

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Методические указания к расчетно-графической работе

Работа имеет цель – закрепление теоретических знаний по определению перемещений в рамных стержневых системах с использованием интеграла Мора и применения их в решении статически неопределимых задач.

Содержатся основные теоретические положения по расчету статически неопределимых рам методом сил. В предложенном числовом примере на рассматриваемой схеме показывается последовательность выполнения задания, даются результаты расчетов и их графическая интерпретация. Пример соответствует содержанию самостоятельных домашних работ, предусмотренных программой курса по дисциплине «Сопротивление материалов», разделом «Статически неопределимые стержневые системы». Приводится список рекомендуемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Определение степени статической неопределимости рамы.....	4
2. Выбор основной системы.....	4
3. Построение эпюр изгибающих моментов в основной системе от действия внешней нагрузки и единичных сил.....	5
4. Канонические уравнения метода сил.....	6
5. Вычисление единичных коэффициентов.....	6
5.1. Определение δ_{ii}	6
5.2. Определение δ_{ij}	7
6. Универсальная проверка единичных перемещений.....	7
7. Определение грузовых перемещений.....	8
8. Универсальная проверка грузовых перемещений.....	8
9. Решение системы канонических уравнений.....	9
10. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов.....	9
11. Деформационная проверка окончательной эпюры изгибающих моментов.....	10
12. Построение эпюр поперечных и продольных сил в статически неопределимой системе.....	11
13. Статическая проверка.....	13
Библиографический список.....	14

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания содержат пример расчета рамы методом сил на внешнюю нагрузку и определение перемещений в заданном сечении с подробными решениями и пояснениями теоретических положений, которые излагаются в курсе сопротивления материалов в разделе «Статически неопределимые стержневые системы».

1. Определение степени статической неопределимости рамы

Пример расчета дан по схеме статически неопределимой рамы (рис. 1) с размерами отдельных элементов и силовым нагружением. Жесткости стержней приняты постоянными, равными EJ . Размерности сил и моментов – кН и кНм, распределенной нагрузки – кН/м, линейные размеры – м.

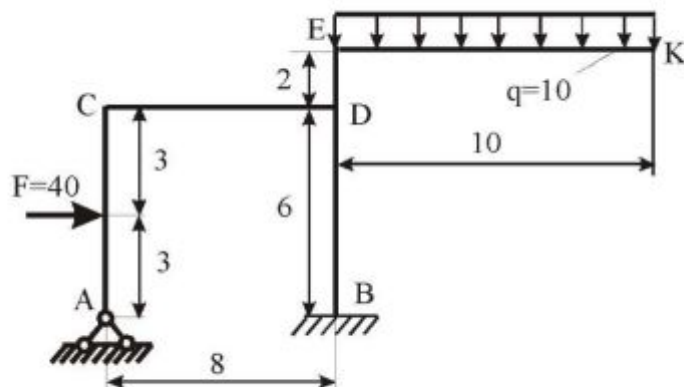


Рис. 1

Степень статической неопределимости данной рамы (см. рис. 1) равна

$$c = 3 \cdot k - u,$$

где k – число замкнутых контуров; u – число одиночных шарниров: шарнир, соединяющий два стержня, считается одиночным, три стержня – двойным и т.д.

Степень статической неопределимости $c = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, так как замкнутые контуры представлены шарнирно-неподвижной опорой A и контуром $ACDB$, а число одиночных шарниров равно 4.

2. Выбор основной системы

Основная система может быть образована отбрасыванием связей в шарнирно-неподвижной опоре A . На рис.2 представлена основная систе-

ма, нагруженная внешними силами. X_1 и X_2 – реакции в отброшенных «лишних» связях, направленные, как правило, по горизонтали и вертикали.

