

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**КРУЧЕНИЕ БРУСА**  
**РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ**  
Учебное пособие

В пособии рассматриваются решения типовых задач, входящих в курс «Сопротивление материалов» по разделу «Кручение». Учебное пособие включает необходимые теоретические сведения и расчетные формулы, используемые при решении задач, выполнении РГЗ, подготовке к сдаче зачетов и экзаменов. Представлены примеры решения типовых задач.

Предназначено для студентов как очной формы обучения, так и заочной.

## Предисловие

Изучение таких курсов, как «Сопротивление материалов», «Техническая и прикладная механика», «Прикладная механика. Сопротивление материалов», «Теории прочности» предусматривает освоение студентами не только теоретического материала, но и овладение методами расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Это требование влечет за собой необходимость выработки навыков решения соответствующих задач, что вызывает у студентов наибольшие затруднения.

Целью учебного пособия «Кручение бруса», составленного на основе многолетнего опыта преподавания, является попытка расширить круг вопросов, рассматриваемых на практических занятиях в условиях дефицита времени, и помочь студенту усвоить методы решения задач, предлагаемых на зачетах и экзаменах.

Учитывая ограниченное число часов аудиторных занятий, внимательное изучение примеров, приведенных в пособии принесёт, по нашему мнению, читателю определённую пользу.

«Кручение бруса» включает в себя материал первого раздела курса, изучаемого в течении первого из двух семестров. Кафедрой подготавливаются к печати учебные пособия, соответствующие содержанию материала последующих частей курса.

В пособии рассматривается один из основных разделов – кручение прямого бруса. Приводятся основные теоретические сведения и расчетные формулы, примеры решения типовых задач различной степени сложности и задачи, предназначенные для самостоятельного решения. Профессор Н.И. Иванов, автор одного из лучших учебников по сопротивлению материалов писал, что «...занимаясь по курсу, не следует ограничиваться только “рассматриванием” чертежей и “чтением” формул. “Сложные” и “запутанные” выводы становятся ясными тогда, когда они шаг за шагом будут возникать под рукой занимающегося.».

Только после усвоения теоретической части изучаемого курса следует переходить к разбору решенных задач, а затем уже приступать к решению задач, предложенных для самостоятельной работы.

## Введение

В подготовленных учебных пособиях представлены основные теоретические сведения, расчетные формулы и достаточно большое

количество типовых примеров решения задач различной степени сложности, относящихся к одному из основных разделов курса «Сопротивление материалов»- кручение.

В разработанном авторами Додиным Ю.С., Лысюком А.Я. и др. Сборнике индивидуальных задач по сопротивлению материалов (раздел кручение), представлено большое количество задач, однако отсутствует основные теоретические положения и примеры решения задач по данному разделу.

Уменьшение количество часов аудиторных занятий и увеличение объема самостоятельной подготовки потребовало значительной индивидуальной работы студентов. В связи с этим в последнее время наметилась тенденция к разработке и применению в учебном процессе пособий, где достаточно подробно изложены основные теоретические сведения и значительное число примеров решения задач различной сложности по разделам курса.

Отличием данного учебного пособия является то, что в нем рассматриваются в полном объеме примеры одного раздела (кручение), которые достаточно просты, не требуют объемных расчетов, охватывают узловые проблемы раздела. Это позволяет сконцентрировать внимание студентов на представленном материале.

Работа с данным пособием предполагает, что только после усвоения теоретической части изучаемого курса следует переходить к разбору решенных задач, а затем приступать к решению задач, предложенных для самостоятельной работы.

## **1. Основные теоретические сведения и расчетные формулы кручения прямого бруса**

Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечном сечении возникает только крутящий момент. Прочие силовые факторы равны нулю. Стержень (брус), работающий на кручение, обычно называют валом. Знак крутящего момента физического смысла не имеет и общепринятого правила знаков не существует.

Для графического изображения крутящих моментов удобно использовать их схематическое представление, предложенное профессором В. И. Феодосьевым (рис. 1,а): кружочек с точкой соответствует силе, направленной на наблюдателя, с крестиком - от наблюдателя. Возможны и другие варианты схематического изображения крутящих моментов (рис. 1,б). Крутящий момент в дальнейшем будем счи-

тать положительным, если наблюдатель смотрит на сечение со стороны внешней нормали и видит крутящий момент, направленный против часовой стрелки.

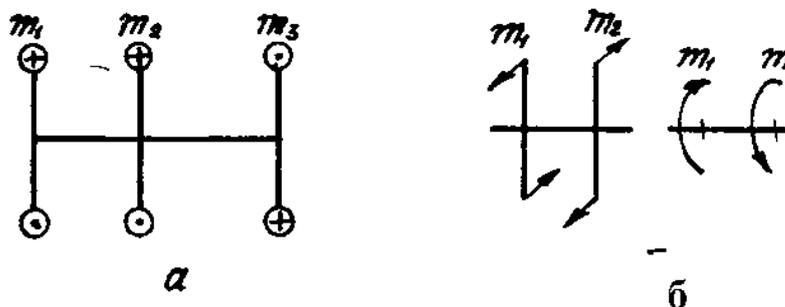


Рис. 1. Варианты схематического изображения крутящих моментов

Внутренний крутящий момент выражается через внешние крутящие моменты следующим образом: внутренний крутящий момент в поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих на часть стержня по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Характер изменения внутренних крутящих моментов по длине стержня удобно изображать в виде графика (эпюры), который строят по участкам. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные крутящие моменты или начинаются, а также заканчиваются распределенные моментные нагрузки.

