

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Курс лекций

В курсе лекций рассмотрены основные виды нагружения материалов при статическом и динамическом нагружении. Разъяснены общие закономерности сопротивления материалов и их поведение при различных и комбинированных способах нагрузки, являющиеся теоретической основой для изучения последующих разделов данной дисциплины и ряда специальных технических дисциплин. Приведены практические примеры, соответствующие специфике специальности.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные понятия и определения сопротивления материалов.....	4
2. Центральное растяжение – сжатие.....	12
3. Сдвиг. Срез. Смятие.....	25
4. Геометрические характеристики плоских сечений.....	30
5. Кручение.....	33
6. Прямой поперечный изгиб.....	45
7. Внеклентренное растяжение.....	65
8. Сложное сопротивление.....	68
9. Статически определимые и неопределимые стержневые системы.....	81
10. Тонкостенные сосуды и оболочки.....	90
11. Устойчивость сжатых стержней.....	92
12. Прочность конструкций при переменных напряжениях.....	103
13. Удар.....	111
14. Усталость. Расчет по несущей способности.....	114
ЛИТЕРАТУРА.....	115

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.

Сопротивление материалов - наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций, машин и механизмов или инженерных сооружений.

Краткий исторический обзор. Начало развития сопротивления материалов относят к 1638 году и связывают с именем итальянского ученого Галилея, выполнившего первые теоретические расчеты балок при изгибе. В 1660 году Роберт Гук сформулировал закон линейной пропорциональности между деформациями и внутренними силами.

С развитием техники развивалась и наука о сопротивлении материалов. Много в этой области сделано русскими учеными. М.В. Ломоносов разработал основы учения о твердости и сконструировал прибор для раздавливания материалов. Яков и Даниил Бернулли в начале XVIII столетия исследовали деформацию изгиба балок. Л. Эйлер решил задачу об устойчивости сжатого стержня. В 1850 году Д.И. Журавский разработал теорию скальвания при изгибе. Он же создал метод расчета составных балок. Широко известны работы Ф.С. Ясинского, И.Г. Крылова, А.Н. Динника, Н.В. Корноухова и др.

1.1. Основные понятия

Прочностью называется способность тел выдерживать необходимые внешние нагрузки в течение длительного времени не разрушаясь.

Жесткость - способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам в отношении деформаций (изменение формы и размеров). При заданных нагрузках деформации не должны превышать определенных величин, устанавливаемых в соответствии с требованиями к конструкции.

Устойчивостью называют свойство элементов машин или сооружений сохранять первоначальную форму упругого равновесия. Признаком потери устойчивости является внезапная смена одной формы равновесия другой.

Основная задача курса сопротивления материалов - рациональный выбор формы и размеров поперечного сечения элементов, обеспечивающих прочность, жесткость, устойчивость и долговечность при минимальном расходе материалов.

1.2. Допущения, принимаемые в курсе сопротивления материалов

Исследования прочности и жесткости элементов конструкций выполняются с использованием идеализированных расчетных схем, отражающих наиболее существенные свойства реальных объектов. При разработке расчетной схемы особое внимание уделяют схематизации

геометрической формы, условию описания и условию нагружения рассматриваемого элемента конструкции.

Модели формы. В зависимости от формы и соотношений размеров реальный объект представляют в виде стержня с прямолинейной или криволинейной осью; пластины или оболочки; массива (табл. 1.1).

Таблица 1.1. Модели формы

Наименование	Определение	Рисунок
Стержень, брус	Элемент, два размера которого малы по сравнению с третьим	
Пластина, оболочка	Элемент, один размер которого мал по сравнению с двумя другими	
Массив	Элемент, все три размера которого имеют один порядок	

Схематизация условий опирания уже рассматривалась при решении задач механики абсолютно твердых тел. Различают следующие виды опирания стержней: неподвижное (зашемление), шарнирно-неподвижное и шарнирно-подвижное (рис. 1.1).

Зашемление ограничивает все перемещения закрепленного конца или края. Шарнирно-неподвижная опора допускает поворот вокруг оси шарнира, шарнирно-подвижная опора кроме поворота вокруг шарнира допускает еще осевые смещения стержня.

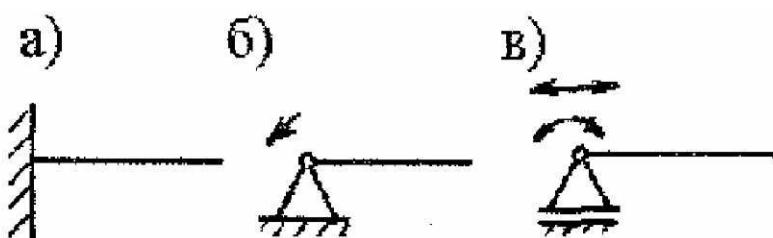


Рис. 1.1

Модели нагрузления. Различают распределенные и сосредоточенные внешние силы, действующие на элементы конструкции.

Распределенные силы:

а) объемные силы - силы, распределенные по всему объему (собственный вес, силы инерции). Объемные силы измеряются силой, приходящейся на единицу объема. Единица измерения – [N/m^3]

б) поверхностные силы - силы, распределенные по площади (рис. 1.2). Например, давление от слоя материала. Измеряются нагрузкой p , приходящейся на единицу поверхности. Здесь p - интенсивность поверхностной нагрузки. Единица измерения p - $[H/m^2]$;

с) линейно распределенные силы характеризуются интенсивностью линейно распределенной нагрузки, которая измеряется нагрузкой, приходящейся на единицу длины (рис. 1.2, б), q . Единица измерения q - $[H\cdot m]$.

Сосредоточенные силы

Сила P , приложенная в точке, называется сосредоточенной (рис. 1.2, в). Сосредоточенных сил в действительности нет. Есть силы, распределенные по малой площадке. Для упрощения расчета такую нагрузку заменяют ее равнодействующей и прикладывают ее в точке. Единица измерения P - $[H]$.

По характеру изменения во времени нагрузки подразделяются на статические (рис. 1.3, а) и переменные (рис. 1.3, б).

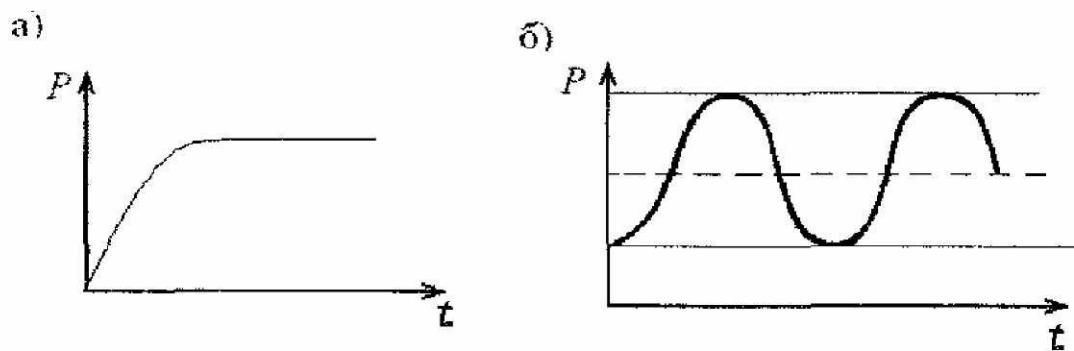


Рис. 1.3

Основные гипотезы сопротивления материалов (модель материала). Так как реальные материалы обладают весьма сложной структурой, то для упрощения их заменяют некоторой идеальной средой, приняв ряд гипотез (допущений).

- Полагаем, что материал заполняет объем тела сплошным образом и является непрерывным и однородным - **гипотеза сплошности, непрерывности и однородности.**

- Материал **изотропен**, т.е. обладает одинаковыми свойствами по различным направлениям. Наряду с изотропными материалами рассматривают и анизотропные материалы (древесина).

- Полагаем, что материал **идеально упруг**, т.е. остаточных деформаций не возникает, форма и размеры тела полностью восстанавливаются после снятия нагрузок.

- Будем рассматривать область **малых деформаций**, поэтому считаем, что тело незначительно меняет свою форму (**принцип начальных размеров**).

- Принимаем допущение линейной зависимости между

перемещениями и нагрузкой, позволяющее применить **принцип суперпозиции (принцип независимости действия сил)**: упругие перемещения и внутренние силы не зависят от порядка приложения сил; действие суммы сил равно сумме действия отдельных сил.

- Положим, что конкретный способ приложения внешних нагрузок не влияет на распространение внутренних сил и напряжений в точках внутри элемента, удаленных от точки приложения нагрузки на расстояние соизмеримое с размерами поперечного сечения стержня (**принцип Сен-Венана**).

- Считаем, что до приложения нагрузки в теле нет начальных напряжений.

1.3. Метод сечений

Под действием внешних сил в теле возникают распределенные внутренние силы или силы упругости, которые и сопротивляются деформации. До тех пор, пока внутренние силы не превысили сил межмолекулярных связей, элемент конструкции существует не разрушаясь. Для определения равнодействующих внутренних усилий применяют **метод сечений**, который состоит в следующем.

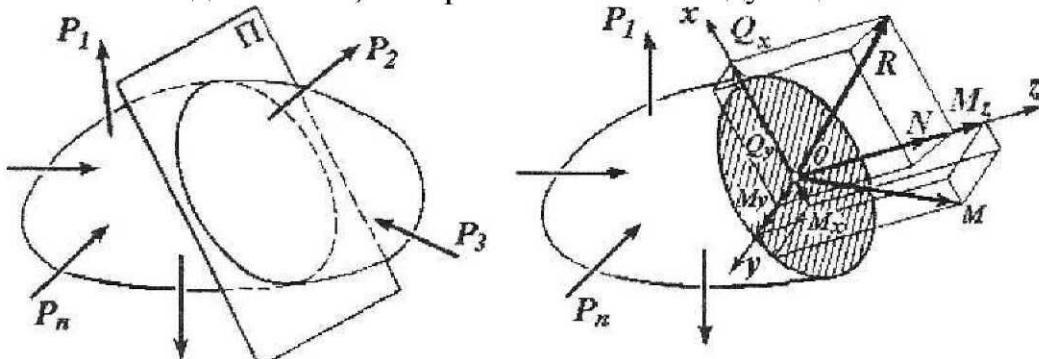


Рис. 1.4

Рассмотрим тело произвольной формы (рис. 1.4), находящееся в равновесии под действием пространственной системы внешних сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Мысленно рассечем это тело на две части плоскостью Π и рассмотрим одну из частей, например левую. Для сохранения равновесия рассматриваемой левой части необходимо заменить действие отброшенной (правой) части на другую (оставшуюся) часть системой внутренних сил в сечении. Внутренние силы распределены по сечению сложным образом. Однако в результате приведения системы внутренних сил к центру тяжести O сечения можно определить главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M} внутренних сил, действующих по сечению.

Поместим в центре тяжести сечения (точке O) начало системы координат $OXYZ$, направив ось Z по нормали к сечению, и разложим главный вектор \vec{R} и главный момент \vec{M} на составляющие по осям:

$$\vec{R} = \vec{N}_z + \vec{Q}_x + \vec{Q}_y; \\ \vec{M} = \vec{M}_z + \vec{M}_x + \vec{M}_y$$

Эти составляющие называются внутренними силовыми факторами в сечении.

Составляющая \vec{N}_z называется **продольной силой**. Составляющие \vec{Q}_x и \vec{Q}_y - **поперечные силы**, лежат в плоскости сечения. Составляющая \vec{M}_z главного момента - **крутящий момент**. Моменты \vec{M}_x и \vec{M}_y - **изгибающие моменты**. Чтобы вычислить перечисленные силовые факторы \vec{N}_z , \vec{Q}_x , \vec{Q}_y , \vec{M}_z , \vec{M}_y , \vec{M}_x , необходимо решить шесть уравнений равновесия для одной из отсеченных частей:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0 \\ \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

Таким образом, если внешние силы заданы, то внутренние силовые факторы определяются на основе уравнений равновесия как алгебраические суммы проекций внешних сил и моментов, действующих на одну из сторон от рассматриваемого сечения.

В частном случае в поперечном сечении могут возникать:

1. Только продольная сила. Такое напряженное состояние называется **растяжением** (если продольная сила направлена от сечения) или **сжатием** (если продольная сила направлена к сечению).

2. Только поперечные силы \vec{Q}_x и \vec{Q}_y . Это случай **сдвига**.

3. Только крутящий момент \vec{M}_z . Это случай **кручения**.

4. Только изгибающий момент \vec{M}_x или \vec{M}_y . Это случай **изгиба**.

5. Несколько усилий, например изгибающий и крутящий моменты. Это случаи **сложных деформаций** (или **сложного сопротивления**), которые будут рассмотрены в дальнейшем.

1.4. Деформации и напряжения.

Напряженное состояние в точке

Деформации. Под действием нагрузки элемент конструкции деформируется, то есть форма и размер его меняются. Различают линейные и угловые деформации; а также упругие и пластичные деформации.

Изменение линейных размеров тела под действием внешних сил называется **линейной деформацией** ($\Delta a, \Delta v$), а изменение угловых размеров - угловой деформацией (α, β) (рис. 1.5). Обычно при расчетах вводят понятие о **коэффициенте относительной линейной деформации** (безразмерная величина).

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_b = \frac{\Delta b}{b}.$$

a)

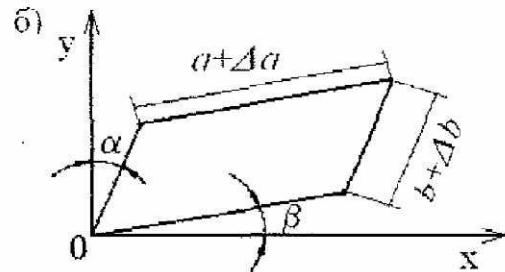
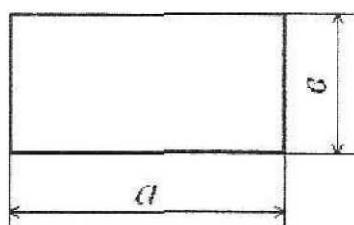


Рис. 1.5

Если после снятия внешней нагрузки деформация исчезает, то ее называют **упругой**, а если не исчезает, то ее называют **пластичной**.

Упругостью называют свойство тела восстанавливать свою форму после снятия внешней нагрузки.

Пластичностью называют свойство тела сохранять после разгрузки полностью или частично деформацию, полученную при нагружении.

Ползучестью называют свойство тела увеличивать со временем деформацию при постоянном напряжении.

Напряжения. Было отмечено, что внутренние силы N , Q , M не сосредоточенные, а распределенные. Чтобы оценить их интенсивность вводится понятие напряжения.

Рассмотрим сечение тела произвольной плоскостью Π (рис. 1.6). В окрестности некоторой точки сечения K выделим элементарную площадку ΔF , а равнодействующую внутренних сил на этой площадке обозначим $\vec{\Delta R}$.

Отношение $\vec{\Delta R}/\Delta F = \vec{p}_{cp}$ представляет собой среднее напряжение на данной площадке. Если площадку ΔF уменьшать (стягивать в точку), то в пределах получим **напряжение в точке**.

$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta R}}{\Delta F}$$

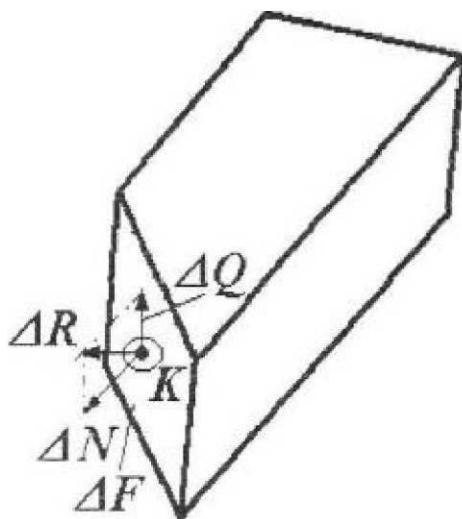


рис.1.6

Напряжение - это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке сечения.

Внутренняя сила может действовать под определенным углом к сечению. Ее можно разложить на составляющие.

$$\Delta \vec{R} = \Delta \vec{N} + \Delta \vec{Q},$$

где $\Delta \vec{N}$ - составляющая внутренней силы на нормаль к сечению в точке К а $\Delta \vec{Q}$ - составляющая внутренней силы на плоскость сечения соответственно:

$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \sigma$ - нормальное напряжение

$$\left(Pa, \frac{H}{cm^2}, \frac{H}{mm^2} \right)$$

$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F} = \tau$ - касательное напряжение

$$\left(Pa, \frac{H}{cm^2}, \frac{H}{mm^2} \right)$$

Очевидно, что модуль напряжения в точке равен:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

Если мысленно вырезать вокруг какой-нибудь точки тела элемент в виде бесконечно малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать следующие напряжения:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (рис. 1.7).

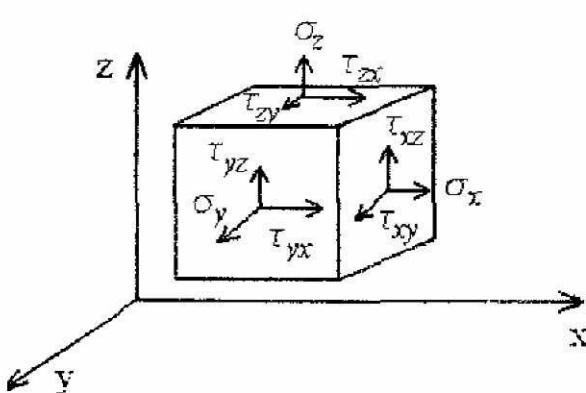


Рис. 1.7

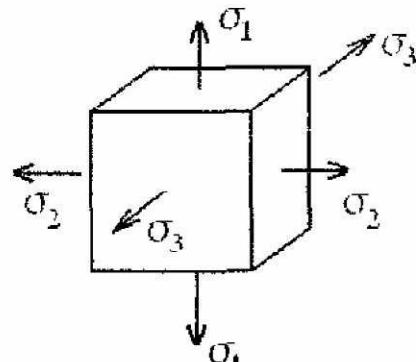


Рис. 1.8.

В индексах при касательном напряжении, например, τ_{xy} - первый индекс указывает ось нормальную к рассматриваемой площадке, а второй - на ось параллельную вектору данного касательного напряжения.

Если по граням кубика действуют только нормальные напряжения: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, то они называются **главными напряжениями**, а соответствующие площадки - **главными площадками**.

Главные напряжения нумеруются в порядке их убывания (с учетом знака): $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (рис. 1.8). Растягивающие напряжения направлены наружу и считаются положительными. Сжимающие напряжения направлены внутрь кубика и считаются отрицательными. Поворот системы координат $OXYZ$ вокруг точки O приводит к перераспределению

напряжений, действующих по элементарным площадкам.

В теории упругости показывается, что главные площадки в окрестности любой точки тела всегда существуют. Если все три главные напряжения не нулевые ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$), то такое напряженное состояние называют трехосным или объемным. Если одно из главных напряжений нулевое, а два отличные от нуля, то это двухосное или плоское напряженное состояние. Если только одно из главных напряжений ненулевое ($\sigma_1 \neq 0$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), то это одноосное или линейное напряженное состояние.

В простейшем случае одноосного напряженного состояния проверка прочности сводится к сравнению действующих напряжений с допускаемыми нормальными или касательными, то есть к проверке выполнения неравенств вида:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad \tau \leq [\tau]$$

Допускаемые напряжения ($[\sigma]$ или $[\tau]$) - это такие максимальные напряжения, при которых не происходит разрушение данной конкретной детали (или конструкции) и деталь работает в условиях упругих деформаций.

В заключение в таблице 1.2 сведены основные виды объемных и местных деформаций, изучаемых в курсе сопротивления материалов.

Таблица 1.2

Основные виды деформаций

Виды деформаций	Схема нагружения
Объемные деформации	
Растяжение	
Сжатие	
Кручение	
Поперечный изгиб	
Продольный изгиб	
Сдвиг или срез	
Местные деформации	
Смятие	
Контактные деформации	

2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ

На настоящей и последующих главах будем рассматривать простые виды деформации. Растяжение и сжатие будем учитывать вместе, так как для этих видов деформаций справедливы одни и те же формулы. Разница только в знаках.

2.1. Определение внутренних усилий, напряжений и деформаций при растяжении и сжатии**2.1.1. Внутренние усилия**

Растяжением или сжатием стержня называется деформация

стержня под действием двух равных противоположно направленных сил, приложенных к торцевым сечениям и направленных вдоль продольной оси стержня, проходящей через центр тяжести сечений. Такое растяжение (сжатие) называется центральным или осевым (рис. 2.1).

Если силы направлены наружу от торцевых сечений, то имеет место растяжение стержня (рис. 2.1, а). Если силы направлены к торцевым сечениям, стержень подвергается сжатию (рис. 2.1, б). Примером растянутых и сжатых стержней могут служить канаты, колонны, штоки поршней, винты подъемников и т.д.

В случае защемления одного конца стержня (рис. 1.1, а) переход к схеме (рис. 2.1, а) осуществляется устраниением связи и заменой ее реакцией связи. Из условия равновесия $\Sigma z = A - P = 0$, реакция равна силе P и противоположно ей направлена.

Внешнее нагружение может осуществляться различными способами, однако в соответствии с принципом Сен-Бенана, при расчете на прочность и жесткость они во внимание не принимаются.

Внутренние усилия сводятся при растяжении-сжатии к продольной силе N , которая определяется методом сечения. В примерах, приведенных на рис. 2.1, продольная сила постоянна по длине стержня.

Отсюда вытекает следующее определение.

Растяжением (сжатием) называется такой вид напряженного состояния, при котором в поперечном сечении стержня возникает только продольная сила.

Эпюорой продольных сил называется график, показывающий изменение продольной силы по оси стержня.

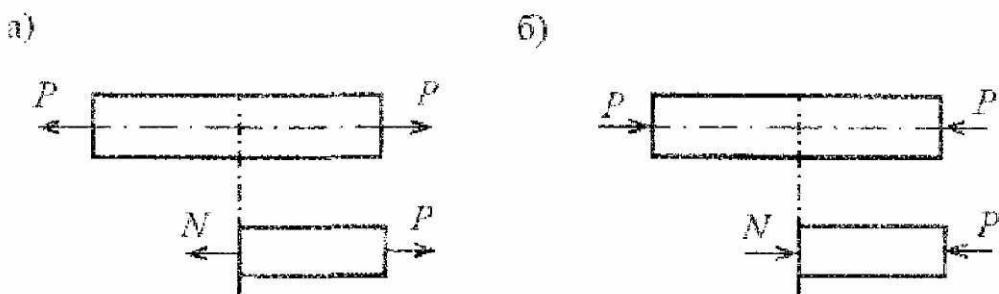


Рис. 2.1

Правило знаков: растягивающие продольные силы (направленные от сечения) считаются положительными, сжимающие (направленные к сечению) - отрицательными.

Эпюру внутренних продольных сил целесообразно строить в том случае, если стержень нагружен несколькими внешними силами, как это показано на примере рис. 2.2.

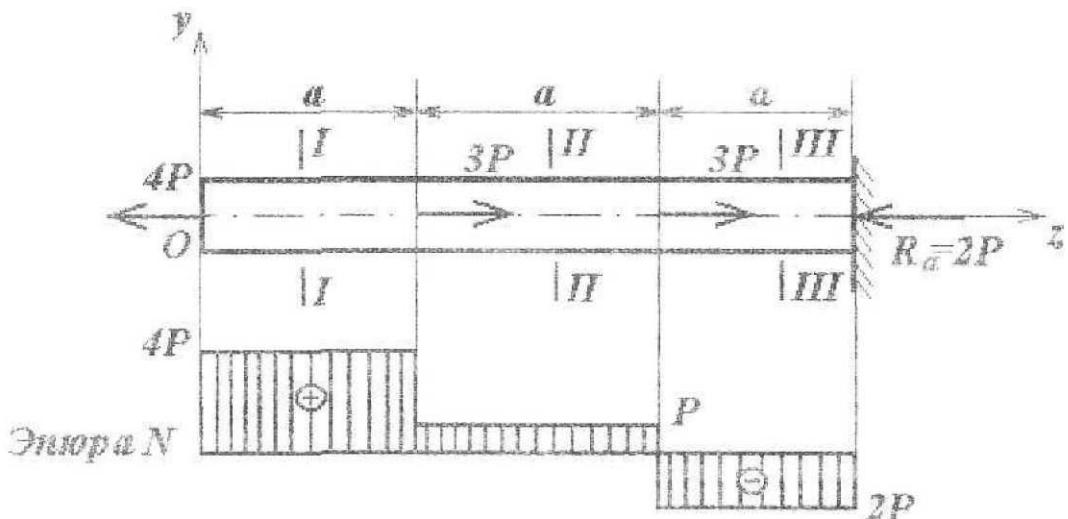


Рис. 2.2

Для определения внутренних сил проводят столько сечений, сколько имеется участков с однотипными нагрузлениями. За границы участков принимают начало и конец стержня, а также все точки приложения внешних нагрузок. Для каждого i -го участка определяют силу N_i как сумму внешних сил, действующих по одну сторону сечения. Знак внешних сил определяют по введенному выше правилу знаков.

Стержень на рис. 2.2, а имеет три участка.

Для первого участка ($0 < z_1 < a$) к левой части стержня приложена одна внешняя сила $4P$, направленная от сечения 1-1, следовательно, $N_1 = 4P$.

Для второго участка ($2a < z_2 < 3a$) к левой части стержня приложены две нагрузки: одна из них $4P$ направленная от сечения 2-2, а другая $3P$ - направленная к сечению 2-2: $N_2 = 4P - 3P$.

Для третьего участка ($2a < z_3 < 3a$) к правой части стержня приложена реакция опоры $A = 2P$ ($\sum z = 0: -4P + 3P - 3P - A = 0$), которая направлена к сечению 3-3, следовательно: $N_3 = -2P$.

Эпюра продольных сил N строится под схемой нагружения (рис. 2.2, б) без масштаба, так как носит качественный характер, позволяя выделить **опасный**(наиболее нагруженный) **участок**. Значение внутренних сил наносят непосредственно на эпюру. Для большей наглядности эпюру штрихуют.

2.1.2. Напряжения в поперечных сечениях стержня

Возьмем растянутый стержень и рассечем его сечением **mn**, перпендикулярным к оси стержня. Рассмотрим равновесие одной отсеченной части, например левой (рис. 2.3).

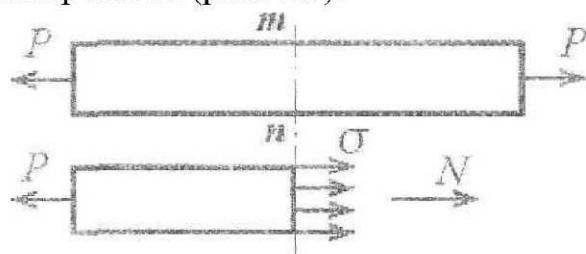


Рис. 2.3

На левую отсеченную часть действуют с одной стороны внешняя сила P и с другой стороны - нормальные напряжения, заменяющие собой действие правой части на левую

$$\int \sigma \cdot dF - P = 0$$

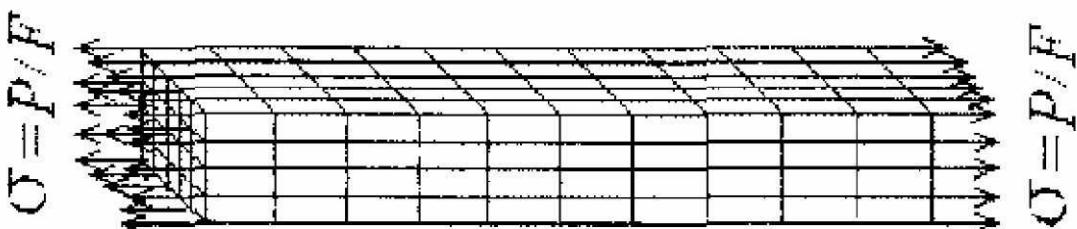


Рис. 2.4

1. Продольные волокна друг на друга не давят, каждое продольное волокно подвергается действию только продольных усилий, следовательно, в любом поперечном сечении возникают только нормальные напряжения.

2. Удлинения всех продольных волокон одинаковы, следовательно, поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

3. Пока нагрузка находится в пределах упругости, нормальное напряжение прямо пропорционально продольной деформации.

Отсюда следует, что нормальное напряжение по всему поперечному сечению величина постоянная, определяемая соотношением

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

Растягивающие напряжения будем считать положительными, сжимающие напряжения отрицательными.

2.1.3. Деформации. Обобщенный закон Гука

Продольная деформация при растяжении. При растяжении стержня первоначальная длина его увеличивается на величину $\Delta l = l_1 - l$ (рис. 2.5), а размеры поперечного сечения уменьшаются на $\Delta b = b - b_1$. Величина Δl - называется абсолютным удлинением стержня или абсолютной продольной деформацией, а Δb - абсолютной поперечной деформацией.

Роберт Гук в 1660 год опыты путем установил линейную зависимость между продольной деформацией и осевой силой:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} - \text{закон Гука.}$$

Здесь E - коэффициент пропорциональности, называемый модулем продольной упругости материала. Для данного материала величина E постоянна и характеризует жесткость материала. Единица измерения E такая же, как и для напряжения. Например: для стали $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, а для дерева $E=1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Отношение абсолютной продольной деформации к первоначальной длине стержня называется коэффициентом относительной продольной деформации:

$$\varepsilon = \frac{l_l - l}{l} = \frac{\Delta l}{l},$$

где ε - величина безразмерная.

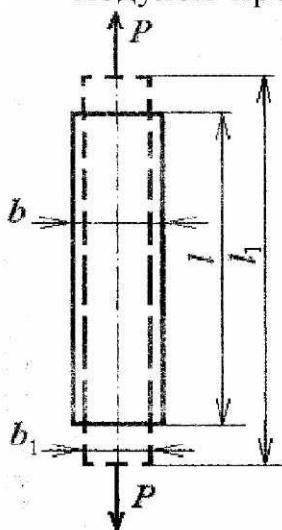


Рис. 2.5

Из закона Гука следует:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}; \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{E \cdot F}; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (2.1)$$

Отсюда вытекает другая форма записи закона Гука:

$\sigma = E\varepsilon$ - закон Гука для напряжения.

Поперечная деформация при растяжении. Отметим, что при растяжении $l_l > l$, а $b_1 < b$, а при сжатии $l_l < l$, а $b_1 > b$ (рис. 2.5).

Относительная поперечная деформация при растяжении-сжатии

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta b}{b}$$

Опыт показывает, что относительная поперечная деформация ε_l пропорциональна относительной продольной деформации и обратная ей по знаку.

$$\varepsilon_l = -\mu \cdot \varepsilon. \quad (2.2)$$

Здесь μ - коэффициент поперечной деформации или коэффициент Пуассона:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon}$$

являющийся константой для каждого конкретного материала. Коэффициент Пуассона μ меняется от 0 (пробка) до 0,5 (резина), для стали $\mu=0,3$. Коэффициенты E и μ характеризуют упругие свойства материала.

Обобщенный закон Гука. Закон Гука для одноосного растяжения

(сжатия) с использованием принципа суперпозиции может быть обобщен на случай двух и трехосного растяжения. Так относительная деформация кубического элемента в направлении линии действия напряжения σ_1 (рис. 1.8) правомерно представляется в виде:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13},$$

где ε_{11} - продольная относительная деформация, обусловленная напряжением σ_1 ;

$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}$ - поперечные относительные деформации, обусловленные напряжениями σ_2, σ_3 .

Рассуждая аналогично по отношению к деформациям куба в направлении линий действия напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 , и используя формулы (2.1) и (2.2), получим соотношение обобщенного закона Гука,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

в этих соотношения первые слагаемые характеризуют продольную деформацию, а вторые - поперечную деформацию.

2.1.4. Энергия деформации при растяжении и сжатии

Воспользуемся законом Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{N}{C}$$

где C - коэффициент жесткости стержня при растяжении-сжатии, численно равный силе, вызывающей единичную деформацию

$$C = \frac{EF}{l} [H/m],$$

откуда $N = C \cdot \Delta l$ (рис. 2.6).

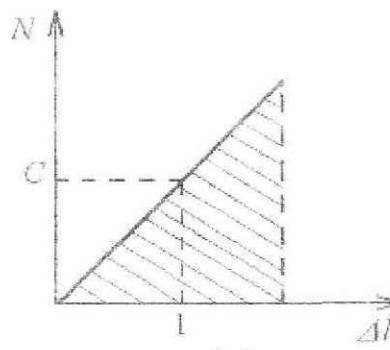


рис. 2.6

При деформации элемент накапливает потенциальную энергию P , равную площади треугольника на рис. 2.6.