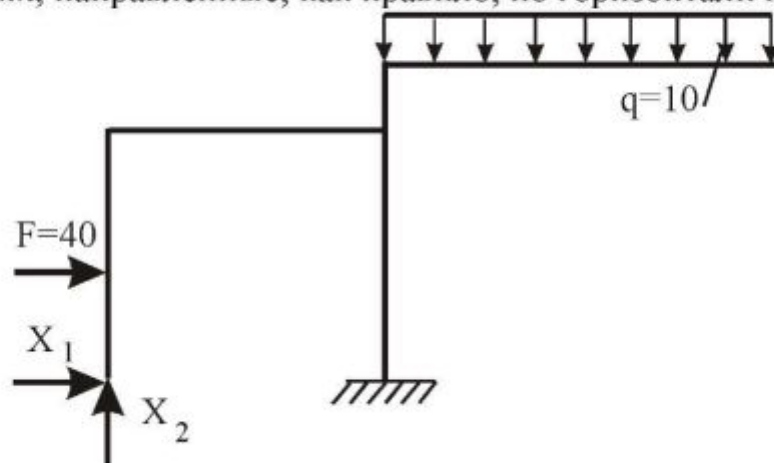


Рис. 2

3. Построение эпюр изгибающих моментов в основной системе от действия внешней нагрузки и единичных сил

На рис. 3, а, б построены единичные эпюры моментов.

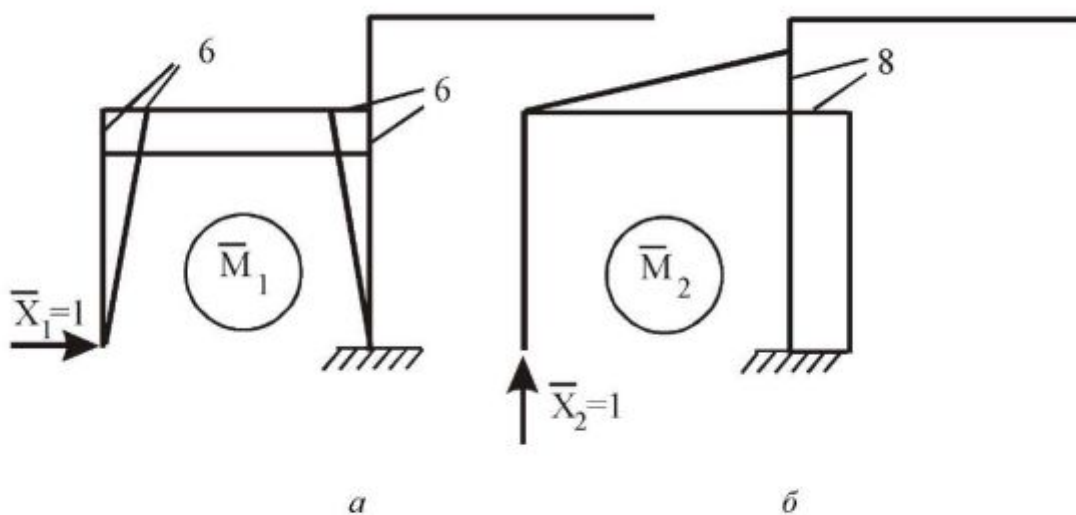


Рис. 3

Грузовые эпюры строят в основной системе.

На рис. 4 построены грузовые эпюры моментов при действии заданной нагрузки (в соответствии с рис. 2) в размерности кНм.