При расчете вала иногда задается передаваемая им мощность  $N$  и угловая скорость его вращения  $\omega$ , возникающий при этом крутящий момент можно  $M_{кр}$  вычислить по одной из следующих формул:

$$M_{кр} = \frac{N}{\omega}, \quad (1.1)$$

где  $M_{кр}$  выражается в  $Hm$ ,  $N$  - в  $Bm$ ,  $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$  - в  $рад/сек$ ;  $n$  - число оборотов вала в минуту;

$$M_{кр} = 97400 \cdot \frac{N}{n} \quad (1.2)$$

где  $M_{кр}$  выражается в  $кг см$ ,  $N$  - в  $кВт$ ,  $n$  - в  $об/мин$ ;

$$M_{кр} = 71620 \cdot \frac{N}{n}, \quad (1.3)$$

где  $M_{кр}$  выражается в кг см,  $N$  - в л. с.,  $n$  - в об/мин.

При расчете вала на кручение необходимо решать две основные задачи:

- 1) определить напряжения, возникающие в его поперечном сечении;
- 2) найти угловые перемещения (углы закручивания).

Напряжения и деформации бруса, испытывающего кручение, существенно зависят от формы его поперечного сечения. Наиболее просто вычисляются эти величины для бруса с круглым поперечным сечением. Задача по определению напряжений и деформаций в бруссе некруглого сечения не может быть решена методами сопротивления материалов, поэтому в расчетах, связанных с кручением подобных брусьев, используются соответствующие формулы, полученные методами теории упругости.

Рассмотрим сначала кручение бруса круглого сплошного или кольцевого сечений. В этом случае в его поперечных сечениях возникают лишь касательные напряжения, определяемые по формуле:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} \cdot \rho \quad (1.4)$$

где  $\tau_{\rho}$  - касательное напряжение в произвольной точке рассматриваемого сечения;  $M_{кр}$  - крутящий момент в исследуемом поперечном сечении;

$\rho$  - расстояние от исследуемой точки до центра тяжести сечения;  $I_{\rho}$  - полярный момент инерции поперечного сечения бруса.

Для круга:

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4 \quad (1.5)$$

Для кругового кольца:

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - \alpha^4) \approx 0,1 \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4) \quad (1.6)$$

где  $\alpha = \frac{d}{D}$ ;  $d$  - внутренний диаметр кольца;  $D$  - его внешний диаметр.

Формула (1.4) показывает, что касательные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону прямо пропорционально расстоянию точек от центра тяжести поперечного сечения. Максимальные напряжения будут у поверхности бруса при

$\rho = r = \frac{d}{2}$  (рис. 2.) и их величина определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_p} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \quad (1.7)$$

где отношение  $\frac{I_p}{\rho_{\max}} = W_p$  (1.8)

называют полярным моментом сопротивления, размерность которого - единица длины в третьей степени ( $m^3, cm^3$ ).

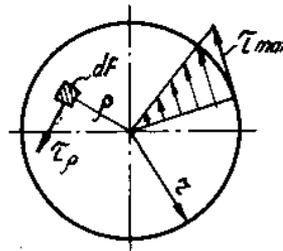


Рис.2 Распределение напряжений по поверхности бруса  
Для круга:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3 \quad (1.9)$$

Для кругового кольца:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \cdot (1 - \alpha^4) \approx 0,2 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4) \quad (1.10)$$

Условие прочности бруса состоит в том, что наибольшее касательное напряжение в опасном сечении не должно превышать допустимого касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau] \quad (1.11)$$

где  $[\tau]$  - допускаемое касательное напряжение.

Пользуясь условием прочности, можно выполнить следующие виды расчетов:

1. Проверка прочности (проверочный расчет).

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (1.12)$$

2. Подбор сечения (проектный расчет).

При проектном расчете определяют требуемый момент сопротивления:

$$W_p \geq \frac{M_{кр}}{[\tau]}. \quad (1.13)$$

3. Вычисление допускаемого крутящего момента по формуле:

$$M_{\max} \leq [\tau] \cdot W_p. \quad (1.14)$$

Деформация бруса круглого поперечного сечения при кручении сводится к тому, что его поперечные сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются одно относительно другого на некоторый угол, называемый углом закручивания.

Если на участке бруса крутящий момент и полярный момент инерции постоянны, угол закручивания, выражаемый в радианах, определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (1.15)$$

в градусной мере

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (1.16)$$

где  $l$  - длина рассматриваемого участка,  $G$  - модуль упругости второго рода (модуль сдвига).

Если брус ступенчатый и (или) на него действуют несколько крутящих моментов, полный угол закручивания бруса определяется суммированием углов закручивания по участкам, в пределах которых крутящий момент и полярный момент инерции постоянны:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (1.17)$$

Если крутящий момент и полярный момент инерции (или один из них) переменны по длине бруса, то

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p} \quad (1.18)$$

где  $l_i$  - длина участка бруса, в пределах которого крутящий момент и полярный момент инерции постоянны.

Угол закручивания на единицу длины бруса называется относительным углом закручивания и обозначается  $\theta$  (рад/м):

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_p} \quad (1.19)$$

Для обеспечения достаточной жесткости вала его наибольший относительный угол закручивания не должен превышать допустимого, устанавливаемого либо нормативами и стандартами, либо назначаемого на основе опыта проектирования и эксплуатации аналогичных конструкций.

Условие жесткости бруса:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_p} \leq [\theta], \quad (1.20)$$

где  $[\theta]$  - допустимый относительный угол закручивания.

