

## **ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ**

Методические указания с заданиями и примерами решения для студентов специальности «Промышленное и гражданское строительство»

Настоящее издание содержит краткие методические указания, необходимые сведения из теории по темам расчетно-проектировочных работ, задания и примеры их выполнения.

Предназначено для студентов специальности "Промышленное и гражданское строительство".

## **ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЁТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ**

1. В течение учебного года студент выполняет 6 расчетно-проектировочных работ (РПР), по 3 в каждом семестре.

В первом семестре:

№ 1. Расчеты на растяжение (сжатие) стержней и стержневых систем.

№ 2. Геометрические характеристики поперечных сечений.

№ 3. Расчеты на изгиб статически определимых балочных систем.

Во втором семестре:

№ 4. Расчеты на прочность и жесткость при изгибе.

№ 5. Внекентрное сжатие короткого стержня.

№ 6. Расчет стоек на прочность и устойчивость при продольно-поперечном изгибе.

Данные методические разработки содержат три последние расчетно-проектировочные работы.

2. Перед выполнением каждого задания студент обязан изучить соответствующую тему курса по учебникам (лекциям). Краткие сведения из теории, которые даются перед каждой работой, лишь помогут в этом.

3. Задание должно быть оформлено в тетради в клетку или на стандартных листах писчей бумаги 210 x 297 мм, сброшюрованных в альбом с обложкой из плотной бумаги. На первом (титульном ) листе следует вычеркнуть рамку и сделать справа внизу основную надпись (штамп) по указанному ниже образцу.

Курс, специальность	№ группы	№ работы		Фамилия и инициалы преподавателя	
		120	10	40	40
ИТФ	ЗПГС	1	1	Иванов П.С.	
КБГУ	Сопротивление материалов				
Расчеты на растяжение (сжатие) стержней и стержневых систем					
Петров А.Н.		Шифр: 31-5			

Фамилия и инициалы студента      Название работы      Числа шифра

4. В начале каждой задачи должны быть приведены ее номер, текст условия, расчетная схема и исходные данные. Далее следует текст решения и

ответы на поставленные вопросы. Все выкладки должны представлять собой стройную логическую последовательность и сопровождаться лаконичным пояснительным текстом. Каждый пункт решения должен при необходимости содержать вспомогательные чертежи или эскизы, расчетную формулу в общем виде, числовое повторение (подстановку) этой формулы и ответ. В промежуточных и окончательных ответах необходимо проставлять единицы измерения получаемых величин. Окончательные результаты рекомендуется подчеркивать.

5. Необходимо все чертежи выполнять карандашом невысокой твердости (ТМ, М), а записи вести чернилами (пастой) или карандашом, соблюдая чертежные шрифты (ГОСТ 2.304-68). Схемы, чертежи, эпюры должны быть выполнены с соблюдением масштабных соотношений, с применением чертежных инструментов.

6. Во всех расчетах на прочность, жесткость и устойчивость допускается, как правило, отклонение от нормативных данных (нормативный коэффициент запаса прочности, допускаемое напряжение и т. д.) в пределах 3%. Поэтому не следует проводить вычисления с излишне большим числом значащих цифр. Сохранение в записи числа (результатах вычислений) 4-х значащих цифр обеспечивает необходимую точность.

7. Каждый студент защищает работу в установленное преподавателем время. На защите студент обязан давать обстоятельные ответы на контрольные вопросы, поставленные в конце каждой РПР.

8. Исходные данные к задачам выбираются студентом самостоятельно согласно индивидуальному шифру, состоящему из двух чисел.

## **РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №4**

### **Расчеты на прочность и жесткость при изгибе**

#### *Краткие сведения из теории*

В настояще время производятся три вида расчетов на прочность: 1) по допускаемым напряжениям, 2) по разрушающим нагрузкам, 3) по предельным состояниям. Расчеты по допускаемым напряжениям и разрушающим нагрузкам были использованы в расчетно-проектировочных работах №1 и №3. Здесь применяется расчет по предельным состояниям.

Расчеты строительных конструкций по предельным состояниям были введены в практику строительства в 1955 году и изложены в Строительных нормах и правилах (СНиП). В них предельным называют такое состояние конструкции, при котором невозможна ее дальнейшая эксплуатация. В худшем случае это может быть полное разрушение конструкции, но может быть и частичное повреждение.

В СНиП установлено три предельных состояния: первое предельное состояние, определяемое несущей способностью (при изгибе прочностью); второе предельное состояние, определяемое развитием чрезмерных деформаций, нарушающих нормальную эксплуатацию; третье предельное состояние, определяемое образованием или раскрытием трещин, а также появлением других местных повреждений конструкции.

В сопротивлении материалов рассматриваются главным образом первое и второе предельные состояния, связанные с прочностью и жесткостью конструкций. Третье предельное состояние в основном используется для расчетов в курсе железобетонных конструкций, где возможны образование и раскрытие трещин.

Сравнивая расчеты по допускаемым напряжениям и по предельным состояниям, можно заметить следующее: при расчете по допускаемым напряжениям для обеспечения прочности элемента конструкции вводят один общий коэффициент запаса; при расчете по предельным состояниям – три отдельных коэффициента, которые учитывают различные аспекты в работе строительных конструкций.

1. Коэффициент надежности по нагрузке  $n$ , учитывающий истинности в определении нагрузки. Как правило, нагрузки устанавливаются нормами на основании результатов длительных наблюдений. Такие нагрузки называются нормативными ( $p^N$ ,  $q^N$  и др.). Однако фактическая нагрузка может отклоняться от нормативной в неблагоприятную (большую или меньшую сторону). Для учета такого отклонения вводят коэффициент надежности по нагрузке, значение которого чаще больше единицы. В некоторых случаях, которые оговариваются в задачах,  $n < 1$ . Нагрузки принято делить на постоянные (например, собственный вес конструк-

ции) и временные (снеговая, ветровая, вес толпы и др.). Собственный вес конструкции определяется довольно точно, отклонения в его величине могут быть сравнительно небольшими. По этой причине для постоянных нагрузок берут коэффициент перегрузки близким к единице (например,  $n=1,1$ ). Колебания временных нагрузок более значительны. Для них чаще принимают  $n=1,4$ . Полные данные об этих коэффициентах имеются в СНиПах.

Для получения расчетной нагрузки нормативную нагрузку умножают на коэффициент перегрузки ( $p_p = p^n \cdot n$ ,  $q_p = q^n \cdot n, \dots$ ).

2. Коэффициент надежности по материалу  $\gamma_m \geq 1$  вводят для учета возможного снижения прочности вследствие неоднородности материала конструкции. Чем однороднее материал, тем коэффициент однородности ближе к единице.

3. Коэффициент условий работы  $m$  учитывает специфические особенности работы материала (наличие агрессивной среды, излишней влажности, резких смен температуры, в которых работает конструкция). При благоприятных условиях работы коэффициент берут  $m=1$ , неблагоприятных –  $m<1$ .

Расчет по первому предельному состоянию изгибаемых элементов конструкции основан на условии прочности

$$\sigma = \frac{M_p}{W} \leq R,$$

где  $M_p$  – изгибающий момент от расчетных нагрузок;

$W$  – минимальный момент сопротивления сечения балки относительно нейтральной оси;

$R = \gamma_m m R^u$  – расчетное сопротивление материала;

$R^u$  – нормативное сопротивление материала, значение которого для всех материалов имеется в СНиПе.

Расчеты на жесткость производятся по второму предельному состоянию, согласно которому ограничиваются перемещения оси балки. При этом должно соблюдаться условие жесткости

$$\delta \leq [\delta],$$

где  $\delta$  – обобщенное перемещение (прогиб или угол поворота поперечного сечения), найденное от расчетных нагрузок;

$[\delta]$  – допускаемое, заданное в проекте, перемещение.

Перемещение  $\delta$  может быть определено одним из известных методов, изложенных в курсе сопротивления материалов (метод непосредственного интегрирования, метод начальных параметров, метод Мора, способ Верещагина и др.).

## ЗАДАНИЕ НА РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНУЮ РАБОТУ №4

### Расчеты на прочность и жесткость при изгибе

Для балки с заданными нормативными нагрузками и геометрическими размерами требуется:

1. Определить расчетные нагрузки, принимая 1/3 ее часть постоянной с коэффициентом надежности по нагрузке  $\gamma_1 = 1,1$ , 2/3 – временной с коэффициентом надежности по нагрузке  $\gamma_2 = 1,4$ .

2. Построить эпюры изгибающих моментов  $M_p$  и поперечных сил  $Q_p$  от расчетных нагрузок.

3. По первому предельному состоянию подобрать сечение балки из стального двутавра, если нормативное сопротивление  $R^H = 210$  МПа, коэффициент надежности по материалу  $\gamma_m = 1$ , коэффициент условий работы  $m = 1$ .

4. Построить изогнутую ось балки, определив перемещения характерных сечений.

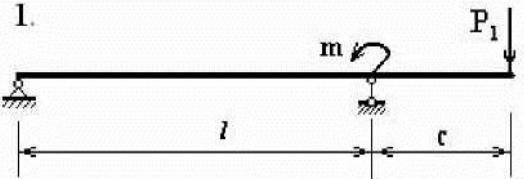
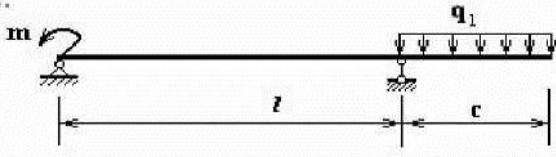
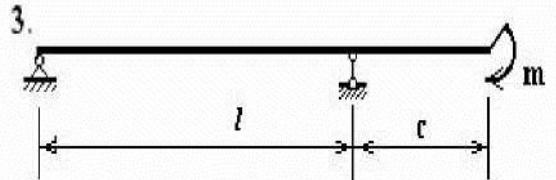
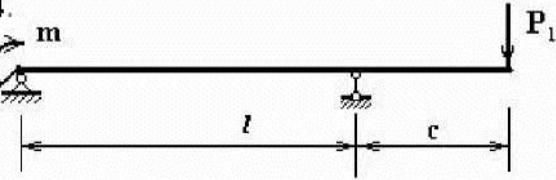
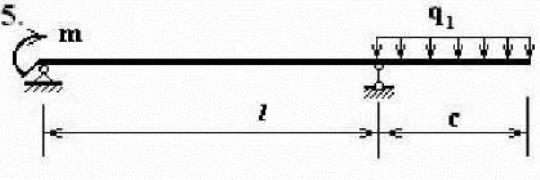
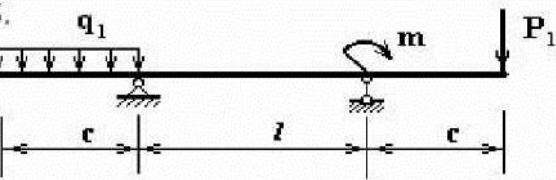
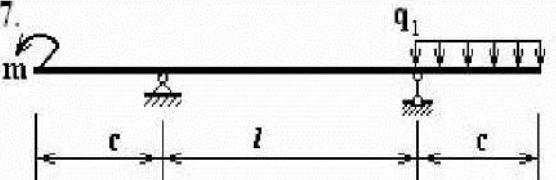
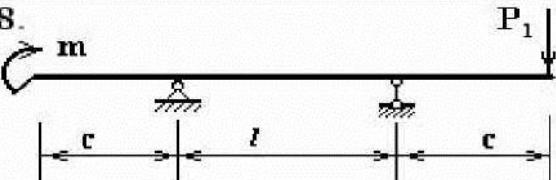
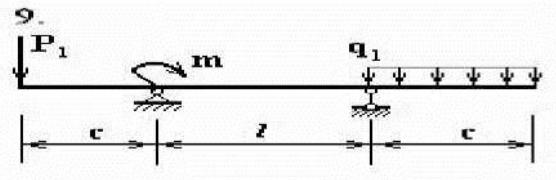
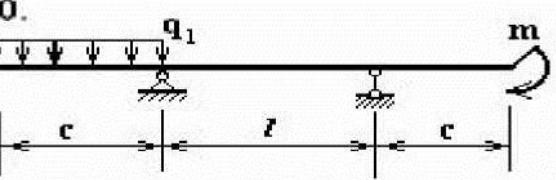
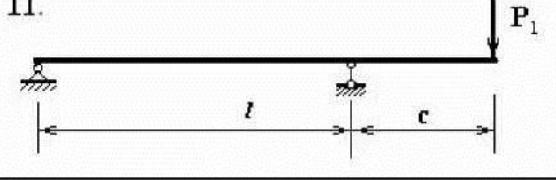
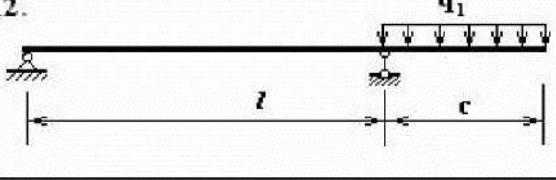
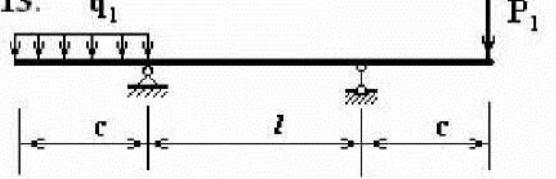
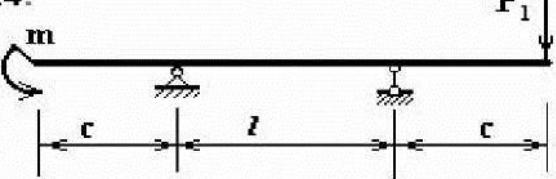
5. Проверить жесткость балки, если допускаемый прогиб  $[f] = 1/200$  пролета  $\ell$ .

Таблица исходных данных

Второе число шифра	P кН	$P_1$ кН	q кН/м	$q_1$ кН/м	m кН·м	a м	b м	c м
1	20	40	8	12	25	0,8	4,6	1,2
2	15	60	11	13	30	1,1	4,2	1,3
3	25	70	12	8,0	36	0,8	4,8	1,1
4	13	80	18	15	40	0,6	4,5	1,0
5	14	90	20	18	42	0,7	5,0	1,2
6	12	100	24	20	24	0,5	4,6	0,9
7	22	120	22	14	28	0,75	4,7	1,1
8	17	150	23	11	26	0,8	4,4	1,0
9	23	180	25	17	35	0,9	4,9	1,2
10	21	160	30	10	50	0,4	5,2	1,25

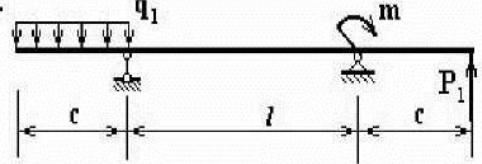
**Схемы балок и нагрузок**  
(первая цифра шифра)

**Схемы балок**

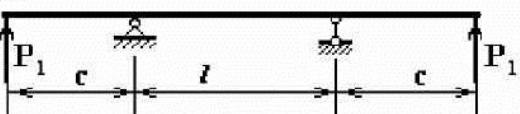
1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	
9.		10.	
11.		12.	
13.		14.	