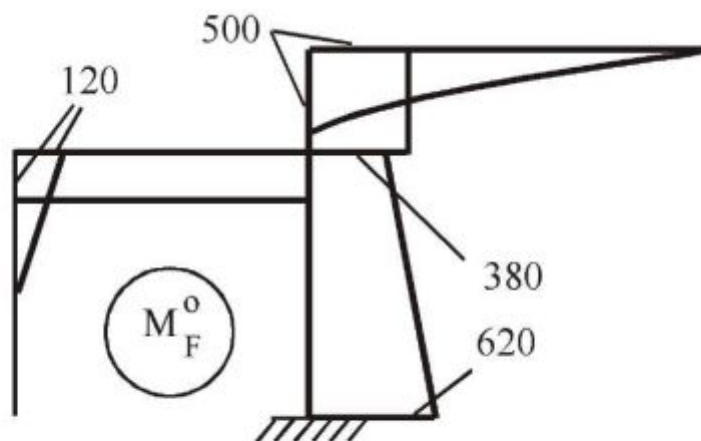


Рис. 4

4. Канонические уравнения метода сил

Канонические уравнения метода сил для дважды статически неопределимой рамы имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где δ_{ij} – единичные перемещения, первый индекс i показывает направление, второй индекс j – причину (например, δ_{12} – перемещение по направлению $\bar{X}_1 = 1$ от силы $\bar{X}_2 = 1$); Δ_{iF} – грузовые перемещения.

5. Вычисление единичных перемещений

5.1. Определение δ_{ii}

δ_{ii} определяются перемножением единичных эпюр самих на себя по правилу Верещагина (см. рис. 3, а, б):

$$\delta_{ii} = \int_l \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_i}{EJ} \cdot dx \approx \Sigma \bar{\omega}_i \cdot \bar{y}_i / EJ,$$

где $\bar{\omega}_i$ – площадь единичной эпюры изгибающих моментов на i -м участке; $\bar{y}_i$ – ордината, взятая на эпюре $\bar{M}_i$ под центром тяжести.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 + 6 \cdot 8 \cdot 6 + \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 \right) = 432 / EJ;$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} 8 + 6 \cdot 8 \cdot 8 \right) = 554,66 / EJ.$$

5.2. Определение δ_{ij} ($i \neq j$)

δ_{ij} определяются по формуле Мора с использованием правила Верещагина – взаимного перемножения единичных эпюр (см. рис. 3, а, б) :

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j}{EJ} \cdot dx \approx \frac{\Sigma \overline{\omega}_i \cdot \overline{y}_j}{EJ} ,$$

где $\overline{\omega}_i$ – площадь участка единичной эпюры $\overline{M}_i$ (см. рис. 3, а); $\overline{y}_j$ – ордината, взятая на эпюре $\overline{M}_j$ (см. рис. 3, б) под центром тяжести площади участка эпюры $\overline{M}_i$. Суммирование производится по участкам. Коэффициенты побочной диагонали равны

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} 8 \cdot 8 \cdot 6 - \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot 8 \right) = -336 / EJ .$$

6. Универсальная проверка единичных перемещений

Определим сумму единичных перемещений (с учетом знаков), равную

$$\delta_{Si} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = 314,66 / EJ .$$

Сложив, учитывая знаки, соответствующие ординате эпюр $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ (см. рис. 3, а, б), получим суммарную единичную эпюру $\overline{M}_S$.

Данная операция необходима для проверки правильности вычисления единичных перемещений. Она заключается в равенстве суммы единичных перемещений и суммарных единичных перемещений $\delta_{Si} = \Sigma \delta_{i,j}$.

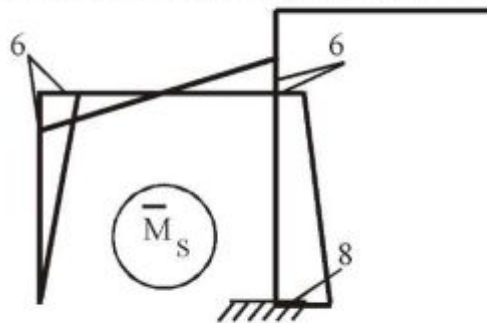


Рис. 5

Для этого перемножим эпюру $\overline{M}_S$ сама на себя по правилу Верещагина (рис. 5).

$$\begin{aligned} \delta_{Si} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 + \frac{8}{6} (2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 2 - 6 \cdot 2) + \right. \\ &\left. + \frac{6}{6} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 8) \right] = \frac{1}{EJ} (72 + 74,66 + 168) = 314,66 / EJ . \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты определены правильно.

