсутствием жесткости поперечного сечения, поэтому для определения перемещения (прогиба) следует последнее выражение разделить на EJ . После этого вместо формулы (17) получим математическое выражение правила Верещагина:

$$\nu = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ}. \quad (18)$$

Итак, для определения перемещения следует умножить площадь одной из эпюр Ω на ординату y_c другой (прямолинейной) эпюры, взятой под центром тяжести площади первой эпюры, и полученный результат разделить на жесткость. Если потребуются найти угол поворота, то в качестве единичной нагрузки принимается единичный момент. Тогда вместо ν получим по формуле (18) угол поворота θ . Следует отметить, что если обе эпюры изгибающих моментов прямолинейные, то можно площадь взять из эпюры от единичной нагрузки, а ординату – из эпюры от заданной нагрузки. Если очертание грузовой эпюры имеет слож-

ный вид (например, параболической трапеции), то эпюру разбивают на два треугольника и параболический сегмент, площадь которого Ω_2 всегда равна $ql^3/12$, а положение центра тяжести – в середине рассматриваемого участка (рис. 31).

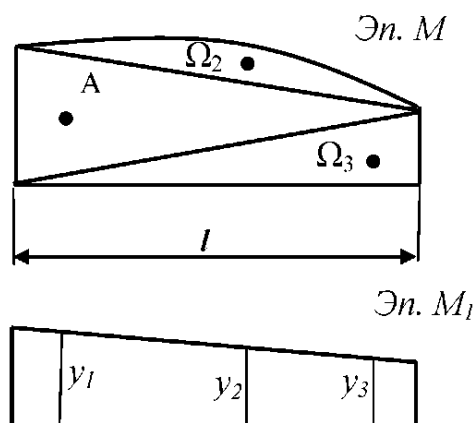


Рис. 31

Для облегчения расчета в приложении 1 представлены площади некоторых фигур и расстояния до центров тяжести.

Пример 4. Определить прогиб и угол поворота в середине длины балки, нагруженной в свободном конце силой F (рис. 32).

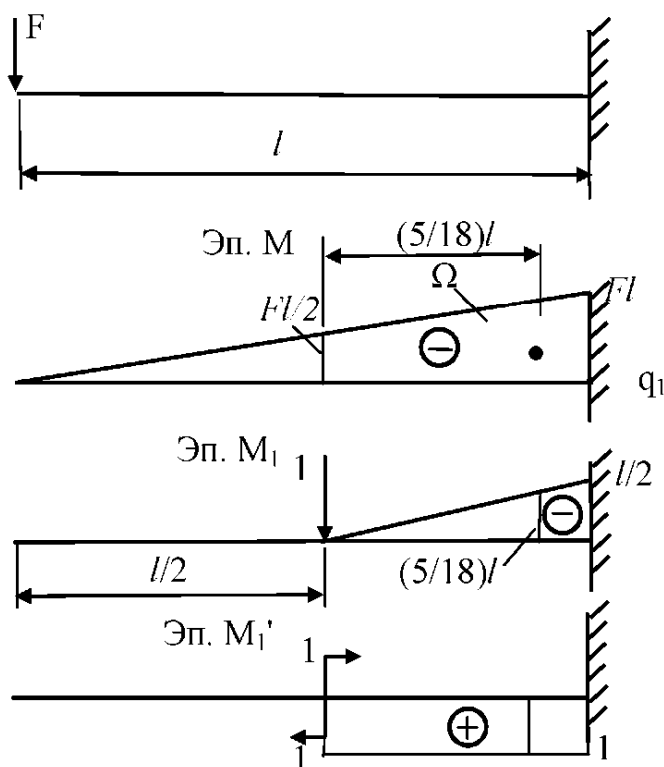


Рис. 32

Решение. Определим площадь трапеции Ω :

$$\Omega = -\frac{1}{2} \left(\frac{Fl}{2} + Fl \right) \frac{l}{2} = -\frac{3}{8} Fl^2.$$

Ординату под центром тяжести площади Ω вычислим по формуле, приведенной в приложении:

$$y_c = -\frac{l/2 + 2l}{l/2 + l} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{5}{18} l.$$

Тогда прогиб в середине длины балки в соответствии с формулой (18) будет

$$v = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ} = -\frac{3}{8} Fl^2 \cdot \left(-\frac{5}{18} \frac{l}{EJ} \right) = \frac{5Fl^3}{48EJ}.$$

Вычислим угол поворота также по формуле (18). В этом случае $y_c = 1$.

$$\theta = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ} = -\frac{3Fl^2(+1)}{8EJ} = -\frac{3}{8} \frac{Fl^2}{EJ}.$$

Знак минус указывает, что направления единичного момента и угла поворота не совпадают. Поворот происходит против хода часовой стрелки.

Пример 5. Определить прогиб посередине пролета балки, нагруженной на левом конце моментом M . (рис. 33).

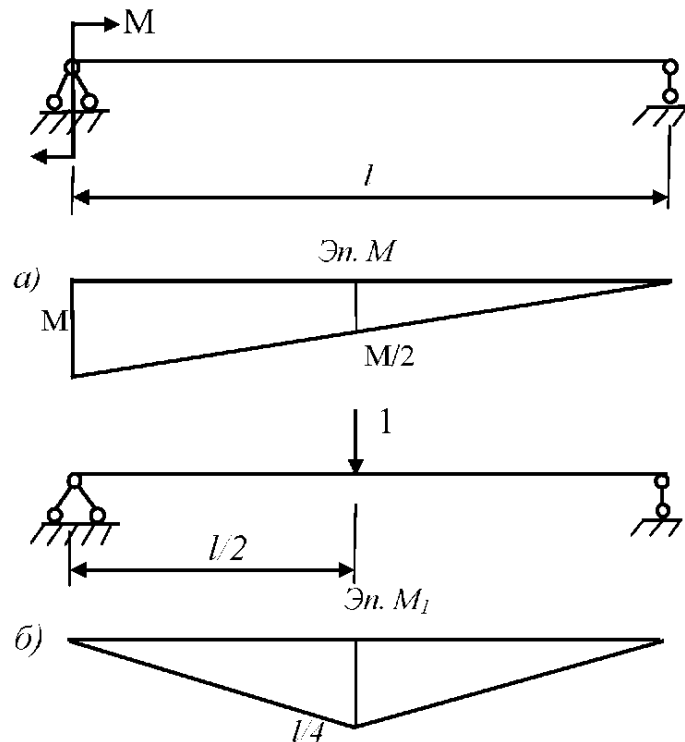


Рис. 33

Решение

На рис. 33 *а* представлена эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки, а на рис. 33 *б* – от единичной силы. Воспользуемся формулой (18).

$$v = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ}.$$

Из рис. 33 *б* получаем $\Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} l = \frac{l^2}{8}$. Ординату y_c берем из рис. 33 *а*:

$$y_c = \frac{M}{2}.$$

Тогда прогиб будет

$$v = \frac{Ml^2}{16EJ}.$$

Пример 6. Определить прогиб и угол поворота в свободном конце балки переменного сечения (рис. 34). Жесткость балки в правой части EJ , в левой – $2EJ$.

Решение. Эпюры изгибающих моментов от заданной и единичных нагрузок представлены на рис. 34. Трапецию на эпюре M разбиваем на прямоугольник и треугольник. Вычислим площади Ω .

$$\Omega_1 = -\frac{Fl^2}{2}, \quad \Omega_2 = -\frac{Fl^2}{2}, \quad \Omega_3 = -\frac{Fl^2}{2}.$$

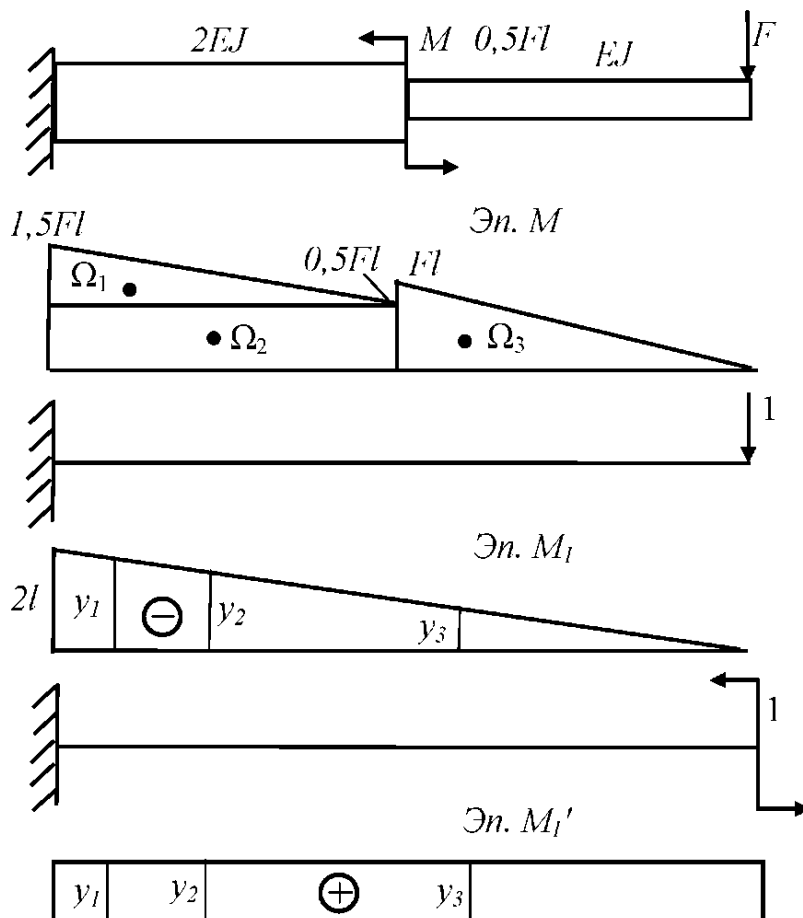


Рис. 34

Ординаты эпюры изгибающих моментов: $y_1 = -\frac{5}{3}l$, $y_2 = -\frac{3}{2}l$, $y_3 = -\frac{2}{3}l$.

Прогиб найдем из выражения

$$v = \frac{\Omega_1 y_1}{2EJ} + \frac{\Omega_2 y_2}{2EJ} + \frac{\Omega_3 y_3}{EJ}.$$

Подставив соответствующие значения, получаем:

$$v = \frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{5}{3}l \cdot \frac{1}{2EJ} + \frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{3}{2}l \cdot \frac{1}{2EJ} + \frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{27 Fl^3}{24 EJ}.$$

Угол поворота найдем по формуле (18), для чего нам следует грузовую эпюру перемножить с эпюрой от единичного момента. Итак, будем иметь:

$$\theta = \frac{\Omega_1 y_1}{2EJ} + \frac{\Omega_2 y_2}{2EJ} + \frac{\Omega_3 y_3}{EJ}.$$

В этом случае, как видно из рис. 34, $y_1 = y_2 = y_3 = 1$. Подставив значения Ω и y в формулу угла поворота, получаем:

$$\theta = -\frac{Fl^2}{2} \cdot 1 \left(\frac{1}{2EJ} + \frac{1}{2EJ} + \frac{1}{EJ} \right) = -\frac{Fl^2}{EJ}.$$

Пример 7. Расчет статически неопределимой балки.

Для балки, изображенной на рис. 35, требуется: 1) определить опорные реакции; 2) построить эпюры Q и M ; 3) построить эпюру прогибов.

Решение.

I. Начало координат примем в защемлении. От действия нагрузки в балке появляются опорные реакции R_A , R_B , M_A . Для их определения составим уравнения равновесия:

$$\sum y = 0; R_A + R_B - F + F - ql = 0; \text{ откуда} \\ R_A + R_B = ql. \quad (19)$$

$$\sum M_0 = 0; -M_A + ql \frac{l}{2} + F \frac{l}{2} - F \cdot 1,2l - R_B \cdot l = 0;$$

$$M_A + R_B l = \frac{ql^2}{2} - 0,7Fl;$$

$$M_A + R_B l = 0,15 ql^2. \quad (20)$$

Для решения статически неопределимой балки, кроме уравнений равновесия статики следует составить дополнительное уравнение, вытекающее из рассмотрения деформированного состояния балки (рис. 35).

Из рисунка видно, что над шарнирной опорой прогиб балки равен нулю. Поэтому для решения задачи можно требовать условие, чтобы на расстоянии от защемления $x = 0$ прогиб $v = 0$.

На основании уравнения (2) составим дополнительное уравнение для выражения прогиба в точке В и приравняем к нулю.

$$EJv = \frac{-M_A(l+0)^2}{2} + \frac{R_A(l-0)^3}{6} - \frac{F(l-\frac{l}{2})^3}{6} - \frac{q(l-0)^4}{24} = 0;$$

$$-\frac{M_A l^2}{2} + \frac{R_A l^3}{6} - \frac{0,5ql \cdot l^3}{48} - \frac{ql^4}{24} = 0.$$

Поскольку начало координат расположено в заземлении, в этом уравнении принято $v_0 = v'_0 = 0$. Сократив на $l^2/2$, получим

$$M_A - \frac{R_A l}{3} = -\frac{5}{48}ql^2. \quad (21)$$

Выпишем полученные уравнения (19) – (21) в виде системы

$$R_A + R_B = ql;$$

$$M_A + R_B l = 0,15ql^2;$$

$$M_A - \frac{R_A l}{3} = -\frac{5}{48}ql^2$$

$$\text{и решим ее: } R_A = ql - R_B;$$

$$M_A = 0,15ql^2 - R_B l; \quad M_A - \frac{(ql - R_B)l}{3} = -\frac{5}{48}ql^2;$$

$$0,15ql^2 - R_B l - \frac{ql^2}{3} + \frac{R_B l}{3} = -\frac{5}{48}ql^2; \quad -\frac{2}{3}R_B = 0,079ql; \quad R_B = -0,118ql;$$

$$R_A = ql + 0,118ql; \quad R_A = 1,118ql;$$

$$M_A = -\frac{5}{48}ql^2 + \frac{1,118ql^2}{3}; \quad M_A = 0,269ql^2.$$

2. Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, для чего составим выражения Q и M для всех участков.

Левый участок ($0 \leq x \leq l/2$):

$$Q = R_A - qx; \quad M = -M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2};$$

$$\text{при } x = 0; \quad Q = R_A = 1,118ql; \quad M = -M_A = -0,269ql^2.$$

Отложим эти значения на эпюрах (см. рис. 35):

$$\text{при } x = l/4; \quad Q = R_A - \frac{ql}{4} = 1,118ql - 0,25ql = 0,868ql;$$

$$M = -0,269ql^2 + 1,118ql \cdot \frac{l}{4} - \frac{ql^2}{32} = -0,021ql^2;$$

$$\text{при } x = l/2; \quad Q = 1,118ql - 0,5ql = 0,618ql;$$

$$M = -0,269ql^2 + 1,118ql \cdot 0,5l - \frac{ql^2}{8} = -0,269ql^2 + 0,559ql^2 - 0,125ql^2 = 0,165ql^2.$$

Средний участок ($l/2 \leq x \leq l$):

$$Q = R_A - qx - F = 1,118ql - qx - 0,5ql = 0,616ql - qx;$$

$$M = -M_A + R_A x - \frac{qx^2}{2} - F(x - \frac{l}{2});$$

$$\text{при } x = l/2; \quad Q = 0,618ql - 0,5ql = 0,118ql; \quad M = 0,165ql^2;$$

$$\text{при } x = 0,75l; \quad Q = 0,618ql - 0,75ql = -0,132ql;$$

$$M = -0,269ql^2 + 1,118ql \cdot 0,75l - \frac{q(0,75l)^2}{2} - 0,5ql(0,75l - 0,5l) = 0,163ql^2;$$

при $x = l$; $Q = 0,618ql - ql = -0,382ql$; $M = 0,999ql^2 = 0,1ql^2$.

