ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СОСУДОВ

Методические указания

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Стенки тонкостенных сосудов, испытывающие внутреннее давление воды, пара или газа, находятся в состоянии двухосного растяжения. К таким сосудам относятся паровые котлы, резервуары водонапорных башен, газгольдеры, нефтебаки, газовые и воздушные баллоны и т.п.

Одной из особенностей такого рода конструкций является малая толщина стенки h (будем считать ее постоянной) по сравнению с общими габаритами сооружения (меньше пяти процентов), что позволяет объединить их термином - тонкостенные сосуды [1]. Поверхность, которая делит толщину стенок сосуда пополам, называется срединной поверхностью.

Характерной чертой тонкостенных сосудов является то, что по форме они представляют собой тела вращения (рис. 1), т.е. их срединная поверхность может быть образована вращением некоторой кривой S $(1-k-2)$ вокруг оси $0-0$ (оси симметрии).

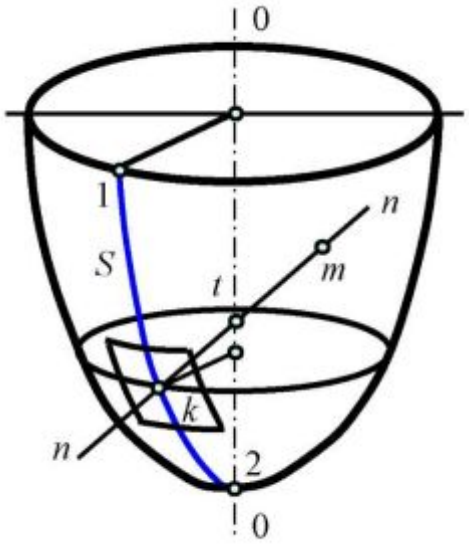


Рис. 1

Через произвольную точку k срединной поверхности сосуда проведем нормаль $n-n$ к поверхности бесконечно малого элемента, выделенного в окрестностях точки. Сечение сосуда плоскостью, содержащей ось $0-0$ и нормаль $n-n$, называется меридиональным, а сечение по нормали к меридиану и также содержащее нормаль $n-n$ - нормальным сечением.

Будем полагать в дальнейшем, что нагрузка, действующая на такой сосуд, также обладает свойствами осевой симметрии. В этом случае задача расчета значительно упрощается, поскольку возможно равновесие между внешними и внутренними силами без появления изгибающих моментов и все внутренние силы изменяются только вдоль дуги меридиана.

В таком случае напряжения в сосуде определяются с учетом только нормальных сил (нормальные напряжения по толщине стенки тонкостенного

сосуда считаются распределенными равномерно) и теорию расчета называют безмоментной.

Тонкостенные сосуды представляют частный случай обширного класса систем, называемых оболочками, теория расчета которых достаточна сложна. Она изучается в специальных разделах строительной механики.

Заметим, что безмоментная теория оболочек представляет собой упрощенный вариант общей теории, в которой пренебрегается влиянием изгибающих и крутящих моментов, поперечных сил на напряженно-деформированное состояние, то есть моментные напряжения намного меньше мембранных (цепных).

Возможность существования безмоментного напряженного состояния оболочки определяется формой ее срединной поверхности, характером силового воздействия, в том числе и на контуре, и характером закрепления оболочки на контуре.

В безмоментной теории оболочек обычно не принимают во внимание условия совместности деформаций, что вносит искажение в отыскиваемое решение, особенно значительное при резком изменении кривизн срединной поверхности, толщин оболочек и нагрузки.

Условия существования безмоментного напряженного состояния оболочки можно свести к следующим требованиям [2]:

а) форма оболочки должна характеризоваться плавностью срединной поверхности, отсутствием в ней изломов, острых вершин, скачкообразных изменений радиусов кривизн, изменение толщины должно быть плавным;

б) закрепление оболочки должно быть таким, чтобы при неизменяемости формы края сосуда должны иметь возможность свободно перемещаться в направлении нормали к поверхности; вместе с тем необходимо, чтобы тангенциальные закрепления обеспечивали жесткость оболочки, т. е. чтобы она не могла деформироваться без растяжения (сжатия) срединной поверхности;

в) нагрузка, приложенная к оболочке, должна быть плавной, не должно быть сосредоточенных сил, скачков в распределенной нагрузке.

Встречаются случаи, в которых напряженное состояние оболочки, за исключением узких зон, слабо отличается от безмоментного и может быть разложено на чисто безмоментное и моментное (изгибное), которое в этих зонах быстро затухает на расстоянии нескольких толщин оболочки (краевой эффект).

То есть напряженное состояние представляется в виде суммы двух слагаемых – безмоментного и краевого эффекта, и безмоментная теория в этом случае используется для отыскания первого слагаемого.

Очевидно, что предлагаемые для расчета варианты составных тонкостенных оболочек (с. 31-32), строго говоря, не являются безмоментными. Здесь и наличие изломов, и острых вершин. Однако на достаточном удалении от этих зон локализации изгибающих и крутящих моментов напряженное состояние оболочки можно считать мало отличающимся от безмоментного.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕНКАХ СОСУДОВ

Рассмотрим сосуд, находящийся под действием веса жидкости или давления газа. Двумя парами меридиональных и нормальных сечений выделим в окрестностях точки k из оболочки бесконечно малый элемент с длинами сторон ds_1 и ds_2 и рассмотрим его равновесие (рис. 1 и 2).

Срединная поверхность оболочки представляет собой поверхность двоякой кривизны. Обозначим через $k-m$ главный радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности в окрестностях точки k (ρ_m), а через $k-t$ - второй главный радиус, т.е. радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного к дуге меридиана (ρ_t).

На выделенный элемент будут действовать только главные нормальные напряжения, которые обозначим как: σ_m - меридиональное напряжение и σ_t - окружное напряжение.

В соответствии с безмоментной теорией будем считать, что напряжения σ_m и σ_t по площади граней элемента распределены равномерно. Кроме того, все размеры сосуда будем относить к срединной поверхности его стенок.

На внутреннюю поверхность выделенного элемента действует давление жидкости p, которое дает равнодействующую $p \cdot ds_1 \cdot ds_2$. На гранях элемента действуют силы $\sigma_m \cdot h \cdot ds_1$ и $\sigma_t \cdot h \cdot ds_2$. Спроектируем указанные силы на нормаль n к поверхности:

$$2 \cdot \sigma_m \cdot h \cdot ds_1 \cdot \sin\frac{d\alpha_m}{2} + 2 \cdot \sigma_t \cdot h \cdot ds_2 \sin\frac{d\alpha_t}{2} - p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 0 .$$

Здесь первое и второе слагаемые записаны на основании рис. 3, где изображены проекции элемента на меридиональную (рис. 3, *а*) и нормальную (рис. 3, *б*) к ней плоскости.

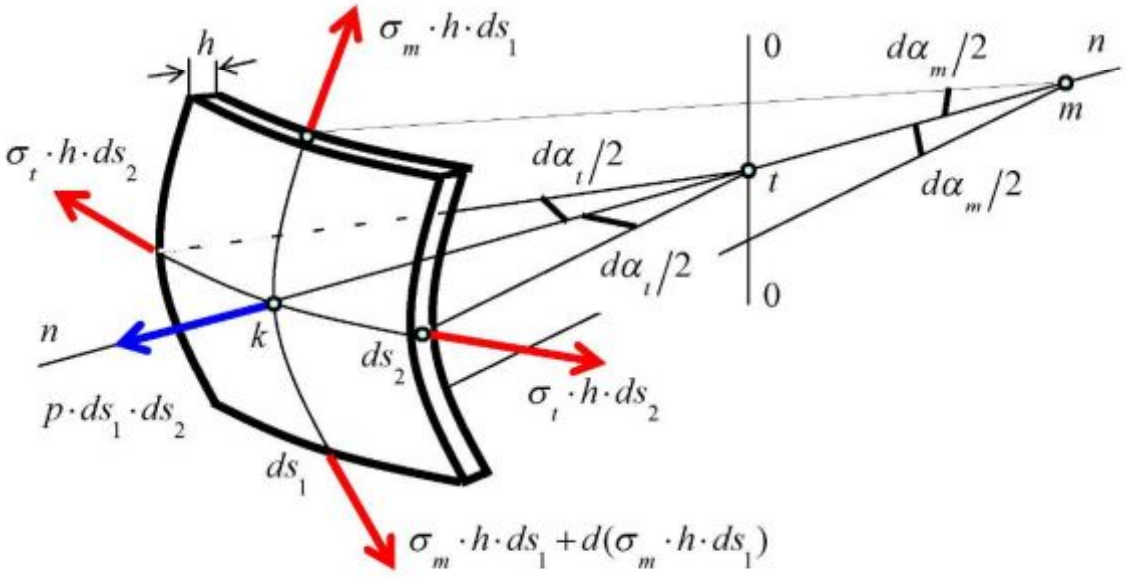


Рис. 2

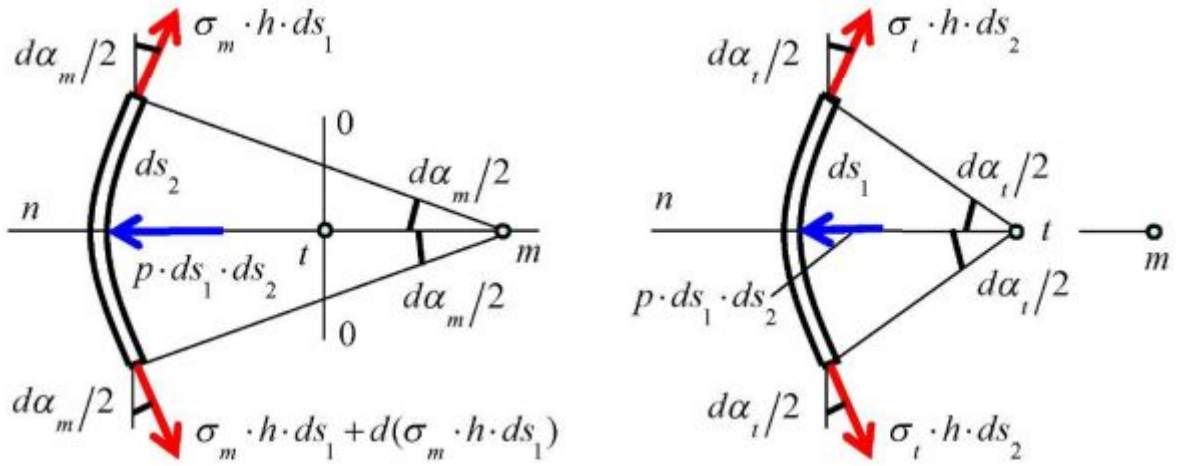
Заменяя в полученном уравнении равновесия синус его аргументом ввиду малости угла и разделив все слагаемые на $h \cdot ds_1 \cdot ds_2$, получим

$$\sigma_m \cdot \frac{d\alpha_m}{ds_2} + \sigma_t \cdot \frac{d\alpha_t}{ds_1} = \frac{p}{h}.$$

С учетом $\frac{d\alpha_m}{ds_2} = \frac{1}{\rho_m}$ и $\frac{d\alpha_t}{ds_1} = \frac{1}{\rho_t}$ окончательно получим

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}. \qquad (1)$$

Это соотношение называют уравнением Лапласа, который получил его в XIX веке при изучении поверхностного натяжения в жидкостях. В уравнение Лапласа входят два неизвестных: σ_m и σ_t.



а *б*

Рис. 3

Второе уравнение получим, рассматривая равновесие части сосуда, отсеченного коническим нормальным сечением (рис. 4).

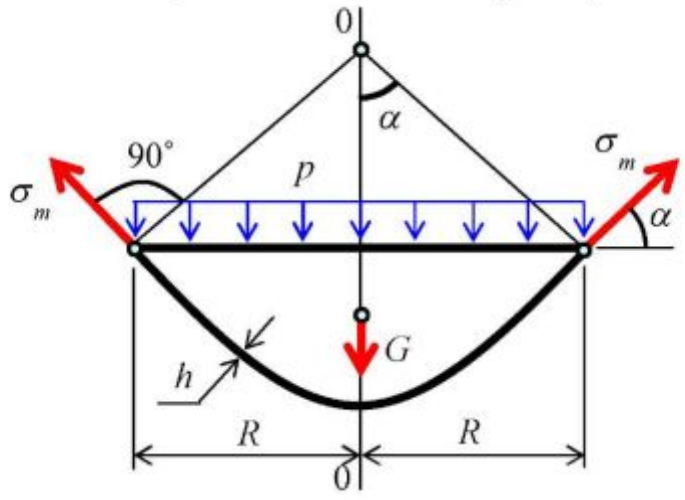


Рис. 4

Для определения меридиональных напряжений σ_m составим уравнение, проектируя все силы на направление оси $0-0$.

Обозначим через G вес содержимого оставленной части сосуда, находящейся ниже рассматриваемого конического нормального сечения; через p - давление в жидкости, одинаковое по закону Паскаля во всех направлениях и равное произведению веса единицы объема жидкости γ на глубину рассматриваемого нормального конического сечения H_1.

