ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
ЧАСТЬ 1

Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения строительных специальностей

В предлагаемых методических указаниях приведены примеры решения контрольных работ, выполняемых студентами-заочниками всех строительных специальностей в 6 и 7 семестрах при изучении общего курса сопротивления материалов. Примеры, представленные в данной работе, полностью соответствуют контрольным заданиям для студентов заочной формы обучения всех строительных специальностей.

ЗАДАЧА № 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка, или из двутавра и равнобокого уголка, или из швеллера и двутавра, требуется:

1) определить положение центра тяжести;
2) найти осевые и центробежный моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести сечения (z_c и y_c);
3) определить направление главных центральных осей (u и v);
4) Найти моменты инерции относительно главных центральных осей;
5) Вычертить сечение в масштабе и указать на нем все размеры в числах и все оси.

Исходные данные для решения задачи: составное сечение состоит из швеллера № 16; равнобокого уголка 90×90×6. Сечение показано на рис. 1.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим первый элемент сечения швеллер № 16 (ГОСТ 8240-72). Площадь поперечного сечения A_1 18,1 см^2. Величина смещения главных осей элемента от внешней грани полки x_{01} −1,80 см. Осевые моменты инерции первого элемента равны: J_{x1} – 747 см^4, J_{y1} – 63,3 см^4. Центробежный момент: D_{y1x1} – 0.

Рассмотрим второй элемент сечения равнобокий уголок 90×90×6 (ГОСТ 8509-72). Площадь сечения второго элемента A_2–10,6 см^2. Моменты инерции этого элемента относительно центральных осей в соответствии с сортаментом прокатной стали равны: J_{y2} J_{x2} 82,1 см^4 ; J_{max} 130 см^4; J_{min} – 34 см^4. Величина смещения главных осей элемента от внешних граней полки x_{02} –y_{02} –2,43 см. Центробежный момент инерции равнополочного уголка:

$$D_{x2y2} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} Sin2\theta = \frac{130-34}{2} Sin\left(-2\cdot 45^\circ\right) = -48\,\text{см}^4.$$

Выбираем вспомогательную систему прямоугольных декартовых координат, проводя оси ξ и η через центр тяжести одного из элементов сечения таким образом, чтобы они были параллельны осям y_i и x_i. Определяем координаты центров тяжести элементов сечения в новой системе ξ - η

$\eta_1 = 0;$ $\xi_1 = 0;$

$\eta_2 = (2\cdot 9{,}0 - 2{,}43) - 16/2 = 7{,}57$ см; $\xi_2 = -1{,}80 - 2{,}43 = -4{,}23$ см.

Вычисляем координаты положения центра тяжести составного сечения

$$\eta_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \eta_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{0 \times 18{,}1 + 7{,}57 \times 10{,}6}{18{,}1 + 10{,}6} = 2{,}80 \text{ см};$$

$$\xi_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{0 \times 18{,}1 + (-4{,}23) \times 10{,}6}{18{,}1 + 10{,}6} = -1{,}56 \text{ см}.$$

Через точку C, имеющую координаты $\xi_c = -1{,}56$ см и η_c=2,80 см, проводим центральные оси Y и X составного сечения параллельно осям его элементов y_i и x_i .Для проверки правильности определения положения центра тяжести составного сечения воспользуемся свойством центральных осей, которое гласит, что статический момент относительно указанных осей равны нулю. Предварительно вычисляем координаты центров тяжести элементов сечения в системе центральных осей Y и X:

$b_1 = \xi_1 - \xi_c = 0 - (-1{,}56) = 1{,}56$ см; $\quad a_1 = \eta_1 - \eta_c = 0 - 2{,}80 = -2{,}80$ см;

$b_2 = \xi_2 - \xi_c = (-4{,}23) - (-1{,}56) = -2{,}67$ см; $\quad a_2 = \eta_2 - \eta_c = 7{,}57 - 2{,}80 = 4{,}77$ см;

Находим величины статических моментов относительно центральных осей Y и X

$$S_X = A_1 a_1 + A_2 a_2 = 18{,}1 \times (-2{,}80) + 10{,}6 \times 4{,}77 = -50{,}68 + 50{,}562 = -0{,}118 \text{ см}^3.$$

Погрешность вычислений $\frac{0{,}118}{50{,}68} \times 100\% = 0{,}23\%$.

$$S_Y = A_1 b_1 + A_2 b_2 = 18{,}1 \times 1{,}56 + 10{,}6 \times (-2{,}67) = 28{,}236 - 28{,}302 = -0{,}066 \text{ см}^3.$$

Погрешность вычислений $\frac{0{,}066}{28{,}302} \times 100\% = 0{,}23\%$. Погрешность в обоих случаях не превышает 5 % , следовательно, положение центра тяжести составного сечения найдено верно.

Осевые моменты инерции составного поперечного сечения определяются по формулам, учитывающим плоско-паралельное смещение центральных осей его элементов относительно центральных сечения в целом

$$J_Y = \sum_{i=1}^{n} (J_{yi} + b_i^2 A_i) = (J_{y1} + b_1^2 A_1) + (J_{y2} + b_2^2 A_2) =$$
$$= 63{,}3 + 1{,}56^2 \times 18{,}1 + 82{,}1 + (-2{,}67)^2 \times 10{,}6 = 265{,}01 \text{ см}^4;$$

$$J_X = \sum_{i=1}^{n} (J_{xi} + a_i^2 A_i) = (J_{x1} + a_1^2 A_1) + (J_{x2} + a_2^2 A_2) =$$
$$= 747 + (-2{,}8)^2 \times 18{,}1 + 82{,}1 + 4{,}77^2 \times 10{,}6 = 1212{,}18 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции составного сечения относительно осей Y и X с учетом смещения осей его элементов относительно центральных осей составного сечения равен

$$D_{YX} = \sum_{i=1}^{n}(D_{yixi} + a_i b_i A_i) = (D_{y1x1} + a_1 b_1 A_1) + (D_{y2x2} + a_2 b_2 A_2) =$$

$$= 0 + 1{,}56 \times (-2{,}8) \times 18{,}1 - 48 + (-2{,}67) \times 4{,}77 \times 10{,}6 = -262{,}06 \text{ см}^4.$$

Для определения положения главных центральных осей инерции сечения воспользуемся следующей формулой

$$\alpha = 0{,}5\, arctg\left(\frac{2\, D_{YX}}{J_Y - J_X}\right) = 0{,}5\, arctg\left(\frac{2 \times (-262{,}06)}{265{,}01 - 1212{,}18}\right) = 14{,}48^o.$$

Угол поворота центральных осей Y и X до положения главных центральных осей V и U имеет положительный знак, следовательно, поворот осей осуществляется против часовой стрелки.

Находим величину главных центральных моментов инерции составного сечения, используя следующую формулу

$$J_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{J_Y + J_X}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_Y - J_X)^2 + 4D_{YX}^2};$$

$$J_{\max} = J_V = \frac{265{,}01 + 1212{,}18}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(265{,}01 - 1212{,}18)^2 + 4 \times (-262{,}06)^2} =$$

$$= 738{,}60 + 541{,}26 = 1279{,}86 \text{ см}^4;$$

$$J_{\min} = J_U = \frac{265{,}01 + 1212{,}18}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(265{,}01 - 1212{,}18)^2 + 4 \times (-262{,}06)^2} =$$

$$= 738{,}60 - 541{,}26 = 197{,}34 \text{ см}^4.$$

Поверяем правильность вычисления главных моментов инерции сечения. Первая проверка основана на свойстве инвариантности суммы осевых моментов инерции, которое гласит, что сумма осевых моментов инерции при повороте центральных осей не изменяется:

$$J_Y + J_X = J_V + J_U;$$

$$265{,}01 + 1212{,}18 = 1279{,}86 + 197{,}34;$$

$$1477{,}19 \text{ см}^4 \approx 1477{,}20 \text{ см}^4.$$

Вторая проверка основана на следующем свойстве главных центральных осей инерции сечения: центробежный момент инерции относительно главных центральных осей равен:

$$D_{UV} = \frac{J_X - J_Y}{2}\sin 2\alpha + D_{YX}\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{1212{,}18 - 265{,}01}{2} \times Sin\,28{,}96^o + (-262{,}06) \times Cos 28{,}96^o =$$

$$= 229{,}31 - 229{,}29 = 0{,}02\,\text{см}^4 \approx 0,$$

следовательно, величина главных центральных моментов инерции сечения определена верно.

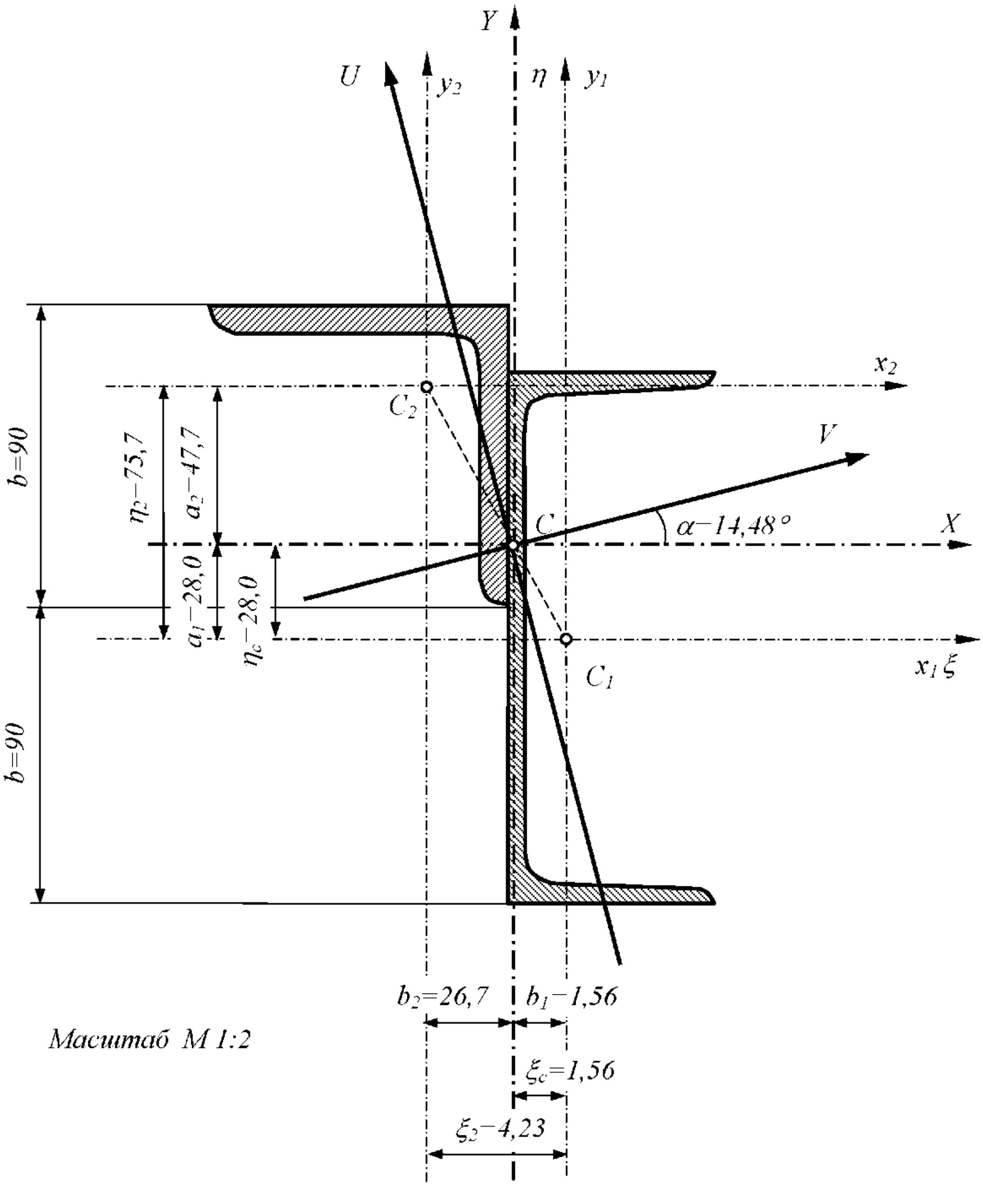


Рисунок 1

ЗАДАЧА № 2

РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ НА ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

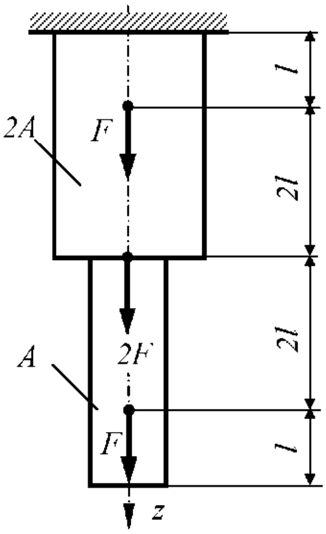


Рисунок 2

Для заданного статически определимого ступенчатого стержня (рис. 2) требуется:

1) построить эпюру продольных сил;
2) из условия прочности подобрать площади поперечных сечений стержня;
3) построить эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня;
4) построить эпюру перемещений.

Исходные данные для решения задачи: материал стержня – сталь; внешние продольные силы – $F = 30$ кН; длины участков стержня – $l = 1$ м; расчетное сопротивление стали при растяжении и сжатии $R = 160$ МПа; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В защемлении в общем случае возникает три реакции связи – вертикальная и горизонтальная опорные реакции и момент защемления. В данном случае стержень нагружен только осевыми силами и поэтому в защемлении возникает только вертикальная опорная реакция V. Величину указанной опорной реакции определим из уравнения статического равновесия:

$$\sum z = 0; \qquad 2F + F + F - V = 0,$$

следовательно,

$$V = 4F = 120\,\text{кН}.$$

Рассматриваемый стержень состоит из пяти участков, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы и места изменения размеров поперечного сечения. Проводим произвольные сечения в пределах каждого участка стержня. Рассматривая верхнюю отсеченную часть, составляем уравнения равновесия оставшейся части, откуда определяем величины продольных сил:

$$\sum z = 0;$$

$$0 \le z_1 \le l; \qquad N_1 = V = 120\,\text{кН};$$

$$l \le z_2 \le 3l; \qquad N_2 = V - F = 120 - 30 = 90\,\text{кН};$$

$$3l \le z_3 \le 5l; \qquad N_3 = V - F - 2F = 30\,\text{кН};$$

$$5l \le x_4 \le 6l; \qquad N_4 = V - F - 2F - F = 0\,\text{кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил N (рис. 3).