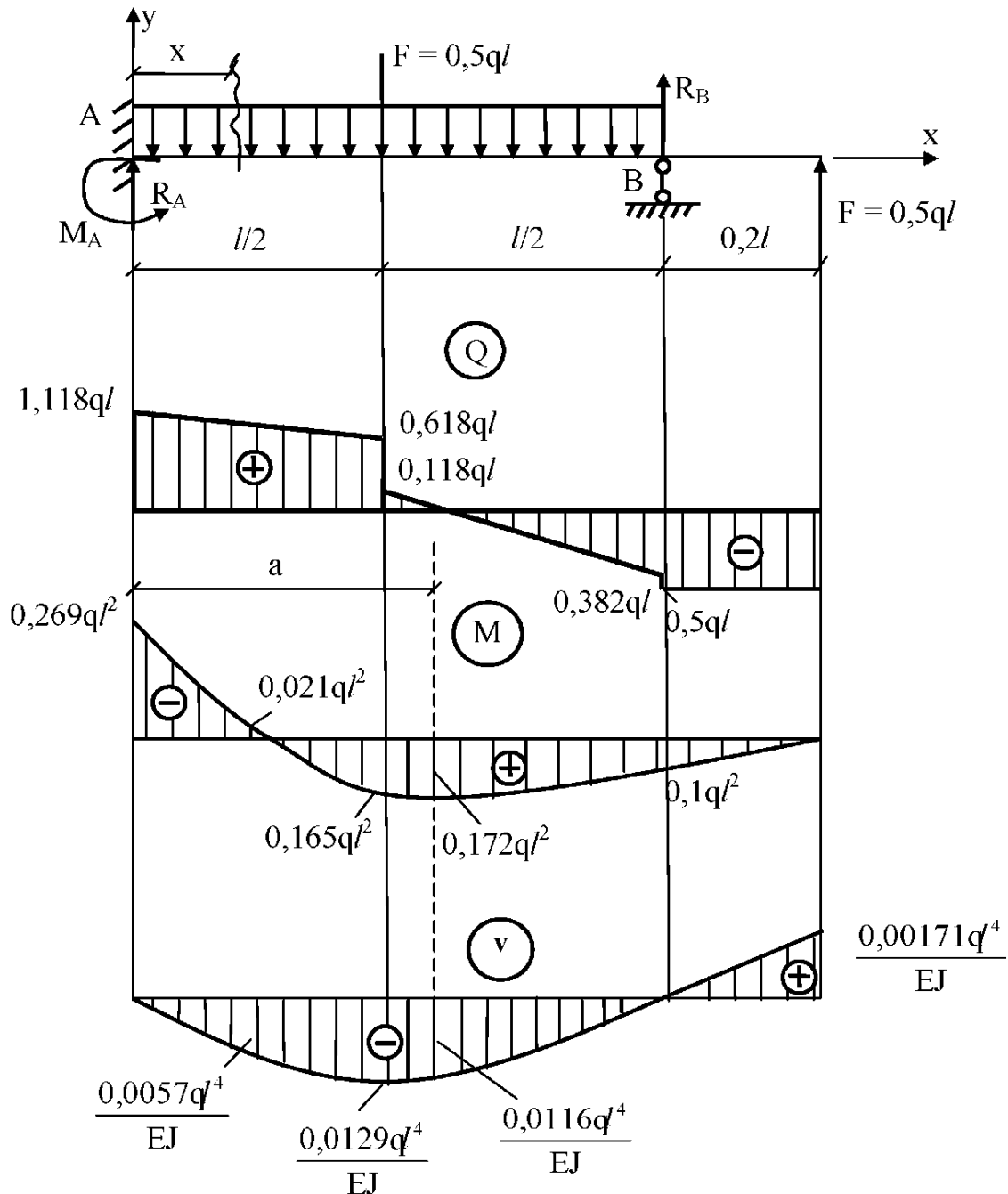


Рис. 35

Правый участок ($l \leq x \leq 1,2l$).

Для этого участка простые выражения для Q и M получим, если рассмотрим правую отсеченную часть балки:

$$Q = -F = -0,5ql; \quad M = F(1,2l - x) = 0,5ql(1,2l - x);$$

$$\text{при } x = l; \quad Q = -0,5ql; \quad M = 0,1ql^2;$$

при $x = 1,2l$; $Q = -0,5ql$; $M = 0$.

Найдем расстояние a (см. рис. 35), при котором будем иметь наибольший положительный момент. Для этого выражение для поперечной силы среднего участка приравняем к нулю, где вместо x подставим a : $Q = 0,618ql - qa = 0$, откуда $a = 0,618l$. Тогда изгибающий момент на расстоянии $x = a$ (на основании выражения для среднего участка) будет

$$M = -M_A + R_A a - \frac{qa^2}{2} - F(a - \frac{l}{2}) =$$

$$= -0,269ql^2 + 1,118ql(0,618l) - \frac{q(0,618l)^2}{2} - 0,5ql(0,618l - 0,5l) = 0,172ql^2$$

3. Построим эпюру прогибов. Воспользуемся выражением (2). Тогда:

$$\text{при } x = l/4 \quad EJv = \frac{-M_A(l/4 - 0)^2}{2} + \frac{R_A(l/4 - 0)^3}{6} - \frac{q(l/4 - 0)^4}{24};$$

$$EJv = -\frac{0,269ql^2(0,25l)^2}{2} + \frac{1,118ql(0,25l)^3}{6} - \frac{q(0,25l)^4}{24};$$

$$v = \frac{0,00566ql^4}{EJ};$$

$$\text{при } x = l/2 \quad EJv = -\frac{0,269ql^2(0,5l)^2}{2} + \frac{1,118ql(0,5l)^3}{6} - \frac{q(0,5l)^4}{24};$$

$$v = -0,0129ql^4/EJ;$$

$$\text{при } x = 0,75l;$$

$$EJv = -\frac{0,269ql^2(0,75l)^2}{2} + \frac{1,118ql(0,75l)^3}{6} - \frac{q(0,75l)^4}{24} - \frac{F(0,75l - 0,5l)^3}{6}.$$

Учитывая, что $F = 0,5ql$, получаем $v = -0,0116ql^4/EJ$;

$$\text{при } x = l \quad EJv = \frac{0,269ql^2 \cdot l^2}{2} + \frac{1,118ql^3}{6} - \frac{q(l)^4}{24} - \frac{F(l - 0,5l)^3}{6};$$

$$v = -0,0001ql^4/EJ \approx 0;$$

$$\text{при } x = 1,2l$$

$$EJv = -\frac{M_A(1,2l - 0)^2}{2} + \frac{R_A(1,2l - 0)^3}{6} - \frac{F(1,2l - 0,5l)^3}{6} + \frac{R_B(1,2l - l)^3}{6} - \frac{q(1,2l - 0)^4}{24} +$$

$$+ \frac{q(1,2l - l)^4}{24}.$$

При составлении последнего уравнения нагрузка q продолжается до рассматриваемого сечения $x = 1,2l$ (фактически на консоли она отсутствует), поэтому на консоли приложена такая же нагрузка q , но с обратным знаком. Таким образом, появилось последнее слагаемое в уравнении:

$$EJv = \frac{-0,269ql^2(1,2l)^2}{2} + \frac{1,118ql(1,2l)^3}{6} - \frac{0,5ql(0,7l)^3}{6} - \frac{0,118ql(0,2l)^3}{6} - \frac{q(1,2l)^4}{24} +$$

$$+ \frac{q(0,2l)^4}{24};$$

$$EJv = 0,00171ql^4; \quad v = \frac{0,00171q^4}{EJ}.$$

Построенная эпюра прогибов представлена на рис. 35.

ЗАДАЧА 7. РАСЧЕТ БАЛКИ, ИСПЫТЫВАЮЩЕЙ КОСОЙ ИЗГИБ

Требуется: подобрать сечение двутавровой балки, если на неё действует нормативный момент M , приняв коэффициент перегрузки $k=1,1$, коэффициент условия работы $V_c = 0,9$, расчетное сопротивление $R = 21 \text{ кН/см}^2$ (рис. 36); определить положение нулевой линии; вычислить полный прогиб балки от нормативных нагрузок в середине пролёта АВ; построить эпюру нормальных напряжений от расчётных нагрузок для наиболее напряжённого сечения.

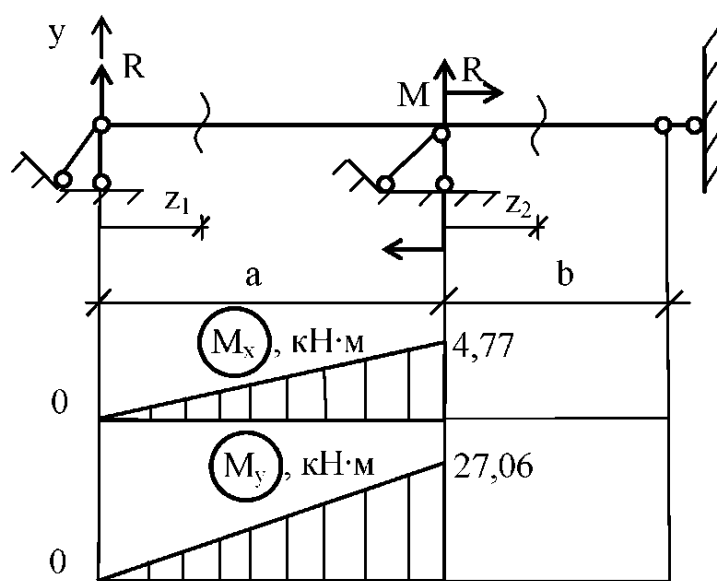


Рис. 36

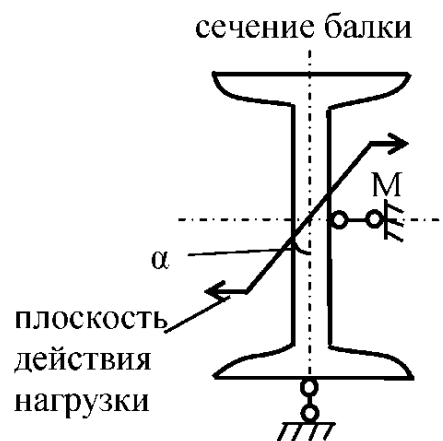


Рис. 37

Дано: угол наклона момента $\alpha = 80^\circ$ (рис. 37), $M = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $a = 3 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$.

Решение. 1) Разложим нагрузку на составляющие (рис. 16):

$$M_x = M \cos \alpha = 25 \cdot 0,174 = 4,34 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = M \sin \alpha = 25 \cdot 0,985 = 24,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Найдём расчётные нагрузки:

$$M_x = 4,34 \cdot 1,1 = 4,77 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = 24,6 \cdot 1,1 = 27,06 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

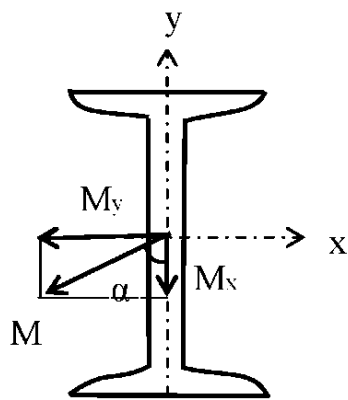


Рис. 38

Построим эпюры изгибающих моментов от расчетных нагрузок отдельно от их вертикальных и горизонтальных составляющих.

От вертикальной составляющей. Найдём опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, M_x - R_x^B \cdot 3 = 0;$$

$$R_x^B = M_x / 3 = 4,77 / 3 = 1,59 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; R_x^A + R_x^B = 0;$$

$$R_x^A = -R_x^B = -1,59 \text{ кН.}$$

Построим эпюру моментов:

участок 1 ($0 \leq z_1 \leq 3$).

$$M_{x1} = R_x^A \cdot z_1; \text{ при } z_1 = 0 \quad M_{x1} = 0;$$

$$\text{при } z_1 = 3 \text{ м} \quad M_{x1} = -1,59 \cdot 3 = -4,77 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

участок 2 ($3 \leq z_2 \leq 5$).

$$M_{x2} = R_x^A \cdot z_2 + M_x + R_x^B \cdot (z_2 - 3);$$

$$\text{при } z_2 = 3 \text{ м} \quad M_{x2} = -1,59 \cdot 3 + 4,77 = 0;$$

$$\text{при } z_2 = 5 \text{ м} \quad M_{x2} = -1,59 \cdot 5 + 4,77 + 1,59 \cdot 2 = 0.$$

Аналогично построим эпюру изгибающих моментов от горизонтальной составляющей:

$$\sum M_A = 0; M_y - R_y^B \cdot 3 = 0;$$

$$R_y^B = M_y / 3 = 27,06 / 3 = 9,02 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0, R_y^A + R_y^B = 0;$$

$$R_y^A = -R_y^B = -9,02 \text{ кН};$$

$$M_y = R_y^A \cdot 3 = -9,02 \cdot 3 = -27,06 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Подберём сечение балки:

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_c R; \quad \frac{477}{371} + \frac{2706}{41,5} \leq 0,9 \cdot 21.$$

Используем метод повторных попыток:

Примем двутавр №27 ($W_x = 371 \text{ см}^3$, $W_y = 41,5 \text{ см}^3$).

Проверим прочность:

$$\frac{477}{371} + \frac{2706}{41,5} = 66,5 > 18,9 \text{ кН/см}^2 \text{ — не удовлетворяет.}$$

Примем двутавр № 55 ($W_x = 151 \text{ см}^3$, $W_y = 2095 \text{ см}^3$)

$$\frac{477}{2095} + \frac{2706}{151} = 18,15 < 18,9 \text{ кН/см}^2 \text{ — удовлетворяет.}$$

2) Определим положение нулевой линии.

Для двутавра №55: $h = 55 \text{ см}$, $b = 18 \text{ см}$,
 $I_x = 55962 \text{ см}^4$; $I_y = 1356 \text{ см}^4$;

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{I_x}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{55962}{1356} \cdot 5,67 = -234,1;$$

$\beta = -89,76^\circ$. Отложим угол β и проведем нулевую линию.

3) Определим нормальные напряжения в наиболее опасном сечении.

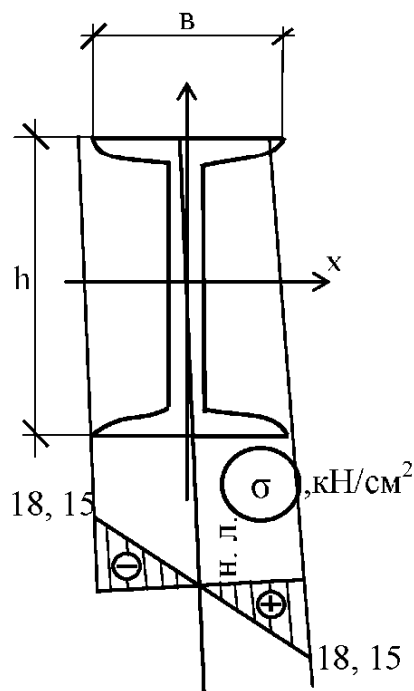


Рис. 39

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{477}{2095} + \frac{2706}{151} = 18,15 \text{ кН/см}^2$$

4) Найдём прогиб от нормативных нагрузок. Разложим нормативные нагрузки на составляющие.

$$M_x = M \cdot \cos \alpha = 4,34 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_y = M \cdot \sin \alpha = 24,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим опорные реакции от вертикальных и горизонтальных составляющих нормативных нагрузок.

От вертикальных:

$$R_x^B = \frac{M_x}{3} = \frac{4,34}{3} = 1,45 \text{ кН}; \quad R_x^A = -R_x^B = -1,45 \text{ кН}.$$

От горизонтальных:

$$R_y^B = \frac{M_y}{3} = \frac{24,6}{3} = 8,2 \text{ кН}; \quad R_y^A = -R_y^B = -8,2 \text{ кН}.$$

Сначала найдём прогиб от вертикальных составляющих. Используем метод начальных параметров.

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{EJ} (EJ v_0' + \sum M(z-a) + \sum \frac{F(z-b)^2}{2}); \\ v &= \frac{1}{EJ} (EJ v_0 + EJ v_0' \cdot z + \sum \frac{M(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6}). \end{aligned} \quad (22)$$

Определим начальные параметры. Воспользуемся условиями:

а) $z = 0, v = 0$;

б) $z = 3 \text{ м}, v = 0$.

Подставим условие (а) в уравнение (22):

$$0 = \frac{1}{EJ} (EJ v_0 + EJ v_0' \cdot 0 + \frac{R_x^A \cdot 0^2}{2}). \text{ Отсюда прогиб в начале координат } EJ v_0 = 0.$$

Подставим условие (б) в уравнение (22);

$$0 = \frac{1}{EJ} (0 + EJ v_0' \cdot 3 + \frac{R_x^A \cdot 3^3}{6}). \text{ Угол поворота в начале координат}$$

$$EJ v_0' = -\frac{R_x^A \cdot 27}{18} = -\frac{-1,45 \cdot 27}{18} = 2,18;$$

$$EJ v_0' = 2,18.$$

Подставим начальные параметры в уравнение (22):

$$v = \frac{1}{EJ} (2,18 \cdot z + \sum \frac{M(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6});$$

при $z = 1,5 \text{ м}$

$$v_x = \frac{1}{EJ_x} (2,18 \cdot 1,5 - \frac{1,45(1,5)^3}{6}) = \frac{2,45 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 55962} = 0,0021 \text{ см};$$

Вычислим прогиб от горизонтальной составляющей.

$$EJ v_0 = 0;$$

$$EJ v_0' = - \frac{R_y \cdot 27}{18} = - \frac{8,2 \cdot 27}{18} = 12,3;$$

$$EJ v_0' = 12,3.$$

Подставим начальные параметры в уравнение (22):

$$v = \frac{1}{EJ} (12,3 \cdot z + \sum \frac{M(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6});$$

при $z = 1,5$ м

$$v_y = \frac{1}{EJ_y} (12,3 \cdot 1,5 - \frac{8,2(1,5)^3}{6}) = \frac{13,84 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1356} = 0,49 \text{ см};$$

$$v = \sqrt{v_y^2 + v_x^2} = \sqrt{(0,49)^2 + (0,0021)^2} = 0,49 \text{ см}.$$

ЗАДАЧА 8. РАСЧЕТ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОЙ КОЛОННЫ

Для внецентренно сжатой короткой колонны с поперечным сечением, представленным на рис. 40 требуется:

- определить величину расчётной сжимающей силы F , если расчётное сопротивление для материала колонны $R = 21 \text{ кН/см}^2$, а коэффициент условия работы колонны $\gamma_c = 0,9$;
- определить положение нулевой линии;
- построить от действия расчётной силы F эпюру нормальных напряжений для поперечного сечения колонны;
- построить ядро сечения.

Дано:

2 уголка 110 x 110 x 8 мм, $t = 6 \text{ см}$, $k = 13 \text{ см}$.