<b>15.</b> 	<b>16.</b> 
<b>17.</b> 	<b>18.</b> 
<b>19.</b> 	<b>20.</b> 
<b>21.</b> 	<b>22.</b> 
<b>23.</b> 	<b>24.</b> 
<b>25.</b> 	<b>26.</b> 
<b>27.</b> 	<b>28.</b> 

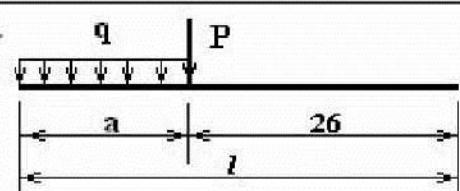
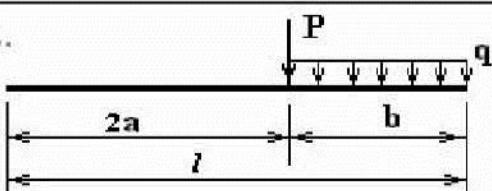
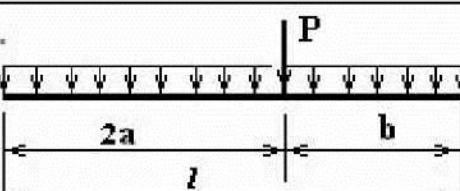
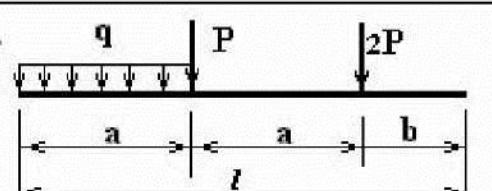
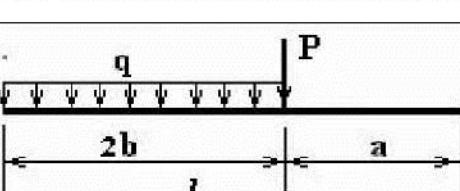
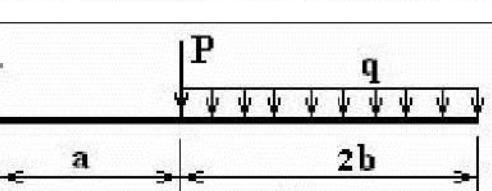
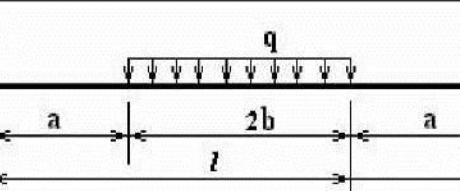
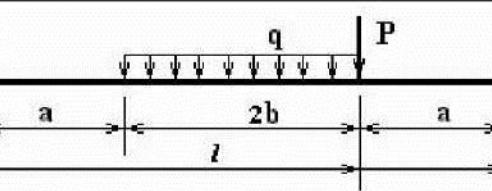
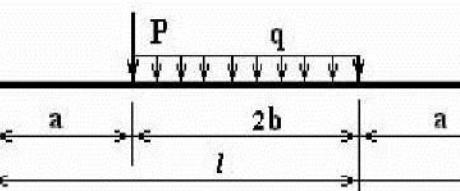
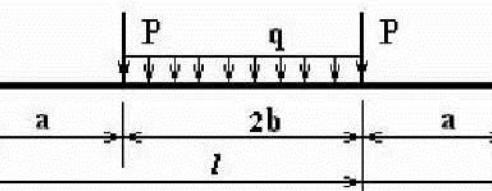
29.



30.



**Пролетные нагрузки**  
(второе число шифра)

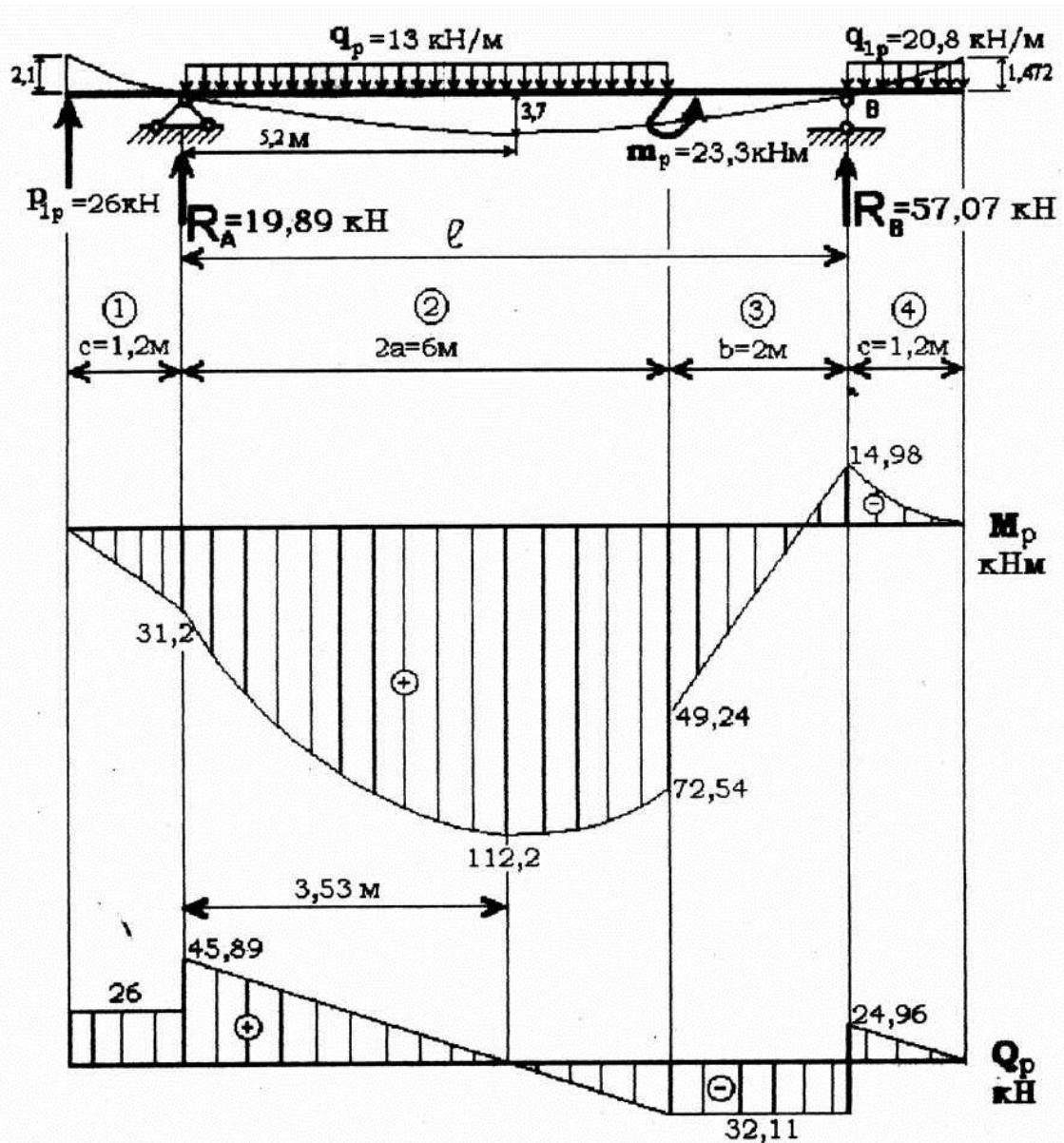
<b>1.</b>  <p>Diagram 1 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed evenly across its entire span. The total load is represented by a single downward arrow labeled <math>P</math> at the center of the beam.</p>	<b>2.</b>  <p>Diagram 2 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed over the second half of the span. The first half is labeled <math>2a</math> and the second half is labeled <math>b</math>. The total load is represented by two downward arrows, one labeled <math>P</math> at the center of the second half and another labeled <math>q</math> at the end of the second half.</p>
<b>3.</b>  <p>Diagram 3 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed over the first half of the span. The second half is labeled <math>b</math>. The total load is represented by two downward arrows, one labeled <math>P</math> at the center of the first half and another labeled <math>q</math> at the end of the first half.</p>	<b>4.</b>  <p>Diagram 4 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed over the first half of the span and a concentrated load <math>2P</math> at the end of the second half. The first half is labeled <math>a</math> and the second half is labeled <math>b</math>. The total load is represented by three downward arrows, one labeled <math>P</math> at the center of the first half, one labeled <math>2P</math> at the end of the second half, and one labeled <math>q</math> at the end of the span.</p>
<b>5.</b>  <p>Diagram 5 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed over the second half of the span and a concentrated load <math>P</math> at the end of the first half. The first half is labeled <math>2b</math> and the second half is labeled <math>a</math>. The total load is represented by three downward arrows, one labeled <math>P</math> at the end of the first half, one labeled <math>q</math> at the center of the second half, and one labeled <math>P</math> at the end of the span.</p>	<b>6.</b>  <p>Diagram 6 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed over the second half of the span and a concentrated load <math>P</math> at the end of the span. The first half is labeled <math>a</math> and the second half is labeled <math>2b</math>. The total load is represented by three downward arrows, one labeled <math>P</math> at the end of the first half, one labeled <math>q</math> at the center of the second half, and one labeled <math>P</math> at the end of the span.</p>
<b>7.</b>  <p>Diagram 7 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed over the first half of the span and a concentrated load <math>P</math> at the end of the second half. The first half is labeled <math>a</math> and the second half is labeled <math>2b</math>. The total load is represented by three downward arrows, one labeled <math>P</math> at the center of the first half, one labeled <math>q</math> at the center of the second half, and one labeled <math>P</math> at the end of the second half.</p>	<b>8.</b>  <p>Diagram 8 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed over the second half of the span and a concentrated load <math>P</math> at the end of the span. The first half is labeled <math>a</math> and the second half is labeled <math>2b</math>. The total load is represented by three downward arrows, one labeled <math>P</math> at the center of the second half, one labeled <math>q</math> at the center of the span, and one labeled <math>P</math> at the end of the span.</p>
<b>9.</b>  <p>Diagram 9 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed over the second half of the span and a concentrated load <math>P</math> at the end of the first half. The first half is labeled <math>a</math> and the second half is labeled <math>2b</math>. The total load is represented by three downward arrows, one labeled <math>P</math> at the end of the first half, one labeled <math>q</math> at the center of the second half, and one labeled <math>P</math> at the end of the span.</p>	<b>10.</b>  <p>Diagram 10 shows a horizontal beam of length <math>l</math> with a uniform load <math>q</math> distributed over the second half of the span and a concentrated load <math>P</math> at the end of the span. The first half is labeled <math>a</math> and the second half is labeled <math>2b</math>. The total load is represented by three downward arrows, one labeled <math>P</math> at the center of the second half, one labeled <math>q</math> at the center of the span, and one labeled <math>P</math> at the end of the span.</p>

## Пример решения задачи

Исходные данные

Второе число шифра	P	$P_1$	q	$q_1$	m	a	b	c
	кН	кН	кН/м	кН/м	кН·м	м	м	м
	-	20	10	16	25	3,0	2,0	1,2

Схема балки и эпюры  $M_p$  и  $Q_p$



### 1. Определяем расчетные нагрузки

$$P_{1p} = \frac{1}{3} P_1 \cdot n_1 + \frac{2}{3} P_1 \cdot n_2 = \frac{1}{3} 20 \cdot 1,1 + \frac{2}{3} 20 \cdot 1,4 = 26 \text{ кН},$$

$$q_{1p} = \frac{1}{3} q_1 \cdot n_1 + \frac{2}{3} q_1 \cdot n_2 = \frac{1}{3} 16 \cdot 1,1 + \frac{2}{3} 16 \cdot 1,4 = 20,8 \text{ кН/м},$$

$$q_p = \frac{1}{3} q \cdot n_1 + \frac{2}{3} q \cdot n_2 = \frac{1}{3} 10 \cdot 1,1 + \frac{2}{3} 10 \cdot 1,4 = 13 \text{ кН/м},$$

$$m_p = \frac{1}{3} m \cdot n_1 + \frac{2}{3} m \cdot n_2 = \frac{1}{3} 25 \cdot 1,1 + \frac{2}{3} 25 \cdot 1,4 = 23,3 \text{ кН·м}.$$

2. Строим эпюры моментов  $M_p$  и поперечных сил  $Q_p$  от расчетных нагрузок, расположив пролетную нагрузку между опорами. Предварительно определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = 0, \quad -P_{1p} \cdot c - q_p \frac{(2a)^2}{2} + m_p + R_B(2a + b) - q_{1p} \cdot c(2a + b + 0,5c) = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{(2a + b)} \left[ P_{1p} \cdot c + q_p \frac{(2a)^2}{2} - m_p + q_{1p} \cdot c(2a + b + 0,5c) \right] = \\ \frac{1}{(2 \cdot 3 + 2)} \left[ 26 \cdot 1,2 + 13 \frac{(2 \cdot 3)^2}{2} - 23,3 + 20,8 \cdot 1,2(2 \cdot 3 + 2 + 0,5 \cdot 1,2) \right] = 57,07 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad -P_{1p}(c + 2a + b) - R_A(2a + b) + q_p \cdot 2a(a + b) + m_p - q_{1p} \frac{c^2}{2} = 0,$$

$$R_A = \frac{1}{(2a + b)} \left[ -P_{1p}(c + 2a + b) + q_p \cdot 2a(a + b) + m_p - q_{1p} \frac{c^2}{2} \right] = \\ \frac{1}{(2 \cdot 3 + 2)} \left[ -26(1,2 + 2 \cdot 3 + 2) + 13 \cdot 2 \cdot 3(3 + 2) + 23,3 - 20,8 \frac{1,2^2}{2} \right] = 19,89 \text{ кН}.$$

Производим проверку правильности определенных реакций. Для этого составляем уравнение равновесия статики:

$$\sum Y = 0, \quad -P_{1p} - R_A + q_p \cdot 2a + -q_{1p} \cdot c = -26 - 19,89 + 13 \cdot 2 \cdot 3 - 57,07 + 20,8 \cdot 1,2 = 0.$$

Строим эпюры  $M_p$  и  $Q_p$ . Для этого разбиваем балку на участки, составляем уравнения для внутренних сил и проводим необходимые вычисления.

1 участок  $x \in (0; c) = x \in (0; 1,2)$ .

$$M_p = P_{1p}x = 26x, \quad Q_p = P_{1p} = 26 \text{ кН}, \quad M_p(0) = 0, \quad M_p(1,2) = 26 \cdot 1,2 = 31,2 \text{ кН·м}$$

2 участок  $x \in (0; 2a) = x \in (0; 6)$ ,

$$M_p = P_{lp}(c + x) + R_A x - \frac{qx^2}{2} = 26(1,2 + x) + 19,89x - \frac{13x^2}{2},$$

$$Q_p = P_{lp} + R_A - q_p x = 26 + 19,89 - 13x = 45,89 - 13x, \quad M_p(0) = 26 \cdot 1,2 = 31,2 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_p(6) = 26(1,2 + 6) + 19,89 \cdot 6 - \frac{13 \cdot 6^2}{2} = 72,54 \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad Q_p(0) = 45,89 \text{ кН},$$

$$Q_p(6) = 45,89 - 13 \cdot 6 = -32,11 \text{ кН}.$$

Поскольку на этом участке поперечная сила меняет знак, необходимо функцию  $M_p$  исследовать на экстремум и определить максимальный момент. Для этого приравниваем ее производную к нулю  $\frac{dM_p}{dx} = Q = 45,89 - 13x = 0$ , отсюда определяем  $x=3,53$  м и находим максимальный момент на этом участке:

$$M_p(3,53) = 26(1,2 + 3,53) + 19,89 \cdot 3,53 - \frac{13 \cdot 3,53^2}{2} = 112,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3 участок  $x \in (0; b) = x \in (0; 2)$

$$M_p = -q_{lp}c(0,5c + x) + R_B x = -20,8 \cdot 1,2(0,5 \cdot 1,2 + x) + 57,07x = -24,96(0,6 + x) + 57,07x,$$

$$Q_p = q_{lp}c - R_B = 20,8 \cdot 1,2 - 57,07 = -32,11 \text{ кН}, \quad M_p(0) = -24,96 \cdot 0,6 = -14,98 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_p(2) = -24,96(0,6 + 2) + 57,07 \cdot 2 = 49,24 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4 участок  $x \in (0; c) = x \in (0; 1,2)$

$$M_p = -\frac{q_{lp}x^2}{2} = -\frac{20,8x^2}{2}, \quad Q_p = q_{lp}x = 20,8x,$$

$$M_p(0) = 0, \quad M_p(1,2) = -\frac{20,8 \cdot 1,2^2}{2} = -14,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$Q_p(0) = 0, \quad Q_p(1,2) = 20,8 \cdot 1,2 = 24,96 \text{ кН}.$$

По результатам вычислений строим эпюры моментов и поперечных сил.