Исходя из условия жесткости, можно определить допустимый крутящий момент:

$$[M_{кр}] = G \cdot I_p \cdot [\theta] \quad (1.21)$$

или диаметр вала, при котором будет обеспечена его жесткость.

При расчете бруса на прочность и жесткость из двух найденных значений диаметра надо принять больший.

Рассмотрим особенности кручения брусьев некруглого сечения.

При кручении брусьев некруглого сечения их поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются (депланируют).

Кручение, при котором депланация сечений происходит беспрепятственно, называется свободным. Именно такой вид кручения рассматривается в данном пособии. Как уже упоминалось ранее, задачи о свободном кручении брусьев некруглого профиля решаются методами теории упругости.

Наибольшие касательные напряжения и углы закручивания можно определить по формулам, аналогичным формулам (1.12), (1.15)

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\kappa}} \quad (1.22)$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_{\kappa}}; \quad (1.23)$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_{\kappa}}. \quad (1.24)$$

Здесь  $W_{\kappa}$  и  $I_{\kappa}$  - геометрические характеристики сечения, называемые соответственно моментом сопротивления и моментом инерции при кручении.

В практике машиностроения часто встречаются стержни прямоугольного поперечного сечения. При их кручении наибольшие касательные напряжения возникают у поверхности бруса посередине длинных сторон прямоугольного сечения. Величина этих напряжений определяется по формуле (1.21), в которой

$$W_{\kappa} = \alpha \cdot h \cdot b^2, \quad (1.25)$$

где  $h$  - длинная сторона прямоугольника;  $b$  - его короткая сторона;

$\alpha$  - коэффициент, зависящий от отношения  $h/b$ .

Напряжения  $\tau$ , возникающие в середине коротких сторон, можно найти из формулы:

$$\tau = \gamma \cdot \tau_{\max}. \quad (1.26)$$

Относительный угол закручивания бруса прямоугольного сечения определяется по формуле (1.23),

где

$$I_{\kappa} = \beta \cdot h \cdot b^3 \quad (1.27)$$

Коэффициенты  $\gamma$  и  $\beta$ , так же как и коэффициент  $\alpha$ , зависят от отношения  $h/b$  и приведены в табл. 1

Значения  $I_{\kappa}$  и  $W_{\kappa}$  для некоторых некруглых сечений, встречающихся при конструировании валов, приведены ниже.

$$I_{\kappa} = \frac{d^4}{16} \cdot \left( 2,6 \cdot \frac{h}{d} - 1 \right); \quad (1.28)$$

$$W_{\kappa} = \frac{d^3 \cdot \left( 2,6 \cdot \frac{h}{d} - 1 \right)}{8 \cdot \left( 0,3 \cdot \frac{h}{d} + 0,7 \right)}.$$

Таблица 1  
Значения коэффициентов для расчета угла закручивания

| $h/b$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $h/b$    | $\alpha$ | $\beta\gamma$ | $\gamma$ |
|-------|----------|---------|----------|----------|----------|---------------|----------|
| 1     | 0,208    | 0,141   | 1,000    | 3        | 0,267    | 0,263         | 0,750    |
| 1,2   | 0,219    | 0,166   | 0,930    | 4        | 0,282    | 0,281         | 0,740    |
| 1,25  | 0,221    | 0,172   | 0,910    | 5        | 0,291    | 0,291         | 0,740    |
| 1,5   | 0,231    | 0,196   | 0,860    | 6        | 0,299    | 0,299         | 0,740    |
| 1,75  | 0,239    | 0,214   | 0,820    | 8        | 0,307    | 0,307         | 0,740    |
| 2     | 0,246    | 0,229   | 0,790    | 10       | 0,312    | 0,312         | 0,740    |
| 2,5   | 0,258    | 0,249   | 0,770    | $\infty$ | 0,333    | 0,333         | 0,740    |

Максимальные касательные напряжения в середине плоского среза:

$$I_{\kappa} = \frac{b^4}{46,19} = \frac{h^4}{25,98}, \quad W_{\kappa} = 0,05 \cdot b^3 = \frac{h^3}{12,99}. \quad (1.29)$$

Рассмотрим основные положения теории свободного кручения тонкостенных брусьев.

Брус считается тонкостенным, если его толщина существенно меньше остальных линейных размеров. Обычно это имеет место при выполнении условия:

$$\frac{b_{\min}}{\delta_{\max}} \geq 10 \quad (1.30)$$

где  $b_{\min}$  - минимальный поперечный размер сечения;

$\delta_{\max}$  - наибольшая толщина профиля.

Тонкостенные профили разделяются на открытые и замкнутые (рис.3).

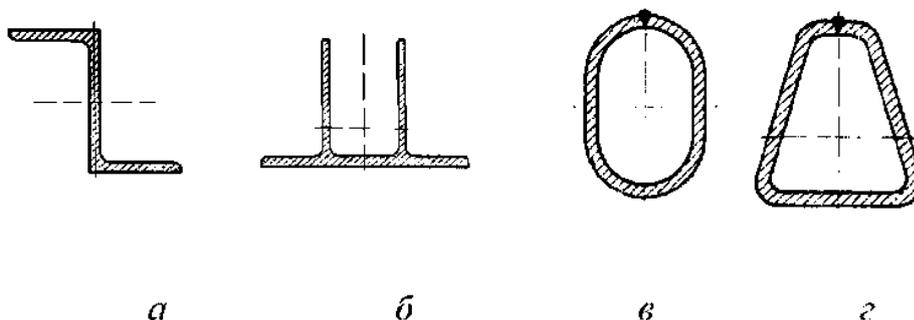


Рис.3 Типы тонкостенных профилей

В последних касательные напряжения при кручении распределяются по толщине сечения равномерно и направлены параллельно ка-

сательной к средней линии контура (рис.4.). Максимальные касательные напряжения при кручении замкнутого тонкостенного профиля на участке с наименьшей толщиной стенки определяются по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\kappa}} = \frac{M_{кр}}{2 \cdot \delta_{\min} \cdot F^*} \quad (1.31)$$

где  $F^*$  - площадь, ограниченная средней линией стенки профиля.