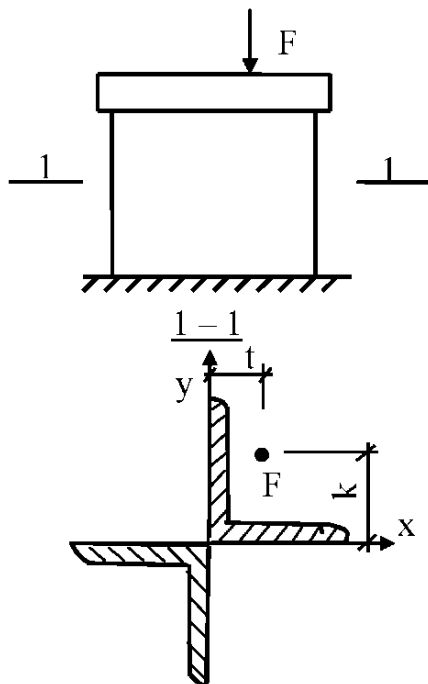


Рис. 40

Решение.

а) Определим геометрические характеристики сечения (рис. 40).

Из сортамента берём: $J_{x1} = J_{y1} = 198,17 \text{ см}^4$, $b = 11 \text{ см}$, $h = 11 \text{ см}$, $z_0 = 3 \text{ см}$, $A_1 = 17,2 \text{ см}^2$.

Вычислим моменты инерции поперечного сечения колонны.

$$J_x = (J_{x1} + a^2 A_1) 2 = (198,17 + 3^2 \cdot 17,2) \cdot 2 = 705,94 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_x = 705,94 \text{ см}^4;$$

$$A = 2A_1 = 2 \cdot 17,2 = 34,4 \text{ см}^2.$$

Радиусы инерции:

$$r_x^2 = r_y^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{705,94}{34,4} = 20,52 \text{ см}^2.$$

Определим силу F , которую выдержит колонна:

$$\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{r_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{r_y^2}\right) \leq R_{\text{вс}};$$

$$F = \frac{R_{\text{вс}} A}{1 + \frac{y_p \cdot y}{r_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{r_y^2}} = \frac{21 \cdot 0,9 \cdot 34,4}{1 + \frac{13 \cdot 11}{20,52} + \frac{6 \cdot 0}{20,52}} = 81,58 \text{ кН.}$$

$$F = 81,58 \text{ кН.}$$

б) Определим положение нулевой линии:

$$a_x = -\frac{r_y^2}{x_p} = -\frac{20,52}{6} = -3,42 \text{ см;}$$

$$a_y = -\frac{r_x^2}{y_p} = -\frac{20,52}{13} = -1,58 \text{ см.}$$

в) Определим нормальные напряжения и построим эпюру σ .

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{x_p \cdot x}{r_y^2} + \frac{y_p \cdot y}{r_x^2}\right);$$

$$\sigma_{\text{л}} = -\frac{81,58}{34,4} \left(1 + \frac{6 \cdot 0}{20,52} + \frac{13 \cdot 11}{20,52}\right) = -18,8 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{\text{с}} = -\frac{81,58}{34,4} \left(1 + \frac{13 \cdot (-11)}{20,52} + \frac{6 \cdot 0}{20,52}\right) = 14,1 \text{ кН/см}^2.$$

г) Построим ядро сечения. Воспользуемся формулами:

$$x_{\text{я}} = -\frac{r_y^2}{a_x}; \quad y_{\text{я}} = -\frac{r_x^2}{a_y}.$$

Проведём нулевую линию 1 – 1. Она пересекает координатные оси x и y соответственно на расстояниях: $a_x = -11 \text{ см}$, $a_y = 11 \text{ см}$.

$$x_{\text{я}} = -\frac{20,52}{-11} = 1,87 \text{ см}; \quad y_{\text{я}} = -\frac{20,52}{11} = -1,87 \text{ см.}$$

Отложим значения $x_{\text{я}}$ и $y_{\text{я}}$ получим точку 1.

Проведём нулевую линию 2 – 2: $a_x = 11 \text{ см}$, $a_y = 11 \text{ см}$.

$x_{\text{я}} = -1,87 \text{ см}$; $y_{\text{я}} = -1,87 \text{ см}$, получили точку 2.

Проведём нулевую линию 3 – 3: $a_x = 11 \text{ см}$, $a_y = -11 \text{ см}$,

$x_{\text{я}} = -1,87 \text{ см}$; $y_{\text{я}} = 1,87 \text{ см}$, получили точку 3.

Проведём нулевую линию 4 – 4: $a_x = -11 \text{ см}$, $a_y = -11 \text{ см}$,

$x_{\text{я}} = 1,87 \text{ см}$; $y_{\text{я}} = 1,87 \text{ см}$, получили точку 4.

Соединим получившиеся точки и построим ядро сечения (рис. 41).

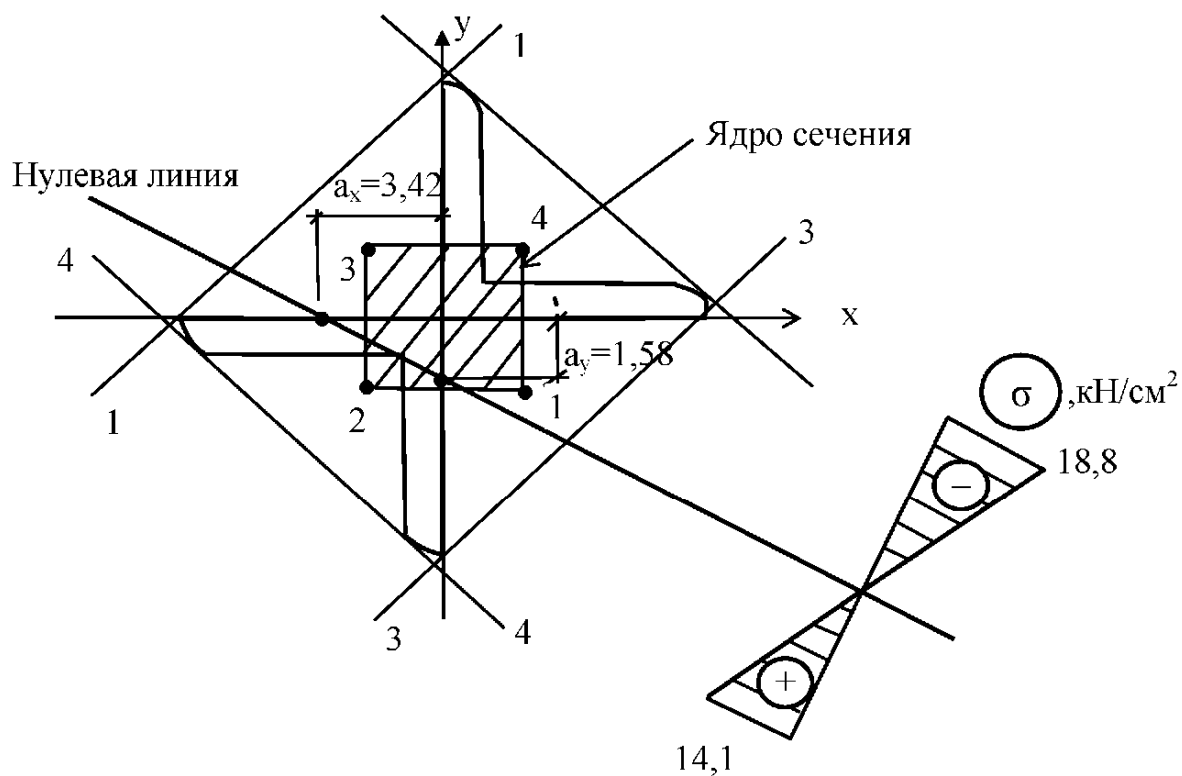


Рис. 41

ЗАДАЧА 9. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

Для стальной стойки (рис. 42), нагруженной расчетной силой $N = 546$ кН, требуется подобрать сечение стойки в виде трубы (рис. 43) и определить критическую силу. Расчетное сопротивление материала стойки $R = 21$ кН/см², модуль упругости $E = 21 \cdot 10^3$ кН/см², длина стойки $\ell = 6$ м.

Решение.

Выразим площадь, момент и радиус инерции сечения через диаметр:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} - \frac{\pi(0,8d)^2}{4} = 0,282d^2;$$

$$J_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} - \frac{\pi(0,8d)^4}{64} = 0,02897d^4;$$

$$r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{0,02897d^4}{0,282d^2}} = 0,3202d.$$

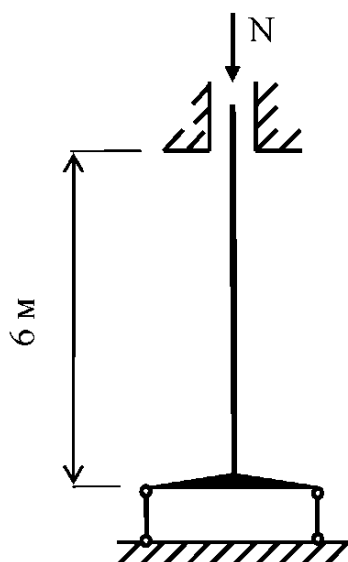


Рис. 42

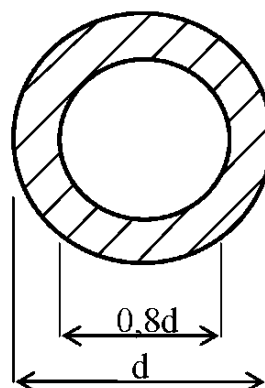


Рис. 43

1. Подберем сечение стойки по формуле $A = \frac{N}{\varphi R}$, в которую входят две неизвестные величины (A, φ), поэтому задача решается способом последовательных приближений. Для этого будем задаваться величиной φ , которая может изменяться от 0 до 1,0, и подберем сечение стойки.

1-е приближение. Принимаем $\varphi = 0,43$ и определяем:

$$A = \frac{N}{\varphi R} = \frac{546}{0,43 \cdot 21} = 60,5 \text{ см}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{A}{0,282}} = \sqrt{\frac{60,5}{0,282}} = 14,62 \text{ см};$$

$$r_x = 0,3202 \cdot 14,62 = 4,69 \text{ см}.$$

Для данной схемы закрепления стержня $\mu = 1$.

$$\lambda = \frac{\mu \cdot \ell}{r_x} = \frac{1 \cdot 600}{4,69} = 127,9.$$

По таблице приложения 7 для значения λ находим $\varphi = 0,407$.

Проверим сечение на устойчивость по формуле: $\frac{N}{\varphi A} \leq R$;

$$\frac{546}{0,407 \cdot 60,5} = 22,17 > 21 \text{ кН/см}^2.$$

Стержень работает с перенапряжением.

2-е приближение.

$$\varphi = \frac{0,43 + 0,407}{2} = 0,418;$$

$$A = \frac{546}{0,418 \cdot 21} = 62,2 \text{ см}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{62,2}{0,282}} = 14,838 \text{ см};$$

$$r_x = 0,3202 \cdot 14,838 = 4,75 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{1 \cdot 600}{4,75} = 126,3.$$

По таблице находим $\varphi = 0,417$.

Проверка: $\frac{546}{0,417 \cdot 62,2} = 21,05 > 21 \text{ кН/см}^2$.

Здесь также имеем перенапряжение. Очередное приближение делать не будем, а увеличим сечение и примем $d = 15 \text{ см}$. Проверим стойку с принятым сечением на устойчивость:

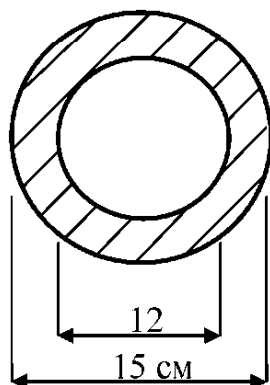


Рис. 44

$$A = 0,282 \cdot 15^2 = 63,59 \text{ см}^2;$$

$$J_x = 0,02897 \cdot 15^4 = 1466,0 \text{ см}^4;$$

$$r_x = 0,3202 \cdot 15 = 4,80 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{1 \cdot 600}{4,80} = 125; \varphi = 0,423;$$

$$\frac{N}{\varphi \cdot A} = \frac{546}{0,423 \cdot 63,59} = 20,30 < 21 \text{ кН/см}^2.$$

Недонапряжение составляет: $\frac{21 - 20,30}{21} \cdot 100 = 3,3\%$,
что меньше 5%.

Следовательно, условие устойчивости удовлетворительное. Полученное поперечное сечение стойки показано на рис. 44.

2. Определим критическую силу. Так как $\lambda = 125 > 100$, критическую силу найдем по формуле Эйлера:

$$N_{кр.} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 21 \cdot 10^3 \cdot 1466}{(1 \cdot 600)^2} = 843,2 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости:

$$K = \frac{N_{кр.}}{N} = \frac{843,2}{546} = 1,54.$$

ЗАДАЧА 10. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Стойка нагружена вертикальной осевой расчетной силой N и горизонтальной поперечной расчетной нагрузкой F согласно рис. 45. В каждой трети высоты стойки имеются шарнирные связи, препятствующие перемещению этих точек из плоскости конструкции (из плоскости чертежа).

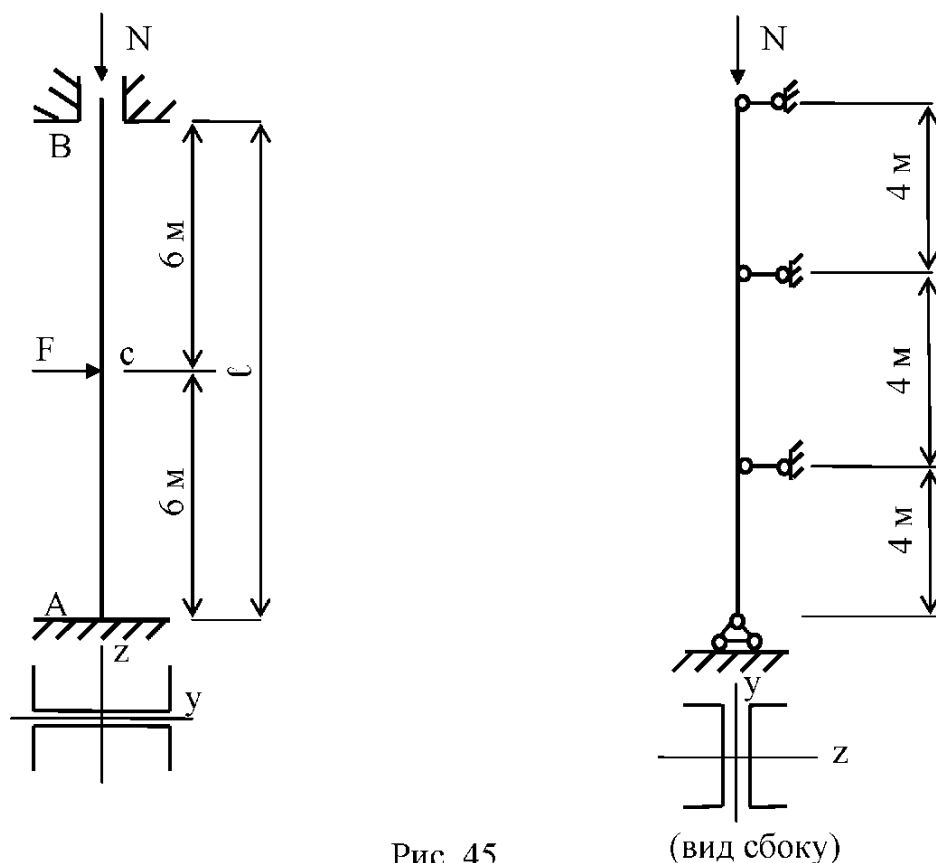


Рис. 45

(вид сбоку)

Для заданной стойки требуется:

1) подобрать из условия прочности сечение стойки из двух рядом стоящих жестко соединенных швеллеров. Проверить подобранное сечение на прочность и устойчивость в плоскости действия нагрузки;

2) проверить стойку на устойчивость в плоскости, перпендикулярной плоскости действия поперечной нагрузки.

Дано: $N = 780 \text{ кН}$; $F = 25,2 \text{ кН}$; $\ell = 12 \text{ м}$; $E = 21 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$.

Решение.

1. Построим эпюру изгибающих моментов от силы F . Балка статически неопределима. Для ее расчета воспользуемся методом начальных параметров. Выбираем начало координат в точке А.

Опорные реакции в начале координат неизвестны. Для определения опорных реакций составим уравнения углов поворота и погибов для сечения В ($x = \ell$).

$$v' = v'_0 - \frac{M_A \ell}{EJ} + \frac{R_A \ell^2}{2EJ} - \frac{F(\ell - \ell/2)^2}{2EJ};$$

$$v = v_0 + v'_0 \ell - \frac{M_A \ell^2}{2EJ} + \frac{R_A \ell^3}{6EJ} - \frac{F(\ell - \ell/2)^3}{6EJ}.$$

Оба конца стержня зашечлены. Следовательно, имеем:

а) при $x = 0$; $v'_0 = 0$, $v_0 = 0$;

б) при $x = 12$ м; $v' = 0$, $v = 0$.