3. Подбираем сечение балки из стального двутавра. Для этого используем условие прочности первого предельного состояния:

$$\sigma = \frac{|M_p|_{\max}}{W} \leq R, \quad \text{где } |M_p|_{\max} = 112,2 \text{ кНм}. \quad R = \gamma_m m R^n = 1 \cdot 1 \cdot 210 = 210 \text{ МПа}.$$

Из условия прочности определяем требуемый момент сопротивления:

$$W = \frac{M_p|_{\max}}{R} = \frac{112,2 \cdot 10^{-3}}{210} = 0,5343 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 534,3 \text{ см}^3.$$

Из сортамента прокатных профилей берем двутавр №33 с моментом сопротивления  $W = 597 \text{ см}^3$  и моментом инерции  $J = 9840 \text{ см}^4$ . При подборе сечения необходимо выбирать номер профиля с моментом сопротивления, имеющим ближайшее большее значение к требуемому. Это делается в целях создания некоторого запаса прочности.

4. Построим изогнутую ось балки. Для этого воспользуемся методом начальных параметров. Составим универсальное уравнение изогнутой оси балки

$$\begin{aligned} y = y_0 + \Phi_0 \cdot x - \frac{M_0 x^2}{2!EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3!EJ} \Big|_{1_{\text{уч}}} - \frac{R_A(x-c)^3}{3!EJ} + \frac{q_p(x-c)^4}{4!EJ} \Big|_{2_{\text{уч}}} - \frac{q_p(x-c-2a)^4}{4!EJ} + \\ + \frac{m_p(x-c-2a)^2}{2!EJ} \Big|_{3_{\text{уч}}} - \frac{R_B(x-c-2a-b)^3}{3!EJ} + \frac{q_{lp}(x-c-2a-b)^4}{4!EJ} \Big|_{4_{\text{уч}}}. \end{aligned}$$

Здесь  $y_0$  – прогиб в начале координат;

$\Phi_0$  – угол поворота сечения в начале координат;

$M_0$  – изгибающий момент в начале координат;

$Q_0$  – поперечная сила в начале координат.

Параметры  $M_0$  и  $Q_0$  берем из эпюра изгибающих моментов и поперечных сил. Они равны  $M_0=0$ ,  $Q_0=26 \text{ кН}$ . Другие два начальных параметра определяем из

условий закрепления балки: 1)  $y(c) = 0$ ; 2)  $y(c+2a+b) = 0$ , которые означают, что прогибы на опорах равны нулю. Составляем эти условия:

$$1) \quad y(c) = y_0 + \Phi_0 \cdot c - \frac{M_0 c^2}{2!EJ} - \frac{Q_0 c^3}{3!EJ} = 0;$$

$$2) \quad y(c+2a+b) = y_0 + \Phi_0(c+2a+b) - \frac{M_0(c+2a+b)^2}{2!EJ} - \frac{Q_0(c+2a+b)^3}{3!EJ} - \frac{R_A(c+2a+b-c)^3}{3!EJ} + \\ + \frac{q_p(c+2a+b-c)^4}{4!EJ} - \frac{q_p(c+2a+b-c-2a)^4}{4!EJ} + \frac{m_p(c+2a+b-c-2a)^2}{2!EJ} = 0.$$

Подставляем числовые значения:

$$y(1,2) = y_0 + \Phi_0 \cdot 1,2 - \frac{26 \cdot 1,2^3}{6EJ} = 0;$$

$$y(9,2) = y_0 + \Phi_0 \cdot 9,2 - \frac{26 \cdot 9,2^3}{6EJ} - \frac{19,89 \cdot 8^3}{6EJ} + \frac{13 \cdot 8^4}{24EJ} - \frac{13 \cdot 2^4}{24EJ} + \frac{23,3 \cdot 2^2}{2EJ} = 0$$

и решаем систему уравнений. Откуда получаем:  $\Phi_0 = \frac{351}{EJ}$ ,  $y_0 = -\frac{413,5}{EJ}$ .

Переписываем универсальное уравнение, подставляя в него начальные параметры и числовые значения геометрических величин и нагрузок

$$y = -\frac{413,5}{EJ} + \frac{351}{EJ}x - \frac{26x^3}{6EJ} \Big|_{1,y_0} - \frac{19,89(x-1,2)^3}{6EJ} + \frac{13(x-1,2)^4}{24EJ} \Big|_{2,y_0} - \frac{13(x-1,2-6)^4}{24EJ} + \\ + \frac{23,3(x-1,2-6)^2}{2EJ} \Big|_{3,y_0} - \frac{57,07(x-1,2-6-2)^3}{6EJ} + \frac{20,8(x-1,2-6-2)^4}{24EJ} \Big|_{4,y_0}.$$

После упрощений имеем:

$$y = \frac{1}{EJ} \left[ -413,5 + 351x - 4,33x^3 \Big|_{1,y_0} - 3,315(x-1,2)^3 + 0,5417(x-1,2)^4 \Big|_{2,y_0} - 0,5417(x-7,2)^4 + 11,65(x-7,2)^2 \Big|_{3,y_0} - 9,512(x-9,2)^3 + 0,8667(x-9,2)^4 \Big|_{4,y_0} \right]$$

Для получения уравнения углов поворота сечений берем производную

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ} \left[ 351 - 13x^2 \Big|_{1,y_0} - 9,945(x-1,2)^2 + 2,167(x-1,2)^3 \Big|_{2,y_0} - 2,167(x-7,2)^3 + 23,3(x-7,2) \Big|_{3,y_0} - 28,54(x-9,2)^2 + 3,467(x-9,2)^3 \Big|_{4,y_0} \right]$$

Строим изогнутую ось балки. Для этого определяем линейные и угловые перемещения характерных сечений. Достаточно определить прогибы на концах консолей и в середине пролета, а углы поворота сечений – на концах консолей и над опорами. Жесткость балки равна  $EJ = 200 \cdot 10^6 \cdot 9840 \cdot 10^{-8} = 19680 \text{ кНм}^2$ .

Прогибы

$$y(0) = y_0 = -\frac{413,5}{19680} = -\frac{413,5}{19680} = -0,02101 \text{ м} = -2,101 \text{ см.}$$

$$y(5,2) = \frac{1}{EJ} \left[ -413,5 + 351 \cdot 5,2 - 4,33 \cdot 5,2^3 - 3,315(5,2-1,2)^3 + 0,5417(5,2-1,2)^4 \right] = \frac{728,7}{19680} = 0,037 \text{ м} = 3,7 \text{ см.}$$

$$y(10,4) = \frac{1}{EJ} \left[ -413,5 + 351 \cdot 10,4 - 4,33 \cdot 10,4^3 - 3,315(10,4-1,2)^3 + 0,5417(10,4-1,2)^4 - 0,5417(10,4-7,2)^4 + 11,65(10,4-7,2)^2 - 9,512(10,4-9,2)^3 + 0,8667(10,4-9,2)^4 \right] = \\ = \frac{-289,6}{19680} = -0,01472 \text{ м} = -1,472 \text{ см.}$$

Углы поворота сечений:

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \frac{351}{19680} = 0,01784 \text{ рад.} = 1,023 \text{ град.}$$

$$\varphi(1,2) = \frac{1}{EI} [ 351 - 13 \cdot 1,2^2 ] = \frac{332,3}{19680} = 0,01688 \text{ радиан} = 0,9679 \text{ град.}$$

$$\varphi(9,2) = \frac{1}{EI} [ 351 - 13 \cdot 9,2^2 - 9,945(9,2 - 1,2)^2 + 2,167(9,2 - 1,2)^3 - 2,167(9,2 - 7,2)^3 +$$

$$+ 23,3(9,2 - 7,2) ] = \frac{-246,7}{19680} = -0,01254 \text{ радиан} = -0,7186 \text{ град.},$$

$$\varphi(10,4) = \frac{1}{EI} [ 351 - 13 \cdot 10,4^2 - 9,945(10,4 - 1,2)^2 + 2,167(10,4 - 1,2)^3 - 2,167(10,4 - 7,2)^3 +$$

$$+ 23,3(10,4 - 7,2) - 28,54(10,4 - 9,2)^2 + 3,467(10,4 - 9,2)^3 ] = \frac{-244,2}{19680} =$$

$$-0,01241 \text{ радиан} = -0,7114 \text{ град.}.$$

5. Проверяем жесткость балки.

Допускаемый прогиб равен  $[f] = \frac{1}{200} \ell = \frac{1}{200} 8 = 0,04 \text{ м} = 4 \text{ см}$ . По-

скольку максимальный прогиб оси балки  $|y|_{\max} = 3,7 \text{ см} < 4 \text{ см}$ , жесткость балки обеспечена.

### Контрольные вопросы к защите расчетно-проектировочной работы №4

1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и его интегрирование. Постановка условий закрепления балки и условий сопряжения участков.
2. Прием интегрирования дифференциальных уравнений изогнутой оси балки без раскрытия скобок и его преимущество.
3. Метод начальных параметров. Универсальные уравнения перемещений. Статические и кинематические начальные параметры и способы их определения.
4. Как определить место и значение максимального прогиба?
5. Определение перемещений с помощью теоремы Кастилиано.
6. Определение перемещений методом Мора.
7. Определение перемещений способом Верещагина. Формулы трапеций Симпсона.

# РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №5

## Внекентрное сжатие короткого стержня

### *Краткие сведения из теории*

Сложным называется такое сопротивление стержня, при котором на него одновременно накладываются два или более типа деформации. В курсе сопротивления материалов изучаются три вида сложного сопротивления: косой изгиб, изгиб с кручением, внекентрное сжатие (растяжение) короткого стержня.

При косом изгибе стержень испытывает деформации изгиба в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, совпадающих с главными плоскостями инерции. Такой изгиб имеет место в том случае, когда плоскость действия активной нагрузки расположена под некоторым углом к главным плоскостям инерции.

В случае изгиба с кручением происходят деформации кручения и изгиба, которые происходят под действием активных нагрузок, расположенных в плоскости, параллельной продольной оси, перпендикулярно последней. При этом стержень изгибается и закручивается относительно продольной оси.

Внекентрное сжатие (растяжение) получается, если линия действия силы расположена на некотором расстоянии от продольной оси и параллельна ей. Если на стержень действует не одна такая сила, а несколько, то надо иметь в виду их равнодействующую.

Предположим, что на стержень действует любая система нагрузок. Эту систему всегда можно привести к центру тяжести сечения, где получаем главный вектор и главный момент. Можно рассчитать точку приложения главного вектора так, чтобы главный момент обратился в нуль. Тогда система сил приводится к одной только равнодействующей, которая проходит уже не в центре тяжести сечения. В самом общем случае она определяется шестью величинами: продольная сила  $N$ ; поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ ; крутящий момент  $M_x$ .

При внекентрном сжатии (растяжении) в поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения, поэтому рассматривается нормальная составляющая  $N$  и ее моменты  $M_y$  и  $M_z$  (момент  $M_x$  и силы  $Q_y$  и  $Q_z$  вызывают кручение и сдвиг, т.е. дают главным образом касательные напряжения).

Нормальные напряжения при внекентрном сжатии определяются по формуле

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2} \right),$$

где  $P$  – сжимающая сила, приложенная с некоторым эксцентриситетом;  $F$  – площадь поперечного сечения;  $y_p, z_p$  – координаты точки приложения силы в системе главных осей инерции;  $y, z$  – координаты точки сечения, где определяются напряжения  $\sigma$ ;  $i_y, i_z$  – главные радиусы инерции сечения. Если происходит внеклентренное растяжение, то перед формулой надо сохранить знак плюс.

В частном случае, когда  $y_p = z_p = 0$ , получается:  $\sigma = -\frac{P}{F}$ , т.е. приходим к известной формуле для напряжения центрального сжатия.

В поперечном сечении стержня при внеклентренном сжатии существуют силовая и нулевая линии. Силовой называется прямая линия, проходящая через центр тяжести сечения и точку приложения силы  $P$ . Нулевой называется линия, в точках которой напряжения равны нулю. Уравнение этой линии имеет вид  $\sigma = 0$ , или  $1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2} = 0$ . Для построения этой линии достаточно найти две ее точки, поскольку она представляет собой прямую линию.

Если принять  $y = 0$ , получаем:  $z = -\frac{i_y^2}{z_p}$ , и при  $z = 0$  имеем:  $y = -\frac{i_z^2}{y_p}$ .

В итоге формулы для построения нулевой линии приводятся к виду  $a_z = -\frac{i_y^2}{z_p}, a_y = -\frac{i_z^2}{y_p}$ , где  $a_z$  и  $a_y$  обозначают отрезки, отсекаемые нулевой линией от главных осей инерции. Из формул видно, что положение нулевой линии в сечении стержня зависит от координат места приложения силы.

Если сила отодвигается от центра, то нулевая линия пододвигается к центру, и наоборот, сила пододвигается к центру – нулевая линия отодвигается от центра. Можно выделить несколько частных случаев:

1) если  $y_p = z_p = 0$  (сила  $P$  приложена в центре сечения), то  $a_y = a_z = \infty$  и нулевая линия находится в бесконечности. Здесь происходит центральное сжатие;

2) если  $y_p = 0, z_p = \text{Const}$ , то  $a_y = \infty, a_z = \text{Const}$  – нулевая линия параллельна оси  $y$  и находится на расстоянии  $a_z$  от нсс;

3) если  $y_p = \text{Const}, z_p = 0$ , то  $a_y = \text{Const}, a_z = \infty$  – нулевая линия параллельна оси  $z$  и находится на расстоянии  $a_y$  от нсс;

4) если  $y_p = z_p = \infty$ , то  $a_y = a_z = 0$  – нулевая линия проходит через центр тяжести сечения.

Положение нулевой линии имеет большое практическое значение. Оно связано с тем, что часть сечения, расположенная по одну сторону от нулевой линии сжимается, другая растягивается. В строительных конструкциях, выполненных из хрупких материалов (кирпич, бетон, железобетон и др.), неже-

лательно возникновение больших растягивающих напряжений (хрупкие материалы хуже сопротивляются растяжению, чем сжатию).

Путем расчета можно свести к минимуму или вовсе исключить растягивающие напряжения в сечении. При этом нулевая линия должна занимать положение касательной к контуру сечения или находиться за его пределами. При этом

место приложения силы можно определить по формулам  $y_p = -\frac{i_z^2}{a_y}$ ,  $z_p = -\frac{i_y^2}{a_z}$ .

Перемещая нулевую линию по контуру сечения, находим соответствующие координаты места приложения силы. Легко показать, что если нулевая линия поворачивается вокруг точки, то сила перемещается по прямой линии; если нулевая линия перемещается по контуру сечения (скользит), то сила перемещается по кривой. В результате таких расчетов находим очертание замкнутого контура, внутри которого должна находиться сжимающая сила, чтобы напряжения по всему сечению были сжимающими. Площадь, заключенную внутри такого контура, называют **ядром сечения**.

Таким образом, ядро сечения – это часть поперечного сечения стержня, ограниченная замкнутым контуром, и обладающая тем свойством, что сила, приложенная в любой ее точке, вызывает по всему сечению напряжения одного знака.