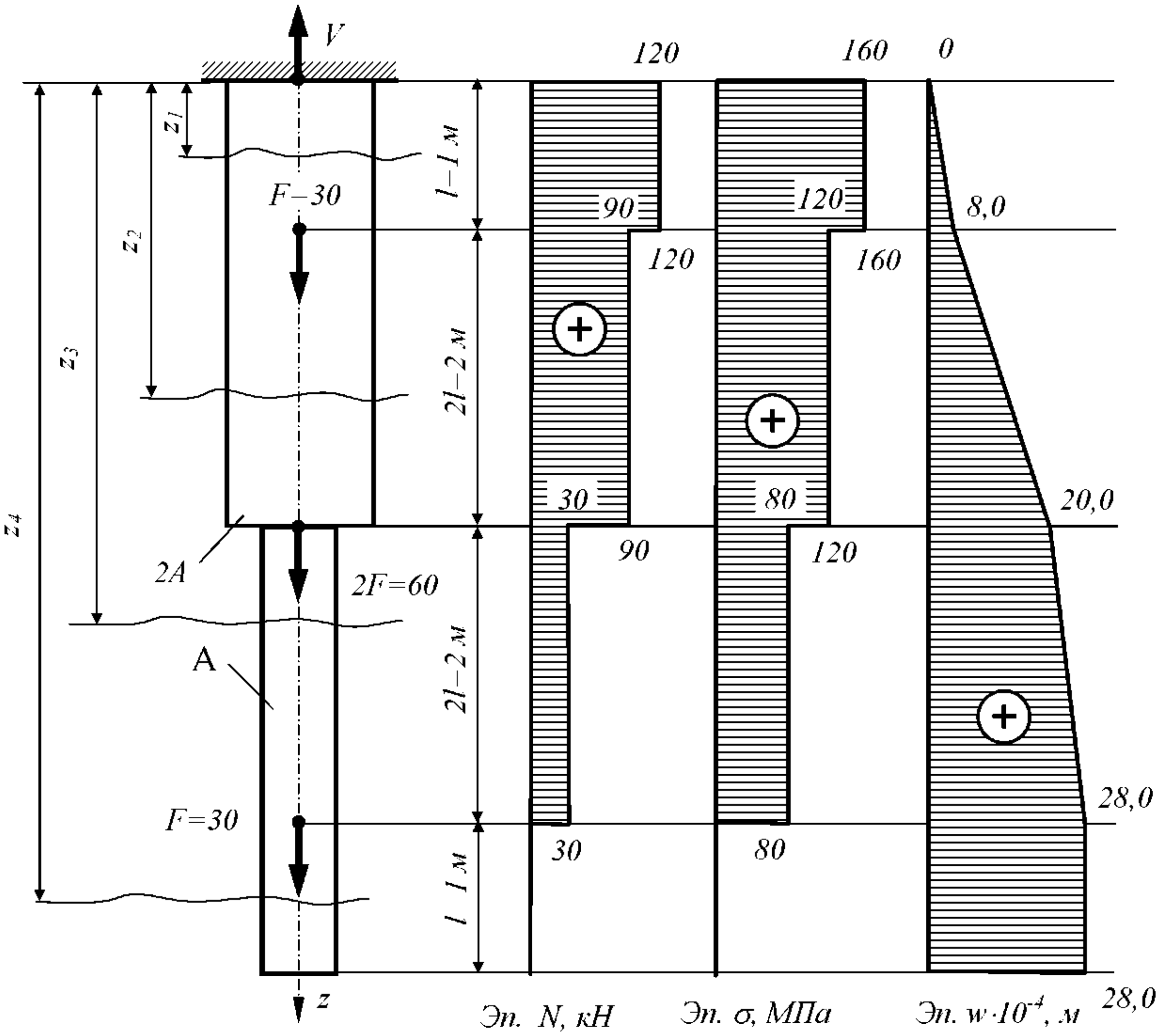


Рисунок 3

Для определения опасного сечения проанализируем напряжения на каждом участке:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{120}{2A} = \frac{60}{A} \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{90}{2A} = \frac{45}{A} \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{30}{A} = \frac{30}{A} \text{МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A} = 0 \text{ МПа}.$$

Наибольшее напряжение возникает на первом участке. Определим необходимые размеры поперечного сечения стержня исходя из условия прочности при одноосном растяжении:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{60}{A} \le R = 160\,\text{МПа},$$

следовательно,

$$F \ge \frac{N_1}{R} = \frac{60 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 3{,}75 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2 = 3{,}75\ \text{см}^2.$$

Определяем напряжения на каждом участке стержня:

$$0 \le z_1 \le l; \qquad \sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{120 \cdot 10^3}{2 \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-4}} = 160\ \text{МПа};$$

$$l \le z_2 \le 3l; \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{90 \cdot 10^3}{2 \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-4}} = 120\,\text{МПа};$$

$$3l \le z_3 \le 5l; \qquad \sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{30 \cdot 10^3}{3{,}75 \cdot 10^{-4}} = 80\,\text{МПа};$$

$$5l \le z_4 \le 6l; \qquad \sigma_4 = \frac{N_4}{A} = 0\,\text{МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений σ (рис. 3).

Построение эпюры перемещений начинаем от заделки, так как перемещение в защемлении заведомо известно и равно нулю. Перемещение определяем по закону Гука и на каждом из участков стержня соответственно равны (при $E = 2 \cdot 10^5\,\text{МПа}$):

первый участок: $0 \le z_1 \le l$; $\qquad w_1 = \dfrac{N_1 z_1}{E2A}$;

$z_1 = 0$; $\qquad w_1 = 0$;

$$z_1 = l; \qquad w_1 = 0 + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 1{,}0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-4}} = 8{,}0 \cdot 10^{-4}\,\text{м};$$

второй участок: $l \le z_2 \le 3l$; $\qquad w_2 = 8{,}0 \cdot 10^{-4} + \dfrac{N_2(z_2 - l)}{E2A}$;

$z_2 = l$; $\quad w_2 = 8{,}0 \cdot 10^{-4}\,\text{м}$;

$$z_2 = 3l; \quad w_2 = 8{,}0 \cdot 10^{-4} + \frac{90 \cdot 10^3 \cdot (3 \cdot 1{,}0 - 1{,}0)}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-4}} = 20{,}0 \cdot 10^{-4}\,\text{м};$$

третий участок: $3l \le z_3 \le 5l$; $\qquad w_3 = 20{,}0 \cdot 10^{-4} + \dfrac{N_3(z_3 - 3l)}{EA}$;

$z_3 = 3l$; $w_3 = 20{,}0 \cdot 10^{-4}$ м;

$z_3 = 5l$; $z_3 = 20{,}0 \cdot 10^{-4} + \dfrac{30 \cdot 10^3 \cdot (5 \cdot 1{,}0 - 3 \cdot 1{,}0)}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-4}} = 28{,}0 \cdot 10^{-4}$ м;

четвертый участок: $5l \le z_4 \le 6l$; $\quad w_4 = 28{,}0 \cdot 10^{-4} + \dfrac{N_4 (z_4 - 5l)}{EA}$;

$z_4 = 5l$; $w_4 = 28{,}0 \cdot 10^{-4}$ м;

$z_4 = 6l$; $w_4 = 28{,}0 \cdot 10^{-4}$ м.

По полученным данным строим эпюру перемещений w (рис. 3).

ЗАДАЧА № 3

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СТСТЕМЫ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров. Требуется:

6) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q;
7) найти допускаемую нагрузку $Q_{доп}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях расчетному сопротивлению $R = 160$ МПа;
8) найти предельную грузоподъемность системы Q_m и допускаемую нагрузку $Q_{доп}$, если предел текучести $\sigma_m = 240$ МПа и коэффициент запаса прочности $k = 1{,}5$;
9) сравнить величины $Q_{доп}$, полученные из расчета по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

Исходные данные для решения задачи: схема стержневой системы показана на рис. 4; площадь поперечного сечения – $A = 17$ см^2; линейные размеры – $a = 2{,}2$ м, $b = 2{,}5$ м, $c = 1{,}7$ м,

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При действии на стержневую систему внешней силы Q абсолютно жесткий брус повернется по часовой стрелке относительно точки A, что вызовет удлинение стержней *1* и *2*. Деформация стержней приводит к возникновению в них продольных усилий N_1 и N_2. Помимо этих усилий к системе приложены две опорные реакции, возникающие в шарнирно неподвижной опоре A. На плоскости можно составить только три независимых уравнения статики. Сле-

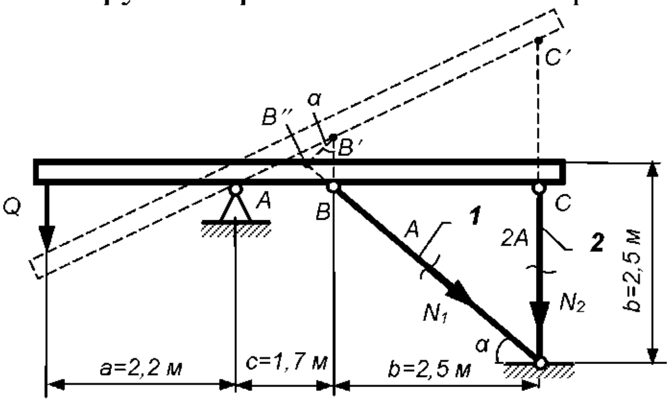


Рисунок 4

довательно, общее число неизвестных усилий на единицу превышает количество уравнений статики и система является статически неопределимой.

Для определения усилий в стержнях заданной системы рассмотрим три стороны задачи: статическую, геометрическую и физическую.

1) Статическая сторона задачи. Составим уравнение суммы моментов всех сил, действующих на систему, относительно неподвижной точки A

$$\sum m_A = 0; \quad N_1 \cdot Sin\alpha \cdot c + N_2 \cdot (b + c) - Q \cdot a = 0.$$

Полученное уравнение содержит два неизвестных продольных усилия, возникающих в стержнях системы, N_1 и N_2.

2) Геометрическая сторона задачи. Рассмотрим деформированное состояние системы, как показано на рисунке. Под действием силы Q абсолютно жесткий брус занимает новое положение AC'. Стержни 1 и 2 получат удлинения Δl_1 и Δl_2 соответственно. Запишем уравнение, связывающее эти величины. В соответствии с чертежом $BB'' = \Delta l_1$ и $CC' = \Delta l_2$. Из прямоугольно треугольника $\Delta BB'B''$ получаем, что $BB' = \Delta l_1 / Sin\alpha$. Здесь угол $\alpha = 45^\circ$.

Из подобия треугольников $\Delta ABB'$ и ΔACC следует

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC} \quad \text{или} \quad = \frac{\Delta l_1}{c \cdot Sin\alpha} = \frac{\Delta l_2}{(b + c)}$$

3) Физическая сторона задачи. Воспользовавшись законом Гука, запишем выражения для удлинений стержней Δl_1 и Δl_2:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A \cdot Sin\alpha} \quad \text{и} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение геометрической стороны задачи, получаем

$$\frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A \cdot c \cdot Sin^2\alpha} = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A \cdot (b + c)}.$$

Тогда

$$N_1 = \frac{N_2 \cdot c \cdot Sin^2\alpha}{2 \cdot (b + c)} = \frac{N_2 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}7071^2}{2 \cdot (2{,}5 + 1{,}7)} = 0{,}1012 N_2.$$

Подставляя полученное соотношение в уравнение статики, имеем:

$$0{,}1012 N_2 \cdot 0{,}7071 \cdot 1{,}7 + N_2 \cdot (2{,}5 + 1{,}7) - Q \cdot 2{,}2 = 0;$$

$$4{,}322 \cdot N_2 - 2{,}2 \cdot Q = 0.$$

$$N_2 = \frac{2{,}2 \cdot Q}{4{,}322} = 0{,}509Q \quad \text{и} \quad N_1 = 0{,}1012 N_2 = 0{,}1012 \cdot 0{,}509Q = 0{,}0515Q.$$

Вычисляем нормальные напряжения в стержнях системы

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0{,}0515Q}{A} = \frac{0{,}0515Q}{17 \cdot 10^{-4}} = 30{,}30Q;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0{,}509Q}{2A} = \frac{0{,}2445Q}{A} = \frac{0{,}2545Q}{17 \cdot 10^{-4}} = 149{,}71Q.$$

Находим допускаемую нагрузку на систему, приравнивая большее из двух полученных напряжений в стержнях величине расчетного сопротивления $R = 160$ МПа. Из условия прочности следует

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 149{,}71Q \le R = 160 \text{ МПа}.$$

Откуда

$$Q_{доп} \le \frac{R}{149{,}71} = \frac{160 \cdot 10^6}{149{,}71} = 1068{,}76 \cdot 10^3 \text{Н} = 1068{,}76 \text{кН}.$$

Определим несущую способность системы Q_m из расчета по разрушающим нагрузкам. Предельное состояние стержневой системы будет достигнуто тогда, когда напряжения в обоих ее стержнях достигнут предела текучести материала $\sigma_y = 240$ МПа. Тогда, из статической стороны задачи получаем

$$\sigma_y \cdot F_1 \cdot Sin\alpha \cdot c + \sigma_y \cdot F_2 \cdot (b + c) - Q \cdot a = 0,$$

$$\sigma_y \cdot F \cdot Sin\alpha \cdot c + \sigma_y \cdot 2F \cdot (b + c) - Q \cdot a = 0,$$

$$Q_y = \frac{\sigma_y \cdot F(c \cdot Sin\alpha + 2(b + c))}{a} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 17 \cdot 10^{-4} \cdot (1{,}7 \cdot 0{,}7071 + 2 \cdot (2{,}5 + 1{,}7))}{2{,}2} =$$

$$=1780747{,}5 \text{ Н} = 1780{,}75 \text{ кН}.$$

При заданной величине коэффициента запаса прочности допускаемая нагрузка будет равна

$$Q'_{доп} = \frac{Q_y}{k} = \frac{1780{,}75}{1{,}5} = 1187{,}17 \text{ кН}.$$

Следовательно, величина допускаемой нагрузки $Q'_{доп}$, полученной из расчета по разрушающим нагрузкам, больше величины $Q_{доп}$, полученной из расчета по допускаемым напряжениям в

$$\frac{Q'_{доп}}{Q_{доп}} = \frac{1187{,}17}{1068{,}76} = 1{,}111 \text{раза}.$$

ЗАДАЧА №4

КРУЧЕНИЕ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

К стальному валу приложены три известных момента M_1, M_2 и M_3.

Требуется:

1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;
2) для найденного значения момента X построить эпюру крутящих моментов;
3) при заданном значении R_s определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшего большего, равного 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
4) построить эпюру углов закручивания;
5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины).

Исходные данные для решения задачи: схема вала показана на рис. 5, линейные размеры вала – a=*2,0* м; b=*1,6* м; c=*1,3* м; значения внешних моментов – M_1–*2000* Нм; M_2–*600* Нм; M_3–*1300* Нм; расчетное сопротивление срезу R_s =*45* МПа.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Угол закручивания на каждом грузовом участке вала определяется по следующей формуле

$$\varphi_i = \frac{M_{кр\,i} l_i}{GJ_\rho}, \qquad (1)$$

где $M_{кр\,i}$ – крутящий момент на i – м грузовом участке;

l_i – длина i – го грузового участка;

G – модуль сдвига материала вала;

J_ρ – полярный момент инерции вала круглого поперечного сечения.