Используя эти условия, получаем:

$$-\frac{M_A \cdot 12}{EJ} + \frac{R_A \cdot 12^2}{2EJ} - \frac{F \cdot 12^2}{8EJ} = 0;$$

$$-\frac{M_A \cdot 12^2}{2EJ} + \frac{R_A \cdot 12^3}{6EJ} - \frac{F \cdot 12^3}{48EJ} = 0.$$

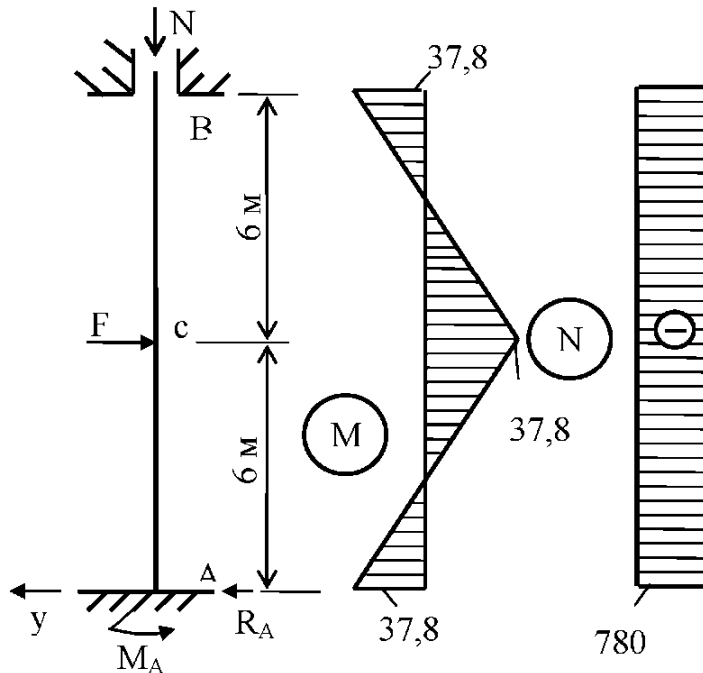


Рис. 46

Решая систему уравнений, находим:

$$R_A = \frac{F}{2}; M_A = \frac{3}{2}F.$$

Подставив значение F , будем иметь:

$$R_A = \frac{25,2}{2} = 12,6 \text{ кН};$$

$$M_A = \frac{3}{2} \cdot 25,2 = 37,8 \text{ кН·м}.$$

Теперь построим эпюры M и N (рис. 46). На первом участке:

$$M_1 = -M_A + R_A \cdot x_1 = -37,8 + 12,6x_1.$$

$$\text{при } x_1 = 0; M_A = -37,8 \text{ кН·м};$$

$$\text{при } x_1 = 6 \text{ м}; M_C = -37,8 + 12,6 \cdot 6 = 37,8 \text{ кН·м}.$$

На втором участке

$$M_2 = -M_A + R_A x_2 - F(x_2 - 6) = -37,8 + 12,6 x_2 - 26,2(x_2 - 6).$$

$$\text{при } x_2 = 6 \text{ м}; M_C = 37,8 \text{ кН·м};$$

$$x_2 = 12 \text{ м}; M_B = -37,8 + 12,6 \cdot 12 - 26,26 = -37,8 \text{ кН·м}.$$

Из эпюры M и N видно, что при расчете по недеформированной схеме три сечения A , B и C являются равно опасными. С учетом прогиба опасным является сечение C .

2. Определим прогиб в сечении C . При расчете по деформированной схеме к изгибающему моменту в сечении C добавится дополнительный момент от поперечной силы $\Delta M = N \cdot v_C$. Найдем прогиб в сечении C методом начальных параметров ($x = 6$ м):

$$v_C = v_0 + v'_0 - \frac{M_A \ell^2}{2EJ} + \frac{R_A \ell^3}{6EJ} = 0 + 0 - \frac{37,8 \cdot 6^2}{2EJ} + \frac{12,6 \cdot 6^3}{6EJ} = \frac{226,8(\text{кН·м}^3)}{EJ} = \frac{226,8 \cdot 10^6(\text{кН·см}^3)}{EJ}.$$

3. Подберем сечение стойки. В опасном сечении стойки действуют расчетная продольная сила $N = 780$ кН и расчетный изгибающий момент от поперечной нагрузки $M_C = 37,8$ кН·м. К этому моменту от поперечной нагрузки нужно добавить дополнительный момент ΔM от продольной силы. Так как численное значение прогиба в середине пролета пока неизвестно, для нахождения момента ΔM

зададимся прогибом¹ от поперечной нагрузки $v_c = (1/600) \ell = 1200/600 = 2 \text{ см}$.
Дополнительный момент

$$\Delta M = N \cdot v_c = 780 \cdot 2 = 1560 \text{ кН} \cdot \text{см} = 15,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Полный изгибающий момент

$$M_c + \Delta M = 37,8 + 15,6 = 53,4 \text{ кН} \cdot \text{м} = 5340 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

Подберем сечение стойки из двух швеллеров по формуле²

$$\frac{N}{A} + \frac{M_c + \Delta M}{W} \leq R. \quad (1)$$

$$\text{Отсюда: } W = \frac{1}{R} [KN + (M_c + \Delta M)].$$

Если примем $K = W/A = 6$, то будем иметь:

$$W = \frac{1}{21} (6 \cdot 780 + 5340) = 477 \text{ см}^3.$$

Момент сопротивления одного швеллера должен быть $W = 239 \text{ см}^3$.

Принимаем два швеллера № 24 со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} A &= 30,6 \text{ см}^2; & 2A &= 61,2 \text{ см}^2; \\ J &= 2900 \text{ см}^4; & 2J &= 5800 \text{ см}^4; \\ W &= 242 \text{ см}^3; & 2W &= 484 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Проверим сечение стойки на прочность. Предварительно найдем:

$$\text{а) жесткость } EJ = 21 \cdot 10^3 \cdot 5800 = 1218 \cdot 10^5 = \text{кН} \cdot \text{см}^2;$$

б) прогиб от поперечной нагрузки

$$v_c = \frac{226,8 \cdot 10^6}{1218 \cdot 10^5} = 1,862 \text{ см};$$

в) приведенную длину стержня

$$\ell_{\text{пр}} = \mu \ell = 0,5 \cdot 1200 = 600 \text{ см};$$

г) Эйлерову критическую силу

$$N_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell_{\text{пр}}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 1218 \cdot 10^5}{600^2} = 3336 \text{ кН};$$

д) полный прогиб с учетом действия продольной силы

¹ Прогибы стальных балок обычно находятся в пределах от $\frac{1}{200}$ до $\frac{1}{1000}$ пролета балки. Поэтому в начале рас-

чета для консольной балки задать прогиб $v = \frac{1}{200} \ell$, для опертой по концам $v = \frac{1}{400} \ell$, а для жестко защем-

ленной $v = \frac{1}{600} \ell$ и определить дополнительный момент.

² Подобрать сечение по формуле (1) сразу нельзя, так как в нее входят две неизвестные величины A , W . Для пре-
одоления этого затруднения формулу (1) можно записать следующим образом $W > \frac{1}{R} [KN + (M_c + \Delta M)]$, где

$K = \frac{W}{A}$. Для прокатных профилей это отношение находится в пределах: $K=2-12$ – для швеллеров; $K=4-18$ – для двутавров.

$$v = \frac{v_c}{1 - \frac{N}{N_c}} = \frac{1,862}{1 - \frac{780}{3336}} = 2,43 \text{ см};$$

е) дополнительный момент от продольной силы

$$\Delta M = N \cdot v = 780 \cdot 2,43 = 1895 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

ж) полный момент в опасном сечении С

$$M = M_c + \Delta M = 3780 + 1895 = 5675 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

Подставим полученные значения в формулу (1):

$$\frac{780}{61,2} + \frac{5675}{484} = 24,48 \text{ кН/см}^2 > 21 \text{ кН/см}^2.$$

Так как действительные напряжения больше расчетных напряжений, прочность стойки не обеспечена. Примем швеллер большего размера. Возьмем 2 швеллера № 27, у которого:

$$\begin{aligned} A &= 35,2 \text{ см}^2; & 2A &= 70,4 \text{ см}^2; \\ J &= 4160 \text{ см}^4; & 2J &= 8320 \text{ см}^4; \\ W &= 308 \text{ см}^3; & 2W &= 616 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Проверим новое сечение стойки на прочность. Предварительно также вычислим:

а) жесткость: $EJ = 21 \cdot 10^3 \cdot 8320 = 1747 \cdot 10^5 \text{ кН} \cdot \text{см}^2;$

б) прогиб от поперечной нагрузки

$$v_c = \frac{226,8 \cdot 10^6}{1747 \cdot 10^5} = 1,298 \text{ см};$$

в) Эйлерову критическую силу

$$N_{\text{Э}} = \frac{3,14^2 \cdot 1747 \cdot 10^5}{600^2} = 4785 \text{ кН};$$

г) полный прогиб с учетом действия продольной силы:

$$v = \frac{1,298}{1 - \frac{780}{4785}} = 1,551 \text{ см};$$

д) дополнительный момент от продольной силы

$$M = 780 \cdot 1,551 = 1210 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

е) полный момент

$$M = 3780 + 1210 = 4990 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

Подставив данные значения в формулу (1), получаем:

$$\frac{780}{70,4} = \frac{4990}{616} = 19,18 \text{ кН/см}^2 < 21 \text{ кН/см}^2.$$

Недонапряжение составляет 8,6 %.

Сечение из двух швеллеров № 27 удовлетворяет условиям прочности.

4. Выполним проверку на устойчивость в плоскости действия нагрузки. Определим радиус инерции:

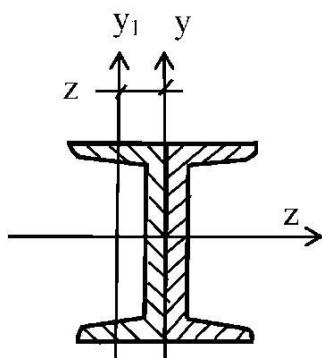


Рис. 47

$$r_z = \sqrt{\frac{2J}{2A}} = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{4160}{35,2}} = 10,9 \text{ см.}$$

Вычислим гибкость стойки относительно оси z и найдем коэффициент продольного изгиба φ :

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{r_z} = \frac{0,5 \cdot 1200}{10,9} = 55; \quad \varphi = 0,844.$$

Проверив стойку на устойчивость по формуле $\frac{N}{\varphi A} \leq R$, получаем:

$$\frac{780}{0,844 \cdot 70,4} = 12,1 < 21 \text{ кН/см}^2.$$

Условие устойчивости стойки обеспечено.

5. Проверим стойку на прочность из плоскости действия горизонтальной нагрузки. Определим момент инерции сечения относительно оси y (рис. 47):

$$J_y = 2(J_{y1} + z^2 A) = 2(262 + 2,47^2 \cdot 35,2) = 953,5 \text{ см}^4.$$

Найдем радиус инерции сечения:

$$r_y = \sqrt{\frac{953,5}{70,4}} = 3,68 \text{ см}^2.$$

Определяем гибкость и коэффициент φ . Так как в плоскости оси Y имеем шарнирные опоры по концам стойки и в промежутке, то приведенная длина

$$\ell_{\text{пр}} = \mu \ell_1 = 1 \cdot \frac{\ell}{3} = 1 \frac{12}{3} = 4 \text{ м.}$$

$$\text{Тогда } \lambda_y = \frac{400}{3,68} = 108,7; \quad \varphi = 0,521.$$

Проверив стойку на устойчивость по формуле $\frac{N}{\varphi \cdot A} \leq R$, получаем:

$$\frac{780}{0,521 \cdot 70,4} = 21,26 > 21, \text{ кН/см}^2.$$

Устойчивость стойки в плоскости, перпендикулярной плоскости действия горизонтальной нагрузки, не обеспечена.

Принимаем стойку с сечением, состоящим из двух швеллеров 30, и проверим устойчивость в этой плоскости. Для № 30 имеем:

$$J_{y1} = 327 \text{ см}^4;$$

$$A = 40,5 \text{ см}^2; \quad z = 2,52 \text{ см.}$$

$$\text{Тогда } J_y = 2(J_{y1} + z^2 A) = 2(327 + 2,52^2 \cdot 40,5) = 1168,4 \text{ см}^4;$$

$$r_y = \sqrt{\frac{1168,4}{81}} = 3,80 \text{ см}; \quad \lambda_y = \frac{400}{3,80} = 105,3; \quad \varphi = 0,545.$$

$$\text{Проверка: } \frac{780}{0,545 \cdot 81} = 17,67 < 21 \text{ кН/см}^2.$$

Устойчивость обеспечена.

Окончательно принимаем стойку из двух швеллеров № 30 (рис. 48).

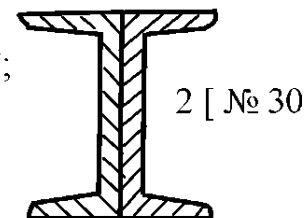


Рис. 48

ЗАДАЧА 11. РАСЧЕТ ТРУБЫ

Произвести расчёт трубы с внутренним радиусом r_B и наружным r_H , подвергнутой внутреннему давлению p_B и наружному p_H (рис. 49). Дано: $r_B = 22$ см, $r_H = 35$ см, $p_B = 55$ МПа, $p_H = 20$ МПа, $[\sigma] = 100$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,35$.

Требуется:

- а) определить нормальные напряжения в трубе;
- б) проверить прочность по теории наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) при допуске напряжении $[\sigma]$. В случае большого запаса прочности или перенапряжения, изменить наружный диаметр трубы и расчёт повторить;
- в) построить эпюры нормальных напряжений;
- г) определить увеличение (уменьшение) внутреннего и наружного радиусов трубы от действия давлений.

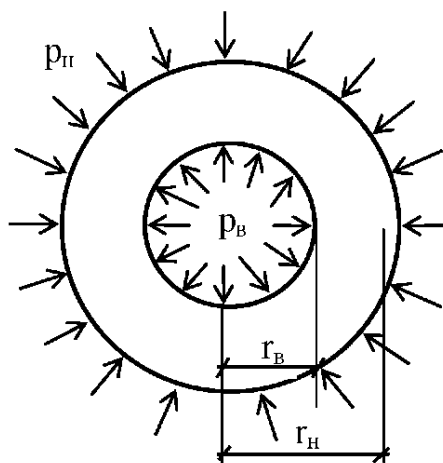


Рис. 49

Решение.

1. Определим радиальные и тангенциальные нормальные напряжения по формулам

$$\sigma_r = -\frac{1}{r_H^2 - r_B^2} \left[p_H r_H^2 \left(1 - \frac{r_B^2}{r^2} \right) + p_B r_B^2 \left(\frac{r_H^2}{r^2} - 1 \right) \right].$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{r_H^2 - r_B^2} \left[p_H r_H^2 \left(1 + \frac{r_B^2}{r^2} \right) - p_B r_B^2 \left(\frac{r_H^2}{r^2} + 1 \right) \right].$$

Напряжения в крайних внутренних точках:

$$r = r_B = 22 \text{ см} = 0,22 \text{ м}.$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{0,35^2 - 0,22^2} \left[20 \cdot 0,35^2 \left(1 - \frac{0,22^2}{0,22^2} \right) + 55 \cdot 0,22^2 \left(\frac{0,35^2}{0,22^2} - 1 \right) \right] = -55 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_o = -\frac{1}{0,35^2 - 0,22^2} [20 \cdot 0,35^2 (1 + \frac{0,22^2}{0,22^2}) - 55 \cdot 0,22^2 (\frac{0,35^2}{0,22^2} + 1)] = 60,73 \text{ МПа.}$$

Напряжение в крайних наружных точках:

$$r = r_n = 35 \text{ см} = 0,35 \text{ м.}$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{0,35^2 - 0,22^2} [20 \cdot 0,35^2 (1 - \frac{0,22^2}{0,35^2}) + 55 \cdot 0,22^2 (\frac{0,35^2}{0,35^2} - 1)] = -20 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{0,35^2 - 0,22^2} [20 \cdot 0,35^2 (1 + \frac{0,22^2}{0,35^2}) - 55 \cdot 0,22^2 (\frac{0,35^2}{0,35^2} + 1)] = 25,72 \text{ МПа.}$$

Опасными являются точки у внутренней поверхности трубы, в которых действуют главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_\theta = 60,73 \text{ МПа}$ и $\sigma_3 = \sigma_r = -55 \text{ МПа}$.

2. Проверим прочность трубы в этих точках по формуле

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]; \quad 60,73 + 55 = 115,73 > 100 \text{ МПа.}$$

Получим перенапряжение. Увеличим наружный радиус. Примем $r_n = 37 \text{ см}$.

Повторим расчёт:

$$\sigma_r = -\frac{1}{0,37^2 - 0,22^2} [20 \cdot 0,37^2 (1 - \frac{0,22^2}{0,22^2}) + 55 \cdot 0,22^2 (\frac{0,37^2}{0,22^2} - 1)] = -55 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{0,37^2 - 0,22^2} [20 \cdot 0,37^2 (1 + \frac{0,22^2}{0,22^2}) - 55 \cdot 0,22^2 (\frac{0,37^2}{0,22^2} + 1)] = 53,26 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_1 = 53,26 \text{ МПа,} \quad \sigma_3 = -55 \text{ МПа.}$$

Проверка:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 53,26 + 55 = 108,3 > 100 \text{ МПа.} \quad \text{Получили перенапряжение.}$$

Примем $r_n = 42 \text{ см}$. Будем иметь во внутреннем крае $\sigma_r = -55 \text{ МПа}$;

$$\sigma_\theta = 41,36 \text{ МПа.}$$

Проверка:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 41,36 + 55 = 96,36 < 100 \text{ МПа} - \text{удовлетворяет.}$$

Запас прочности:

$$\delta = -\frac{100 - 96,36}{100} \cdot 100\% = 3,64\% < 5\%.$$

Таким образом, радиусы трубы будут равны $r_b = 22 \text{ см}$, $r_n = 42 \text{ см}$.