## ЗАДАНИЕ НА РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНУЮ РАБОТУ №5

### Внекентренное сжатие короткого стержня

Для короткого стержня с указанными размерами и точкой приложения силы требуется:

1. Определить площадь сечения и положение центра тяжести.
2. Вычислить главные моменты инерции и главные радиусы инерции.
3. Найти положения нулевой и силовой линий и установить точки сечения с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями.
4. Определить величину предельной расчетной сжимающей силы из условия, чтобы наибольшие сжимающие напряжения не превышали расчетного сопротивления на сжатие  $R_c = 5$  МПа, а наибольшие растягивающие – расчетного сопротивления на растяжение  $R_p = 1$  МПа.
5. Построить эпюры нормальных напряжений от предельной расчетной сжимающей силы.
6. Построить эпюры нормальных напряжений в основании столба (в месте сопряжения с фундаментом) с учетом его собственного веса. При

определении расчетной нагрузки от собственного веса коэффициент надежности по материалу принять равным  $n = 1,1$ .

### 7. Построить ядро сечения.

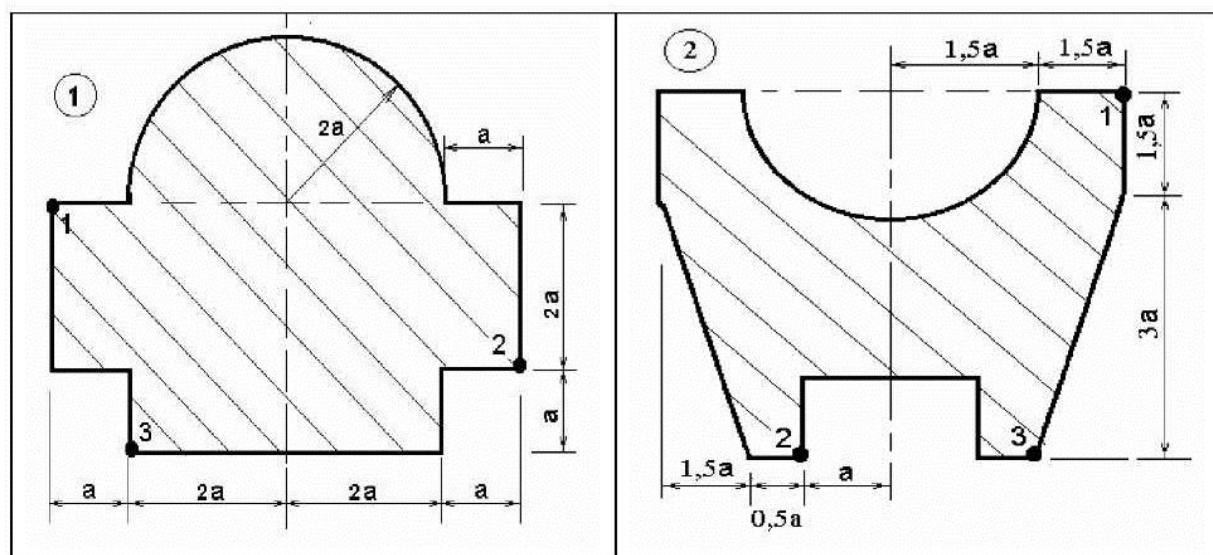
Сечение вычертить в удобном масштабе с указанием всех размеров в числах, всех осей, силовой и нулевой линий, ядра сечения.

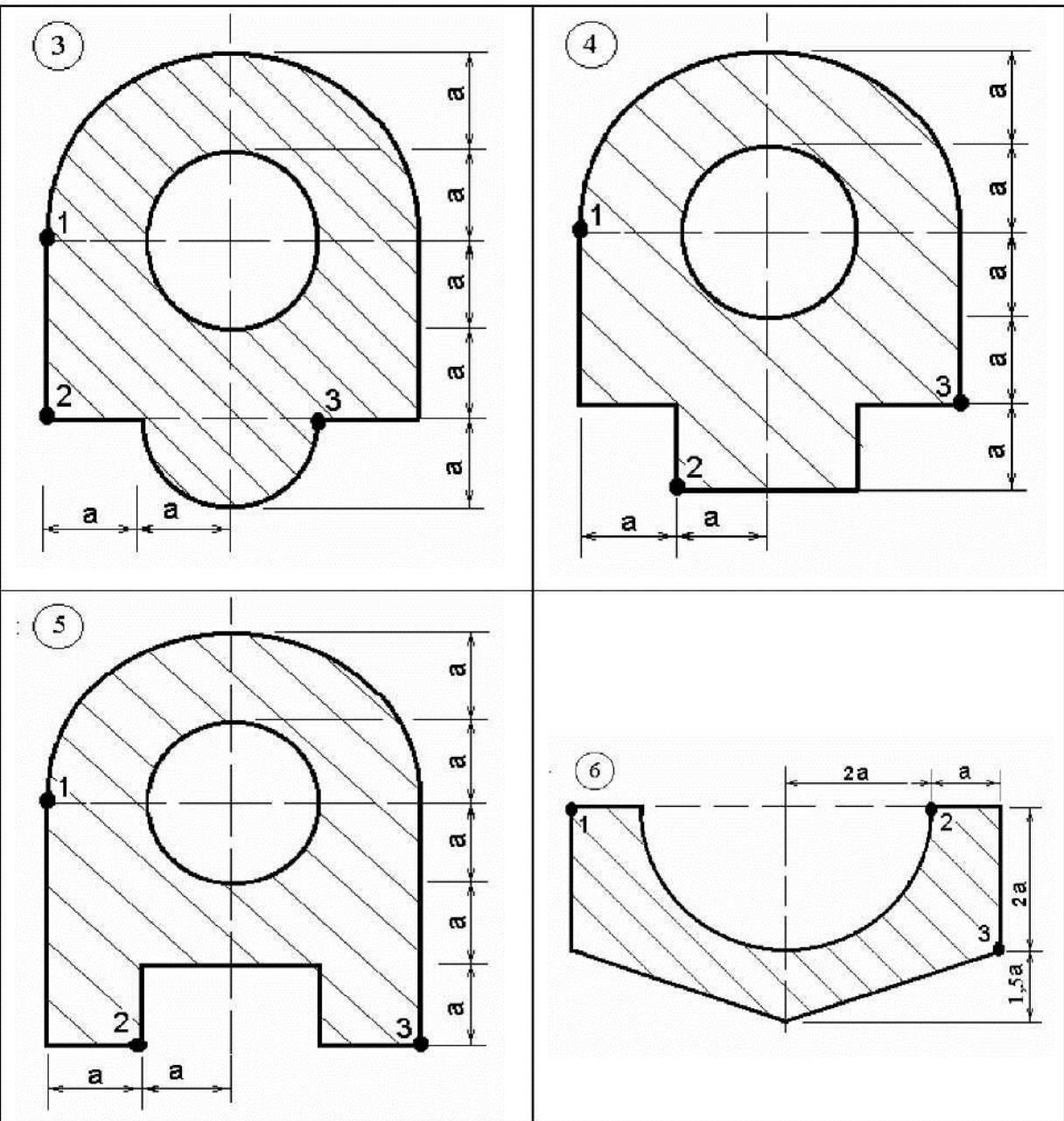
Примечание: точка приложения силы соответствует номеру академической группы.

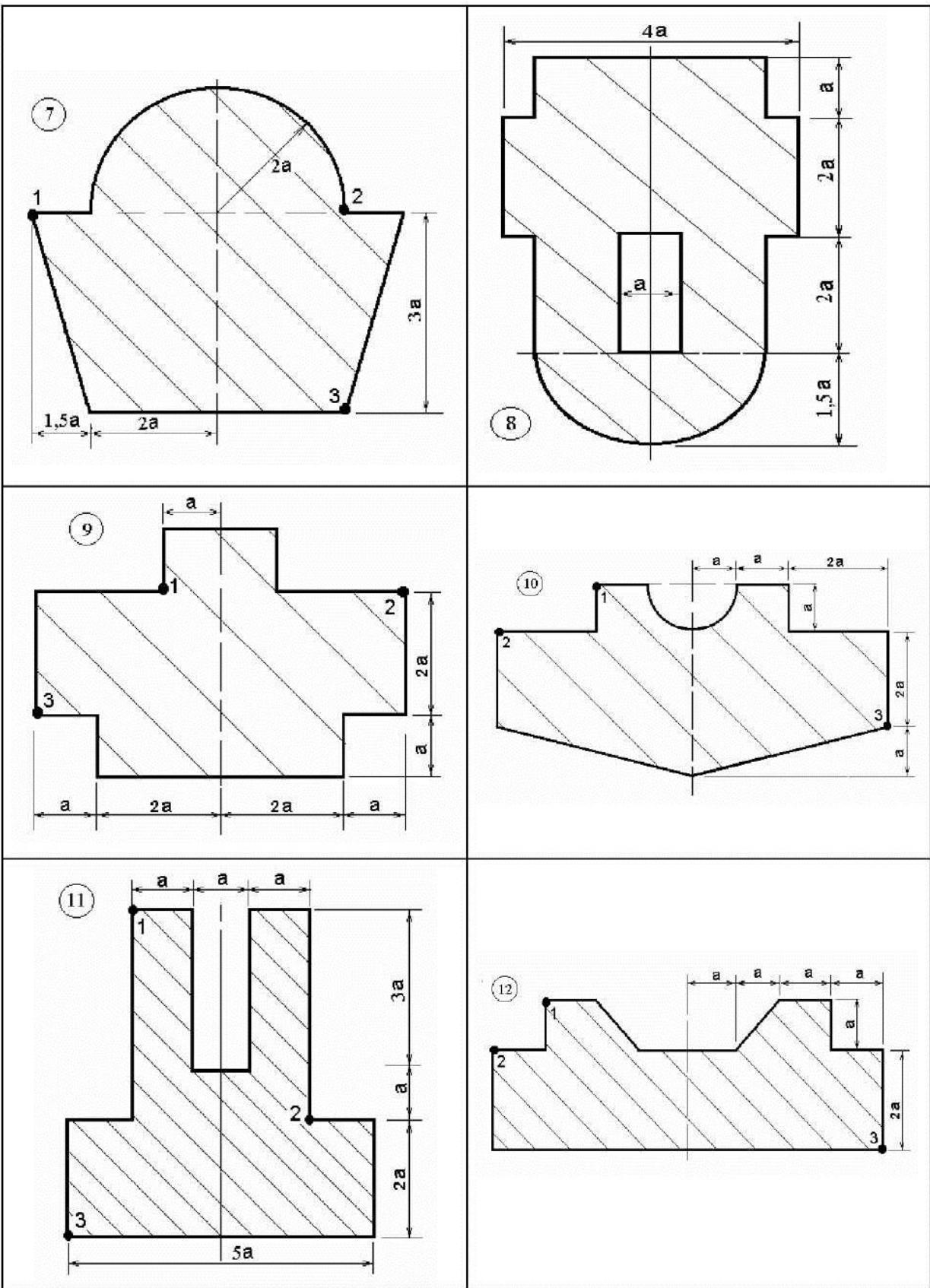
Таблица исходных данных

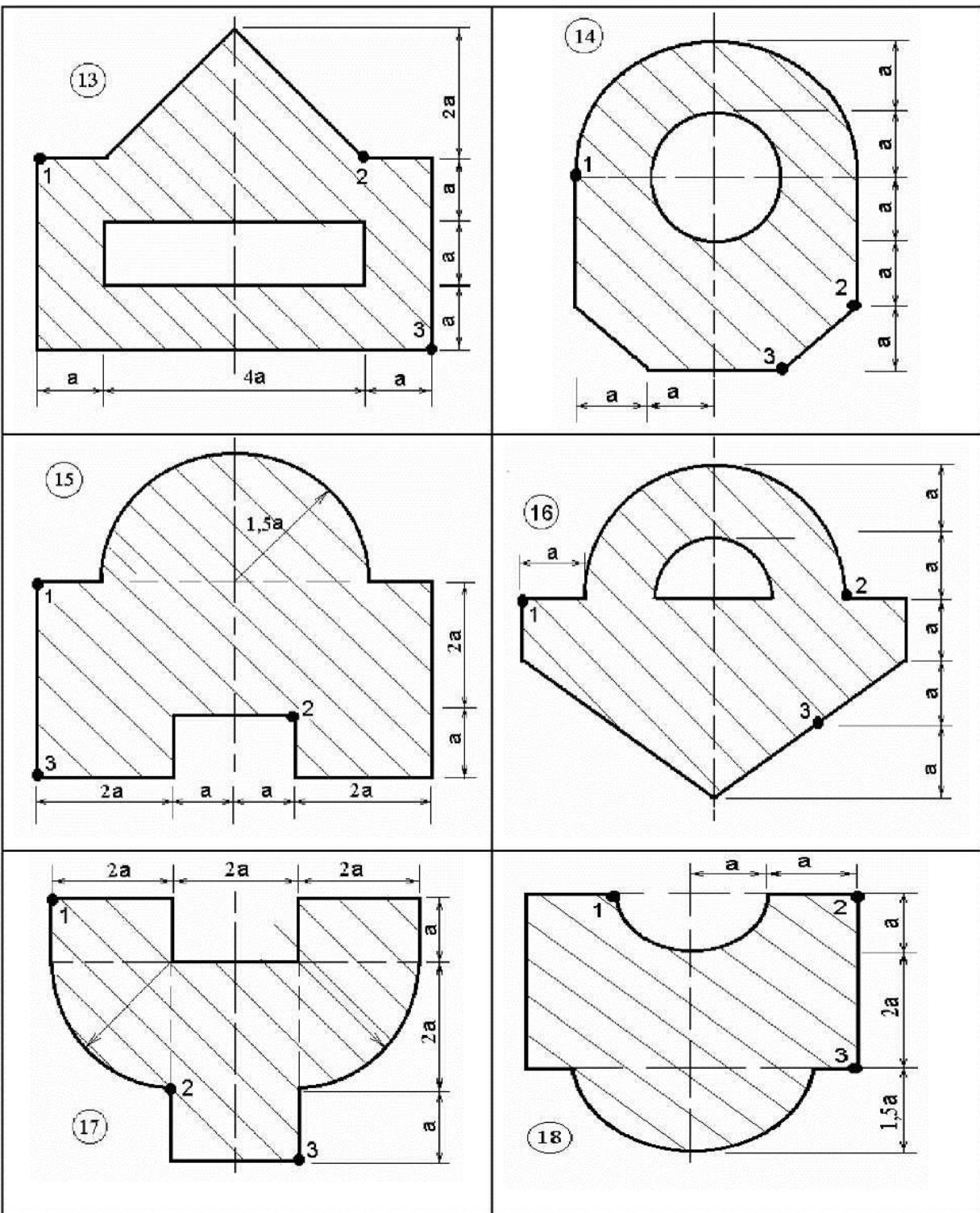
Второе число шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a (м)	0,18	0,20	0,21	0,24	0,27	0,30	0,33	0,36	0,39	0,42
h (м)	4,2	4,5	4,6	4,8	5,0	5,1	5,2	5,4	5,6	5,8
$\gamma$ (кг/м <sup>3</sup> )	1600	1700	1800	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600