Угол закручивания на участке длиной  $l$  бруса при постоянном крутящем моменте:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{4 \cdot (F^*)^2 \cdot G} \int_s \frac{ds}{\delta} \quad (1.32)$$

где интеграл берется по длине  $s$  средней линии стенки профиля.

Если толщина стенки профиля по контуру не меняется, последняя формула принимает вид  $\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{I_{\kappa} \cdot G} = \frac{M_{кр} \cdot l \cdot s}{4 \cdot (F^*)^2 \cdot G \cdot \delta}$  (1.33)

*Примечание.* Для тонкостенного кольца формулы (1.30) и (1.32) могут быть записаны в более простом виде, если принять во внимание, что  $I_{\kappa} = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \delta}{4}$ ;  $W_{\kappa} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \delta}{2}$

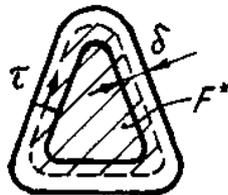


Рис.4 Распределение касательных напряжений по толщине профиля

Рассмотрим теперь напряжения и деформации тонкостенных стержней открытого профиля при их кручении.

Максимальные касательные напряжения в тонкостенном стержне открытого профиля при кручении по толщине стенки распределяются по линейному закону и могут быть определены по формуле (1.21), если принять отношение  $h/b = \infty$  :

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}} = \frac{3 \cdot M_{кр}}{\delta^2 \cdot S} \quad (1.34)$$

где  $\delta$  - толщина профиля;  $S$  - длина контура поперечного сечения .

Угол закручивания:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_k} = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot \delta^3 \cdot S} \quad (1.35)$$

Формулы (1.33) и (1.34) справедливы для любой формы профиля, если он может быть развернут в прямоугольник (рис.5).

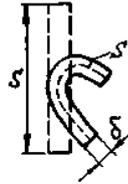


Рис.5 Форма профиля

В стержне открытого профиля, составленного из нескольких узких прямоугольников (рис.6.), имеющих разную толщину, максимальные касательные напряжения возникают в средних точках длинных сторон элемента с наибольшей толщиной профиля; эти напряжения определяются по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot \delta_{\max}}{\sum S_i \cdot \delta_i^3} = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot \delta_{\max}}{S_1 \cdot \delta_1^3 + S_2 \cdot \delta_2^3 + \dots + S_n \cdot \delta_n^3} \quad (1.36)$$

Максимальные касательные напряжения в  $n$ -м элементе профиля, толщина которого  $\delta_n$

$$\begin{aligned} \tau_{(n)\max} &= \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot \delta_n}{\sum S_i \cdot \delta_i^3} \\ &= \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot \delta_n}{S_1 \cdot \delta_1^3 + S_2 \cdot \delta_2^3 + \dots + S_n \cdot \delta_n^3} \end{aligned} \quad (1.37)$$

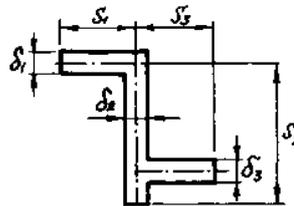


Рис.6 Открытый профиль из нескольких прямоугольников  
Угол закручивания стержня длиной  $l$ :

$$\varphi = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot l}{G \cdot (S_1 \cdot \delta_1^3 + S_2 \cdot \delta_2^3 + \dots + S_n \cdot \delta_n^3)} \quad (1.38)$$

Стержни, имеющие сечения в виде уголков, тавров, двутавров, швеллеров, рассчитываются на кручение по тем же формулам, что и стержни прямоугольного поперечного сечения. Для подобных сечений момент инерции при кручении определяется по формуле:

$$I_k = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum h \delta^3, \quad (1.39)$$

где  $\delta$  и  $h$  соответственно малая и большая стороны каждого из прямоугольников, составляющих сечение.

*Коэффициент  $\eta$ :*

для уголкового сечения  $\eta = 1,00$ ;

для таврового сечения  $\eta = 1,15$ ;

для двутаврового сечения  $\eta = 1,15$ ;

для швеллерного сечения  $\eta = 1,15$ .

Момент сопротивления для этих сечений определяется по формуле:

$$W_k = \frac{I_k}{\delta_{\max}} \quad (1.40)$$

где  $\delta_{\max}$  - наибольшая из толщин прямоугольников, составляющих сечение.

## 2. Примеры расчета типовых задач по определению силовых параметров, действующих на брус при кручении

### 2.1. Построение эпюр от сосредоточенных моментов

*Пример.* Построить эпюру крутящих моментов для бруса, изображенного на рис. 7, а.

*Решение.* Разбиваем брус на четыре участка:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$ .

*Участок  $AB$ .* Начало координат помещаем в точку  $A$ . Определяем крутящий момент  $M_{кр}$  в сечении с абсциссой  $z$  как сумму моментов, приложенных к брусу слева от этого сечения:

$$M_{кр}^{AB} = 10 \text{ кНм.}$$

В пределах участка  $AB$  крутящий момент остается постоянным, и эпюра  $M_{кр}$  ограничена прямой, параллельной оси бруса. Отложив в масштабе вверх отрезок, равный  $10 \text{ кНм}$ , проводим эту прямую.