3. Построим эпюры нормальных напряжений. Для этого вычислим дополнительно напряжения на средней линии трубы, то есть при

$$r = \frac{r_n + r_b}{2} = \frac{42 + 22}{2} = 32 \text{ см.}$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{0,42^2 - 0,22^2} [20 \cdot 0,42^2 (1 - \frac{0,22^2}{0,32^2}) + 55 \cdot 0,22^2 (\frac{0,42^2}{0,32^2} - 1)] = -29,56 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{0,42^2 - 0,22^2} [20 \cdot 0,42^2 (1 + \frac{0,22^2}{0,32^2}) - 55 \cdot 0,22^2 (\frac{0,42^2}{0,32^2} + 1)] = 16,03 \text{ МПа.}$$

Напряжения в крайних наружных точках ($r = r_n = 0,42 \text{ м}$):

$$\sigma_r = -20 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_o = -\frac{1}{0,42^2 - 0,22^2} [20 \cdot 0,42^2 (1 + \frac{0,22^2}{0,42^2}) - 55 \cdot 0,22^2 (\frac{0,42^2}{0,42^2} + 1)] = 6,47 \text{ МПа.}$$

Эпюры напряжений представлены на рис.50 в МПа.

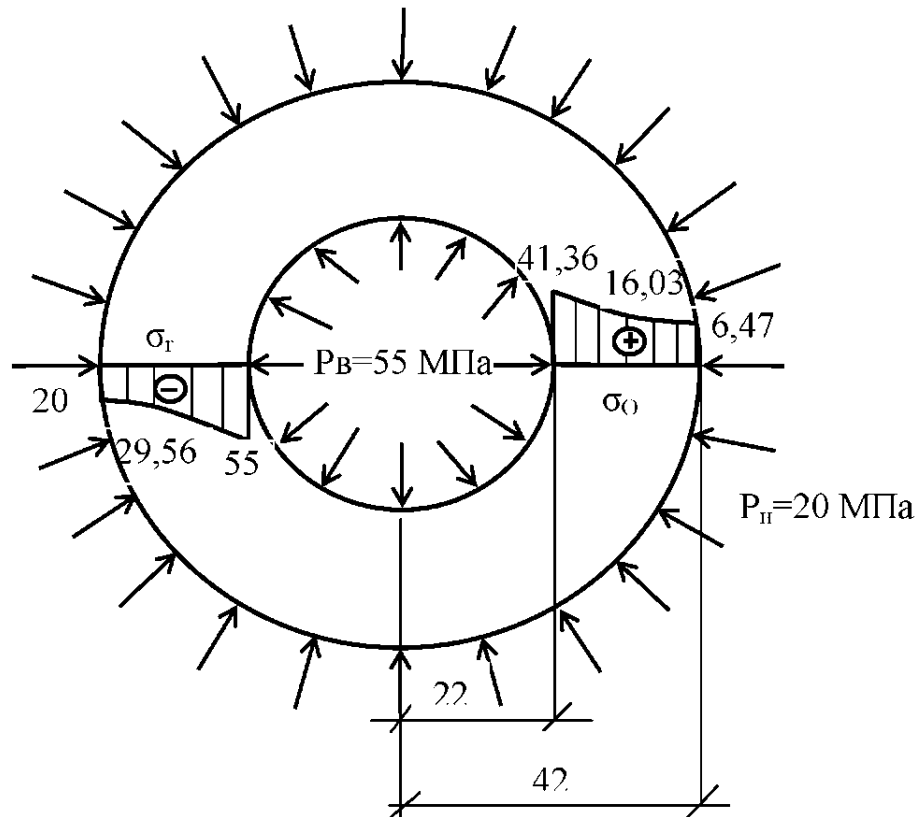


Рис. 50

4. Определим увеличения радиусов трубы.

Увеличение внутреннего радиуса:

$$U_{\text{в}} = \frac{r_{\text{в}}}{E} [p_{\text{в}} (\frac{r_{\text{н}}^2 + r_{\text{в}}^2}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2} + \mu) - 2 p_{\text{н}} \frac{r_{\text{н}}^2}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2}] = \frac{0,22}{2 \cdot 10^5} [55 (\frac{0,42^2 + 0,22^2}{0,42^2 - 0,22^2} + 0,35) - 2 \cdot 20 \frac{0,42^2}{0,42^2 - 0,22^2}] = 0,000067 \text{ м} = 0,067 \text{ мм.}$$

Увеличение наружного радиуса:

$$U_{\text{н}} = \frac{r_{\text{н}}}{E} [2 p_{\text{в}} (\frac{r_{\text{в}}^2}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2}) - p_{\text{н}} (\frac{r_{\text{н}}^2 + r_{\text{в}}^2}{r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2} - \mu)] = \frac{0,42}{2 \cdot 10^5} [2 \cdot 55 (\frac{0,22^2}{0,42^2 - 0,22^2}) - 20 (\frac{0,42^2 + 0,22^2}{0,42^2 - 0,22^2} - 0,35)] = 0,0000282 \text{ м} = 0,028 \text{ мм.}$$

ЗАДАЧА 12. РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

Тонкостенные стержни открытого профиля находят широкое применение в машиностроении, строительстве, авиации и в других областях техники, а также используется и в качестве элементов рам, ферм, подкрепляющих элементов пластин и оболочек или как самостоятельные детали машин.

Используя, тонкостенные стержни в конструкциях, следует иметь в виду, что при их нагружении возникают явления, не свойственные сплошным стержням, в частности: 1) гипотеза плоских сечений не подтверждается (при нагружении тонкостенного стержня происходит так называемая депланация (искривление) сечения за счет неравномерной деформации участков стержня); 2) принцип Сен-Венана не всегда применим (характер приложения нагрузки оказывает влияние на напряженное состояние в тонкостенных стержнях на значительно больших расстояниях, чем в стержнях сплошного сечения).

Если при кручении тонкостенного стержня продольные смещения точек поперечного сечения стеснены наложенными связями, то депланация различных сечений стержня будет неодинаковой. Такой вид кручения называется стесненным. При расчете тонкостенного стержня, работающего в условиях стесненного кручения помимо обычных геометрических характеристик (площадь, положение центра тяжести, момент инерции, статические моменты) потребуются дополнительные сведения о положении центра изгиба, главной нулевой секториальной точке, секториальном моменте инерции, секториально-линейном статическом моменте. Чтобы их найти, необходимо составить расчетную схему тонкостенного стержня. Для этого следует провести линию, проходящую посередине толщины тонкостенного стержня, который будет являться расчетной схемой сечения.

Вычисление секториальных моментов можно производить интегрированием. Для облегчения процесса вычисления секториальных моментов целесообразно предварительно построить на схемах (на срединной линии) поперечного сечения эпюры y , z и эпюру секториальной площади ω , строго соблюдая при этом правила знаков. После этого можно выполнить расчеты всех секториальных моментов, используя правило Верещагина, которое позволяет вычислить в интервале m, n определенный интеграл следующего вида:

$$\int_m^n f_1(x) f_2(x) dx. \quad (23)$$

При условии, что одна из функций (например $f_2(x)$) является линейной в пределах этого интервала (m, n) или обе функции линейные. Для его применения нужно построить графики (эпюры) обеих функций (рис. 51). Обозначим площадь криволинейной эпюры через Ω , а ординату эпюры линейной функции $f_2(x)$, взятую под центром тяжести криволинейной эпюры, через y_0 . Тогда интеграл (23) вычисляется по формуле:

$$\int_m^n f_1(x) f_2(x) dx = \Omega \cdot y_0. \quad (24)$$

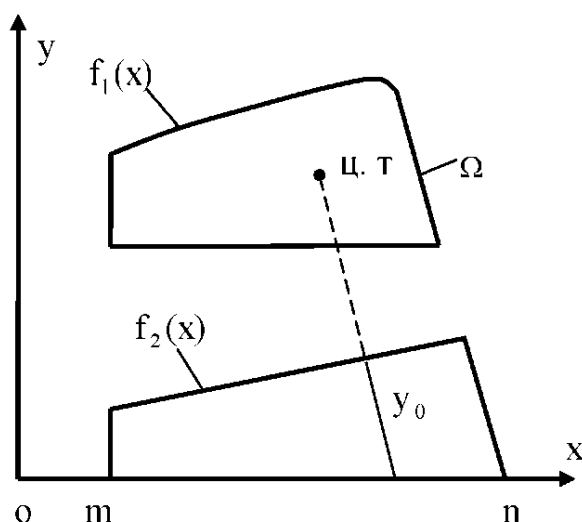


Рис. 51

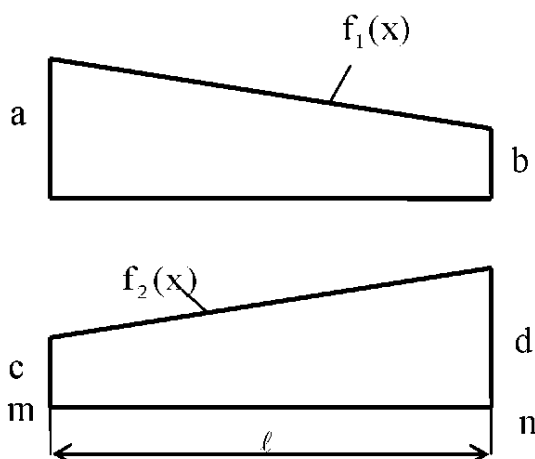


Рис. 52

Следует иметь в виду, что этот прием можно применить при вычислении обычных статических моментов инерции для поперечного сечения тонкостенного стержня. В случае двух прямолинейных эпюр, имеющих форму трапеции (рис. 52), результат перемножений имеет следующий вид:

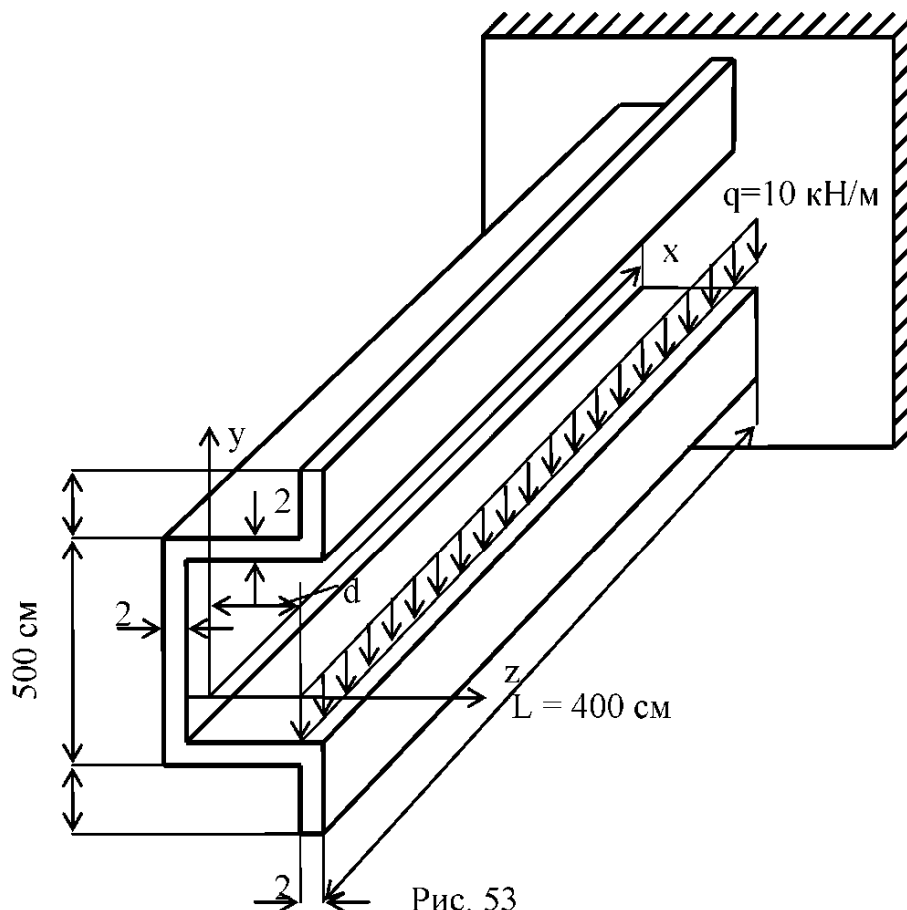
$$\Omega \cdot y_0 = \frac{\ell}{6} \cdot (2ac + 2ba + ad + bc) \quad (25)$$

При расчете тонкостенного стержня необходимо вычислить изгибно-крутящий бимомент B , изгибно-крутящий момент M_ω и момент чистого кручения M_k (прил. 2), которые содержат гиперболические функции. Эти функции приведены в математических справочниках или их можно вычислить по формулам:

$$\text{Sh} \alpha x = \frac{e^{2\alpha x} - 1}{2 e^{\alpha x}}; \quad \text{Ch} \alpha x = \frac{e^{2\alpha x} + 1}{2 e^{\alpha x}}, \quad (26)$$

где e – основание натурального логарифма.

Пример. Для тонкостенного стержня, тип сечения и схема нагружения которого показаны на рис. 53, 54, требуется: а) определить положение центра тяжести и главных центральных осей инерции сечения; б) вычислить моменты инерции сечения относительно этих осей; в) найти координаты центра изгиба, определить положение главной секториальной нулевой точки; г) вычислить главный секториальный момент инерции сечения, момент инерции чистого кручения и изгибно-крутильную характеристику.



Для заданного сечения, расположенного на расстоянии $x = \ell/3$ от левого конца балки необходимо вычислить изгибно-крутящий бимомент B , изгибно-крутящий момент M_{ϕ} , момент чистого кручения M_k , изгибающий момент M_{ϕ} и поперечную силу Q , а также построить эпюры секториальных и касательных напряжений и определить суммарные нормальные и касательные напряжения в заданной точке K принятого сечения.

На рис. 54 d – расстояние от плоскости действия нагрузки до центральной оси y стержня.

Решение.

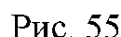
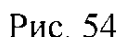
1. Определяем геометрические характеристики сечения.

1.1. Площадь поперечного сечения стержня $A = 2(48 + 2 \cdot 24 + 2 \cdot 12) = 240 \text{ см}^2$.

1.2. Найдем положение центра тяжести сечения и главные центральные оси. Вследствие симметрии сечения относительно оси z достаточно определить одну координату центра тяжести. Для этого проведем вспомогательную ось y_1 . Тогда:

$$z_c = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i} = \frac{(24 \cdot 2 \cdot 12 + 12 \cdot 2 \cdot 24) \cdot 2}{2(24 \cdot 2 + 12 \cdot 2) + 48 \cdot 2} = \frac{2304}{240} = 9,6 \text{ см.}$$

Главными центральными осями являются оси y и z (рис. 54).


$$I_z = \sum (I_{z_i} + a_i^2 A_i) = \left(\frac{2 \cdot 13^3}{12} + 29,5^2 \cdot 13 \cdot 2 \right) \cdot 2 + \left(\frac{24 \cdot 2^3}{12} + 24^2 \cdot 24 \cdot 2 \right) \cdot 2 + \frac{2 \cdot 46^3}{12} = 117535 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum (I_{y_i} + b_i^2 A_i) = \left(\frac{13 \cdot 2^3}{12} + 14,4^2 \cdot 13 \cdot 2 \right) \cdot 2 + \left(\frac{2 \cdot 24^3}{12} + (12 - 10,6)^2 \cdot 2 \cdot 24 \right) \cdot 2 + \left(\frac{46 \cdot 2^3}{12} + 9,6^2 \cdot 46 \cdot 2 \right) = 24105 \text{ cm}^4.$$

$I_z = \sum A_i \cdot y_i \cdot \delta_i$, где A_i - площадь эпюры y на участке i ; y_i - ордината на этой же эпюре y под центром тяжести площади A_i ; δ_i – толщина пластинки i -го участка.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \cdot \delta = \frac{\ell}{6} (2a^2 + 2b^2 + 2ab) \delta.$$
$$I_{\varepsilon} = \delta_i (\sum A_i y_i) = 2 \left[\frac{12}{6} (2 \cdot 36^2 + 2 \cdot 24^2 + 2 \cdot 36 \cdot 24) \cdot 2 + (24 \cdot 24 \cdot 24) \cdot 2 + \left(\frac{24 \cdot 24 \cdot 2}{3} \cdot 24 \right) \cdot 2 \right] = 117504 \text{ cm}^4.$$

1.4. Для определения линейно-секториальных статических моментов необходимо построить эпюру секториальных площадей. С целью упрощения вычислений произвольный полюс В выбираем так, чтобы эпюра ω_B получила наименьшее распространение по профилю. Принимаем полюс в точке В, а точку начала отсчетов секториальных площадей намечаем в точке 4, тогда начальный радиус будет В-4 (рис. 58). Вычислим вначале секториальные координаты:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -24 \cdot 24 + 12 \cdot 24 = -288 \text{ см}^2; \\ \omega_2 &= -24 \cdot 24 = -576 \text{ см}^2; \\ \omega_3 &= 0; \\ \omega_4 &= 0; \\ \omega_5 &= 24 \cdot 24 = 576 \text{ см}^2; \\ \omega_6 &= 24 \cdot 24 - 12 \cdot 24 = 288 \text{ см}^2.\end{aligned}$$

$$S_{\omega by} = \int_A \omega_B z dA = \sum \Omega_i z_i \delta_i;$$

$$S_{\omega bz} = \int_A \omega_B y dA = \sum \Omega_i y_i \delta_i,$$

где Ω_i – площадь эпюры ω_B на участке i .

Поскольку центр изгиба находится на оси симметрии, ограничимся определением

$S_{\omega bz}$.