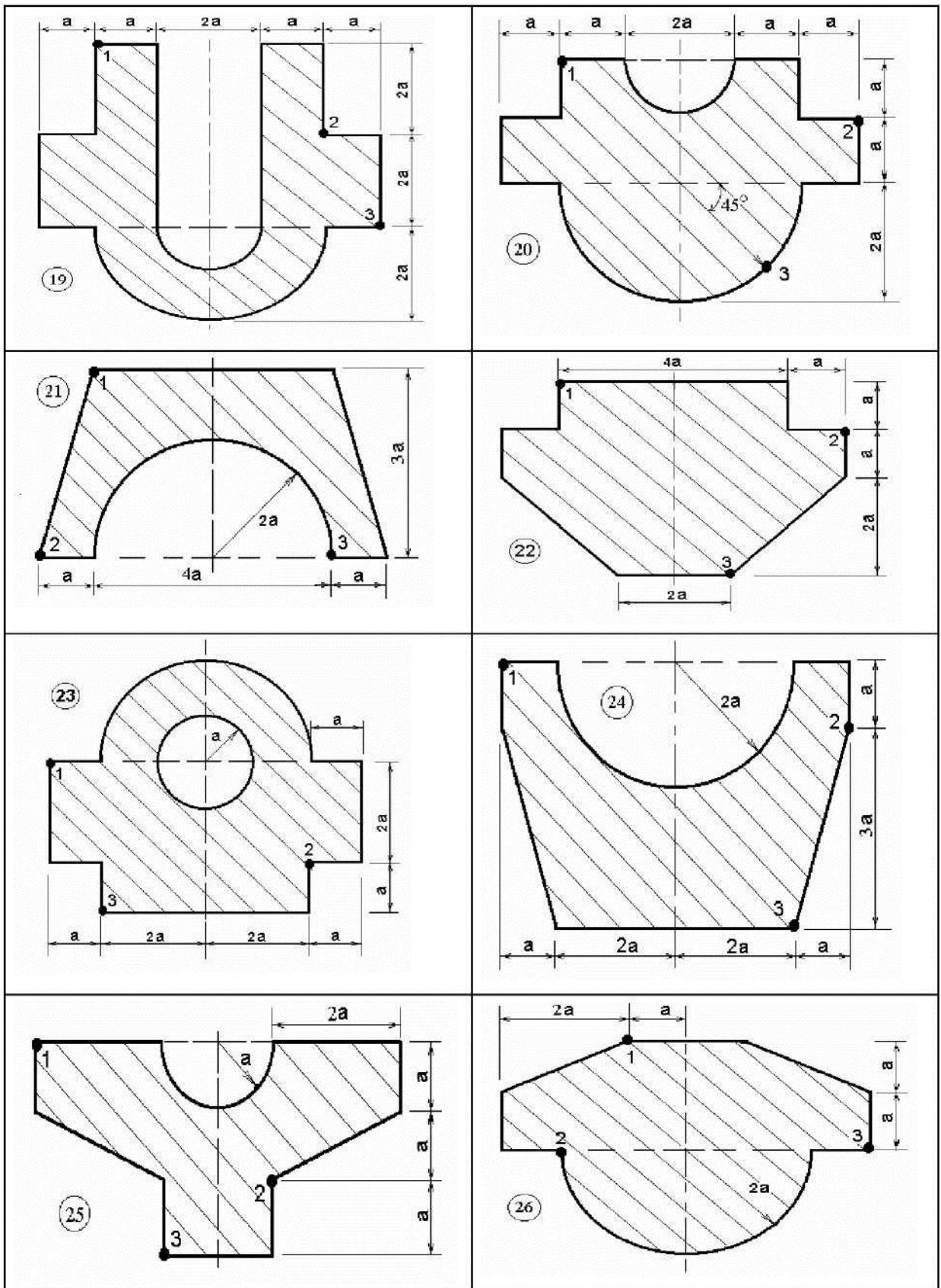
### Схемы сечений стержней (первое число шифра)

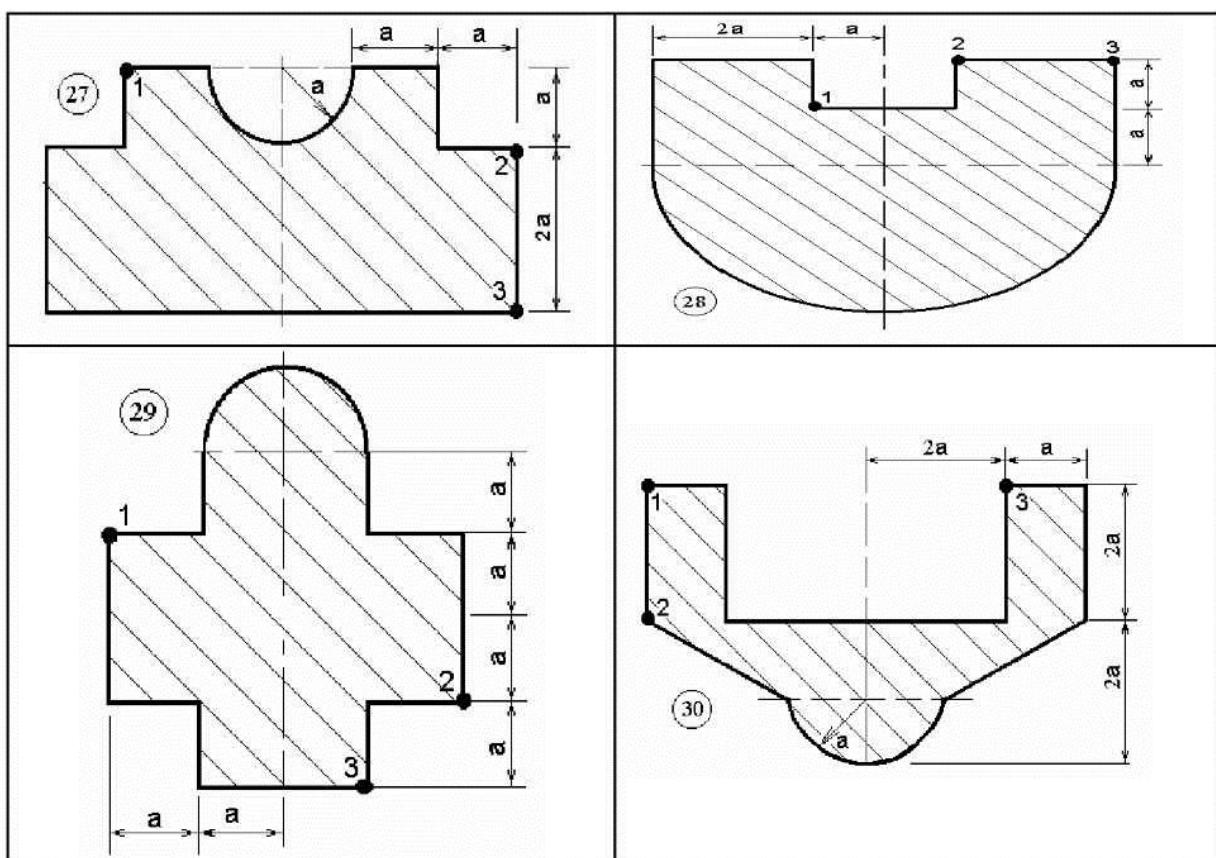










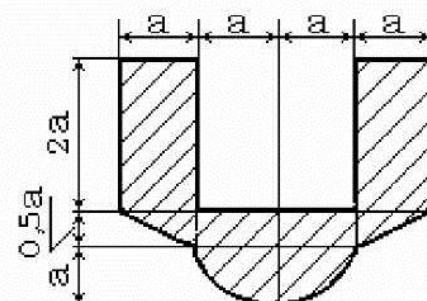


### Пример решения задачи

Исходные данные

Второе число шифра	
a (м)	0,4
h (м)	5,0
$\gamma$ (кг/м <sup>3</sup> )	2500

Схема сечения



### Решение

1. Определяем положение центра тяжести сечения.

Для определения центра тяжести сложной фигуры разбиваем ее на простейшие и проводим их собственные оси. Вычисляем площади простейших фигур. Расчеты геометрических характеристик проводим в сантиметрах.

$$F_1 = F_2 = a \cdot 2a = 2a^2 = 2 \cdot 40^2 = 3200 \text{ см}^2,$$

$$F_3 = F_4 = a \cdot 0,5a/2 = 0,25a^2 = 0,25 \cdot 40^2 = 400 \text{ см}^2,$$

$$F_5 = 2a \cdot 0,5a = a^2 = 40^2 = 1600 \text{ см}^2, \quad F_6 = \pi a^2 / 2 = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 40^2 = 2512 \text{ см}^2$$

и определяем координаты центров простейших фигур относительно вспомогательных осей  $z_{bc}$ ,  $y_{bc}$

$$y_1 = y_2 = a = 40 \text{ см.} \quad y_3 = y_4 = -a/6 = -40/6 = -6,667 \text{ см.}$$

$$y_5 = -a/4 = -40/4 = -10 \text{ см,} \quad y_6 = -(a/2 + 4a/3\pi) = -(40/2 + 4 \cdot 40/3 \cdot 3,14) = -21,7 \text{ см,}$$

$$z_1 = -1,5a = -1,5 \cdot 40 = -60 \text{ см,} \quad z_2 = 1,5a = 1,5 \cdot 40 = 60 \text{ см,}$$

$$z_3 = -(a + a/3) = -4a/3 = -4 \cdot 40/3 = -53,33 \text{ см.} \quad z_4 = (a + a/3) = 4a/3 = 4 \cdot 40/3 = 53,33 \text{ см.}$$

$$z_5 = 0, \quad z_6 = 0.$$

Далее находим положение центра тяжести всей фигуры

$$y_c = \frac{2F_1y_1 + 2F_2y_2 + F_3y_3 + F_4y_4}{2F_1 + 2F_2 + F_3 + F_4} =$$

$$\frac{2 \cdot 3200 \cdot 40 + 2 \cdot 40 \cdot (-6,667) + 1600 \cdot (-10) + 2512 \cdot (-21,7)}{2 \cdot 3200 + 2 \cdot 400 + 1600 + 5212} = 15,93 \text{ см,}$$

$$z_c = \frac{F_1z_1 + F_2z_2 + F_3z_3 + F_4z_4 + F_5z_5 + F_6z_6}{2F_1 + 2F_2 + F_3 + F_4} =$$

$$\frac{3200 \cdot (-60) + 3200 \cdot 60 + 400 \cdot (-53,33) + 400 \cdot 53,33 + 1600 \cdot 0 + 25,12 \cdot 0}{2 \cdot 3200 + 2 \cdot 400 + 1600 + 5212} = 0.$$

2. Определяем главные моменты и главные радиусы инерции.

Предварительно вычисляем моменты инерции простейших фигур относительно собственных осей.

$$J_{z_1} = J_{z_2} = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{8a^4}{12} = \frac{8 \cdot 40^4}{12} = 1706667 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1} = J_{y_2} = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{2a^4}{12} = \frac{2 \cdot 40^4}{12} = 426667 \text{ см}^4,$$

$$J_{z_3} = J_{z_4} = \frac{a(0,5a)^3}{36} = \frac{40(0,5 \cdot 40)^3}{12} = 8889 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_3} = J_{y_4} = \frac{0,5a \cdot a^3}{36} = \frac{0,5a^4}{136} = \frac{0,5 \cdot 40^4}{136} = 35556 \text{ см}^4,$$

$$J_{z_5} = \frac{2a(0,5a)^3}{12} = \frac{2 \cdot 40(0,5 \cdot 40)^3}{12} = 53333 \text{ см}^4.$$

$$J_{y_5} = \frac{0,5a(2a)^3}{12} = \frac{4a^4}{12} = \frac{4 \cdot 40^4}{12} = 853333 \text{ см}^4,$$

$$J_{z_6} = \frac{\pi a^4}{8} - \frac{\pi a^2}{2} \left( \frac{4a}{3\pi} \right)^2 = \frac{3,14 \cdot 40^4}{8} - \frac{3,14 \cdot 40^2}{2} \left( \frac{4 \cdot 40}{3 \cdot 3,14} \right)^2 = 280101 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_6} = \frac{\pi a^4}{8} = \frac{3,14 \cdot 40^4}{8} = 1004800 \text{ см}^4.$$

Вычисляем главные моменты инерции

$$\begin{aligned} J_z &= \sum_1^6 (J_{z_i} + a_i^2 F_i) = (J_{z_1} + a_1^2 F_1 + \dots + J_{z_6} + a_6^2 F_6) = 2(1706667 + 24,07^2 \cdot 3200) + \\ &+ 2(8889 + 22,6^2 \cdot 400) + 53333 + (-25,93)^2 \cdot 1600 + 280101 + (-52,992)^2 \cdot 2512 = \\ &= 15991795 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= \sum_1^6 (J_{y_i} + b_i^2 F_i) = (J_{y_1} + b_1^2 F_1 + \dots + J_{y_6} + a_6^2 F_6) = 2(426667 + 60^2 \cdot 3200) + \\ &+ 2(3556 + 53,33^2 \cdot 400) + 853333 + 1004800 = 28033850 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Определяем квадраты главных радиусов инерции

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{15991795}{11312} = 1414 \text{ см}^2, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{28033850}{11312} = 2478 \text{ см}^2,$$

где

$$F = \sum F_i = F_1 + \dots + F_6 = 3200 + 3200 + 400 + 400 + 1600 + 2512 = 11312 \text{ см}^2$$

3. Определяем положения силовой и нулевой линий.

Для определения положения силовой линии соединяем центр тяжести сечения с точкой приложения силы. Положение нулевой линии находим по формулам

$$a_y = \frac{-i_z^2}{y_p} = -\frac{1414}{80} = -17,68 \text{ см}, \quad a_y = \frac{-i_y^2}{z_p} = -\frac{2478}{64,07} = -38,68 \text{ см}..$$

где  $y_p = 2a = 2 \cdot 40 = 80 \text{ см}$ ,  $z_p = 2a - y_c = 2 \cdot 40 - 15,93 = 64,07 \text{ см}$  – координаты точки приложения силы. Откладываем полученные отрезки на главных осях инерции и изображаем нулевую линию. Верхняя часть сечения от нулевой линии сжимается, нижняя растягивается. Самыми напряженными являются точки сечения, наиболее удаленные от нулевой линии. Для их опре-

деления проводим касательные к контуру сечения стойки параллельно нулевой линии. Таковыми оказались точки А и В сечения.

4. Определяем предельную сжимающую силу  $P_{\text{пред.}}$ . Для этого составляем условия прочности для точек А и В

$$1) \quad \sigma_A \leq R_p, \quad \text{или} \quad \left| \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y_A}{i_z^2} + \frac{z_p z_A}{i_y^2} \right) \right| \leq R_p, \quad \text{отсюда получаем:}$$

$$P \leq \left| \frac{FR_p}{1 + \frac{y_p y_A}{i_z^2} + \frac{z_p z_A}{i_y^2}} \right| = \left| \frac{11312 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^3}{1 + \frac{64,07 \cdot (-71)}{1414} + \frac{80 \cdot (-20)}{2478}} \right| = 790,2 \text{ кН}, \quad \text{здесь}$$

$y_A = -71 \text{ см}$  и  $z_A = -20 \text{ см}$  находим графически по схеме сечения;

$$2) \quad \sigma_B \leq R_c, \quad \text{или} \quad \left| \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y_B}{i_z^2} + \frac{z_p z_B}{i_y^2} \right) \right| \leq R_c, \quad \text{отсюда получаем:}$$

$$P \leq \left| \frac{FR_p}{1 + \frac{y_p y_B}{i_z^2} + \frac{z_p z_B}{i_y^2}} \right| = \left| \frac{11312 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^3}{1 + \frac{64,07 \cdot 64,07}{1414} + \frac{80 \cdot 80}{2478}} \right| = 872 \text{ кН}.$$

Предельная нагрузка должна равняться наименьшей из этих сил т.е.  $P_{\text{пред.}} = 790,2 \text{ кН}$ . Если в качестве предельной принять наибольшую силу, то напряжение в точке А окажется больше расчетного сопротивления на растяжение, а это не допустимо.