Запишем выражения для крутящих моментов на каждом грузовом участке через величины M_1, M_2, M_3, и X:

$$M_{кр4} = X\,;\; M_{кр3} = X + M_3\,;\; M_{кр2} = X + M_3 - M_2\,;\; M_{кр1} = X + M_3 - M_2 + M_1\,.$$

Подставив полученные величины в выражение (1) и используя условие задачи, получим следующее значение неизвестного момента, приложенного к правому концу вала:

$$\frac{(X + M_3 - M_2 + M_1)\cdot a}{GJ_\rho} + \frac{(X + M_3 - M_2)\cdot b}{GJ_\rho} + \frac{(X + M_3)\cdot c}{GJ_\rho} + \frac{X \cdot a}{GJ_\rho} = 0\,;$$

$$X(2a + b + c) + M_3(a + b + c) - M_2(a + b) + M_1 a = 0\,;$$

$$X = \frac{-M_3(a+b+c)+M_2(a+b)-M_1a}{2a+b+c} =$$

$$= \frac{-1300\cdot(2{,}0+1{,}6+1{,}3)+600\cdot(2{,}0+1{,}6)-2000\cdot2{,}0}{2\cdot2{,}0+1{,}6+1{,}3} = -1189{,}86\,\text{Нм}.$$

Используя выражения для крутящих моментов на каждом грузовом участке и полученное значение момента X, вычислим величины крутящих моментов на границах участков:

$$M_{кр4} = X = -1189{,}86\,\text{Нм};\; M_{кр3} = X + M_3 = -1189{,}86 + 1300 = 110{,}14\ \text{Нм};$$

$$M_{кр2} = X + M_3 - M_2 = -1189{,}86 + 1300 - 600 = -489{,}86\,\text{Нм};$$

$$M_{кр1} = X + M_3 + M_2 - M_1 = -1189{,}86 + 1300 - 600 + 2000 = 1510{,}14\,\text{Нм}.$$

По полученным данным строим эпюру $M_{кр}$

Запишем условие прочности вала при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр\,max}}{W_\rho} \le R_s, \tag{2}$$

где $M_{кр\,max}$ – максимальное значение крутящего момента;

W_ρ – полярный момент сопротивления сечения вала.

Полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения определяется по формуле:

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}, \tag{3}$$

здесь d – диаметр вала.

Тогда, используя выражения (2) и (3), получаем

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16\cdot M_{кр\,\max}}{\pi\cdot R_s}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot1510{,}14}{3{,}14\cdot45\cdot10^6}} = 0{,}0555\,\text{м}.$$

Окончательно принимаем диаметр вала $d = 60$ мм.

Находим значение полярного момента инерции поперечного сечения вала по формуле

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3{,}14\cdot(6\cdot10^{-2})^4}{32} = 1{,}271\cdot10^{-6}\,\text{м}^4.$$

Используя формулу (1) и принимая величину модуля сдвига стали равной $G = 8\cdot10^4$ МПа, вычисляем величину углов закручивания на каждом грузовом участке

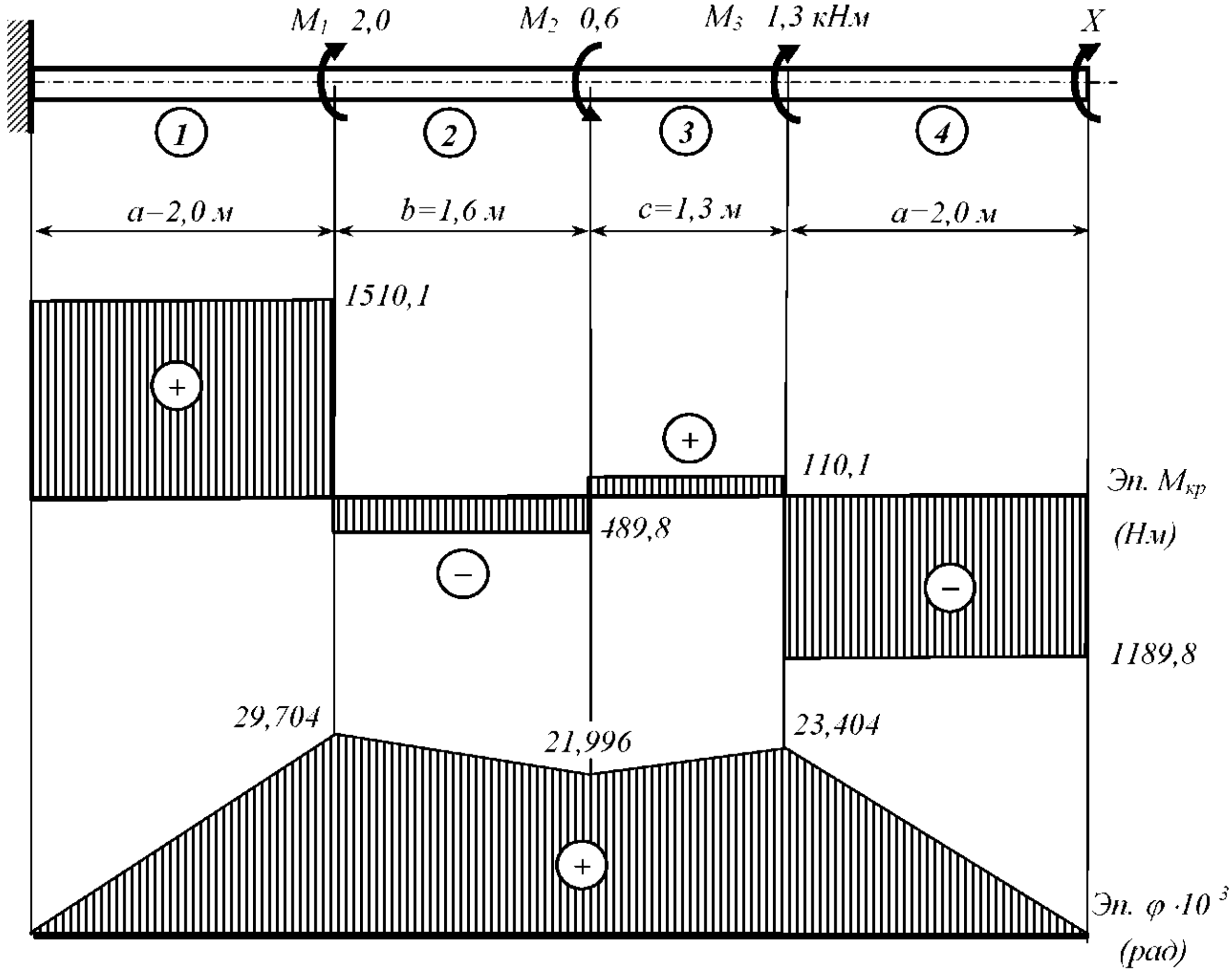


Рисунок 5

$$\varphi_4 = \frac{-1189{,}86 \cdot 2{,}0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}271 \cdot 10^{-6}} = -23{,}404 \cdot 10^{-3}\,\text{рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{110{,}14 \cdot 1{,}3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}271 \cdot 10^{-6}} = 1{,}408 \cdot 10^{-3}\,\text{рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{-489{,}86 \cdot 1{,}6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}271 \cdot 10^{-6}} = -7{,}708 \cdot 10^{-3}\,\text{рад};$$

$$\varphi_1 = \frac{1510{,}14 \cdot 2{,}0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}271 \cdot 10^{-6}} = 29{,}704 \cdot 10^{-3}\,\text{рад}.$$

Определяем ординаты эпюры углов закручивания

$$\varphi_{A-1} = \varphi_1 = 29{,}707 \cdot 10^{-3}\,\text{рад};$$

$$\varphi_{A-2} = \varphi_1 + \varphi_2 = (29{,}707 - 7{,}708) \cdot 10^{-3} = 21{,}996 \cdot 10^{-3}\,\text{рад};$$

$$\varphi_{A-3} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = (29{,}707 - 7{,}708 + 1{,}408) \cdot 10^{-3} = 23{,}404 \cdot 10^{-3}\,\text{рад};$$

$$\varphi_{A-4} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \left(29{,}707 - 7{,}708 + 1{,}408 - 23{,}404\right) \cdot 10^{3} = 0,$$

что соответствует условию задачи.

По полученным значениям строим эпюру углов закручивания вала φ.

Исходя из построенной эпюры φ, определяем наибольший относительный угол закручивания на 1 м его длины

$$\psi = \frac{\varphi_{\max}}{l} = \frac{29{,}704 \cdot 10^{3}}{2{,}0} = 14{,}852 \cdot 10^{3} \text{ рад/м.}$$

ЗАДАЧА №4

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти:

1) главные напряжения и направление главных площадок;
2) максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений;
3) относительные деформации ε_x, ε_y, ε_z;
4) относительное изменение объема;
5) удельную потенциальную энергию деформаций.

Исходные данные для решения задачи: схема кубика показана на рис. 6. Заданные напряжения: $\sigma_x = 10$ МПа, $\sigma_y = 100$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Определяем величины главных напряжений по формуле:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \pm \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right].$$

При вычислении главных напряжений в соответствии с заданной схемой загружения кубика имеем: $\sigma_x = -10$ МПа, $\sigma_y = 100$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа, тогда

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(-10 + 100\right) \pm \sqrt{\left(-10 - 100\right)^2 + 4 \cdot 20^2}\right] = \frac{1}{2}\left(90 \pm 117{,}05\right);$$

$$\sigma_1 = 103{,}52 \text{ МПа}; \qquad \sigma_2 = -13{,}52 \text{ МПа}.$$

Сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, есть величина инвариантная, т.е. не зависящая от поворота координатных осей относительно неподвижной точки. Восползовавшись этим свойством, выполним проверку найденных значений главных напряжений:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2;$$

$$-10 + 100 = 103{,}52 - 13{,}52;$$

$$90 \text{ МПа} = 90 \text{ МПа},$$

следовательно, величины главных напряжений вычислены верно.

Вычисляем величину угла наклона главных площадок относительно заданных площадок

$$tg2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 20}{-10 - 100} = -0{,}3636; \quad 2\alpha = -19{,}98^\circ; \quad \alpha = -9{,}99^\circ.$$

Знак «минус» указывает на то, что поворот осей до положения главных на угол α осуществляется по часовой стрелке.

Максимальные касательные напряжения вычисляем по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{103{,}52 + 13{,}52}{2} = 58{,}52 \text{ МПа}.$$

Площадки, по которым действуют максимальные касательные напряжения, направлены под углом 45° относительно положения главных площадок.

Определяем относительные деформации в точке тела ε_x, ε_y и ε_z, воспользовавшись обобщенным законом Гука и учитывая, что $\sigma_z = 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right), \\ \varepsilon_x = -\dfrac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{cases}$$

где E – модуль упругости первого рода, для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;

μ – коэффициент Пуассона, для стали принимаем значение $\mu = 0{,}3$.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \cdot \left(-10 - 0{,}3 \cdot 100\right) \cdot 10^6 = -20 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \cdot \left(100 + 0{,}3 \cdot 10\right) \cdot 10^6 = 65 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_z = -\frac{0{,}3}{2 \cdot 10^{11}} \cdot \left(-10 + 100\right) \cdot 10^6 = -13{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Определяем относительное изменение объема по формуле:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \left(-20 + 65 - 13{,}5\right) \cdot 10^{-5} = 31{,}5 \cdot 10^{-5}$$

Вычисляем удельную потенциальную энергию деформаций через главные напряжения

$$U = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}\left(103{,}52^2 + 13{,}52^2 + 2 \cdot 0{,}3 \cdot 103{,}52 \cdot 13{,}52\right) \cdot 10^6 = 29{,}35 \cdot 10^{-3}\ \frac{Нм}{м^3}.$$

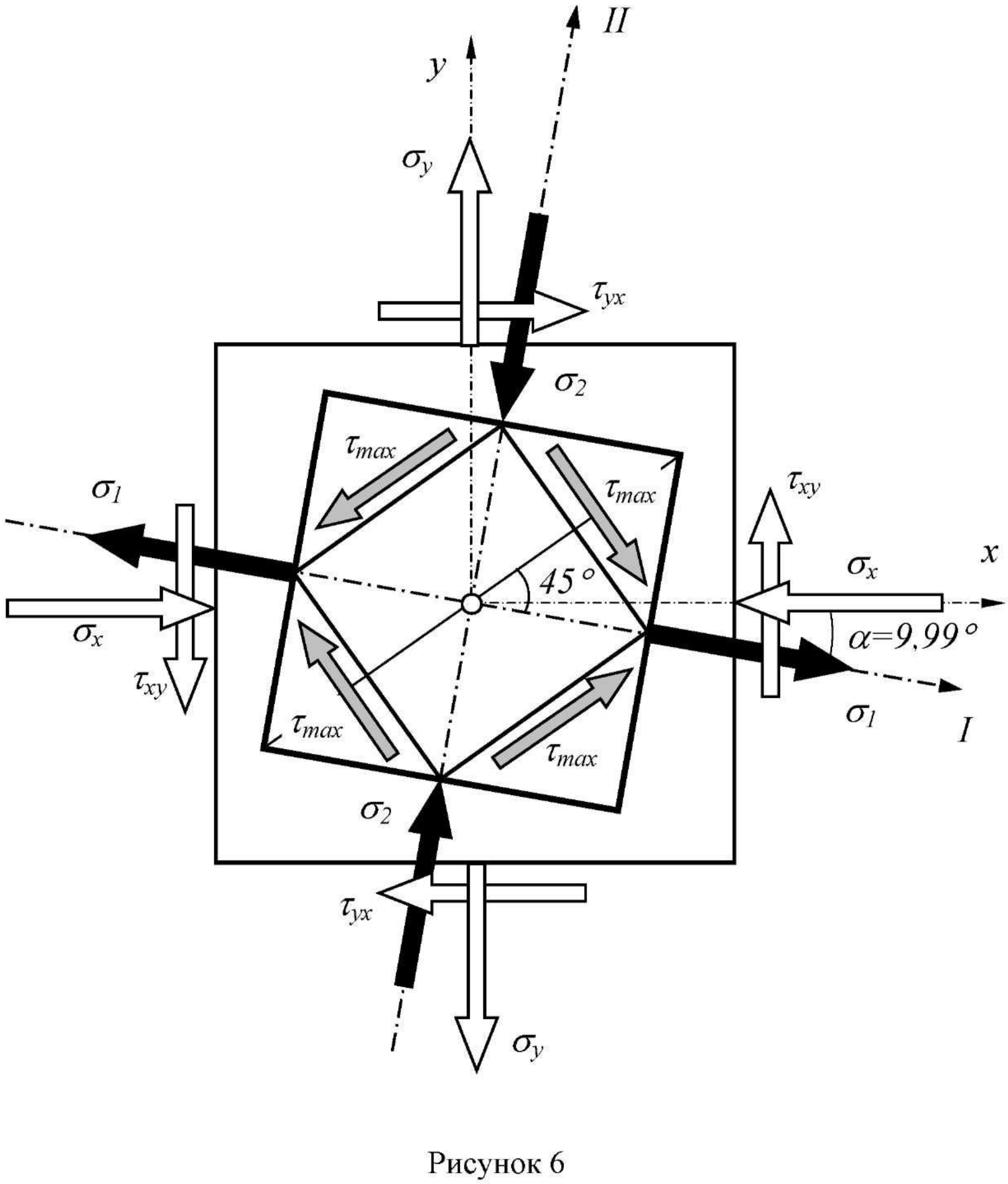


Рисунок 6

ЗАДАЧА № 6

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Для двух заданных схем требуется написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M, найти M_{max} и подобрать:

а) для схемы *а* – деревянную балку круглого поперечного сечения при $R = 8\,\text{МПа}$;

б) для схемы *б* – стальную балку двутаврового поперечного сечения при $R = 160\,\text{МПа}$.

Исходные данные для решения задачи : $l_1 = 1{,}5\,\text{м}$; $l_2 = 7\,\text{м}$; $a_1/a = 2$; $a_2/a = 5$; $a_3/a = 2$; $M = 20$ кНм; $P = 5$ кН; $q = 7$ кН/м.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Схема *а* (рис. 7).

Разбиваем балку на грузовые участки. В пределах каждого участка проводим сечение и отбрасываем левую часть балки. В поперечном сечении показываем внутренние силовые факторы в положительном направлении. Поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_x определяем их уравнений равновесия, составленных для правой части балки.