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} N \cdot d(\Delta l) = \int_0^{\Delta l} C \cdot \Delta l \cdot d(\Delta l) = \frac{C \cdot (\Delta l)^2}{2}.$$

2.1.5. Напряжения в наклонных сечениях при растяжении

Для полного исследования прочности бруса следует уметь вычислить напряжения не только в поперечном сечении, но и по любым сечениям. Возьмем растянутый стержень. Нормальные напряжения в поперечном сечении

$$\sigma = P / F_0$$

Где F_0 - площадь поперечного сечения. Проведем сечение под углом α . Угол отсчитываем от оси стержня до нормали к сечению (рис. 2.7).

Угол, отсчитанный против часовой стрелки, считаем положительным.

Площадь наклонного сечения $F_\alpha = F_0 / \cos \alpha$

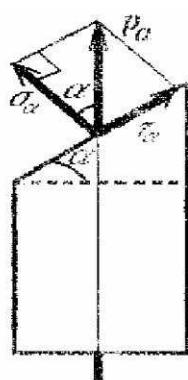


Рис. 2.7

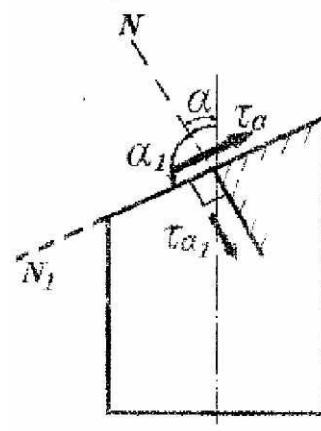
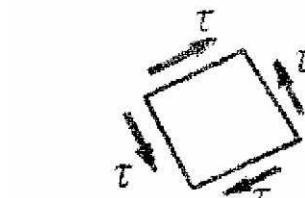


Рис. 2.8



Рассмотрим равновесие нижней отсеченной части. Действие верхней части на нижнюю часть представляем вертикальными усилиями.

Так как относительные деформации ϵ продольных волокон одинаковы, то вертикальные напряжения p_α равны между собой. Тогда:

$$p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha} = \frac{P}{F_0} \cdot \cos = \sigma \cdot \cos \alpha$$

Разложим полное напряжение на нормальную и касательную

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha; \tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha.$$

составляющие

Подставим значение p_α , тогда:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

Правило знаков: растягивающие нормальные напряжения считаются положительными, сжимающие нормальные напряжения - отрицательными. Касательные напряжения считаются положительными, если они обтекают контур по часовой стрелке.

Закон парности касательных напряжений. Рассмотрим касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам (рис. 2.8)

$$\tau_\alpha' = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha_1, \text{ где } \alpha_1 = \alpha + 90^\circ; \Rightarrow \tau_\alpha' = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha = -\tau_\alpha$$

Касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку.

Максимальные и минимальные нормальные и касательные напряжения. Из формулы $\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$ видно, что $\max \sigma_\alpha$ имеет место при $\alpha=0$

$$\max \sigma_\alpha = \sigma.$$

Максимальные нормальные напряжения возникают в поперечном сечении. Минимальные нормальные напряжения будут при $\alpha=90^\circ$ - в продольном сечении:

$$\min \sigma_\alpha = 0.$$

то есть, по сечениям параллельным направлению растягивающей силы, нормальные напряжения отсутствуют. Так как для экстремальных значений σ_α производная от σ_α по α равна нулю, то:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\sigma \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = -\sigma \cdot \sin 2\alpha = -2\tau_\alpha = 0$$

отсюда $\tau_\alpha = 0$:

по площадкам действия максимальных и минимальных нормальных напряжений касательные напряжения равны нулю.

- коэффициент запаса прочности, учитывает условие эксплуатации, степень ответственности и т.д.

3. Расчет по допускаемым нагрузкам.

Расчет по допускаемым нагрузкам заключается в проверке условия типа:

$$P_{max} \leq [P] = \frac{P_{pas}}{n},$$

где P_{pas} - нагрузка в момент разрушения или разрушающая нагрузка.

Практические расчеты на прочность выполняются на основе двух методов: расчета по допускаемому напряжению и расчета по запасам прочности.

Объединив формулы (2.4) и (2.5), получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F_{\min}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{on}}{n},$$

откуда можем определить:

- минимальную площадь сечения при известной внутренней силе:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

- максимально допустимую внутреннюю силу в сечении:

$$N_{\max} \leq F \cdot [\sigma]$$

Проверка условия жесткости. Для некоторых элементов кроме проверки условий прочности необходима проверка условия жесткости:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \leq [\varepsilon] \text{ или } \Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} \leq [\Delta l],$$

где $[\varepsilon]$ или $[\Delta l]$ - допускаемая относительная или абсолютная деформация, определяемая с учетом опыта эксплуатации, например, для таких спасательных средств, как веревки, $[\varepsilon] < 4\%$.

2.2. Опытное изучение свойств материалов

При расчетах на прочность необходимо знать **механические свойства материалов** - свойства характеризующие способность материала сопротивляться воздействию внешних сил.

Материалы могут быть **пластичными и хрупкими**. Пластичные материалы разрушаются при значительных остаточных деформациях, хрупкие материалы разрушаются при очень малых остаточных деформациях. Деление материалов на пластичные и хрупкие условно, так как одни и те же материалы в различных условиях могут быть и пластичными и хрупкими.

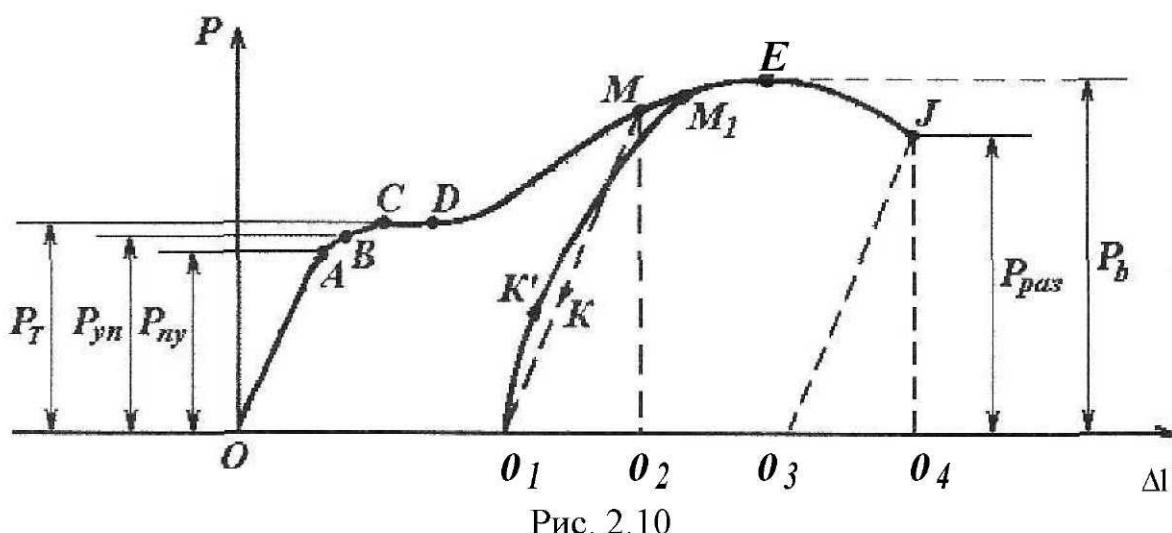


Рис. 2.10

Растягивающая сила P_{yu} соответствует пределу упругости:

$$\delta_{py} = \frac{P_{yu}}{F_0}$$

Пределом упругости называется то наибольшее напряжение, после превышения которого в материале появляются остаточные деформации. Точки А и В расположены близко друг от друга, поэтому практически для стали считают:

$$\delta_{pl} \approx \delta_{py}$$

При достижении растягивающей силой величины P_T деформация нарастает без увеличения нагрузки. Материал течет. На диаграмме образуется горизонтальная площадка СД - площадка текучести. Растягивающая сила P_T соответствует пределу текучести δ_t :

$$\delta_t = \frac{P_t}{F_0}$$

для Ст3 $\delta_t = 240$ МПа,

Пределом текучести называется напряжение, при котором происходит течение материала, то есть рост деформаций при постоянной нагрузке.

Далее происходит упрочнение материала, и для увеличения деформаций опять приходится увеличивать растягивающую силу. Участок Dli , - участок упрочнения. Точка Е соответствует наибольшей величине растягивающей нагрузки. Растягивающая сила P_B

$$\delta_B = \frac{P_B}{F_0}$$

соответствует временному сопротивлению δ_B :

для Ст3 $\delta_B = 400$ МПа.

Временным сопротивлением называется напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, воспринятой образцом.

При силе P_B на образце образуется шейка (рис. 2.11а), то есть местное сужение поперечного сечения. Далее деформация образца сосредотачивается в области шейки. Площадь поперечного сечения

уменьшается, а поэтому для удлинения стержня нужна все меньшая и меньшая сила.

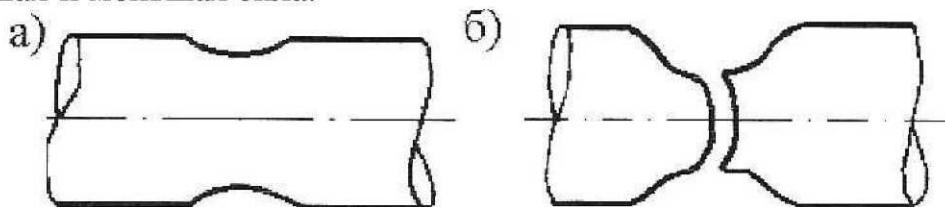


Рис. 2.11

Наконец, при нагрузке P_{raz} происходит разрыв образца. Участок EI - участок разрушения. В месте разрыва образуется чашечка (рис. 2.11б).

$$\sigma_{\text{раз}} = \frac{P_{\text{раз}}}{F_1},$$

Если F_1 - площадь поперечного сечения в месте разрыва образца, то истинное сопротивление разрыву:

где $F_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4}$, d_1 – диаметр в месте разрыва, причём

$\delta_{\text{раз}} > \delta_{\text{в}}$ **Величины** $\delta_{\text{пц}}, \delta_{\text{пн}}, \delta_{\text{т}}, \delta_{\text{в}}$ – называют **механическими характеристиками прочности.**

Если приостановить опыт при нагрузке, меньшей $P_{\text{ун}}$ и разгрузить образец, то при разгрузке зависимость между силой и деформацией выразится тем же графиком, что и при нагружении. После удаления нагрузки деформация исчезает, то есть имела место только упругая деформация.

Нагрузим образец до точки М в области упрочнения и затем разгрузим его. Кривая разгрузки будет слегка искривленной линией, параллельной линии ОА. Отрезок ОО₂ соответствует полной

$$\Delta l = \Delta l_{\text{ост}} + \Delta l_{\text{ун}}$$

деформации, ОО₁ - остаточной деформации, О₁О₂ - упругой деформации. Полная деформация определяется суммой остаточной и упругой деформации.

Если образец, после некоторого отдыха вновь нагрузить, то линия повторной нагрузки будет близка к линии разгрузки. Линия нагрузки закончится несколько выше точки М. Образуется так называемая петля гистерезиса МКО₁КМ, характеризующая потерю энергии деформации (переход части механической энергии в тепловую).

При повторном нагружении мы получаем понижение пластических свойств материала и повышение предела пропорциональности. Это явление называется **наклепом**.

Отрезок О₃О₄ показывает упругую деформацию к моменту разрыва. ОО₃ - остаточную деформацию после разрыва образца. Чем больше $\Delta l_{\text{ост}}$, тем пластичнее материал. Величина $\delta = (\Delta l / l) \cdot 100\%$, выраженная в процентах, называется **относительным остаточным удлинением**. За расчетную длину образца принимают $l = 5d$ или $l = 10d$ и соответственно обозначают δ_5 или δ_{10}

Величина $\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} \cdot 100\%$ называется **относительным остаточным сужением**.

Величины δ и ψ являются **механическими характеристиками пластичности**.

Работа при растяжении. Работа, расходуемая на разрушение образца, в определенном масштабе выражается площадью диаграммы растяжения (см. рис. 2.10).

Рассмотрим участок ОА в пределах применимости закона Гука. Работа внешней силы P равна потенциальной энергии, накопленной деформированным элементом. С учетом формулы (2.3) для энергии деформации при растяжении находим:

$$A = C \frac{(\Delta l)^2}{2}$$

Подставляя, $C = \frac{EF}{l}$ - коэффициент жесткости стержня при растяжении, находим:

$$A = \frac{(\Delta l)^2 \cdot E \cdot F}{2 \cdot l}$$

или, учитывая, что $\Delta l = \frac{P \cdot l}{EF}$ окончательно получим:

$$A = \frac{P^2 \cdot l}{2EF}$$

Если система состоит из ряда стержней, то

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot E_i \cdot F_i},$$

где N_i - усилие в i -м стержне.

Для получения работы, расходуемой на разрыв образца, надо определить площадь всей диаграммы (фигуры ОABCDEJO₄) Вся энергия деформации делится на две части;

- 1) на энергию упругой деформации (площадь ΔO_3O_4J);
- 2) на энергию, идущую на остаточную деформацию (площадь $OABCDEJO_3$).

Полная работа может быть представлена в таком виде;

$$A = \eta P_e \Delta l_p,$$

За пределами применимости закона Гука модуль упругости величина переменная, равная тангенсу угла наклона касательной к

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

кривой $\delta(\varepsilon)$:

Диаграмма напряжений при растяжении чугуна. Чугун - материал хрупкий, разрушается при незначительном удлинении. Разрушение происходит путем отрыва. Для хрупких материалов диаграмма криволинейна, так как δ_{ny} расположена очень низко (рис. 2.13). При практических расчетах криволинейный участок заменяют прямой и модуль упругости считают постоянным. Для чугуна $\delta_b =$

130...180 МПа.

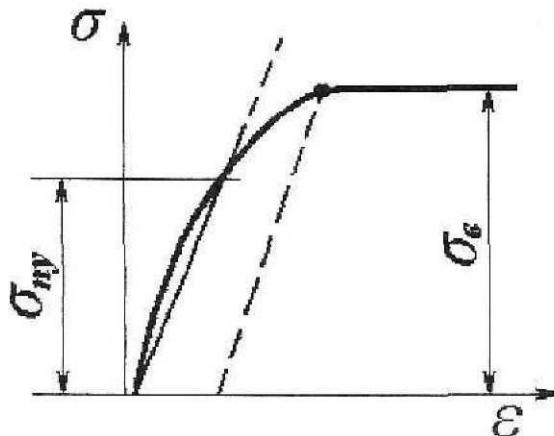


Рис. 2.13

Диаграмма деформаций при сжатии. При испытании на сжатие применяют короткие образцы, чтобы исключить продольный изгиб. При сжатии образца на его напряженное состояние заметно влияют силы трения между образцом и опорными плитами пресса. Диаграмма сжатия пластичных и хрупких материалов резко отличается.

Диаграмма сжатия пластичного материала, например, малоуглеродистой стали, приведена на рис. 2.14.

Из рис. 2.12 и 2.14 видно, что диаграмма сжатия малоуглеродистой стали подобна диаграмме растяжения. Однако, разрушение образца мы не получаем, так как цилиндрический образец сплющивается, площадь поперечного сечения увеличивается и нагрузка растет. Бочкообразную форму образец принимает за счет сил трения. Предел прочности при сжатии δ_c определяется условно.

Диаграмма сжатия хрупкого чугунного образца имеет вид подобный диаграмме растяжения чугуна (рис. 2.13), однако сжатию чугун сопротивляется значительно лучше, чем растяжению. При сжатии $\delta_c = 560...900$ МПа, то есть примерно в 4-6 раз больше чем при растяжении. На диаграмме сжатия так же отсутствует прямолинейный

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \text{ где } n_T = 1,5..2,0.$$

Назначение большего коэффициента запаса прочности для хрупких материалов объясняется их неоднородностью и опасностью концентрации напряжений.

Влияние температуры

Механические испытания материалов в соответствии с требованиями стандартов проводят при нормальных условиях, когда температура равна 20°C. Изменение температурного режима приводит к значительному изменению механических свойств материала. Так как влияние температуры в общем виде выявить не удалось, при решении практических задач используют опытные данные. На рис. 2.16 показаны зависимости от температуры величин E , $\delta_c, \delta_t, \delta$ для

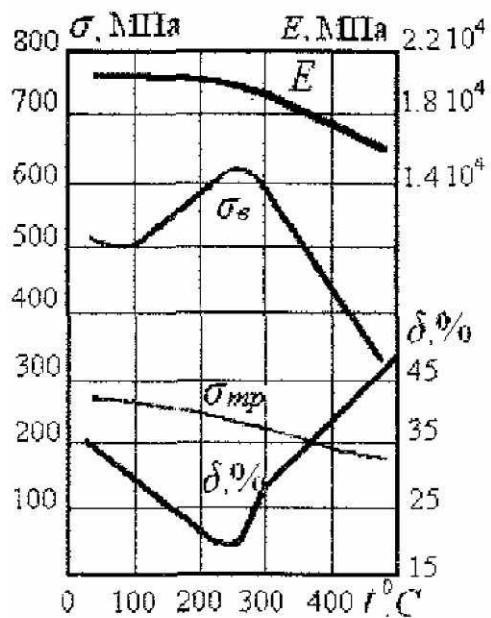


рис. 2.16

малоуглеродистой стали в интервале от 0 до 500°C .

Дальнейшее повышение температуры сопровождается уменьшением характеристик прочности (δ_u, δ_t) и жесткости (E) и повышением характеристик пластичности стали δ . Учитывая, что при пожаре температура в очаге горения превышает $700..1000^{\circ}\text{C}$, обрушение стальных конструкций из-за потери устойчивости, является одним из опаснейших факторов при работе на пожаре. Из-за потери прочности стальных тросов при нагреве запрещается использовать лифты в горящем здании.

3. СДВИГ. СРЕЗ. СМЯТИЕ.

3.1. Внутренние силы, напряжения и деформации при сдвиге.

Внутренние силовые факторы. Под **сдвигом** понимают такой вид деформации, когда в поперечных сечениях стержня действует только поперечная сила Q , а прочие внутренние силовые факторы отсутствуют.

Такое нагружение соответствует действию на стержень двух равных, противоположно направленных сил, расстояние между линиями действия которых мало: $\Delta S \rightarrow 0$ (рис. 3.1, 3.2)

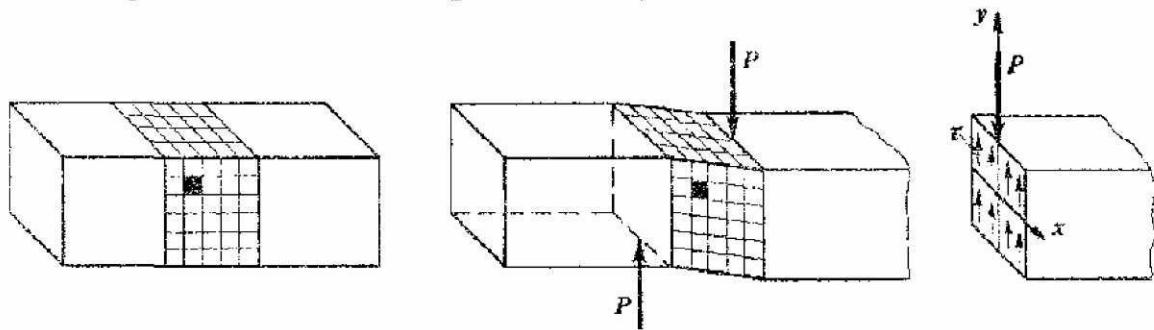


Рис. 3.1

При чистом сдвиге на гранях выделенного из материала элемента возникают только касательные напряжения.

Сдвиг в чистом виде на практике не встречается, но этот вид деформации является преобладающим для крепёжных деталей; болтов, винтов, шпилек, штифтов, шпонок, заклепок, а также сварных, клеевых и паяных швов. Рассмотрим в качестве примера заклёпку (см. рис. 3.3, 3.4).

Тонкий слой материала заклепки между листами стремится под действием двух встречных сил перекоситься. Перекос является характерной деформацией сдвига. Разрушение при сдвиге называется срезом. Разрушение происходит по плоскости, расположенной между силами (как при разрезании ножницами). Кроме сдвига заклётка подвергается деформации смятия.

Напряжение при сдвиге. Рассмотрим стержень, малой длины, нагруженный поперечной силой P (рис. 3.2а). Проведем поперечное сечение на малом расстоянии dz левее силы P и мысленно отбросим левую часть стержня (рис. 3.2). По всей площади поперечного сечения приложены вертикальные касательные напряжения τ . Сумма этих касательных напряжений должна равняться внутренней поперечной силе Q , которая из условия равновесия равна внешней силе P :

$$\sum y = 0; Q - P = 0; Q = P.$$

Следовательно,

$$\int \tau dF = Q.$$

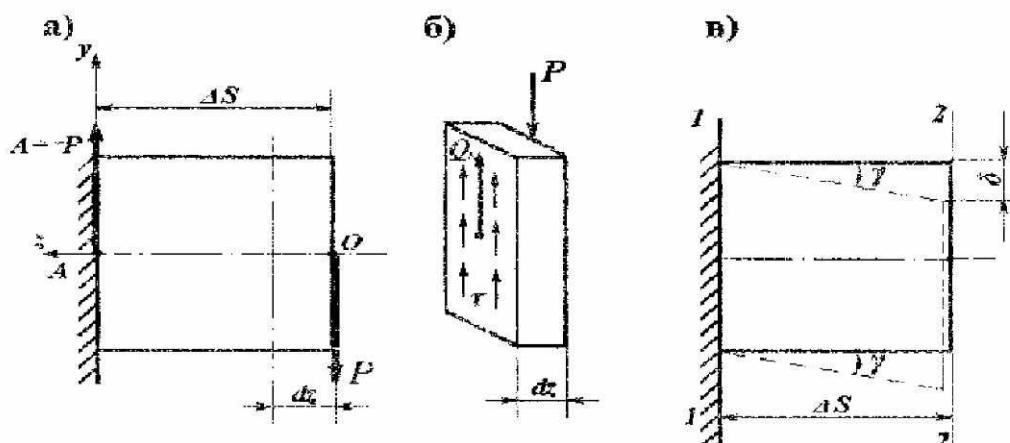


Рис. 3.2

Принимая, что касательные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению, находим

$$\tau = \frac{Q}{F}.$$

Следует отметить, что данная формула является приближенной, однако её точность достаточна для практических расчётов.

Деформации при сдвиге. Обратимся снова к рис. 3.1 и 3.2. Примем следующие гипотезы о характере деформаций при сдвиге:

- 1) гипотеза плоских сечений: поперечные сечения плоские до деформации, остаются плоскими, и после деформации сдвига:

- 2) продольные волокна после деформации сдвига остаются прямыми;
- 3) горизонтальными перемещениями сечений можно пренебречь.

Данные гипотезы подтверждены экспериментальными данными (см. рис. 3.1). Будем считать, что торцевое сечение 2-2 переместились относительно торцевого сечения 1-1 на величину δ (рис. 3.2в). Взаимное смещение сечения 5 называется абсолютным сдвигом, и имеем размерность длины.

Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между сечениями называется относительным сдвигом или углом сдвига - γ [рад].

$$\gamma = \arctg \frac{\delta}{\Delta S} \approx \frac{\delta}{\Delta S} [\text{рад}]$$

Закон Гука при сдвиге. Экспериментально установлено, что при сдвиге касательные напряжения прямо пропорциональны относительному сдвигу:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

где G - модуль упругости материала при сдвиге (модуль упругости II рода):

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

где μ - коэффициент Пуансо, E - модуль упругости при растяжении (1 Модуль сдвига для стали $G = 80000$ МПа, для чугуна $G = 45000$ МПа).

Проверка прочности при сдвиге. Условие прочности при сдвиге:

$$\tau = \frac{Q}{F} \leq [\tau]$$

Здесь допускаемое напряжение $[\tau]$ принимают в зависимости от допускаемого напряжения $[o]$ при растяжении:

$[\tau] = (0,5 \dots 0,6) [\delta]$ - для пластичных материалов; $[\tau] = (0,75 \dots) [\delta]$ - для хрупких материалов.

3.2 Практические расчёты на сдвиг

Расчёт заклёпочных соединений.

Заклёпочные соединения применяются для соединения листового материала. На рис. 3.3,а показано соединение листов внахлест, а на рис. 3.3,б - соединение листов встык с двумя накладками. Ограничимся рассмотрением частного случая симметричного размещения заклепок относительно линии действия силы.

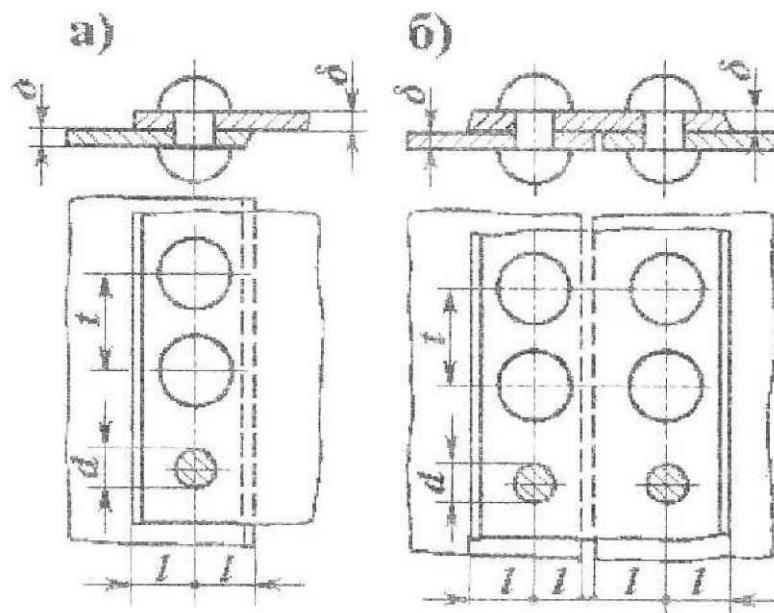


Рис. 3.3

Заклёпочное соединение проверяют на прочность:

- 1) на срез заклёпок;
- 2) смятие заклепок и листов;
- 3) разрыв листов.

Расчет заклепочного соединения на срез. При расчёте заклёпок на срез принимают следующие допущения:

- усилия между заклёпками распределяются равномерно;
- касательные напряжения по поперечному сечению заклёпки в плоскости среза распределяются равномерно.

Условие прочности имеет вид:

$$\tau = \frac{P}{F_{cp}} \leq [\tau]$$

где P - внешняя сила; $[\tau]$ - допускаемое напряжение; F_{cp} - площадь среза

$$F_{cp} = n \cdot m \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Здесь d - диаметр стержня заклёпки (после её установки диаметр стержня равен диаметру отверстия под заклёпку), n - число заклёпок, m - число плоскостей среза ($m=1$ для односрезных соединений внахлест (рис.3.3,а) и встык с одной накладкой (рис. 3.3,б)), $m=2$ для двухсрезных соединений встык с двумя накладками.

Примечание. При расчете соединений встык с накладками при определении числа заклёпок n учитывают заклёпки, расположенные по одну сторону стыка.

При проектировании соединения определяют диаметр заклёпок или их необходимое число;

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{nm\pi[\tau]}}, \quad n \geq \frac{4P}{m\pi d^2[\tau]}.$$

Расчет заклепочного соединения на смятие. При работе заклёпочного соединения происходит смятие (упруго-пластическое обжатие) поверхностей стержня заклёпки и листов.

Действительные контактные напряжения, вызывающие смятие стержня заклёпки, существенно неравномерно распределены по его поверхности.

Однако при практических расчётах принимают следующие эпюры распределения напряжения (рис. 3.4).

Б - Б

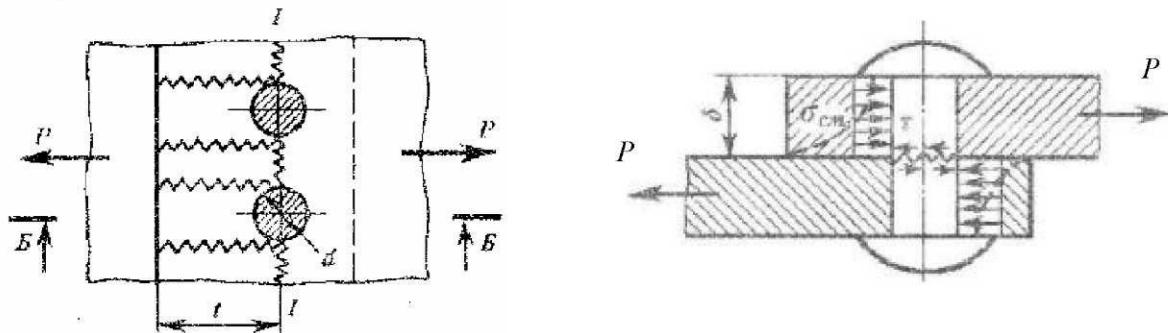


Рис. 3.4

Условие прочностной надежности заклёпки:

$$\sigma_{cm \max} = \frac{P}{n \cdot \delta_{min} \cdot d} \leq [\sigma_{cm}],$$

где $[\sigma_{cm}]$ - допускаемое напряжение смятия. δ_{min} - наименьшая толщина соединяемых листов.

Проверочный расчет листа на растяжение

Отверстия под заклёпки ослабляют поперечное сечение листа. Условие прочности листа на разрыв в ослабленном сечении I-I (рис. 3.4):

где δ , h - толщина и ширина листа, d - диаметр отверстия под

$$\sigma = \frac{P}{F_{netto}} = \frac{P}{\delta \cdot (b - z \cdot d)} \leq [\sigma_p],$$

заклёпку, z - число заклепок в одном ряду; $[\sigma_p]$ - допускаемое напряжение на растяжение материала листа.

Расчет сварных соединений. Условие прочности при расчёте сварных соединений на срез имеет вид:

$$\tau = \frac{P}{F_{sp}} \leq [\tau],$$

где F_{cp} - площадь среза по плоскости I-I (рис. 3.5).

$$F_{cp} = l_{\Sigma} \cdot h \cdot \cos 45^{\circ},$$

где l_{Σ} - суммарная расчетная длина шва, h - катет шва.

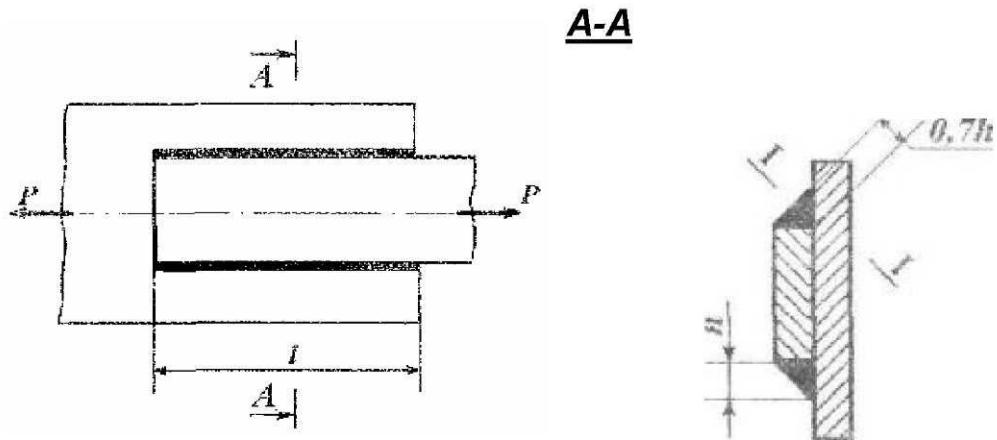


Рис. 3.5

Для примера, приведенного на рис. 3.5

$$l_{\Sigma} = 2 \cdot (l - 10) \text{ [мм]}$$

Расчетную длину шва принимаем на 10 мм меньше фактического, чтобы учесть возможный не провар шва по краям.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Прочность и жесткость стержней зависит от геометрических характеристик их поперечных сечений.

Геометрическими характеристиками плоских сечений являются: площадь; координаты центра тяжести; статические моменты площади; полярный, осевые и центробежные моменты инерции, радиусы инерции.

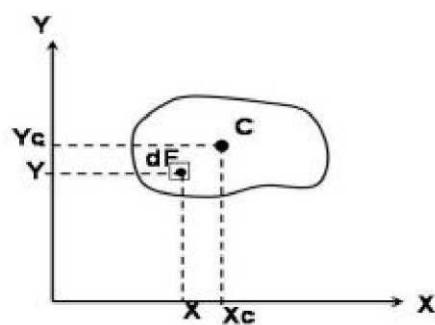


Рис. 4.1

Площадь поперечного сечения стержня определяет его прочность и жесткость при деформациях растяжения, сжатия, сдвига.