5. Строим эпюру нормальных напряжений от предельной расчетной сжимающей силы. Для этого вычислим напряжения в точках А и В, возникающие от силы  $P_{\text{пред.}}$ .

$$\sigma_A = -\frac{P_{\text{пред.}}}{F} \left( 1 + \frac{y_p y_A}{i_z^2} + \frac{z_p z_A}{i_y^2} \right) = -\frac{790,2 \cdot 10^{-3}}{11312 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{64,07 \cdot (-71)}{1414} + \frac{80 \cdot (-20)}{2478} \right) = 2 \text{ МПа},$$

$$\sigma_B = -\frac{P_{\text{пред.}}}{F} \left( 1 + \frac{y_p y_B}{i_z^2} + \frac{z_p z_B}{i_y^2} \right) = -\frac{790,2 \cdot 10^{-3}}{11312 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{64,07 \cdot 64,07}{1414} + \frac{80 \cdot 80}{2478} \right) = -4,53 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений, имея в виду, что они распределяются по линейному закону.

6. Построим эпюру нормальных напряжений в основании столба с учетом собственного веса. Напряжение от собственного веса определяем по формуле:

$$\sigma_{cb} = -\frac{P_{cb}}{F} = -\frac{\gamma F h}{F} = \gamma h = -2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 5 \text{м} = -122500 \text{ Па} = -0,1225 \text{ МПа.}$$

Тогда в точках А и В получаем напряжения

$$\sigma_A = 2 - 0,1225 = 1,878 \text{ МПа}, \quad \sigma_B = -4,53 - 0,1225 = -4,653 \text{ МПа}$$

7. Строим ядро сечения. Для этого выбираем достаточное количество положений нулевой линии (с учетом симметрии сечения стойки), которые располагаем по касательным к контуру. В рассматриваемом примере имеем четыре таких положения, показанных на чертеже. Каждому положению нулевой линии соответствует конкретное место приложения силы. Определяем их координаты

1) нулевая линия 1 – 1. Для него отсекаемые отрезки равны  $a_y = 64,07 \text{ см}$ ,  $a_z = \infty$ . Точка приложения силы имеет координа-

$$y_p = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{1414}{64,07} = -22,07 \text{ см}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{2478}{\infty} = 0;$$

2) нулевая линия 2 – 2.  $a_y = \infty$ ,  $a_z = 80 \text{ см}$ .

$$y_p = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{1414}{\infty} = 0, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{2478}{80} = -30,98 \text{ см};$$

3) нулевая линия 3 – 3.  $a_y = 96 \text{ см}$ ,  $a_z = -90 \text{ см}$ .

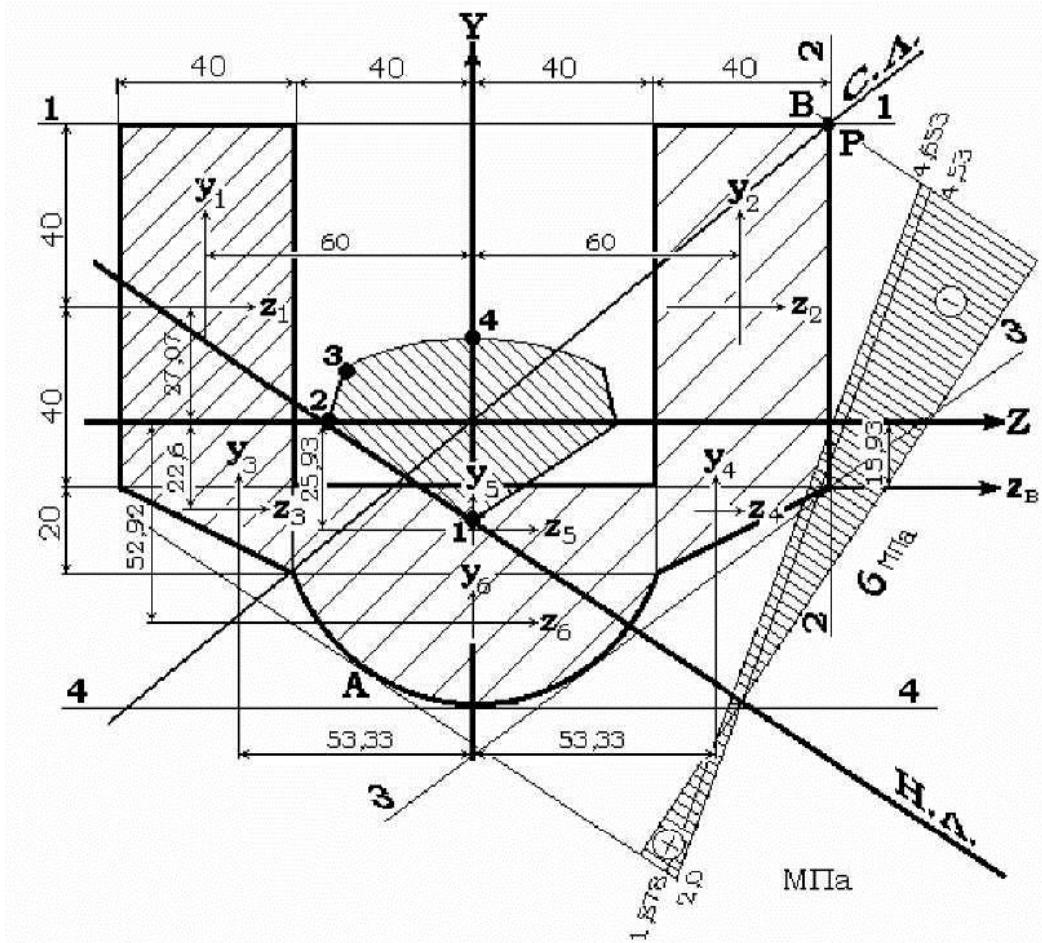
$$y_p = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{1414}{96} = -14,73 \text{ см}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{2478}{-90} = 27,53 \text{ см};$$

4) нулевая линия 4 – 4.  $a_y = -75,93 \text{ см}$ ,  $a_z = \infty$ .

$$y_p = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{1414}{-75,93} = 18,62 \text{ см}, \quad z_p = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{2478}{\infty} = 0.$$

Изображаем полученные точки и соединяем их линиями. Если при переходе от одного положения нулевой линии к соседнему положению она поворачивается вокруг одной точки, то линия перемещения силы есть прямая. В остальных случаях сила перемещается по кривой. Другую половину ядра сечения строим, используя свойство симметрии.

## Схема сечения и результаты решения



### Контрольные вопросы к защите расчетно-проектировочной работы №5

1. Какой случай сложного сопротивления называется внецентренным сжатием (растяжением)?
2. Как определяются напряжения в произвольной точке поперечного сечения при внецентренном сжатии и растяжении?
3. Чему равно напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном сжатии или растяжении?
4. Как определяются положения силовой и нулевой линий?
5. В каких точках возникают наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения?
6. Из каких условий определяется предельная расчетная сила?
7. Как строятся эпюры нормальных напряжений в поперечном сечении и в основании столба?
8. Что такое ядро сечения и как оно строится?
9. Какое положение занимает нулевая линия, когда продольная сила приложена к контуру ядра, внутри ядра, за пределами ядра?

## РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА №6

### Расчет стойки на прочность и устойчивость при продольно-поперечном изгибе

#### Краткие сведения из теории

В сопротивлении материалов вопрос об устойчивости возникает при расчете длинных и тонких стержней, сжимаемых силами. Такие стержни не всегда будут находиться в устойчивом равновесии. Например, прямая стойка при небольшой сжимающей силе сохранит свою первоначальную форму (стойка останется прямой). При постепенном возрастании нагрузки наступает такой момент, когда прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой и появляется возможность искривления в любую из двух сторон в плоскости наименьшей жесткости. Такой случай изгиба называется продольным, т.е. изгибом, вызванным сжимающей силой, действующей вдоль оси стержня.

Неустойчивая форма равновесия в стойке становится возможной при вполне определенной величине силы. Если нагрузка меньше этой величины, то стойка остается прямолинейной. Для нее возможна лишь одна исходная форма равновесия, которая при указанной нагрузке будет устойчивой. Если продолжать увеличивать нагрузку, то при некотором ее значении стойка может изогнуться и первоначальная форма равновесия становится уже неустойчивой.

Величина силы, при превышении которой хотя бы на бесконечно малую величину происходит потеря устойчивости данного вида деформации элемента конструкции, называется критической силой или критической нагрузкой.

Все части сооружений (стержни, балки, колонны и др.) должны сохранить свою первоначальную (проектную) форму равновесия. Поэтому в них допускаются нагрузки, которые значительно меньше критических. Таким образом, в сооружении надо обеспечить как его прочность, так и устойчивость. Если не гарантирована устойчивость всего сооружения или его отдельных элементов, то теряет смысл и проверка на прочность, так как при потере устойчивости мгновенно меняется форма равновесия и почти всегда новая форма равновесия сопровождается быстрым нарастанием напряжений, которые в конечном итоге приводят к разрушению сооружения.

Критическая сила определяется по формуле Эйлера

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 E J}{\ell_{pr}^2},$$

где  $EJ$  – наименьшая жесткость стержня,  $J$  – минимальный момент инерции поперечного сечения,  $\ell_{pr}$  – приведенная длина стержня. Приведенная длина равна  $\ell_{pr} = \mu \ell$ . Здесь  $\mu$  – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления стержня,  $\ell$  – проектная длина стержня.

Соответствующее критическое напряжение определяется по формуле

$$\sigma_{kp} = \frac{P_{kp}}{F} = \frac{\pi^2 E J}{F \ell_{pp}^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad \text{В этой формуле } \lambda = \frac{\ell_{pp}}{i} \quad \text{называется приведенной гибкостью стержня.}$$

Необходимо иметь в виду, что формула Эйлера может быть использована только в том случае, когда критическое напряжение меньше предела пропорциональности материала:  $\sigma_{kp} \leq \sigma_{un}$ . отсюда имеем  $\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{\sigma_{un}}{E}}$ . Если это условие выполняется, то данный стержень является достаточно гибким и для него формула Эйлера справедлива. Для более жестких стержней существуют эмпирические формулы, учитывающие работу материала за пределом пропорциональности.

Продольно-поперечным называется изгиб, который происходит от продольных и поперечных нагрузок. Расчету на продольно-поперечный изгиб предшествует расчет на поперечный изгиб, включающий в себя построение эпюр изгибающих моментов и подбор сечения по заданному условию прочности. Далее рассматривается собственно продольно-поперечный изгиб, при котором необходимо корректировать подобранное сечение с учетом неблагоприятного влияния продольной силы и проверить устойчивость и прочность стойки. Устойчивость проверяется в двух главных плоскостях. При этом необходимо добиться выполнения условия  $N_p \leq P_{dep}$ , где  $N_p$  – расчетная продольная сила,  $P_{dep} = \varphi \cdot F \cdot R$  – допускаемая продольная сила. Здесь  $\varphi$  определяется в зависимости от гибкости с помощью таблицы коэффициентов продольного изгиба,  $F$  – площадь поперечного сечения стойки,  $R$  – расчетное сопротивление материала.

Проверку прочности стойки необходимо проводить в опасном сечении. Опасным считается сечение, в котором прогиб и изгибающий момент имеют одновременно возможно большие значения. При проверке прочности должно выполняться условие  $\sigma_{max} = \frac{N_p}{F} + \frac{N_p \cdot f + M_p}{W_z} \leq \sigma_{kp}$ , в котором  $N_p$  – расчетная

продольная сила;  $F$  – площадь поперечного сечения,  $f$  – прогиб от продольной и поперечных расчетных нагрузок в сечении, где проверяется напряжение,  $M_p$  – изгибающий момент от расчетной поперечной нагрузки в том же сечении,  $W_z$  – осевой момент сопротивления. Всё расчетные величины необходимо брать по модулю. Прогиб  $f$  определяется по формуле  $f = \frac{y}{1 - \frac{N_p}{P_{kp}}}$ .

Здесь  $y$  – прогиб от расчетных поперечных нагрузок в рассматриваемом сечении. При определении критической силы необходимо иметь в виду, что перемещения стойки от поперечных нагрузок происходят в плоскости действия этих нагрузок. Поэтому момент инерции в формуле Эйлера надо брать относительно оси, которая перпендикулярна направлению перемещения  $y$ .

## ЗАДАНИЕ НА РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНУЮ РАБОТУ № 6

Вертикальная стойка длиной  $l$  загружена осевой силой  $N$  и горизонтальными поперечными нагрузками, как показано на схемах. Там же показаны опорные закрепления и форма сечения из стального прокатного двутавра или двух рядом стоящих швеллеров. Величины нормативных нагрузок указаны в таблице исходных данных. В каждой трети высоты стойки в плоскости наименьшей жесткости проставлены дополнительные связи, препятствующие перемещению этих сечений в указанной плоскости.

Для заданной стойки требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от расчетных поперечных нагрузок.
2. Подобрать сечение стойки по методу предельных состояний и принять его номер с учетом неблагоприятного влияния расчетной продольной силы.
3. Проверить устойчивость стойки в двух главных плоскостях инерции.
4. Рассчитать стойку на продольно-поперечный изгиб и проверить максимальное нормальное напряжение в наиболее опасном сечении с учетом продольной и поперечной нагрузок.

Следующие данные являются общими для всех вариантов:

1. При определении расчетного сопротивления принять коэффициент условий работы  $m = 0,85$ , учитывающий возможные отклонения параметров внешних факторов (температура, влажность, агрессивные среды и др.) от предусмотренных в расчете значений;

$\gamma_m = 1,1$  –коэффициент надежности по материалу, учитывающий возможность несоответствия реальных физических свойств конкретного материала тем, что предусмотрены Нормами:

$R'' = 240 \text{ МПа}$  –установленное Строительными Нормами нормативное сопротивление материала.

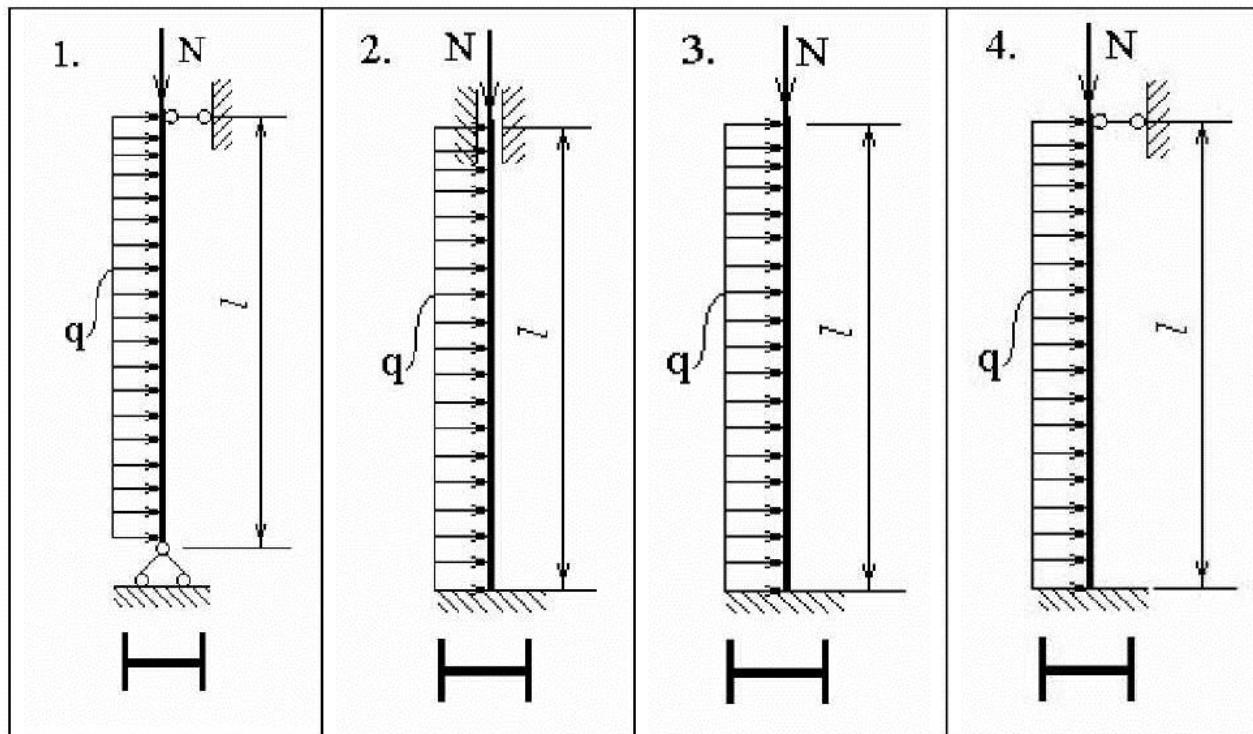
2. При определении расчетных нагрузок считать 1/3 часть нормативной осевой силы постоянной нагрузкой с коэффициентом надежности по нагрузке  $n_1 = 1,1$ , а 2/3 –временной с коэффициентом надежности по нагрузке  $n_2 = 1,4$ ; всю горизонтальную нагрузку считать временной с коэффициентом надежности по нагрузке  $n_2 = 1,4$ .