Если жидкость хранится в сосуде под некоторым избыточным по сравнению с атмосферным давлением p_0, то $p = \gamma \cdot H_1 + p_0$. Таким образом,

$$\sigma_m \cdot 2\pi R \cdot h \cdot \sin\alpha - p \cdot \pi R^2 - G = 0, \quad \sigma_m = \frac{p \cdot R}{2h \cdot \sin\alpha} + \frac{G}{2\pi R \cdot h \cdot \sin\alpha}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) позволяют найти оба напряжения σ_m и σ_t в каждой точке стенки сосуда.

Таким образом, по безмоментной теории оболочек меридиональные и окружные напряжения в тонкостенном сосуде определяются из уравнений равновесия.

Третье главное напряжение по направлению толщины сосуда предполагается малым, и поэтому напряженное состояние тонкостенного сосуда считается двухосным.

Заметим, что при расчете сосудов напряжения от изгиба в местах соединения днища бака с обечайкой и в зоне крепления фланцев, как правило, в расчет не принимаются из-за малой толщины стенки сосуда h.

Изготавливаются днища обычно из пластических материалов, для которых местный изгиб не является причиной разрушения. В зоне фланцевых соединений люков и трубопроводов происходит перераспределение мембранных напряжений.

Расчеты показывают, что фланцы влияют на напряженное состояние лишь локально. Не учитываются также составляющие нагрузки от веса конструкций бака.

Таким образом, для дальнейших расчетов остается лишь для различных типов оболочек определить значения главных радиусов кривизны дуги в окрестностях произвольной точки k и получить формулы для объемов тел, образованных вращением заданной кривой S вокруг оси симметрии, что и будет сделано ниже.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Для цилиндра радиусом R и высотой z имеем (рис. 5)

$$\rho_m = \infty, \quad \rho_t = tk = R, \quad V(z) = \pi R^2 \cdot z, \text{ (см. рис. 1).} \qquad (3)$$

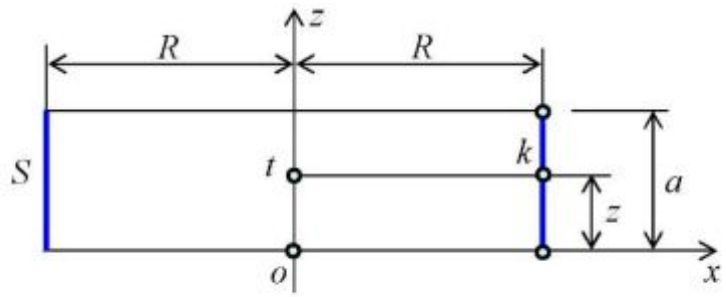


Рис. 5

КОНИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Для конуса (рис. 6) справедливы следующие соотношения

$\rho_m = \infty$, $\rho_t = tk$, $x = \rho_t \cdot \cos\alpha$, (см. рис. 1).

С учетом $\frac{x}{z} = \frac{R}{a}$ получаем $\rho_t = \frac{R \cdot z}{a \cdot \cos\alpha}$, где $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$.

Объем конуса высотой z будет равен

$$V(z) = \int_0^z \pi \cdot x^2 \cdot dz = \pi \cdot \int_0^z z^2 \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot dz = \pi \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot \frac{z^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot z .$$

Таким образом, имеем

$$\rho_m = \infty, \quad \rho_t = \frac{R \cdot z}{a \cdot \cos\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}, \quad V(z) = \frac{\pi \cdot R^2}{3 \cdot a^2} \cdot z^3 . \qquad (4)$$

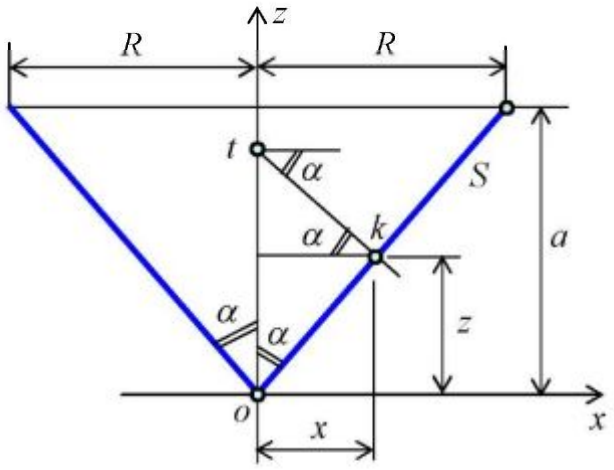
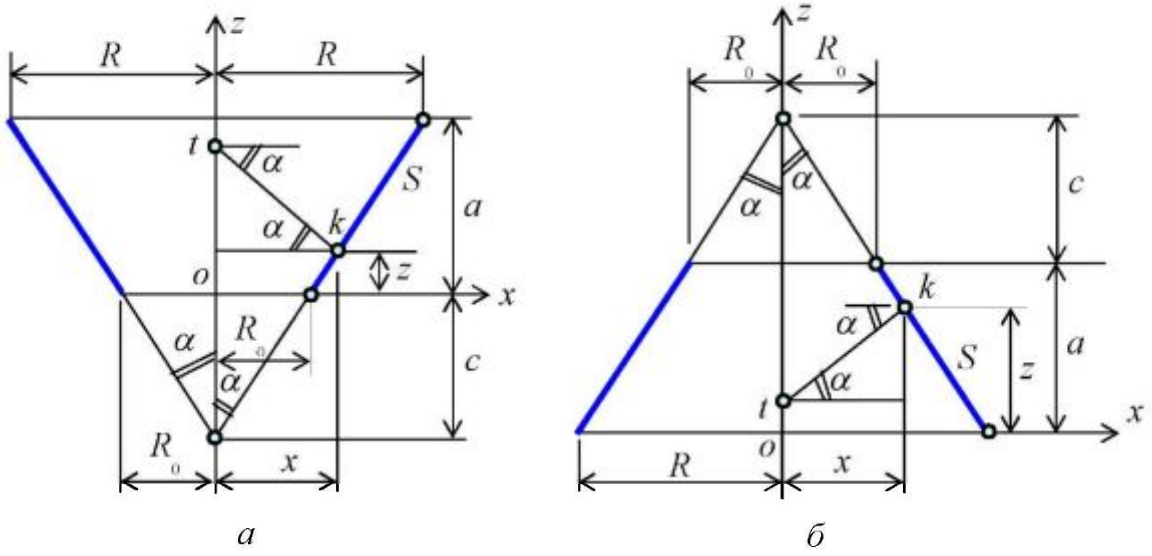


Рис. 6

ОБОЛОЧКИ, ВЫПОЛНЕННЫЕ В ВИДЕ УСЕЧЕННОГО КОНУСА



а *б*

Рис. 7

В нашем случае имеем (рис. 1, 7, *а*) $\rho_m = \infty$, $\rho_t = tk$, $x = \rho_t \cdot \cos\alpha$, с учетом $\frac{x}{c+z} = \frac{R_0}{c}$ получаем $\rho_t = \frac{R_0 \cdot (c+z)}{c \cdot \cos\alpha}$, где $\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + R_0^2}}$.

Так как $\frac{c}{R_0} = \frac{a+c}{R}$, то $c = \frac{R_0 \cdot a}{R - R_0}$.

Объем усеченного конуса высотой z

$$V(z) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot [x^2 \cdot (c+z) - R_0^2 \cdot c] = \frac{\pi \cdot R_0^2}{3 \cdot c^2} \cdot [(c+z)^3 - c^3].$$

Для другого варианта расположения усеченного конуса, приведенного на рис. 7, *б*, имеем

$\rho_m = \infty$, $\rho_t = tk$, $x = \rho_t \cdot \cos\alpha$, с учетом $\frac{x}{c + (a - z)} = \frac{R_0}{c}$ получаем $\rho_t = \frac{R_0 \cdot (a + c - z)}{c \cdot \cos\alpha}$, где $\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + R_0^2}}$.

Здесь $c = \frac{R_0 \cdot a}{R - R_0}$. Выражение для объема усеченного конуса высотой z несколько изменится:

$$V(z) = \frac{\pi}{3} \cdot [R^2 \cdot (a+c) - x^2 \cdot (c + a - z)] = \frac{\pi}{3 \cdot c^2} \cdot [R^2 \cdot c^2 \cdot (a+c) - R_0^2 \cdot (a + c - z)^3].$$

Таким образом, для обоих вариантов (рис. 7*а*, *б*) расположения поверхности в виде усеченного конуса имеем соответственно (5, *а*) и (5, *б*):

$$\rho_m = \infty, \quad \rho_t = \frac{R_0 \cdot (c+z)}{c \cdot \cos\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + R_0^2}},$$

$$V(z) = \frac{\pi \cdot R_0^2}{3 \cdot c^2} \cdot [(c+z)^3 - c^3]. \qquad (5, \text{а})$$

$$\rho_m = \infty, \ \rho_t = \frac{R_0 \cdot (a+c-z)}{c \cdot \cos\alpha}, \ \cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + R_0^2}},$$

$$V(z) = \frac{\pi}{3 \cdot c^2} \cdot [R^2 \cdot c^2 \cdot (a+c) - R_0^2 \cdot (a+c-z)^3]. \qquad (5, \text{б})$$

Все полученные зависимости в обоих случаях (рис. 7, *а*, *б*) остаются в силе при зеркальном отражении усеченной конической поверхности относительно оси x.

СФЕРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Для сферической оболочки (рис. 1, 8) имеем $\rho_m = \rho_t = R$, где R можно определить из граничного условия при $z = a \quad x = R_0$, или $R_0^2 + (a-R)^2 = R^2$, или $R = \frac{R_0^2 + a^2}{2 \cdot a}$. Объем шарового сегмента высотой z

$$V(z) = \int_0^z \pi \cdot x^2 \cdot dz = \pi \cdot \int_0^z [R^2 - (z-R)^2] \cdot dz = \pi \cdot \int_0^z (2 \cdot z \cdot R - z^2) \cdot dz =$$

$$= \pi \cdot (2 \cdot R \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3})_0^z = \pi \cdot \frac{z^2}{3} \cdot (3 \cdot R - z).$$ Заметим, что объем полусферы $V = \pi \cdot (R \cdot z^2 - \frac{z^3}{3})_0^R = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, объем шара $V = \pi \cdot (R \cdot z^2 - \frac{z^3}{3})_0^{2R} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$.

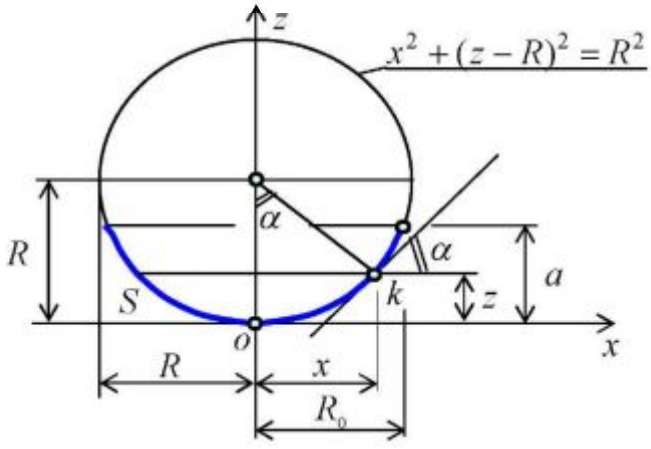


Рис. 8

Таким образом, в нашем случае имеем

$$\rho_m = \rho_t = R, \quad V(z) = \pi \cdot \frac{z^2}{3} \cdot (3 \cdot R - z), \quad R = \frac{R_0^2 + a^2}{2 \cdot a}. \qquad (6)$$

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

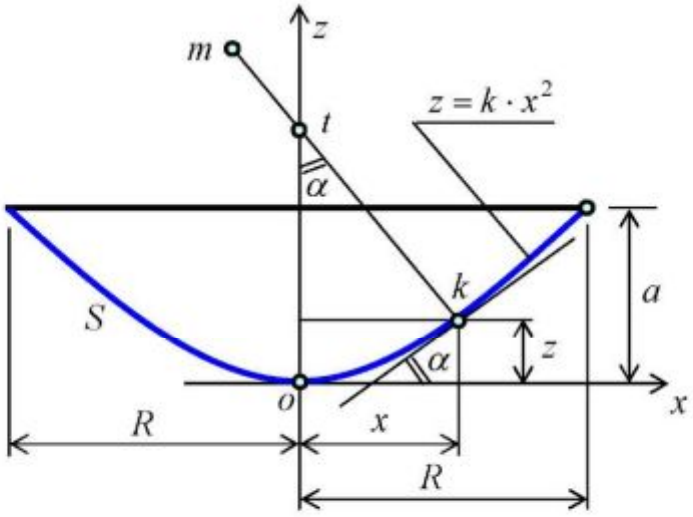


Рис. 9

Так как $z = k \cdot x^2$ (рис. 9), то $a = k \cdot R^2$ и $z = \frac{a}{R^2} \cdot x^2$.