Первый участок: $0 \le z_1 \le 0{,}75\,\text{м}$.

$$\sum y = 0;\ Q_y - q\cdot z_1 = 0;\ Q_y = q\cdot z_1;$$

$$\sum m = 0;\ M_x + q\cdot z_1^2/2 = 0;\ M_x = -q\cdot z_1^2/2;$$

При $z_1 = 0$; $Q_y = 0$; $M_x = 0$.

При $z_1 = 1{,}33\,\text{м}$; $Q_y = 9{,}31\,\text{кН}$; $M_x = -6{,}191$ кНм.

Второй участок: $0{,}75 \le z_2 \le 1{,}20\,\text{м}$.

$$\sum y = 0;\ Q_y - q\cdot z_2 - P = 0;\ Q_y = q\cdot z_2 + P;$$

$$\sum m = 0;\ M_x + q\cdot 0{,}75\cdot(z_2 - 0{,}75/2) + P\cdot(z_2 - 1{,}20) = 0;$$

$$M_x = -q\cdot 0{,}75\cdot(z_2 - 0{,}75/2) - P\cdot(z_2 - 1{,}20);$$

При $z_2 = 1{,}33$; $Q_y = 18{,}31\,\text{кН}$; $M_x = -6{,}191$ кНм.

При $z_2 = 1{,}71\text{`}\,\text{м}$; $Q_y = 20{,}97\,\text{кН}$; $M_x = -13{,}652$ кНм.

Третий участок: $1{,}20 \le z_3 \le 1{,}50\,\text{м}$.

$$\sum y = 0;\ Q_y - q\cdot 0{,}75 - P = 0;\ Q_y = q\cdot 0{,}75 + P = 10{,}25\,\text{кН};$$

$$\sum m = 0;\ M_x + q\cdot 0{,}75\cdot(z_3 - 0{,}75/2) + P\cdot(z_3 - 1{,}20) = 0;$$

$$M_x = -q \cdot 0{,}75 \cdot \left(z_3 - 0{,}75/2\right) - P \cdot \left(z_3 - 1{,}20\right);$$

При $z_3 = 1{,}20$ м; $Q_y = 10{,}25$ кН; $M_x = -4{,}331$ кНм.

При $z_3 = 1{,}50$ м; $Q_y = 10{,}25$ кН; $M_x = -7{,}406$ кНм.

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x.

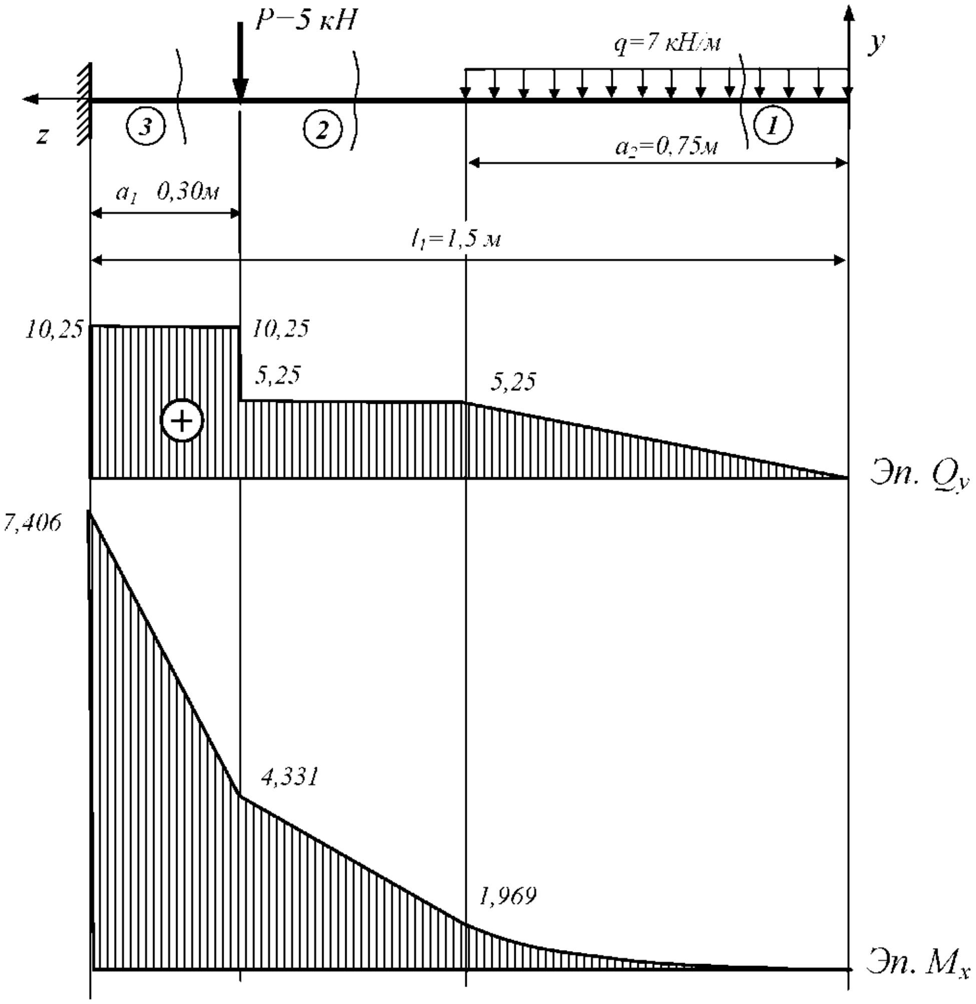


Рисунок 7

Запишем условие прочности при изгибе

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \le R = 8\,\text{МПа},$$

где $M_{\max}$ – максимальный изгибающий момент, возникающий в балке;

W_x – момент сопротивления поперечного сечения балки.

Из записанного условия следует, что требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки определяется следующим образом

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R}.$$

Для круглого поперечного сечения момент сопротивления равен

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Следовательно, необходимый диаметр поперечного сечения равен

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{max}}{\pi R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7{,}406 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0{,}211\,\text{м}.$$

Схема *б* (рис. 8).

Определяем опорные реакции заданной балки.

$$\sum m_A = 0;\; q \cdot (1{,}4 + 3{,}5) \cdot \left(\frac{1{,}4 + 3{,}5}{2} - 1{,}4 \right) + M - R_B \cdot 7{,}0 = 0;$$

$$R_B = \frac{7 \cdot (1{,}4 + 3{,}5) \cdot \left(\frac{1{,}4 + 3{,}5}{2} - 1{,}4 \right) + 20}{7{,}0} = 8{,}0\,\text{кН};$$

$$\sum m_B = 0;\; q \cdot (1{,}4 + 3{,}5) \cdot \left(8{,}4 - \frac{1{,}4 + 3{,}5}{2} \right) - M - R_A \cdot 7{,}0;$$

$$R_A = \frac{7 \cdot (1{,}4 + 3{,}5) \cdot \left(8{,}4 - \frac{1{,}4 + 3{,}5}{2} \right) - 20}{7{,}0} = 26{,}3\,\text{кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = 0;\quad q \cdot (1{,}4 + 3{,}5) - R_A - R_B = 7 \cdot (1{,}4 + 3{,}5) - 26{,}3 - 8{,}0 = 34{,}3 - 34{,}3 = 0,$$

следовательно, опорные реакции вычислены верно.

Разбиваем балку на грузовые участки. В пределах каждого участка проводим сечение и отбрасываем правую часть балки. В поперечном сечении показываем внутренние силовые факторы в положительном направлении. Поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_x определяем из уравнений равновесия, составленных для левой части балки.

Первый участок: $0 \leq z_1 \leq 1{,}40$ м.

$$\sum y = 0;\; Q_y + q \cdot z_1 = 0;\; Q_y = -q \cdot z_1;$$

$$\sum m = 0;\; M_x + q \cdot z_1^2 / 2 = 0;\; M_x = -q \cdot z_1^2 / 2;$$

При $z_1 = 0$; $Q_y = 0$; $M_x = 0$.

При $z_1 = 1{,}40$ м; $Q_y = -9{,}8$ кН; $M_x = -6{,}86$ кНм.

Второй участок: $1{,}40 \le z_2 \le 4{,}9$ м.

$\sum y = 0$; $Q_y + q \cdot z_2 - R_A = 0$; $Q_y = R_A - q \cdot z_1$;

$\sum m = 0$; $M_x + q \cdot z_2^2/2 - R_A \cdot (z_2 - 1{,}4) = 0$; $M_x = R_A \cdot (z_2 - 1{,}4) - q \cdot z_2^2/2$;

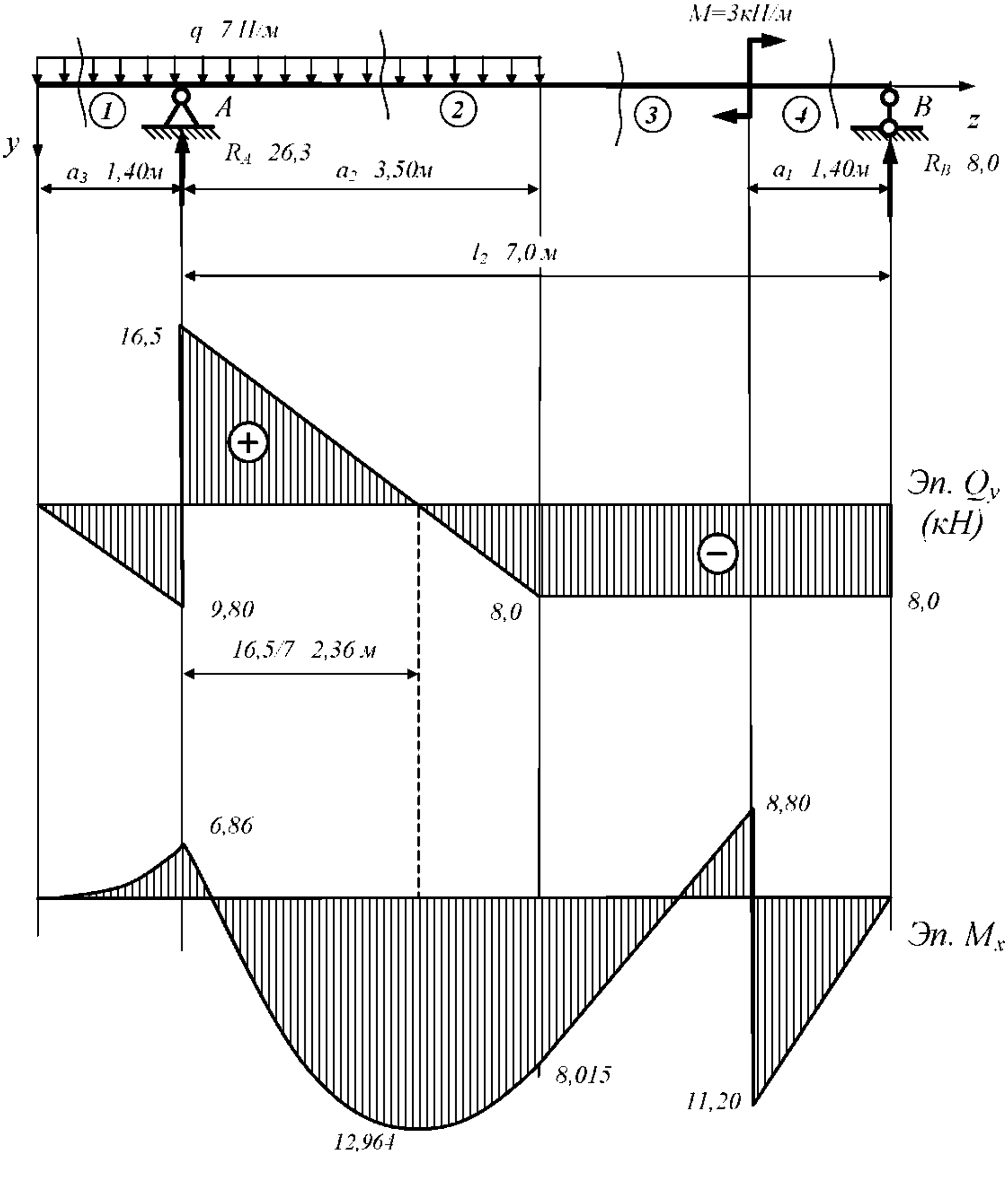


Рисунок 8

При $z_2 = 1{,}40$; $Q_y = 16{,}50$ кН; $M_x = -6{,}86$ кНм.

При $z_2 = 4{,}9$ м; $Q_y = -8{,}0$ кН; $M_x = 8{,}015$ кНм.

При $z_2 = 3{,}76$ м; $Q_y = 0$ кН; $M_x = 12{,}964$ кНм.

Для упрощения расчетов будем в дальнейшем отбрасывать левую часть балки. Третий участок: $1{,}40 \le z_3 \le 3{,}5$ м.

$\sum y = 0$; $Q_y + R_B - q \cdot (z_3 - 1{,}4) = 0$; $Q_y = q \cdot (z_3 - 1{,}4) - R_B$;

$\sum m = 0$; $M_x + q \cdot (z_3 - 1{,}4)^2 / 2 - R_B \cdot z_3 = 0$; $M_x = R_B \cdot z_3 - q \cdot (z_3 - 1{,}4)^2 / 2$.

При $z_3 = 1{,}40$ м; $Q_y = -8{,}0$ кН; $M_x = -8{,}80$ кНм.

При $z_3 = 3{,}50$ м; $Q_y = -8{,}0$ кН; $M_x = 8{,}015$ кНм.

Четвертый участок: $0 \le z_4 \le 1{,}40$ м.

$\sum y = 0$; $Q_y + R_B = 0$; $Q_y = -R_B = -8{,}0$ кН;

$\sum m = 0$; $M_x - R_B \cdot z_4 = 0$; $M_x = R_B \cdot z_4$.

При; $z_4 = 0$ м; $Q_y = -8{,}0$ кН; $M_x = 0$ кНм.

При $z_4 = 1{,}40$ м; $Q_y = -8{,}0$ кН; $M_x = 11{,}20$ кНм.

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x.

Запишем условие прочности при изгибе

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_x} \le R = 160\ \text{МПа},$$

где M_{max} – максимальный изгибающий момент, возникающий в балке;

W_x – момент сопротивления поперечного сечения балки.

Из записанного условия следует, что требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки определяется следующим образом

$$W_x^{тр} \ge \frac{M_{max}}{R} = \frac{12{,}964 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 81{,}03 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 = 81{,}03\ \text{см}^3.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавровое сечение, у которого момент сопротивления больше требуемого значения. Окончательно принимаем двутавр №14 с $W_x = 81{,}9$ см^3.

ЗАДАЧА № 7

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Для заданной статически неопределимой балки (рис. 9) требуется:

1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2);
2) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x;

3) построить эпюру прогибов заданной балки, вычислив три ординаты в пролете и две – на консоли.