Участок *BC*. Очевидно, что крутящий момент на этом участке также постоянен и равен

$$M_{кр}^{BC} = 10 + 5 = 15 \text{ кНм.}$$

Участок *CD*. Рассуждая аналогично и считая моменты, приложенные в сечениях *A* и *B* положительными, а в сечении *C* отрицательными, находим:

$$M_{кр}^{CD} = 10 + 5 - 20 = -5 \text{ кНм.}$$

Участок *DE*. Крутящий момент на участке *DE* по-прежнему постоянен и равен

$$M_{кр}^{DE} = 10 + 5 - 20 - 10 = -15 \text{ кНм.}$$

Эпюра крутящих моментов представлена на рис. 7, б.

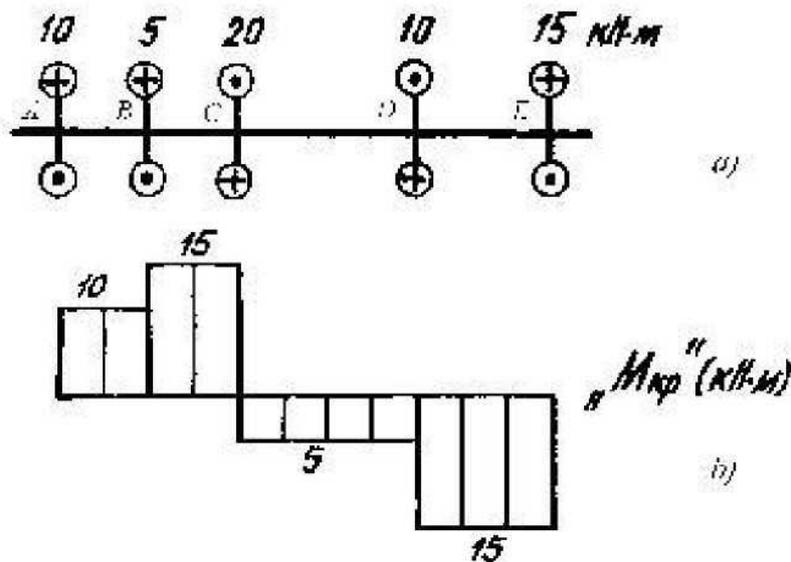


Рис.7. Схема бруса и эпюра крутящих моментов

## 2.2. Построение эпюр при действии на брус распределенного крутящего момента

**Пример.** Построить эпюру крутящих моментов для бруса, изображенного на рис. 8, а.

**Решение.** Разбиваем брус на два участка:  $OA$ ,  $AB$ . Начало координат помещаем в точку  $O$ .

Участок  $OA$ . Крутящий момент  $M_{кр}$  в сечении с абсциссой  $z$ :

$$= z \cdot \frac{z \cdot m}{l} \cdot \frac{l}{z} + ml = (z)_{\text{дд}}^{\text{ко}} M$$

$$= z \cdot \frac{m}{l} \cdot z + ml =$$

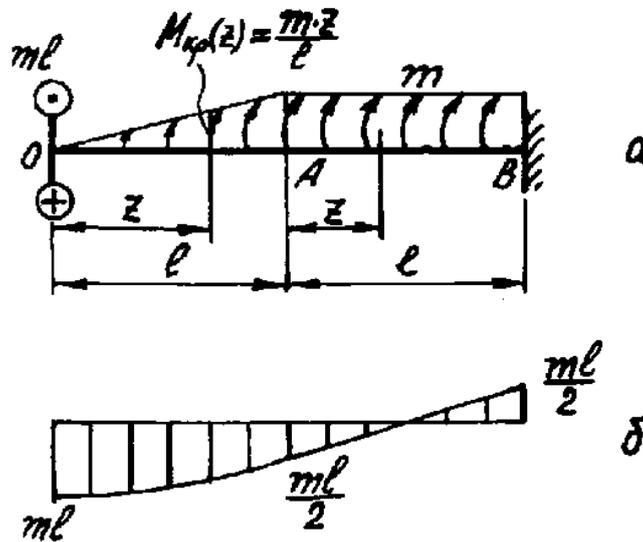


Рис. 8. Схема бруса и эпюра расчета крутящих моментов

Из последнего выражения следует, что в пределах участка  $OA$  эпюра крутящих моментов  $M_{кр}$  ограничена квадратной параболой с вершиной в точке  $O$ . Поочередно подставляя в последнюю формулу абсциссы точек  $O$  и  $A$ , получим:

$$z = 0; M_{кр}^{OA}(0) = -ml;$$

$$z = l; M_{кр}^{OA}(l) = -ml + \frac{m}{2l} \cdot l^2 = -\frac{ml}{2}.$$

Участок  $AB$ . Крутящий момент  $M_{кр}$  в произвольном сечении бруса на этом участке (начало координат в сечении  $A$ )

$$M_{кр}^{AB}(z) = -ml + \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot l}{l} \cdot l + m \cdot z = -\frac{m \cdot l}{2} + m \cdot z.$$

Последнее уравнение показывает, что на участке  $AB$  эпюра ограничена наклонной прямой. Строим эту прямую по двум ее точкам:

$$\begin{aligned} z = 0; M_{кр}^{AB}(0) &= -\frac{m \cdot l}{2}; \\ z = l; M_{кр}^{AB}(l) &= -\frac{m \cdot l}{2} + m \cdot l = +\frac{ml}{2}. \end{aligned}$$

*Примечание.* При построении эпюры крутящих моментов распределенная моментная нагрузка заменяется ее равнодействующей, численно равной площади эпюры распределенной моментной нагрузки.