Вычислим первую и вторую производные

$$tg\alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{a}{R^2} \cdot 2 \cdot x \cdot \frac{x}{x} = \frac{2 \cdot z}{x}, \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{2 \cdot a}{R^2}.$$

Определим главные радиусы кривизны

$\rho_t = tk$, $\rho_m = mk$ (см. рис. 1). Здесь $\rho_t \cdot \sin\alpha = x$, $x = R\sqrt{\frac{z}{a}}$, где

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{2 \cdot z}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{4 \cdot z^2}{x^2}}} = \frac{2 \cdot z}{\sqrt{x^2 + 4 \cdot z^2}}, \text{ отсюда}$$

$$\rho_t = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 4 \cdot z^2}}{2 \cdot z} = \frac{\sqrt{x^2 + 4 \cdot z^2}}{tg\alpha}.$$

Второй главный радиус кривизны

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\sqrt{(1 + (\frac{dz}{dx})^2)^3}} = \frac{\frac{2 \cdot a}{R^2}}{\sqrt{(1 + (\frac{4 \cdot z^2}{x^2})^3}} = \frac{\frac{2 \cdot a}{R^2}}{(1 + \frac{4 \cdot z^2}{x^2}) \cdot \sqrt{\frac{x^2 + 4 \cdot z^2}{x^2}}} =$$

$$= \frac{2 \cdot a \cdot x^2 \cdot x}{R^2 \cdot (x^2 + 4 \cdot z^2) \cdot \sqrt{x^2 + 4 \cdot z^2}} = \frac{x^2 \cdot tg\alpha}{(x^2 + 4 \cdot z^2) \cdot \sqrt{x^2 + 4 \cdot z^2}} = \frac{x^2}{(x^2 + 4 \cdot z^2) \cdot \rho_t}, \text{ или}$$

$$\rho_m = \rho_t \cdot \frac{x^2 + 4 \cdot z^2}{x^2}.$$

Объем сосуда ниже уровня z

$$V(z) = \int_0^z \pi \cdot x^2 \cdot dz = \pi \cdot \int_0^z R^2 \cdot \frac{z}{a} \cdot dz = \frac{\pi \cdot R^2}{a} \cdot (\frac{z^2}{2})_0^z = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot z^2}{2 \cdot a}.$$

Таким образом, имеем

$$\rho_t = \frac{\sqrt{x^2 + 4 \cdot z^2}}{tg\alpha},\ \rho_m = \rho_t \cdot \frac{x^2 + 4 \cdot z^2}{x^2},\ V(z) = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot z^2}{2 \cdot a},\ x = R\sqrt{\frac{z}{a}},\ tg\alpha = \frac{2 \cdot z}{x}. \quad (7)$$

ОБОЛОЧКИ, ОБРАЗОВАННЫЕ ВРАЩЕНИЕМ ЭЛЛИПСА ВОКРУГ ОСИ СИММЕТРИИ

Так как $x^2 = a^2[1 - \frac{(z-b)^2}{b^2}] = \frac{a^2}{b^2} \cdot (b^2 - (z-b)^2) = \frac{a^2}{b^2} \cdot (2 \cdot b \cdot z - z^2)$

(рис. 10), то

$$V(z) = \int_0^z \pi \cdot x^2 \cdot dz = \frac{\pi \cdot a^2}{b^2} \int_0^z [2 \cdot b \cdot z - z^2] \cdot dz = \frac{\pi \cdot a^2}{b^2} (b \cdot z^2 - \frac{z^3}{3}).$$

Заметим, что объем эллипсоида

$$V = \int_0^z \pi \cdot x^2 \cdot dz = \frac{\pi \cdot a^2}{b^2} (b \cdot z^2 - \frac{z^3}{3})_0^{2b} = \frac{4 \cdot \pi \cdot b \cdot a^2}{3}.$$

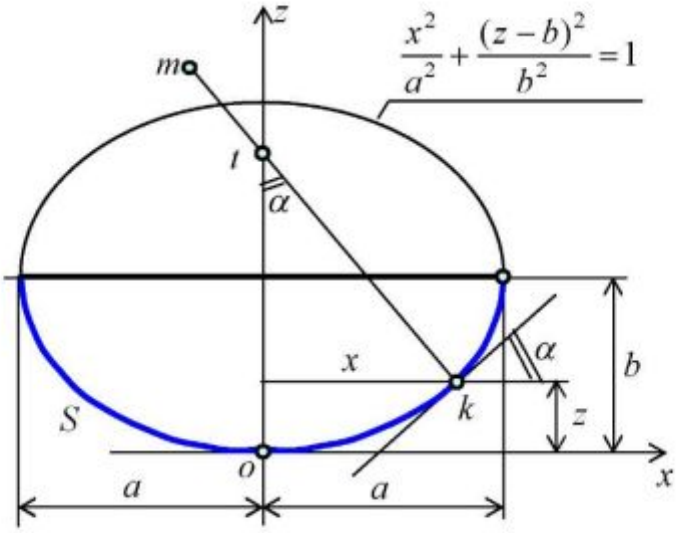


Рис. 10

Согласно рис. 10 имеем

$$\rho_t = tk = \frac{x}{\sin\alpha},$$

где

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad tg\alpha = \frac{dz}{dx}, \quad \text{а} \quad z = b \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Для дальнейших расчетов понадобятся выражения для первой и второй производных. Найдем их:

$$\frac{dz}{dx} = \pm\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{dx}[(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}] = \pm\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2\cdot x) =$$

$$= \mp\frac{b\cdot x}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp\frac{b}{a\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}} = \mp\frac{b}{a}(a^2x^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \mp\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{dx}[(a^2x^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}] = \mp\frac{b}{a}\cdot[(-\frac{1}{2})\cdot(a^2x^{-2} - 1)^{-\frac{3}{2}}\cdot a^2\cdot(-2\cdot x^{-3})] =$$

$$= \mp\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2\cdot x^{-3}}{\sqrt{(\frac{a^2}{x^2} - 1)^3}} = \frac{a^2\cdot tg\alpha}{x^3\cdot(\frac{a^2}{x^2} - 1)} = \frac{a^2\cdot tg\alpha}{x\cdot(a^2 - x^2)}.$$

Теперь можно определить главный радиус кривизны:

$$\rho_m = mk, \quad \frac{1}{\rho_m} = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\sqrt{[1 + (\frac{dz}{dx})^2]^3}} = \frac{a^2\cdot tg\alpha}{x\cdot(a^2 - x^2)\cdot\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{a^2\cdot\sin\alpha}{x\cdot(a^2 - x^2)\cdot(1+tg^2\alpha)},$$

$$\rho_m = \frac{x\cdot(a^2 - x^2)\cdot(1+tg^2\alpha)}{a^2\cdot\sin\alpha} = \rho_t\cdot\frac{(a^2 - x^2)\cdot(1+tg^2\alpha)}{a^2}.$$

Таким образом, имеем

$$\rho_t = \frac{x}{\sin\alpha}, \quad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \quad \rho_m = \rho_t\cdot\frac{(a^2 - x^2)\cdot(1+tg^2\alpha)}{a^2},$$

где

$$tg\alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{b\cdot x}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

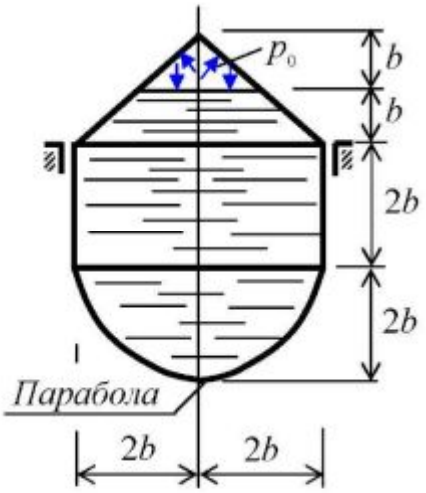
$$V(z) = \frac{\pi\cdot a^2}{b^2}(b\cdot z^2 - \frac{z^3}{3}). \qquad (8)$$

ПРИМЕР № 1

Тонкостенная составная оболочка заполнена жидкостью с объемным весом γ и находится под избыточным газовым давлением p_0 (рис. 11). Требуется:

1) используя безмоментную теорию оболочек вращения и метод сечений, получить аналитические выражения для продольных и окружных напряжений, построить эпюры напряжений по участкам;

2) по заданному критерию прочности определить толщину стенки оболочки h.



Дано:
$b = 1{,}5\ м$
$p_0 = 0{,}04\ МПа$
$\gamma = 9{,}8\ кН/м^3$
$[\sigma] = 120\ МПа$
Критерий Мизеса

Определить
$h = ?$

Рис. 11

Решение

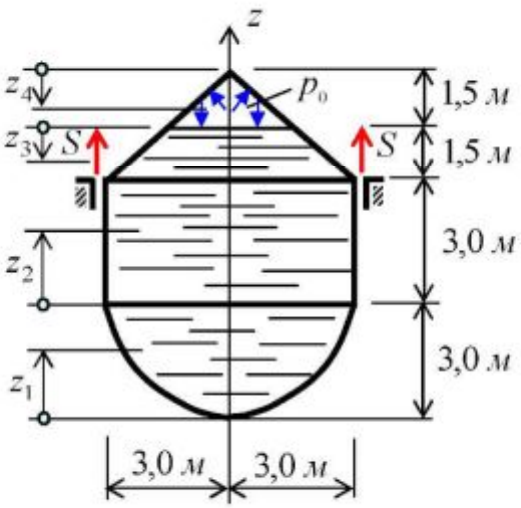


Рис. 12

Вес жидкости в составной оболочке вызывает реактивное погонное усилие со стороны опорного кольца S (рис. 12). Вес оболочки не учитываем. Для определения S составим следующее уравнение равновесия:

$$\sum F_z = 0, \quad S \cdot 2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot b) - \gamma \cdot \{\frac{\pi \cdot (2 \cdot b)^2 \cdot (2 \cdot b)^2}{2 \cdot (2 \cdot b)} + \pi \cdot (2 \cdot b)^2 \cdot (2 \cdot b) +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot [\pi \cdot (2 \cdot b)^2 \cdot (2 \cdot b) - \pi \cdot b^2 \cdot b]\} = 0, \quad S = \frac{43 \cdot \gamma \cdot b^2}{12} = 79.01 \frac{кН}{м}.$$

В нашем случае (рис. 12) для построения эпюр σ_t и σ_m имеем 4 участка. На каждом участке проводим сечение, для определения которого используем скользящую систему координат. Каждый раз будем рассматривать ту часть составной оболочки, для которой уравнения равновесия имеют более простой вид.

Рассмотрим первый участок (параболическую часть) $0 \le z_1 \le 2b$ (рис. 13).

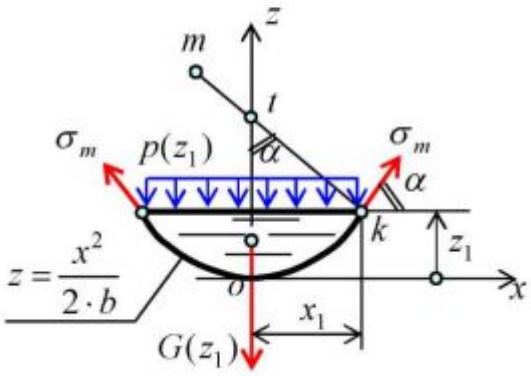


Рис. 13

В принятой системе координат уравнение квадратной параболы будет $z = k_1 \cdot x^2$, при $x = 2 \cdot b$, $z = 2 \cdot b$ (рис. 11, 12), тогда $2 \cdot b = k_1 \cdot (2 \cdot b)^2$. Отсюда $z = \frac{x^2}{2 \cdot b}$. Объем оставленной части оболочки $V(z_1) = \pi \cdot b \cdot z_1^2$. Выражения (7) для главных кривизн не изменятся. Давление жидкости над рассматриваемым сечением

$$p(z_1) = p_0 + \gamma \cdot (5 \cdot b - z_1) = [0{,}04 + 0{,}0098 \cdot (7{,}5 - z_1)] \cdot 10^6 \left(н / м^2\right).$$

Получим аналитические выражения для продольных и окружных напряжений. Меридиональное напряжения σ_m определим из уравнения равновесия отсеченной и оставленной части оболочки (2):

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_1 \cdot h \cdot \sin\alpha = p \cdot \pi \cdot x_1^2 + G, \text{ где } G(z_1) = \gamma \cdot V(z_1) = \gamma \cdot \pi \cdot b \cdot z_1^2,$$

отсюда $$\sigma_m = \frac{p(z_1) \cdot x_1^2 + \gamma \cdot b \cdot z_1^2}{2 \cdot x_1 \cdot h \cdot \sin\alpha}.$$

Окружное напряжение σ_t определим из уравнения Лапласа (1):

$$\sigma_t = \rho_t \cdot (\frac{p(z_1)}{h} - \frac{\sigma_m}{\rho_m}), \text{ где согласно (7), } \rho_t = \frac{\sqrt{x_1^2 + 4 \cdot z_1^2}}{tg\alpha} \text{ и } \rho_m = \rho_t \cdot \frac{(x_1^2 + 4 \cdot z_1^2)}{x_1^2}.$$

Разобьем первый участок на 4 одинаковые части вдоль координаты z_1. Числовые расчеты будем проводить в системе Mathcad. Для расчета напряжений на первом участке была составлена программа «Парабола», распечатка которой приводится ниже.