При рассмотрении деформации растяжения-сжатия, мы считали, что продольная сила направлена вдоль оси стержня, проходящей через **центры тяжести** поперечных сечений, определяющих очертания оси бруса.

Из курса теоретической механики мы знаем, что координаты центра тяжести определяются через соответствующие статические моменты площади.

Статическим моментом площади фигуры относительно некоторой оси называется взятая по всей ее площади F сумма произведений площади элементарных площадок dF на их расстояния до оси.

Для двух взаимно перпендикулярных осей OX и OY , лежащих в плоскости фигуры, статические моменты определяются соотношениями:

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF$$

Статический момент инерции может быть как *положительным*, так и *отрицательным*. Размерность статического момента – размерность единицы длины в третьей степени: m^3 , cm^3 , mm^3 .

Обозначим координаты центра тяжести сечения точки C через x_c и y_c .

Тогда статические моменты S_x и S_y можно выразить по известным из курса теоретической механики формулам: $S_x = y_c F$; $S_y = x_c F$.

Откуда следует выражение для определения координат центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = \frac{S_x}{F}, \text{ или } x_c = \int_F \frac{x dF}{F}; \quad y_c = \int_F \frac{y dF}{F}.$$

Оси, относительно которых статический момент равен нулю, называются *центральными осями*.

Отсюда вытекает следующее определение: *центром тяжести плоской фигуры* называется точка пересечения ее центральных осей.

Чтобы вычислить координаты центра тяжести составной фигуры, ее разбивают на отдельные простые фигуры, положение центров тяжести которых известно, и используют соотношение:

$$x_c = \frac{\sum_i F_i x_i}{F}; \quad y_c = \frac{\sum_i F_i y_i}{F}.$$

Моменты инерции сечения.

Моменты инерции поперечных сечений определяют жесткость стержня при действии внешних моментов, вызывающих деформации кручения или изгиба.

Осевым моментом инерции сечения относительно некоторой оси, называется взятая по всей его площади F сумма произведений площадей элементарных площадок dF на квадраты их расстояний от этой оси, то есть:

$$I_x = \int_F y^2 dF; I_y = \int_F x^2 dF.$$

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний от этой точки, то есть:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF, \text{ или } I_\rho = I_x + I_y.$$

Центробежным моментом инерции плоской фигуры относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей называют взятую по всей ее площади сумму произведений элементарных площадок на их расстояния от этих осей, то есть:

$$I_{xy} = \int_F xy dF.$$

Моменты инерции имеют размерность единицы длины в четвертой степени: m^4 , cm^4 , mm^4 .

Оевые и полярные моменты инерции всегда положительны и в ноль не обращаются!

Центробежный момент инерции может быть как положительным, так и отрицательным или нулевым!

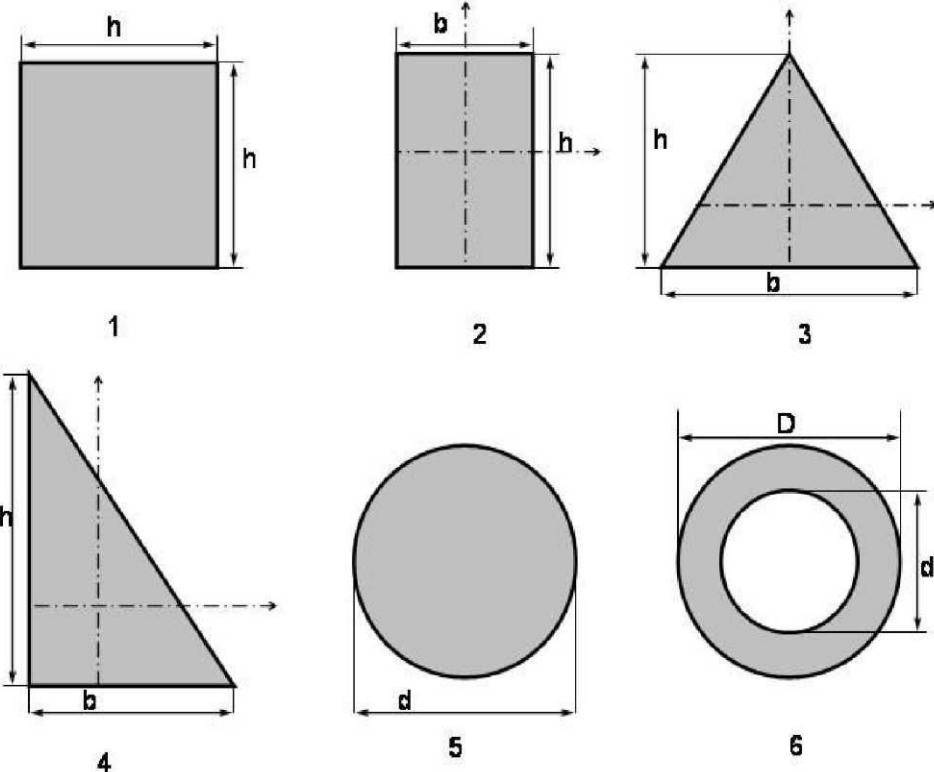
Оси, для которых полярный момент инерции обращается в ноль, называются *главными осями плоской фигуры*.

Если хотя бы одна из двух координатных осей является осью симметрии, то центробежный момент инерции равен нулю.

Отношение осевых моментов инерции плоской фигуры к ее площади определяет *радиусы инерции плоской фигуры*:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}.$$

Моменты инерции для различных фигур:



1. Для квадрата: $I_x = I_y = \frac{h^4}{12}$

2. Для прямоугольника: $I_x = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{b^3h}{12}$

3. Для равностороннего треугольника: $I_x = \frac{bh^3}{36}; I_y = \frac{b^3h}{48}$

4. Для прямоугольного треугольника: $I_x = \frac{bh^3}{36}; I_y = \frac{b^3h}{36}$

5. Для круга: $I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$

6. Для кольца: $I_x = I_y = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$

5. КРУЧЕНИЕ.

5.1. Понятие о кручении

Под **кручением** понимается такой вид деформации, когда в поперечных сечениях вала действует только крутящий момент, а остальные силовые факторы отсутствуют.

Кручение возникает при действии на стержень пар сил, лежащих в плоскостях поперечных сечений (рис. 5.1).

Рассмотрим стержень, защемленный одним концом (рис. 5.2). К свободному концу стержня в плоскости торца приложена пара M_k . В

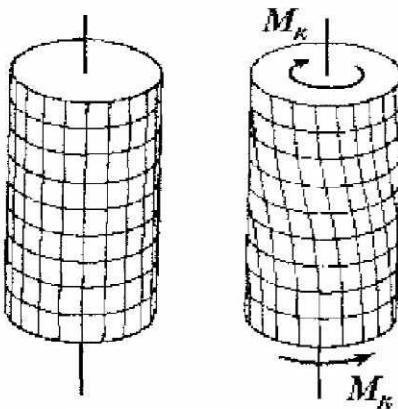


Рис 5.1

заделке возникает реактивный момент M_s , определяемый из уравнения равновесия:

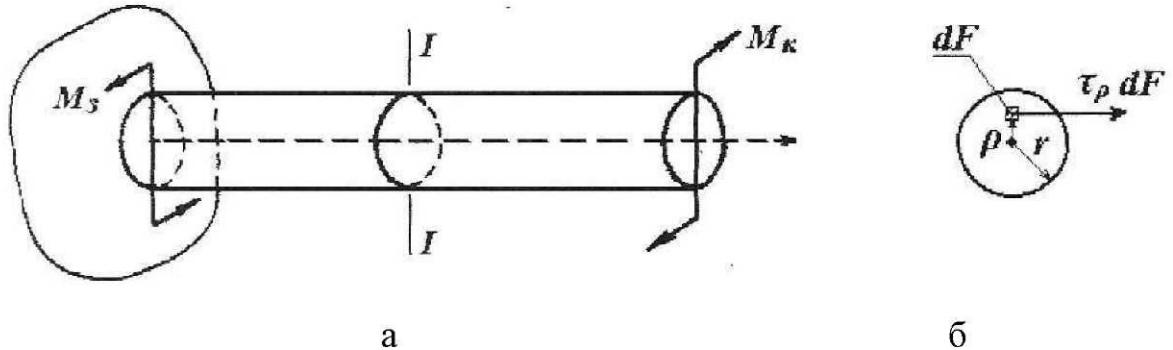


Рис. 5.2

Проведем произвольное сечение 1-1 и рассмотрим равновесие одной отсеченной части, например, правой. Очевидно, что внутренние усилия по сечению 1-1 сводятся к паре сил, расположенной в плоскости сечения 1-1. Эта пара сил называется крутящим моментом. Из условия

$\sum M_z = 0$, в данном случае, внутренний крутящий момент равен внешнему крутящему моменту M .

В общем случае крутящий момент в поперечном сечении стержня равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения, относительно продольной оси стержня.

Правило знаков; крутящий момент будем считать положительным, если при взгляде с торца он дает вращение по часовой стрелке (рис. 4.1) или при взгляде со стороны сечения дает вращение против часовой стрелки.

Стержень, испытывающий деформацию кручения, принято называть валом.

5.2. Определение деформаций и напряжений при кручении.

Деформация при кручении стержня круглого поперечного

сечения. Как показали исследования, характер деформации скручиваемого стержня в значительной степени зависит от формы его поперечного сечения.

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения, защемленный одним концом (рис. 5.3). К свободному концу в плоскости торца приложен момент M_K . В данном случае крутящий момент по всей длине постоянен. Опыт показывает, что при малых упругих деформациях образующая остается прямой, поворачиваясь на угол γ , где γ угол сдвига. Поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого на угол ϕ , называемый углом закручивания.

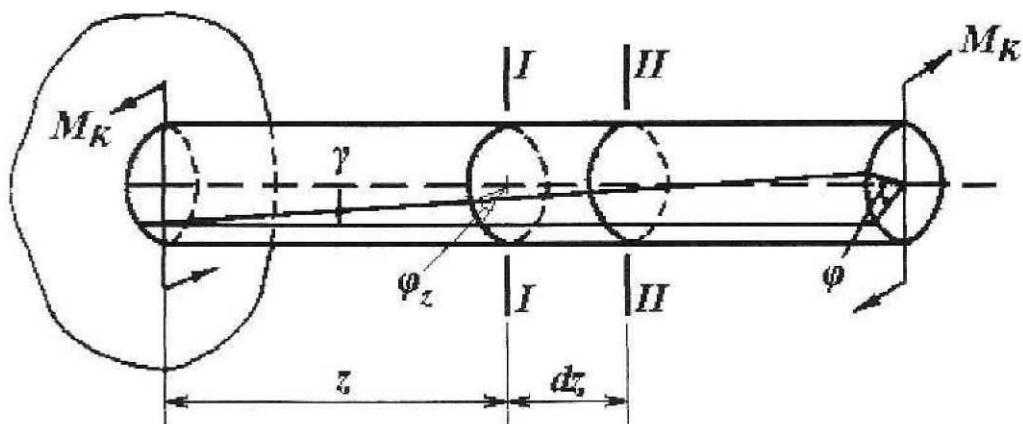


Рис. 5.3

На основании опытных данных при кручении стержней круглого поперечного сечения можно принять следующие гипотезы;

- поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации;
- расстояния между поперечными сечениями не изменяются;
- окружности в поперечном сечении поворачиваются, не меняя своей формы.

Выделим сечениями 1-1 и 2-2, находящимися на расстоянии dz , элемент стержня (рис. 5.4).

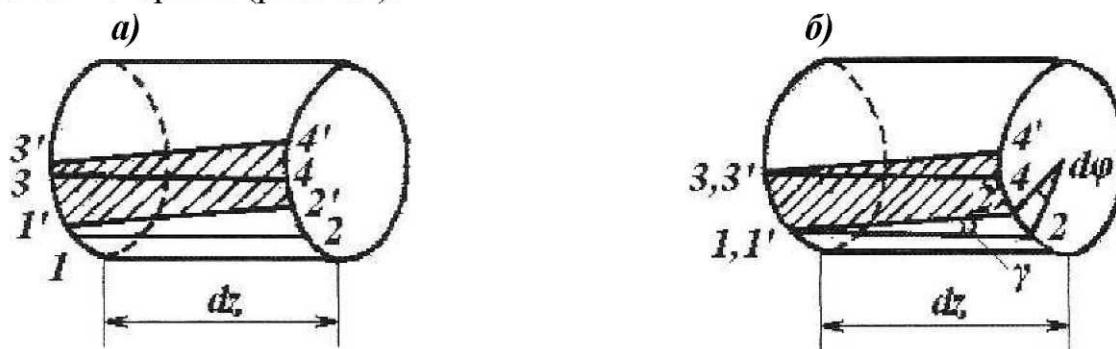


Рис. 5.4

Проведем до деформации образующие 1-2 и 3-4. После деформации они займут положение 1'-2' и 3'-4'. Совместим точку 1' с

точкой 1 и точку 3' с точкой 3 (рис. 5.4, б). Из чертежа видно, что элемент 1-2-3-4 претерпевает деформацию сдвига. Здесь 2 - 2' = 4 - 4' - абсолютный сдвиг, γ - относительный сдвиг или угол сдвига;

$$\angle 2 - 2' = rd\phi$$

Отсюда

$$\gamma = (d\phi / dz)r$$

$d\phi / dz$ - относительный угол закручивания, то есть угол закручивания, приходящийся на единицу длины стержня, r - радиус стержня.

Найдем угол сдвига внутри элемента на расстоянии p от центра сечения (рис. 5.5).

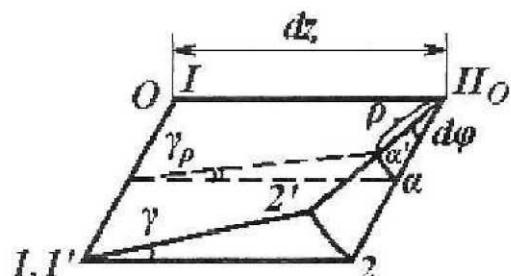


Рис. 4.5

Абсолютный сдвиг $aa' = p d\phi$. Угол сдвига

$$\gamma_p = \alpha \alpha' / dz = (d\phi / dz) \rho. \quad (5.1)$$

Напряжение при кручении стержня круглого поперечного сечения. Из выше изложенного видно, что в поперечном сечении скручиваемого стержня возникают только касательные напряжения, направленные перпендикулярно радиусу, как это показано на рис. 5.2, б.

Проведем сечение 1-1 и рассмотрим равновесие одной отсеченной части, например, левой. Из уравнения $\sum M_z = 0$ следует:

Здесь τ_p - касательное напряжение в точке сечения, удаленной от

$$M_k = \int \tau_p dF \rho,$$

центра на расстояние p ; dF - малая площадка вокруг рассматриваемой точки. Рассматривая деформацию при кручении, получили (5.1)

$$\gamma = (d\phi / dz) r \text{ и } \gamma_p = (d\phi / dz) \rho.$$

Закон Гука при сдвиге имеет вид:

$$\tau = G \gamma \text{ и } \tau_p = G \gamma_p.$$

Тогда

(5.2)

$$\tau_p = G (d\phi / dz) \rho.$$

Отсюда видно, что касательные напряжения в точках поперечного сечения стержня прямо пропорциональны расстоянию этих точек от центра сечения. Эпюра касательных напряжений для стержня

сплошного сечения показана на рис. 5.6,а, для кольцевого сечения на рис. 5.6,б.



Рис. 4.6

Подставим в выражение $M_r = \int \tau \rho dF$ значение τ_p из (5.2):

$$M_k = \int G (d\phi / dz) \rho^2 dF.$$

Вынесем за знак интеграла $G (d\phi / dz)$:

$$M_k = G (d\phi / dz) \int \rho^2 dF.$$

Как известно, $\int \rho^2 dF = J_p$ - полярный момент инерции сечения.

Тогда $M_k = G (d\phi / dz) J_p$

Отсюда

(5.3)

Получили формулу для относительного угла закручивания. Здесь

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M_k}{GJ_p}.$$

$G \cdot J_p$ - жесткость сечения при кручении.

Подставим значение $d\phi / dz$ в формулу τ_p из (5.2);

После сокращения получим: откуда следует, что при $\rho = 0$ $\tau_p = 0$, при $\rho = r$ $\tau_p = \tau_{max}$, причем

$$\tau_p = G (M_k / GJ_p) \rho.$$

$$\begin{aligned} \tau_p &= M_k \rho / J_p, \\ \tau_{max} &= M_k r / J_p. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Разделив числитель и знаменатель на r , находим

$$\tau_{max} = M_k / W_p, \quad (5.5)$$

где $W_p = J_p / r$ - полярный момент сопротивления. Условие прочности при кручении имеет вид:

Как известно, для сплошного круглого сечения (рис. 5.6, а)

$$J_p = \pi \cdot r^4 / 2 = \pi \cdot d^4 / 32; \quad W_p = \pi \cdot r^3 / 2 = \pi \cdot d^3 / 16.$$

$$\tau_{max} = M_k / W_p \leq [\tau]. \quad (5.6)$$

Для кольцевого сечения

$$J_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - \alpha^4);$$

где $a = d/D = r/R$ (рис. 5.6,б).

Формула для подбора сечения по условию прочности для сплошного вала: (5.7)

$$W_p = \frac{\pi \cdot r^3}{2} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot d^3}{16} (1 - \alpha^4),$$

Определение угла закручивания

Обратимся к рис. 5.3. Относительный угол закручивания в

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_k}{\pi [\tau]}}.$$

соответствии с формулой (5.3) равен:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GJ_p},$$

$$d\varphi = \frac{M_k dz}{GJ_p}.$$

Отсюда

Угол закручивания на расстоянии z от заделки

$$\varphi_z = \int \frac{M_k}{GJ_p} \cdot dz = \frac{M_k \cdot z}{GJ_p}.$$

Полный угол закручивания на длине l

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{GJ_p}.$$

Проверка на жесткость имеет вид:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{GJ_p} \leq [\varphi].$$

Здесь $[\varphi]$ - допускаемый угол закручивания.

Формула для подбора сечения по условию жесткости для сплошного вала

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 M_k \cdot l}{\pi G \cdot [\varphi]}}, \quad (4.8)$$

для трубчатого вала

$$D = \sqrt[4]{\frac{32M_k \cdot l}{\pi G[\varphi] \cdot (1 - \alpha^4)}}. \quad 5.9$$

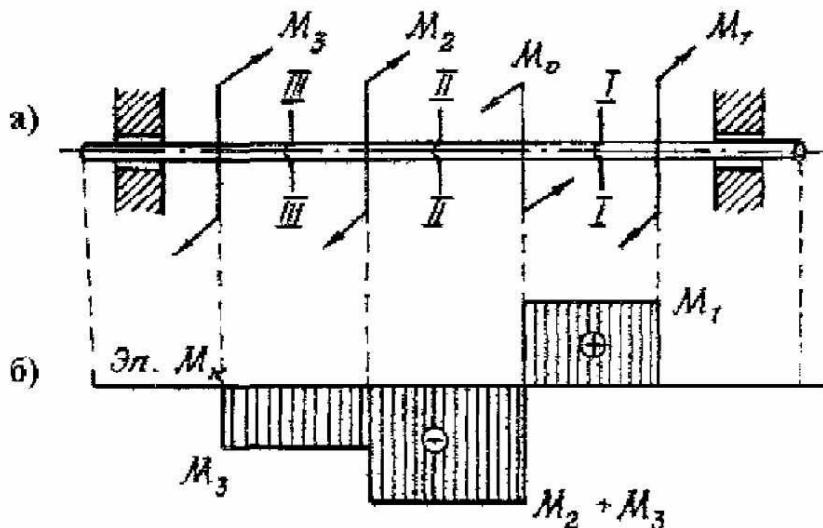


Рис. 5.7

5.3. Эпюры крутящих моментов и углов закручивания

Построение эпюр крутящих моментов. Эпюро́й крутящих моментов называется график изменения крутящих моментов по длине вала. Эпюру крутящих моментов необходимо строить, если к валу приложено более двух внешних моментов, включая момент в заделке.

Рассмотрим вал (рис. 5.7), на который действуют четыре внешних крутящих момента; M_0 - от ведущего шкива; M_1, M_2, M_3 - от ведомых шкивов. Из условия равновесия вала $M_z = 0$ получаем:

Разделим вал на участки. Границей участков является начало и

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3.$$

конец вала и сечения, в которых приложены внешние крутящие моменты.

Определим значения крутящих моментов на различных участках методом сечений:

$$\begin{aligned} M_{kI} &= M_1 \\ M_{kII} &= M_1 - M_0 = M_1 - (M_1 + M_2 + M_3) = - (M_2 + M_3); \end{aligned}$$

$$M_{kIII} = M_1 - M_0 + M_2 = M_1 - (M_1 + M_2 + M_3) + M_2 = - M_3.$$

На рис. 5.7 показана эпюра M_K построенная по полученным значениям.

Определение угла закручивания при переменном крутящем моменте. Если скачкообразно меняется крутящий момент или диаметр

вала, то угол закручивания определяется по формуле:

$$\varphi = \sum \frac{M_{ki} \cdot l_i}{G_J J_p}.$$

Пусть дан вал постоянного сечения защемленный одним концом и нагруженный внешними крутящими моментами M_1, M_2, M_3 (рис. 5.8)

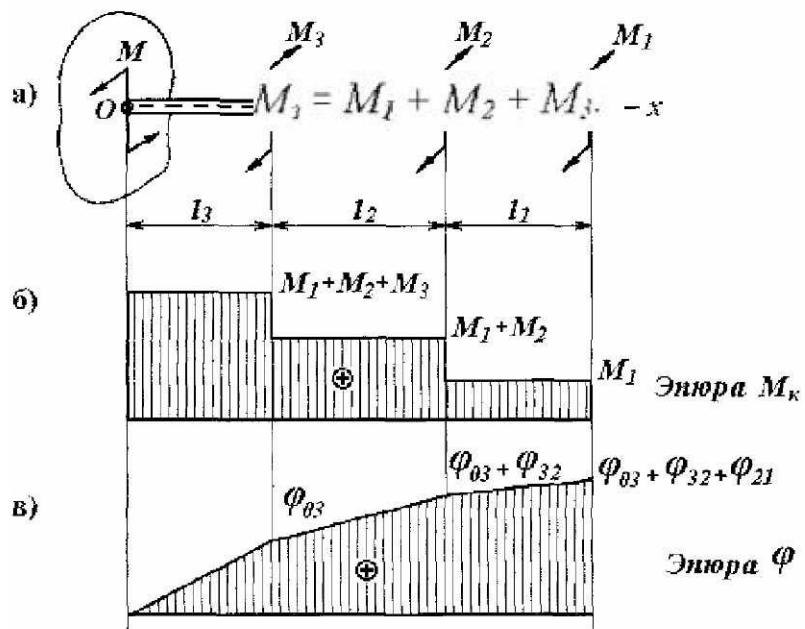


Рис. 5.8

Из условия равновесия $\sum M_z = 0$ получим значение момента в заделке

Эпюра M_k показана на рис. 5.8, б.

Углы закручивания на отдельных участках:

$$\begin{aligned}\varphi_{21} &= M_1 \cdot l_1 / (GJ_p) & \varphi_{32} &= (M_1 - M_2) \cdot l_2 / (GJ_p), \\ \varphi_{03} &= (M_1 + M_2 + M_3) \cdot l_3 / (GJ_p).\end{aligned}$$

Полный угол закручивания:

$$\varphi_{01} = \varphi_{21} + \varphi_{32} + \varphi_{03} = (1 / (GJ_p)) \cdot [M_1 \cdot l_1 + (M_1 + M_2) \cdot l_2 + (M_1 + M_2 + M_3) \cdot l_3].$$

Эпюра углов закручивания показана на рис. 4.8, в.

5.4. Потенциальная энергия деформации при кручении

Пусть крутящий момент M_k прикладывается к стержню статически, причем напряжения не превышают предела пропорциональности. Диаграмма кручения показана на рис. 5.9.

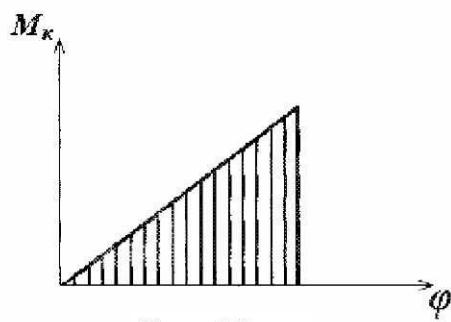


Рис. 5.9

Работа внешних сил равна площади диаграммы кручения:

$$A = M_k \cdot \phi / 2.$$

Энергия деформации примерно равна работе внешних сил:

$$U = A = M_k \cdot \phi / 2.$$

Подставим в это выражение значение

тогда

$$\phi = M_k \cdot l / (GJ_p),$$

$$U = A = M_k^2 \cdot l / (2GJ_p).$$

5.5. Связь между крутящим моментом и мощностью, передаваемой валом

Крутящий момент можно определить, если известны частота вращения и передаваемая валом мощность.

Пусть дано:

- частота вращения - n , оборотов в минуту;
- мощность - N , кВт

Требуется определить M_k .

Если на вал действует крутящий момент M_k , то его можно представить в виде пары сил, приложенных к окружности шкива (рис. 5.10).

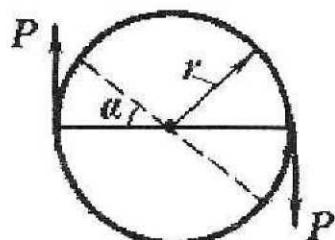


Рис. 5.10

При повороте шкива на угол α каждая сила пары пройдет путь $r\alpha$.

Тогда пара сил произведет работу:

$A = Pra + Pra = 2 Pra = M_K a$. Если вместо α подставить угловую скорость ω , то получим работу в единицу времени, то есть мощность:

$$N = M \omega.$$

Если n - частота вращения (об/мин), то угловая скорость (рад/с)
Переводя мощность из кВт в Вт получили:

$$\omega = 2 \pi n / 60 = \pi n / 30.$$

$$1000N = M_K \cdot \pi n / 30.$$

$$\text{Или } M_K = (1000N / \pi n) \cdot 30 = 30000 \cdot N / \pi n \approx 9550N / n.$$

5.6. Кручение стержней прямоугольного поперечного сечения

При кручении стержней некруглого поперечного сечения происходит депланация сечений; сечения перестают быть плоскими, искривляются. Кручение может быть чистое и стесненное. При чистом или свободном кручении нет препятствий к депланации сечений; в поперечном сечении стержня в этом случае возникают только касательные напряжения. Стесненное кручение имеет место, когда есть препятствия к депланации сечений. В этом случае в поперечном сечении, кроме касательных напряжений от свободного кручения, возникают дополнительные нормальные и касательные напряжения от стеснения.

Рассмотрим свободное кручение стержней прямоугольного поперечного сечения. Эту задачу решил Сен-Венан.

Распределение касательных напряжений по поперечному сечению показано на рис. 5.11.

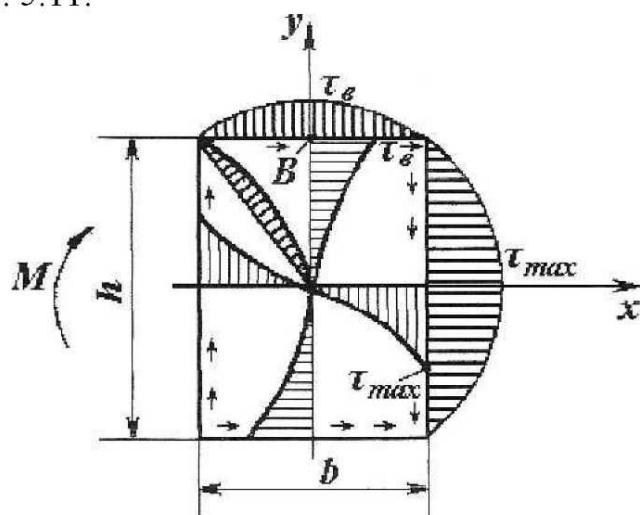


Рис. 5.11

Максимальные касательные напряжения имеют место посередине

$$\tau_{max} = M_K / W_K,$$

длинной стороны сечения:

где $W_K = ahb^2$ - момент сопротивления при кручении. Напряжения посередине короткой стороны $T_b = \gamma - \tau_{max}$.

Угол закручивания определяется по формуле:

$$\varphi = M_k \cdot l / (G \cdot J_k),$$

где $J_k = \beta \cdot h \cdot b^3$ момент инерции при кручении. Безразмерные коэффициенты α, β и φ берутся из табл. 4.1 в зависимости от соотношения сторон h/b

Таблица 5.1
Зависимость коэффициентов α, β и φ от отношения сторон h/b

h/b	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10,0	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
φ	1,000	0,859	0,795	0,753	0,745	0,744	0,743	0,742	0,742	0,742

5.7. Расчет винтовой цилиндрической пружины

Рассмотрим винтовую цилиндрическую пружину с постоянным малым шагом витка (рис. 5.12, а). Витки пружины имеют круглое поперечное сечение. Угол наклона витка мал, и им можно пренебречь.

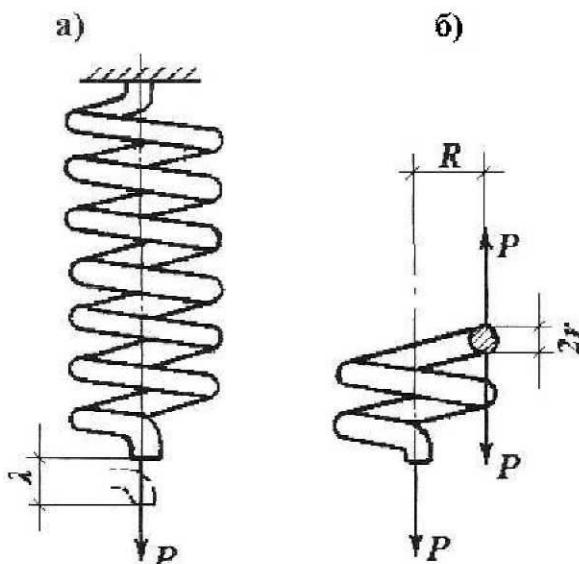


Рис. 5.12

Обозначим радиус осевой линии витка R , диаметр D , радиус поперечного сечения проволоки пружины r , диаметр d , количество витков пружины n .

Разрежем пружину на две части и рассмотрим равновесие нижней части. Легко показать, что в поперечном сечении проволоки пружины действуют:

- поперечная сила $Q = P$:

крутящий момент $M_k = PR$ (рис. 5.12, б).

На рис. 5.13, а и 5.13, б показаны эпюры касательных напряжений от поперечной силы Q и крутящего момента M_k

Приближенно, полагая касательные напряжения от поперечной силы равномерно распределенными по сечению (рис. 5.13), получим касательные напряжения от сдвига

$$\tau_c = P / \pi r^2.$$

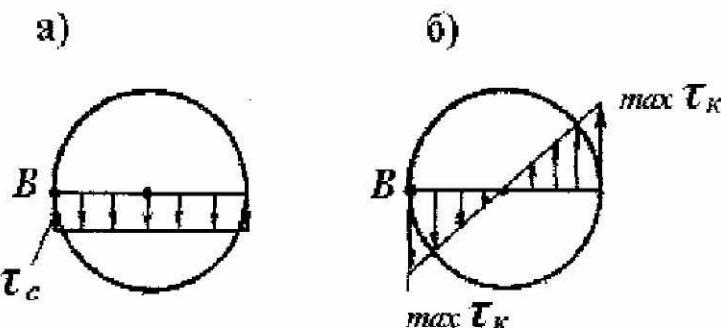


Рис. 5.13

Касательные напряжения от кручения (рис. 5.13, б) в любой точке сечения

$$\tau_k = M_k \cdot \rho / J_p.$$

Максимальные касательные напряжения от кручения

$$\max \tau_k = M_k / W_p = 2PR / (\pi r^3)$$

В точке В касательные напряжения от сдвига и от кручения совпадают по направлению и их можно сложить:

Величина $r/2R$ обычно мала по сравнению с единицей, и ею можно

$$\tau_{\max} = 2PR / (\pi r^3) + P / (\pi r^2) = \frac{2PR}{\pi \cdot r^2} \cdot \left(1 + \frac{r}{2R}\right)$$

пренебречь. Тогда то есть, учитывают напряжения только от кручения. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = 2 \cdot P \cdot R / (\pi r^3),$$

$$\tau_{\max} = 2PR / (\pi r^3) \leq [\tau].$$

Пружины изготавливаются из специальных сталей с высокими допускаемыми напряжениями, поэтому из условия прочности диаметр поперечного сечения проволоки получается небольшим.