7. Определение грузовых перемещений

Грузовые перемещения определяют путем перемножения эпюр M_F на $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ соответственно (см. рис. 3, а, б и 4).

$$\Delta_{iF} = \int_l \frac{\overline{M}_F^o \cdot \overline{M}_i}{EJ} \cdot dx \approx \Sigma \omega_F \cdot \overline{y}_i / EJ ;$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 120 \cdot 6 + 3 \cdot 120) + 120 \cdot 8 \cdot 6 - \frac{6}{6} (2 \cdot 380 \cdot 6 + 620 \cdot 6) \right] =$$

$$= (900 + 5760 - 8280) / EJ = -1622 / EJ ;$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} 8 \cdot 8 \cdot 120 + \frac{380 + 620}{2} \cdot 6 \cdot 8 \right) = 20160 / EJ .$$

8. Универсальная проверка грузовых перемещений

Перемножим эпюру M_F^o (см. рис. 4) на эпюру $\overline{M}_S$ (см. рис. 5)

$$\Delta_{sF} = \int_l \frac{M_F^o \cdot \overline{M}_s}{EJ} \cdot dx \approx \Sigma \omega_F \cdot \overline{y}_s / EJ ,$$

где ω_{iF} – площадь участка грузовой эпюры M_F ; $\overline{y}_s$ – ордината эпюры $\overline{M}_s$ под центром тяжести участка эпюры M_F . Вычисления дают по участкам.

Оценка правильности определения грузовых перемещений производится по условию: алгебраическая сумма грузовых перемещений должна быть равна сумме грузовых перемещений по направлениям 1 и 2. Таким образом, перемещение Δ_{sF} под действием внешних сил в направлениях 1 и 2 равно

$$\Sigma \Delta_{sF} = \frac{1}{EJ} \cdot (-1622 + 20160) = \frac{18538}{EJ} .$$

Суммирование по участкам

$$\Delta_{sF} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 6 \cdot 120 + 3 \cdot 120) + \frac{6-2}{2} \cdot 8 \cdot 120 + \frac{6}{6} (2 \cdot 2 \cdot 380 + 2 \cdot 8 \cdot 620 + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot 620 + 8 \cdot 380 \right) = 18540 / EJ .$$

Погрешность не превышает 0,01 %.

9. Решение системы канонических уравнений

Запишем систему алгебраических уравнений согласно формуле (1), сократив на $1/EJ$:

$$\begin{aligned} 432X_1 - 366X_2 - 1622 &= 0; \\ -366X_1 + 554X_2 + 20160 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

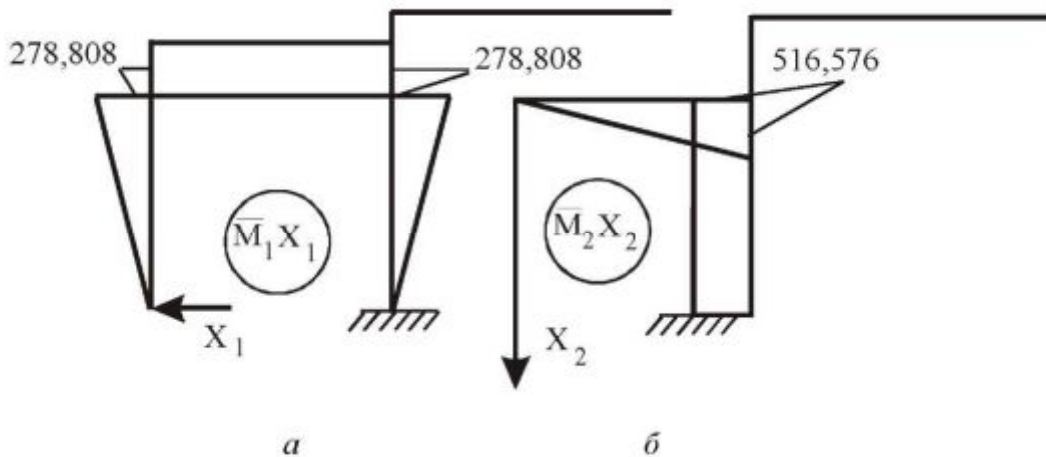


Рис. 6

Решение системы (2) дает $X_1 = -46,468$; $X_2 = -64,572$ кН.