$R := 3 \qquad a := 3 \qquad p0 := 0.04 \qquad h := 1$

$z := 0.00001, 0.75 .. 3 \qquad p(z) := p0 + \gamma \cdot (5 \cdot b - z)$

$x(z) := R \cdot \sqrt{\frac{z}{a}}$

$b1(z) := x(z)^2 + 4 \cdot z^2 \qquad \sin\alpha(z) := 2 \cdot \frac{z}{\sqrt{b1(z)}}$

$\rho t(z) := \frac{\sqrt{b1(z)}}{tg\alpha(z)} \qquad \rho m(z) := \rho t(z) \cdot \frac{b1(z)}{x(z)^2} \qquad tg\alpha(z) := 2 \cdot \frac{z}{x(z)}$

$$\sigma m(z) := \frac{1}{2 \cdot x(z) \cdot h \cdot \sin\alpha(z)} \cdot \left(p(z) \cdot x(z)^2 + \gamma \cdot b \cdot z^2\right)$$

$\sin\alpha(3) = 0.8944$

$$\sigma t(z) := \rho t(z) \cdot \left(\frac{p(z)}{h} - \frac{\sigma m(z)}{\rho m(z)}\right)$$

$$\sigma mizes(z) := \sqrt{\sigma t(z)^2 + \sigma m(z)^2 - \sigma t(z) \cdot \sigma m(z)}$$

z =	σt(z) =	σm(z) =	σmizes(z)
$1 \cdot 10^{-5}$	0.0851	0.0851	0.0851
0.75	0.1669	0.1165	0.1483
1.5	0.2107	0.1379	0.1854
2.25	0.2359	0.1537	0.2074
3	0.2489	0.1657	0.2195

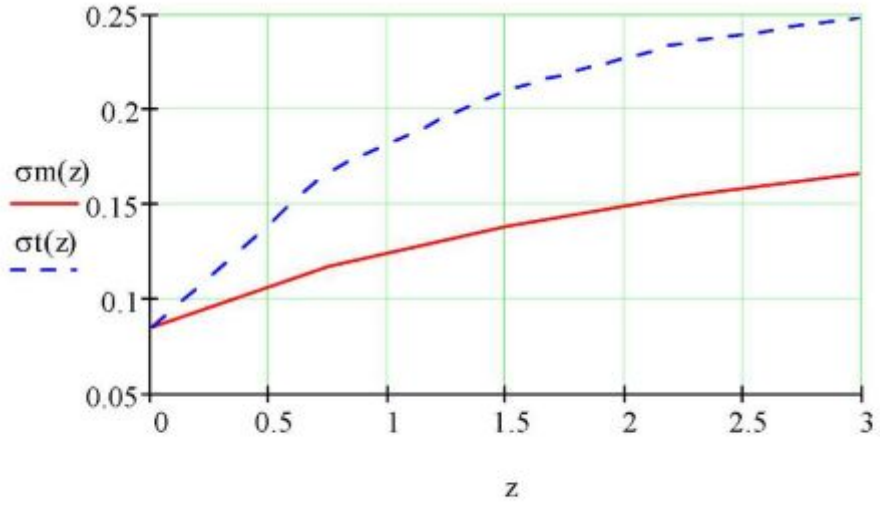


Рис. 14

На рис. 14 показаны эпюры продольных и окружных напряжений.

Рассмотрим второй участок (цилиндрическая часть) $0 \le z_2 \le 2b$ (рис. 15).

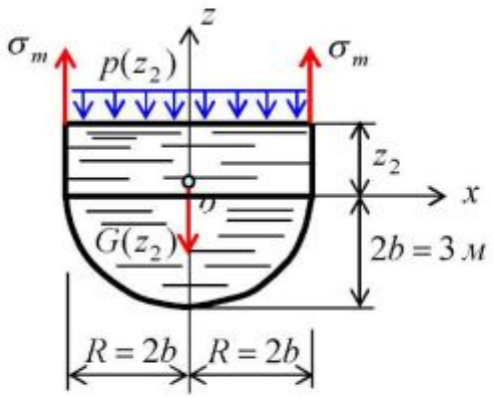


Рис. 15

Объем оставленной нижней части составной оболочки

$$V(z_2) = 4 \cdot \pi \cdot b^3 + \pi \cdot R^2 \cdot z_2 = 4 \cdot \pi \cdot b^2 \cdot (b + z_2).$$

На втором участке справедливы выражения (3). Давление жидкости над рассматриваемым сечением

$$p(z_2) = p_0 + \gamma \cdot (3 \cdot b - z_2) = [0{,}04 + 0{,}0098 \cdot (4{,}5 - z_2)] \cdot 10^6 \left(н / м^2\right).$$

Получим аналитические выражения для продольных и окружных напряжений из уравнений (1) и (2):

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h \cdot \sin 90^\circ = p(z_2) \cdot \pi \cdot R^2 + G(z_2), \quad \text{где} \quad G(z_2) = \gamma \cdot V(z_2),$$

$$\sigma_m = \frac{p(z_2) \cdot b + \gamma \cdot b \cdot (b + z_2)}{h}, \qquad \sigma_t = \frac{p(z_2)}{h} \cdot \rho_t = \frac{p(z_2)}{h} \cdot 2 \cdot b.$$

Для расчета напряжений на втором участке была составлена в системе Mathcad программа «Цилиндр», распечатка которой приведена на следующей странице.

Проверим равновесие узла единичной длины в окружном направлении на границе первого и второго участков (рис. 16):

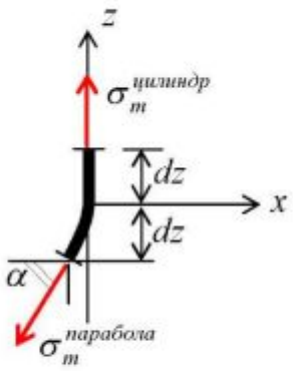


Рис. 16

Проектируя все силы но ось z (рис. 16), получим

$$\sum F_z = 0,\ \sigma_m^{цилиндр} \cdot h \cdot 1 - \sigma_m^{парабола} \cdot h \cdot 1 \cdot \sin\alpha = 0,\ 0{,}1482 - 0{,}1657 \cdot 0{,}894 = 0,$$
$$0{,}1482 - 0{,}1482 = 0,\ 0 = 0.$$

Таким образом, элемент узла единичной длины в окружном направлении на границе первого и второго участков находится в равновесии.

Распечатка программы «Цилиндр»

R := 3 a := 3 b := 1.5 p0 := 0.04 h := 1 γ := 0.0098 ρt := R

$z := 0, \frac{3}{4} .. a$ $p(z) := p0 + \gamma \cdot (3 \cdot b - z)$ $\sigma m(z) := p(z) \cdot b + \gamma \cdot b \cdot (b + z)$

$\sigma t(z) := p(z) \cdot \rho t$ $\sigma mizes(z) := \sqrt{\sigma t(z)^2 + \sigma m(z)^2 - \sigma t(z) \cdot \sigma m(z)}$

z =	σt(z) =	σm(z) =	σmizes(z)
0	0.2523	0.1482	0.2196
0.75	0.2303	0.1482	0.2021
1.5	0.2082	0.1482	0.1856
2.25	0.1862	0.1482	0.1704
3	0.1641	0.1482	0.1568

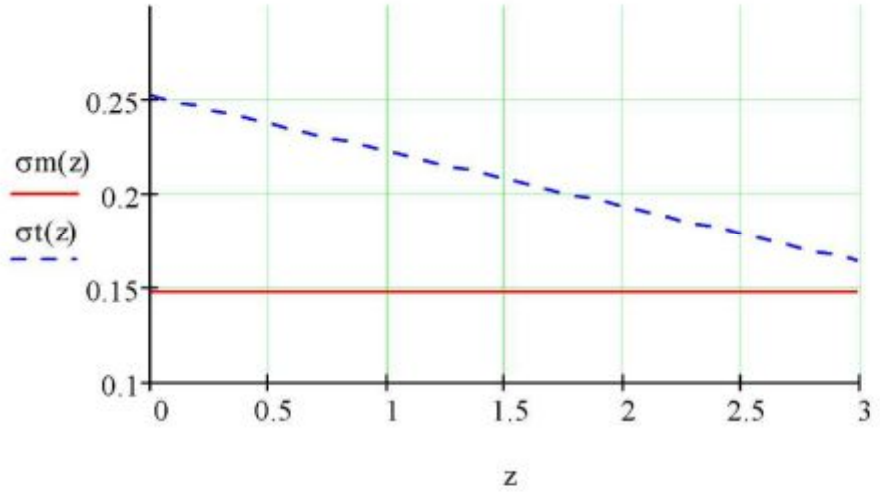


Рис. 17

На рис. 17 показаны эпюры продольных σ_m и окружных σ_t напряжений на втором участке.

Рассмотрим третий участок (срединная поверхность в виде усеченного конуса) $0 \le z_3 \le b$ (рис. 18).

Заметим, что проще определить напряжения на третьем участке, рассматривая равновесие верхней оставленной части оболочки (рис. 18). Ось x совместим с верхней границей третьего участка, ось z направим вниз.

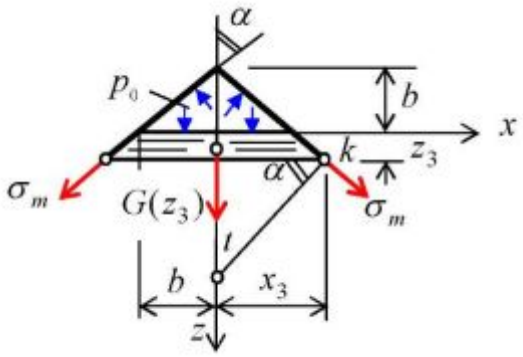


Рис. 18

Давление жидкости над рассматриваемым сечением

$$p(z_3) = p_0 + \gamma \cdot z_3 = [0{,}04 + 0{,}0098 \cdot z_3] \cdot 10^6 \left(н/м^2\right).$$

Объем оставленной части оболочки, заполненной жидкостью, будет

$$V(z_3) = \frac{1}{3} \cdot [\pi \cdot x_3^2 \cdot (b + z_3) - \pi \cdot b^2 \cdot b] = \frac{\pi}{3} \cdot (x_3^3 - b^3) = \frac{\pi}{3} \cdot [(b + z_3)^3 - b^3].$$

Выражения для главных кривизн, согласно рис. 18, будут $\rho_m = \infty$, $\rho_t = tk$, и с учетом $\rho_t \cdot \cos\alpha = x_3$, $\alpha = 45^\circ$, где $\frac{x_3}{b} = \frac{b + z_3}{b}$, отсюда $x_3 = b + z_3$ и окончательно в нашем случае получим $\rho_t = \frac{x_3}{\cos\alpha} = \frac{b + z_3}{\cos\alpha}$.

Меридиональное напряжения σ_m определим из уравнения равновесия отсеченной части оболочки (2):

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_3 \cdot h \cdot \cos\alpha = p(z_3) \cdot \pi \cdot x_3^2 - G(z_3)), \quad G(z_3) = \gamma \cdot V(z_3),$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2 \cdot x_3 \cdot h \cdot \cos\alpha} \cdot [p(z_3) \cdot x_3^2 + \frac{1}{3} \cdot \gamma \cdot (x_3^3 - b^3)].$$

Окружное напряжение σ_t определим из уравнения Лапласа (1) с учетом полученных выше соотношений $\sigma_t = \rho_t \cdot \frac{p(z_3)}{h}$.

Для расчета окружных, продольных и эквивалентных напряжений, которые определялись согласно критерию Мизеса, на третьем участке была составлена в системе Mathcad программа «Усеченный конус», распечатка которой приведена ниже.

На рис. 19 показаны эпюры продольных σ_m и окружных σ_t напряжений на третьем участке.