Вычислим деформацию пружины λ (рис. 5.12). Учитывая

линейную зависимость между λ и P , запишем выражение работы внешней силы:

$$A = P\lambda / 2.$$

Энергия деформации кручения (сдвигом пренебрегаем) равна

$$U = M_k^2 \cdot l / (2GJ_p).$$

Подставим в это выражение $M_k = PR$, $l = 2\pi Rn$, $J_p = \pi r^4 / 2$, тогда

$$U = P^2 \cdot R^2 \cdot 2\pi Rn / (G\pi r^4) = 2P^2 \cdot R^3 \cdot n / (Gr^4)$$

Приравнивая работу внешней силы потенциальной энергии деформации пружины получим:

$$A = U; \quad P\lambda / 2 = 2P^2 \cdot R^3 \cdot n / (Gr^4),$$

откуда

$$\lambda = \frac{4PR^3 \cdot n}{Gr^4} = \frac{8PD^3 \cdot n}{Gd^4}.$$

6. ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ.

6.1. Понятие об изгибе

Изгибом называется деформация, сопровождающаяся изменением кривизны оси стержня. При изгибе прямолинейного стержня ось его получает криволинейное очертание; продольные волокна у вогнутой стороны стержня укорачиваются, а у выпуклой удлиняются (рис. 6.1).

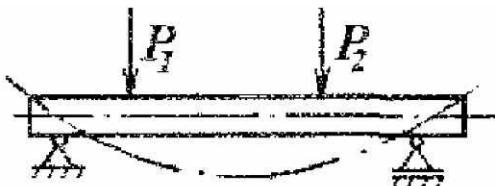


Рис. 6.1

Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях бруса **изгибающих моментов**, действующих в плоскости, проходящей через его ось.

Если в поперечных сечениях бруса не действуют никакие другие внутренние силовые факторы, кроме изгибающих моментов M , то изгиб называют **чистым**. В общем случае изгиба в поперечных сечениях возникают еще и внутренние поперечные силы Q .

Если внешняя нагрузка, действующая на стержень, направлена перпендикулярно его оси, то изгиб называют **поперечным** (рис. 6.1).

Стержень, работающий на изгиб, называют **балкой**.

Если плоскость внешней нагрузки, проходит через одну из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения балки, то изгиб называют **прямым** (или **плоским**), в противном случае

косым.

При косом изгибе изогнутая ось стержня не расположена в плоскости действия нагрузки.

В случае если после деформации ось стержня оказывается плоской кривой, то изгиб называется простым.

В данном разделе мы будем изучать плоский поперечный изгиб

Рассмотрим три основные типа опор балок (рис. 6.2).

1. шарнирно - подвижная опора (рис. 6.2,а). В опоре возникает только одна реакция в виде силы A , перпендикулярной опорной плоскости (и оси балки).

2. Шарнирно-неподвижная опора (рис. 6.2,б). В опоре возникает реактивная сила, проходящая через центр шарнира. Её составляющими являются сила A , препятствующая смещению закрепленного сечения в направлении, перпендикулярном оси балки, и сила R_A , препятствующая смещениям вдоль оси балки.

Зашемление или заделка (рис. 6.2,в). Зашемленный колец балки не может ни смещаться, ни поворачиваться. В опоре могут возникать при реакции: силы A , R_A и реактивный момент заделке M_A .

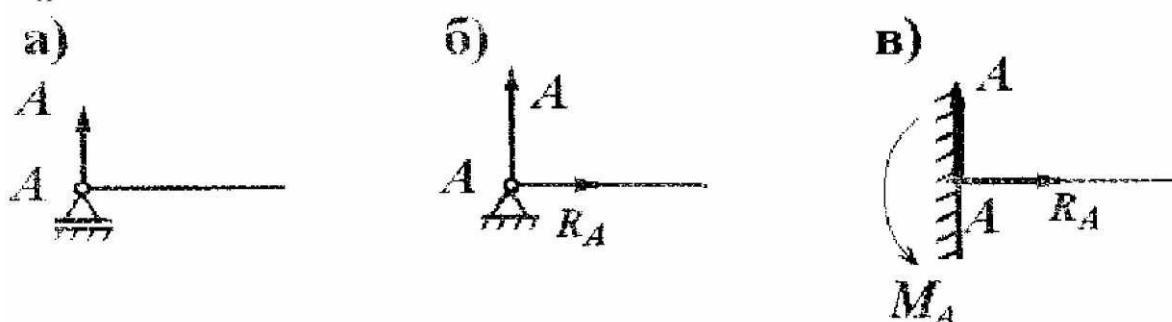


Рис. 6.2

Мы будем рассматривать только статически определимые при плоской системе внешних нагрузок. Примеры схем таких балок приведены на рис. 6.3, а и 6.3, б, опорные реакции определяем из уравнений статики:

$$\sum Z = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_A = 0.$$

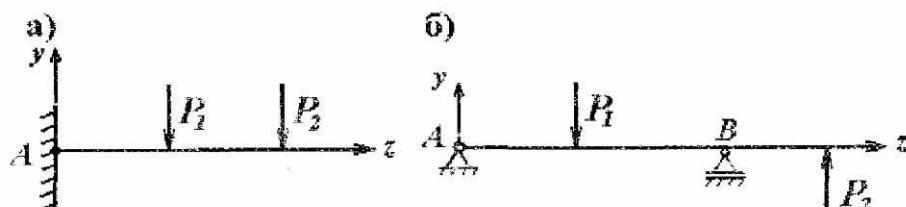


Рис. 6.3

Если внешние нагрузки перпендикулярны оси балки, то продольная составляющая опорной реакции R_A равна нулю.

К балкам могут быть приложены внешние нагрузки следующих видов рис. 6.4);

- сосредоточенная нагрузка P ;
- распределенная нагрузка интенсивностью $q, \text{Н/м}$;
- пара сил $M, \text{Нм}$.

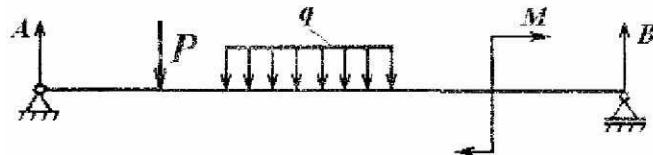


Рис. 6.4

6.2. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

6.2.1. Внутренние силовые факторы при изгибе. Изгибающий момент и поперечная сила

Рассмотрим балку на двух опорах, на которую действует система сил P_1, P_2, P_3 и опорные реакции A и B (рис. 6.5). Для определения внутренних усилий в сечении балки воспользуемся методом сечений. Проведем произвольное сечение I-I и рассмотрим равновесие одной отсеченной части, например, левой. Левая часть балки под действием внешних и внутренних сил находится в равновесии. Очевидно, что внутренние силы сводятся к поперечной силе Q и паре сил M , которые можно определить из уравнений статики:

$$\sum Y = A - P_1 - Q = 0 \Rightarrow Q = A - P_1,$$

$$\sum M_1 = Az_1 - P_1(z_1 - a) - M = 0 \Rightarrow M = Az_1 - P_1a,$$

здесь точка 1 - центр тяжести поперечного сечения I-I удаленного от начала координат на расстояние z_1 .

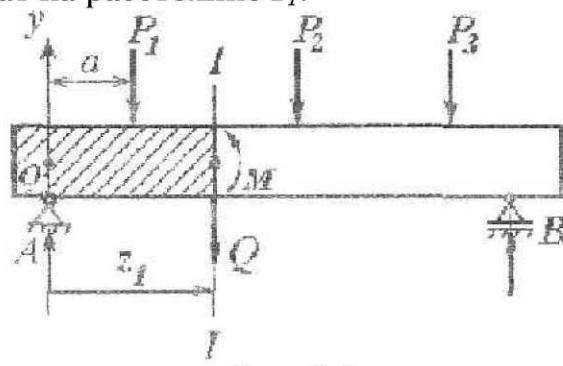


Рис. 6.5

Силу Q называют **внутренней поперечной силой**, а пару сил M **внутренним изгибающим моментом**.

Таким образом, **поперечной силой называется** алгебраическая сумма проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на перпендикуляр к оси балки.

Изгибающим моментом называется алгебраическая сумма

моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести поперечного сечения балки.

При определении знаков нагрузок используют следующие правила знаков.

Поперечная сила считается положительной, если внешняя сила, расположенная слева от сечения, направлена вверх, или сила, расположенная справа от сечения, направлена вниз (рис. 6.6).

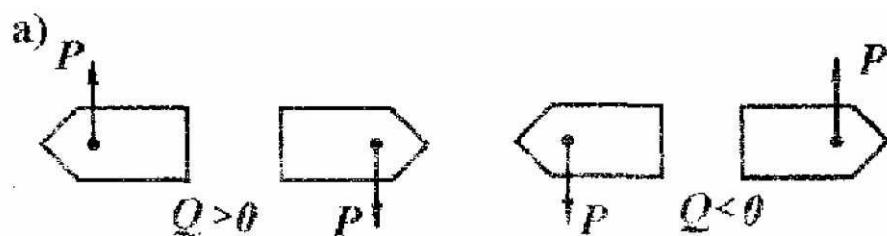


Рис. 6.6

Изгибающий момент считается положительным, если балка изгибается выпуклостью вниз, и наоборот (рис. 6.7).

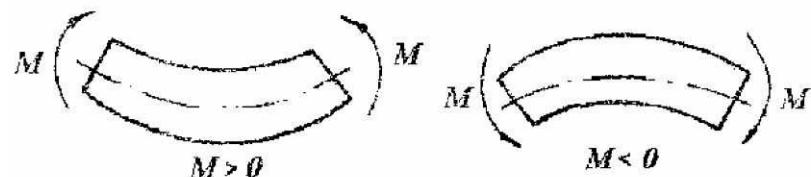


Рис. 6.7

Дифференциальные зависимости при изгибе

Рассмотрим балку, загруженную произвольной нагрузкой (рис. 6.8). Выделим двумя поперечными сечениями элемент балки малой длины dz . Рассмотрим равновесие выделенного элемента. В сечении с координатой z действует внутренняя поперечная сила Q_z и изгибающий момент M_z . В сечении с координатой $(z+dz)$ сила Q_z и момент M_z получат приращение dQ_z и dM_z вызванное действием распределенной по длине нагрузки интенсивности q . Из-за малости dz будем считать $dq = 0$.

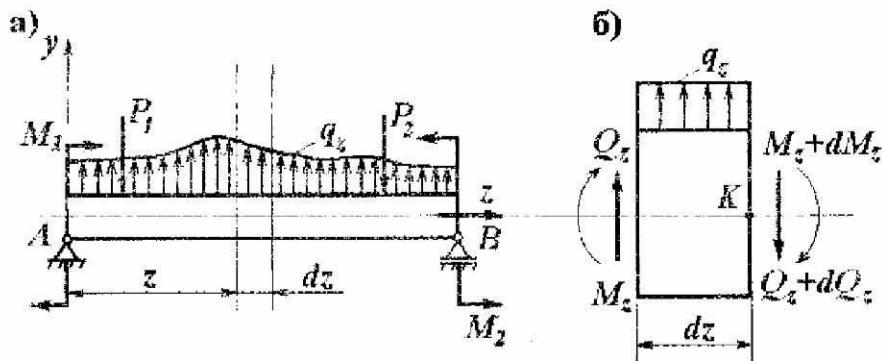


Рис. 7.8

Воспользуемся уравнениями статики. Рассмотрим сумму проекций всех сил, действующих на элемент, на ось y :

$$\begin{aligned}\sum Y &= Q_z + q_z dz - (Q_z + dQ_z) = 0 ; \\ q_z dz - dQ_z &= 0 ; \\ \frac{dQ_z}{dz} &= q_z\end{aligned}$$

Итак, **первая производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной его оси.**

Составим теперь уравнение равновесия элемента в виде суммы моментов, действующих на него сил, относительно центра тяжести правого сечения точки К (рис. 6.8):

$$q_z \cdot dz^2 \cdot \frac{\sum M_k}{2} = -M_z - Q_z dz - \frac{q_z dz^2}{2} + (M_z + dM_z) = 0$$

Здесь величина второго порядка малости и ею можно пренебречь.

Получаем, что:
или

$$\frac{dM_z}{dz} = Q_z. \quad (6.2)$$

Первая производная от изгибающего момента, по длине балки равна поперечной силе.

Последовательность построения эпюр Q и M .

1. Определяют опорные реакции из условий статического равновесия балки. В дальнейшем опорные реакции учитываются точно так же, как и другие внешние нагрузки.
2. Разбивают балки на участки с однородным нагружением.

Границами участков являются: начало и конец балки; сечения в которых приложены внешние силы P_i или пары сил M_i ; начало и конец распределенной нагрузки q_k .

3. Для каждого i -го участка методом сечения с учетом правила знаков определяют зависимости $Q(z_i)$ и $M(Z_i)$, причем координата сечения z_i , может отсчитываться как от левого, так и от правого края балки. Следует помнить, что для силы Q правило знаков противоположное для левой и правой части, а также то обстоятельство, что при построении эпюры M надо определять знак внешней нагрузки только в зависимости от того, какую форму она придает изогнутой оси балки: выпуклостью вверх или вниз, независимо от того знака, который был присвоен этой нагрузке при построении эпюры Q . **Правила знаков для эпюр Q и M разные!**

4. В зависимости от вида функций $Q(z)$ и $M(z)$ определяют число опорных точек, по которым строят участок эпюры: одна тонка, если $Q=const$ (или $M=const$); две точки, лежащие на границах участка для линейной функции, три точки для квадратичной функции; две из них на границах участка и одна -- точка экстремума, или, если экстремума нет, то рассматривают точку посередине участка.

5. Проверяют правильность построения эпюр Q и M , по правилам изложенным в начале данного подраздела.

Рассмотрим примеры построения эпюр Q и M .

Пример 1. Построить эпюры Q и M для балки, показанной на рис. 6.9.

Определим опорные реакции. Система нагружения симметричная, следовательно $A=B$. Учитывая, что $\sum Y = A + B - 2P = 0$, находим

$$A = B = P.$$

Разбиваем балку на участки. Здесь мы имеем три участка балки. Будем рассчитывать координаты сечения от левого края:

1 участок: $0 \leq z_1 \leq a$

2 участок: $a \leq z_2 \leq a + b$;

3 участок: $a + b \leq z_3 \leq a + b + a$.

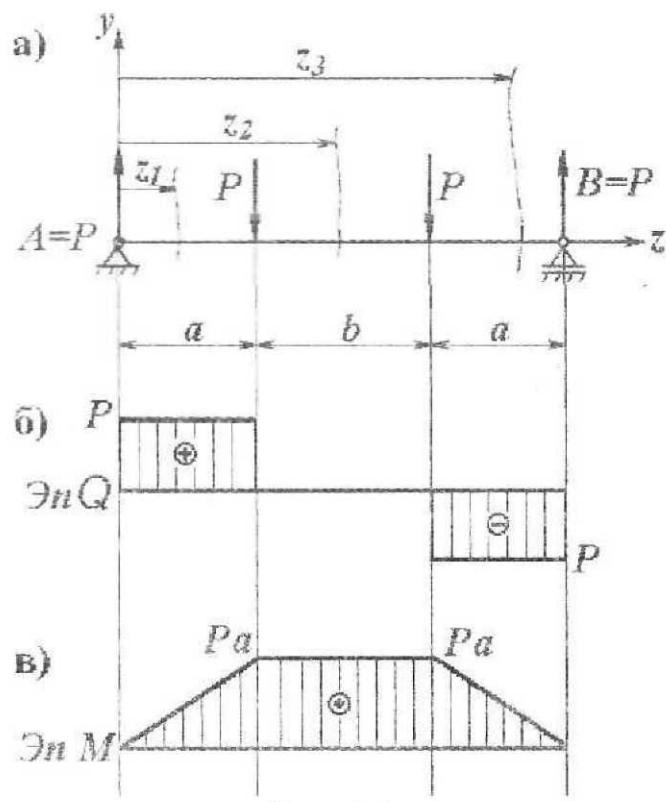


Рис. 6.9.

Построим эпюру Q .

- 1) $Q(z_1) = P$
- 2) $Q(z_2) = P - P = 0$
- 3) $Q(z_3) = P - P - P = -P$

На всех участках поперечная сила постоянна, что и отражено на эпюре Q (рис. 6.9, б). Скачки на эпюре соответствуют внешним нагрузкам.

Построим эпюру M :

- 1) $M(z_1) = Pz_1;$
при $z_1=0, M(z_1) = 0,$
при $z_1=a, M(z_1) = Pa.$
- 2) $M(z_2) = Pz_2 - P(z_2 - a) = Pa = \text{const.}$
- 3) $M(z_3) = Pz_3 - P(z_3 - a) - P(z_3 - a - b) = -P(z_3 - 2a - b)$
при $z_3 = a + b, M(z_3) = -P(a + b - 2a - b) = Pa;$
при $z_3 = 2a + b, M(z_3) = -P(2a + b - 2a - b) = 0.$

На первом и втором участке зависимость $M(z)$ - линейная, строится по двум точкам. На первом участке $Q(z_1) > 0$, поэтому $M(z_1)$ возрастает, на третьем участке, наоборот, $Q(z_3) < 0$ и $M(z_3)$ убывает (рис. 6.9. в)

На втором участке $Q(z_2) = 0$, и поэтому $M(z_2) = \text{const.}$ Второй участок представляет собой пример частного случая изгиба, который во введении был назван чистым изгибом: в поперечных сечениях балки

действует только изгибающий момент.

Пример 2. Рассмотрим балку на двух шарнирных опорах, загруженную распределенной нагрузкой постоянной интенсивности q (рис. 6.10);

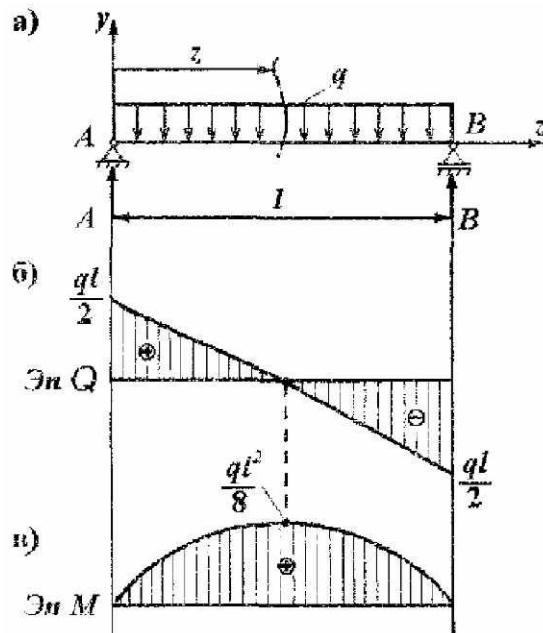


Рис. 7.10.

Определим опорные реакции. Из-за симметрии схемы нагружения $A=B$. Так как

$$\sum Y = A + B - ql = 0 \Rightarrow A = B = \frac{ql}{2}.$$

Имеем один участок нагружения. Введем начало отсчета координаты сечения от левого края. Построим эпюру $Q(z)$:

Зависимость $Q(z)$ - линейная. Для её построения необходимо задать

$$\text{при } z=0: Q(z) = \frac{ql}{2}; \quad Q(z) = A - qz = \frac{ql}{2} - qz.$$

две точки (рис. 10.6):

$$\text{при } z=l: Q(z) = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2}.$$

Перейдем к построению эпюры $M(z)$:

$$M(z) = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}.$$

Уравнение $M(z)$ является уравнением квадратичной зависимости:

Максимальный момент имеет место в сечении, в котором

$$\text{при } z=0: M(z)=0;$$

$$\text{при } z=l: M(z) = \frac{ql^2}{2} - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

$$\frac{dM(z)}{dz} = Q(z) = 0.$$

Из эпюры $Q(z)$, следует, что координата этого сечения $z = \frac{L}{2}$

Следовательно,

$$M_{max}(z) = M(l/2) = \frac{q l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{q l^2}{8}.$$

По трем точкам строим параболу, выпуклостью навстречу распределенной нагрузке.

6.3. Определение нормальных напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим частный случай изгиба - **чистый изгиб**, при котором поперечная сила в сечениях балки равна нулю, а изгибающийся момент величина постоянная. Чистый изгиб возникает только в том случае, если собственным весом балки можно пренебречь. Примеры нагрузок, вызывающих чистый изгиб, приведены на рис 6.11.

Рассмотрим балку, на которую воздействуют две равные, противоположно направленные пары сил, расположенные в плоскости

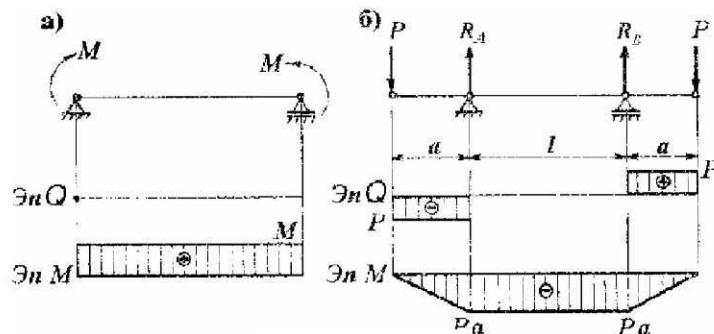


Рис. 6.11

симметрии балки (рис. 6.12,а). Если применить способ сечений, то видно, что усилия в любом сечении балки сводятся к паре сил. При изгибе балки, в данном случае действия положительных изгибающих моментов, верхние волокна укорачиваются (сжимаются), а нижние волокна удлиняются (растягиваются). Слой, для которого удлинения равны нулю, называется нейтральным слоем. Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки ox называется нейтральной осью. Нейтральная ось ox дели! сечение на растянутую и сжатую зону. Проведем два поперечных сечения на расстоянии dz одно от другого (рис 6.12,б). Выделенный элемент укрупненно показан на рис. 6.12,в.

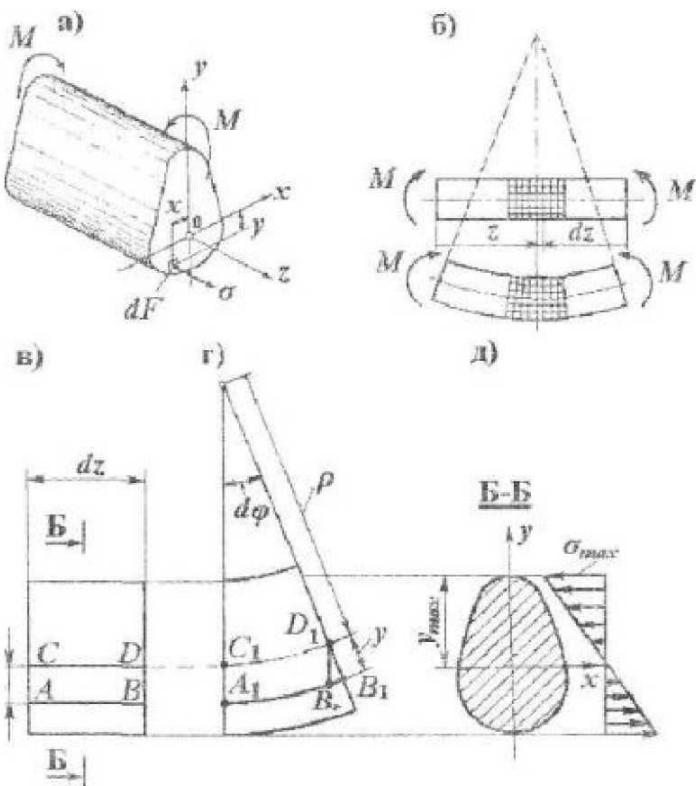


Рис. 6.12

Рассмотрим деформацию выделенного элемента балки после приложения внешней нагрузки (рис 6.12,г).

Примем следующие гипотезы, правильность которых подтверждается экспериментальными данными:

1. Гипотеза плоских сечений: поперечные сечения балок, плоские до деформации остаются плоскими и после деформации.
2. Продольные волокна друг па друга не давят.
3. Деформации волокон не зависят от их положения по ширине сечения, а следовательно нормальные напряжения по ширине сечения не изменяется.

Выделим внутри рассматриваемого элемента два продольных волокна: волокно CD , принадлежащее нейтральному слою, и волокно AB , удаленное от нейтрального слоя на расстоянии y (рис 6.12,в). После деформации балки поперечные сечения балки, расположенные на расстоянии dz , образуют между собой угол $d\varphi$, как это показано на рис. 6.12. в, а продольные волокна искривляются. На рис 6.12, г обозначено ρ - радиус кривизны нейтрального слоя. Таким образом, волокна CD и AB , бывшие прямыми до деформации, превращаются в дуги C_1D_1 и A_1B_1 . Длина дуги C_1D_1 на нейтральном слое равна первоначальной длине волокна CD до деформации:

$$\odot C_1D_1 = CD = dz = \rho d\varphi .$$

Волокно AB , удаленное от нейтрального слоя, поело

$$A'B': \odot A'B' = (\rho + y)d\varphi .$$

деформации удлиняется. До деформации $AB = CD = dz = \rho d\phi$ после деформации длина дуги

Абсолютное удлинение волокна AB :

$$\Delta AB = CA'B' - AB = (\rho + y)d\phi - \rho d\phi = yd\phi$$

относительное удлинение волокна AB :

$$\varepsilon = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{yd\phi}{\rho d\phi} = \frac{y}{\rho}$$

Так как при чистом изгибе продольные волокна балок друг на друга не давят, следовательно, каждое продольное волокно находится в условиях осевого растяжения или сжатия. Применяя закон Гука, получим:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}, \quad (6.4)$$

где Е-модуль упругости материала балки. Отсюда видно, что нормальные напряжения по высоте сечения распределены по линейному закону, как это показано на рис 6.12, д.

Однако полученной формулой пока нельзя пользоваться для определения нормальных напряжений, так как неизвестными остаются

положение нейтрального слоя и его радиус кривизны ρ после деформации изгиба. Воспользуемся методом сечений.

Рассмотрим равновесие левой отсеченной части балки (рис. 6.12,б). К левому горцу рассматриваемой части приложена пара сил с моментом M , лежащая в плоскости симметрии балки yoz , а к правому торцу (сечению) приложена система распределенных нормальных напряжений. Запишем шесть уравнений статики:

Уравнения 1, 2, 6 удовлетворяются тождественно, так как нет

$$1. \Sigma X=0; \quad 4. \Sigma M_x=0;$$

$$2. \Sigma Y=0; \quad 5. \Sigma M_y=0;$$

$$3. \Sigma Z=0; \quad 6. \Sigma M_z=0.$$

никаких усилий, действующих в направлении осей y и x , а также усилий, создающих момент относительно оси балки z .

Составим уравнение равновесия проекций сил на ось балки z : Вдоль оси балки действует система нормальных напряжений, равнодействующую которых можно определить взяв интеграл по площади сечения.

$$\Sigma Z = \int_{F} \sigma dF = 0.$$

Подставим значение σ из $\sigma = E \frac{y}{\rho}$, (6.4)

получим $\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$ или $\int_F y dF = 0$.

Учитывая, что $\int_F y dF = S_x$ статический момент площади относительно оси x , получаем: $S_x = 0$, то есть статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси x равен нулю. Следовательно, **нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения**.

Составим уравнение моментов сил, относительно вертикальной оси y :

$$\sum M_y = 0.$$

Рассмотрим элементарную площадку dF , удаленную от нейтральной оси x на расстояние y , и от оси симметрии (главной оси инерции) сечения u на расстояние x (рис. 7.12, а). Равнодействующая сечения балки при изгибе. Подставляя в $\sigma = \frac{E}{\rho} y$ уравнение значение получаем $1/\rho = \frac{M}{EI_z}$ соотношение для определения нормального напряжения в любой точке поперечною сечения:

$$\sigma = \frac{My}{I_x}. \quad (6.6)$$

Проверка прочности по нормальным напряжениям.

Как следует из формулы (6.6) наибольшее напряжение будет иметь место в крайних волокнах балки, наиболее удаленных от нейтрального слоя. При этом условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_x} \leq [\sigma].$$

Отношение $\frac{I_x}{y_{\max}} = W_x$ называется моментом сопротивления сечения изгибу или осевым моментом сопротивления. Для подбора M сечения пользуются формулой

$$W_x \geq \frac{M}{[\sigma]}$$

Если материал различно сопротивляется сжатию и растяжению ($[\sigma_c] \neq [\sigma_p]$), то проверку прочности проводят отдельно для сжатых и растянутых волокон:

$$\sigma_{\max p} = \frac{M \cdot y_1}{I_x} \leq [\sigma_p];$$

$$\sigma_{\min c} = \frac{M \cdot y_2}{I_x} \leq [\sigma_c].$$

где y_1 и y_2 координаты наиболее удаленных от нейтрального слоя

растянутых и сжатых волокон.

В заключение определим моменты сопротивления для круглого и прямоугольного сечения (рис 6.13, а, б).

Для круга (рис. 6.13.а):

$$I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64}, \quad W_x = \frac{2I_x}{d} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Для прямоугольника (рис 7.13.б):

$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad W_x = \frac{2I_x}{h} = \frac{bh^2}{6}.$$

Очевидно, что для увеличения I_x, W_x материал балки должен быть распределен возможно дальше от нейтрального слоя. Поэтому двутавр (рис 6.13.в) является наиболее рациональной формой поперечного сечения стержней, работающих на изгиб.

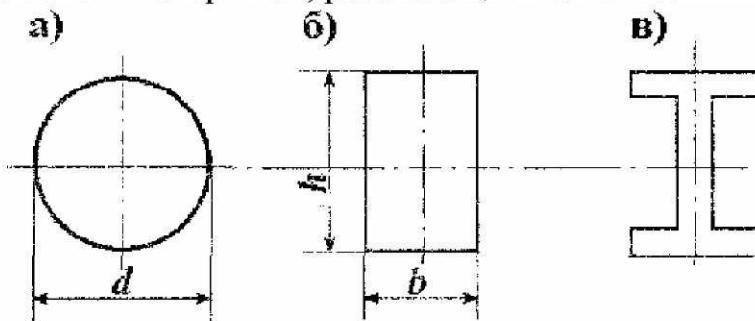


Рис. 6.13

6.4. Определение напряжений при общем случае изгиба с поперечной силой

При изгибе с поперечной силой в сечениях балки кроме нормальных напряжений возникают также касательные напряжения, изменяющиеся по высоте балки, которые вызывают неодинаковый сдвиг элементов и искривление поперечных сечений. Кроме того, при наличии касательных напряжений оказывается возможным давление друг на друга соседних продольных волокон. Таким образом, гипотезы, на основе которых получена формула для нормальных напряжений при чистом сдвиге $\sigma = M_y / I_x$, в общем случае изгиба являются неправомерными.

Однако опыт показывает, что отличие нормальных напряжений в общем случае изгиба при наличии поперечной силы от напряжений при чистом изгибе (без учета поперечной силы) является незначительным.

Например, если отношение высоты сечения h к длине балки 1: $h/l=1/10$ погрешность не превышает 0,25 %. При уменьшении h/l погрешность в определении σ становится еще меньше.

Поэтому и при наличии поперечной силы нормальные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{My}{I_x},$$

а искривлением поперечных сечений пренебрегают.

Определим касательные напряжения при изгибе. Для этого вырежем из балки элемент, как это показано на рис. 6.14. и рассмотрим его равновесие. Рассматриваемый (заштрихованный) элемент ограничен слева и справа двумя поперечными сечениями, расположенными на расстоянии dz друг от друга, сверху наружной поверхностью балки, снизу плоскостью, параллельной нейтральному слою и удаленной от нейтрального слоя на величину y .