Перемножая ординаты эпюр $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ на X_1 , X_2 (с учетом их знаков), получим эпюры $\bar{M}_1 \cdot X_1$ и $\bar{M}_2 \cdot X_2$. Данные эпюры приведены на рис. 6, а, б.

10. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов

Окончательную эпюру моментов в заданной системе получим просуммировав эпюры M_F^o (см. рис. 4), $\bar{M}_1 \cdot X_1$, $\bar{M}_2 \cdot X_2$ (см. рис. 6, а, б).

$$M_F = M_F^o + \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2.$$

Эпюра M_F показана на рис. 7.

Примечание. Эпюры изгибающих моментов должны быть построены на сжатых волокнах. Сложение ординат эпюр проводят с учетом знака. Знак определяется расположением эпюры относительно стержня на данном участке. Например, знак минус – эпюра на внутренней стороне контура, следовательно знак плюс – эпюра на внешней стороне контура.

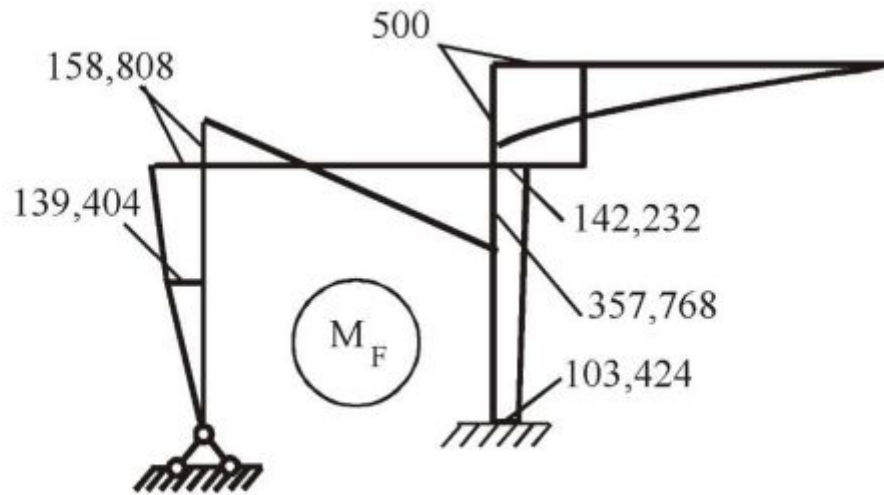


Рис. 7

11. Деформационная проверка окончательной эпюры изгибающих моментов

Задача, решаемая при деформационной проверке, – получение равенства нулю перемещений по выбранным ранее направлениям приложенных сил X_1 и X_2 . Необходимо окончательную эпюру M_F умножить на любую единичную или суммарную единичную:

$$\Delta_1 = \int_l M_F \cdot \bar{M}_1 / EJ = \sum \omega_F \cdot \bar{y}_1 = 0;$$

$$\Delta_2 = \int_l M_F \cdot \bar{M}_2 / EJ = \sum \omega_F \cdot \bar{y}_2 = 0;$$