Распечатка программа «Усеченный конус»

$R := 3 \quad a := 1.5 \quad c := 1.5 \quad b := 1.5 \quad p0 := 0.04 \quad \gamma := 0.0098$

$z := 0, \frac{1.5}{4} .. a \quad p(z) := p0 + \gamma \cdot z \quad x(z) := b + z \quad h := 1$

$\rho t(z) := \frac{b + z}{\cos\alpha} \quad \sigma t(z) := \frac{\rho t(z) \cdot p(z)}{h} \quad \cos\alpha := \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\alpha = 0.7071$

$$\sigma m(z) := \frac{1}{2 \cdot x(z) \cdot h \cdot \cos\alpha} \cdot \left(p(z) \cdot x(z)^2 - \gamma \cdot \frac{x(z)^3 - c \cdot b^2}{3} \right)$$

$$\sigma mizes(z) := \sqrt{\sigma t(z)^2 + \sigma m(z)^2 - \sigma t(z) \cdot \sigma m(z)}$$

z =	σt(z) =	σm(z) =	σmizes(z)
0	0.0849	0.0424	0.0735
0.375	0.1158	0.0539	0.1004
0.75	0.1507	0.0671	0.1307
1.125	0.1894	0.0818	0.1646
1.5	0.2321	0.0978	0.2018

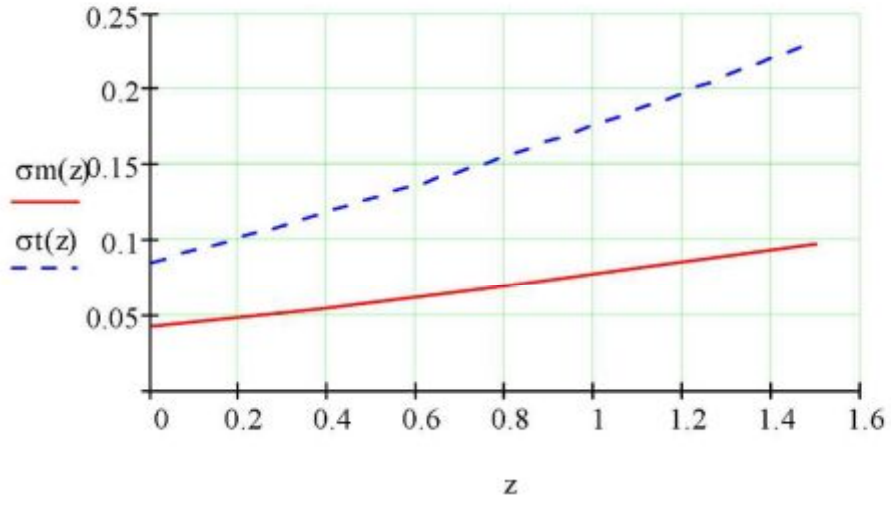


Рис. 19

Проверим равновесие узла единичной длины в окружном направлении на границе второго и третьего участков (рис. 20).

$$\sum F_z = 0, \quad \sigma_m^{конус} \cdot h \cdot 1 \cdot \cos\alpha + S - \sigma_m^{цилиндр} \cdot h \cdot 1 = 0,$$

$$\frac{0{,}0978}{h} \cdot h \cdot 1 \cdot 0{,}7071 + 0{,}079 - \frac{0{,}1482}{h} \cdot h \cdot 1 = 0, \quad 0{,}0692 + 0{,}079 - 0{,}1482 = 0,$$

$$0{,}1482 - 0{,}1482 = 0, \quad 0 = 0.$$

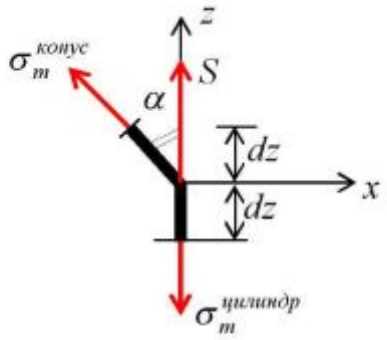


Рис. 20

На четвертом участке ($0 \le z_4 \le b$) имеем (рис. 21): $\rho_m = \infty$, $\rho_t = tk$, $\rho_t \cdot \cos\alpha = x_4$, $\alpha = 45^\circ$, где $\frac{x_4}{z_4} = \frac{b}{b}$, отсюда $x_4 = z_4$ и $\rho_t = \frac{x_4}{\cos\alpha} = \frac{z_4}{\cos\alpha}$.

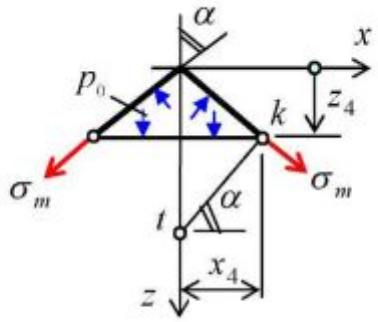


Рис. 21

Напряжения σ_m и σ_t определим из уравнений (2) и (1), которые в нашем случае принимают следующий вид:

$$\sigma_m = \frac{p_0 \cdot x_4}{2 \cdot h \cdot \cos\alpha}, \quad \sigma_t = \rho_t \cdot \frac{p_0}{h}.$$

Как обычно разбиваем четвертый участок на 4 одинаковые части вдоль координаты z_4. Числовые вычисления напряжений проводились в системе Mathcad, при помощи программы «Конус», распечатка которой приводится на следующей странице.

На рис. 22 приведены эпюры продольных и окружных напряжений. Эпюры напряжений по всей высоте резервуара показаны на рис. 23.

Из условия прочности $\frac{\sigma_{экв}^{\max}}{h} \le [\sigma]$ определим толщину оболочки

$$h \ge \frac{\sigma_{экв}^{\max}}{[\sigma]} = \frac{0{,}2195 \cdot 10^6}{120 \cdot 10^6} = 0{,}0018\,м = 1{,}8\,мм.$$

$R := 1.5 \quad a := 1.5 \quad p0 := 0.04 \quad h := 1 \quad \gamma := 0.0098 \quad \cos\alpha := \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z := 0, \frac{1.5}{4} .. 1.5 \quad x(z) := z \quad \rho t(z) := \frac{z}{\cos\alpha} \quad \sigma t(z) := \frac{\rho t(z) \cdot p0}{h}$

$\sigma m(z) := \frac{p0 \cdot x(z)}{2 \cdot h \cdot \cos\alpha} \quad \sigma mizes(z) := \sqrt{\sigma t(z)^2 + \sigma m(z)^2 - \sigma t(z) \cdot \sigma m(z)}$

z =
0
0.375
0.75
1.125
1.5

σt(z) =
0
0.0212
0.0424
0.0636
0.0849

σm(z) =
0
0.0106
0.0212
0.0318
0.0424

σmizes(z)
0
0.0184
0.0367
0.0551
0.0735

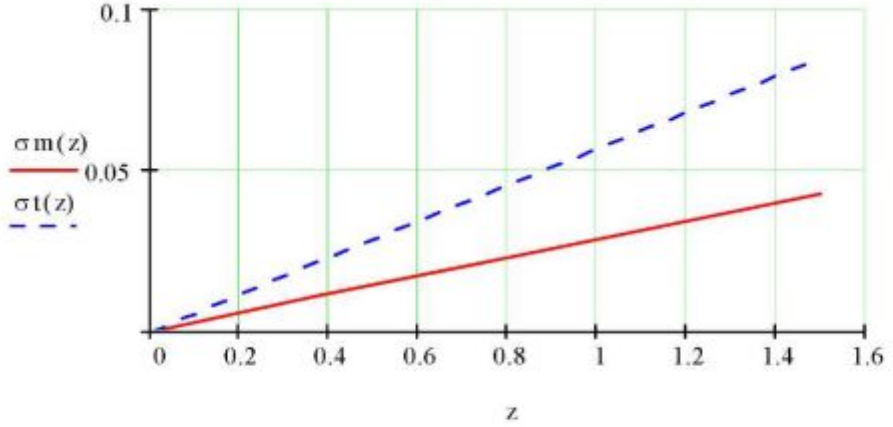
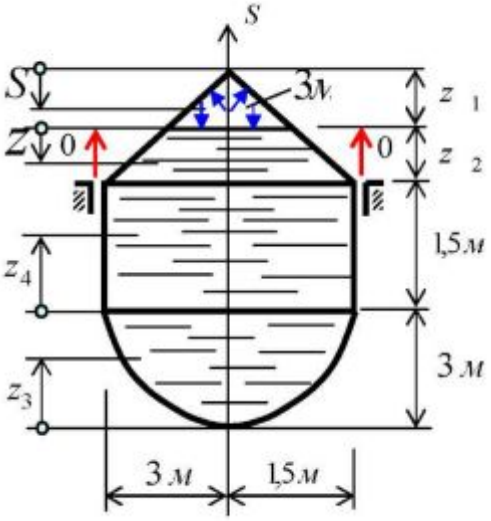


Рис. 22



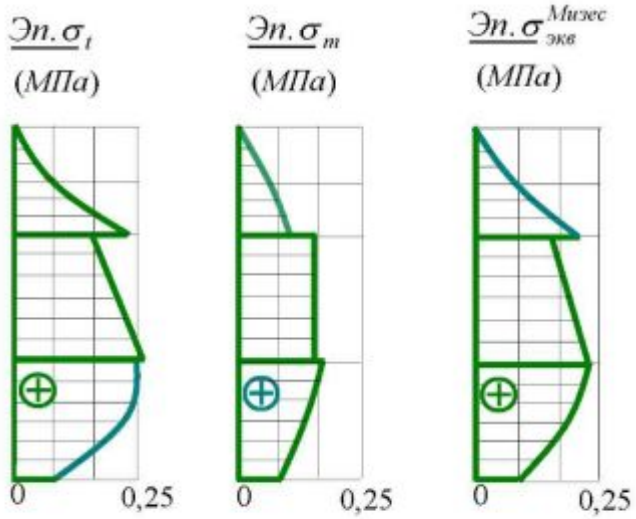


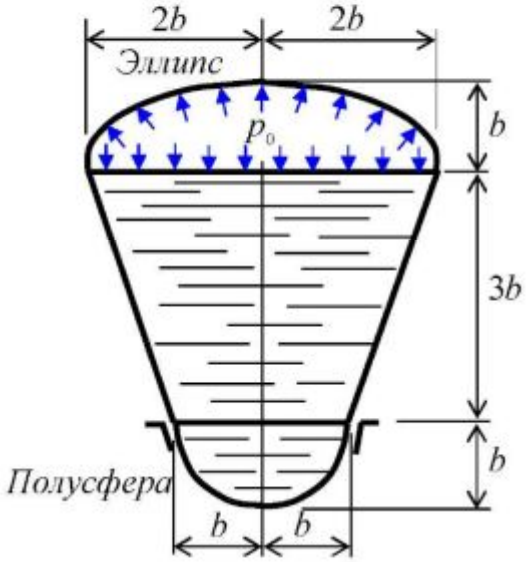
Рис. 23

ПРИМЕР № 2

Тонкостенная составная оболочка заполнена жидкостью с объемным весом γ и находится под избыточным газовым давлением p_0 (рис. 24). Требуется:

1) используя безмоментную теорию оболочек вращения и метод сечений, получить аналитические выражения для продольных и окружных напряжений, построить эпюры напряжений по участкам;

2) по заданному критерию прочности определить толщину стенки оболочки h.



Дано:
$b = 1{,}5\ м$
$p_0 = 0{,}04\ МПа$
$\gamma = 9{,}8\ кН/м^3$
$[\sigma] = 120\ МПа$
Критерий
Сен – Венана

Определить
$h = ?$

Рис. 24

Решение

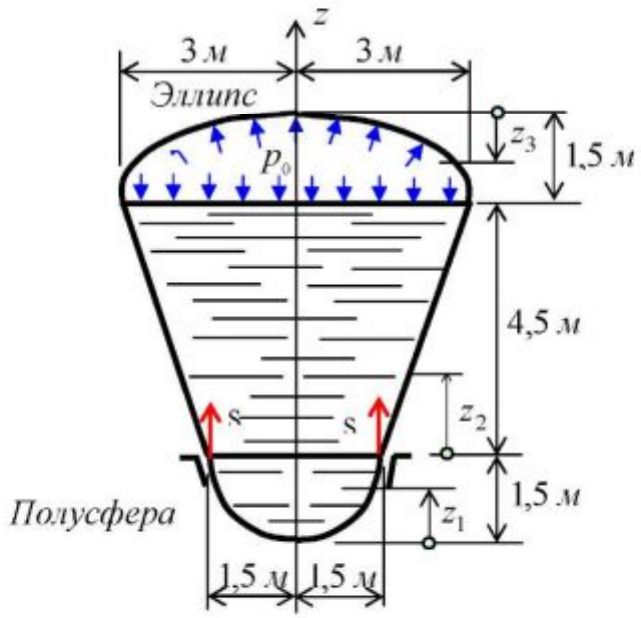


Рис. 25

Вес жидкости в сосуде вызывает погонное усилие S со стороны опорного кольца (рис. 25). Определения его из следующего уравнения равновесия:

$$\sum F_z = 0, \quad S \cdot 2 \cdot \pi \cdot b = \gamma \cdot \{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot b^3 + \frac{1}{3} \cdot [\pi \cdot (2 \cdot b)^2 \cdot 6 \cdot b - \pi \cdot b^2 \cdot 3 \cdot b]\},$$

$$S = \frac{23}{6} \cdot \gamma \cdot b^2 = \frac{23}{6} \cdot 9{,}8 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5^2 \approx 84{,}52\ кН/м.$$

В нашем случае (рис. 25) при построении эпюр σ_t и σ_m имеем 3 участка, каждый из которых разбиваем на 4 одинаковые части вдоль координаты z_1. Напряжения определяем методом сечений, рассматривая равновесие той части сосуда, для которого уравнения равновесия имеют более простой вид.

Рассмотрим первый участок (полусфера) $0 \le z_1 \le b$ (рис. 26).