Построенная эпюра  $M_{кр}$  показана на рис. 8, б.

### 2.3. Определение максимальных касательных напряжений и угла закручивания

*Пример.* Сплошной стальной вал диаметром 90 мм при скорости вращения 150 об/мин передает мощность  $N = 50$  л.с. Длина вала  $l = 4$  м.

Определить наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении вала и угол его закручивания. Модуль сдвига для стали принять

$$G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг / см}^2.$$

*Решение.* Вычисляем крутящий момент, передаваемый валом:

$$M_{кр} = 71620 \frac{N}{n} = 71620 \cdot \frac{50}{150} = 23873 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Полярный момент инерции и полярный момент сопротивления поперечного сечения

$$I_p = 0,1 \cdot d^4 = 0,1 \cdot 9^4 = 6561 \text{ см}^4; W_p = 0,2 \cdot d^3 = 0,2 \cdot 9^3 = 1458 \text{ см}^3.$$

Наибольшее касательное напряжение:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{23873}{145,8} = 163,7 \text{ кг / см}^2.$$

Угол закручивания вала:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{23873 \cdot 4 \cdot 10^2}{8 \cdot 10^5 \cdot 656,1} = 1,82 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Угол закручивания в градусном измерении:

$$\varphi_{град} = \frac{180}{\pi} \cdot \varphi_{рад} = \frac{180}{\pi} \cdot 1,82 \cdot 10^{-2} \approx 1^{\circ} 3'.$$

## 2.4. Расчет максимальных касательных напряжений в поперечных сечениях вала и модуля упругости при сдвиге

*Пример.* Полый стальной вал с наружным диаметром  $D = 75$  мм и внутренним  $d = 50$  мм имеет длину  $l = 1$  м. Он закручивается на  $1^{\circ}$  парой сил с моментом  $350 \text{ кг}\cdot\text{см}$ . Чему равны наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении вала и модуль упругости при сдвиге?

*Решение.* Наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении вала

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{0,2 \cdot D^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]} = \\ &= \frac{350 \cdot 10^2}{0,2 \cdot 7,5^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{50}{75}\right)^4\right]} = 520 \text{ кг/см}^2 \end{aligned}$$

Модуль упругости при сдвиге:

$$\begin{aligned} G &= \frac{M_{кр} \cdot l}{\varphi \cdot I_p} = \frac{M_{кр} \cdot l}{\varphi \cdot 0,1 \cdot D^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]} = \\ &= \frac{375 \cdot 10^2 \cdot 100}{\frac{\pi}{180} \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 7,5^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{50}{75}\right)^4\right]} = 8,04 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

## 2.5. Определение наибольших касательных напряжений

*Пример.* Сплошной стальной вал круглого поперечного сечения диаметром  $d = 10$  см и длиной  $6$  м закручен на угол  $4^{\circ}$ . Вычис-

лить наибольшее касательное напряжение, модуль упругости при сдвиге принять

$$G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2.$$

**Решение.** Из формулы (1.15) находим величину крутящего момента в поперечном сечении вала:

$$M_{кр} = \frac{\varphi \cdot G \cdot I_p}{l} = \frac{4 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 10^4}{600} = 9310 \text{ кгсм}$$

Наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении вала:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{9310}{0,2 \cdot 10^3} = 465 \text{ кг/см}^2.$$

### 3. Примеры решения типовых задач по определению геометрических параметров валов

#### 3.1. Определение диаметра вала из условия его прочности

**Пример.** Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен внешними крутящими моментами (рис. 3.9, а). Требуется определить диаметр вала из условий его прочности и жесткости, построить эпюры крутящих моментов и углов поворота поперечных сечений.

Принять:  $[\tau] = 150 \text{ МПа}$ ,  $[\theta] = 2 \text{ град/м}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Пользуясь методом сечений, вычисляем крутящие моменты, действующие в поперечных сечениях вала.

Участок АВ:

$$M_{кр} = -20 \text{ кНм};$$

участок ВС:

$$M_{кр} = -20 + 12 = -8 \text{ кНм};$$

участок CD:

$$M_{кр} = -20 + 12 - 30 = -38 \text{ кНм}.$$

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 9,б.

Определяем диаметр вала из условий его прочности и жесткости:

- из условия прочности:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр \max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 38 \cdot 10^3}{\pi \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,109 \text{ м} = 10,9 \text{ см};$$

- из условия жесткости:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot M_{кр \max}}{\pi^2 \cdot [\theta] \cdot G}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 180 \cdot 38 \cdot 10^3}{\pi^2 \cdot 2 \cdot 0,8 \cdot 10^{11}}} = 0,108 \text{ м} = 10,8 \text{ см}.$$

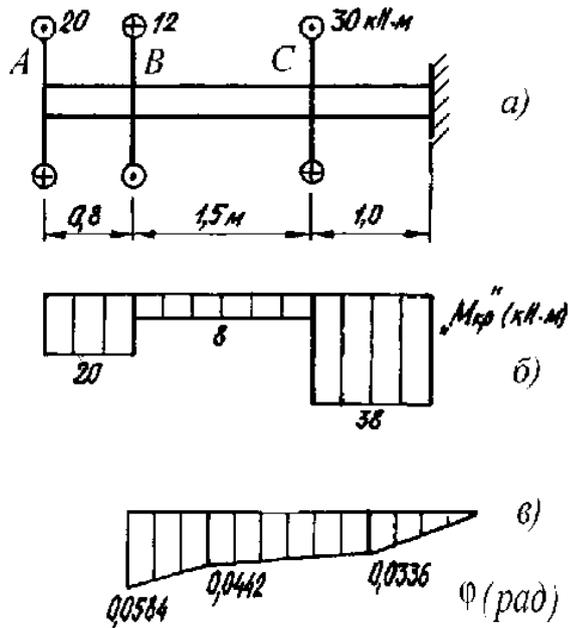


Рис.9. Схема расчета вала круглого поперечного сечения

Окончательно принимаем большее из полученных величин диаметров вала  $d = 10,9 \text{ см}$ , что обеспечивает его требуемую прочность и жесткость.