Исходные данные задачи: параметры $\alpha = 0{,}2$ и $\beta = 0{,}5$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Заданная балка является статически неопределимой, так как в ее опорных устройствах возникают четыре неизвестные опорные реакции, а для плоскости можно составить только три независимых уравнения статики. Для раскрытия статической неопределимости отбрасываем правую опору балки (шарнирно подвижную опору в точке B) и определяем опорные реакции в защемлении A от действия внешних сил

$$\sum y = 0;\ q\beta l - P + R_A^* = 0;$$

$$R_A^* = P - q\beta l = \alpha ql - q\beta l = ql(\alpha - \beta) = ql(0{,}2 - 0{,}5) = -0{,}3ql;$$

$$\sum m_A = 0;\ -q\beta l \cdot (l + \beta l/2) + P \cdot l/2 + M_A^* = 0;$$

$$M_A^* = -P \cdot l/2 + q\beta l \cdot (l + \beta l/2) = -\alpha ql \cdot l/2 + q\beta l \cdot (l + \beta l/2) =$$

$$= -0{,}2ql \cdot l/2 + 0{,}5ql \cdot (l + 0{,}5l/2) = 0{,}525ql^2.$$

Воспользовавшись уравнением метода начальных параметров, вычисляем прогиб балки в точке B от действия внешних сил.

$$EJ_x v_{(B)}^* = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)} z_{(B)} + \frac{R_A^* z_{(B)}^3}{6} - \frac{M_A^* z_{(B)}^2}{2} + \frac{P\left(z_{(B)} - l/2\right)^3}{6}.$$

Начальные параметры задачи известны, так как в начале координат располагается жесткая заделка, препятствующая вертикальным перемещениям и углам поворота сечения, следовательно, $EJ_x v_{(0)} = 0$ и $EJ_x \theta_{(0)} = 0$. Тогда при $z_{(B)} = l$ получаем

$$EJ_x v_{(B)}^* = \frac{-0{,}3ql \cdot l^3}{6} + \frac{0{,}525ql^2 \cdot l^2}{2} - \frac{0{,}2ql \cdot (l - l/2)^3}{6} = 0{,}2083ql^4.$$

Отбрасываем все внешние нагрузки и загружаем полученную консольную балку сосредоточенной силой R_B, приложенной в точке B. Определяем опорные реакции в заделке от этого загружения балки.

$$\sum y = 0;\ R_A^{**} - R_B = 0;\ R_A^{**} = R_B;$$

$$\sum m_A = 0;\ M_A^{**} - R_B l = 0;\ M_A^{**} = R_B l.$$

Воспользовавшись уравнением метода начальных параметров, вычисляем прогиб балки в точке B от силы R_B.

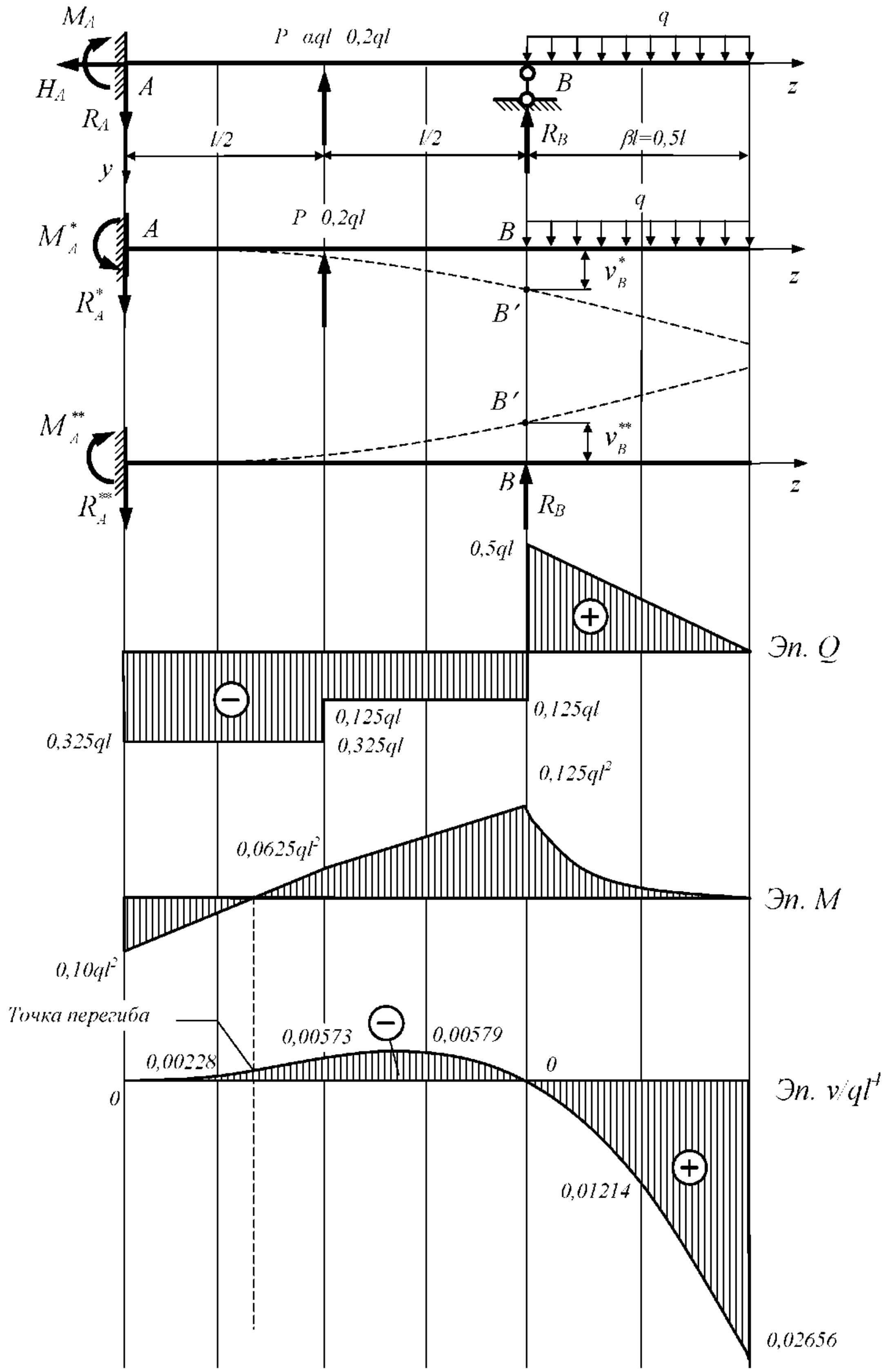

M_A
H_A
A
R_A
P αql $0,2ql$
q
B
z
R_B
$l/2$
$l/2$
$\beta l=0,5l$
y
M_A^*
R_A^*
P $0,2ql$
v_B^*
B'
M_A^{**}
R_A^{**}
v_B^{**}
$0,5ql$
Эп. Q
$0,325ql$
$0,125ql$
$0,325ql$
$0,125ql$
$0,125ql^2$
$0,0625ql^2$
Эп. M
$0,10ql^2$
Точка перегиба
$0,00228$
$0,00573$
$0,00579$
0
Эп. v/ql^4
$0,01214$
$0,02656$

Рисунок 9

$$EJ_x v_{(B)}^{**} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)} z_{(B)} + \frac{R_A^{**} z_{(B)}^3}{6} - \frac{M_A^{**} z_{(B)}^2}{2}.$$

Начальные параметры задачи $EJ_x v_{(0)} = 0$ и $EJ_x \theta_{(0)} = 0$, тогда при $z_{(B)} = l$ получаем

$$EJ_x v_{(B)}^{**} = \frac{R_B \cdot l^3}{6} - \frac{R_B l \cdot l^2}{2} = -\frac{R_B \cdot l^3}{3}.$$

Согласно условию задачи прогиб балки в точке B должен быть равен нулю, так как там установлена шарнирно подвижная опора, препятствующая вертикальным перемещениям. Отсюда получаем следующее уравнение

$$EJ_x v_{(B)}^{*} + EJ_x v_{(B)}^{**} = 0.$$

Тогда

$$0{,}2083ql^4 - \frac{R_B \cdot l^3}{3} = 0; \quad R_B = \frac{3 \cdot 0{,}2083ql^4}{l^3} = 0{,}625ql.$$

Таким образом, величина опорной реакции R_B определена. Остальные опорные реакции заданной балки от действия внешних нагрузок вычисляем, используя уравнения статики.

$$\sum y = 0; \; q\beta l - P + R_A - R_B = 0;$$

$$R_A = R_B + (P - q\beta l) = 0{,}625ql + (\alpha ql - q\beta l) = 0{,}625ql + ql(\alpha - \beta) =$$

$$= 0{,}625ql + ql(0{,}2 - 0{,}5) = 0{,}325ql;$$

$$\sum m_A = 0; \; q\beta l \cdot (l + \beta l/2) - P \cdot l/2 + M_A - R_B \cdot l = 0;$$

$$M_A = R_B \cdot l - q\beta l \cdot (l + \beta l/2) + P \cdot l/2 = 0{,}625ql \cdot l - q\beta l \cdot (l + \beta l/2) + \alpha ql \cdot l/2 =$$

$$= 0{,}625ql^2 - q \cdot 0{,}2l \cdot (l + 0{,}5l/2) + 0{,}2ql \cdot l/2 = 0{,}10ql^2.$$

Исходя из полученных величин опорных реакций, строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M в заданной балке.

Запишем уравнение метода начальных параметров для определения прогибов балки в любой ее точке.

$$EJ_x v_{(i)} = \left.\frac{R_A z_{(i)}^3}{6}\right|_0^{1,5l} - \left.\frac{M_A z_{(i)}^2}{2}\right|_0^{1,5l} - \left.\frac{P(z_{(i)} - l/2)^3}{6}\right|_{0,5l}^{1,5l} - \left.\frac{R_B (z_{(i)} - l)^3}{6}\right|_l^{1,5l} + \left.\frac{q(z_{(i)} - l)^4}{24}\right|_l^{1,5l}.$$

Исходя из записанного уравнения, вычисляем прогибы балки в ее расчетных сечениях:

$z_{(1)} = 0{,}25l;$

$$EJ_x v_{(1)} = \frac{0{,}325ql\cdot(0{,}25l)^3}{6} - \frac{0{,}10ql^2\cdot(0{,}25l)^2}{2} = -0{,}00228ql^4;$$

$$z_{(2)} = 0{,}5l;$$

$$EJ_x v_{(2)} = \frac{0{,}325ql\cdot(0{,}5l)^3}{6} - \frac{0{,}10ql^2\cdot(0{,}5l)^2}{2} = -0{,}00573ql^4;$$

$$z_{(3)} = 0{,}75l;$$

$$EJ_x v_{(3)} = \frac{0{,}325ql\cdot(0{,}75l)^3}{6} - \frac{0{,}10ql^2\cdot(0{,}75l)^2}{2} - \frac{0{,}2ql\cdot(0{,}75l-0{,}5l)^3}{6} = -0{,}00579ql^4;$$

$$z_{(4)} = l;$$

$$EJ_x v_{(4)} = \frac{0{,}325ql\cdot l^3}{6} - \frac{0{,}10ql^2\cdot l^2}{2} - \frac{0{,}2ql\cdot(l-0{,}5l)^3}{6} = 0;$$

$$z_{(5)} = 1{,}25l;$$

$$EJ_x v_{(5)} = \frac{0{,}325ql\cdot(1{,}25l)^3}{6} - \frac{0{,}10ql^2\cdot(1{,}25l)^2}{2} - \frac{0{,}2ql\cdot(1{,}25l-0{,}5l)^3}{6} -$$

$$-\frac{0{,}625ql\cdot(1{,}25l-l)^3}{6} + \frac{q\cdot(1{,}25l-l)^4}{24} = 0{,}01214ql^4;$$

$$z_{(6)} = 1{,}5l;$$

$$EJ_x v_{(6)} = \frac{0{,}325ql\cdot(1{,}5l)^3}{6} - \frac{0{,}10ql^2\cdot(1{,}5l)^2}{2} - \frac{0{,}2ql\cdot(1{,}5l-0{,}5l)^3}{6} -$$

$$-\frac{0{,}625ql\cdot(1{,}5l-l)^3}{6} + \frac{q\cdot(1{,}5l-l)^4}{24} = 0{,}02656ql^4.$$

По полученным значениям строим эпюру прогибов заданной балки (рис. 9). При построении эпюры прогибов ее очертания необходимо согласовать с эпюрой изгибающих моментов M_x. На каждом грузовом участке выпуклость эпюры v должна быть направлена в сторону растянутых волокон на эпюре M_x.

ЗАДАЧА № 8

КОСОЙ ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения загружена системой внешних сил, приложенных в вертикальной и горизонтальной плоскости (рис. 10). В опорных устройствах балки возникают реактивные усилия, действующие как направлении оси x, так и оси y. Требуется:

1) показать расчетные схемы балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях и построить эпюры изгибающих моментов M_x и M_y;
2) установить положение опасного сечения балки;

3) из условия прочности при косом изгибе подобрать необходимые размеры поперечного сечения балки при заданном соотношении h/b при расчетном сопротивлении материала $R = 10$ МПа;
4) определить положение нейтральной линии в опасном сечении балки и построить для указанного сечения эпюру распределения нормальных напряжений в аксонометрии.

Исходные данные для решения задачи: внешние нагрузки $F_1 = 2{,}0$ кН; $F_2 = 2{,}0$ кН; $q_1 = 1{,}0$ кН/м; $q_2 = 1{,}5$ кН/м; размеры балки $a = 2$ м; $b = 1$ м; $c = 1$ м; соотношение размеров сечения $h/b = 2/1$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Вначале рассматриваем загружение балки в вертикальной плоскости. Используя уравнения статики, определяем вертикальные опорные реакции:

$$\sum m_B = 0;\ V_A = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 4^2/2}{4} = 2{,}5\,\text{кН};$$

$$\sum m_A = 0;\ V_B = \frac{2\cdot 3 + 1\cdot 4^2/2}{4} = 3{,}5\,\text{кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = 0;\ V_A + V_B - q_1\cdot 4 - F_2 = 0;\ 2{,}5 + 3{,}5 - 1\cdot 4 - 2 = 6 - 6 = 0,$$

следовательно, опорные реакции, действующие в вертикальной плоскости найдены верно. По полученным значениям строим эпюру моментов M_x, изгибающих балку в вертикальной плоскости.

Аналогичным образом рассматриваем работу балки в горизонтальной плоскости. Используя уравнения статики, определяем горизонтальные опорные реакции:

$$\sum m_B = 0;\ H_A = \frac{2\cdot 2 + 1{,}5\cdot 1^2/2}{4} = 1{,}188\,\text{кН};$$

$$\sum m_A = 0;\ H_B = \frac{2\cdot 2 + 1{,}5\cdot 1\cdot 3{,}5}{4} = 2{,}312\,\text{кН}.$$

Проверка:

$$\sum x = 0;\ H_A + H_B - q_2\cdot 1{,}5 - F_1 = 0;\ 1{,}188 + 2{,}312 - 1{,}5\cdot 1 - 2 = 3{,}5 - 3{,}5 = 0,$$

следовательно, опорные реакции, действующие в горизонтальной плоскости найдены верно. По полученным значениям строим эпюру моментов M_y, изгибающих балку в горизонтальной плоскости.

Анализируя построенные эпюры (рис. 10), приходим к выводу, что опасное сечение балки расположено в точке C, где моменты M_x и M_y, изгибающие балку в вертикальной и горизонтальной плоскостях, достигают значительных величин.