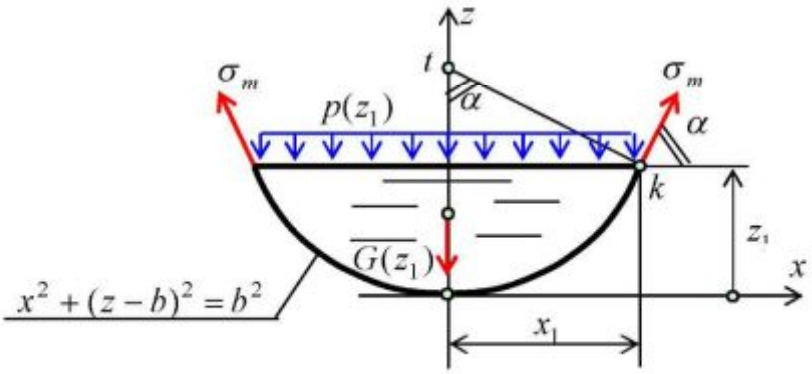


Рис. 26

В принятой системе координат уравнение полусферы будет $x^2 + (z-b)^2 = b^2$ или $x_1^2 = 2 \cdot z_1 \cdot b - z_1^2$. Объем оставленной части оболочки $V(z_1) = \pi \cdot \frac{z_1}{3} \cdot (3 \cdot b - z_1)$. Выражения (7) для главных кривизн $\rho_m = \rho_t = b$.

Давление жидкости над рассматриваемым сечением

$$p(z_1) = p_0 + \gamma \cdot (4 \cdot b - z_1) = [0{,}04 + 0{,}0098 \cdot (6 - z_1)] \cdot 10^6 \left(Н/м^2\right).$$

Меридиональное напряжения σ_m определим из уравнения равновесия отсеченной части оболочки (2)

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_1 \cdot h \cdot \sin\alpha = p(z_1) \cdot \pi \cdot x_1^{\,2} + G(z_1), \text{ где}$$

$$G(z_1) = \gamma \cdot V(z_1) = \gamma \cdot \pi \cdot \frac{z_1}{3} \cdot (3 \cdot b - z_1), \quad \sigma_m = \frac{p(z_1) \cdot x_1^2 + \gamma \cdot \frac{z_1}{3} \cdot (3 \cdot b - z_1)}{2 \cdot x_1 \cdot h \cdot \sin\alpha}.$$

Окружное напряжение σ_t определим из уравнения Лапласа (1)

$$\sigma_t = \frac{p(z_1) \cdot b}{h} - \sigma_m.$$

Для расчета напряжений на первом участке была составлена программа «Полусфера», распечатка которой приводится ниже.

$R := 1.5 \qquad b := 1.5 \qquad p0 := 0.04 \qquad \gamma := 0.0098 \qquad z := 0.000001, \frac{1.5}{4} .. R$

$p(z) := p0 + \gamma \cdot (4 \cdot b - z) \qquad x(z) := \sqrt{2 \cdot z \cdot b - z^2} \qquad h := 1$

$\sin\alpha(z) := \frac{x(z)}{b} \qquad \sigma m(z) := \frac{1}{2 \cdot x(z) \cdot h \cdot \sin\alpha(z)} \cdot \left[p(z) \cdot x(z)^2 + \gamma \cdot (3 \cdot b - z) \cdot \frac{z^2}{3} \right]$

$\sigma t(z) := \left(\frac{p(z) \cdot b}{h} - \sigma m(z) \right) \qquad \rho m := R \qquad \rho t := R$

z =
$1 \cdot 10^{-6}$
0.375
0.75
1.125
1.5

σt(z) =
0.0741
0.0699
0.0655
0.0609
0.0557

σm(z) =
0.0741
0.0728
0.0717
0.0708
0.0704

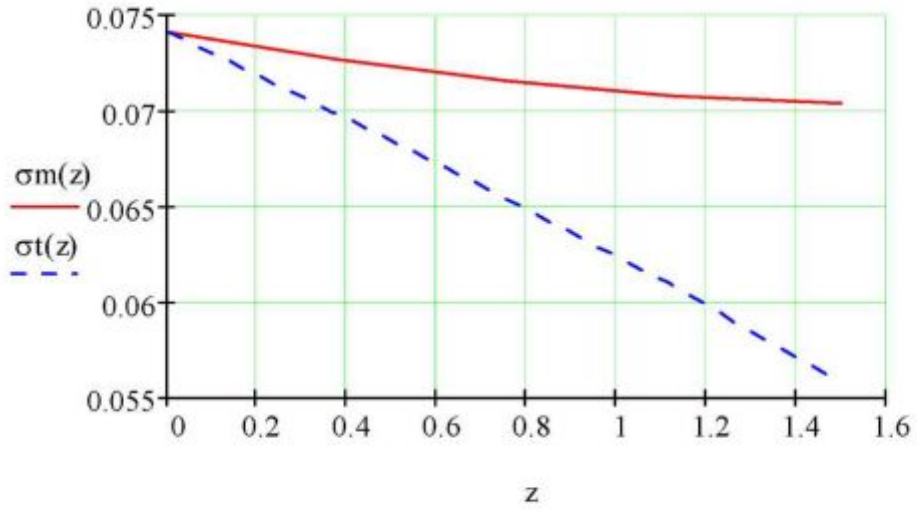


Рис. 27

На рис. 27 показаны эпюры продольных σ_m и окружных σ_t напряжений.

Рассмотрим второй участок (усеченный конус) $0 \le z_2 \le 3b$ (рис. 28, *а*). Из рис. 28, *б* видно, что $\frac{x_2}{z_2 + 3 \cdot b} = \frac{2b}{6b}$, $x_2 = b + \frac{z_2}{3}$, тогда объем оставленной части оболочки

$$V(z_2) = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot b^3 + \frac{1}{3} \cdot [\pi \cdot x_2^2 \cdot (3 \cdot b + z_2) - \pi \cdot b^2 \cdot 3 \cdot b)] =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \{2 \cdot b^3 + [(b^2 + \frac{2}{3} \cdot b \cdot z_2 + \frac{z_2^2}{9}) \cdot (3 \cdot b + z_2) - 3 \cdot b^3]\} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot (2 \cdot b^3 + 3 \cdot b^2 \cdot z_2 + b \cdot z_2^2 + \frac{z^3}{9}), \quad G(z_2) = \gamma \cdot V(z_2).$$

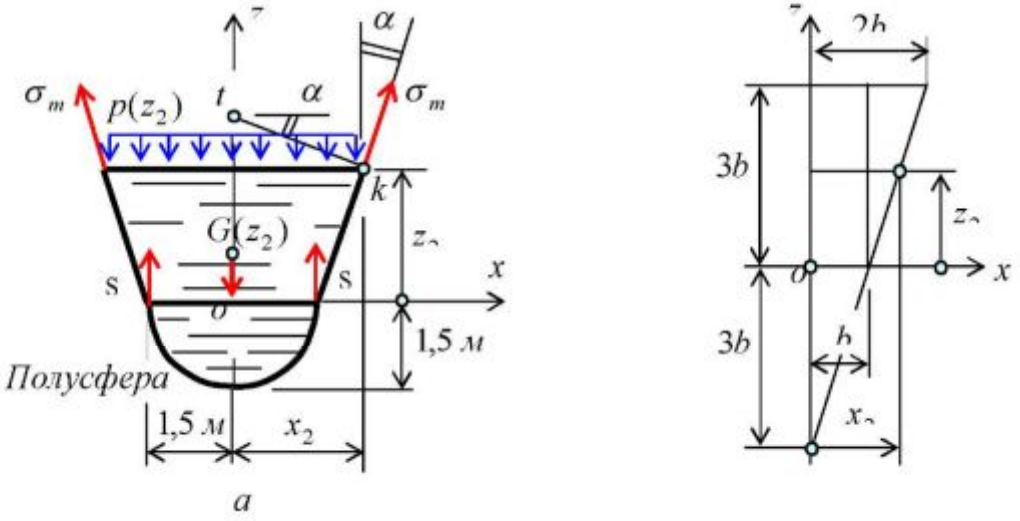


Рис. 28

Давление жидкости над рассматриваемым сечением

$$p(z_2) = p_0 + \gamma \cdot (3 \cdot b - z_2) = [0{,}04 + 0{,}0098 \cdot (4{,}5 - z_2)] \cdot 10^6 \left(н/м^2\right).$$

Выражения для главных кривизн $\rho_m = \infty$, $\rho_t = tk$, $\rho_t \cdot \cos\alpha = x_2$,

где $$\cos\alpha = \frac{3 \cdot b}{\sqrt{b^2 + (3 \cdot b)^2}}, \qquad \rho_t = \frac{x_2}{\cos\alpha}.$$

Меридиональное напряжение σ_m определим из уравнения равновесия отсеченной части оболочки (2):

$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_2 \cdot h \cdot \cos\alpha = p(z_2) \cdot \pi \cdot x_2^2 + G(z_2) - S \cdot 2 \cdot \pi \cdot b,$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2 \cdot x_2 \cdot h \cdot \cos\alpha} \cdot [p(z_2) \cdot x_2^2 + \frac{G(z_2)}{\pi} - S \cdot 2 \cdot b)].$$

Окружное напряжение σ_t определим из уравнения Лапласа (1):

$$\sigma_t = \rho_t \cdot \frac{p(z_2)}{h}.$$

Для расчета напряжений на втором участке была составлена программа «Усеченный конус», распечатка которой приводится ниже.

На рис. 29 показаны эпюры продольных σ_m и окружных σ_t напряжений на втором участке.

Рассмотрим третий участок (эллиптическая часть) $0 \le z_3 \le b$ (рис. 30).

Распечатка программа «Усеченный конус»

$R := 3 \quad R0 := 1.5 \quad b := 1.5 \quad c := 3 \cdot b \quad p0 := 0.04 \quad h := 1 \quad \gamma := 0.0098$

$z := 0, \frac{4.5}{4} .. c \qquad p(z) := p0 + \gamma \cdot (3 \cdot b - z) \qquad \cos\alpha := \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1}}$

$x(z) := b + \frac{z}{3} \qquad \rho t(z) := \frac{x(z)}{\cos\alpha} \qquad \sigma t(z) := \frac{\rho t(z) \cdot p(z)}{h}$

$S1 := 23 \cdot \gamma \cdot \frac{b^3}{3} \qquad V1(z) := \frac{2 \cdot b^3 + 3 \cdot b \cdot z \cdot x(z) + \frac{z^3}{9}}{3}$

$\cos\alpha = 0.9487$

$\sigma m(z) := \frac{1}{2 \cdot x(z) \cdot h \cdot \cos\alpha} \cdot \left(p(z) \cdot x(z)^2 - S1 + \gamma \cdot V1(z) \right)$

z =
0
1.125
2.25
3.375
4.5

σt(z) =
0.133
0.1444
0.1472
0.1412
0.1265

σm(z) =
-0.0149
0.016
0.0377
0.0531
0.0632

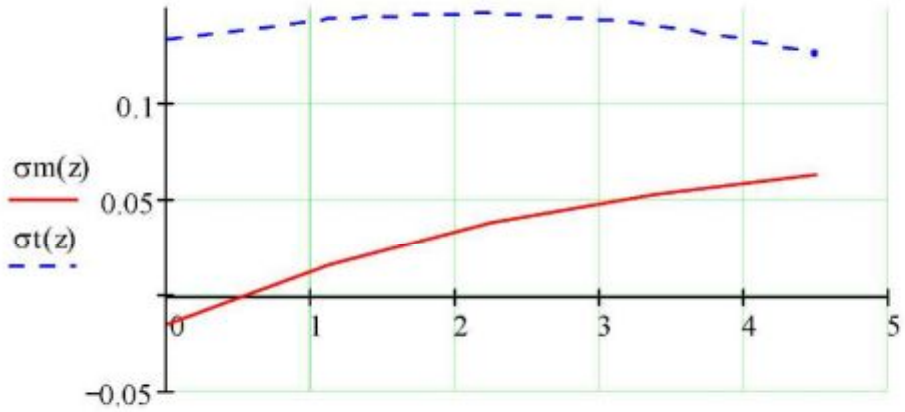


Рис. 29

В принятой системе координат уравнение эллипса будет $\frac{x^2}{(2b)^2} + \frac{(z-b)^2}{b^2} = 1$, или $x^2 = 8 \cdot z \cdot b - 4 \cdot z^2$. Для нашего случая необходимые формулы принимают следующий вид:

$$\rho_t = tk\,,\ \rho_t \cdot \sin\alpha = x_3\,,\ tg\alpha = \frac{b \cdot x_3}{(2\cdot b)\sqrt{(2\cdot b)^2 - x_3^2}}\ \ \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}},\ \rho_t = \frac{x_3}{\sin\alpha},$$

$$V(z) = \frac{\pi\cdot(2\cdot b)^2}{b^2}\cdot(b\cdot z_3^2 - \frac{z_3^3}{3}),\quad \rho_m = \rho_t \cdot \frac{((2\cdot b)^2 - x_3^2)\cdot(1+tg^2\alpha)}{(2\cdot b)^2}.$$

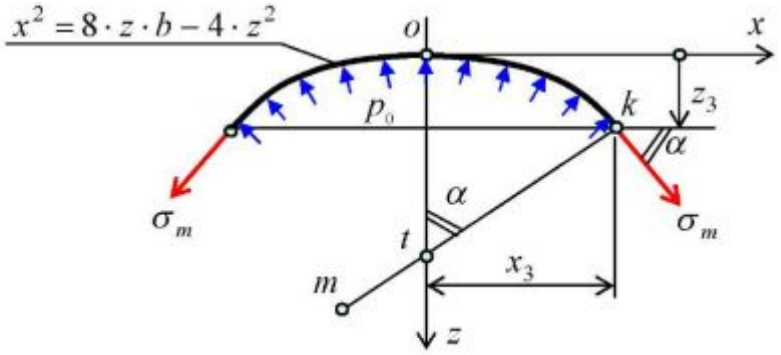


Рис. 30

Меридиональное и окружное напряжения по формулам (1) и (2) будут:

$$\sigma_m \cdot 2\cdot\pi\cdot x_3\cdot h\cdot\sin\alpha = p_0\cdot\pi\cdot x_3^2,\ \sigma_m = \frac{p_0\cdot x_3^2}{2\cdot x_3\cdot h\cdot\sin\alpha},\ \sigma_t = \rho_t\cdot(\frac{p_0}{h} - \frac{\sigma_m}{\rho_m}).$$

Вычисления будем проводить в системе Mathcad, при помощи программы «Эллипс», распечатка которой приводится на странице 29.