Перемножая эпюру ω_B на эпюру y , получаем:

$$\begin{aligned}S_{\omega bz} &= \sum \Omega_i y_i \delta_i = \delta_i \sum \Omega_i y_i = 2 \cdot \left[\frac{12}{6} \cdot (2 \cdot (-288) \cdot 36 + 2 \cdot (-576) \cdot 24 + (-288) \cdot 24 + \right. \\ &\quad \left. + (-576) \cdot 36) \cdot 2 + \left(-\frac{576 \cdot 24}{2} \right) \cdot 24 \cdot 2 \right] = -1271808 \text{ см}^5.\end{aligned}$$

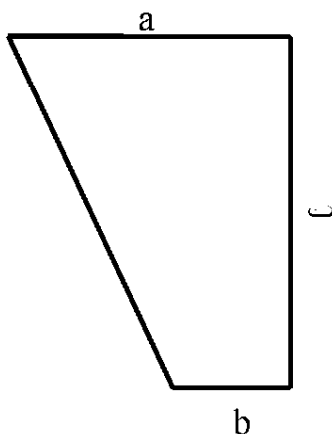


Рис. 57

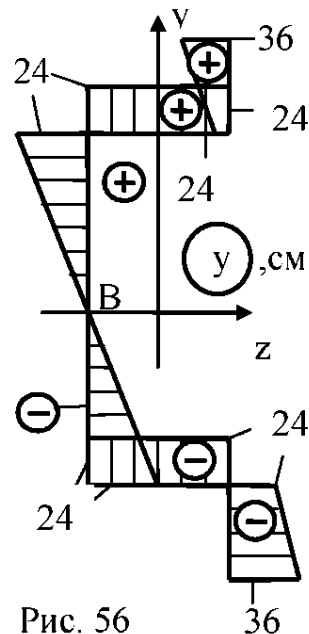


Рис. 56

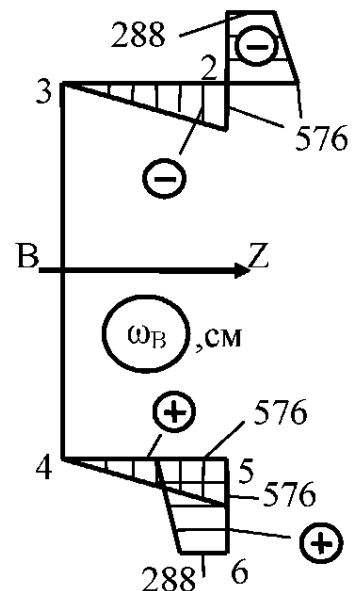


Рис. 58

1.5. Определяем координаты центра изгиба:

$$z_c = \frac{S_{\omega bz}}{I_z} = -\frac{1271808}{117335} = -10,8 \text{ см}; y_c = 0.$$

Величина Z_c представляет собой расстояние от центра изгиба А до выбранного при построении эпюры ω_B полюса В (рис. 59).

1.6. Определяем положение главной секториальной нулевой точки M_0 . Для этого выберем начало отсчета в точке 4 и построим вспомогательную эпюру ω' при полюсе в центре изгиба А (см. рис. 59), предварительно определив ее ординаты; $\omega'_4 = 0$;

$$\omega'_3 = 48 \cdot 10,8 = 518 \text{ см}^2;$$

$$\omega'_2 = 518 - 24 \cdot 24 = -58 \text{ см}^2;$$

$$\omega'_1 = -58 + 12 \cdot (24 + 10,8) = 360 \text{ см}^2;$$

$$\omega'_5 = 24 \cdot 24 = 576 \text{ см}^2;$$

$$\omega'_6 = 576 - 12 \cdot (24 + 10,8) = 158 \text{ см}^2.$$

Вычислим секториальный статический момент

$$S_{\omega'} = \sum \Omega_i \delta_i = \delta_i \sum \Omega_i = 2 \left(\frac{576 + 158}{2} \cdot 12 + \frac{576 \cdot 24}{2} + \frac{518 \cdot 48}{2} + \frac{518 - 58}{2} \cdot 24 + \frac{360 - 58}{2} \cdot 12 \right) = 62160 \text{ см}^4.$$

Координаты секториальной нулевой точки находим по формуле:

$$\omega_M = \frac{S_{\omega'}}{A} = \frac{62160}{240} = 259 \text{ см}^2.$$

На эпюре ω' (см. рис. 59) можно найти пять точек с ординатами 259 см^2 , но за главную нулевую точку следует взять ту, которая располагается ближе всех к центру изгиба. В данном случае главной секториальной нулевой точкой является точка В.

При полюсе в точке А и начале отсчета в главной секториальной нулевой точке В построим эпюру главных секториальных координат ω (рис. 60):

$$\omega_1 = 360 - \omega' = 360 - 259 = 101 \text{ см}^2;$$

$$\omega_2 = -58 - \omega' = -58 - 259 = -317 \text{ см}^2;$$

$$\omega_3 = 518 - 259 = 259 \text{ см}^2;$$

$$\omega_4 = 0 - 259 = -259 \text{ см}^2;$$

$$\omega_5 = 576 - 259 = 317 \text{ см}^2;$$

$$\omega_6 = 158 - 259 = -101 \text{ см}^2.$$

1.8. Секториальный момент инерции вычисляется по формуле

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA = \sum \Omega_i \omega_i \delta_i = \delta_i \sum \Omega_i \omega_i.$$

Используя правило Верещагина (формула 25), умножая эпюру «саму на себя», получаем:

$$I_{\omega} = 2 \left\{ \frac{12}{6} [2 \cdot 101^2 + 2(-317)^2 + 2 \cdot 101 \cdot (-317)] \cdot 2 + \frac{24}{6} [2(-317)^2 + 2 \cdot 259^2 + 2(-317) \cdot 259] \cdot 2 + \frac{259 \cdot 24}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 259 \cdot 2 \right\} = 6140304 \text{ см}^6.$$

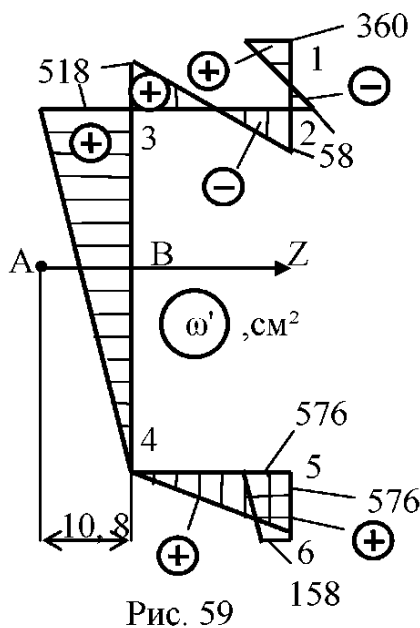


Рис. 59

Момент инерции чистого кручения I_k определяем по формулам:

$$I_k = \frac{1}{3} \sum b_i \delta_i^3 \quad (\text{при } \frac{b_i}{\delta_i} \geq 10);$$

$$I_k = \frac{1}{3} \sum \left(\frac{b_i}{\delta_i} - 0,63 \right) \delta_i^4 \quad (\text{при } \frac{b_i}{\delta_i} \geq 4),$$

где b_i – большая сторона пластинки на участке i ; δ_i – меньшая сторона пластинки на участке i .

$$J_k = \frac{48 \cdot 2^3}{3} + \frac{24 \cdot 2^3}{3} \cdot 2 + \left(\frac{12}{2} - 0,63 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^4 \cdot 2 = 313 \text{ см}^4.$$

Изгибно-крутильная характеристика (для стали $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $G = 8 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$):

$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_k}{EI_\omega}}; \alpha = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^3 \cdot 313}{2 \cdot 10^4 \cdot 6140304}} = 0,0045 \text{ см}^{-1}.$$

2. Определяем внутренние силовые факторы и строим их эпюры для заданного сечения $x = \frac{\ell}{3}$.

2.1. Для нахождения напряжений в тонкостенном стержне потребуется следующие силовые факторы: момент чистого кручения M_k , изгибающий момент M_u , поперечная сила Q , бимомент B и изгибно-крутящий момент M_ω .

В сечении, отстоящем от начала координат на расстоянии $x = \frac{\ell}{3} = \frac{4}{3} \text{ м}$, имеем:

$$M_u = -\frac{qx^2}{2} = -\frac{10 \cdot 4^2}{3^2 \cdot 2} = -8,89 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q = -q \cdot x = -10 \cdot \frac{4}{3} = -13,33 \text{ кН}.$$

Выражения для силовых факторов M_k , M_ω и B для заданной схемы нагружения (рис. 53) имеют вид:

$$M_k = \frac{qe[\alpha x \text{ch} \alpha \ell + \text{Sh} \alpha(\ell - x) - \alpha \ell \text{ch} \alpha x]}{\alpha \text{ch} \alpha \ell};$$

$$B = \frac{qe(\text{ch} \alpha(\ell - x) + \alpha \ell \text{Sh} \alpha x - \text{ch} \alpha \ell)}{\alpha^2 \text{ch} \alpha \ell};$$

$$M_\omega = \frac{qe[\alpha \ell \text{ch} \alpha x - \text{Sh} \alpha(\ell - x)]}{\alpha \text{ch} \alpha \ell}.$$

Для других схем нагружения они представлены в приложении.

Здесь $e = 10,8 + 9,6 + 9 = 29,4 \text{ см}$ – расстояние от плоскости действия нагрузки до линии центров изгиба сечений (до центра изгиба А).

Вычислим предварительно значения $\alpha \ell$, $\alpha(\ell - x)$ и αx ;

$$\alpha \ell = 0,0045 \cdot 400 = 1,8;$$

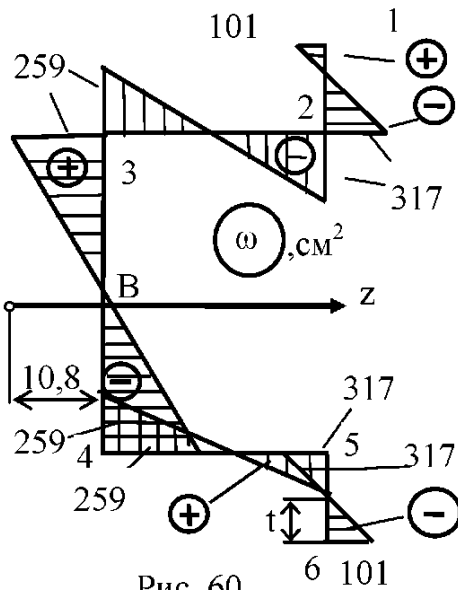


Рис. 60

$$\alpha(\ell - x) = \alpha(\ell - \frac{\ell}{3}) = \alpha \cdot \frac{2}{3} \ell = 0,0045 \cdot \frac{2}{3} \cdot 400 = 1,07.$$

$$\alpha x = \alpha \frac{\ell}{3} = 0,0045 \frac{400}{3} = 0,6.$$

Подставив в формулы соответствующие значения, будем иметь:

$$M_k = \frac{0,10 \cdot 29,4(0,6ch1,8 + Sh1,07 - 1,8ch0,6)}{0,0045 \cdot ch1,8} = \frac{2,94(0,6 \cdot 3,107 + 1,286 - 1,8 \cdot 1,185)}{0,0045 \cdot 3,107} = 213,85 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

$$B = \frac{0,10 \cdot 29,4(ch1,07 + 1,8Sh0,6 - ch1,8)}{0,0045^2 \cdot ch1,8} = \frac{2,94(1,629 + 1,8 \cdot 0,637 - 3,107)}{0,0045^2 \cdot 3,107} = -15486 \text{ кН} \cdot \text{см}^2;$$

$$M_\omega = \frac{0,10 \cdot 29,4(1,8ch0,6 - Sh1,07)}{0,0045 \cdot ch1,8} = \frac{2,94(1,8 \cdot 1,186 - 1,286)}{0,0045 \cdot 3,107} = 178,10 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

2.2. Построим эпюру нормальных напряжений от изгибающего момента (рис. 61).

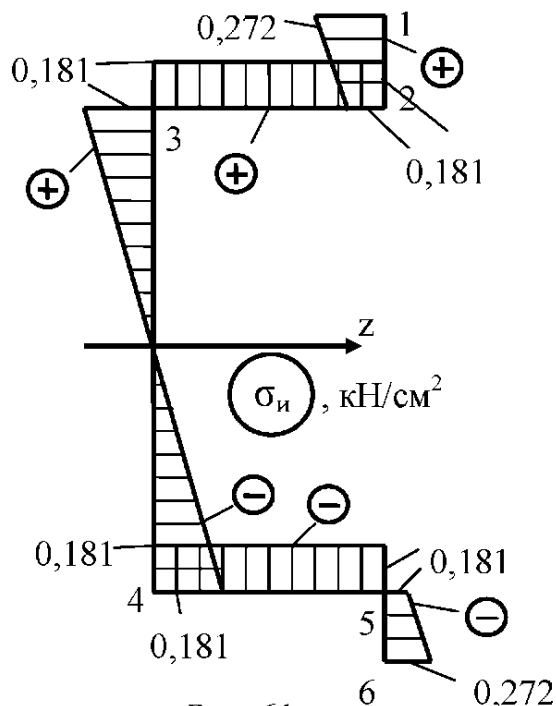


Рис. 61

$$\sigma_u = \pm \frac{M_u}{J_z} \cdot y = \pm \frac{889}{117535} y = \pm 0,007564 \cdot y;$$

$$\sigma_{u1} = 0,007564 \cdot 36 = 0,272 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{u2} = \sigma_{u3} = 0,007564 \cdot 24 = 0,181 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{u4} = \sigma_{u5} = -0,007564 \cdot 24 = -0,181 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{u6} = -0,007564 \cdot 36 = -0,272 \text{ кН/см}^2.$$

2.3. Вычислим значения секториальных нормальных напряжений.

$$\sigma_\omega = \frac{B \cdot \omega}{I_\omega} = \frac{-15486}{6140304} \omega = -0,00252 \omega.$$

Подставив значения из эпюры (см. рис. 60), получаем:

$$\sigma_{\omega 1} = -0,00252 \cdot 101 = -0,254 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{\omega 2} = -0,00252 \cdot (-317) = 0,799 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{\omega 3} = -0,00252 \cdot 259 = -0,653 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{\omega 4} = -0,00252 \cdot (-259) = 0,653 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{\omega 5} = -0,00252 \cdot 317 = -0,799 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_{\omega 6} = -0,00252 \cdot (-101) = 0,254 \text{ кН/см}^2.$$

Эпюра σ_ω показана на рис. 62, а суммарная эпюра нормальных напряжений представлена на рис. 63.

2.4. Вычислим касательные напряжения. Для определения напряжений τ_u воспользуемся формулой Д. Журавского:

$$\tau_u = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{I_z \delta} = -\frac{13,33 \cdot S_z^{\text{отс}}}{117535 \cdot 2} = -0,000576 S_z^{\text{отс}}.$$

Построим эпюру $S_z^{\text{отс}}$ для поперечного сечения, пользуясь рис. 54, 56:

$$S_z^{\text{отс}} = \sum A_i y_i; S_{z2}^{\text{отс}} = S_{z5}^{\text{отс}} - 12 \cdot 2 \cdot 30 = 720 \text{ см}^3;$$

$$S_{z3}^{отс} = S_{z4}^{отс} = 12 \cdot 2 \cdot 30 + 24 \cdot 2 \cdot 24 = 1875 \text{ см}^3;$$

$$S_{zB}^{отс} = 12 \cdot 2 \cdot 30 + 24 \cdot 2 \cdot 24 + 24 \cdot 2 \cdot 12 = 2448 \text{ см}^3.$$

Эпюра $S_z^{отс}$ представлена на рис. 64.