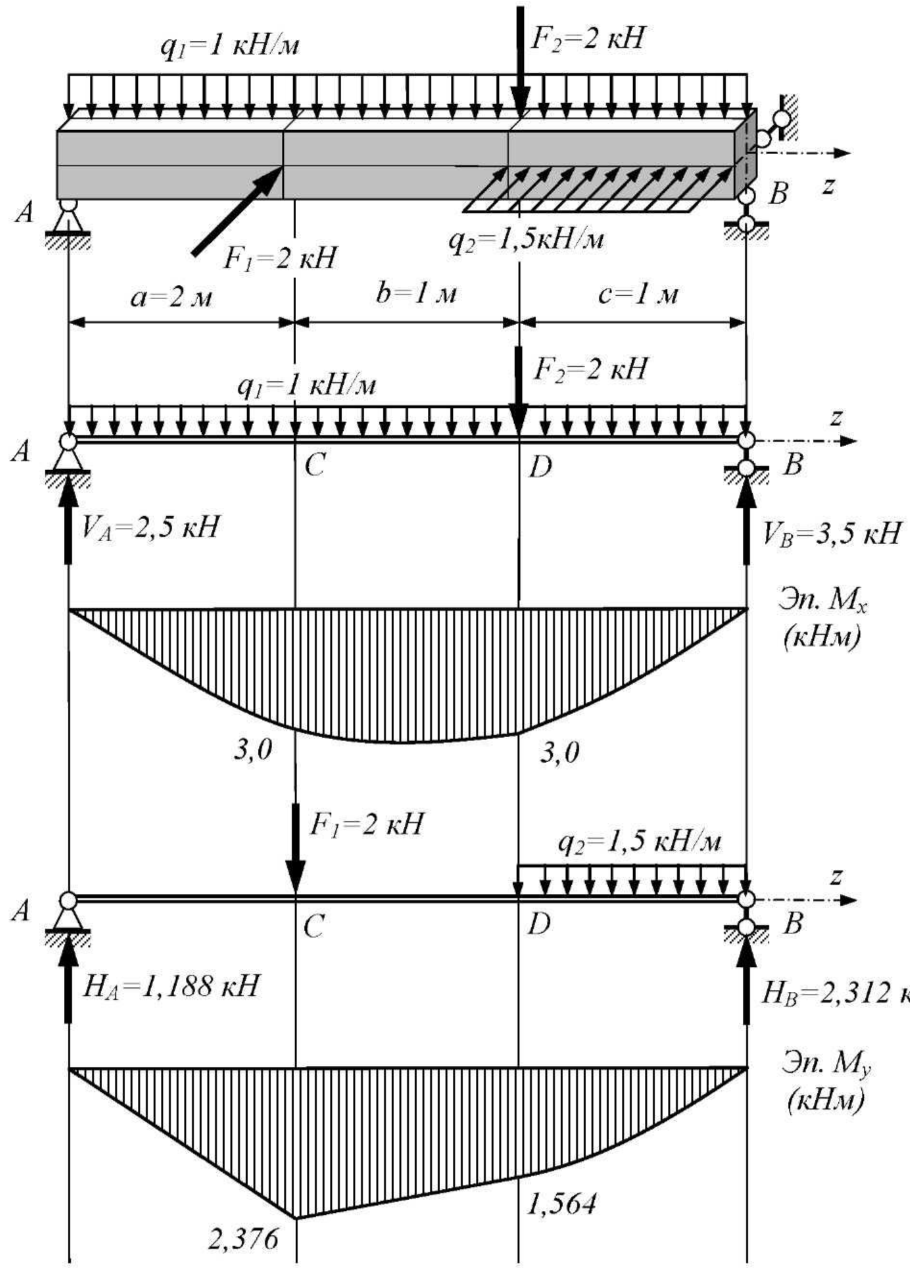


Рисунок 10

Запишем выражения для геометрических характеристик заданного прямоугольного сечения. Учитывая заданное соотношение сторон $h/b = 2/1$, получаем

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(2b)^3}{12} = 0{,}667b^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{2b(b)^3}{12} = 0{,}167b^4;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 0{,}667b^3; \qquad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{2b(b)^2}{6} = 0{,}333b^3.$$

Определяем положение нейтральной линии в опасном сечении по следующей формуле

$$tg\varphi = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = \frac{0{,}667b^4}{0{,}167b^4} \cdot \frac{2{,}376}{3{,}0} = 3{,}163; \quad \varphi = 72{,}46^\circ.$$

Полученный угол откладываем от оси x (рис. 11).

Направление действия результирующего момента M_{tot} в рассматриваемом сечении бруса составляет угол α с вертикальной осью Oy, тогда,

$$tg\alpha = \frac{M_y}{M_x} = \frac{2{,}376}{3{,}0} = 0{,}792; \quad \alpha = 38{,}78^\circ.$$

Подбор размеров поперечного сечения выполняем по условию прочности по максимальным нормальным напряжениям при косом изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \le R.$$

Подставляя в это условие ранее полученные выражения для моментов сопротивления поперечного сечения, получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{3{,}0 \cdot 10^3}{0{,}667b^3} + \frac{2{,}376 \cdot 10^3}{0{,}333b^3} \le R = 10 \cdot 10^6,$$

откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{11{,}633 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0{,}105\,\text{м}.$$

Округляем полученные размеры поперечного сечения деревянной балки до целых сантиметров и окончательно принимаем $b = 11\,\text{см}$. Следовательно, высота сечения равна $h = 22\,\text{см}$.

Для построения эпюры нормальных напряжений, вычисляем их величины в угловых точках 1, 2, 3 и 4 (рис. 11). Следует иметь в виду, что в опасном сечении изгибающий момент M_x растягивает грань 3–4 и сжимает грань 1–2, а момент M_y растягивает грань 2–3 и сжимает грань 1–4.

$$\sigma_{(1)} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{3{,}0 \cdot 10^3}{0{,}667 \cdot 0{,}11^3} - \frac{2{,}376 \cdot 10^3}{0{,}333 \cdot 0{,}11^3} = -3{,}384 - 5{,}361 = -8{,}745\,\text{МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{3{,}0 \cdot 10^3}{0{,}667 \cdot 0{,}11^3} + \frac{2{,}376 \cdot 10^3}{0{,}333 \cdot 0{,}11^3} = -3{,}384 + 5{,}361 = 1{,}977\,\text{МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{3,0 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,11^3} + \frac{2,376 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,11^3} = 3,384 + 5,361 = 8,745\,\text{МПа};$$

$$\sigma_{(4)} = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = \frac{3,0 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,11^3} - \frac{2,376 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,11^3} = 3,384 - 5,361 = -1,977\,\text{МПа};$$

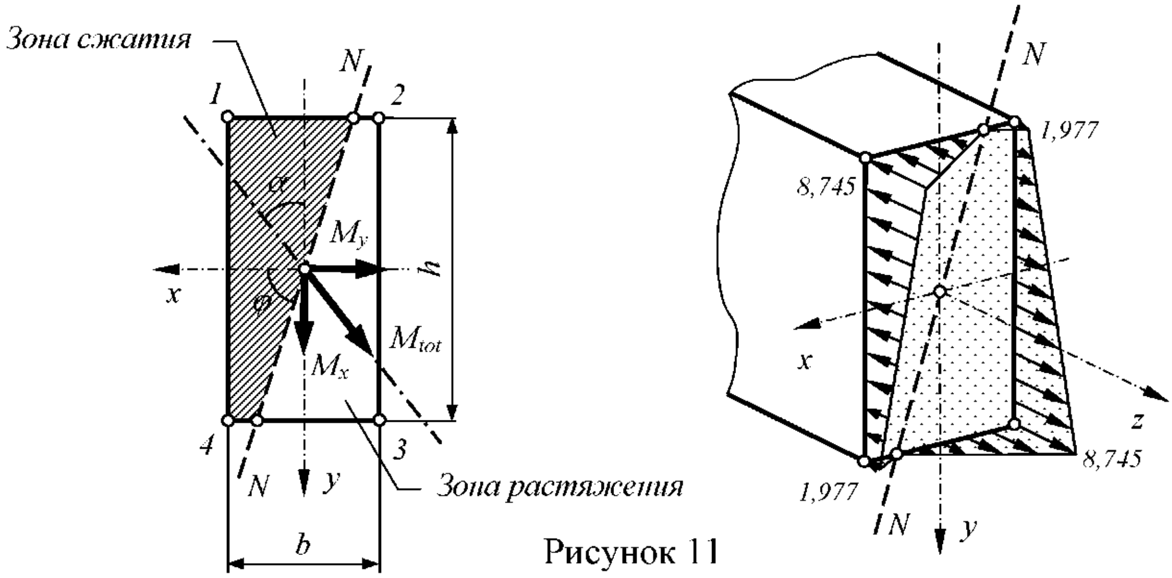


Рисунок 11

По найденным значениям строим эпюру распределения нормальных напряжений в опасном сечении в аксонометрии (рис. 11).

ЗАДАЧА № 9

РАСЧЕТ КОРОТКОГО СТЕРЖНЯ НА ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 12, сжимается продольной силой F, приложенной в точке A. Требуется вычислить:

а) наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении, выразив эти напряжения через F, и размеры сечения;

б) найти допускаемую нагрузку $[F]$ при заданных размерах сечения и расчетных сопротивлениях для чугуна на сжатие R_c и на растяжение R_t.

Исходные данные для решения задачи: $R_c = 140\,\text{МПа}$; $R_t = 24\,\text{МПа}$; $a = 4\,\text{см}$; $b = 4\,\text{см}$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Определяем геометрические характеристики сечения. Выбираем вспомогательную систему координат ξ и η, направляя эти оси, как показано на рисунке. Сечение разбиваем на два элемента. Площади элементов сечения равны:

$$A_1 = 4b \cdot a = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ см}^2;\ A_2 = 2b \cdot a = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32 \text{ см}^2.$$

Координаты центров тяжести элементов сечения:

$$\eta_1 = 0;\ \eta_2 = 0 \text{ см};\quad \xi_1 = 0;\ \xi_2 = 4 \text{ см}.$$

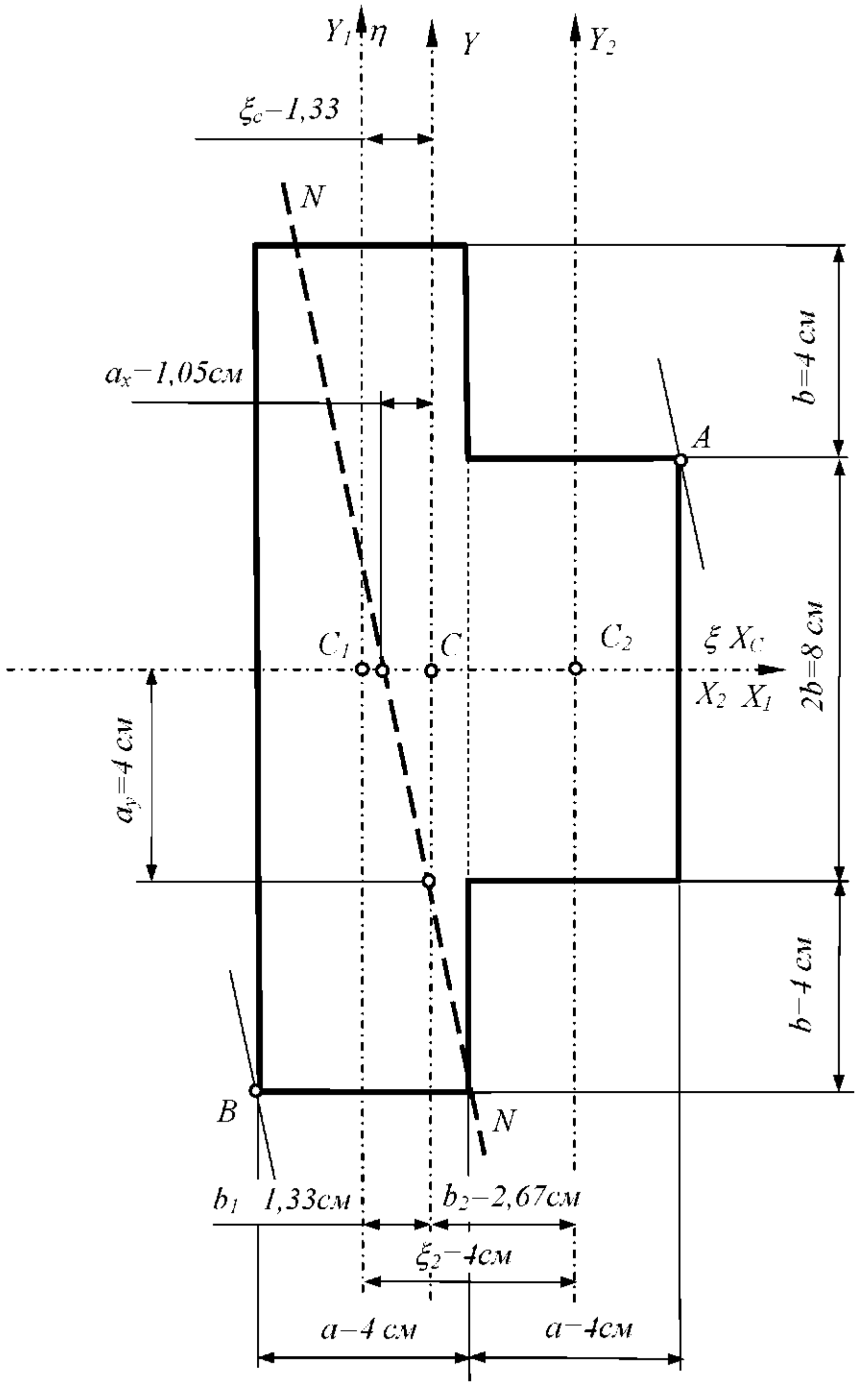


Рисунок 12

Находим координаты центра тяжести сечения в целом:

$$\eta_c = \frac{\sum A_i \eta_i}{\sum A_i} = \frac{64 \cdot 0 + 32 \cdot 0}{64 + 32} = 0 \text{ см};$$

$$\xi_c = \frac{\sum A_i \xi_i}{\sum A_i} = \frac{64 \cdot 0 + 32 \cdot 4}{64 + 32} = 1{,}33 \text{ см}.$$

Через полученную точку центра тяжести сечения проводим центральные оси X и Y. Координаты центров тяжести элементов в системе главных осей:

$$a_1 = \eta_1 - \eta_c = 0 \text{ см}; \quad a_2 = \eta_2 - \eta_c = 0 \text{ см};$$

$$b_1 = \xi_1 - \xi_c = 0 - 1{,}33 = -1{,}33 \text{ см}; \quad b_2 = \xi_2 - \xi_c = 4 - 1{,}33 = 2{,}67 \text{ см}.$$

Вычисляем осевые моменты инерции:

$$J_x = J_{x_1} + a_1^2 A_1 + J_{x_2} + a_2^2 A_2 = \frac{a \cdot (4b)^3}{12} + \frac{a \cdot (2b)^3}{12} = \frac{16^3 \cdot 4}{12} + \frac{8^3 \cdot 4}{12} = 1536 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{y_1} + b_1^2 A_1 + J_{y_2} + b_2^2 A_2 = \frac{a^3 \cdot (4b)}{12} + b_1^2 A_1 + \frac{a^3 \cdot (2b)}{12} + b_2^2 A_2 =$$

$$= \frac{16 \cdot 4^3}{12} + (-1{,}33)^2 \cdot 64 + \frac{4^3 \cdot 8}{12} + 2{,}67^2 \cdot 32 = 469{,}33 \text{ см}^4.$$

Вычисляем квадраты главных радиусов инерции:

$$i_X^2 = \frac{J_X}{A} = \frac{1536}{96} = 16 \text{ см}^2; \quad i_Y^2 = \frac{J_Y}{A} = \frac{469{,}33}{96} = 4{,}89 \text{ см}^2.$$

По чертежу определяем координаты приложения сжимающей силы P в системе главных центральных осей

$$X_P = 4{,}67 \text{ см}; \qquad Y_P = 4 \text{ см}.$$

Для определения положения опасных точек поперечного сечения находим положение нейтральной линии. Вычисляем величину отрезков, отсекаемых этой линией от главных центральных осей инерции сечения:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_P} = -\frac{4{,}89}{4{,}67} = -1{,}05 \text{ см}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_P} = -\frac{16}{4} = -4 \text{ см}.$$

Опасные точки A и B (наиболее удаленные от нейтральной линии) имеют следующие координаты: $x_A = 4{,}67$ см; $y_A = 4$ см; $x_B = -3{,}33$ см; $y_B = -8$ см. В точке A заданного сечения возникают максимальные сжимающие напряжения, а в точке B – максимальные растягивающие напряжения. Находим напряжения в опасных точках:

$$\sigma_A = -\frac{F}{A}\left[1+\frac{x_P x_A}{i_y^2}+\frac{y_P y_A}{i_x^2}\right] = -\frac{F}{96\cdot 10^{-4}}\left[1+\frac{4,67\cdot 4,67}{4,89}+\frac{4\cdot 4}{16}\right] =$$

$$= 672,91P \le R_c = 140\,\text{МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{F}{A}\left[1+\frac{x_P x_B}{i_y^2}+\frac{y_P y_B}{i_x^2}\right] = -\frac{F}{96\cdot 10^{-4}}\left[1+\frac{4,67\cdot(-3,33)}{4,89}+\frac{4\cdot(-8)}{16}\right] =$$

$$= 435,44P \le R_t = 24\,\text{МПа};$$

Из условия прочности в опасных точках сечения получаем:

$$F \le \frac{140\cdot 10^6}{672,91} = 208,05\,\text{кН}; \qquad F \le \frac{24\cdot 10^6}{435,44} = 55,12\,\text{кН}.$$

В качестве допускаемой нагрузки следует взять наименьшее из двух значений. Следовательно, допускаемая нагрузка равна: $[F] = 55,12\,\text{кН}$.