$$\Delta_S = \int_l M_F \cdot \bar{M}_i / EJ = \sum \omega_F \cdot \bar{y}_S = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} = \frac{1}{EJ} & \left(-\frac{1}{2} 139,404 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 3 - \frac{3}{6} (2 \cdot 158,808 \cdot 6 + 2 \cdot 139,404 \cdot 3 + \right. \\ & + 158,808 \cdot 3 + 139,404 \cdot 6) + \frac{8}{6} (-2 \cdot 158,808 \cdot 6 - 2 \cdot 357,768 \cdot 2 + \\ & + 158,808 \cdot 2 + 357,768 \cdot 6) + \frac{6}{6} (2 \cdot 103,424 \cdot 8 + 2 \cdot 142,232 \cdot 2 + \\ & + 142,232 \cdot 8 + 103,424 \cdot 2) = \frac{1}{EJ} (-418,212 - 2027,484 - 1163,392 + \\ & + 3568,416) = -40,672 / EJ. \end{aligned}$$

Погрешность составляет

$$\Delta = -40,672 / (-418,212 - 2027,484 - 1163,392) = 1,12 \, \%.$$

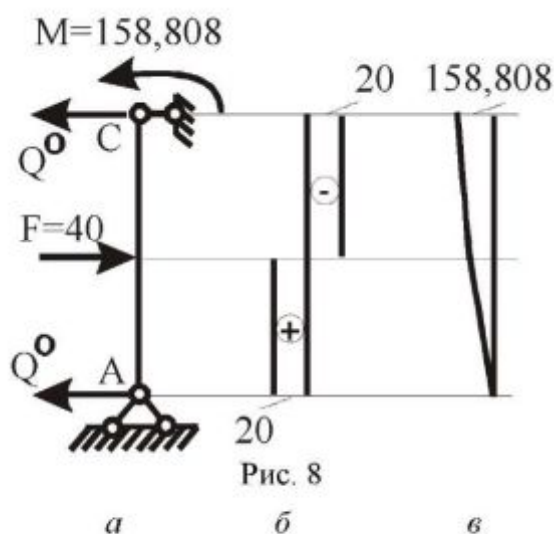
12. Построение эпюр поперечных и продольных сил в статически неопределимой системе

Дифференцированием окончательной эпюры M_F вычисляем значения эпюр поперечных сил Q . Эпюру Q вычисляем по формуле

$$Q = Q^o + \frac{M_{np} - M_{лев}}{d},$$

где Q^o – поперечная сила в сечении простой балки от заданной нагрузки; M_{np} и $M_{лев}$ – опорные моменты на левом и правом концах участка; d – длина участка. Например, для участка AC (рис. 8, *а*) $Q^o = 20$ кН, т.к. горизонтальная нагрузка, равная $F = 40$ кН, приложена в середине. Момент $M = 158,808$ кНм взят с окончательной эпюры M_F (см. рис. 7). Тогда с учетом знака Q^o

$$Q_{AC} = 20 + \frac{158,808 - 0}{6} = 46,468; \quad Q_{CA} = -20 + \frac{158,808 - 0}{6} = 6,468 \text{ кН.}$$



На рис.8, *б* – эпюра поперечных сил от нагрузки $F = 40$.

На рис. 8, *в* – эпюра момента на участке AC от M_F в узле C .

На рис. 9 показана эпюра поперечных сил в размерности кН.