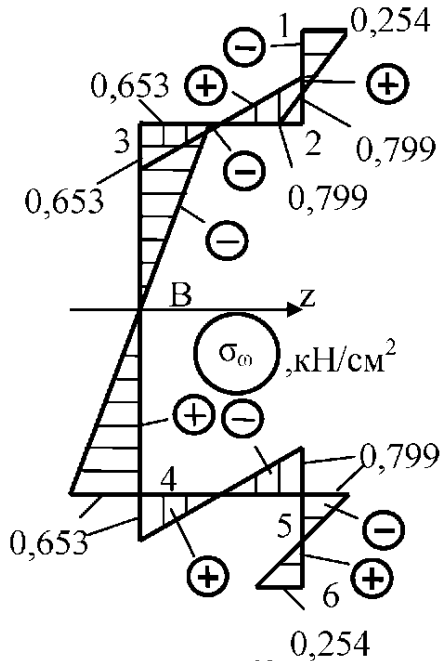


Рис. 62

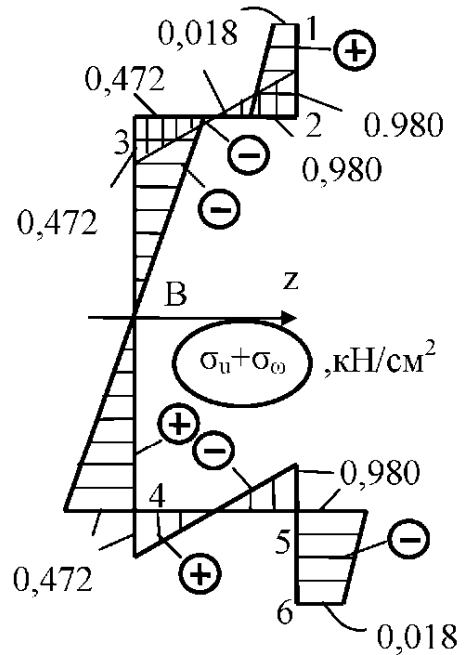


Рис. 63

Построим эпюру τ_u (рис. 65). Для чего вычислим следующие ординаты:

$$\tau_{u2} = \tau_{u5} = -0,0000567 S_z^{отс} = -0,0000567 \cdot 720 = -0,0408 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{u3} = \tau_{u4} = -0,0000567 \cdot 1872 = -0,1061 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{uB} = -0,0000567 \cdot 2448 = -0,1388 \text{ кН/см}^2.$$

Касательные напряжения τ_ω найдем по формуле:

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega \cdot S_\omega^{отс}}{I_\omega \delta} = \frac{178,1 \cdot S_\omega^{отс}}{6140304 \cdot 2} = 0,000014 S_\omega^{отс}.$$

Построим эпюру $S_\omega^{отс}$ для поперечного сечения по формуле $S_\omega^{отс} = \sum \Omega \delta$, где Ω – площадь отсеченной части эпюры ω (см.рис. 60). При построении эпюры (рис. 66) начнем обход контура сечения от точки 6. Вначале найдем на участке (5-6) точку, где $\omega=0$. Из подобия треугольников получим:

$$\frac{101}{t} = \frac{317}{12-t}; 317t = 101 \cdot (12-t), \text{ отсюда } t = \frac{1212}{418} = 2,9 \text{ см.}$$

На расстоянии t от точки 6 имеем:

$$S_\omega^{отс} = \sum \Omega \delta = \delta \sum \Omega = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-101)t = -101 \cdot 2,9 = -292,9 \approx -293 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega5}^{отс} = -293 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 317(12-t) = -293 + 317 \cdot 9,1 = 2592 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega4}^{отс} = 2592 + 2 \cdot \frac{317-259}{2} \cdot 24 = 3984 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega B}^{\text{отс}} = 3984 - 2 \frac{1}{2} \cdot 259 \cdot 24 = -2232 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega 3}^{\text{отс}} = -2232 + 2 \frac{1}{2} \cdot 259 \cdot 24 = 3984 \text{ см}^4.$$

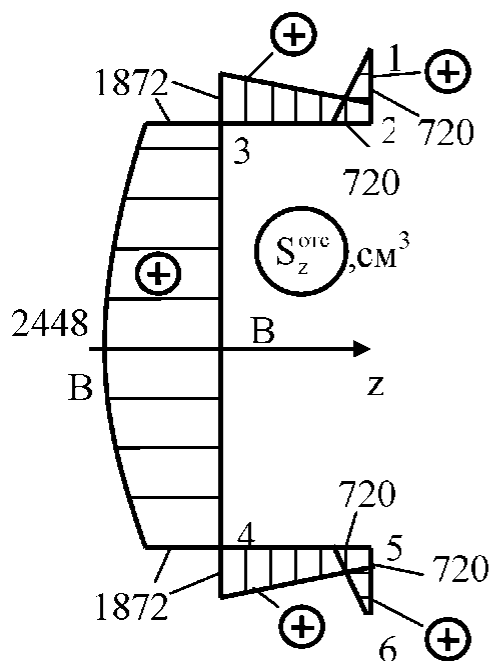


Рис. 64

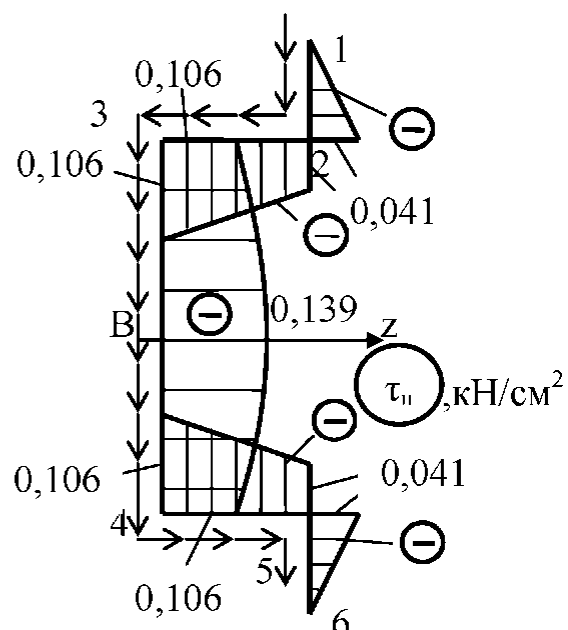


Рис. 65

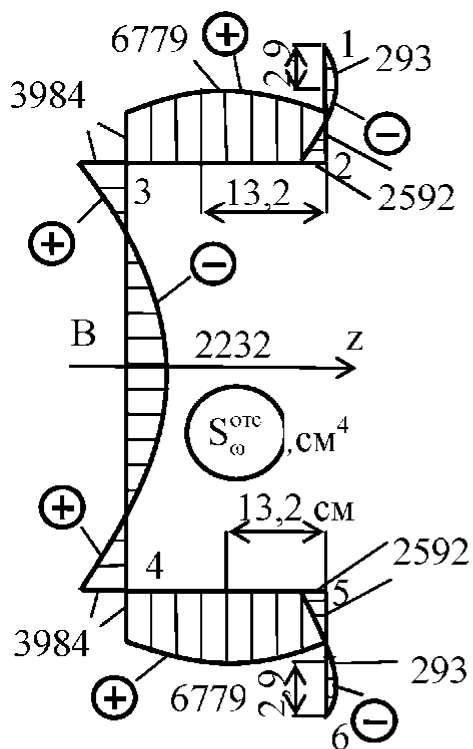


Рис. 66

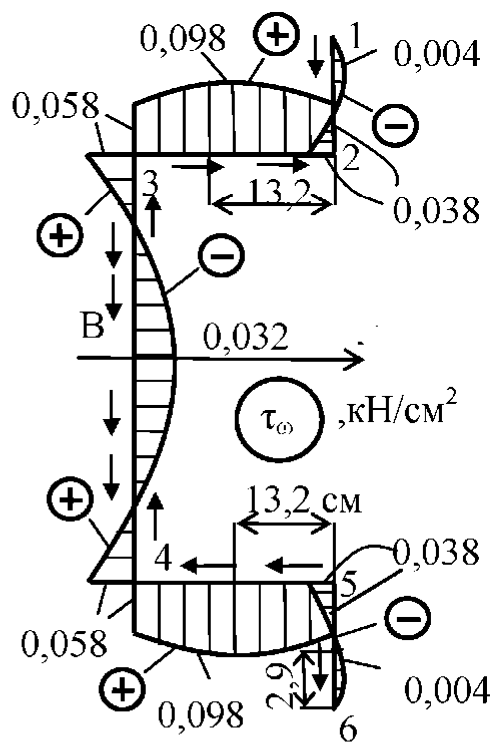


Рис. 67

Аналогично найдены S_{ω}^{onc} для других точек. При обходе контура сечения, начиная от точки 1, знаки эпюры будут противоположны показанным на рис. 66. Направления же касательных напряжений τ_{ω} в поперечном сечении стержня на основании закона парности в обоих вариантах обхода будут одинаковыми. Таким образом, касательные напряжения τ_{ω} будут иметь следующие значения:

$$\tau_{\omega} = 0,0000145 \cdot S_{\omega}^{onc} = 0,0000145(-293) = -0,004 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{\omega 5} = 0,0000145 \cdot 2592 = 0,038 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{\omega} = 0,0000145 \cdot 6779 = 0,098 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{\omega 4} = 0,0000145 \cdot 3984 = 0,058 \text{ кН/см}^2;$$

$$\tau_{\omega 3} = 0,0000145 \cdot (-2232) = -0,032 \text{ кН/см}^2.$$

Аналогично найдены τ_{ω} и для других точек поперечного сечения. Эпюра τ_{ω} представлена на рис. 67. Касательные напряжения кручения:

$$\tau_k = \frac{M_k}{I_k} \delta = \frac{213,85}{313} \cdot 2 = 1,3664 \text{ кН/см}^2.$$

Эпюра τ_k показана на рис. 68.

2.5. Суммарные значения нормальных и касательных напряжений в точке К:

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_{\omega} = -\frac{0,018 + 0,980}{2} = -0,499 \text{ кН/см}^2;$$

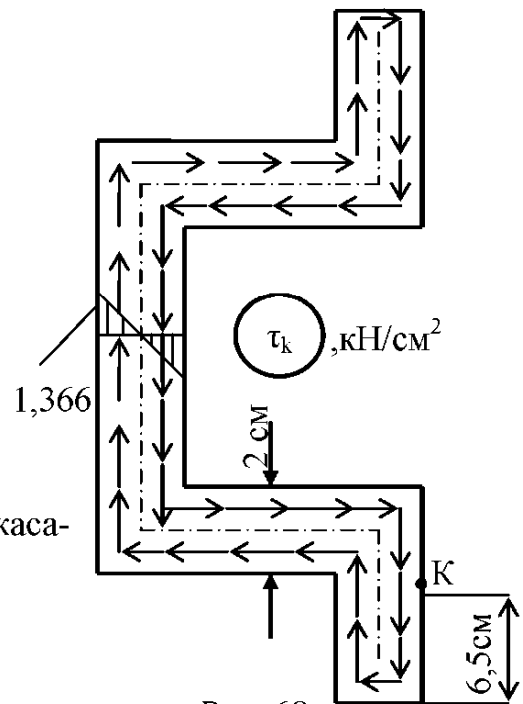


Рис. 68

$$\tau = \tau_u + \tau_{\omega} + \tau_k = -0,0205 + 0,0000145 \cdot S_{\omega}^{onc} - 1,3664 = -0,0205 +$$

$$+ 0,0000145 \left[\frac{(-101) \cdot 2,9}{2} + \frac{((317 - 101)/2) \cdot (6,5 - 2,9)}{2} \right] \cdot 2 - 1,3664 = -1,3855 \text{ кН/см}^2.$$

ЗАДАЧА 13. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ БРУСЕ С ЛОМОНОЙ ОСЬЮ

Определение внутренних усилий и построение их эпюр для пространственного бруса с ломаной осью производится методом сечений в том же порядке, как и для обычных балок. Предварительно выбирается для всех поперечных сечений участков (элементов бруса) пространственная прямоугольная система координат x, y, z . Ось x обычно направляется вдоль продольной оси участка, а две другие оси совмещаются с главными осями поперечных сечений. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка бруса строятся как для простой балки с применением принятых правил знаков.

Мысленно располагается каждый из участков по отношению к себе так, чтобы взор был направлен в начало координат со стороны положительной оси Oz (при построении Q_y и M_z) и оси Oy (при построении Q_z и M_y).

Продольная сила N считается положительной, если рассматриваемый участок растягивается и отрицательной – когда сжимается.

Поперечная сила Q_y считается положительной, если при взгляде на начало координат со стороны положительного направления оси Oz рассматриваемый участок (отсечённая часть участка) от действия приложенных сил вращается вокруг рассматриваемого сечения по ходу часовой стрелки. Это же правило применимо и для Q_z . Для изгибающих моментов M_y и M_z правила знаков не устанавливается. Их эпюры (ординаты) откладываются в сторону растянутых волокон бруса. Крутящий момент M_k положителен, если при взгляде на торец отсечённой части бруса этот момент представляет направление по ходу часовой стрелки.

Пример. Для ломаного бруса квадратного поперечного сечения, закреплённого одним концом (рис. 69), требуется: 1) по заданной расчётной нагрузке построить (в аксонометрии) эпюры всех силовых факторов (N , Q и M); 2) определить положения наиболее напряженных точек в опасном сечении; 3) подобрать размеры поперечного сечения бруса на наиболее опасном участке, используя условия прочности по гипотезе наибольших касательных напряжений. Расчетное сопротивление материала стержня $R=21\text{кН/см}^2$.

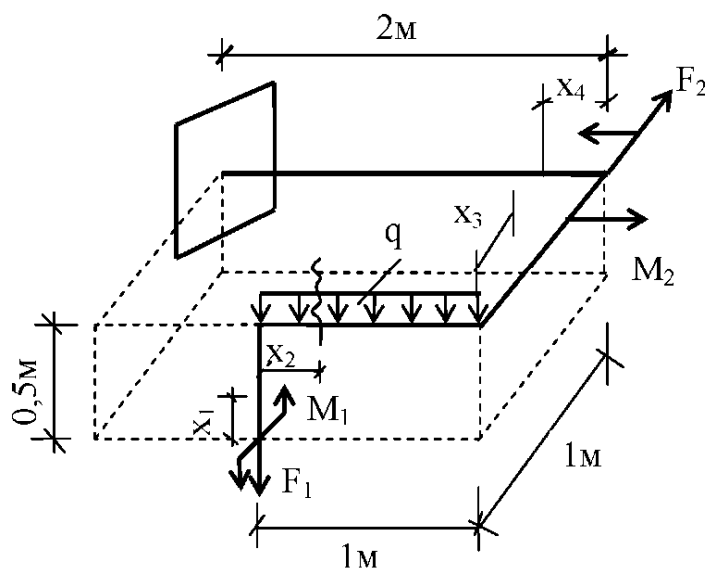


Рис. 69

Дано: $M_1=24\text{кН} \cdot \text{м}$; $M_2=27\text{кН} \cdot \text{м}$; $F_1=20\text{кН}$; $F_2=30\text{кН}$; $q=10\text{кН/м}$.

Решение.

Принятые нами координатные оси представлены на рис. 70. Здесь же цифрами означим отдельные участки. Рассмотрим поочерёдно каждый участок.

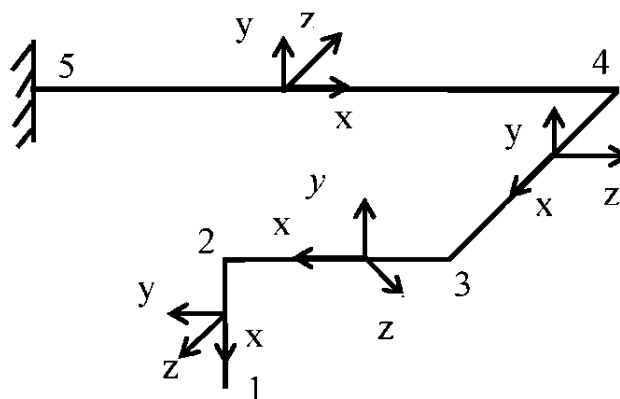


Рис. 70

Участок 1 – 2.

Для определения усилий на этом участке используем систему координат x, y, z , изображённую в пределах участка 1 – 2.

$$N = F_1 = 20 \text{ кН}, Q_y = 0, Q_z = 0, M_y = M_1 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_z = 0, M_k = 0.$$

Отложим полученные значения N и M_y на данном участке и построим их эпюры.

Участок 2 – 3.

$$N = 0; Q_y = -F_1 - qx_2 = -20 - 10x_2;$$

$$Q_z = 0; M_y = F_1x_2 + \frac{qx_2^2}{2} = 20x_2 + 5x_2^2;$$

$$M_z = 0; M_k = M_1 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{При } x_2 = 0; Q_y = -20 \text{ кН}; M_y = 0;$$

$$x_2 = 1 \text{ м}; Q_y = -20 - 10 \cdot 1 = -30 \text{ кН}; M_y = 20 + 5 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 3-4.

$$N = 0; Q_y = -F_1 - q \cdot 1 = -20 - 10 \cdot 1 = -30 \text{ кН}; Q_z = 0; M_y = 0;$$

$$M_z = F_1x_3 + q \cdot 1 \cdot x_3 + M_1 = 20x_3 + 10x_3 + 24 = 30x_3 + 24;$$

$$M_k = q \cdot 1 \cdot 10,5 + F_1 \cdot 1 = 10 \cdot 0,5 + 20 \cdot 1 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{При } x_3 = 0; M_z = 24;$$

$$x_3 = 1; M_z = 30 \cdot 1 + 24 = 54 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 4 – 5.

$$N = 0; Q_y = -F_1 - q \cdot 1 = -20 - 10 \cdot 1 = -30 \text{ кН}; Q_z = -F_2 = -30 \text{ кН};$$

$$M_y = F_2x_4 + M_2 = 30x_4 + 27; M_z = F_1(1 - x_4) + q \cdot 1(0,5 - x_4) = 20(1 - x_4) + 10 \cdot 1(0,5 - x_4);$$

$$M_k = M_1 + F_1 \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot 1 = 24 + 20 + 10 = 54 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{При } x_4 = 0; M_y = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_z = 20 + 5 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$x_4 = 2; M_y = 30 \cdot 2 + 27 = 87 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_z = 20(1 - 2) + 10(0,5 - 2) = -20 - 15 = -35 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры внутренних усилий, построенные по полученным выражениям, изображены на рис. 71.