ЗАДАЧА № 10

РАСЧЕТ КРИВОГО БРУСА

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

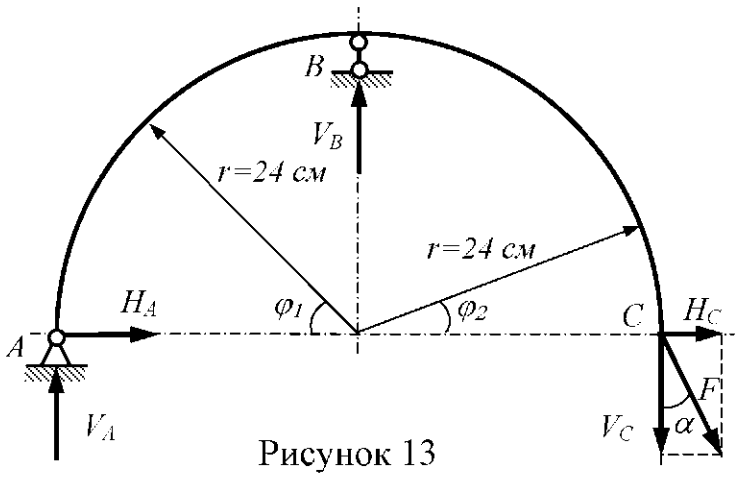


Рисунок 13

Построить эпюры M, N, Q и найти нормальные напряжения в опасном сечении кривого стержня.

Исходные данные для решения задачи: $F = 1800\,\text{Н}$; $r = 24\,\text{см}$; $d = 4,4\,\text{см}$; $\alpha = 40^\circ$; форма поперечного сечения бруса – 7-8; схема кривого бруса показана на рис. 13.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Разложим внешнюю силу F, приложенную к точке C, на вертикальную и горизонтальную составляющие.

$$H_C = F\cdot Sin\alpha = 1800\cdot 0,6428 = 1157\,\text{Н};$$

$$V_C = F\cdot Cos\alpha = 1800\cdot 0,7660 = 1379\,\text{Н}.$$

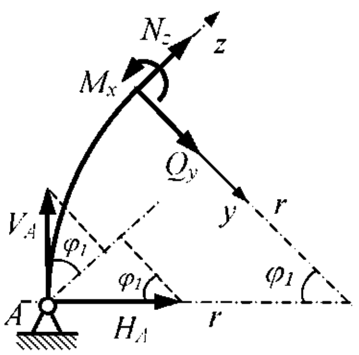
Используя уравнения равновесия статики, находим опорные реакции кривого бруса.

$$\sum x = 0;\ H_A + H_C = 0;\ H_A = -H_C = -1157\ \text{Н};$$

$$\sum m_A = 0;\ V_B \cdot r + V_C \cdot 2r = 0;\ V_B = 2V_C = 2 \cdot 1379 = 2758\ \text{Н};$$

$$\sum y = 0;\ V_A + V_B - V_C = 0;\ V_A = V_C - V_B = 1379 - 2758 = -1379\ \text{Н}.$$

Заданный кривой брус имеет два грузовых участка. Записываем аналитические выражения для внутренних силовых факторов на каждом грузовом участке. Первый грузовой участок $0 \le \varphi_1 \le 90^\circ$.



$$\sum z = 0;\ N_z + H_A \cdot Sin\varphi_1 + V_A \cdot Cos\varphi_1 = 0;$$

$$N_z = -H_A \cdot Sin\varphi_1 - V_A \cdot Cos\varphi_1;$$

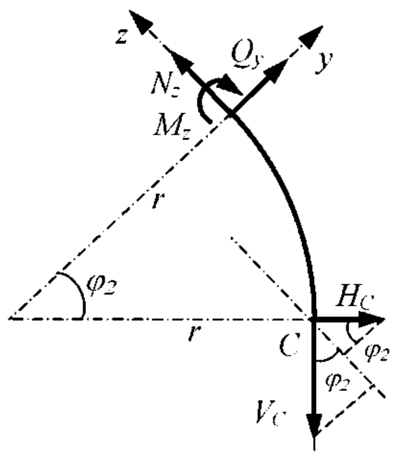
$$\sum y = 0;\ Q_y - V_A \cdot Sin\varphi_1 + H_A \cdot Cos\varphi_1 = 0;$$

$$Q_y = V_A \cdot Sin\varphi_1 - H_A \cdot Cos\varphi_1;$$

$$\sum m = 0;\ M_x - V_A r \cdot (1 - Cos\varphi_1) + H_A r \cdot Sin\varphi_1 = 0;$$

$$M_x = V_A r \cdot (1 - Cos\varphi_1) - H_A r \cdot Sin\varphi_1.$$

Второй грузовой участок $0 \le \varphi_2 \le 90^\circ$.



$$\sum z = 0;\ N_z - H_C \cdot Sin\varphi_2 - V_C \cdot Cos\varphi_2 = 0;$$

$$N_z = H_C \cdot Sin\varphi_2 + V_C \cdot Cos\varphi_2;$$

$$\sum y = 0;\ Q_y - V_C \cdot Sin\varphi_2 + H_C \cdot Cos\varphi_2 = 0;$$

$$Q_y = V_C \cdot Sin\varphi_2 - H_C \cdot Cos\varphi_2;$$

$$\sum m = 0;\ M_x + V_C r \cdot (1 - Cos\varphi_2) - H_C r \cdot Sin\varphi_2 = 0;$$

$$M_x = -V_C r \cdot (1 - Cos\varphi_2) + H_C r \cdot Sin\varphi_2$$

Задаемся шагом изменения угла $\Delta\varphi = 30^\circ$. Определяем тригонометрические функции соответствующих углов и строим эпюры внутренних силовых факторов в кривом брусе (рис. 14).

Исходя из построенных эпюр, определяем положение опасного сечения. В этом сечении $M_x = 94{,}5$ Нм, $N_z = 1773$ Н.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях кривого бруса определяются по формуле

$$\sigma_i = \pm \frac{N_z}{A} \pm \frac{M_x y_i}{SR_i},$$

где y_i – координаты опасных точек поперечного сечения, отсчитываемые от нейтральной линии;

S – статический момент сечения относительно нейтральной линии;
R_i – радиус кривизны крайних волокон кривого бруса;
A – площадь поперечного сечения кривого бруса.

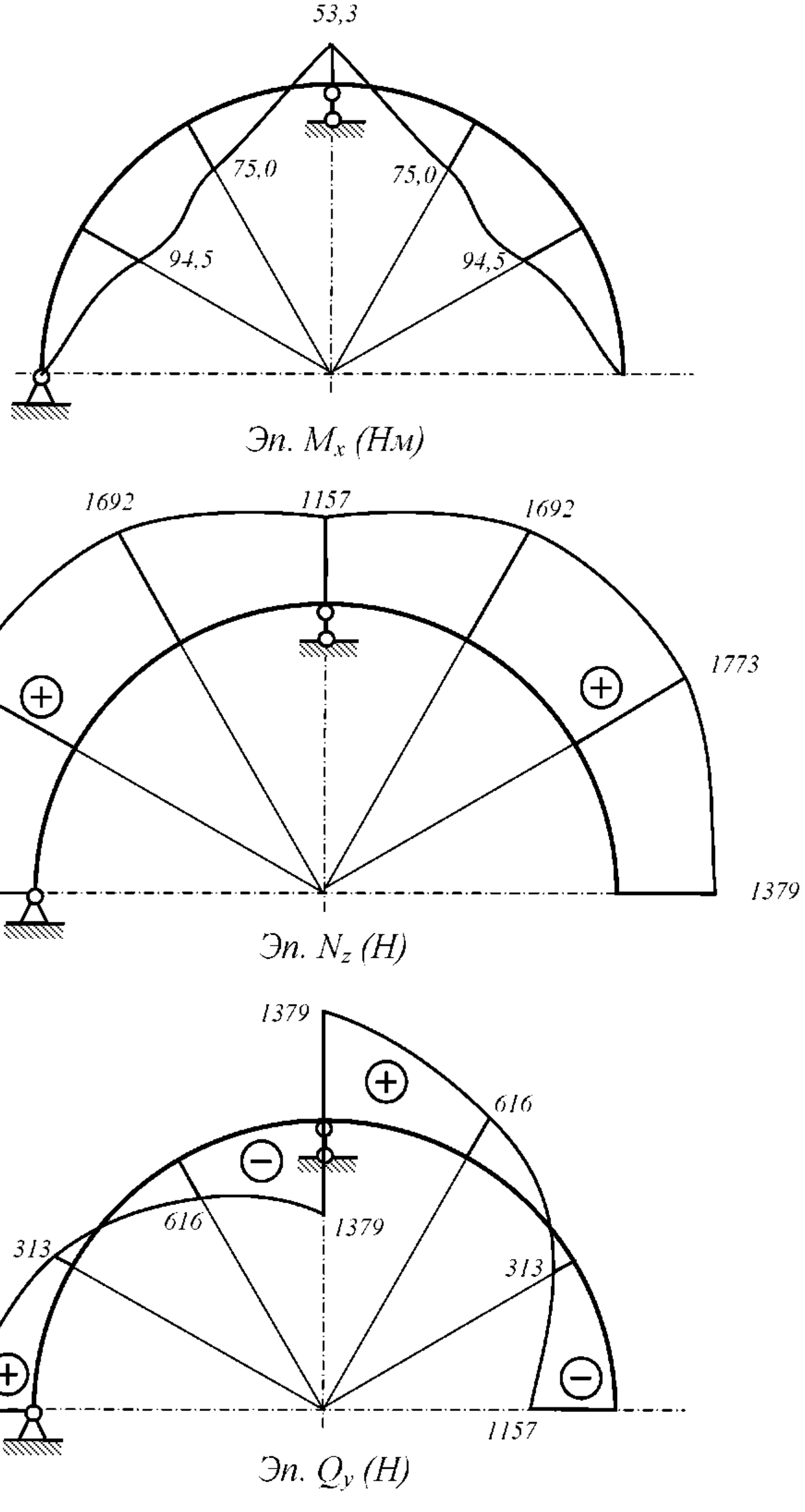


Рисунок 14

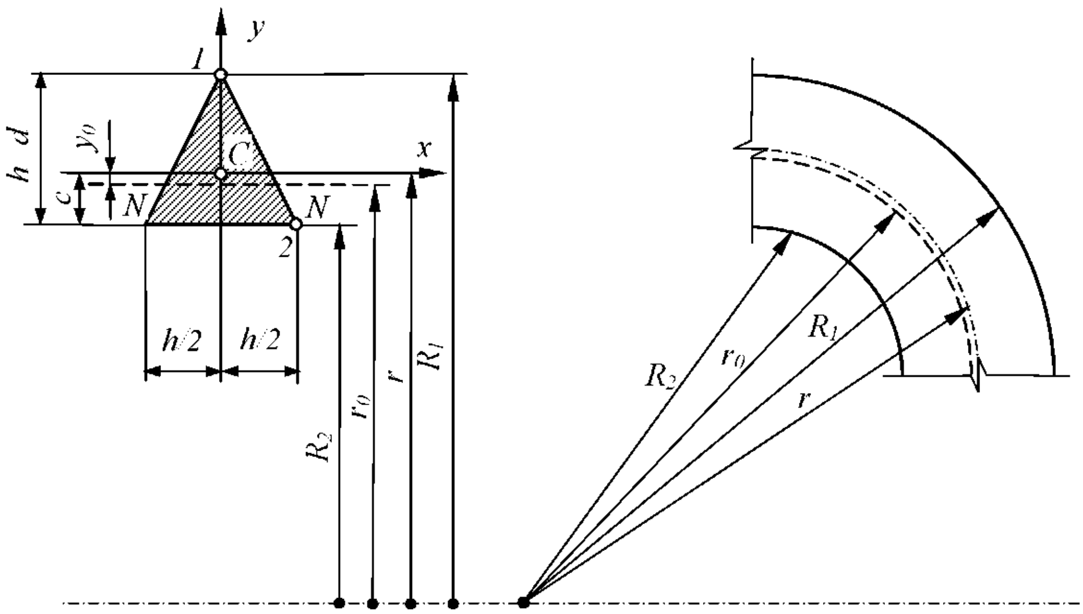


Рисунок 15

Вычисляем площадь поперечного сечения заданного кривого бруса

$$A = \frac{hb}{2} = \frac{d \cdot d}{2} = \frac{d^2}{2} = \frac{4{,}4^2}{2} = 9{,}68\,\text{см}^2.$$

Для того, чтобы вычислить величины S, R_i и y_i, определяем положение центра тяжести поперечного сечения и вычисляем радиус кривизны нейтрального слоя. Расстояние от основания треугольника до его центра тяжести равно

$$c = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}d = \frac{4{,}4}{3} = 1{,}47\,\text{см}.$$

Определяем радиусы кривизны крайних волокон кривого бруса (рис. 14)

$$R_2 = r - c = 24 - 1{,}47 = 22{,}53\,\text{см};$$

$$R_1 = R_2 + h = 22{,}53 + 4{,}4 = 26{,}93\,\text{см}.$$

Радиус кривизны нейтрального слоя треугольного поперечного сечения находим по следующей формуле

$$r_0 = \frac{h}{2\left[\frac{R_1}{h} \cdot ln\frac{R_1}{R_2} - 1\right]} = \frac{4{,}4}{2 \cdot \left[\frac{26{,}93}{4{,}4} \cdot ln\frac{26{,}93}{22{,}53} - 1\right]} = 23{,}95283\,\text{см}.$$