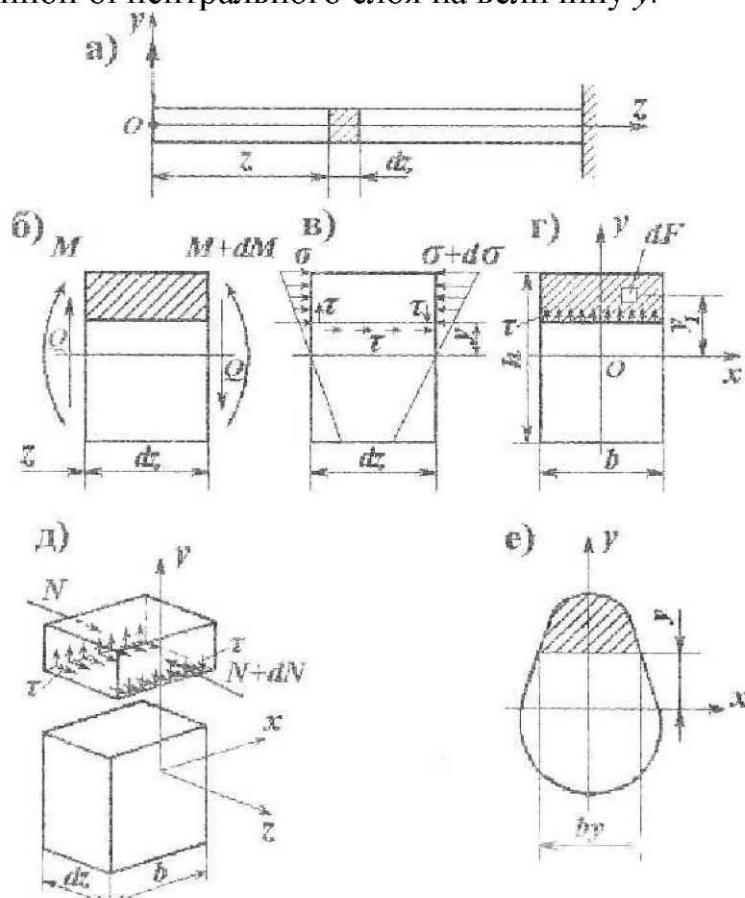


Рис. 6.14

Примем допущение, что по ширине балки касательные напряжения распределены равномерно (не меняются). На нижней грани элемента (внутри балки) действуют равные по величине касательные напряжения τ . По закону парности касательных напряжений на этом же уровне по высоте балки на левой и правой поперечных гранях элемента действуют равные им по величине, но противоположно направленные касательные напряжения τ .

Полагаем, что поперечная сила по длине балки постоянна. При наличии поперечной силы изгибающий момент, а, следовательно, и нормальные напряжения изменяются по длине балки. Однако вследствие малости расстояния dz изменения изгибающего момента dM и нормальных напряжений $d\sigma$ правой грани элемента по сравнению с левой гранью малы.

Таким образом, по левой грани действуют нормальные напряжения, линейно изменяющиеся по высоте: и касательные напряжения τ . Аналогично, на правой грани действуют:

$$\sigma = \frac{My_1}{I_x}, \text{ где } y < y_1 < y_{\max},$$

$$\sigma = \frac{My_1}{I_x}, \text{ где } y < y_1 < y_{\max},$$

и касательные напряжения τ . Результатом действия нормальных напряжений является продольная сила N на левой грани и $(N+dN)$ - на правой.

Рассмотрим уравнение равновесия выделенного элемента в проекциях на ось z (рис. 6.14.в), получаем:

или

$$\sum z = -N + (N + dN) - \tau \cdot b_y \cdot dz = 0,$$

$$\sum z = - \int_{F_o} \frac{M \cdot y_1}{I_x} dF + \int_{F_o} \frac{(M + dM) \cdot y_1}{I_x} dF - \tau \cdot b_y \cdot dz = 0,$$

где F_o – площадь отсеченной части на уровне y поперечного сечения бочки (см. заштрихованную часть сечения на рис. 6.14, г), b_y - ширина сечения на уровне y . Откуда следует:

$$\tau \cdot b_y \cdot dz = \int_{F_o} \frac{dM \cdot y_1}{I_x} dF. \quad \int_{F_o} y_1 dF = S_{xo} -$$

Так как dM и I_x не связано с площадью F_o , справедливо следующее:

$$\tau \cdot b_y \cdot dz = \frac{dM}{I_x} \int_{F_o} y_1 dF.$$

Подставляя сюда $dM=Qdz$ и учитывая, что $\int_{F_o} y_1 dF = S_{xo}$ - статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной оси, получаем формулу для определения касательных напряжений (**формула Журавского**):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{xo}}{I_x \cdot b_y}$$

На основе формулы Журавского можно определить характер изменения касательных напряжений по высоте балки (рис. 6.15).

Наибольшие касательные напряжения τ_{max} действуют на уровне нейтрального слоя. При удалении от нейтрального слоя τ уменьшается, при $y=y_{\max}$ $\tau=0$.

Для прямоугольного сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F},$$

для круглого сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}.$$

Здесь F - площадь поперечного сечения.

Пример. В качестве примера рассмотрим определение касательных напряжений в балках прямоугольного сечения (рис. 6.15)

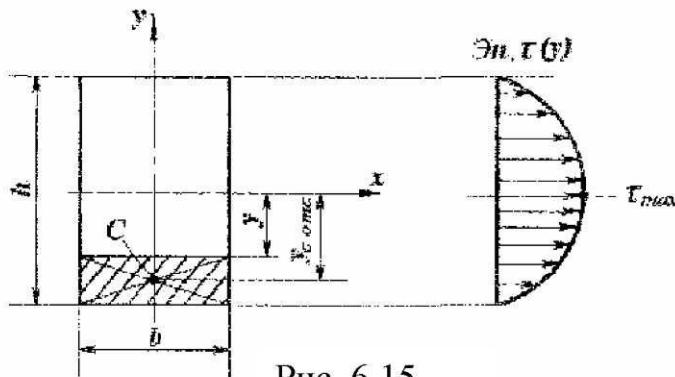


Рис. 6.15

Определим τ на расстоянии y от нейтральной оси по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{xo}}{I_x \cdot b_y},$$

Определим статический момент отсеченной части на уровне y :

$$S_{xo} = F_o \cdot y_{co},$$

где F_o, y_{co} - площадь и координата центра тяжести отсеченной части:

$$S_{xo} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Учитывая, что $I_x = bh^3/12$, находим:

$$\tau(y) = \frac{Q \cdot b \cdot (h^2/4 - y^2) \cdot 12}{2 \cdot b \cdot h^3 \cdot b} = \frac{6Q}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Касательные напряжения меняются по высоте сечения по закону

при $y = y_{\max} = \pm(h/2) \rightarrow \tau = 0$;

при $y=0$, то есть на уровне нейтрального слоя:

$$\tau_{\max} = \frac{6Q}{b \cdot h^3} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3Q}{2b \cdot h} = 1,5 \frac{Q}{F}.$$

квадратичной параболы:

Проверка прочности по касательным напряжениям проводится только для коротких балок при $h/l < 1/20$.

Условие прочности $\tau_{\max} < [\tau]$ является дополнительным к основному условию прочности: условию прочности по нормальным напряжениям $\sigma_{\max} < [\sigma]$.

6.5 Определение перемещения при изгибе.

6.5.1. Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

До сих пор мы рассматривали задачу о проверке балки на прочность. Перейдем к рассмотрению проверки балок на жесткость. Под действием нагрузок балка прогибается. Прямолинейная ось балки принимает криволинейные очертания, отдельные точки поперечных сечений балки перемещаются в направлении оси y , а сами поперечные сечения поворачиваются. Вертикальные перемещения точек поперечных сечений балки называют **прогибами**. Будем означать прогиб через y (рис. 6.16). Принято определять прогиб центра тяжести сечения. Будем считать положительными прогибы, направленные вверх (так ось y направлена вверх). Угол поворота сечения обозначим через θ . Угол θ равен углу наклона касательной к изогнутой оси балки. Следовательно

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dz}.$$

При малых прогибах можно считать:

$$\operatorname{tg} \theta \approx \theta \Rightarrow \theta = y'. \quad (6.8)$$

Дифференциальное выражение (6.8) связывает угловую и линейную деформации. При изгибе ранее нами было получено выражение (6.5), определяющее кривизну изогнутой оси балки

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{M(z)}{EI_x}.$$

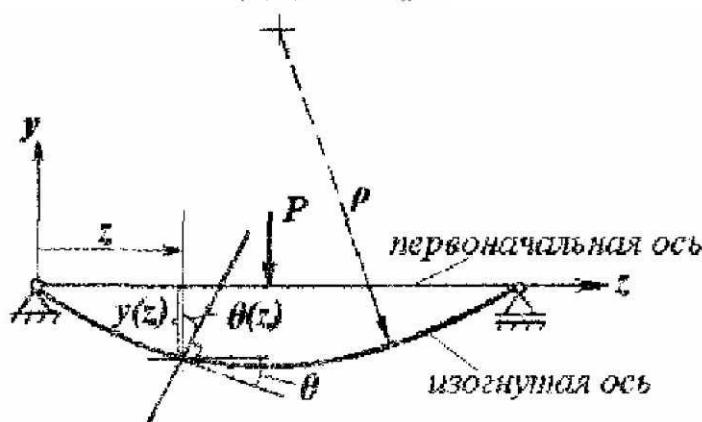


Рис. 6.16

Для балок постоянного сечения $EI = \text{const}$. В случае чистого изгиба также постоянен и изгибающийся момент; $M = \text{const}$, следовательно, радиус кривизны изогнутой оси балки не меняется: $\rho(z) = \text{const}$. Это означает, что при чистом изгибе изогнутая ось балки

представляет собой дугу окружности известного радиуса ρ , положение которой определяется положением закрепленных точек (опор). При наличии поперечной силы уравнение (6.5) является приближенным. Однако ошибка при расчете ρ невелика. Например, при $h/I=0,1$ ошибка

$\Delta\rho/\rho$ не превышает 3 %. Здесь h - размер поперечного сечения. Из аналитической геометрии известно, что кривизна плоской кривой $y(z)$ в заданной точке определяется выражением:

Вследствие малости прогибов $y' \approx \theta$ также мало, поэтому

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}, \text{ где } y' = \frac{dy}{dz}; y'' = \frac{d^2y}{dz^2}.$$

$$\frac{1}{\rho} = \pm y'' \quad (6.9)$$

величиной $(y'')^2$ можно пренебречь как величиной второго порядка малости по сравнению с единицей. Тогда справедливо соотношение:

Подставляя (6.9) в (6.5), находим:

Данное выражение называют **приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки**.

Знак в этом выражении принимают положительным, если ось у направлена вверх, как на рис. 6.16.

Интегрируя выражение (6.10) можно определить деформации при изгибе:

$$\theta = y' = \frac{1}{EI_x} \int_0^z M(z) dz + C_1,$$

$$y = \frac{1}{EI_x} \int_0^z dz \int_0^z M(z) dz + C_1 z + C_2$$

Здесь C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, определяемые угловыми и линейными смещениями начала координат: $C_1 = \theta(0)$, $C_2 = y(0)$. Непосредственным интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси наиболее удобно определять деформации балок, для которых характер внутренних усилий не меняется по длине балки (на эпюрах Q и M имеется только один участок).

Пример. Определить прогиб свободного конца консольной балки, загруженной распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 6.17). Величины E , I_x , l считать известными. Определим реакции в опоре A .

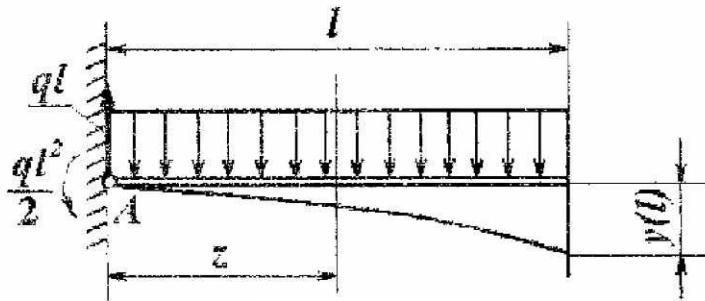


Рис. 6.17

$$\sum Y = R_a - ql = 0, \Rightarrow R_a = ql; \quad \sum M_a = \frac{-ql^2}{2} + M_a = 0, \Rightarrow M_a = \frac{ql^2}{2}.$$

Определим в общем виде изгибающий момент в сечении с координатой

$$z : (0 < z < l) : \quad M(z) = \frac{-ql^2}{2} + qlz - \frac{qz^2}{2}.$$

Воспользуемся уравнением: $y'' = \frac{M(z)}{EI_x}$

или

$$y'' = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{-ql^2}{2} + qlz - \frac{qz^2}{2} \right)$$

Проинтегрируем дважды полученное выражение по величине z :

$$\theta = y' = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{-ql^2}{2} z + \frac{qlz^2}{2} - \frac{qz^3}{2 \cdot 3} \right) + C_1$$

$$y = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{-q \cdot l^2 \cdot z^2}{2 \cdot 2} + \frac{q \cdot l \cdot z^3}{2 \cdot 3} - \frac{qz^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) + C_1 z + C_2$$

Постоянные интегрирования определим из граничных условий: при $z = 0 \quad \theta(0) = C_1 = 0; y(0) = C_2 = 0$; (так при жесткой заделке сечение A абсолютно неподвижно). Определим прогиб свободного конца, подставляя в последнее уравнение $z = l$

В общем случае, если на эпюре M имеется n участков с разным характером функций $M(z)$, то при интегрировании выражения $y''(z)$

$$Z(l) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{-ql^4}{4} + \frac{ql^4}{6} - \frac{ql^4}{24} \right) = \frac{-ql^4}{8EI_x}$$

появляются $2n$ постоянных интегрирования. Для того чтобы сократить число постоянных интегрирован до двух, и уменьшить объем вычислений необходимо выполнить ряд правил:

1. Надо для всех участков координату z отсчитывать от одного края, выбранного за начало координат, желательно, чтобы выбранный

край (начало отсчета) был закреплен.

2. При интегрировании использовать прием Клебша интегрировать без раскрытия скобок.

$$\text{Например: } \int_0^z P(z-a)dz = \int_0^z P(z-a)d(z-a) = \frac{P(z-a)^2}{2} + C_1$$

3. Если распределенная нагрузка не доходит до конца балки, то ее продлевают, добавляя компенсирующую нагрузку (рис. 6.18) обратного направления.

4. При включении в уравнение $M\{z\}$ внешнего сосредоточенного момента M , приложенного на некотором расстоянии a от начала координат, его умножают на множитель $(z-a)^0$, равный единице.

Для балок постоянного сечения удобно пользоваться готовым выражением дифференциального уравнения в форме так называемых

$$EI_x \theta(z) = EI_x \theta(0) + \sum_{i=1}^n M_i (z - a_i)^2 + \sum_{j=1}^m \frac{P_j (z - b_j)^2}{2!} + \sum_{k=1}^p \frac{q_k (z - c_k)^3}{3!} - \sum_{k=1}^p \frac{q_k (z - d_k)^3}{3!},$$

$$EI_x y(z) = EI_x y(0) + EI_x \theta(0)z + \sum_{i=1}^n \frac{M_i (z - a_i)^2}{2!} + \sum_{j=1}^m \frac{P_j (z - b_j)^3}{3!} + \sum_{k=1}^p \frac{q_k (z - c_k)^4}{4!} - \sum_{k=1}^p \frac{q_k (z - d_k)^4}{4!}.$$

универсальных уравнений (этот метод называют также **методом начальных параметров**):

Здесь $y(0)$, $\theta(0)$ смещения начала координат; n , m , p , общее число внешних пар сил M_i сосредоточенных нагрузок P_j распределенных нагрузок q_k , расположенных между началом координат и сечением с

координатой z , в котором определяются деформации $\theta(z)$ и $y(z)$. Смысл координат приложения нагрузок пояснен на рис. 7.18.

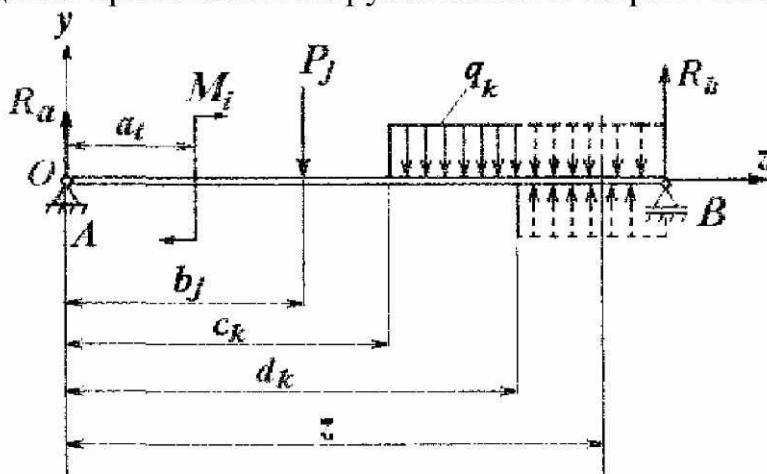


Рис. 6.18

Реакции опор включаются в уравнение наряду с прочими внешними нагрузками (P_j или M_i).

7. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ

Продольная нагрузка часто бывает приложена не в центре тяжести поперечного сечения стержня, а с некоторым смещением (экцентризитетом) относительно главных осей сечения.

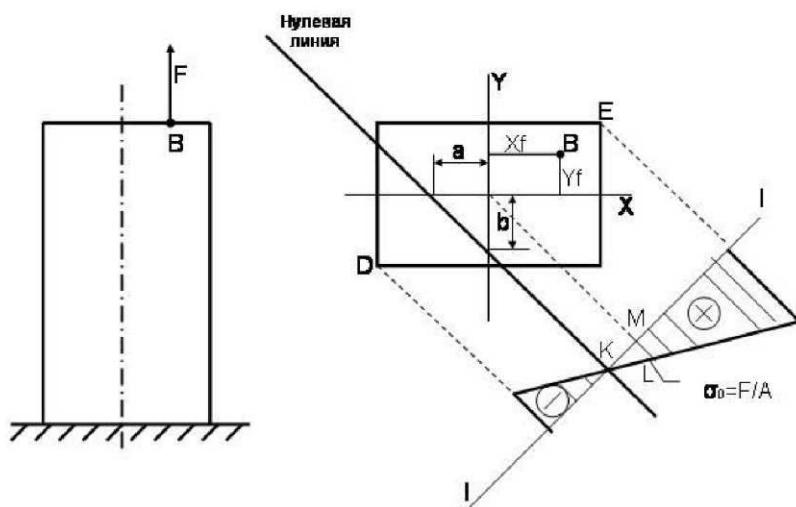


Рис. 7.1

Применив метод сечений, обнаружим в любом поперечном сечении стержня продольную силу $N = F$ и изгибающие моменты, равные : относительно оси X: $M_x = F_{yf} = N_{yf}$

относительно оси Y: $M_y = F_{xf} = N_{xf}$

Поэтому напряжение в любой точке поперечного сечения с координатами x и y определяется, как при осевом растяжении и изгибе в двух плоскостях, то есть по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y} \quad (1)$$

Для сечений, имеющих выступающие угловые точки, экстремальные напряжения определяют по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \quad (2),$$

где W_x и W_y - моменты сопротивления относительно осей x и y .

В сечении, показанном на рисунке, наибольшие напряжения будут в точке E , так как здесь суммируются растягивающие напряжения от центрального растяжения и растягивающие напряжения от изгиба в двух плоскостях:

$$\sigma_E = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \quad (3)$$

Наименьшие (в алгебраическом смысле) напряжения будут в точке D :

$$\sigma_D = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} \quad (4)$$

При этом они могут получиться как растягивающими, так и сжимающими.

Условие прочности по растягивающим напряжениям имеет вид:

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_t] \quad (5)$$

Если точка приложения силы находится на одной из главных осей сечения, например на оси y , то предыдущая формула упрощается:

$$\sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_t] \quad (6)$$

При произвольной форме поперечного сечения для определения положения опасных точек необходимо найти положение **нулевой линии**. Уравнение нулевой линии получим, приравняв напряжение нулю:

$$\frac{N}{A} + \frac{N_{y_0}}{I_x} + \frac{N_{x_0}}{I_y} = 0 \quad (7)$$

где X_0 и Y_0 - текущие координаты точек нулевой линии.

Введем обозначения: $i_x^2 = \frac{I_x}{A}$; $i_y^2 = \frac{I_y}{A}$

Величины $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ и $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ **характеризуют геометрию сечения и называются радиусами инерции сечения относительно осей x и y .** Размерность радиуса инерции – единица длины, обычно сантиметр. Теперь формулу (7) можно представить в виде:

$$\frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_f x_0}{i_y^2} + \frac{y_f y_0}{i_x^2} \right) = 0 \quad (8)$$

Так как $\frac{N}{A} \neq 0$, то:

$$\frac{x_f x_0}{i_y^2} + \frac{y_f y_0}{i_x^2} + 1 = 0 \quad (9)$$

Это и есть **уравнение нулевой линии**. Его можно представить в виде уравнения прямой в отрезках:

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1 \quad (10)$$

где $a = -\frac{i_y^2}{x_f}$, $b = -\frac{i_x^2}{y_f}$ (11) - представляют собой отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат x и y .

Так как радиус инерции всегда положителен, то величина a и x_f , а также b и y_f имеют разные знаки.

Определив положение нулевой линии, легко построить эпюру нормальных напряжений. Для этого проводим линию 1-1 (ось эпюры) перпендикулярно нулевой линии (см. рисунок выше). Сносим на эту линию крайние точки сечения D и E , опуская на линию 1-1 перпендикуляры из точек D и E .

Для построения эпюры напряжений имеем две точки: точку K на нулевой линии, где $\sigma = 0$, и точку L , получающуюся из условия, что отрезок LM в определенном масштабе должен давать значение напряжения в центре тяжести сечения. Так как в центре тяжести сечения $x=y=0$, то по формуле (5) получаем это напряжение:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$$

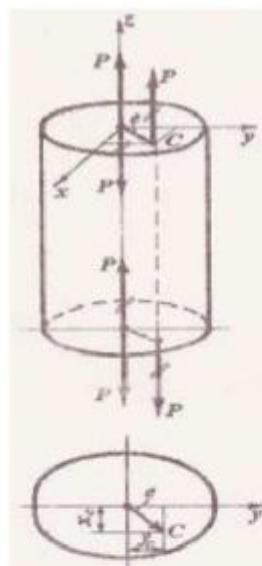


Рис. 7.2

Рассмотрим стержень, на который действуют две равные растягивающие силы P , приложенные с эксцентризитетом e относительно оси стержня. Обозначим координаты приложения силы P в

$$e = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

торцевых сечениях через X_c и Y_c , тогда эксцентризитет

Определим напряжения в любой точке сечения с координатами X и Y .

Для этого приложим в центрах тяжести торцевых сечений по две равные и противоположно направленные силы P . Каждая пара перечеркнутых на рис. 7.2 сил с плечом e эквивалентны изгибающему моменту $M = Pe$, действующему в плоскости, проходящей в через ось стержня и линию действия внешних сил. Кроме того, на стержень действуют еще две центрально приложенные растягивающие силы P .

Момент M можно разложить на два момента M_x и M_y действующих в главных плоскостях стержня:

$$M_x = P y_e; M_y = P x_e.$$

Тогда напряжения в любой точке стержня определяются формулой:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y},$$

аналогично выражению (7.8).

Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение в первом квадранте. Координаты точки x и y подставляют со своими знаками. В итоге знак напряжения получают механически.

8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.

Ранее мы изучали простейшие виды деформации: растяжения, сжатия, сдвига, кручения, чистого изгиба, которые характеризовались наличием в поперечном сечении бруса одного силового фактора.

Исключением лишь являлся общий случай плоского изгиба, при котором возникали внутренняя поперечная сила и изгибающий момент. Но и в этом случае при расчетах на прочность и жесткость учитывался лишь один силовой фактор - изгибающий момент.

На практике элементы конструкции подвергаются такому нагружению, при котором в поперечных сечениях возникает совокупность внутренних силовых факторов, которые надо учитывать при расчете на прочность.

В этих случаях говорят, что элемент находится в условиях сложного сопротивления.

Примерами сложного сопротивления является одновременное растяжение и изгиб стержня, кручение с изгибом и т.д.

Важнейшим вопросом курса сопротивления материалов является проверка прочности. При одноосном напряженном состоянии, проверка прочности сводилась к проверке неравенств вида:

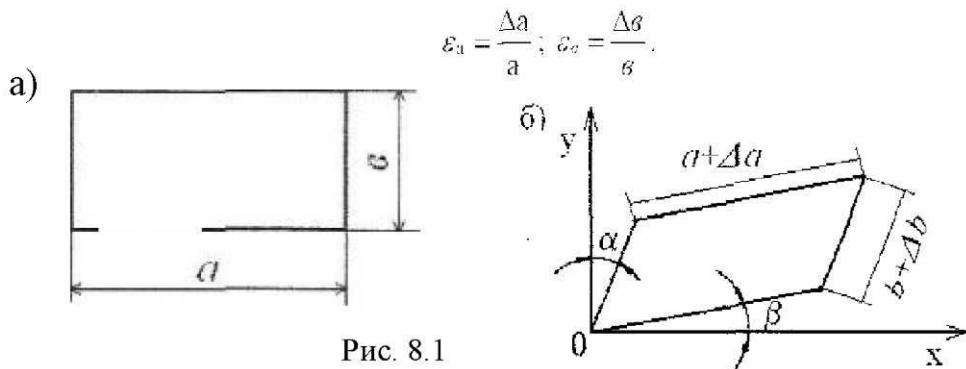
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \text{ или } \tau_{\max} \leq [\tau]$$

где допускаемые напряжения $[\sigma]$ и $[\tau]$ определялись опытным путем.

8.1. Анализ напряженного состояния в точке тела

Деформации. Под действием нагрузки элемент конструкции деформируется, то есть форма и размер его меняются. Различают линейные и угловые деформации; а также упругие и пластичные деформации.

Изменение линейных размеров тела под действием внешних сил называется **линейной деформацией** ($\Delta a, \Delta v$), а изменение угловых размеров - угловой деформацией (α, β) (рис. 8.1). Обычно при расчетах вводят понятие о **коэффициенте относительной линейной деформации** (безразмерная величина).



Если после снятия внешней нагрузки деформация исчезает, то ее называют **упругой**, а если не исчезает, то ее называют **пластичной**.

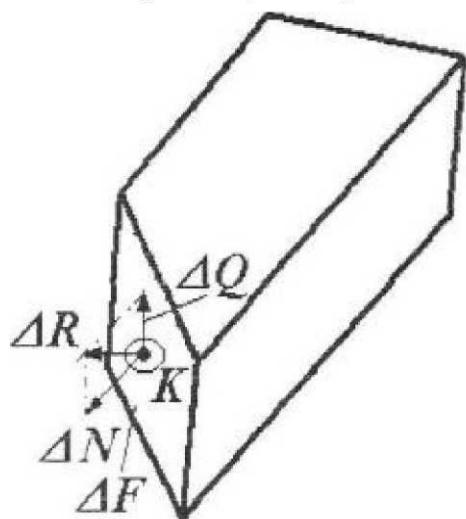
Упругостью называют свойство тела восстанавливать свою форму после снятия внешней нагрузки.

Пластичностью называют свойство тела сохранять после разгрузки полностью или частично деформацию, полученную при нагружении.

Ползучестью называют свойство тела увеличивать со временем деформацию при постоянном напряжении.

Напряжения. Было отмечено, что внутренние силы N , Q , M не сосредоточенные, а распределенные. Чтобы оценить их интенсивность вводится понятие напряжения.

Рассмотрим сечение тела произвольной плоскостью Π (рис. 8.2). В окрестности некоторой точки сечения K выделим элементарную площадку ΔF , а равнодействующую внутренних сил на этой площадке обозначим $\vec{\Delta R}$.



Отношение $\vec{\Delta R}/\Delta F = \vec{p}_{cp}$ представляет собой среднее напряжение на данной площадке. Если площадку ΔF уменьшать (стягивать в точку), то в пределах получим **напряжение в точке**.

$$\tilde{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta R}}{\Delta F}$$

Рис. 8.2

Напряжение - это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке сечения.

Внутренняя сила может действовать под определенным углом к сечению. Ее можно разложить на составляющие.

$$\Delta \vec{R} = \Delta \vec{N} + \Delta \vec{Q},$$

где $\Delta \vec{N}$ - составляющая внутренней силы на нормаль к сечению в точке К, а $\Delta \vec{Q}$ - составляющая внутренней силы на плоскость сечения соответственно:

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \sigma \quad \begin{array}{l} \text{- нормальное напряжение} \\ \left(Pa, \frac{H}{cm^2}, \frac{H}{mm^2} \right) \end{array}$$

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F} = \tau \quad \begin{array}{l} \text{- касательное напряжение} \\ \left(Pa, \frac{H}{cm^2}, \frac{H}{mm^2} \right) \end{array}$$

Очевидно, что модуль

напряжения в точке равен:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

Если мысленно вырезать вокруг какой-нибудь точки тела элемент в виде бесконечно малого кубика, то по его граням в общем случае будут действовать следующие напряжения:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$$

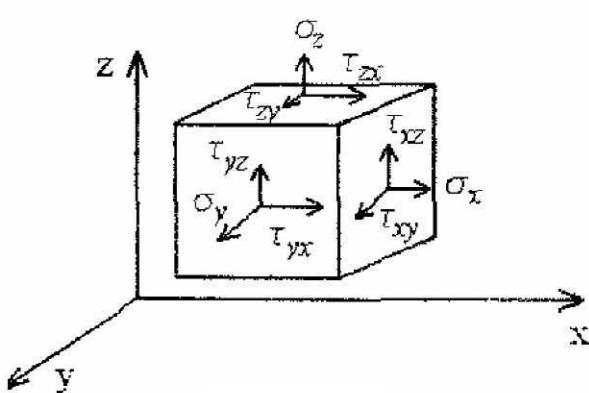


Рис. 8.3

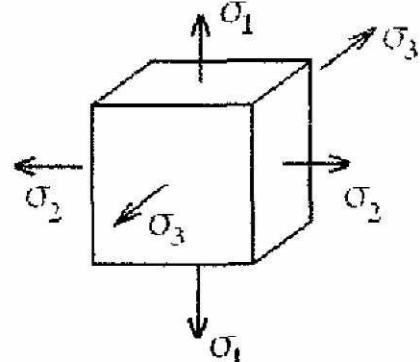


Рис. 8.4

индекс указывает ось нормальную к рассматриваемой площадке, а второй - на ось параллельную вектору данного касательного напряжения.

Если по граням кубика действуют только нормальные напряжения: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, то они называются **главными напряжениями**, а соответствующие площадки - **главными площадками**.

Главные напряжения нумеруются в порядке их убывания (с учетом знака): $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (рис. 8.4). Растворяющие напряжения направлены наружу и считаются положительными. Сжимающие напряжения направлены внутрь кубика и считаются отрицательными. Поворот системы координат $OXYZ$ вокруг точки O приводит к перераспределению напряжений, действующих по элементарным площадкам.

В теории упругости показывается, что главные площадки в

окрестности любой точки тела всегда существуют. Если все три главные напряжения не нулевые ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$), то такое напряженное состояние называют трехосным или объемным. Если одно из главных напряжений нулевое, а два отличные от нуля, то это двухосное или плоское напряженное состояние. Если только одно из главных напряжений ненулевое ($\sigma_1 \neq 0$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), то это одноосное или линейное напряженное состояние.

В простейшем случае одноосного напряженного состояния проверка прочности сводится к сравнению действующих напряжений с допускаемыми нормальными или касательными, то есть к проверке выполнения неравенств вида:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad \tau \leq [\tau]$$

Допускаемые напряжения ($[\sigma]$ или $[\tau]$) - это такие максимальные напряжения, при которых не происходит разрушение данной конкретной детали (или конструкции) и деталь работает в условиях упругих деформаций.

В заключение в табл.8.1 сведены основные виды объемных и местных деформаций, изучаемых в курсе сопротивления материалов.

8.2. Косой изгиб.

Косой изгиб имеет место, когда плоскость действия внешних нагрузок не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки.

Главной плоскостью балки называют плоскость, проходящую через ось балки и одну из главных осей инерции поперечного сечения.

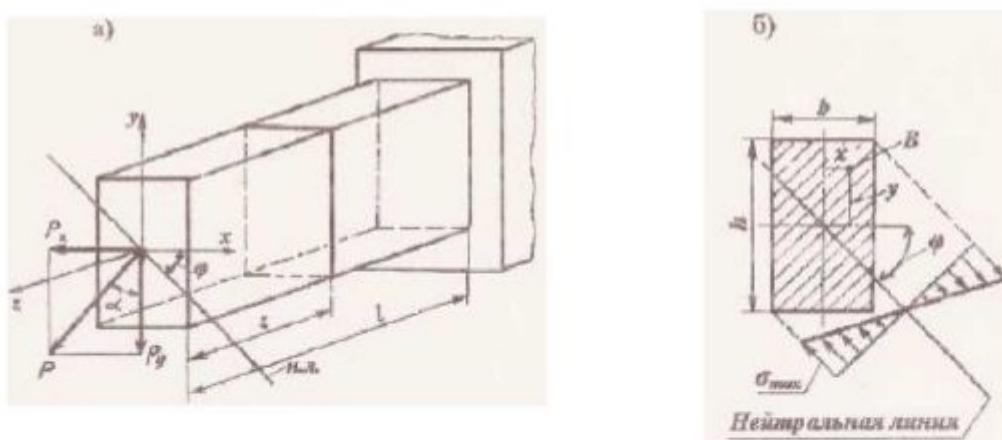
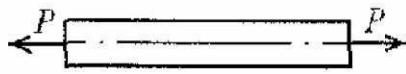
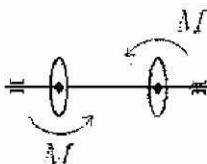
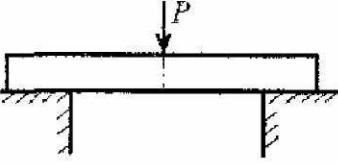
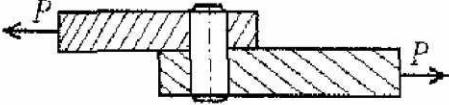
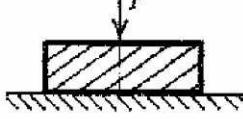
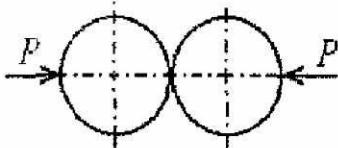


Рис. 8.5

Рассмотрим случай нагружения консольной балки поперечной силой P , приложенной к свободному краю, таким образом, что линия её действия составляет с главной осью инерции поперечного сечения угол α (рис. 8.5).