Для построения эпюры углов поворота поперечных сечений вычислим углы поворота сечений для каждого участка вала. Обычно одно из поперечных сечений считается неподвижным; в рассматриваемой задаче удобно начинать построение эпюры с левого сечения D, расположенного в заделке.

Угол поворота сечения C относительно сечения D:

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{кр} \cdot l_{DC}}{G \cdot I_p} = \frac{38 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,1 \cdot (0,109)^4} = 0,0336 \text{ рад}$$

Угол поворота сечения В относительно сечения С:

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{кр} \cdot l_{CB}}{G \cdot I_p} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,1 \cdot (0,109)^4} = 0,0106 \text{ рад}$$

Угол поворота сечения А относительно сечения В:

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{кр} \cdot l_{BA}}{G \cdot I_p} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,1 \cdot (0,109)^4} = 0,0142 \text{ рад.}$$

Вычисляем угол поворота сечения В относительно сечения D:

$$\varphi_B = \varphi_{CD} + \varphi_{BC} = 0,0336 + 0,0106 = 0,0442 \text{ рад};$$

Угол поворота сечения А относительно сечения D:

$$\varphi_A = \varphi_{CD} + \varphi_{BC} + \varphi_{AB} = 0,0336 + 0,0106 + 0,0142 = 0,0584 \text{ рад.}$$

Выбрав масштаб, строим эпюру углов поворота поперечных сечений по найденным значениям этих углов (рис.9, в).

### 3.2. Определение параметров карданного вала

*Пример.* Карданный вал автомобиля при двух режимах работы передает одну и ту же мощность - 23 л.с. Скорость вращения вала в одном случае 108 об/мин, а в другом - 60 об/мин. Каков должен быть наружный диаметр вала, если отношение внутреннего диаметра к наружному равно 0,9, а допусковое касательное напряжение  $[\tau] = 400 \text{ кг/см}^2$ ? Как изменятся наибольшие касательные напряжения в вале при переходе от большей скорости к меньшей?

*Решение.* Крутящий момент обратно пропорционален числу оборотов вала, следовательно, двигатель будет передавать через карданный вал максимальный крутящий момент при наименьшей угловой скорости. Величина крутящего момента в соответствии с формулой (1.3)

$$M_{кр} = 71620 \cdot \frac{N}{n} = 71620 \cdot \frac{23}{60} = 27454 \text{ кгсм.}$$

Условие прочности полого вала:

$$\frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{\frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - \alpha^4)} \leq [\tau]$$

позволяет определить внешний диаметр вала подстановкой в условие прочности соответствующих числовых значений:

$$\frac{27454}{\frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - 0,9^4)} \leq [400],$$

отсюда 
$$D = \sqrt[3]{\frac{27454 \cdot 16}{\pi \cdot (1 - 0,9^4) \cdot 400}} = 10 \text{ см}.$$

Крутящий момент при скорости вращения 108 об/мин:

$$M_{кр} = 71620 \cdot \frac{N}{n} = 71620 \cdot \frac{23}{108} = 15252 \text{ кгсм}.$$

Наибольшие касательные напряжения при постоянной передаваемой мощности прямо пропорциональны крутящему моменту на валу, следовательно, при угловой скорости 108 об/мин

$$\tau_{\max} = 400 \cdot \frac{15252}{27454} = 222 \text{ кг/см}^2.$$

$$\frac{400}{222} = 1,8.$$

Наибольшие касательные напряжения при переходе от большей скорости к меньшей увеличиваются в 1,8 раза.

### 3.3. Вычисление размеров диаметра вала из условия его жесткости

*Пример.* Сплошной стальной вал круглого поперечного сечения (рис.3.10,а) закручивается моментами  $M_1 = 40 \text{ кгм}$ ,  $M_2 = 40 \text{ кгм}$ ,  $M_3 = 140 \text{ кгм}$ ,  $M_4 = 60 \text{ кгм}$ . Требуется определить диаметр вала из условий его прочности и жесткости;  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ;  $[\tau] = 600 \text{ кг/см}^2$ ;  $[\theta] = 3 \text{ град/м}$ .

**Решение.** Определяем величину максимального крутящего момента в поперечном сечении, для чего строим эпюру крутящих моментов (рис. 10,б). Очевидно, что расчетный момент  $M_{кр} = 80 \text{ кгм}$ .