Определяем расстояние между нейтральной линией и главной центральной осью поперечного сечения x

$$y_0 = r - r_0 = 24 - 23{,}95283 = 0{,}04717\,\text{см}.$$

Проверяем полученный результат, используя приближенную формулу

$$y_0 \approx \frac{J_x}{r \cdot A} = \frac{10{,}41}{24 \cdot 9{,}68} = 0{,}04481 \text{ см},$$

где $J_x = \dfrac{bh^3}{36} = \dfrac{d \cdot d^3}{36} = \dfrac{d^4}{36} = \dfrac{4{,}4^4}{36} = 10{,}41 \text{ см}^4.$

Статический момент сечения относительно нейтральной линии равен

$$S = A \cdot y_0 = 9{,}68 \cdot 0{,}04717 = 0{,}4566 \text{ см}^3.$$

Опасными точками поперечного сечения являются точки наиболее удаленные от нейтрального слоя. Находим координаты опасных точек относительно нейтральной оси

$$y_1 = R_1 - r_0 = 26{,}93 - 23{,}95283 = 2{,}97717 \text{ см};$$

$$y_2 = r_0 - R_2 = 23{,}95283 - 22{,}53 = 1{,}42283 \text{ см}.$$

Вычисляем нормальные напряжения в опасных точках сечения. В точке 1 напряжения от действия продольной силы N_z будут растягивающими, а от действия изгибающего момента M_x – сжимающими. Тогда

$$\sigma_1 = \frac{1773}{9{,}68 \cdot 10^{-4}} - \frac{94{,}5 \cdot 2{,}97717}{0{,}4566 \cdot 10^{-6} \cdot 26{,}93} = 1{,}83 - 22{,}88 = -21{,}05 \text{ МПа}.$$

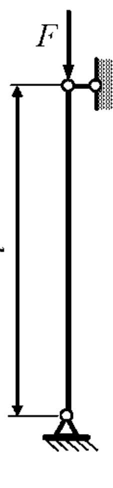
В точке 2 напряжения от действия продольной силы N_z будут растягивающими, а от действия изгибающего момента M_x – растягивающими. Тогда

$$\sigma_2 = \frac{1773}{9{,}68 \cdot 10^{-4}} + \frac{94{,}5 \cdot 1{,}42283}{0{,}4566 \cdot 10^{-6} \cdot 22{,}53} = 1{,}83 + 13{,}07 = 14{,}90 \text{ МПа}.$$

ЗАДАЧА № 11

РАСЧЕТ СЖАТОЙ СТОЙКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ



Стальной стержень длиной l сжимается силой F.

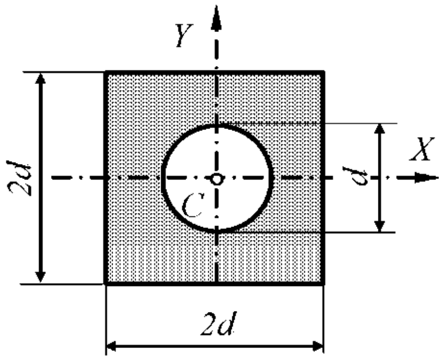
Требуется:

а) найти размеры поперечного сечения при допускаемом напряжении на простое сжатие $R = 160$ МПа (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом продольного изгиба $\varphi = 0{,}5$);

б) найти значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Исходные данные для решения задачи: $F = 400$ кН; $l = 2{,}4$ м; схема поперечного сечения стойки 8; схема закрепления концов стойки 3–4.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ



Вычисляем геометрические характеристики заданного поперечного сечения сжатого стержня.

Площадь сечения равна:

$$A = 2d \cdot 2d - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 3{,}215d^2 .$$

Находим минимальный осевой момент инерции заданного поперечного сечения:

$$J_{\min} = J_X = J_Y = \frac{(2d)^4}{12} - \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 1{,}284d^4 .$$

Определяем величину минимального радиуса инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / A} = \sqrt{1{,}284d^4 / (3{,}215d^2)} = 0{,}632d .$$

Находим размеры поперечного сечения стойки из условия устойчивости.

Первая попытка. Принимаем $\varphi_1 = 0{,}5$. Тогда из условия устойчивости найдем требуемую площадь поперечного сечения стержня:

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \varphi R$$

$$A_{тр} = \frac{F}{\varphi R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^2 = 50\ \text{см}^2.$$

Учитывая ранее полученные выражения для величин A и i_{min}, имеем:

$$d = \sqrt{A/3{,}215} = \sqrt{50/3{,}215} = 3{,}94\ \text{см},\quad i_{\min} = 0{,}632 \cdot 3{,}94 = 2{,}49\ \text{см}.$$

Вычисляем гибкость стержня по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1{,}0 \cdot 240}{2{,}49} = 96{,}29$$

где $\mu = 1{,}0$ – коэффициент приведенной длины, выбираемый в зависимости от условий закрепления концов стержня.

Табличное значение коэффициента продольного изгиба для стержней из стали марки Ст 3 при гибкости $\lambda = 96{,}29$ находится интерполяцией

$$\varphi_1' = 0{,}665 - \frac{0{,}665 - 0{,}599}{10} \cdot 6{,}29 = 0{,}623 .$$

Вторая попытка: $\varphi_2 = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \dfrac{0{,}5 + 0{,}623}{2} = 0{,}562$.

$$A_{тр}=\frac{F}{\varphi R}=\frac{400\cdot10^3}{0,562\cdot160\cdot10^6}=44,48\cdot10^{-4}\,\text{м}^2=44,48\ \text{см}^2.$$

$$d=\sqrt{A/3,215}=\sqrt{44,48/3,215}=3,72\,\text{см},\quad i_{\min}=0,632\cdot3,72=2,35\,\text{см}.$$

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_{\min}}=\frac{1,0\cdot240}{2,35}=102,09.$$

$$\varphi_2'=0,599-\frac{0,599-0,537}{10}\cdot2,09=0,586.$$

Третья попытка: $\varphi_3=\dfrac{\varphi_2+\varphi_2'}{2}=\dfrac{0,562+0,586}{2}=0,574$.

$$A_{тр}=\frac{F}{\varphi R}=\frac{400\cdot10^3}{0,574\cdot160\cdot10^6}=43,55\cdot10^{-4}\,\text{м}^2=43,55\ \text{см}^2.$$

$$d=\sqrt{A/3,215}=\sqrt{43,55/3,215}=3,68\,\text{см},\quad i_{\min}=0,632\cdot3,68=2,33\,\text{см}.$$

$$\lambda=\frac{\mu l}{i_{\min}}=\frac{1,0\cdot240}{2,33}=103,18.$$

$$\varphi_3'=0,599-\frac{0,599-0,537}{10}\cdot3,18=0,579.$$

Определяем величину расчетных напряжений в сечении стержня:

$$\sigma=\frac{F}{\varphi A}=\frac{400\cdot10^3}{0,579\cdot43,55\cdot10^{-4}}=158,64\ \text{МПа}<R=160\ \text{МПа}.$$

Недогрузка составляет: $\dfrac{160-158,64}{160}\cdot100\%=0,85\%<5\%$, что допустимо.

Находим значение критической силы. Расчетная гибкость стержня $\lambda=103,18$, что больше предельного значения $\lambda=100$. Следовательно, при определении критической силы необходимо пользоваться формулой Эйлера:

$$F_{cr}=\sigma_{cr}A=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}A=\frac{3,14^2\cdot2\cdot10^{11}}{103,18^2}\cdot43,55\cdot10^{-4}=806,65\cdot10^3\,\text{Н}=806,65\ \text{кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости равен:

$$k_y=\frac{F_{cr}}{F}=\frac{806,65}{400}=2,017.$$

ЗАДАЧА № 12

РАСЧЕТ БАЛКИ НА ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

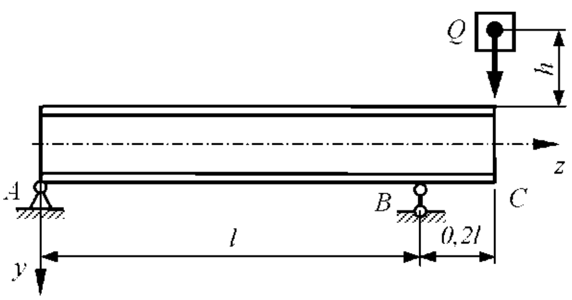


Рисунок 15

На двутавровую балку, свободно лежащую на двух жестких опорах, с высоты h падает груз Q (рис. 15).

Требуется:

1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;
2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т.е. осадка от груза 1 кН) равна α;
3) сравнить полученные результаты.

Исходные данные для решения задачи: Q = 400 Н; $l = 2{,}8$ м; $h = 4$ см; $\alpha = 28 \cdot 10^{-3}$ м/кН; двутавр № 24а, схема балки 8.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для ответа на первый вопрос задачи необходимо найти величину опорных реакций балки от статического воздействия груза Q (рис. 16). Используя уравнения равновесия статики, получаем:

$$\sum m_A = 0;\ V_B \cdot l - Q \cdot (l + 0{,}2l) = 0;\ V_B = Q \cdot (l + 0{,}2l)/l = 1{,}2Q;$$

$$\sum m_B = 0;\ V_A \cdot l + Q \cdot 0{,}2l = 0;\ V_A = -Q \cdot 0{,}2l/l = -0{,}2Q.$$

Проверка:

$$\sum y = 0;\ V_A + V_B - Q = 0;\ -0{,}2Q + 1{,}2Q - Q = 0.$$

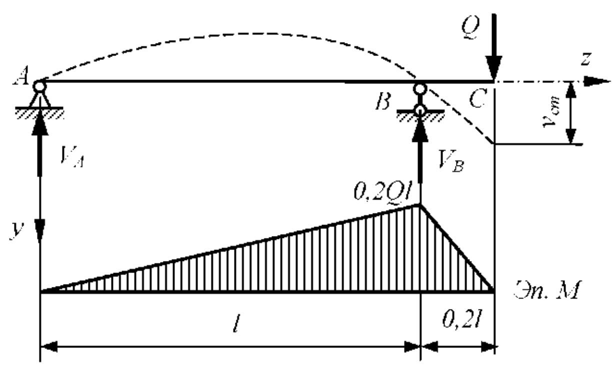


Рисунок 16

Строим эпюру изгибающих моментов в заданной балке от статического действия груза Q. Записываем уравнение метода начальных параметров для определения прогибов оси балки

$$v_i = v_0 + \theta_0 z_i - \left.\frac{V_A z_i^3}{6EJ_x}\right|_0^{1,2l} - \left.\frac{V_B (z_i - l)^3}{6EJ_x}\right|_l^{1,2l}.$$

Начальные параметры задачи v_0 и θ_0 определяем исходя из следующих граничных условий:

$z_i = 0$; $v(0) = 0$, отсюда $v_0 = 0$;

$z_i = l$; $v(l) = 0$, отсюда $0 = 0 + \theta_0 l - \dfrac{V_A l^3}{6EJ_x}$, тогда $\theta_0 = \dfrac{V_A l^2}{6EJ_x} = \dfrac{-0{,}2Ql^2}{6EJ_x}$.

Вычисляем вертикальное перемещение балки в точке C, где приложена сила Q, при $z_i = 1{,}2l$

$$v_{ст} = 0 + \frac{-0{,}2Ql^2}{6EJ_x}\cdot 1{,}2l - \frac{-0{,}2Q\cdot(1{,}2l)^3}{6EJ_x} - \frac{1{,}2Q\cdot(1{,}2l-l)^3}{6EJ_x} = 0{,}016\frac{Ql^3}{EJ_x};$$

$$v_{ст} = 0{,}016\frac{Ql^3}{EJ_x} = 0{,}016\cdot\frac{400\cdot 2{,}8^3}{2\cdot 10^{11}\cdot 3800\cdot 10^{-8}} = 1{,}849\cdot 10^{-5}\,\text{м}.$$

Вычисляем динамический коэффициент по следующей формуле

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\cdot 4\cdot 10^{-2}}{1{,}849\cdot 10^{-5}}} = 66{,}79.$$

Максимальный изгибающий момент, возникающий в балке от статического действия груза Q, равен

$$M_{\max} = 0{,}2Ql = 0{,}2\cdot 400\cdot 2{,}8 = 224\,\text{Нм}.$$

Вычисляем величину максимальных нормальных напряжений от статического действия груза Q

$$\sigma_{\max}^{ст} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{224}{317\cdot 10^{-6}} = 0{,}707\cdot 10^{-6}\,\text{Па} = 0{,}707\,\text{МПа}.$$

Здесь $W_x = 317\,\text{см}^3$ – момент сопротивления двутавра № 24а, определяемый по сортаменту прокатной стали.

Максимальные нормальные напряжения от ударного действия падающего груза Q равны

$$\sigma_{\max}^{дин} = \sigma_{\max}^{ст}\cdot k_д = 0{,}707\cdot 66{,}79 = 47{,}22\ \text{МПа}.$$

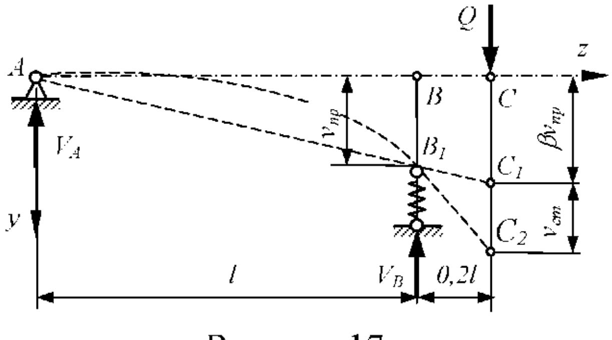


Рисунок 17

Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим деформированное состояние балки при замене ее правой опоры пружиной, имеющей заданную податливость α (рис. 17). При указанной замене, прогиб балки от статического действия груза Q будет равен:

$$v'_{ст} = v_{ст} + \beta v_{пр}.$$

Как следует из чертежа треугольник ABB_1 подобен треугольнику ACC_1. Исходя из этого подобия, имеем

$$\frac{v_{пр}}{l} = \frac{\beta v_{пр}}{1{,}2l}, \text{ тогда } \beta = 1{,}2 .$$

Осадка пружины возникает от действия опорной реакции V_B при статическом приложении к балке груза Q и равна

$$v_{пр} = \alpha V_B = 28 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}2 \cdot 400 = 1344 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Прогиб балки в точке C при статическом действии силы Q

$$v'_{ст} = 1{,}849 \cdot 10^{-5} + 1344 \cdot 10^{-5} = 1345{,}849 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Вычисляем величину динамического коэффициента при подпружиненной правой опоре

$$k'_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v'_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{1345{,}849 \cdot 10^{-5}}} = 3{,}64 .$$

Максимальные нормальные напряжения от ударного действия падающего груза Q при замене правой опоры на пружину равны

$$\sigma'^{дин}_{\max} = \sigma^{ст}_{\max} \cdot k'_д = 0{,}707 \cdot 3{,}64 = 2{,}57 \text{ МПа}.$$

Таким образом, при замене жесткой опоры в точке В пружиной максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении балки уменьшаются в

$$\frac{\sigma^{ст}_{\max}}{\sigma'^{дин}_{\max}} = \frac{47{,}22}{2{,}57} = 18{,}374 \text{ раза}.$$