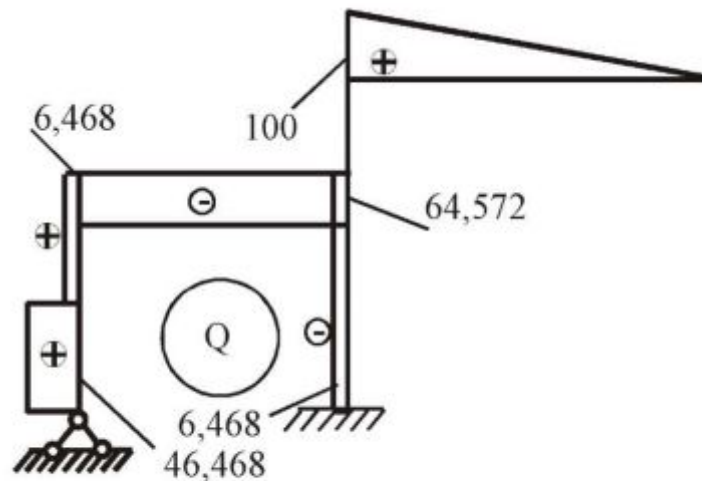


Рис. 9

Примечание. Положительные значения эпюры Q откладываются на внешних сторонах стержней рамы при условии расположения наблюдателя внутри рассматриваемого контура. Для данной рамы контуры обозначены буквами: первый контур – A, B, C, D ; второй контур – B, D, E, K .

Продольные силы в стержнях определяют из условия равновесия узлов.

Главный вектор сил в узле равен нулю $\bar{R} = (\bar{N} + \bar{Q} = 0)$ при отсутствии внешней силы в узле. При наличии сосредоточенной силы в узле условие равновесия имеет вид $\bar{R} = (\bar{N} + \bar{Q} + \bar{F} = 0)$. В соответствии с этим построим эпюру продольных сил N . На рис. 10, $a, б, в$ даны расчетные схемы узлов C, E, D .

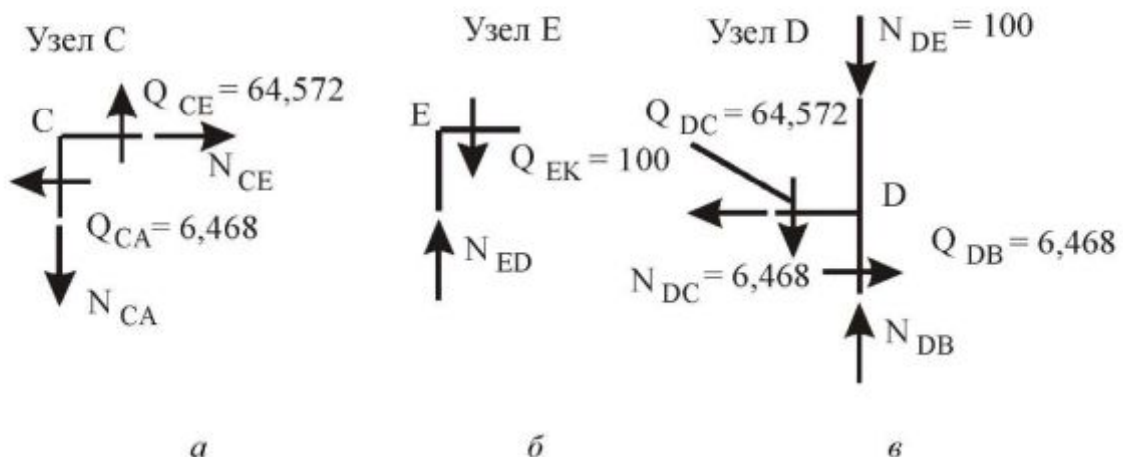


Рис. 10

Узел C (рис. 10, a). Сумма проекций сил на горизонтальную ось X – $N_{CE} = Q_{CA} = 6,468$ кН. Сумма проекций сил на вертикальную ось Y – $N_{CA} = Q_{CE} = 64,572$ кН.

Узел E (рис. 10, б). $\sum Y = 0 \quad N_{ED} = Q_{EK} = 100 \text{ кН}$.

Узел D (рис. 10, в).

$$\sum Y = 0 \quad N_{DB} = Q_{DC} + N_{DE} = 64,572 + 100 = 164,572 \text{ кН}.$$

На рис. 11 приведена эпюра продольных сил в размерности кН.