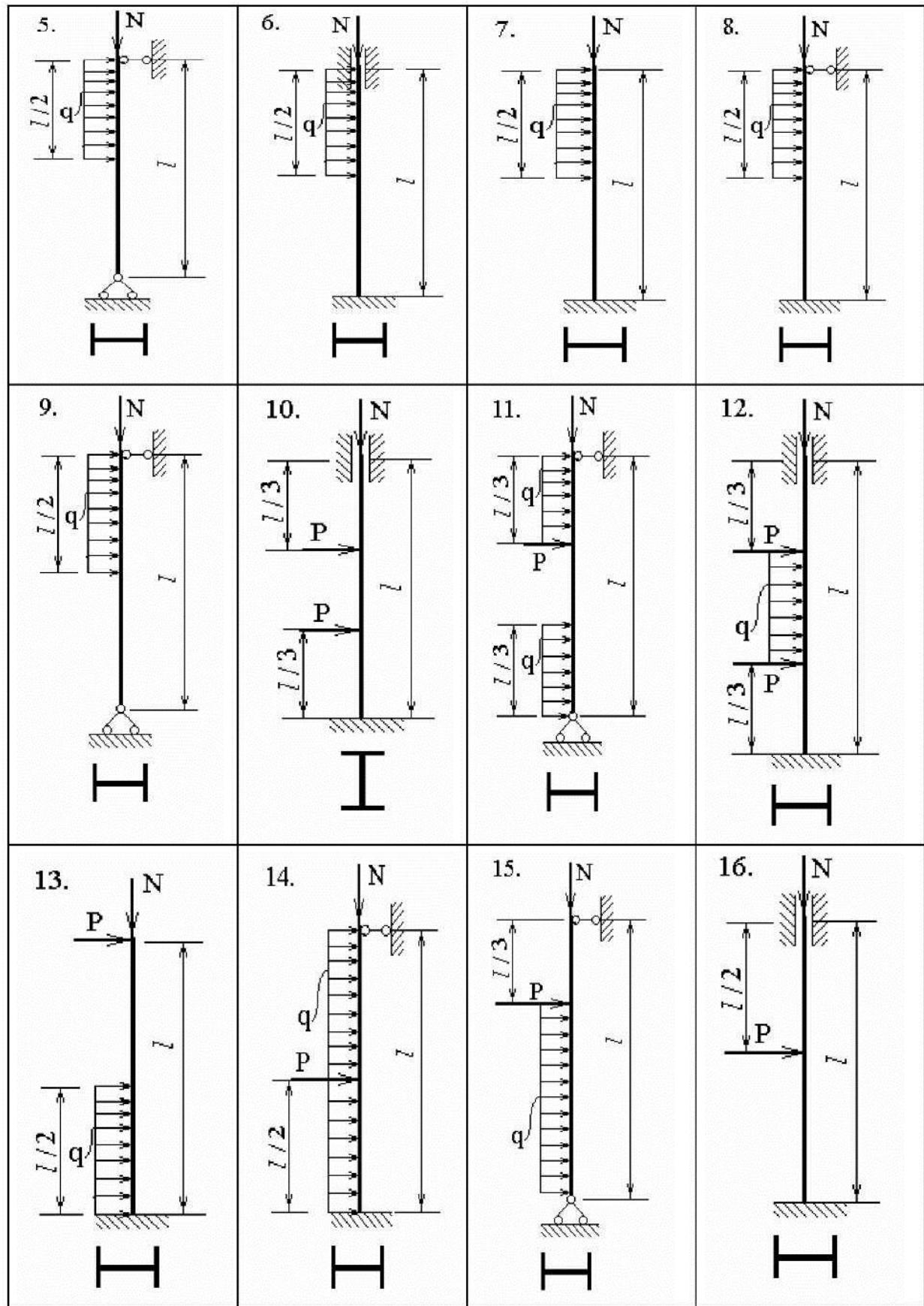
3. При проверке устойчивости в плоскости наименьшей жесткости приведенную длину принять равной расстоянию между дополнительными связями.

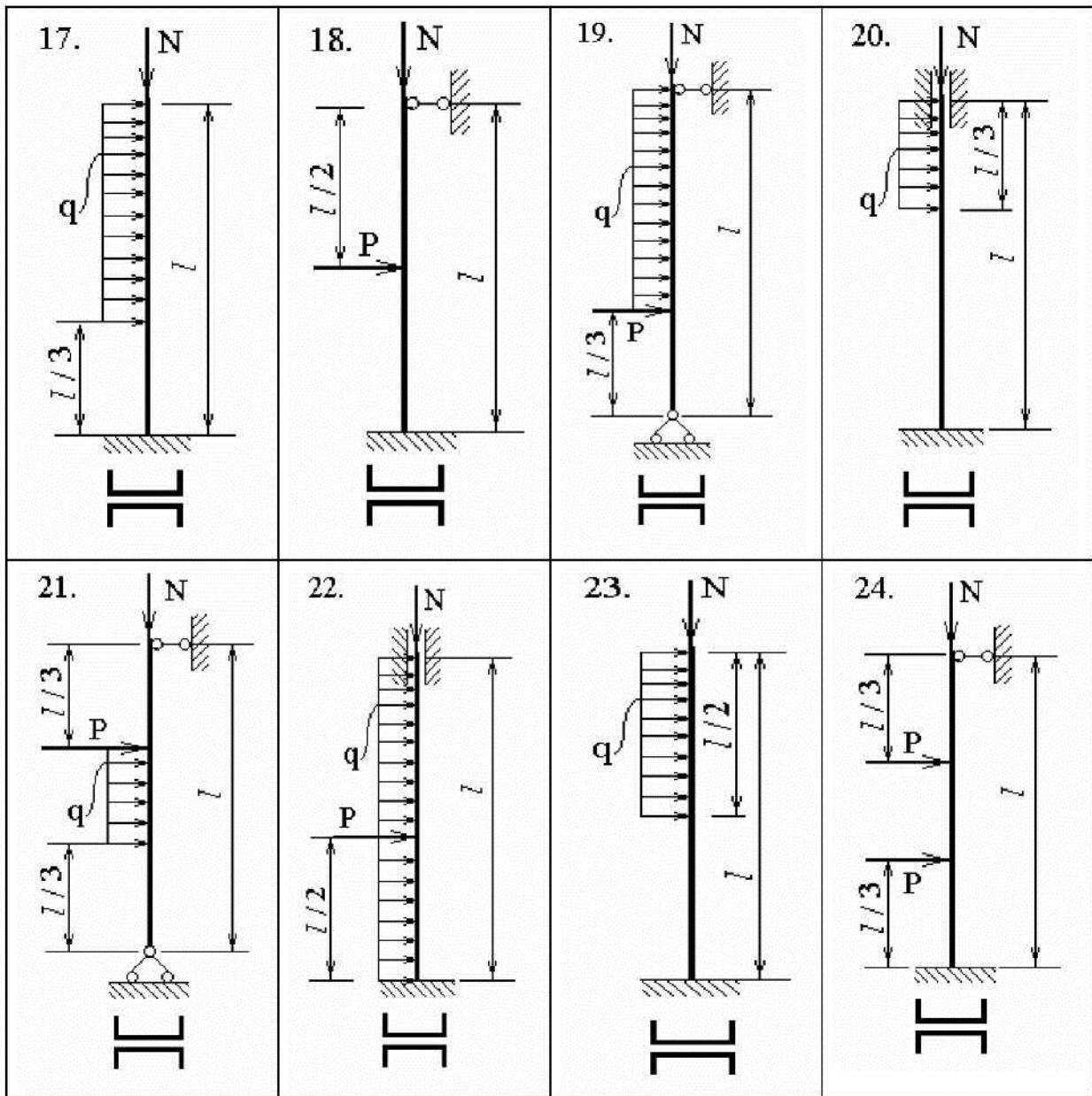
Таблица исходных данных

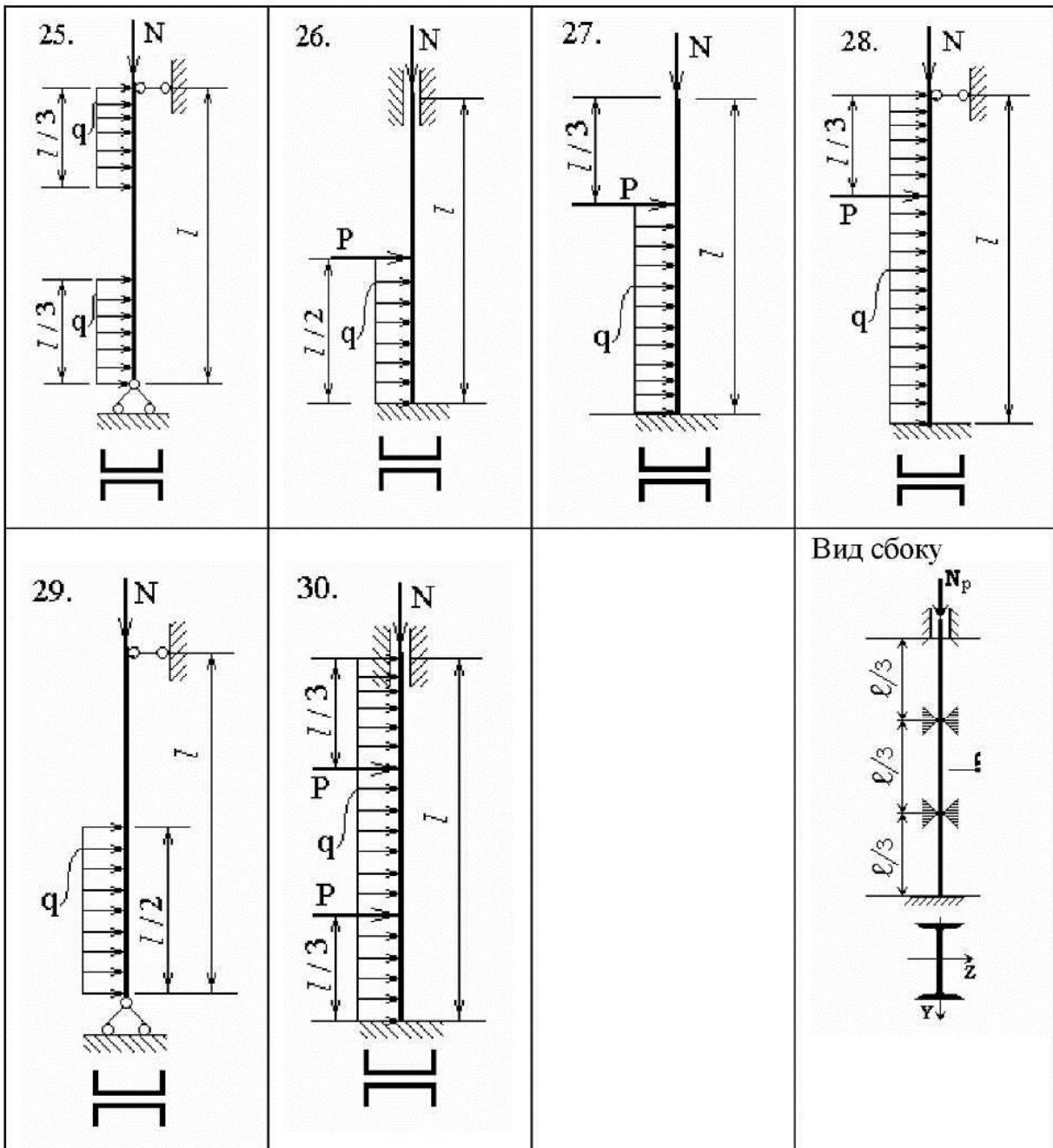
Второе число шифра	$\ell$ м	N кН	q кН/м	P кН
1	6,0	280	10	22
2	6,3	220	8	17
3	6,6	200	6	15
4	5,7	300	12	16
5	4,8	250	15	20
6	5,0	450	14	18
7	5,4	320	16	14
8	5,8	270	18	12
9	4,6	310	20	10
10	6,2	340	9	15

Схемы стоек  
(первое число шифра)







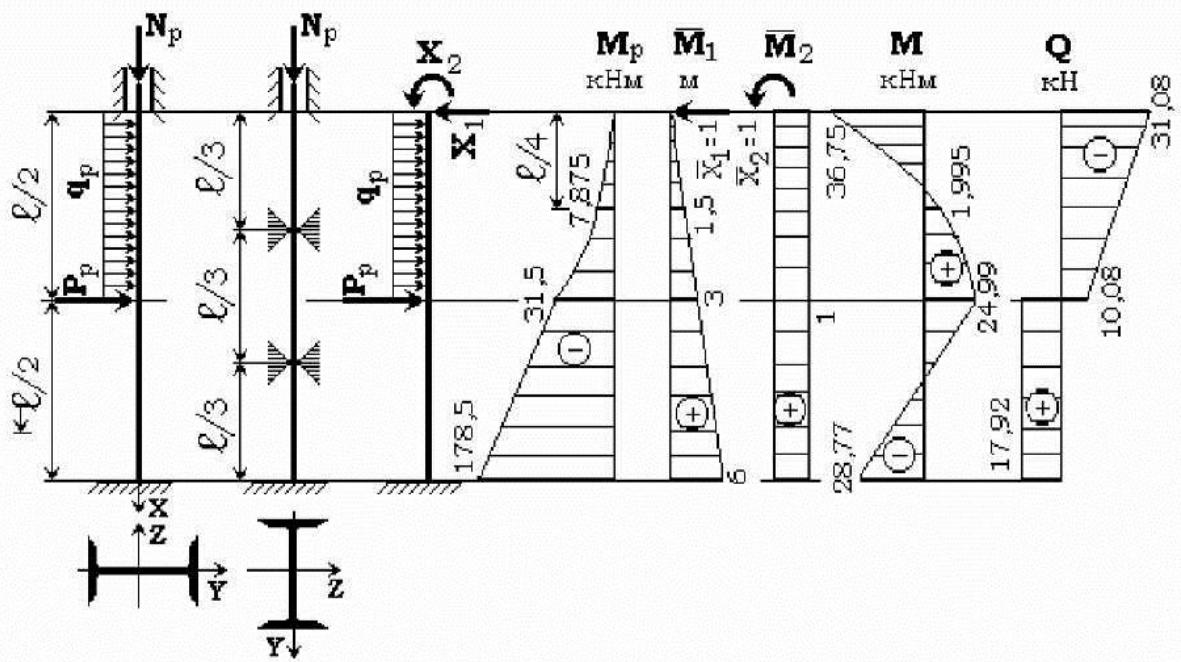


### Пример решения задачи

Исходные данные

Второе число шифра	ℓ м	N кН	q кН/м	P кН	Форма сечения
1	6,0	200	5	20	Двутавр

### Схема стойки и эпюры



### Решение

#### 1. Подбор сечения стойки

А. Определяем расчетные нагрузки

$$N_p = \frac{1}{3} N \cdot n_1 + \frac{2}{3} N \cdot n_2 = \frac{1}{3} 200 \cdot 1,1 + \frac{2}{3} 200 \cdot 1,4 = 260 \text{ кН},$$

$$q_p = q n_2 = 5 \cdot 1,4 = 7 \text{ кН}, \quad P_p = P \cdot n_2 = 20 \cdot 1,4 = 28 \text{ кН}.$$