Проверим равновесие узлов единичной длины на границах первого – второго (рис. 31, *а*) и второго – третьего участков (рис. 31, *б*).

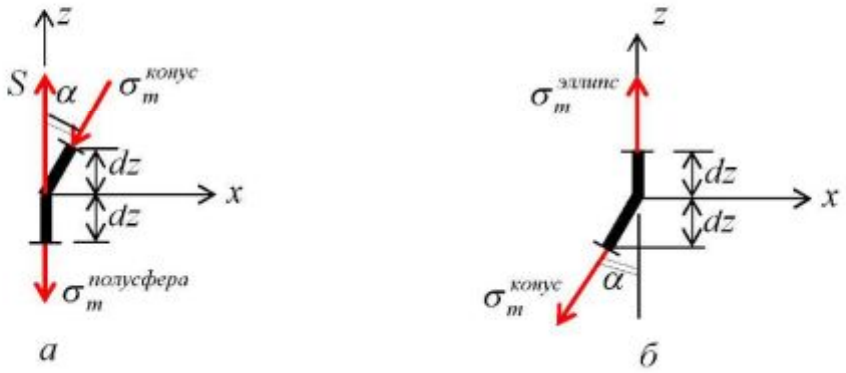


Рис. 31

Проектируя все силы но ось z (рис. 31, *а*), получим:

$$\sum F_z = 0,\quad S - \sigma_m^{полусфера}\cdot h\cdot 1 - \sigma_m^{конус}\cdot h\cdot 1\cdot\cos\alpha = 0;$$

$$0{,}0845 - \frac{0{,}0704}{h}\cdot h\cdot 1 - \frac{0{,}0149}{h}\cdot h\cdot 1\cdot 0{,}9487 = 0;\quad 0{,}0845 - 0{,}0845 = 0,\quad 0 = 0.$$

Проектируя все силы но ось z (рис. 31, б).получим:

$$\sum F_z = 0, \quad \sigma_m^{эллипс} \cdot h \cdot 1 - \sigma_m^{конус} \cdot h \cdot 1 \cdot \cos\alpha = 0,$$

$$\frac{0{,}0600}{h} \cdot h \cdot 1 - \frac{0{,}0632}{h} \cdot h \cdot 1 \cdot 0{,}9487 = 0; \quad 0{,}060 - 0{,}060 = 0, \quad 0 = 0.$$

Распечатка программы «Эллипс».

$a := 3 \qquad b := 1.5 \qquad p0 := 0.04 \qquad h := 1 \qquad \gamma := 0.0098$

$$z := 0.00001, \frac{1.49999}{4} .. 1.49999 \qquad x(z) := \sqrt{8 \cdot z \cdot b - 4 \cdot z^2}$$

$$b1(z) := 4 \cdot b^2 - x(z)^2 \qquad tg\alpha(z) := \frac{x(z)}{2 \cdot \sqrt{b1(z)}} \qquad sin\alpha(z) := \frac{tg\alpha(z)}{\sqrt{1 + tg\alpha(z)^2}}$$

$$\rho t(z) := \frac{x(z)}{sin\alpha(z)} \qquad \rho m(z) := \rho t(z) \cdot \frac{b1(z) \cdot \left(1 + tg\alpha(z)^2\right)}{4 \cdot b^2}$$

$$\sigma m(z) := \frac{p0 \cdot x(z)^2}{2 \cdot x(z) \cdot h \cdot sin\alpha(z)} \qquad \sigma t(z) := \rho t(z) \cdot \left(\frac{p0}{h} - \frac{\sigma m(z)}{\rho m(z)}\right)$$

z =
$1 \cdot 10^{-5}$
0.375
0.75
1.125
1.5

σt(z) =
0.12
0.0503
-0.0227
-0.0895
-0.12

σm(z) =
0.12
0.0984
0.0794
0.0654
0.06

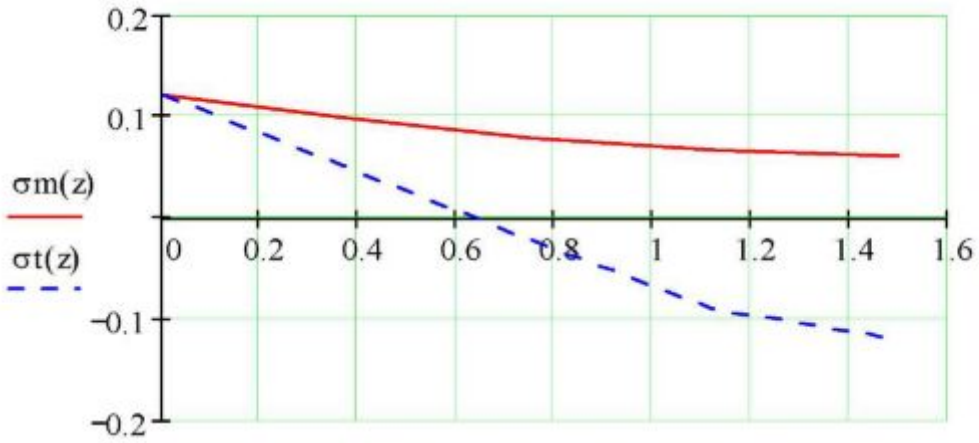


Рис. 32

На рис. 32 показаны эпюры продольных σ_m и окружных σ_t напряжений на третьем участке.

Согласно критерию Сен-Венана, эквивалентные напряжения определяются по формуле $\sigma_{экв}^{Сен-Венана} = \sigma_1 - \sigma_3$. На первом участке они будут равны σ_m, на втором – σ_t, за исключением сечения $z_2 = 0$, где $\sigma_{экв}^{Сен-Венана} = \sigma_1 - \sigma_3 \approx 0{,}133 - (-0{,}0149) \approx 0{,}148\,МПа$. На третьем участке имеем

$z_3\ (м)$	0,00001	0,375	0,75	1,125	1,5
$\sigma_{экв}^{Сен-Венана}\ (МПа)$	0,12	0,0984	0,1021	0,1549	0,18

Эпюры окружных, продольных и эквивалентных напряжений по всей высоте резервуара показаны на рис. 33.

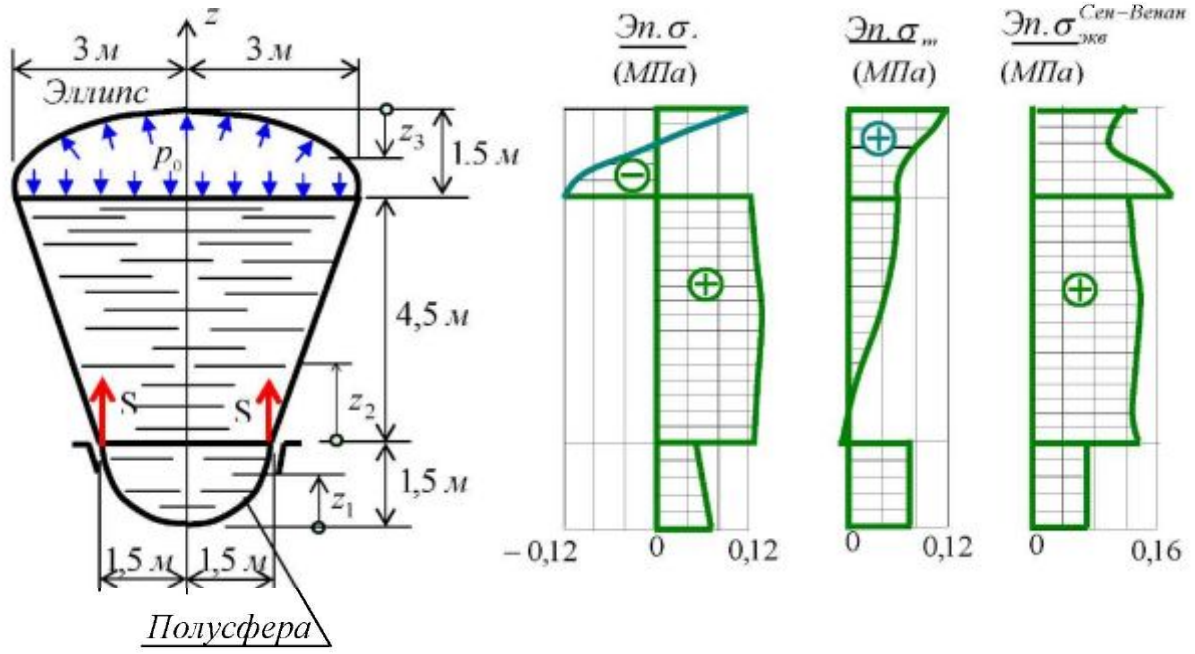


Рис. 33

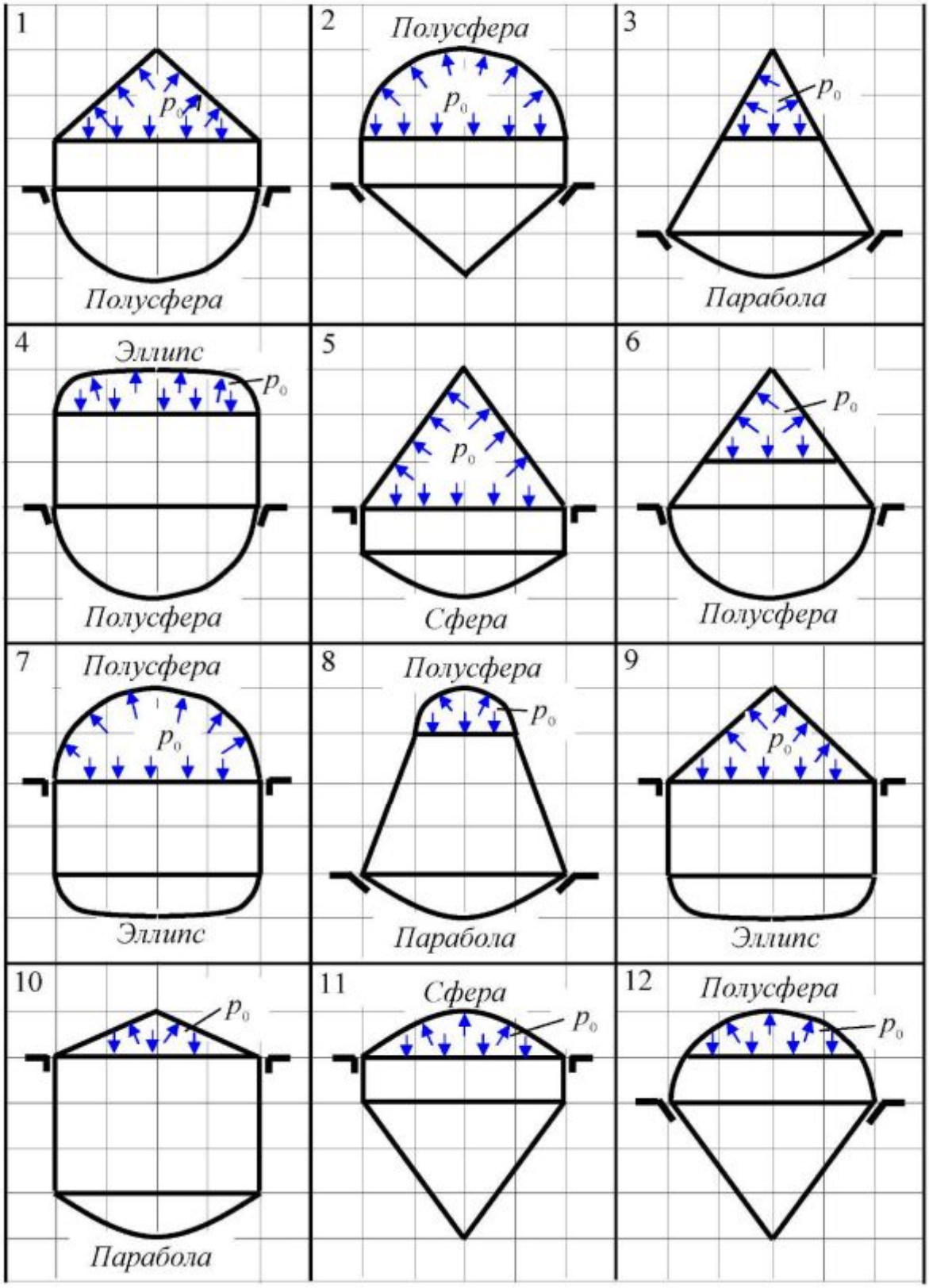
Сравнивая эквивалентные напряжения в различных сечениях составной оболочки приходим к выводу, что наибольшие напряжения имеют место на границе второго и третьего участков.