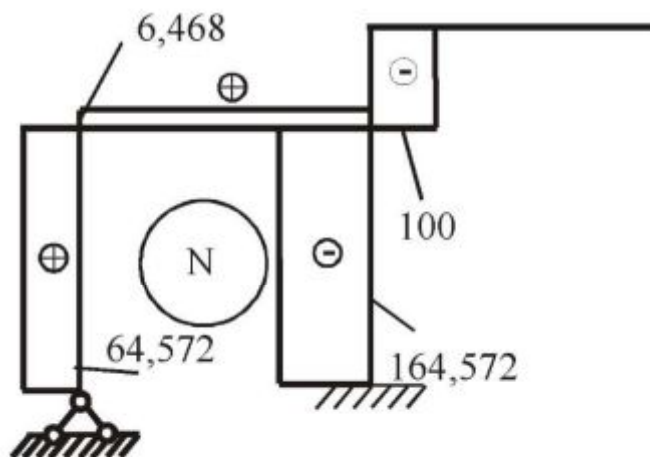


Рис. 11

Примечание. Рассмотрим равновесие узла C (см. рис. 10, а). В узел входят стержни AC и CE . Согласно эпюре Q с учетом правила знаков для поперечных сил укажем направления их. $Q_{CA} = 6,468$ направлена по часовой стрелке вокруг узла: (знак (+)); $Q_{CE} = -64,572$ – против часовой стрелки (знак (-)). Следовательно, при проецировании сил на горизонтальную ось продольная сила $N_{CE} = 6,468$ стержня CE должна быть растягивающей. Сила $N_{CA} = 64,572$ получена из условия равновесия при проецировании на вертикальную ось. Остальные узлы рассмотрены аналогично узлу C .

13. Статическая проверка

Сумма проекций всех сил (внешних и реакций связей) на любую ось равна нулю.

Сумма моментов всех сил (внешних и реакций связей) относительно любой точки рамы равна нулю.

На рис. 12 дана схема статически определимой рамы с указанием сил и моментов.

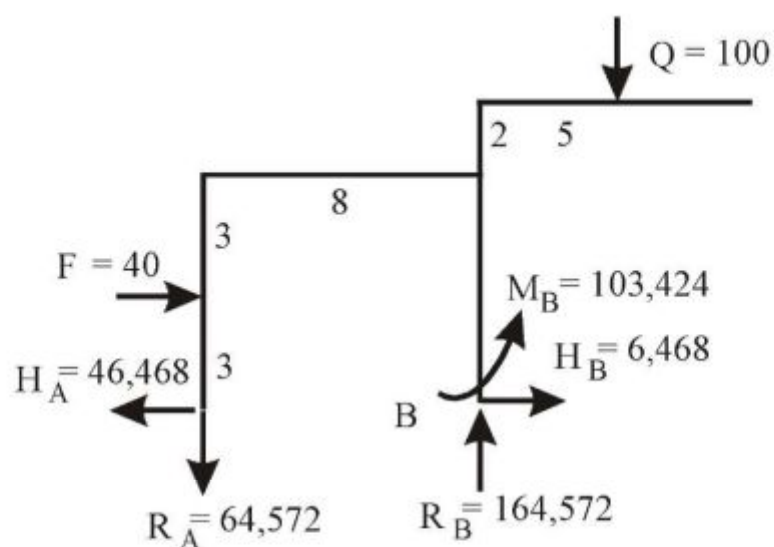


Рис. 12

Сумма проекций сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = -R_A + R_B - F = 64,572 + 164,572 - 100 = 0.$$

Сумма проекций сил на горизонтальную ось:

$$\sum X = -H_A + F + H_B = -46,468 + 40 + 6,468 = 0.$$

Уравнение моментов вокруг точки B:

$$\sum m_B = 0, Q \cdot 5 + F \cdot 3 - R_A \cdot 8 - M_B = 100 \cdot 5 + 40 \cdot 3 - 64,572 \cdot 8 - 103,424 = 0.$$

Библиографический список

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2000. – 560 с.
2. Сопротивление материалов/ Под ред. А.Ф. Смирнова: Учеб. для вузов. – 3-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1975.
3. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища шк., 1986.