Б. Строим эпюры изгибающих моментов от расчетной поперечной нагрузки. Поскольку задача статически неопределенна, предварительно необходимо раскрыть статическую неопределенность. Для этого воспользуемся методом сил. Выбираем основную систему и строим эпюру изгибающих моментов

1 участок  $x \in (0; 0,5\ell) = x \in (0; 3)$ ,

$$M_{pl} = -\frac{q_p x^2}{2} = -\frac{7x^2}{2} = -3,5x^2, \quad M_{pl}(0) = 0, \quad M_{pl}(3) = -3,5 \cdot 3^2 = -31,5 \text{ кНм},$$

$$M_{pl}(1,5) = -3,5 \cdot 1,5^2 = -7,875 \text{ кНм}.$$

2 участок  $x \in (0,5\ell; \ell) = x \in (0; 3)$ ,

$$M_{p2} = -q_p \frac{\ell}{2} \left( x + \frac{\ell}{4} \right) - P_p x = -7 \frac{6}{2} \left( x + \frac{6}{4} \right) - 28x = -21(x + 1.5) - 28x,$$

$$M_{p2}(0) = -21 \cdot 1.5 = -31.5 \text{ кНм}, \quad M_{p2}(3) = -21 \cdot (3 + 1.5) - 28 \cdot 3 = -178.5 \text{ кНм}.$$

Строим эпюры моментов от единичной силы  $\bar{X}_1 = 1$  и единичного момента  $\bar{X}_2 = 1$   $x \in (0; \ell) = x \in (0; 6)$ ,

$$\bar{M}_1 = 1 \cdot x, \quad \bar{M}_1(0) = 0, \quad \bar{M}_1(1.5) = 1.5 \text{ м}, \quad \bar{M}_1(3) = 3 \text{ м}, \quad \bar{M}_1(6) = 6 \text{ м}, \quad \bar{M}_2 = 1.$$

Составляем систему канонических уравнений метода сил

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{array} \right\}$$

и вычисляем коэффициенты от единичных нагрузок по формуле Верещагина

$$\delta_{11} = \frac{\omega M_0^c}{EJ} = \frac{6 \cdot 6}{2} \frac{2}{3} 6 = \frac{72}{EJ}, \quad \delta_{12} = \frac{\omega M_0^c}{EJ} = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 1 = \frac{18}{EJ},$$

$\delta_{22} = \frac{\omega M_0^c}{EJ} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 1}{EJ} = \frac{6}{EJ}$ . Грузовые коэффициенты определяем на первом участке по формуле Симпсона, на втором по формуле трапеций

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \frac{\ell_1}{6EJ} [M_{p1}(3) \cdot \bar{M}_1(3) + 4M_{p1}(1.5) \cdot \bar{M}_1(1.5) + M_{p1}(0) \cdot \bar{M}_1(0)] + \\ &+ \frac{\ell_2}{6EJ} [2M_{p2}(3) \cdot \bar{M}_1(3) + 2M_{p2}(0) \cdot \bar{M}_1(0) + M_{p2}(3) \cdot \bar{M}_1(0) + M_{p2}(0) \cdot \bar{M}_1(3)] = \\ &= \frac{3}{6EJ} [-31.5 \cdot 3 + 4 \cdot (-7.875) \cdot 1.5 + 0] + \frac{3}{6EJ} [2(-178.5) \cdot 6 + 2(-31.5) \cdot 3 + (-178.5) \cdot 3 + (-31.5) \cdot 6] = \\ &= -\frac{70.88}{EJ} - \frac{1528}{EJ} = -\frac{1599}{EJ} \\ \Delta_{2p} &= \frac{\ell_1}{6EJ} [M_{p1}(3) \cdot \bar{M}_2 + 4M_{p1}(1.5) \cdot \bar{M}_2 + M_{p1}(0) \cdot \bar{M}_2] + \\ &+ \frac{\ell_2}{6EJ} [2M_{p2}(3) \cdot \bar{M}_2 + 2M_{p2}(0) \cdot \bar{M}_2 + M_{p2}(3) \cdot \bar{M}_2 + M_{p2}(0) \cdot \bar{M}_2] = \\ &= \frac{3}{6EJ} [-31.5 \cdot 1 + 4 \cdot (-7.875) \cdot 1 + 0] + \frac{3}{6EJ} [2(-178.5) \cdot 1 + 2(-31.5) \cdot 1 + (-178.5) \cdot 1 + (-31.5) \cdot 1] = \\ &= -\frac{31.5}{EJ} - \frac{315}{EJ} = -\frac{346.5}{EJ}. \end{aligned}$$

Подставляем вычисленные коэффициенты в канонические уравнения

$$\left. \begin{array}{l} \frac{72}{EJ}X_1 + \frac{18}{EJ}X_2 - \frac{1599}{EJ} = 0 \\ \frac{18}{EJ}X_1 + \frac{6}{EJ}X_2 - \frac{346.5}{EJ} = 0 \end{array} \right\}$$

Решение системы уравнений даст  $X_1 = 31,08 \text{ кН}$ ,  $X_2 = -36,75 \text{ кНм}$ .

Прикладываем к основной системе полученные значения опорных реакций и строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

1 участок  $x \in (0; 0,5\ell) = x \in (0; 3)$ ,

$$M_{p1} = -\frac{q_p x^2}{2} + X_1 \cdot x + X_2 = -\frac{7x^2}{2} + 31,08x - 36,75 = -3,5x^2 + 31,08x - 36,75,$$

$$M_{p1}(0) = -36,75 \text{ кНм}, \quad M_{p1}(3) = -3,5 \cdot 3^2 + 31,08 \cdot 3 - 36,75 = 24,99 \text{ кНм},$$

$$M_{p1}(1,5) = -3,5 \cdot 1,5^2 + 31,08 \cdot 1,5 - 36,75 = 1,995 \text{ кНм},$$

$$Q_{p1} = q_p x - X_1 = 7x - 31,08, \quad Q_{p1}(0) = -31,08 \text{ кН}, \quad Q_{p1}(3) = 7 \cdot 3 - 31,08 = -10,08 \text{ кН}.$$

2 участок  $x \in (0,5\ell; 3) = x \in (0; 3)$ ,

$$M_{p2} = -q_p \frac{\ell}{2} \left( x + \frac{\ell}{4} \right) - P_p x + X_1(x+3) + X_2 = -7 \frac{6}{2} \left( x + \frac{6}{4} \right) - 28x + 31,08(x+3) - 36,75 = -21(x+1,5) - 28x + 31,08(x+3) - 36,75,$$

$$M_{p2}(0) = -21 \cdot 1,5 + 31,08 \cdot 3 - 36,75 = 24,99 \text{ кНм},$$

$$M_{p2}(3) = -21(3+1,5) - 28 \cdot 3 + 31,08(3+3) - 36,75 = -28,77 \text{ кНм},$$

$$Q_{p2} = q_p \frac{\ell}{2} + P_p - X_1 = 7 \frac{6}{2} + 28 - 31,08 = 17,92 \text{ кН}.$$

По результатам вычислений строим эпюры  $M$  и  $Q$ .

2. Подбираем сечение стойки по методу предельных состояний. Для этого используем расчетную формулу первого предельного состояния

$\sigma = \frac{|M_p|_{\max}}{W} \leq R$ , где  $|M_p|_{\max} = 36,75 \text{ кНм}$ ,  $R$  – расчетное сопротивление материала стойки, которое определяется по формуле

$$R = \frac{m \cdot R^H}{\gamma_m} = \frac{0.85 \cdot 240}{1,1} = 185,5 \text{ МПа}.$$

Определяем требуемый момент сопротивления балки

$$W \geq \frac{|M_p|_{\max}}{R} = \frac{36,75 \cdot 10^{-3}}{185,5} = 0,1981 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 198,1 \text{ см}^3.$$

По сортаменту стального проката выбираем номер двутавра с ближайшим большим значением

момента сопротивления. Таковым является двутавр №22 с моментом сопротивления  $W = 232 \text{ см}^3$ . Однако, учитывая неблагоприятное влияние продольной силы, берем следующий больший №24 и выписываем его геометрические характеристики:

$$F = 34,8 \text{ см}^2, \quad W = W_z = 289 \text{ см}^3, \quad J_z = 3460 \text{ см}^4, \\ J_y = 198,0 \text{ см}^4, \quad i_z = 9,97 \text{ см}, \quad i_y = 2,37 \text{ см}.$$

3. Проверим подобранные сечения на устойчивость в двух главных плоскостях

А. В плоскости xy.

Коэффициент приведения длины равен  $\mu = 0,5$ . Определяем гибкость

$$\text{стойки в этой плоскости } \lambda_y = \frac{\ell_{\text{пр}}}{i_z} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_z} = \frac{0,5 \cdot 600}{9,97} = 30,09. \text{ Из таблицы ко-}$$

эффициентов продольного изгиба выписываем  $\lambda = 30, \phi = 0,94, \lambda = 40, \phi = 0,92$  и с помощью линейной интерполяции находим

$$\phi = \phi(30,09) = 0,94 - \frac{0,94 - 0,92}{10} 0,09 = 0,9398. \text{ Определяем допускаемую силу}$$

$$P_{\text{доп}} = \phi \cdot F \cdot R = 0,9398 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4} \cdot 185,5 \cdot 10^3 = 606,7 \text{ кН. Поскольку } P_{\text{доп}} = 606,7 \text{ кН} > N_p = 260 \text{ кН, жесткость обеспечена.}$$

Б. В плоскости xz.

Коэффициент приведения длины равен  $\mu = 1$ . Расчетная приведенная длина равна  $\ell/3$ . Определяем гибкость стойки в этой плоскости

$$\lambda_z = \frac{\ell_{\text{пр}}}{i_y} = \frac{\mu \cdot \ell}{3 \cdot i_y} = \frac{1 \cdot 600}{3 \cdot 2,37} = 84,39. \text{ Из таблицы коэффициентов продольного}$$

изгиба выписываем  $\lambda = 80, \phi = 0,75, \lambda = 90, \phi = 0,69$  и с помощью линейной интерполяции находим

$$\phi = \phi(84,39) = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{10} 4,39 = 0,7237. \text{ Определяем допускаемую силу}$$

$$P_{\text{доп}} = \phi \cdot F \cdot R = 0,7237 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4} \cdot 185,5 \cdot 10^3 = 467,2 \text{ кН.}$$

Поскольку  $P_{\text{доп}} = 467,2 \text{ кН} > N_p = 260 \text{ кН, жесткость обеспечена.}$

4. Рассчитаем стойку на продольно-поперечный изгиб и проверим максимальное напряжение в том сечении, где прогиб имеет максимальное значение.

А. Ограничимся определением прогиба в середине пролета, поскольку он будет близок к максимальному прогибу. Для этого воспользуемся уравнением начальных параметров

$$y = y_0 + \phi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} + \frac{P_p (x - 0,5\ell)^3}{3! EJ} + \frac{q_p (x - 0,5\ell)^4}{4! EJ},$$

Начальные параметры равны  
 $y_0 = 0, \quad \phi_0 = 0, \quad M_0 = -28,77 \text{ кНм}, \quad Q_0 = 17,92 \text{ кН}.$

Подставляем начальные параметры, нагрузки и геометрические размеры в исходное уравнение

$$y = \frac{28,77 x^2}{2! EJ} - \frac{17,92 x^3}{3! EJ} + \frac{28(x - 0,5 \cdot 6)^3}{3! EJ} + \frac{7(x - 0,5 \cdot 6)^4}{4! EJ}$$

и находим максимальный прогиб

$$y_{\max} \approx y\left(\frac{\ell}{2}\right) = y(3) = \frac{28,77 \cdot 3^2}{2! EJ} - \frac{17,92 \cdot 3^3}{3! EJ} = \frac{48,86}{EJ} = \frac{48,86}{6920} = 0,007061 \text{ м} = 0,7061 \text{ см},$$

где  $EJ = EJ_z = 200 \cdot 10^6 \cdot 3460 \cdot 10^{-8} = 6920 \text{ кНм}^2$ .

Б. Определяем критическую силу, соответствующую потере устойчивости в плоскости xy  $P_{kp} = \frac{\pi^2 E J_z}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 6920}{(0,5 \cdot 6)^2} = 7581 \text{ кН}$  и вычисляем прогиб в середине пролета от совместного действия продольной и поперечной нагрузок  $f = \frac{y_{\max}}{1 - \frac{N_p}{P_{kp}}} = \frac{0,7061}{1 - \frac{260}{7581}} = 0,7312 \text{ см}$ .

$$\frac{y_{\max}}{1 - \frac{N_p}{P_{kp}}} = \frac{0,7061}{1 - \frac{260}{7581}} = 0,7312 \text{ см.}$$

Вычисляем максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{N_p}{F} + \frac{N_p \cdot f + M_p}{W_z} = \frac{260 \cdot 10^{-3}}{34,8 \cdot 10^{-4}} + \frac{260 \cdot 10^{-3} \cdot 0,7312 \cdot 10^{-2} + 24,99 \cdot 10^{-3}}{289 \cdot 10^{-6}} = 74,71 + 93,05 = 167,8 \text{ МПа.}$$

Поскольку  $\sigma_{\max} < R \Leftrightarrow 167,8 \text{ МПа} < 185,5 \text{ МПа}$ . прочность обеспечена.

Если последнее условие не выполнено, то необходимо изменить номер профиля на следующий больший и повторить расчеты, проведенные в пункте 4.

### Контрольные вопросы к защите расчетно-проектировочной работы №6

1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
2. Какая сила называется критической?
3. В каких пределах применима формула Эйлера?
4. Что называется гибкостью стержня?

5. Что такое приведенная длина и от чего она зависит?
6. Как производится подбор сечения стойки при продольно-поперечном изгибе?
7. Как производится проверка устойчивости стойки?
8. Как производится проверка прочности при продольно-поперечном изгибе?

## **СОДЕРЖАНИЕ**

Общие указания по выполнению расчётно-проектировочных работ	3
Расчётно-проектировочная работа №4. Расчеты на прочность и жесткость при изгибе	5
Задание на расчетно-проектировочную работу №4	7
Контрольные вопросы к защите расчетно-проектировочной работы №4	16
Расчётно-проектировочная работа №5. Внеклассическое сжатие короткого стержня	17
Задание на расчетно-проектировочную работу №5	19
Контрольные вопросы к защите расчетно-проектировочной работы №5	29
Расчётно-проектировочная работа №6. Расчет стойки на прочность и устойчивость при продольно-поперечном изгибе	30
Задание на расчетно-проектировочную работу №6	32
Контрольные вопросы к защите расчетно-проектировочной работы №6	41