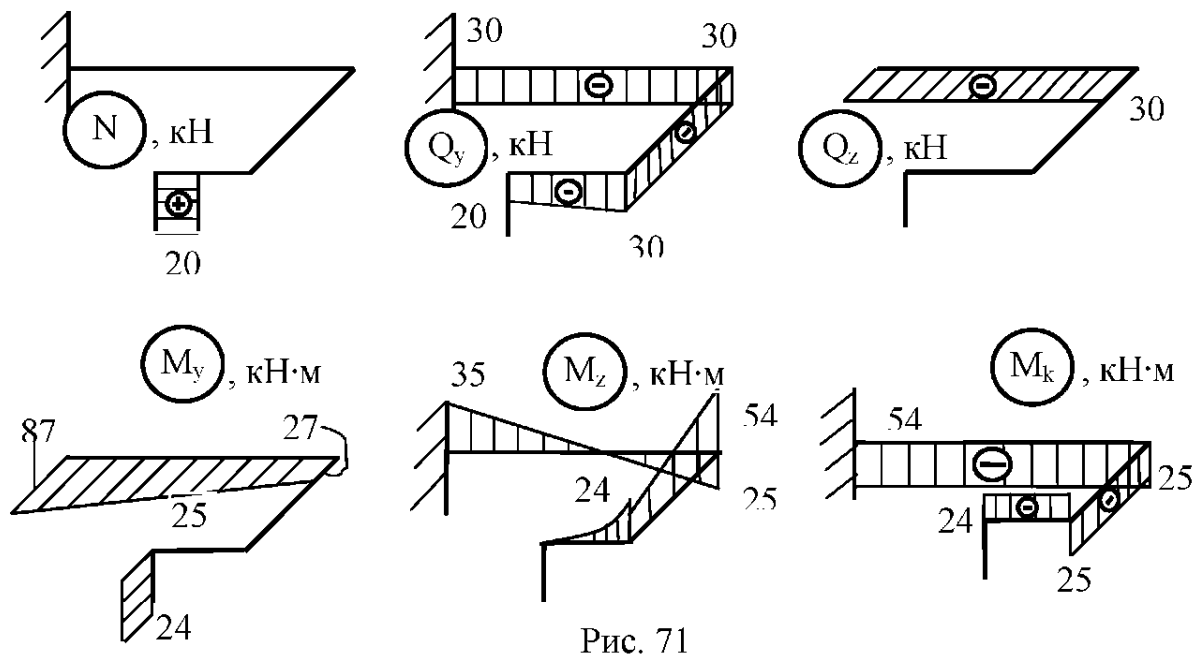


Рис. 71

Определим размеры поперечного сечения участка 4 – 5. Из эпюр внутренних усилий (рис. 71) видно, что более опасным является сечение, расположенное в точке 5 (в закреплении). Для нахождения в поперечном сечении опасной точки построим эпюры напряжений от всех силовых факторов (рис. 72).

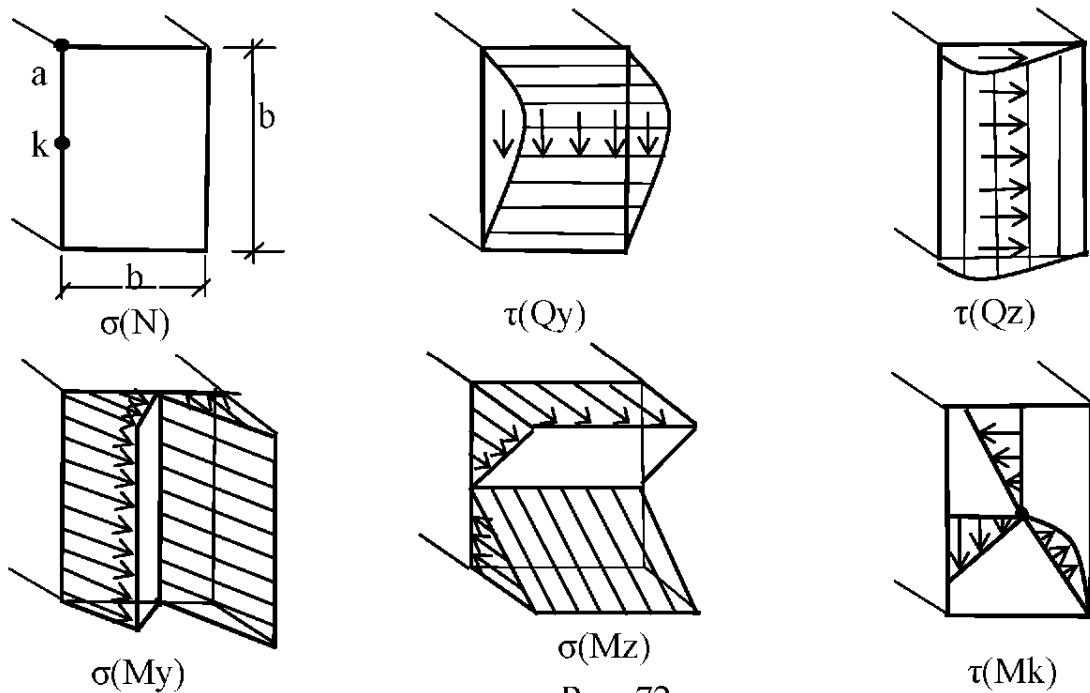


Рис. 72

Как видно из эпюр (рис. 72) можно предположить, что наиболее напряжёнными являются точки а и к.

Напряжение в точке а:

$$\sigma(My) = \frac{M_y}{W_y} = \frac{6 \cdot 87}{b^3} = \frac{522}{b^3}; \quad \sigma(Mz) = \frac{M_z}{W_z} = \frac{6 \cdot 35}{b^3} = \frac{210}{b^3}.$$

Согласно теории наибольших касательных напряжений необходимо выполнение условия

$$\sigma_{\text{расч.}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R.$$

Напряжение σ_1 находится как сумма напряжений:

$$\sigma_1 = \sigma(My) + \sigma(Mz) = \frac{522}{b^3} + \frac{210}{b^3} = \frac{732}{b^3} \text{ кН·м; } \sigma_3 = 0.$$

После этого имеем:
$$\frac{732 \cdot 100}{b^3} \leq 21.$$

Откуда найдём размер b поперечного сечения участка 4 – 5.

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{73200}{21}} \geq 15,17 \text{ см.}$$

Напряжения в точке к:
$$\sigma(My) = \frac{522}{b^3}; \sigma_1 = \frac{522}{b^3}; \sigma_3 = 0;$$

$$\tau(Qy) = \frac{3}{2} \frac{Qy}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{30}{b^2} = \frac{45}{b^2};$$

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{\alpha \cdot b^3}, \text{ где } \alpha = 0,208.$$

$$\tau_k = \frac{54}{0,208b^3} = \frac{259,62}{b^3}.$$

Суммарное касательное напряжение:
$$\tau = \tau(Qy) + \tau_k = \frac{45}{b^2} + \frac{259,62}{b^3}.$$

По-прежнему используем теорию наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{\text{расч.}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R \text{ или } \sigma_{\text{расч.}} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4\tau^2} \leq R.$$

Подставим соответствующие значения в последнее выражение:

$$\sqrt{\left(\frac{52200}{b^3}\right)^2 + 4\left(\frac{45}{b^2} + \frac{259,62}{b^3}\right)^2} \leq 21.$$

Запишем это выражение в другом виде:

$$\left(\frac{52200}{b^3}\right)^2 + 4\left(\frac{45}{b^2} + \frac{259,62}{b^3}\right)^2 \leq 441.$$

Решив это уравнение, получаем: $b \geq 15,25 \text{ см.}$

Из двух значений окончательно принимаем размеры поперечного сечения участка 4 – 5 $b = 15,25 \text{ см.}$

Рекомендуемая литература

1. Черкасов В. Д. Сопротивление материалов: учеб. для вузов/ В.Д. Черкасов, А. С. Тюряхин, В. В.Ерастов. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2005. – 425с.
2. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, и др. – М.: Изд-во АСВ, 1995. – 572 с.
3. Черкасов В.Д. Избранные главы курса сопротивления материалов с основами теории упругости: учеб. пособие/ В. Д. Черкасов, А. Е. Дураев, Е. В. Киселев, В. А. Карташов, В. И. Федосейкин.; под общ. ред. В. Д. Черкасова. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2006. – 184с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I

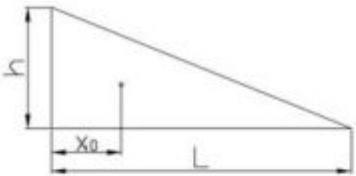
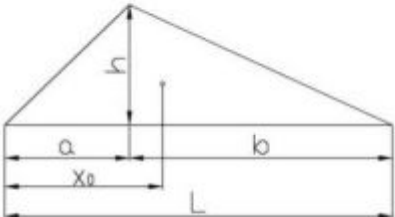
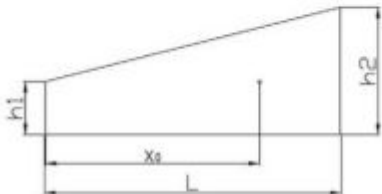
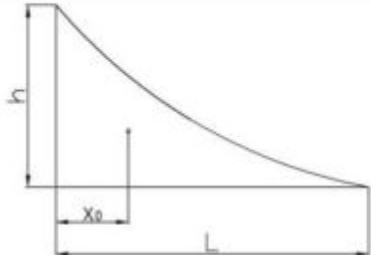
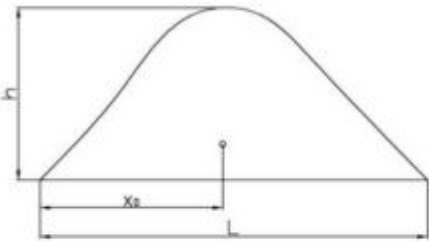
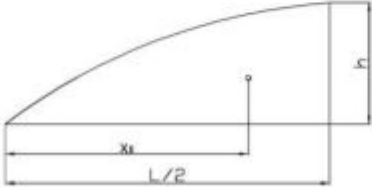
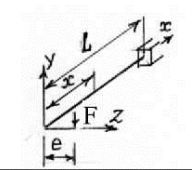
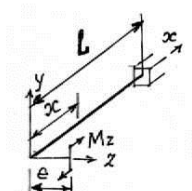
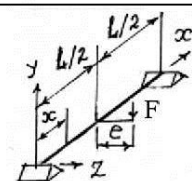
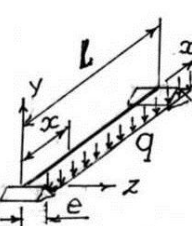
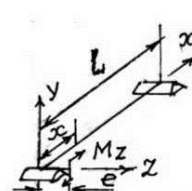
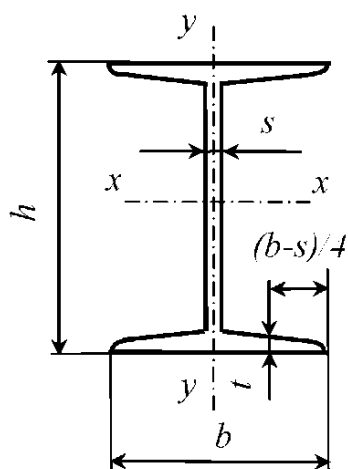
Вид эпюры	Площадь эпюры Ω	Расстояние до центра тяжести x_0
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{a+l}{3}$
	$\frac{1}{2}(h_1+h_2)l$	$\frac{h_1+2h_2}{h_1+h_2} \frac{l}{3}$
	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{1}{4}l$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}h \frac{l}{2} = \frac{hl}{3}$	$\frac{5}{8}l$

Схема балки	M_k	B	M_0
	$\frac{Fe \left[ch\alpha L - ch\alpha x \right]}{ch\alpha L}$	$\frac{Fesh\alpha x}{\alpha ch\alpha L}$	$\frac{Fech\alpha x}{ch\alpha L}$
	$\frac{B_0 \alpha ch\alpha \left[L - x \right]}{ch\alpha L},$ где $B_0 = M_z e$	$\frac{B_0 ch\alpha \left[L - x \right]}{ch\alpha L}$	$\frac{-B_0 \alpha sh\alpha \left[L - x \right]}{ch\alpha L}$
	$-\frac{Fe}{2} \left(1 - ch\alpha x / ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \right)$	$\frac{-\frac{Fe}{2} sh\alpha x}{\alpha ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}$	$\frac{-\frac{Fe}{2} ch\alpha x}{ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}$
	$-\frac{qe}{\alpha} \times$ $\left[\alpha \left(\frac{L}{2} - x \right) - sh\alpha \left(\frac{L}{2} - x \right) / ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \right] \times \left[1 - \frac{ch\alpha \left(\frac{L}{2} - x \right)}{ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} \right]$	$\frac{-\frac{qe}{\alpha^2} \times}{\left[1 - \frac{ch\alpha \left(\frac{L}{2} - x \right)}{ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} \right]}$	$-\frac{qe}{\alpha} \frac{sh\alpha \left(\frac{L}{2} - x \right)}{ch\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}$
	$\alpha B_0 \left[\frac{ch\alpha \left[L - x \right]}{sh\alpha L} - \frac{1}{\alpha L} \right],$ где $B_0 = M_z e$	$\frac{B_0 sh\alpha \left[L - x \right]}{sh\alpha L}$	$-\alpha B_0 \frac{ch\alpha \left[L - x \right]}{sh\alpha L}$

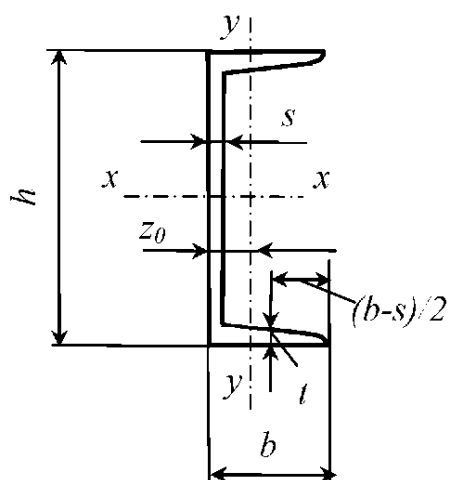
Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)



h – высота двутавра;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции.

Номер двутавра	Масса 1м, кг	Размеры, мм				A , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240–89)

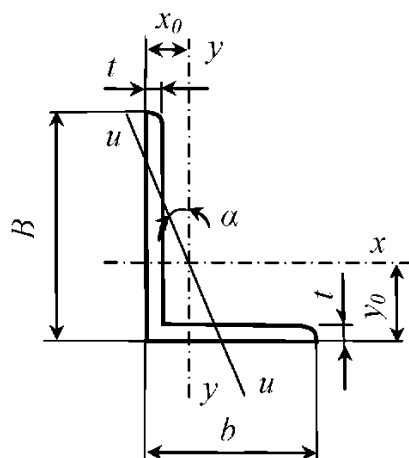


h – высота швеллера;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции;
 z_0 – расстояние от оси y до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	z_0 , см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

ПРИЛОЖЕНИЕ V

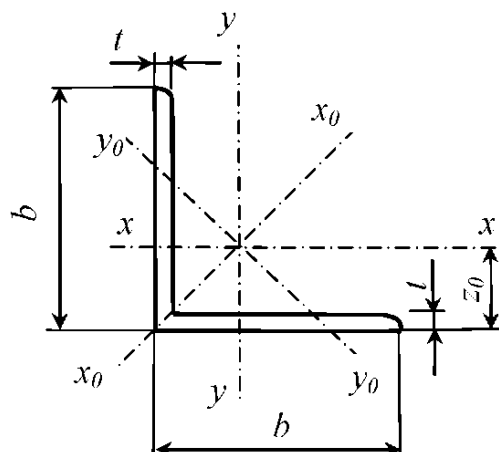
Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (по ГОСТ 8510–86)



B – ширина большой полки;
 b – ширина меньшей полки;
 t – толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 J – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 α – угол наклона главной центральной оси;
 J_{xy} – центробежный момент инерции;
 x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до наружных граней полки.

Номер уголка	Масса Γ_m угол- ка, кг	Размеры, мм			A , см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	J_y , см ⁴	i_y , см	$J_u \min$, см ⁴	$i_u \min$, см	$tg\alpha$	$ J_{xy} $, см ⁴	x_0 , см	y_0 , см
		B	b	t											
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23
	8,7			7	11,1	113	3,19	35	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,5	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,8	4,01
	12,6			8	16	256	4	83	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,2	0,391	194	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,39	213	2,28	5,23
	23,6			12	30	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,8	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,1	194	2,4	0,374	348	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,5
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	503	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,39	573	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,99	6,71

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509–93)



b – ширина полки;
 t – толщина полки;
 A – площадь поперечного сечения;
 J – момент инерции;
 i – радиус инерции;
 J_{xy} – центробежный момент инерции;
 z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

Номер угол- ка	Масса 1 м угол- ка, кг	Размеры, мм		A , см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	$J_{x_0 \max}$, см ⁴	$i_{x_0 \max}$, см	$J_{y_0 \min}$, см ⁴	$i_{y_0 \min}$, см	$ J_{xy} $, см ⁴	z_0 , см
		b	t									
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	7,36	80	6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53

ПРИЛОЖЕНИЕ VII

Значения коэффициента φ в зависимости от гибкости λ для сталей марки
Ст0, Ст2, Ст3, Ст4

Гибкость λ	φ
0	1,0
10	0,99
20	0,97
30	0,95
40	0,92
50	0,89
60	0,86
70	0,81
80	0,85
90	0,69
100	0,60
110	0,52
120	0,45
130	0,40
140	0,36
150	0,32
160	0,29
170	0,26
180	0,23
190	0,21
200	0,19

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Индивидуальные задания	4
Глава II. Примеры выполнения индивидуальных заданий.....	45
Задача 1. Внутренние усилия, напряжения и перемещения при растяжении и сжатии.....	45
Задача 2. Расчет статически неопределимой системы.....	49
Задача 3. Определение геометрических характеристик плоских фигур.....	52
Задача 4. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в балках и рамах.....	54
Задача 5. Расчет балок на прочность.....	64
Задача 6. Определение перемещений в балках.....	66
Задача 7. Расчет балки, испытывающей кривой изгиб.....	91
Задача 8. Расчет внецентренно сжатой колонны.....	94
Задача 9. Продольный изгиб.....	96
Задача 10. Продольно-поперечный изгиб.....	98
Задача 11. Расчет трубы.....	104
Задача 12. Расчет тонкостенного стержня.....	107
Задача 13. Построение эпюр внутренних усилий в пространственном брусе с ломаной осью.....	117
Рекомендуемая литература.....	122
Приложения.....	123