Таблица 8.1

Основные виды деформаций

Виды деформаций	Схема нагружения
Объемные деформации	
Растяжение в	
Сжатие	
Кручение	
Поперечный изгиб	
Продольный изгиб	
Сдвиг или срез	
Местные деформации	
Смятие	
Контактные деформации	

Разложим силу P на составляющие, действующие по направлению оси y и по направлению оси x :

$$P_y = P \cos \alpha ; P_x = P \sin \alpha .$$

Определим внутренний изгибающий момент в произвольном сечении, удаленном от свободного края на расстояние $z = P z$. При этом сила P_y вызывает в этом сечении изгибающий момент:

$$M_x = P_y z = P \cos \alpha z = M \cos \alpha ,$$

а сила P_x создает изгибающий момент:

$$M_y = P_x z = P \sin \alpha z = M \sin \alpha .$$

Определим напряжения при косом изгибе:

Нормальные напряжения в любой точке В рассматриваемого сечения (рис. 8.5,б) с координатами x и y определяются суммой двух составляющих, из которых первая определяется моментом M_x :

$$\sigma_1 = \frac{M_x y}{I_x} ,$$

а вторая моментом M_y :

$$\sigma_2 = \frac{M_y x}{I_y} .$$

Полное нормальное напряжение в точке:(8.5)

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} .$$

При определении знака изгибающего момента при косом изгибе принято следующее правило знаков: изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растягивающие напряжения в первом квадранте.

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} y_{on} + \frac{M_y}{W_y} x_{on} \leq [\sigma] ,$$

где x_{on} , y_{on} - координаты опасной точки.

8.3. Изгиб с растяжением (сжатием).

Рассмотрим случай, когда внешняя сила, приложенная к свободному концу консольной балки, не перпендикулярна оси балки и

может быть разложена на три составляющие P_x, P_y, P_z (рис. 8.6).

Составляющая $R = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$ вызывает косой изгиб, рассмотренный нами выше, а сила P_z приводит к растяжению балки.

Определим суммарное нормальное напряжение в произвольной точке С с координатами x, y, z , используя для этого принцип независимости действия сил.

Внешние силы P_x и P_y приводят к появлению в поперечном сечении балки изгибающих моментов напряжений

$$M_y = P_x z \text{ и } M_x = P_y z$$

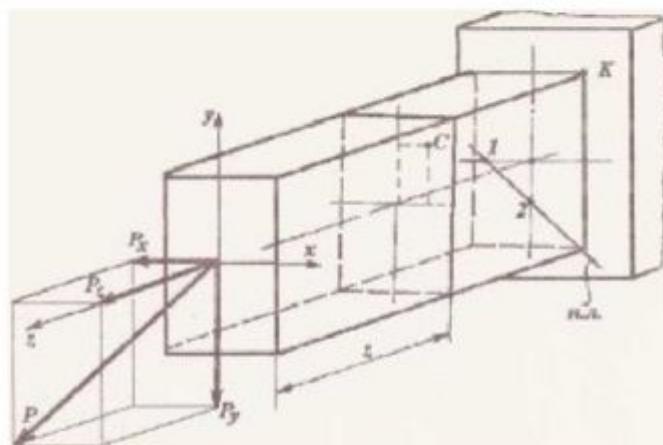


Рис. 8.6

Сила P_z приводит к появлению продольной силы $N = P_z$ и напряжения

Здесь и выше F, I_x, I_y -площадь и главные моменты инерции поперечного сечения.

$$\sigma_3 = N/F,$$

Суммарное нормальное напряжение в любой точке определяется

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y},$$

по формуле:

Уравнение нейтральной оси принимает вид:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z y_0}{I_x} + \frac{M_y x_0}{I_y} = 0.$$

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} + \frac{M_z y_{max}}{I_x} + \frac{M_y x_{max}}{I_y} \leq [\sigma].$$

8.4. Изгиб с кручением

Рассмотрим консольно закрепленный цилиндрический стержень

диаметром d , к концу которого в точке К приложена поперечная сила P , имеющая плечо r относительно оси стержня (рис. 8.7,а). Здесь $r = 0,5d$ - радиус стержня.

Приложим В центре тяжести торцевого сечения точке О две равные и противоположно направленные силы P . Тогда пара перечеркнутых сил P (рис. 8.7,а) дадут внешний крутящий момент $M = Pr$, а третья сила P вызывает плоский поперечный изгиб стержня.

Таким образом, в поперечных сечениях стержня с координатой z действуют три внутренних силовых фактора: изгибающий момент

$M_x = -Pz$, поперечная сила $Q = P$ и крутящий момент $M_k = -Pr$, эпюры которых показаны на рис. 8.7, б, в, г.

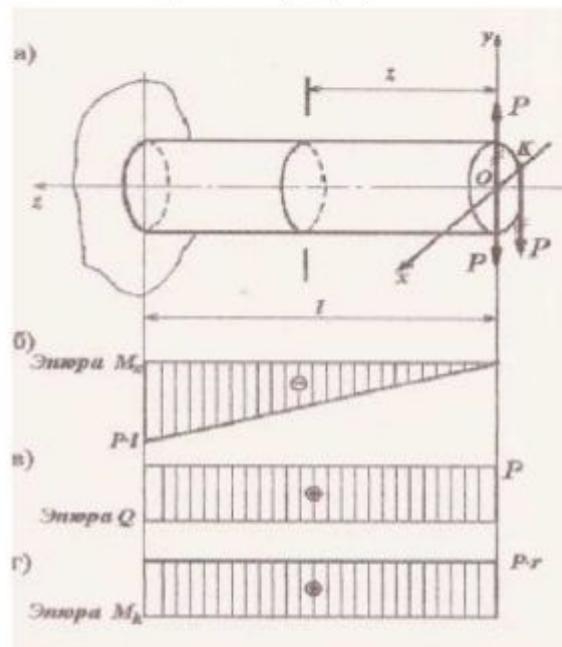


Рис. 8.7

Опасным сечением является сечение в заделке, где изгибающий момент максимальен:

$$\max M_x = Pl.$$

Для определения опасной точки рассмотрим эпюры распределения нормальных σ и касательных τ напряжений по сечению при изгибе, представленные на рис. 8.8,а и 8.8,б и эпюру касательных напряжений при кручении τ , показанную на рис. 8.8, в, где

$$\sigma_{u \max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{Pl}{0,1d^3}; \quad \tau_{\kappa \ max} = \frac{M_\kappa}{W_p} = \frac{Pr}{0,2d^3}.$$

$$\tau_{u \max} = \frac{4Q}{3F} = \frac{16P}{3\pi r^3};$$

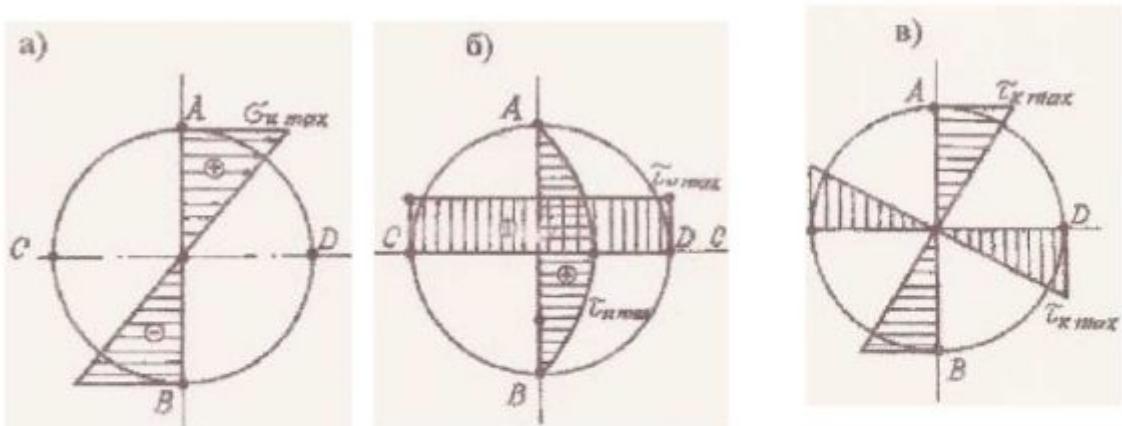


рис. 8.8

Как показывает рис. 8.8., опасными точками являются точки А и В,
где $\sigma_u = \sigma_{u\max}$; $\tau_k = \tau_{u\max}$; $\tau_k = 0$,

и точки С и D, где

$$\tau_u = \tau_{u\max}; \tau_k = \tau_{k\max}; \sigma_u = 0.$$

Однако, учитывая, что прочность при изгибе определяется в основном нормальными напряжениями, в качестве опасных рассматриваем точки А и В. Воспользуемся уравнением прочности четвертой гипотезы прочности:

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Подставляя $\sigma = \frac{M_x}{W_x}$ и $\tau = \frac{M_\kappa}{W_\kappa}$ и учитывая, что для круга $W_p = 2W$

находим:

$$\sigma = \frac{\sqrt{M_x^2 + 0,75M_\kappa^2}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Вводя обозначение

$$M_3 = \sqrt{M_x^2 + 0,75M_\kappa^2},$$

где M_3 - эквивалентный момент при изгибе с кручением и учитывая, что $W_\kappa = O,1ld^3$, окончательно получаем следующее условие прочности стержня круглого поперечного сечения, работающего на изгиб с кручением:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_3}{0,1[\sigma]}}.$$

8.5. Расчет по теориям прочности.

На практике используют ряд гипотез (так называемых теорий прочности), позволяющих приблизенно оценить опасность перехода

конструкции в предельное состояние.

Наибольшее практическое значение имеют следующие четыре теории прочности.

1. Теория наибольших нормальных напряжений (гипотеза Галилея): Опасное состояние материала наступает, когда наибольшее нормальное напряжение в каком-либо направлении достигает опасного значения.

Уравнение прочности принимает вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

Эта теория дает удовлетворительный результат только для хрупких материалов (стекло, чугун).

2. Теория наибольших линейных деформаций, предложенная Сен-Венаном в XIX в., основывается на предположении, что материал разрушается тогда, когда наибольшее относительное удлинение или укорочение в каком-либо направлении достигает такой величины, при которой происходит разрушение при простом растяжении.

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon].$$

Так же, как и по первой теории, наилучшие результаты получены для хрупких материалов, например, для чугуна. Для пластичных материалов не подтверждается экспериментально.

Таким образом, для пластичных материалов, к которым относится большинство конструкционных материалов, и первая и вторая теория прочности неприменимы.

3. Теория наибольших касательных напряжений, предложенная Кулоном в конце XVIII в., основывается на предположении, что основной причиной появления текучести материала (опасного состояния, при котором накапливаются пластические деформации) являются наибольшие касательные напряжения. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{оп.к.}}$$

Здесь $\tau_{\text{оп.к.}}$ - предельное значение касательных напряжений при кручении.

Известно, что $\tau_{\text{оп.к.}} \approx 0,5 \cdot \sigma_{\text{оп.р.}}$, $\sigma_{\text{оп.р.}}$ - предельное значение нормальных напряжений при растяжении. Если в поперечном сечении стержня действуют нормальное и касательное напряжения, то на основании 3-й гипотезы получено следующее уравнение прочности:

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение при растяжении.

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

Эта гипотеза хорошо согласуется с экспериментами для пластичных материалов.

4. Четвертая теория - энергетическая, предложенная в начале XX в. Губером и Мизесом, основывается на предположении, что сложное напряженное состояние равноопасно с простым растяжением, если они имеют одинаковые удельные энергии изменения формы.

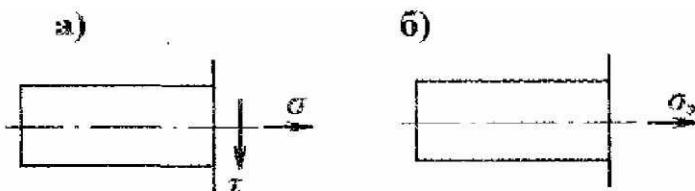


Рис. 8.9

При этом для стержней, в поперечных сечениях которых действуют нормальное σ и касательное напряжение τ (рис. 8.9), уравнение прочности имеет вид:

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Данные расчеты по четвертой гипотезе прочности имеют наилучшую сходимость с экспериментом для пластичных материалов.

В дальнейших расчетах мы будем пользоваться третьей и четвертой гипотезой прочности.

Рассмотрим порядок решения задачи проверки прочности элемента при сложном сопротивлении:

1) методом сечения устанавливают вид внутренних силовых факторов в поперечных сечениях бруса;

2) строят эпюры внутренних сил и моментов;

3) определяют опасные сечения, где хотя бы один из внутренних силовых факторов достигает максимального (по абсолютной величине) значения;

4) в каждом из выделенных опасных сечений на основании принципа суперпозиции (независимости действия сил) определяют нормальные a и касательные m напряжения от каждого силового фактора;

5) исследуют характер распределения напряжений в каждом опасном сечении и выделяют опасную точку, напряжения в которой O или максимальны по абсолютной величине;

6) в опасных точках на основании одной из гипотез прочности выполняют проверку прочности.

Рассмотрим следующие частные случаи сложного сопротивления, имеющие наибольшее значение при решении прикладных задач: косой изгиб, изгиб с растяжением, внецентренное растяжение; изгиб с кручением.

Полное нормальное напряжение в точке:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}. \quad (8.5)$$

При определении знака изгибающего момента при косом изгибе принято следующее правило знаков: изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растягивающие напряжения в первом квадранте.

Определим положение нейтральной оси при косом изгибе: напомним, что, нейтральной осью или линией называется ось, во всех точках которой нормальные результирующие напряжения равны нулю.

Пусть x_0 и y_0 - координаты произвольной точки, принадлежащей нейтральной оси. Используя уравнение (8.5), запишем уравнение нейтральной линии

$$\frac{M_x}{I_x} y_0 + \frac{M_y}{I_y} x_0 = 0. \quad (8.6)$$

Данное уравнение является уравнением прямой, так как координаты точек X_0 и Y_0 входят в него в первой степени.

Очевидно, также, что нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения (начало координат), так как координаты $X_0=0$ и $Y_0=0$

Обращают уравнение (8.6) в тождество.

Уравнение прямой, проходящей через начало координат, удобно задать в виде:

$$y_0 = x_0 \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ - угол между осью X и нейтральной линией (рис. 8.3). Определим угол φ , используя уравнение нейтральной оси (8.6) и подставляя в него $M_x = M \cos \alpha$ и $M_y = M \sin \alpha$

$$\frac{M \cos \alpha}{I_x} y_0 + \frac{M \sin \alpha}{I_y} x_0 = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.7)$$

Отсюда видно, что в общем случае, когда $I_x \neq I_y$ нейтральная ось не перпендикулярна линии действия нагрузки P , положение которой задаётся углом α .

Выполним проверку прочности при косом изгибе.

Предварительно необходимо определить опасное сечение, в котором изгибающие моменты M_x и M_y максимальны. В случае консольной балки, опасным является сечение в заделке, где $M_{max} = Pl$ (рис. 8.9).

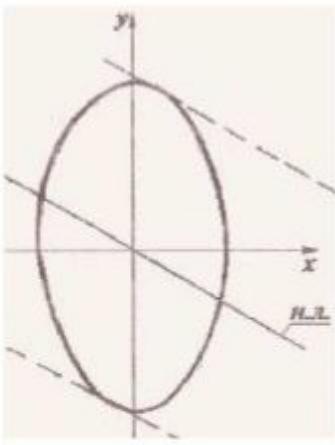


Рис. 8.9

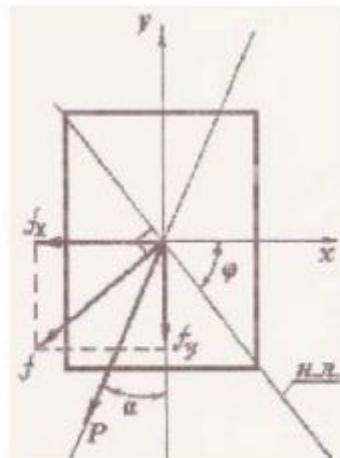


Рис. 8.10

Опасной точкой опасного сечения является наиболее удаленная от нейтральной оси точка. При произвольном контуре (рис. 8.10) проводят касательные к контуру, параллельные нейтральной оси. Точки касания являются опасными точками, в которых проверяют прочность.

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} y_{on} + \frac{M_y}{W_y} x_{on} \leq [\sigma],$$

где X_{on} , Y_{on} - координаты опасной точки.

Для профилей, вписанных в прямоугольник, условие прочности (рис. 8.10):

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma],$$

где W_x' , W_y' - осевые моменты сопротивления поперечного сечения.

Определение прогиба при косом изгибе осуществляют на основании метода суперпозиции. Прогиб произвольном сечении с координатой z равен:

$$f(z) = \sqrt{f_x^2(z) + f_y^2(z)}.$$

Здесь f_x - прогиб балки в направлении оси x под действием изгибающих моментов M_y , действующих в плоскости XOZ , а f_y - прогиб балки в направлении оси y от изгибающих моментов M_x , действующих в плоскости YOZ (рис. 8.10).

Вектор суммарного прогиба $f(z)$ всегда перпендикулярен нейтральной оси и не совпадает с плоскостью внешней нагрузки.

9. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТРЕЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Ранее рассматривались стержни и стержневые системы, внутренние усилия в которых от заданных внешних нагрузок могли быть определены при помощи только уравнений равновесия (уравнений статики).

Такие системы называются **статически определимыми**.

9.1. Расчет статически определимых стержневых систем

Рассмотрим примеры стержневых систем (рис. 9.1):

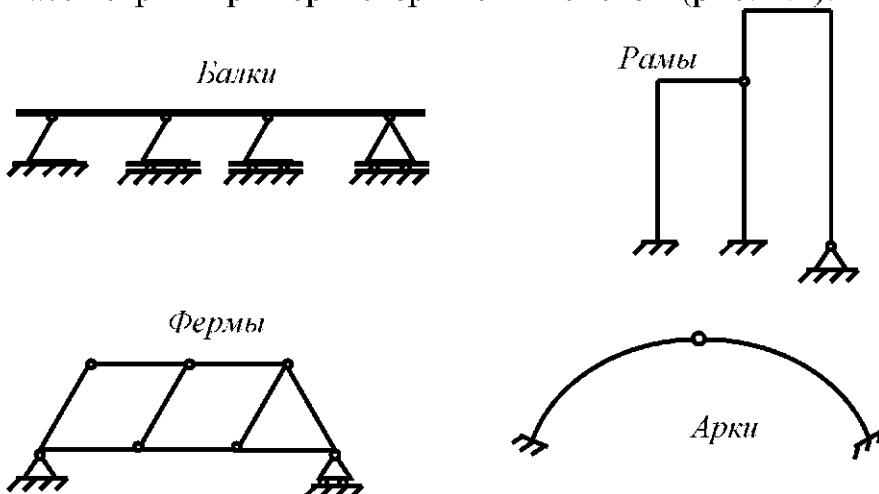


Рис. 9.1

Расчетной схемой называют упрощенную идеализированную схему сооружения, учитывающую главные особенности работы конструкции. Среди расчетных схем сооружений выделяют основные: балки, рамы, арки и фермы. Наиболее сложные для расчетов – рамы и фермы.

Основные допущения, принятые при расчете стержневых систем:

1. Перемещения и деформации малы.
2. Материал подчиняется закону Гука.
3. Будем рассматривать только плоские стержневые системы, когда оси стержней и действующая на них нагрузка лежат в одной плоскости.

Система называется *геометрически неизменяемой*, если относительные перемещения ее узлов возможны только при деформации ее элементов.

Система называется *геометрически изменяемой*, если допускаются конечные перемещения без деформации элементов.

Неизменяемые системы бывают статически определимыми (*с.о.с.*) и статически неопределенными (*с.и.с.*).

Ранее рассматривались стержни и стержневые системы, внутренние усилия в которых от заданных внешних нагрузок могли быть определены при помощи только уравнений равновесия (уравнений

статики).

Такие системы называются **статически определимыми**.

Итак, *статически определимые системы* – это такие системы, для расчета которых достаточно уравнений статики: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M = 0$.

Условие статической определимости:

$$n = n_R + 3 \cdot n_K - n_{III} - 3$$

где: n_{III} – число одиночных шарниров;

n_K – количество замкнутых контуров;

n_R – число составляющих опорных реакций;

3 – это три уравнения статики;

n – степень статической определимости.

Если $n = 0$ – система статически определима – *с.о.с.*

$n > 0$ – система неопределенная определимая – *с.и.с.*

$n < 0$ – геометрически неизменяемая система.

9.2. Расчет статически неопределенных стержневых систем.

Метод сил

В отличие от статически определимых **статически неопределеными** называются такие системы, усилия в которых не могут быть определены при помощи одних лишь уравнений статики. Для их расчета кроме уравнений статики составляются дополнительные уравнения перемещений.

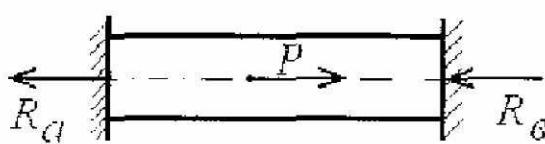
Расчет статически неопределенной системы начинается с анализа ее схемы для определения **степени статической неопределенности**. Степень статической неопределенности системы равна разнице между числом неизвестных усилий и числом уравнений статики.

Например, для стержня защемленного обоими концами (рис. 9.2), неизвестны две реакции R_a , R_b

Уравнений статики – одно, $\sum Z = 0$.

Степень статической неопределенности: $2-1 = 1$. Задача – один раз статически неопределенна.

а)



б)

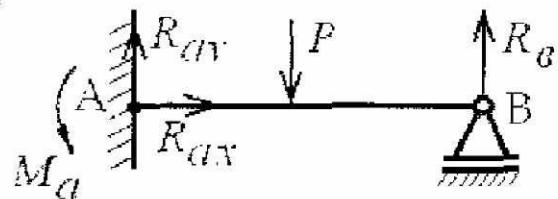


Рис. 9.2

Для стержня на рис. 9.2 ,б неизвестных реакций – 4; R_{ax} , R_{ay} , R_b , M_a . Уравнений статики – три:

$$\sum y = 0, \sum x = 0, \sum M_a = 0.$$

Степень статической неопределенности; $4 - 3 = 1$. Задача один раз статически неопределенна.

В рассмотренных примерах для определения всех реакций достаточно составить одно дополнительное уравнение перемещений.

9.3. Метод сил. Температурные напряжения

В статически неопределенных системах в отличие от статически определимых систем при изменении температуры возникают дополнительные напряжения.

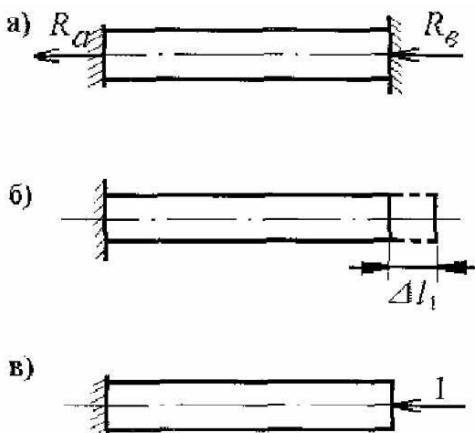


Рис. 9.3

Рассмотрим, например, стержень, защемленный между двумя абсолютно неподатливыми плоскостями. Пусть после его установки температура повысилась на t^0 . Необходимо определить напряжение, возникающее в стержне рис. 9.3.

При нагреве стержня он стремится удлиниться, но абсолютно неподатливые плоскости не позволяют это сделать. Возникают опорные реакции R_a ,

R_b . Для основной системы сил можно составить только одно уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0: R_a - R_b = 0, \text{ откуда следует}$$

$$R_a - R_b = N$$

где N - внутренняя продольная сила. Необходимо составить еще уравнение деформации.

Мысленно отбросим правое защемление. Тогда при нагревании стержень удлинится на величину

$$\Delta l_t = \alpha t L,$$

где α - коэффициент линейного расширения.

Так как в заданной системе реально удлинения нет, то укорочение стержня Δl_N вызванное внутренней силой N , должно равняться

$$\Delta l_t = \Delta l_N$$

$$\text{Тогда } \alpha t L = \frac{N \cdot L}{E \cdot F}, \quad \text{отсюда } N = \alpha t E F,$$

температурной деформации Δl_t

где L, F - длина и площадь стержня, E - модуль продольной упругости материала.

Температурное напряжение в стержне:

$$\sigma_t = \frac{N}{F} = \alpha t E$$

не зависит от его поперечных размеров, а определяется характеристиками материала a и E , перепадом температур.

При решении данной задачи использован метод сил, основывающийся на принципе суперпозиции (или независимости действия сил). Перемещение любой точки системы не зависит от порядка приложения внешних факторов, а определяется суммой перемещений от каждого отдельного фактора.

Особенностью рассмотренной конструкции является неподвижность закрепленных точек А и В: $\Delta_b = 0$, следовательно,

$$\Delta_e = \Delta_t + \Delta_N = 0,$$

где Δ_t - перемещение точки В от перепада температур;

Δ_N - упругое перемещение точки В из-за наличия лишней неизвестной реакции R_e ($R_e = N$).

Наиболее удобна при использовании метода сил - **каноническая**

$$\delta_{11} \cdot x_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}},$$

форма уравнения перемещений, которая для один раз статически неопределенной системы имеет вид:

где X_1 - лишняя неизвестная сила; Δ_{1p} - перемещение от заданной нагрузки (или температурного фактора); δ_{11} - перемещение по направлению неизвестной силы X_1 от единичного нагружения.

Для определения величины δ_{11} составляют дополнительную статически определимую расчетную схему с единичным нагружением. Для этого отбрасывают "лишнее" закрепление, заменяя его единичной нагрузкой. Такая схема для рассматриваемого примера приведена на рис. 9.3,в. В нашем примере в соответствии с законом Гука величина 8γ равна:

$$\delta_{11} = -\frac{1 \cdot L}{E \cdot F}.$$

Следовательно,

$$x_1 = R_e = N = \frac{\Delta_t}{\delta_{11}} = \frac{\alpha \cdot t \cdot L \cdot E \cdot F}{L} = \alpha \cdot t \cdot E \cdot F,$$

что и было получено выше.

9.4. Метод сравнения деформаций

Таким образом, для того, чтобы рассчитать статически неопределенную систему, следует выяснить, какие усилия необходимо определить, а затем составить уравнения статики. Недостающие уравнения составляются из условий совместности деформаций методом **сравнения деформаций**.

Рассмотрим пример (рис. 9.4,а).

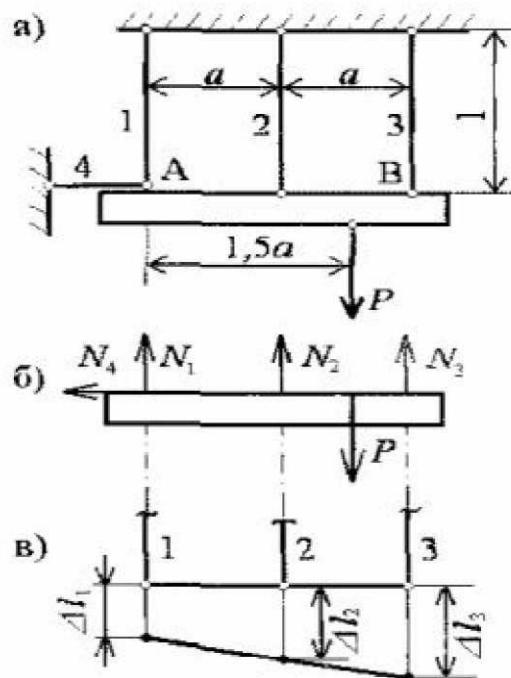


Рис. 9.4

Жесткая балка, нагруженная силой P , присоединена четырьмя стержнями к абсолютно неподатливому основанию. Требуется найти усилия в стержнях.

Перережем стержни, заменив их воздействие на балку неизвестными усилиями (см. рис. 9.4,б). Имеем четыре неизвестных усилия и три уравнения статики. Задача один раз статически неопределенна. Составим уравнения равновесия:

$$1. \sum x = 0 \Rightarrow N_4 = 0;$$

$$2. \sum M_a = 0;$$

$$N_1 \cdot 2a + N_2 \cdot a - P \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$2N_1 + N_2 - 0.5P = 0$$

$$3. \sum y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 = P.$$

4. Строим предполагаемую картину перемещений - план перемещений (рис. 9.4,в). По картине перемещений составляем уравнение деформаций. В данном случае вследствие подобия треугольников уравнение деформации имеет следующий вид:

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1} = \frac{2a}{a}, \text{ или } \Delta l_3 - \Delta l_1 = 2(\Delta l_2 - \Delta l_1).$$

Выразим удлинения стержней через искомые усилия:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot F_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot F_2}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l}{E_3 \cdot F_3},$$

$$\frac{N_3 \cdot l}{E_3 \cdot F_3} - \frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot F_1} = 2 \left(\frac{N_2 \cdot l}{E_2 \cdot F_2} - \frac{N_1 \cdot l}{E_1 \cdot F_1} \right),$$

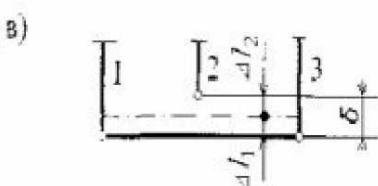
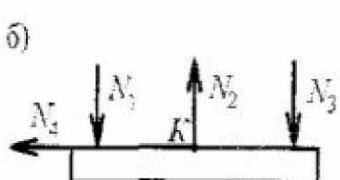
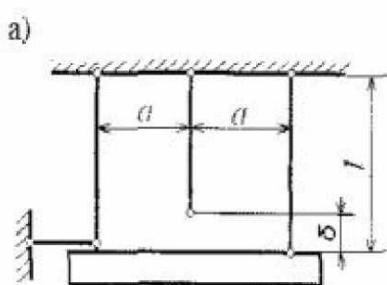
где F_i - площади поперечных сечений стержней; E_i - модули упругости материалов стержней, $i=1,2,3$.

Из последнего уравнения видно, что распределение усилий в статически неопределеных системах зависит от соотношения жесткости стержней

$$C_i = \frac{E_i \cdot F_i}{l_i}.$$

Решив систему из трех уравнений 2), 3), 4), найдем неизвестные усилия N_1, N_2, N_3 , , после чего подбираем площади поперечного сечения стержней.

9.5. Влияние неточности изготовления на усилия в статически неопределенных системах



В статически неопределенных системах могут возникать напряжения от неточности изготовления длин стержней по сравнению с проектными размерами, так называемые **монтажные напряжения**.

Рассмотрим пример аналогичный предыдущему. Внешняя нагрузка P отсутствует (рис. 9.5а).

Жесткая балка присоединяется к абсолютно неподвижной плоскости тремя стержнями, второй стержень изготовлен короче проектного на величину δ . Для того чтобы собрать конструкцию, средний стержень придется растянуть, а крайние сжать. Рассечем стержни после сборки. Составим уравнения равновесия, используя схему сил на рис. 9.5,б:

Рис. 9.5

$$\begin{aligned}\sum x = 0 &\Rightarrow N_4 = 0; \\ \sum M_k = 0 &\Rightarrow N_1 \cdot a - N_3 \cdot a = 0; \\ \sum y = 0 &\Rightarrow N_2 - N_1 - N_3 = 0.\end{aligned}$$

Составим уравнения совместной деформации. В результате сборки стержень 2 удлинится на Δl_2 , а стержни 1 и 3 укоротятся на Δl_1 . План деформаций показан на рис. 9.5, в.