Из условия прочности $\dfrac{\sigma_{экв}^{\max}}{h} \le [\sigma]$ определим толщину составной оболочки $h \ge \dfrac{\sigma_{экв}^{\max}}{[\sigma]} = \dfrac{0{,}18 \cdot 10^6}{120 \cdot 10^6} = 0{,}0015\,м = 1{,}5\,мм$.

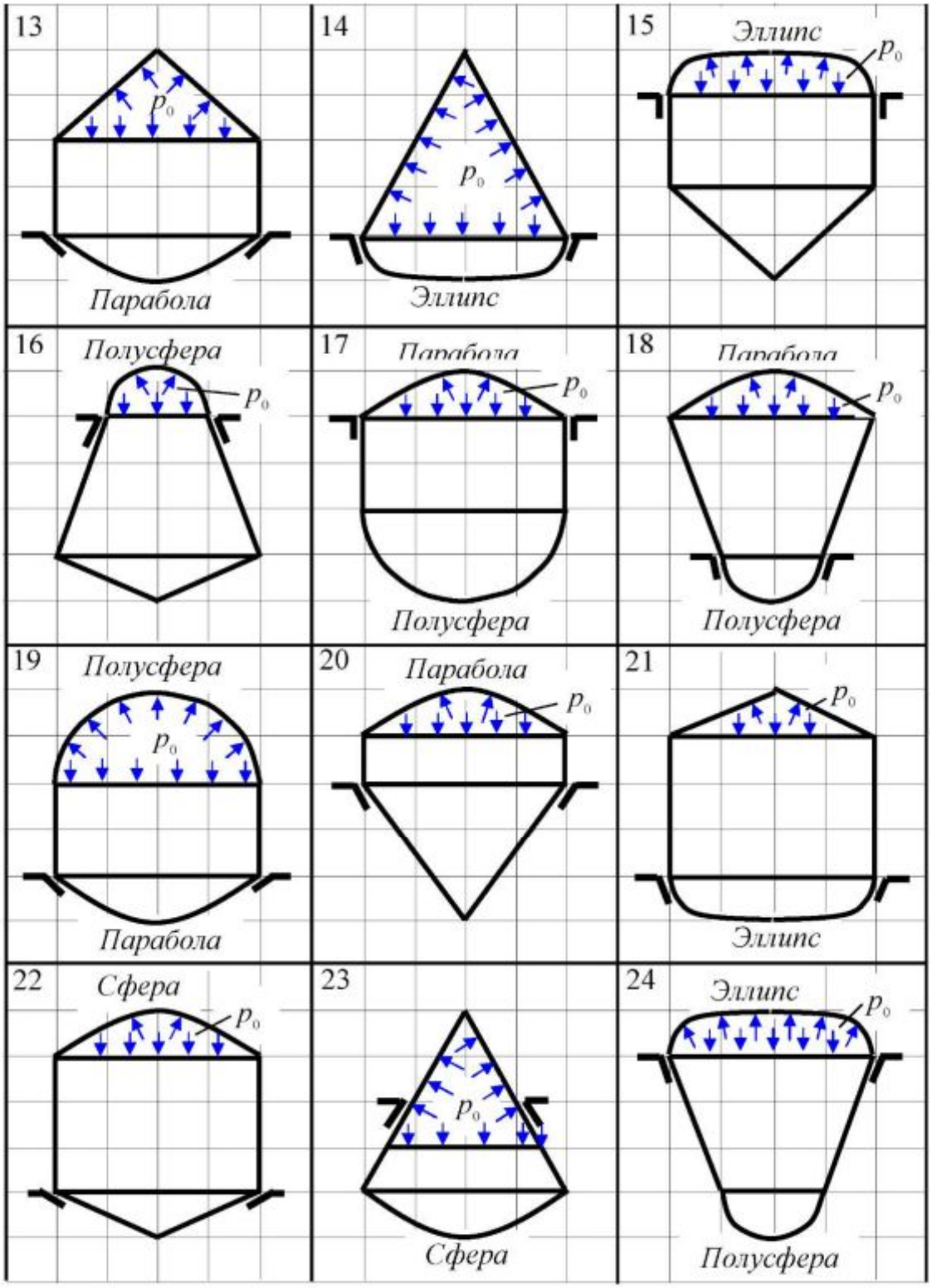
Далее приводятся рекомендуемые варианты расчетных схем составных оболочек.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Исходные данные: шаг сетки по горизонтали _____ м, шаг сетки по вертикали____м, p_0=_____МПа, $[\sigma]$=_____МПа, γ=_____кН/м^3.



Исходные данные: шаг сетки по горизонтали_____м, шаг сетки по вертикали_____м, p_0=_____МПа, $[\sigma]$=_____МПа, γ=_____кН/м^3.



РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ЗАДАЧИ

Сопротивление материалов является одной из первых инженерных дисциплин, при изучении которой учащимся приходится сталкиваться с реальными расчетами конструкций.

Особенностью же расчетных заданий по сопротивлению материалов является большой объем арифметических вычислений, проведение которых вызывает определенные трудности у студентов младших курсов. Поэтому необходимо привести методические указания в соответствие с имеющимся уровнем знаний студентов и предъявляемыми к ним требованиями.

В связи с этим настоящие методические указания, с одной стороны, были ориентированы на использование персональных компьютеров с современным математическим обеспечением, а с другой – авторы постарались процесс выполнения и оформления расчетно-проектировочной работы максимально упростить и как можно больше алгоритмизировать.

Предлагается следующий вариант оформления задания. На первой странице расчетно-проектировочной работы (рис. 34) приводится условие задачи, определяются места для вычерчивания заданной схемы варианта задачи и вписывания исходных данных. Ниже даются масштабные сетки для вычерчивания расчетной схемы составной оболочки и для эпюр окружных и продольных напряжений, которые строятся на основании численных расчетов (при помощи соответствующих программ, написанных в Mathcad) различных участков составной тонкостенной оболочки (рис. 35). В конце первой страницы оставлено место для определения реактивного погонного усилия со стороны опорного кольца S.

Для каждого участка составной оболочки (всего три участка) приводятся основные формулы и в заготовленную заранее таблицу записываются данные числовых вычислений. На рис. 36 показан взятый из второго примера возможный вариант записи расчетов на первом участке.

Далее проверяются условия равновесия в узлах составной оболочки (рекомендуемый вариант оформления, взятый из второго примера, показан на рис. 37) и последним, делается расчет по определению толщины оболочки.

Следует заметить, что такой вариант оформления расчетно-проектировочной работы позволяет значительно сократить время выполнения задания. Наиболее подготовленные студенты вполне могут уложиться в два – три часа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. - М.: Наука, 1974. - 560 с.

2. Филин А. П. Элементы теории оболочек / А. П. Филин. - Л.: Стройиздат, 1975. - 256 с.

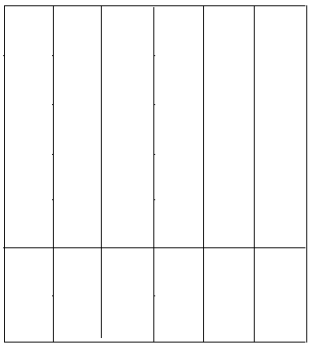
Задача №

Тонкостенная составная оболочка заполнена жидкостью с объемным весом γ и находится под избыточным газовым давлением p_0. Требуется:

1) используя безмоментную теорию оболочек вращения и метод сечений, получить аналитические выражения для продольных и окружных напряжений, построить эпюры напряжений по участкам;

2) по заданному критерию прочности определить толщину стенки оболочки h.

Заданная схема сосуда



Дано:
$a =$ _____ *м*
$p_0 =$ _____ *МПа*
$\gamma =$ _____ $кН/м^3$
$[\sigma] =$ _____ *МПа*
Критерий

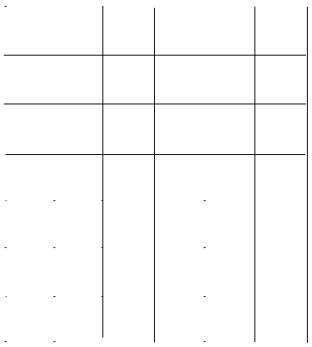
_____

Определить
$h = ?$

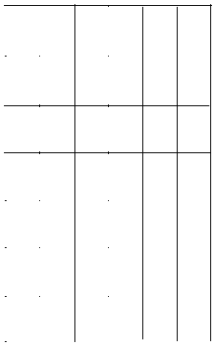
Рис. 34

Решение

Схема составной оболочки



Эп. σ_t *(МПа)*



Эп. σ_m *(МПа)*

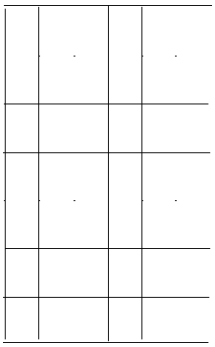
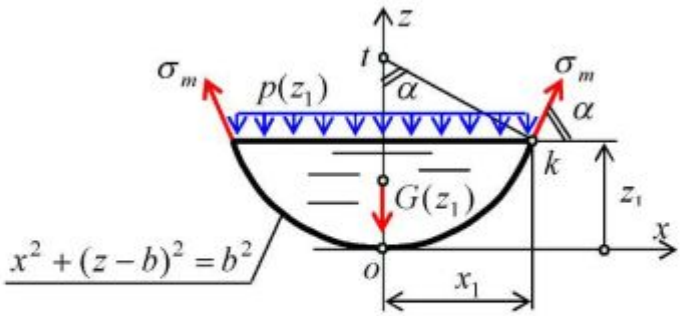


Рис. 35

Для определения реактивного погонного усилия S со стороны опорного кольца составим следующее уравнение равновесия:

Участок №1 $(0 \le z_1 \le 1{,}5\ м)$



Так как $x^2 + (z-b)^2 = b^2$, *то* $x_1^2 = 2 \cdot z_1 \cdot b - z_1^2$, $\quad V(z_1) = \pi \cdot \frac{z_1}{3} \cdot (3 \cdot b - z_1)$,

$$\rho_m = \rho_t = b, \quad p(z_1) = p_0 + \gamma \cdot (4 \cdot b - z_1) = [0{,}04 + 0{,}0098 \cdot (6 - z_1)] \cdot 10^6 \left(H/м^2\right),$$

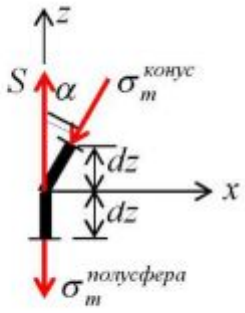
$$\sigma_m \cdot 2 \cdot \pi \cdot x_1 \cdot h \cdot \sin\alpha = p(z_1) \cdot \pi \cdot x_1^{\,2} + G(z_1), \text{ где } G(z_1) = \gamma \cdot V(z_1),$$

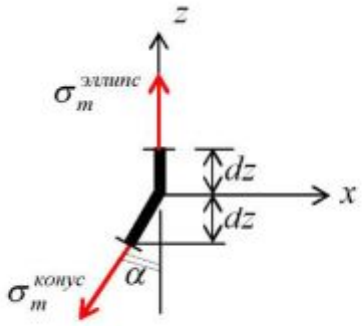
$$\sigma_m = \frac{p(z_1) \cdot x_1^2 + \gamma \cdot \frac{z_1}{3} \cdot (3 \cdot b - z_1)}{2 \cdot x_1 \cdot h \cdot \sin\alpha}, \qquad \sigma_t = \frac{p(z_1) \cdot b}{h} - \sigma_m.$$

$z_1 \ \ (м)$					
$\sigma_t \ \ (МПа)$					
$\sigma_m \ \ (МПа)$					
$\sigma_{Сен-Венан} \ \ (МПа)$					

Рис. 36

Проверим равновесие узлов единичной длины на границах первого - второго и второго - третьего участков





$$\sum F_z = 0, \quad S - \sigma_m^{полусфера} \cdot h \cdot 1 - \sigma_m^{конус} \cdot h \cdot 1 \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$0{,}0845 - \frac{0{,}0704}{h} \cdot h \cdot 1 - \frac{0{,}0149}{h} \cdot h \cdot 1 \cdot 0{,}9487 = 0; \quad 0{,}0845 - 0{,}0845 = 0, \quad 0 = 0.$$

Рис. 37

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие сведения 3
Определение напряжений в стенках сосудов 5
Цилиндрические оболочки 7
Конические оболочки 8
Оболочки, выполненные в виде усеченного конуса 9
Сферические оболочки. 10
Параболические оболочки 11
Оболочки, образованные вращением эллипса вокруг оси симметрии ... 12
Пример № 1 14
Пример № 2 23
Варианты заданий 31
Рекомендации по оформлению задачи 33
Библиографический список 33
Оглавление 36