Уравнение деформации имеет вид:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta.$$

Подставим значения Δl_1 и Δl_2

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= \frac{N_1 l}{E_1 F_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 F_2}; \\ \frac{N_1 l}{E_1 F_1} + \frac{N_2 l}{E_2 F_2} &= \delta.\end{aligned}$$

Решаем систему уравнений и находим усилия:

$$N_1 l + \frac{2N_1 l}{E_2 F_2} = \delta E_1 F_1.$$

Отсюда:

$$N_2 = \frac{\delta}{l} \cdot \frac{E_1 F_1}{\left(0.5 + \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2}\right)};$$

$$N_1 = N_3 = \frac{\delta}{l} \cdot \frac{E_1 F_1}{\left(1 + \frac{2E_1 F_1}{E_2 F_2}\right)}$$

Возьмем частный случай: $F_1 = F_2 = F_3$, $F_1 = F_2 = F_3 = 2 \cdot 10^5$ Па, $L = 100$ см, $\delta = 1$ мм. Определим напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{N_1}{F_1} = \frac{1}{10^5} \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{1+2} = 66.4 \text{ МПа}, \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{F_2} = \frac{1}{10^5} \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{(0.5+1)} = 133.3 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Как видно из примера, в статически неопределеных системах неточности изготовления могут привести к значительным монтажным напряжениям.

Анализируя результат определения сил N_1 и N_2 , замечаем, что силы N_1 и N_2 зависят от соотношения жестокостей поперечных сечений стержней

$$\frac{E_1 \cdot F_1}{E_2 \cdot F_2}.$$

Рассмотрим еще один пример статически неопределенной системы, схематически представленной на рис. 9.6. Абсолютно жесткий брус прикреплен к жесткому основанию шарниром К и двумя податливыми стержнями-растяжками 1 и 2. После монтажа температура первой растяжки повысилась на $\Delta t_1 = t^\circ$. Требуется определить силы в растяжках: N_1 и N_2 .

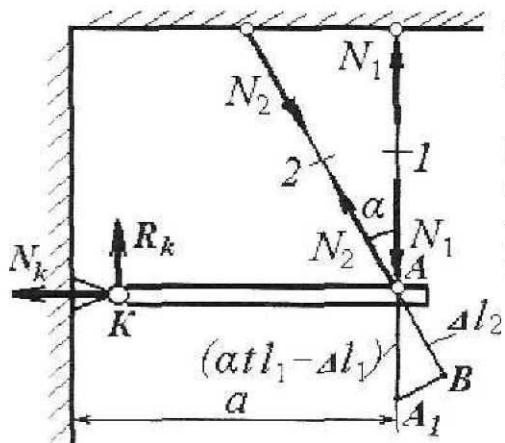


Рис. 9.6

В качестве дополнительного уравнения составим уравнение совместности деформаций, учитывая при этом, что после деформации

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= \Delta l_i - \Delta l_{1y} = \alpha \cdot t_1 \cdot l_1 - \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot F_1}; \\ \Delta l_2 &= \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot F_2},\end{aligned}$$

не должно происходить разъединение узла А.

Первоначально мысленно разъединяем узел А и определяем деформацию каждой из растяжек по отдельности:

где l_1, l_2, F_1, F_2 - длины и площади поперечного сечения растяжек;
 E_1, E_2 - модули продольной упругости материалов.

Теперь мысленно соединим растяжки в точке А₁ куда переместилась точка А из-за деформации растяжки. Для этого необходим поворот второй растяжки, на угол α . Из-за малости перемещений заменим дугу ВА₁ прямой, перпендикулярной первоначальному положению второй растяжки. Из ΔAA_1B находим:

$$\frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} = \Delta l_1 \text{ или } \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} = \alpha \cdot t \cdot l_1 - \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot F_1}.$$

Решив совместно два уравнения (3.1) и (3.2), находим

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha} = \alpha \cdot t \cdot l_1 - \frac{N_2 \cdot \cos\alpha \cdot l_1}{E_1 \cdot F_1},$$

$$N_2 \left(\frac{l_2}{E_2 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha} - \frac{\cos\alpha \cdot l_1}{E_1 \cdot F_1} \right) = \alpha \cdot t \cdot l_1,$$

$$N_2 = \frac{\alpha \cdot t \cdot l_1}{E_1 \cdot E_2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha} (l_2 \cdot E_1 \cdot F_1 - l_1 \cdot E_2 \cdot F_2 \cdot \cos^2\alpha),$$

$$N_1 = N_2 \cos\alpha.$$

На основе рассмотренных примеров можно отметить следующие особенности статически неопределимых систем:

- В элементах статически неопределимых конструкций могут существовать усилия и напряжения при отсутствии внешней нагрузки. Эти усилия и напряжения называются начальными или монтажными, появляются при сборке конструкций. Начальные напряжения могут создаваться специально (затяжка болтов), или возникать вследствие неточного изготовления или монтажа отдельных элементов конструкций.

- В статически неопределимых конструкциях возникают усилия и напряжения при изменении температуры отдельных элементов, а в некоторых конструкциях также и при равномерном изменении температуры всей конструкции.

Распределение усилий между элементами статически неопределимых конструкций зависит от жесткости этих элементов: чем больше жесткость элемента, тем большее усилие он воспринимает.

- В общем случае для статически неопределимых систем нельзя обеспечить напряжения, равные допускаемым, во всех элементах конструкции, и некоторые элементы остаются недогруженными.

9.6. Элементы рационального проектирования простейших систем

При проектировании и изготовлении машин стремятся обеспечить выполнение следующих условий:

- простоты конструкции и ее высокой надежности,
- минимальных затрат на изготовление,
- высокого коэффициента полезного действия,
- высокой производительности,
- простоты и безопасности обслуживания,
- красивого внешнего вида.

Процесс проектирования машин обычно состоит из трех стадий:

Эскизное проектирование, в процессе которого должно быть найдено наиболее целесообразное *принципиальное* решение поставленной задачи. Эскизный проект разрабатывают на основе технического задания

на проектирование и часто выполняют в нескольких конкурентоспособных вариантах. На этой стадии проектирования помимо укрупненных технических и экономических расчетов изготавливают чертежи и схемы принципиального характера, общих видов и т. п.

Техническое проектирование, когда по утвержденному варианту эскизного проекта машина в целом разрабатывается обстоятельно в увязке с вопросами эксплуатации и монтажа. На этой стадии проектирования разрабатываются чертежи как общих видов машины, так и ее сборочных единиц и делаются обстоятельные технические расчеты.

Рабочее проектирование; на основе технического проекта разрабатывается рабочий проект, представляющий собой детализацию технического проекта в производственных целях.

10. ТОНКОСТЕННЫЕ СОСУДЫ И ОБОЛОЧКИ.

10.1. Расчет безмоментных оболочек вращения.

Уравнения, определяющие напряжения в тонкостенных сосудах.

В технике часто встречаются элементы инженерных сооружений (сосуды), стенки которых воспринимают давление жидкостей, газов и сыпучих тел (паровые котлы, резервуары, огнетушители, цистерны и т.д.).

Под *тонкостенным сосудом (оболочкой)* понимают тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других.

Геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих поверхностей оболочки, носит название *срединной поверхности*.

Осесимметричными (или просто *симметричными*) оболочками называются такие, срединная поверхность которых представляет собой *поверхность вращения*.

Если срединная поверхность образует часть *сферы*, *конуса* или *цилиндра*, то оболочку соответственно называют *сферической*, *конической* или *цилиндрической*.

Задача о расчете симметричных оболочек наиболее просто решается в том случае, когда возможно принять, что напряжения, возникающие в оболочке, постоянны по всей ее *толщине*, и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует. Теория оболочек, построенная на этом предположении, называется *безмоментной теорией оболочек*.

Если оболочка не имеет резких переходов и жестких защемлений и, кроме того, она не нагружена сосредоточенными силами или моментами, то к ее расчету может применяться безмоментная теория.

Расчет на прочность осесимметричных оболочек производят по

уравнению Лапласа:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{t},$$

где σ_t - окружное (экваториальное) напряжение, МПа;

σ_m - меридиональное напряжение, МПа;

ρ_t - радиус кривизны в экваториальной плоскости, мм;

ρ_m - радиус кривизны в меридиональной плоскости, мм;

p - давление внутри оболочки, МПа;

t - толщина оболочки (стенки сосуда), мм.

Теорема 1. Если на какую-либо поверхность действует равномерно распределенное давление, то, независимо от формы поверхности, проекция равнодействующей сил давления на заданную ось равна произведению давления p на площадь проекции поверхности наплоскость, перпендикулярную заданной оси.

Теорема 2. Если на какую-либо поверхность действует давление жидкости, то вертикальная составляющая сил давления равна весу жидкости в объеме, расположенному над жидкостью.

Рассмотрим расчет двух видов симметричных оболочек, наиболее часто встречающихся на практике: сферической и цилиндрической.

10.2. Сферическая осесимметричная оболочка.

В этом случае: $\rho_m = \rho_t = r$ и $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$

Из уравнения Лапласа следует, что $\frac{2\sigma}{r} = \frac{p}{t} \Rightarrow \sigma = \frac{pr}{(2t)}$

Так как в данном случае имеет место плоское напряженное состояние, то для расчета на прочность необходимо применить ту или иную теорию прочности. Главные напряжения имеют следующие значения:

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = \sigma; \quad \sigma_3 = 0.$$

По третьей теории прочности (наибольших касательных напряжений):

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Подставляя $\sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_3 = 0$, получаем: $\sigma_{\text{окн}}^{III} = \frac{pr}{(2t)} \leq [\sigma]$.

По четвертой теории прочности: $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq [\sigma]$.

Так как в данном случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ и $\sigma_3 = 0$, то:

$$\sigma_{\text{окн}}^{IV} = \frac{pr}{(2t)} \leq [\sigma],$$

то есть получили то же условие, что и по третьей теории прочности.

10.3. Цилиндрическая осесимметричная оболочка.

В этом случае радиус кривизны в меридиональной плоскости $\rho_m = \infty$ (радиус кривизны образующей цилиндра); радиус кривизны в экваториальной плоскости $\rho_t = r$ (радиус цилиндра).

Из уравнения Лапласа получаем: $\frac{\sigma_t}{r} = \frac{p}{t} \Rightarrow \sigma_t = \frac{pr}{t}$

Проектируя на ось сосуда все силы, действующие на отсеченную часть,

получаем: $-F - \sigma_m \cdot 2\pi \cdot r \cdot t = 0$, где

$F = \pi \cdot r^2 \cdot p$ - равнодействующая сил давления на днище сосуда.

Таким образом, $\sigma_m = \frac{pr}{(2t)}$.

Сравнивая напряжения σ_t и σ_m в цилиндрическом сосуде, видим, что:

$$\sigma_t = 2 \cdot \sigma_m.$$

Условия прочности для цилиндрической симметричной оболочки по третьей

и четвертой теориям прочности (учитывая, что $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_m$ и $\sigma_3 = 0$) имеют вид, соответственно:

$$\sigma_{\text{окв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t = \frac{pr}{(2t)} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{окв}}^{IV} = \frac{0,86 \cdot p \cdot r}{t} \leq [\sigma].$$

Различие в результатах составляет 14%. Для практических расчетов рекомендуется применять формулу, основанную на четвертой теории прочности.

11. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.

11.1. Устойчивые и неустойчивые формы равновесия

Деформируемые тела так же, как абсолютно твёрдые тела могут находиться в **устойчивом** и **неустойчивом** положении.

Напомним, что при устойчивом равновесии тело, выведенное из первоначального положения внешним воздействием, возвращается к нему после устранения причины отклонения. При **неустойчивом** равновесии, напротив, незначительное возмущение вызывает резкое необратимое отклонение.

Для деформируемых тел внешними возмущениями являются нагрузки, а за возможное отклонение следует принимать ту или иную дополнительную деформацию или связанное с ней отклонение от равновесного состояния, характеризуемого определённой формой и размерами тела. Поэтому для деформируемых тел правильнее говорить не о положении равновесия, а о форме равновесия.

Рассмотрим стержень на двух шарнирных опорах, на который действует продольная сжимающая сила P , приложенная к концу B , закреплённому шарнирно-подвижно. Под действием силы P в шарнирно неподвижной опоре A возникает реакция A , направленная навстречу силе и равная ей по величине: $A = -P$.

Если силы, сжимающие стержень, невелики, то первоначальная форма равновесия, при которой ось стержня остаётся прямолинейной, является устойчивой (рис. 11.1). При снятии нагрузки стержень восстанавливает первоначальную форму.

При увеличении сжимающей силы P до величины P_{kp} , стержень получает незначительное искривление. Однако при снятии нагрузки восстанавливается прямолинейная первоначальная форма. Данное состояние равновесия является безразличным, когда наряду с прямолинейной формой равновероятна искривлённая форма (рис. 11.1,б).

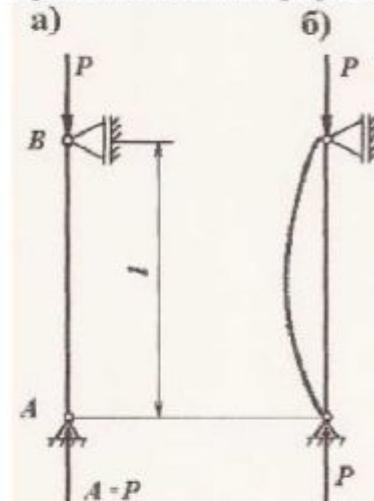


Рис. 11.1

При дальнейшем незначительном нарастании $P = P_{kp} + \Delta P$

нагрузки характер деформации стержня резко изменяется, причём, и после снятия нагрузки ось остаётся криволинейной.

Описанное явление называется продольным изгибом и связано с потерей устойчивости. Напряжение в стержне быстро возрастает и возникает опасность разрушения.

Таким образом, существует некоторое наименьшее значение осевой силы P_{kp} , называемое критическим, при котором для определённым образом закреплённого стержня равновероятны прямолинейная и криволинейная формы. Увеличение нагрузки свыше P_{kp} недопустимо, так как вызовет потерю устойчивости. Впервые задачу об определении критической силы для сжатого стержня на шарнирных опорах решил Леонард Эйлер, поэтому её называют задачей Эйлера.

11.2. Формула Эйлера для критической силы

Рассмотрим стержень с шарнирно закреплёнными концами, сжатый силой P (рис. 11.2).

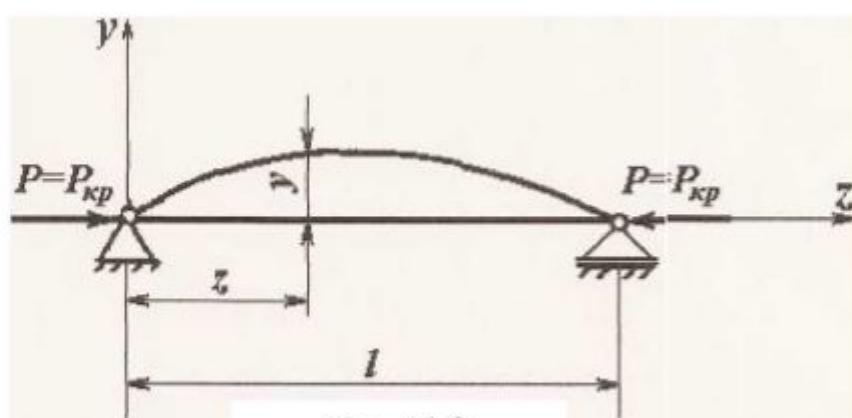


Рис. 11.2

Найдём наименьшую силу P_{kp} , которая удержит стержень в

искривлённом состоянии. Полагаем, что деформации остаются малыми и выполняется закон Гука.

Приближённое дифференциальное уравнение изогнутой оси, как известно, имеет вид:

$$y'' = \frac{M}{EI}, \quad (11.1)$$

где M - изгибающий момент, EI - жёсткость сечения при изгибе. При изгибе стержня продольная сила P создаёт в сечении с координатой z изгибающий момент $M = -Py$, где y - прогиб сечения (см. рис. 11.2.).

Подставляя $M = -Py$ в уравнение (11.1), получаем:

$$y'' = -\frac{Py}{EI}.$$

Обозначим:

$$\frac{P}{EI} = k^2. \quad (10.2.)$$

Тогда уравнение (11.1) принимает вид: $y'' + k^2 y = 0 \quad (11.3)$

Уравнение (11.3) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка и решение его можно

$$y = A_1 \sin kz + A_2 \cos kz.$$

представить в форме:

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяем из граничных условий (условий закрепления стержня). На опорах прогибы равны нулю, следовательно, имеем два граничных условия:

Очевидно, $A_1 \neq 0$, так как мы рассматриваем искривлённое состояние стержня (в противном случае при $A_1 = 0, y(z) = 0$, и ось

при $z = 0, y = 0$, отсюда $0 = A_1 \sin 0 + A_2 \cos 0; \Rightarrow A_2 = 0;$

при $z = l, y(l) = 0$, следовательно, $0 = A_1 \sin kl.$ (11.4)

остаётся прямолинейной). Отсюда следует, что для обращения уравнения (9.4) в тождество должно выполняться условие: $\sin kl = 0$, тогда $kl =$

$$\frac{n\pi}{l} \quad k = \frac{\pi}{l}; \frac{2\pi}{l}; \dots; \frac{n\pi}{l}.$$

$\pi, 2\pi, \dots, n\pi$; или

Подставляя $k =$ в соотношение (9.2) получаем,

$$\frac{P_{kp}}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots, n,$$

откуда:

$$P_{kp} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}.$$

Мы поставили задачу определения минимальной критической силы, которая соответствует $n = 1$, поэтому

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l}$$

Здесь I_{\min} - минимальный из двух главных моментов инерции поперечного сечения стержня.

Формула (11.5) носит имя Эйлера. Под действием критической силы P_{kp} стержень искривляется по синусоиде

$$y = A_1 \sin \frac{\pi}{l} z.$$

Здесь A_1 - малая неопределенная величин, не равная нулю.

11.3. Критическая сила при различных закрепленияях концов стержня

Рассмотрим другие случаи закрепления стержня.

На рис. 11.3. показана схема стержня защемленного одним концом; второй конец свободен.

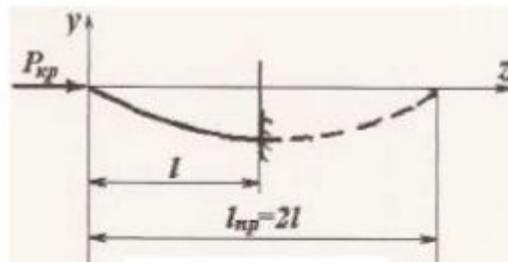


Рис. 11.3

Мысленно дополнив изогнутую ось до полуволны (пунктиром показана симметричная несуществующая ветвь), приходим к только что рассмотренной задаче. Причём **приведённая длина стержня** $l_{np} = 2l$. Воспользовавшись формулой Эйлера (11.5.), находим:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}.$$

Рассмотрим стержень, защемленный двумя концами (рис. 11.4). Точки перегиба изогнутой оси стержня находятся на расстоянии $1/4$ от

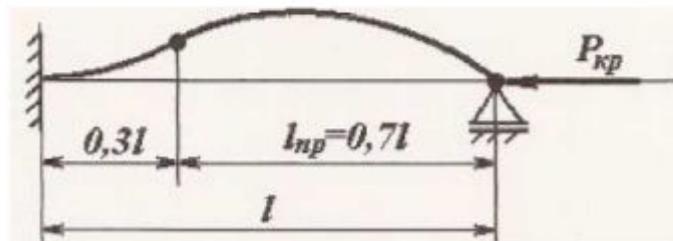


Рис. 11.5

зашемления.

Для того чтобы воспользоваться формулой (11.5), соответствующей схеме рис. 10.2, следует взять длину, занимаемую одной полуволной $l_{kp} = 0.5l$, тогда

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0.5l)^2}.$$

На рис. 11.5 приведена схема стержня, один конец которого защемлён, а второй шарнирно опёрт. В данном случае точка перегиба изогнутой оси находится на расстоянии примерно равном $0.3l$ от жёсткой заделки

Подставляя в формулу (11.5) длину, соответствующую одной полуволне $l_{kp} = 0.7l$, находим

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0.7l)^2}.$$

Очевидно, что все полученные выше результаты для P_{kp} можно свести к одной формуле:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_{kp}^2} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}, \quad (11.6)$$

где $l_{kp} = \mu l$ - приведённая длина стержня, а μ - коэффициент приведения длины: $\mu = 1/m$; m - число полуволн изогнутой оси стержня для заданных условий закрепления.

Для консольного стержня (рис. 9.3) $m = 0.5$, а $\mu = 2$; для стержня с двумя шарнирными опорами (рис. 9.2) $m = 1$ и $\mu = 1$. Если оба конца стержня защемлены (рис. 9.4), то $m = 2$, $\mu = 0.5$. Если один конец защемлён, а другой шарнирно опёрт (рис. 9.5), то $m = 10/7$, а $\mu = 0.7$.

11.4. График критических напряжений в упругой и пластической области

Критической нагрузке P_{kp} соответствует напряжение сжатия σ_{kp} , называемое **критическим напряжением**:

$$\sigma_{kp} = \frac{P_{kp}}{F},$$

где F - площадь поперечного сечения.

Подставляя в (11.7) P_{kp} определяемое (11.6), получаем:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 F}.$$

Введём обозначение:

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}}, [\text{м}]$$

(11.7)

здесь I - минимальный радиус инерции сечения, являющийся его геометрической характеристикой.

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu I}{i}\right)^2}$$

Тогда получим:

Введем новое обозначение: $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ · наибольшая гибкость стержня I

(определенная формой и размерами закрепления), приходим к **формуле напряжения**:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (11.8)$$

стержня Эйлера и условиями его для критического.

Формула Эйлера (11.6) для P_{kp} была выведена в предположении, что деформации изгиба являются малыми и упругими, поэтому и формулой (11.8) для σ_{kp} также, как и формулой (11.6), можно пользоваться только в пределах пропорциональности:

$$\sigma_{kp} \leq \sigma_n,$$

где σ_n - предел пропорциональности для материала стержня, следовательно, должно выполняться условие:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_n,$$

что справедливо, если гибкость стержня λ превышает некоторую критическую гибкость λ_{kp} :

$$\lambda \geq \lambda_{kp} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_n}}.$$

Критическая гибкость стержня λ_{kp} определяемая механическими характеристиками материала E и σ_n И является критерием применимости формул Эйлера. Для малоуглеродистой стали Ст. 3 предел пропорциональности $\sigma_n = 200$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, а

$$\lambda_{kp} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Таким образом, формула Эйлера применима в области упругих

деформаций при $\lambda \geq \lambda_{kp}$. Что касается критических напряжений в пластической области при $\lambda \leq \lambda_{kp}$ то их определяют на основании экспериментальных данных.

На рис. 11.6 в качестве примера пунктиром показана экспериментальная зависимость критических напряжений σ_{kp} гибкости стержня λ для малоуглеродистой стали Ст. 3.

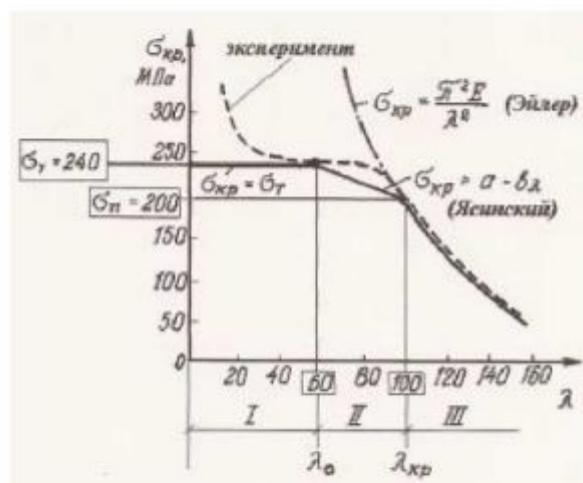


Рис. 11.6

При

$\lambda_{kp} > (\lambda_{kp} = 100)$ экспериментальные данные полностью совпадают с теоретическими, полученными по формуле Эйлера. Гипербола Эйлера показана на рис. 11.6 штрих-пунктиром.

Как известно, допускаемые напряжения $[\sigma]$ не могут превышать предел текучести материала σ_t .

Как следует из данных эксперимента (см. рис. 11.6) при снижении гибкости стержня $\lambda \rightarrow 0$ критическое напряжение возрастает по гиперболической зависимости и значительно превышает σ . Очевидно, что если $\sigma_{kp} > \sigma_t$, напряжение в стержне не превышает σ_t , то потеря

устойчивости невозможна. Необходимо лишь обеспечение условия прочности стержня. Поэтому в первой области графика (рис. 11.6) при $\lambda < \lambda_0$ теоретическое критическое напряжение принимают равным опасному напряжению, равному пределу текучести материала $\sigma_{kp} = \sigma_t$. Граница первой зоны определяется гибкостью стержня λ_0 , при которой $\sigma_{kp} = \sigma_t$. Определяя в первом приближении σ_{kp} по формуле (11.8), находим:

$$\lambda_0 \approx \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_t}}.$$

$$\text{Для стали Ст. 3 } \sigma_t = 240 \text{ МПа}; \lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^3}{240}} \approx 60.$$

Во второй области графика критических напряжений (при $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{kp}$) принята линейная аппроксимация, предложенная

Ф. С. Ясинским В 1895 г:

или

$$\sigma_{kp} \approx \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_s) \frac{(\lambda - \lambda_0)}{\lambda_{kp} - \lambda_0},$$

$$\sigma_{kp} = a - b\lambda.$$
(11.9)

Уточнённые коэффициенты a и b в формуле Ясинского приводятся в справочных таблицах для различных материалов. Для Ст. 3: $a = 310$ МПа; $b = 11.7$ МПа.

На рис. 11.6 сплошной линией показан теоретический график критических напряжений для Ст. 3: в трёх областях:

1. если $\lambda < \lambda_0$, то $\sigma_{kp} = \sigma_T$;
2. если $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{kp}$, то $\sigma_{kp} = a - b\lambda$;
3. если $\lambda > \lambda_{kp}$, то $\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$.

11.5. Методика расчёта сжатых стержней на устойчивость

В инженерной практике расчёт сжатых стержней ведётся так же, как и растянутых (для которых потеря устойчивости невозможна), но допускаемые напряжения принимают в зависимости от гибкости стержня λ :

где $[\sigma]$ · допускаемое напряжение, ϕ · коэффициент снижения допускаемых напряжений, определяемый по справочным таблицам в зависимости от марки материала и гибкости стержня λ .

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \phi[\sigma]$$

Зависимость $\phi[\lambda]$ задают с учётом теоретической зависимости отношения ϕ/ϕ_T от гибкости λ (см. рис. 11.6) и вводимых коэффициентов запаса прочности и устойчивости.

В таблице 9.1 приведена осреднённая зависимость $\phi(\lambda)$ для малоуглеродистых конструкционных сталей: Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4, Ст. 5.

Таблица 11.1 Зависимость $\phi(\lambda)$ для малоуглеродистых сталей

Гибкость, λ	10	20	40	60	80	100	120	140	160
Коэффициент, ϕ	1	0,95	0,9	0,8	0,65	0,5	0,35	0,3	0,25

Простейшим случаем, когда приходится решать вопрос об

устойчивости, является случай сжатия стержня, размеры поперечного сечения которого малы по сравнению с его длиной. При достижении сжимающей силы P некоторого определенного значения, прямолинейная форма равновесия станет неустойчивой и стержень изогнется даже без приложения к нему поперечной нагрузки. Этот случай изгиба носит название *продольного изгиба*.

Таким образом, *критическая сила* (P_{kp}) - это наибольшее значение центрально приложенной сжимающей силы, до которого прямолинейная форма равновесия стержня является устойчивой.

Исходя из сказанного, критическая сила должна рассматриваться как разрушающая нагрузка.

Сжатый стержень должен быть рассчитан так, чтобы опасность продольного изгиба была исключена: это значит, что допускаемая величина сжимаю-

щей силы должна быть меньше критической.

Условие устойчивости сжатого стержня имеет вид:

$$[P] = \frac{P_{kp}}{n_y},$$

где $[P]$ - допускаемая сжимающая сила, кН;

P_{kp} - критическая сила, кН;

n_y - допускаемый коэффициент запаса устойчивости. Он зависит от ма-

териала стержня и его назначения.

Формула для расчета критической силы P_{kp} была выведена математиком

Эйлером и имеет вид:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

где E - модуль продольной упругости материала стержня, МПа;

I_{min} - минимальный момент инерции поперечного сечения, мм^4 ;

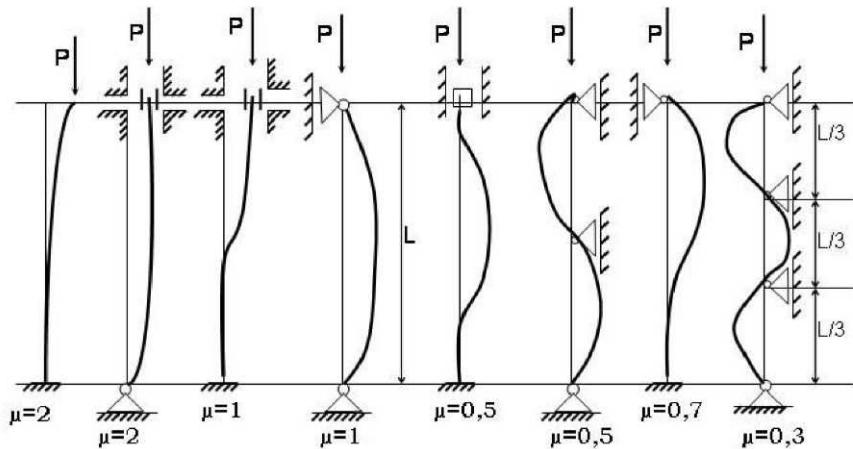
μ - коэффициент приведения длины стержня (зависит от схемы закреп-

ления концов стержня);

l - длина стержня, мм.

Произведение $\mu \cdot l$ называют *приведенной длиной стержня*.

Схема закрепления концов стержней.



Формула Эйлера справедлива лишь при условии, что потеря устойчивости происходит в стадии упругих деформаций стержня – в пределах действия закона Гука. Под действием критической силы в поперечном сечении стержня возникает *критическое напряжение* σ_{kp} .

$$\sigma_{kp} = \frac{P_{kp}}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot F} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2},$$

где безразмерную величину $\lambda = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}}$ называют *гибкостью стержня*.

Она характеризует влияние размеров стержня и способа закрепления его концов.

Величина $\sqrt{\frac{I_{min}}{F}}$ называется *минимальным радиусом инерции* поперечного сечения стержня, имеет размерность длины и обозначается i_{min} , то есть:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}}.$$

Следовательно, формула для определения гибкости стержня имеет вид:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}.$$

То есть, чем больше гибкость стержня λ , тем ниже критическое напряжение и тем нужна меньшая сжимающая сила, чтобы вызвать продольный изгиб стержня.

Формула Эйлера применяется при условии, что критическое

напряжение, возникающее в поперечном сечении стержня не должно превышать предел пропорциональности его материала, то есть:

$$\sigma_{kp} = \sigma_{mp}$$

Условие применимости формулы Эйлера удобно выражать через гибкость стержня: $\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{mp}}}$

Правая часть называется *пределной гибкостью*, то есть $\lambda_{npeo} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{mp}}}$, тогда окончательно имеем: $\lambda \geq \lambda_{npeo}$. Это значит, что для применения формулы Эйлера гибкость стержня должна быть не меньше предельной гибкости.

Вычислим, для примера, предельную гибкость стержня из стали марки Ст 3, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_{mp} = 200 \text{ MPa}$.

$$\lambda_{npeo} = 3,14 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} = 100$$

Аналогично вычисляется λ_{npeo} для стержней из других материалов.

Часто приходится иметь дело со сжатыми стержнями, гибкость которых

меньше предельной. Тогда расчет производят по формуле Ясинского: $\sigma_{kp} = a \cdot b \cdot \lambda$,

где a и b – коэффициенты, имеющие размерность напряжения и зависят от материала стержня.

В ряде случаев расчеты сжатых стержней на устойчивость сводят к расчетам на простое сжатие, но при этом уменьшают допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_{cж}]$ на величину φ - коэффициент продольного изгиба, или коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения на сжатие

$(\varphi < 1)$, зависящий от материала стержня и его гибкости. В этом случае:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma_{cж}].$$

С помощью этой формулы решают три задачи:

1. Проверка сжатого стержня на устойчивость, когда известны F , P , l и способ закреплений.

2. Определение допускаемой по условию устойчивости нагрузки, когда известно F и $[\sigma_{cж}]$, l и способы его закрепления.

$$[P] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot F$$

3. Подбор сечения, когда известны P и $[\sigma_{cж}]$, l , способ закрепления и форма поперечного сечения (но не размеры!):

$$F \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma_{cж}]}$$

Размеры профиля определяют путем подбора. Сначала рекомендуется

$\varphi_i = 0,5$. Потом вычисляют F , а потом подбирают № профиля.

Размеры

округляют до целых значений, после чего :

- вычисляют i_{min} , λ ; по значениям λ (по таблице 9.3 из сборника задач по сопротивлению материалов, автор Таланов А.С.) находят φ_i , потом σ , затем проверяют $\sigma \leq [\sigma]$. Если расхождение до 5% - хорошо, если больше 5%, то расчет повторяют, задавшись $\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi_i)/2$ и т.д. пока значение не станет меньше 5%.

12. ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

12.1 Циклы переменных напряжений и усталость материалов

До сих пор мы исследовали элементы конструкций, работающие в условиях статических напряжений, неизменных во времени. Однако во многих случаях детали машин и элементы инженерных сооружений испытывают действие **переменных напряжений**, циклически изменяющихся во времени.

Изменение напряжения может быть связано как с изменением внешних нагрузок, так и с изменением положения детали по отношению к нагрузке, например, при её вращении.

Циклические напряжения характеризуются следующими величинами:

- наибольшим и наименьшим напряжениями σ_{max} и σ_{min} или τ_{max} и τ_{min} (рис. 12.1);
- средним напряжением цикла $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$
- амплитудой цикла $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$
- коэффициентом несимметрии цикла $r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$
- частотой нагружения f , равной числу циклов напряжений в секунду.

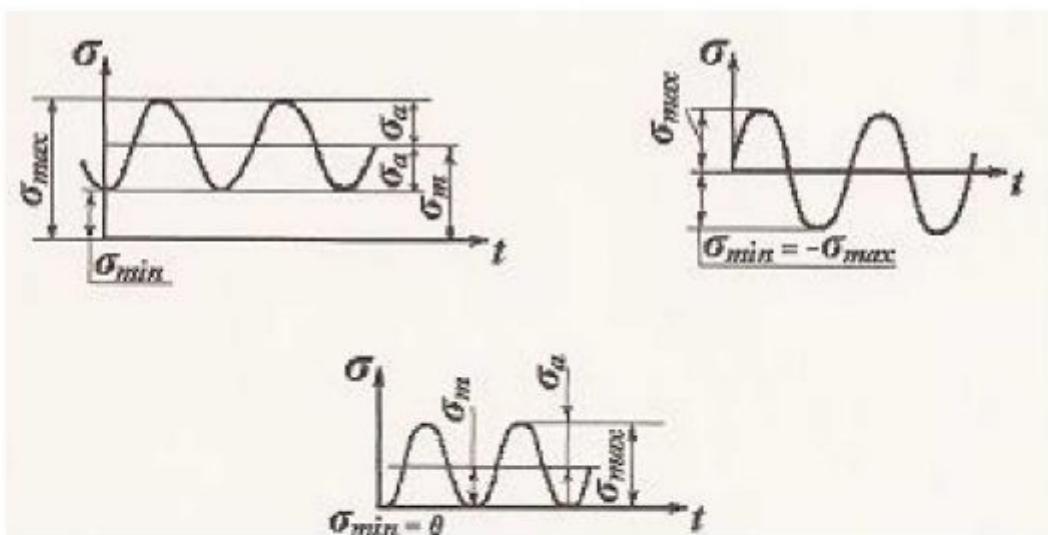


Рис. 12.1

◊

Цикл, для которого $\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \sigma$, называется симметричным циклом (рис 12.1,б). При симметричном цикле $\sigma_m=0$; $\sigma_a=a$; $r = -1$; напряжение периодически изменяется по знаку: является знакопеременным.

Цикл, для которого σ_{min} или σ_{max} равно нулю, называется отнулевым или пульсирующим. Такой цикл является знакопостоянным.

Напряжения, для цикла расстояния на рис 12.1,в напряжениях

$$\sigma_{min} = 0; \sigma_a = \sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{2}; r = 0.$$

Опыт показывает, что при переменных напряжениях разрушение происходит внезапно после истечения некоторого числа циклов N при значительно меньших предела прочности $0''_b$ материала. Это явление называется **усталостью материалов**.

Примечательно, что число циклов до момента разрушения N практически не зависит от формы цикла (прямоугольная, треугольная, синусоидальная), а определяется в основном амплитудой напряжения σ_a или τ_a .

Экспериментально установлено, что **усталостное разрушение** начинается с накопления повреждений на границах зерен материала и образования микротрещин, которые, развиваясь, постепенно ослабляют сечение и приводят к внезапному разрушению. Поэтому на **усталостную прочность** деталей большое влияние оказывают местные концентраты напряжений, вызванные неоднородностью структуры материала (наличие раковин, микротрещин) и его механической обработкой.

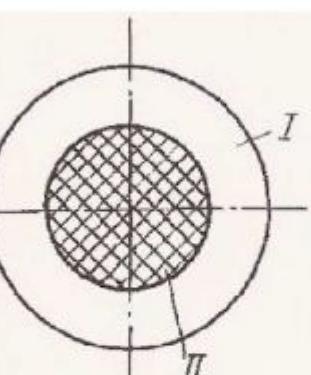


Рис. 12.2

В изломах усталости детали визуально различают (рис 12.2) две

зоны: гладкую наружную - 1 и внутреннюю 2, имеющую крупнозернистую шероховатую структуру. Наличие внешней шлифованной зоны разлома объясняется трением поверхностей развивающихся трещин, переменных нагрузок, при действии переменных нагрузок.

12.2. Понятие о пределе выносливости материала и диаграмма предельных напряжений

Выносливостью материала называют его свойство выдерживать без разрушения неограниченно большое число циклов повторно переменных напряжений.

Пределом выносливости σ_t называется наибольшее значение периодически меняющегося напряжения, при котором разрушения не происходит ни при каком числе циклов. Здесь индекс t соответствует коэффициенту не симметрии цикла. Предел выносливости определяют опытным путем методом нисходящих нагрузок. Методика проведения эксперимента является наиболее простой при симметричном цикле напряжений:

$$r = -1; \sigma_{cp} = 0; \sigma_a = \sigma.$$

Число испытываемых образцов должно быть не менее десяти. Рассмотрим вращающийся вал, на консольных концах которого закреплены массивные маховики весом P (рис. 12.3). В верхней точке 1 опасного сечения А-А вала, показанного на рис. 11.3 и удаленного от точки приложения нагрузки P на длину консоли l , возникает положительное напряжение изгиба:

$$\sigma_{max} = \sigma = \frac{M}{W_x} = \frac{Pl}{0,1d^3},$$

а в нижней точке 2 - отрицательное напряжение: $\sigma_{min} = -\sigma$.

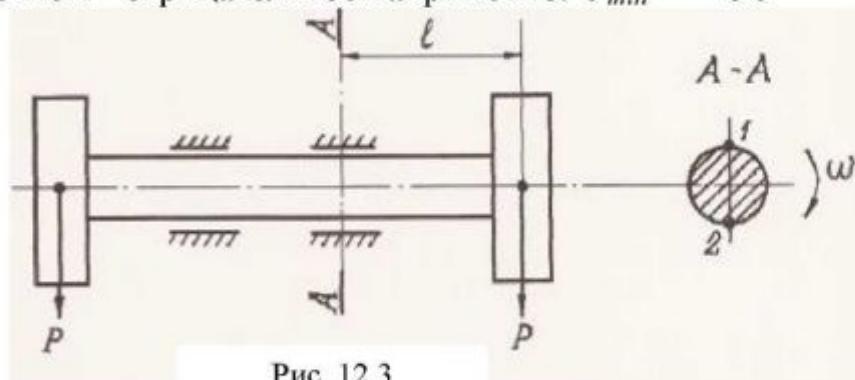


Рис. 12.3

При вращении вала точки 1 и 2 поперечного сечения перемещаются по окружности и при этом сжатые и растянутые волокна меняются местами, соответственно напряжения в опасных точках 1 и 2 изменяются от $-\sigma$ до $+\sigma$.

Если подобрать нагрузку P таким образом, чтобы действующее напряжение в точках 1 и 2 было равно пределу прочности материала σ_{-1} , то происходит его немедленный излом. Если несколько снизить нагрузку $\sigma_1 < \sigma_{-1}$, то разрушение происходит после того, как вал сделает N_j оборотов. Постепенно снижая нагрузку, для каждого напряжения σ_i устанавливают число циклов напряжений N_i , которое вал выдерживает до момента разрушения. По результатам эксперимента строят зависимость $\sigma(N)$, называемую кривой усталости или кривой Велера. На рис. 11.4 показана кривая усталости для Ст.3. Кривая асимптотически приближается к оси ординат (ON), и по ней можно определить такое напряжение σ_{-i} , при котором разрушение не происходит ни при каком

числе циклов, которое и является пределом выносливости $G''r$ при симметричном цикле (при $r = -1$). Соответственно предел выносливости при пульсирующем цикле обозначается через σ_o .

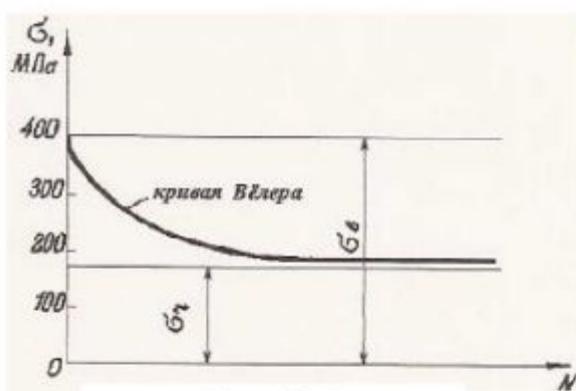


Рис. 12.4

Чтобы сократить объем испытаний, предел выносливости для сталей принято определять, как амплитуду напряжения, при котором образец выдерживает до разрушения 10^7 циклов нагружения. Такое число циклов для стальных образцов считается базовым.

Если стальной образец выдержал 10^7 циклов, то полагают, что он может выдержать без разрушения и большее число циклов.

На основании большого числа испытаний были установлены приближенные зависимости между пределом выносливости при изгибе σ_{-1} и пределами выносливости для других видов деформации. Например,

- при растяжении $\sigma_{-1p} = 0,7\sigma_{-1}$;
- при кручении $\tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1}$.

Пределы выносливости, как показывает практика, зависят от коэффициента асимметрии цикла r . В связи с этим на нескольких партиях образцов проводят также испытания при асимметричных циклах

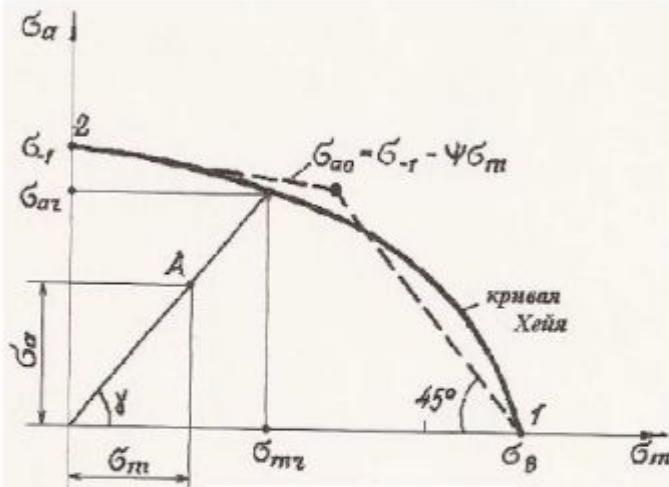


Рис. 12.5

нагружении и строят кривую, называемую также диаграммой предельных амплитуд и кривой Хейя (рис. 12.5).

Если среднее напряжение цикла $\sigma_m = 0$, то предел выносливости равен σ_f , так как цикл является симметричным (см. (.) 2 на рис 12.5.). Если, напротив, амплитуда цикла $\sigma_a = 0$ то $\sigma = \sigma_m = \text{const}$, и разрушение образца в статике произойдет при достижении предела прочности σ_b (см. (.)1 на рис. 12.5). Для получения тобой промежуточной точки диаграммы, например, точки 3 выбирают среднее напряжение цикла σ_{min} из диапазона $0 < \sigma_{min} < \sigma_f$ и, испытывая партию образцов, находят амплитуду цикла σ_{ar} при которой образец выдерживает 10^7 циклов. При этом $\sigma_r = \sigma_{mr} + \sigma_{ar}$

Если параметры σ_a и σ_m рабочего цикла нагружения образца соответствуют некоторой точке А, расположенной под предельной кривой, то образец способен выдерживать неограниченное число циклов.

Для практических расчетов кривую Хейя аппроксимируют отрезками прямой, что показано пунктиром на рис. 12.5.

12.3. Влияние конструктивных и технологических, факторов на прочность деталей при действии переменных напряжений

Пределы выносливости материалов, приводимые в справочных таблицах, получены для стандартных образцов с полированной поверхностью. Практика показывает, что реальные детали разрушаются при других значениях амплитуд цикла.

Так как усталостное разрушение связано с местными нарушениями прочности, то на величину предела выносливости детали существенное влияние оказывает концентрация напряжений, связанная с формой и размером детали, состоянием поверхности. Все эти факторы учитывают, корректируя значение предела выносливости для стандартных образцов введением соответствующих коэффициентов.

Концентрация напряжений. Экспериментальные исследования показали, что в зонах резких изменений в форме и размерах детали (около отверстий, канавок, галтелей и т.п.) имеет место концентрация напряжений.

Характер распределения напряжений в таких сечениях при растяжении показан на рис 12.6. Напряжения, вычисленные по формулам сопротивления материалов σ_0 , показанные пунктиром на рис. 12.6, оказываются значительно меньше фактических максимальных напряжений σ_{max} . Именно в точках местной концентрации напряжений зарождаются трещины в условиях действия циклических напряжений. Следует отметить, что на статическую прочность концентрация напряжений не влияет, так как происходит постепенное самопроизвольное выравнивание напряжений при превышении ими предела текучести σ_T .

Концентрация напряжений при расчетах на усталостную прочность учитывается эффективным коэффициентом концентрации, который определяют экспериментально, как отношение предела выносливости σ_{-1} стандартного образца к пределу выносливости образца с концентратором напряжения и такими же размерами поперечного сечения, как и у стандартного образца σ_{-1k} :

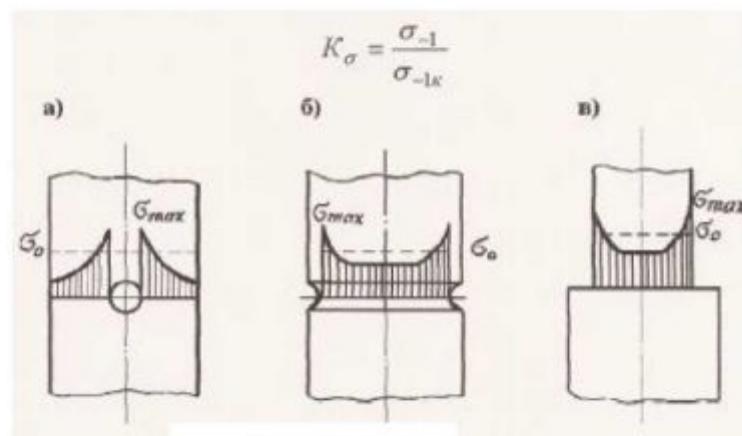


Рис. 12.6

Эффективный коэффициент концентрации всегда больше единицы и зависит не только от факторов концентрации, но и от механических свойств материала детали. Чем выше предел прочности материала, тем больше величина K_σ . На рис 12.7. в качестве примера приведены зависимости эффективного коэффициента концентрации от отношения r/d при изгибе вала диаметра d с галтелью радиусом r . Кривая 1 соответствует углеродистой стали с $\sigma_b = 500$ МПа, а кривая 2 легированной стали с $\sigma_b = 1400$ МПа.

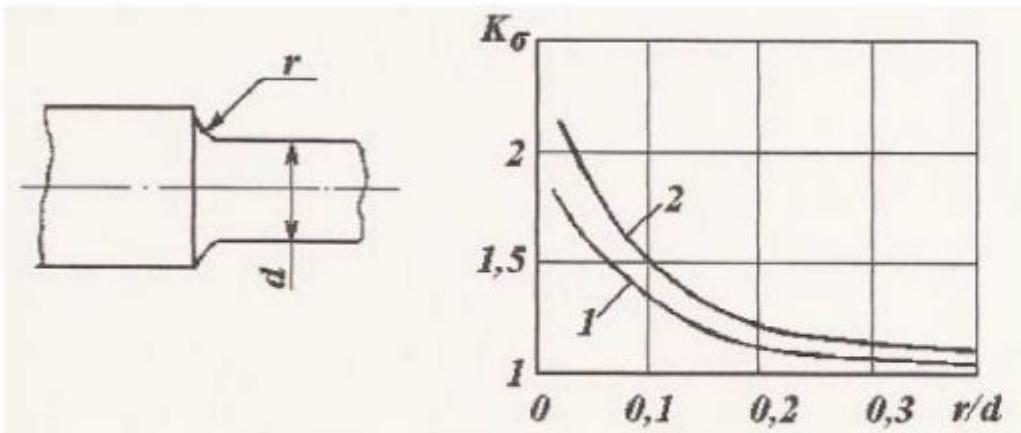


Рис. 12.7

Масштабный эффект. Экспериментальные исследования показали, что предел выносливости уменьшается с увеличением диаметральных размеров образцов. Эта зависимость носит асимптотический характер. Снижение предела выносливости с увеличением размеров детали называют **масштабным эффектом**.

В практических расчетах деталей на выносливость вводят коэффициент масштабного фактора

$$K_{d\tau} = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}} \leq 1 \text{ и } K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}} \leq 1,$$

где σ_{-1} , τ_{-1} пределы выносливости стандартного образца диаметром 7,5 или 10 мм; σ_{-1d} , τ_{-1d} пределы выносливости образца диаметром d .

Если диаметр детали меньше диаметра стандартного образца, то принимают $K_{sd} = K_{td} = 1$.

Коэффициент масштабного фактора K_{sd} или K_{td} также, как и эффективный коэффициент концентрации, зависит от механических свойств материала. На рис. 11.8, а показана зависимость коэффициента K_d от диаметра образца: кривая 1 соответствует углеродистой стали $\sigma_b = 400 \dots 500$ МПа, кривая 2 - легированной стали $\sigma_b = 1200 \dots 1400$ МПа.

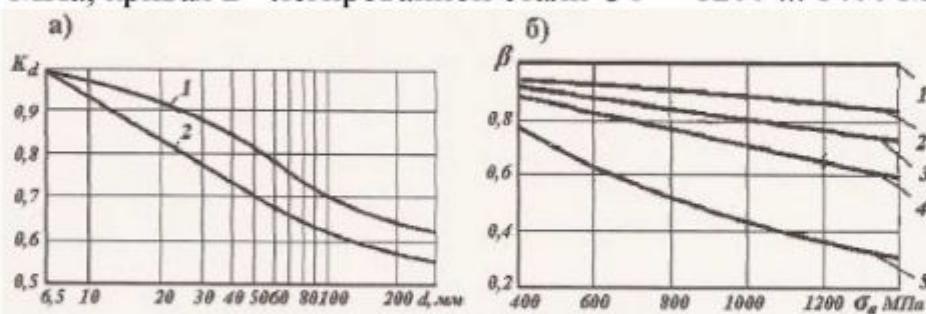


Рис. 12.8

Влияние состояния поверхности элемента конструкции. Как правило, усталостное разрушение начинается с поверхности. Поэтому

состоение поверхности существенно влияет на предел выносливости. Особенности, связанные с обработкой поверхности учитывают введением коэффициента качества поверхности:

$$\text{где } \sigma_{-1}(\tau_{-1}) - \text{предел выносливости полированного стандартного образца; } n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\sigma_a \cdot K_{\sigma}}{K_{ad}\beta_{\sigma}} + \psi_{\sigma}\sigma_m}; n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\tau_a \cdot K_{\tau}}{K_{ad}\beta_{\tau}} + \psi_{\tau}\tau_m}$$

стандартного образца; $\sigma_{-1}(\tau_{-1})$ - предел выносливости деталей, имеющих шероховатость по ГОСТ 2789-73. Коэффициент $\beta < 1$ и характеризует снижение предела выносливости при ухудшении частоты обработки по сравнению с полировкой. На рис 11.8, б приведены значения β для сталей в зависимости от предела их прочности σ_a . За единицу (прямая 1) принято значение β для полированного образца $R_a > l$. Прямая 2 соответствует шлифованным образцам, 3 - тонкому, 4 - грубому точению. Кривая 5 показывает значение для поверхности, имеющей окалину.

12.4 Проверка прочности детали при переменных напряжениях

С учетом совместного действия перечисленных выше факторов, предел выносливости реальной детали меньше предела выносливости лабораторного образца и вычисляется по соотношению:

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_{-1} \cdot K_{d\sigma} \cdot \beta_{\sigma}}{K_{\sigma}}. \quad (11.1)$$

Зная амплитуду напряжения симметричного цикла σ_a при котором должна работать данная деталь, можно найти запас прочности по усталости при действии нормальных напряжений:

$$n_{\sigma} = \frac{[\sigma_{-1}]}{\sigma_a}. \quad (11.2)$$

Аналогично определяют запас прочности по усталости для детали, работающей при переменных касательных напряжениях:

$$n_{\tau} = \frac{[\tau_{-1}]}{\tau_a}.$$

При совместном действии касательных и нормальных напряжений запас прочности и находят по формуле:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}$$

При асимметрическом цикле формулы (11.1....11.3) для вычисления запасов прочности n_{σ} и n_{τ} уточняют, учитывая влияние на прочность средней составляющей цикла σ_m (или τ_m):

Здесь ψ_σ , ψ_τ коэффициенты, определяемые экспериментально (см. рис. 11.5) и характеризующие чувствительность материала детали к асимметрии цикла соответственно переменных нормальных и касательных напряжений. Их значения выбирают в зависимости от предела прочности материала в соответствии с табл. 11.1.

Выбор коэффициентов ψ_σ, ψ_τ

Таблица 11.1

Предел прочности σ_e Мпа	350...520	520...720	720...1000	1000...1200
	0	0,05	0,1	0,2
	0	0	0,05	0,1

12.5. Расчет движущихся с ускорением элементов конструкций

Как известно, статические нагрузки от нуля до конечных значений изменяются настолько медленно, что ускорения, получаемые при этом элементами сооружения, пренебрежимо малы. Однако весьма часто нагрузки имеют динамический характер, так как изменяются во времени с большой скоростью. Действие таких нагрузок сопровождается колебаниями сооружений и их отдельных элементов.

Напряжения, возникающие при колебаниях деталей, могут во много раз превосходить по своему значению напряжения от действия статических нагрузок.

Расчет деталей сооружений на динамическую нагрузку более сложен, чем расчет на статическую нагрузку. Трудность заключается, с одной стороны, в более сложных методах определения внутренних усилий и напряжений, возникающих от действия динамической нагрузки, и, с другой – в более сложных методах определения механических свойств материалов при динамической нагрузке.

Например, при действии ударной нагрузки (т.е. нагрузки чрезвычайно малой продолжительности) многие материалы, которые при статическом действии нагрузок оказывались пластичными, работают как хрупкие; при действии многократно повторяющейся переменной нагрузки прочность материалов резко снижается.

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на принципе *Даламбера*. При расчете на удар для определения динамических напряжений и деформаций используется закон сохранения энергии.

13. УДАР

Рассмотрим случай *продольного удара* груза по неподвижному телу.

Напомним: *ударом* называют нагрузку чрезвычайно малой продолжительности.

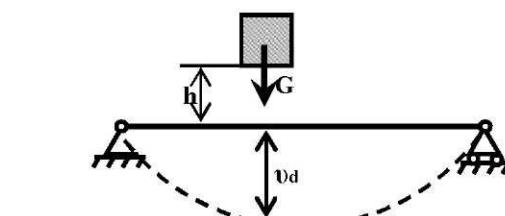
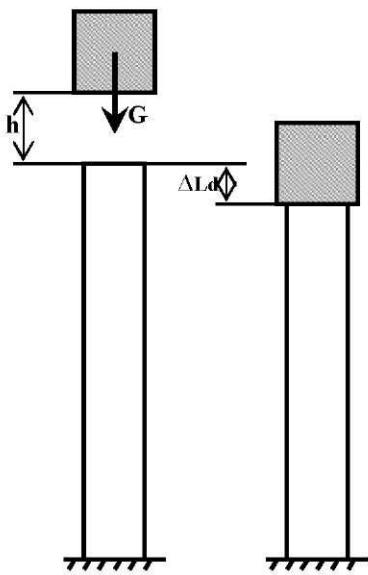


Рис. 13.2

Рис.13.

Пусть груз весом G падает с высоты h на неподвижный стержень (рис. 13.1).

Скорость тела в момент удара определяется по известной формуле свободного падения: $v = \sqrt{2gh}$.

Эта скорость за очень короткий промежуток времени удара, исчисляемый тысячными или сотыми долями секунды, упадет до нуля.

Благодаря большому ускорению (замедлению) возникает значительная сила инерции, которая определяет действие удара.

Однако теоретически трудно установить закон изменения скорости, а следовательно, и силу инерции. Здесь применяется другой путь, основанный на приближенном использовании закона сохранения энергии и на следующих допущениях:

1. Напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности, так что закон Гука при ударе сохраняет свою силу.
2. Тела после удара не отделяются друг от друга.
3. Масса ударяемого стержня считается малой по сравнению с массой ударяющегося тела, поэтому в расчет не принимается.
4. Потерей части энергии, перешедшей в теплоту и в энергию колебательного движения соударяющихся тел, пренебрегаем.

Приравняем работу падающего груза потенциальной энергии деформации стержня.

Работа, совершаемая весом падающего груза: $W = G(h + \Delta L_d)$,

где ΔL_d - перемещение в точке удара, равное укорочению стержня.

Потенциальная энергия деформации при сжатии: $U = \frac{\Delta L_d^2 \cdot EA}{2l}$

Из этих двух уравнений получаем: $G(h + \Delta L_d) = \frac{\Delta L_d^2 \cdot EA}{2l}$,

$$\text{или } \Delta l_d^2 \cdot EA - G \cdot 2l \cdot \Delta l_d - G \cdot h \cdot 2l = 0$$

Разделив все члены этого уравнения на EA , получим:

$$\Delta l_d^2 - \frac{Gl}{EA} \cdot 2\Delta l_d - \frac{Gl}{EA} \cdot 2h = 0$$

Но $\frac{Gl}{EA} = \Delta l_{st}$ - укорочение стержня от статической приложенной нагрузки G .

$$\text{Тогда: } \Delta l_d^2 - 2\Delta l_{st}\Delta l_d - 2\Delta l_{st} = 0$$

Решив это квадратное уравнение относительно Δl_d , получим:

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \pm \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2h\Delta l_{st}}$$

Оставляя знак плюс (так как $\Delta l_d > \Delta l_{st}$), получаем окончательно:

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}}\right) = \Delta l_{st} \cdot K_d, \quad (1)$$

где K_d - динамический коэффициент.

Разделив обе части последнего уравнения на длину стержня и умножив на модуль упругости E , перейдем на основании закона Гука от деформаций к напряжениям: $\sigma_d = \sigma_{st} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}}\right) = \sigma_{st} \cdot K_d \quad (2)$

Из этих формул видно, что динамические напряжения и перемещения зависят от статической деформации ударяемого тела. Чем больше статическая деформация (при прочих равных условиях), тем меньше динамические напряжения. Вот почему для смягчения удара применяют прокладки (резиновые, пружинные), дающие большие деформации. При сжимающем ударе во избежание продольного изгиба динамические напряжения не должны превосходить критических напряжений.

Аналогичный вид имеют формулы и для случая поперечного (изгибающего) удара, только в этом случае вместо Δl_{st} следует принимать статический прогиб балки в месте удара - v_{st} , а вместо Δl_d динамический прогиб - v_d (рис. 12).

Частные случаи.

1. Если $h=0$, т.е. имеет место *внезапное приложение нагрузки*, то из формул (1) и (2) получим: $\Delta l_d = 2\Delta l_{st}$, $\sigma_d = 2\sigma_{st}$.

При внезапном приложении нагрузки деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же нагрузки.

2. Если высота падения h значительно больше статической деформации Δl_{st} , то для определения динамического коэффициента

получим следующую приближенную формулу:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}} \approx \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{st}}}$$

14. УСТАЛОСТЬ. РАСЧЕТ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Многие детали машин в процессе эксплуатации подвергаются действию переменных напряжений, т.е. напряжений, изменяющих свое значение или значение и направление. В таких условиях работают, например, рельсы железных дорог, оси вагонов, зубья колес передачи, валы, рессоры, штоки поршней и др. Опыт показывает, что действие переменных во времени напряжений является источником *усталостного разрушения материала*, которое происходит при напряжениях, значительно меньших предела прочности и даже предела текучести.

Процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к изменению его свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению, называется усталостью.

Усталостное разрушение материала начинается с образования в наиболее слабом месте детали микротрещины (чаще всего у поверхности детали, но иногда и в толще материала). Этот вид разрушения происходит, как правило, без заметных пластических деформаций и имеет ярко выраженный локальный характер.

Изменение напряжений от одной крайней величины до другой и обратно называется циклом напряжений.

Количество циклов напряжений, необходимое для доведения элемента конструкции до разрушения, зависит от наибольшего переменного напряжения и от алгебраической разности между крайними значениями переменных напряжений, которым элемент подвергается. Чем больше эта разность, тем меньшее число циклов напряжений требуется для доведения материала до разрушения.

Зависимость между числом циклов до разрушения (N) и соответствующими напряжениями (σ_{max}), называется *кривой усталости* (рис.2).

Опытным путем установлено, что для многих материалов и, в частности, для стали большинства марок существует такое наибольшее напряжение, при котором материал выдерживает, не разрушаясь, неограниченное число циклов.

Так, испытания стальных образцов при нормальной температуре показали, что выдержавшие 10^7 циклов нагружения образцы могут при тех же напряжениях работать неограниченное время. Поэтому продолжительность испытания всегда оговаривают.

Наибольшее переменное напряжение, которое материал может

выдерживать не разрушаясь, при любом числе циклов нагружения, называется **пределом выносливости материала** и обозначается σ_R (или τ_R), где индекс соответствует коэффициенту асимметрии цикла.

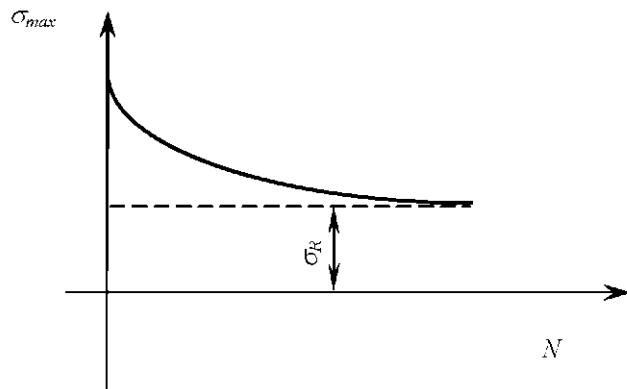


Рис. 14.1. Кривая усталости

Это напряжение существенно зависит как от вида деформации (изгиб, осевое растяжение-сжатие, кручение), так и от характера цикла напряжений. Для симметричного цикла (при $R_\sigma = -1$) предел выносливости $\sigma_R = \sigma_{-1}$ имеет минимальное значение. Важной характеристикой материалов служит также предел выносливости при пульсирующем цикле $\sigma_R = \sigma_0$. Предел выносливости при изгибе всегда больше, чем при осевом нагружении. Это объясняется тем, что при растяжении или сжатии все сечения подвергаются одинаковым напряжениям, а при изгибе наибольшие напряжения будут лишь в крайних точках сечения, остальная часть материала работает при меньших напряжениях. Это затрудняет образование трещин усталости. Если цикл напряжений асимметричен, то предел выносливости тем больше, чем ближе к $+1$ коэффициент асимметрии цикла R_σ . При $R_\sigma = +1$, т.е. при статическом нагружении, характеристикой прочности материала является предельное напряжение σ_{pred} (предел прочности).

ЛИТЕРАТУРА

1. Винокуров А.И. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Высшая школа, 1997.
2. Степин П.А. Сопротивление материалов. Учебник для немашиностроит. спец. вузов. – 9-е изд. – М.: Интеграл-Пресс, 1997.
3. Таланов А.С. Сборник задач по сопротивлению материалов. Учебно-методическое пособие по курсу «Прикладная механика». – СПб: СПбВПТШ МВД РФ, 1996, - 192 с.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1996.