Из условия прочности вала находим требуемую величину его диаметра:

$$\frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} \leq [\tau]; d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 80 \cdot 10^2}{\pi \cdot 600}} = 4,08 \text{ см}.$$

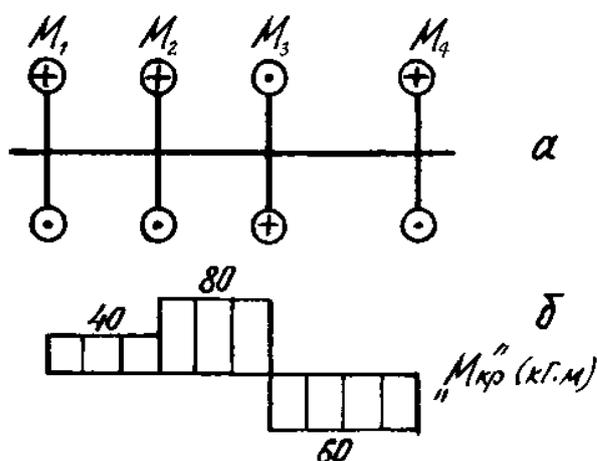


Рис.10 Схема стального вала круглого сечения и эпюра крутящих моментов

Требуемый диаметр вала из условий его жесткости:

$$\frac{M_{кр}}{G \cdot I_p} \leq [\theta], \frac{M_{кр}}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} = [\theta], D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 80 \cdot 10^2 \cdot 100}{8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi^2}{180} \cdot 3}} = 3,73 \text{ см}.$$

Принимаем диаметр вала  $D = 4,08$  см, так как при этом обеспечивается не только его прочность, но и его жесткость.

### 3.4 Определение наружного и внутреннего диаметров полого вала

**Пример.** Полый стальной вал длиной 1,8 м нагружен в торцевых сечениях двумя парами сил с моментом  $M_{кр} = 600$  кгм.

Определить наружный и внутренний диаметры вала, если угол закручивания не должен превышать  $[\varphi^*] = 2^\circ$ , а касательные напряжения - 700 кг/см. Принять для стали  $G = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

**Решение.** Запишем условия прочности и жесткости полого вала

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{0,2 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4)}$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot 0,1 \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4)} = [\varphi^*].$$

После подстановки числовых значений получим:

$$\frac{60000}{0,2 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4)} = 700; \quad \frac{60000 \cdot 180}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4)} = 2 \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Обозначим  $x = 1 - \alpha^4$  и вычислим эту величину из условия прочности, записанного ранее:

$$x = \frac{M_{кр}}{0,2 \cdot D^3 \cdot [\tau]} = \frac{60000}{0,2 \cdot D^3 \cdot 700} = \frac{428}{D^3}.$$

Подставим вычисленное значение  $1 - \alpha^4$  в условие жесткости

$$\frac{60000 \cdot 180}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot D^4 \cdot \frac{428}{D^3}} = 2 \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Из последнего уравнения находим величину внешнего диаметра полого вала -  $D = 9$  см, а затем - численное значение коэффициента  $\alpha$  :

$$x = 1 - \alpha^4 = \frac{428}{D^3} = \frac{428}{9^3}; \alpha = 0,803.$$

Внутренний диаметр вала

$$\frac{d}{D} = \alpha; \frac{d}{9} = 0,803; d = 7,2 \text{ см.}$$

## 4. Примеры решения задач по вычислению силовых и кинематических параметров трансмиссионных валов

### 4.1 Построение эпюр крутящих моментов и углов закручивания

*Пример.* Трансмиссионный стальной вал постоянного сечения диаметром 60 мм через ведущий шкив 2 (рис.3.11,а) передает мощность 60 л.с. На ведомых шкивах 1, 3, 4 снимается мощность соответственно 10, 20 и 30 л.с. Вал вращается с угловой скоростью 200 об/мин. Построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания. Принять для стали  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ .

*Решение.* Подсчитываем крутящие моменты, передаваемые шкивами:

$$M_{кр}^{(1)} = 71620 \cdot \frac{N_1}{n} = 71620 \cdot \frac{10}{200} = 3581 \text{ кгсм},$$

$$M_{кр}^{(2)} = 71620 \cdot \frac{N_2}{n} = 71620 \cdot \frac{60}{200} = 21486 \text{ кгсм},$$

$$M_{кр}^{(3)} = 71620 \cdot \frac{N_3}{n} = 71620 \cdot \frac{20}{200} = 7162 \text{ кгсм},$$

$$M_{кр}^{(4)} = 71620 \cdot \frac{N_4}{n} = 71620 \cdot \frac{30}{200} = 10743 \text{ кгсм.}$$

Вычисляем крутящие моменты, действующие на участках вала между шкивами:

$$\begin{aligned} \text{участок } 1-2 & \quad M_{кр} = 3581 \text{ кгсм}; \\ \text{участок } 2-3 & \quad M_{кр} = 3581 - 21486 = -17905 \text{ кгсм} \\ \text{участок } 3-4 & \quad M_{кр} = -10743 \text{ кгсм.} \end{aligned}$$

По найденным значениям построена эпюра крутящих моментов (рис.11, б).

Условно считая левое поперечное сечение неподвижным, вычисляем углы закручивания для каждого участка вала:

*участок 1-2:*

$$\varphi_{1-2} = \frac{M_{кр}^{(1-2)} \cdot l_{1-2}}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{3581 \cdot 80}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 6^4 I_p} \cdot \frac{180}{\pi} = 0,16^\circ$$

*участок 2-3.*

$$\varphi_{2-3} = \frac{M_{кр}^{(2-3)} \cdot l_{2-3}}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180}{\pi} = -\frac{17905 \cdot 80}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 6^4 I_p} \cdot \frac{180}{\pi} = -0,81^\circ;$$

*участок 3-4:*

$$\varphi_{3-4} = \frac{M_{кр}^{(3-4)} \cdot l_{3-4}}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180}{\pi} = -\frac{10743 \cdot 80}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 6^4 I_p} \cdot \frac{180}{\pi} = -0,48^\circ.$$

Вычисляем углы поворота сечений, в которых приложены крутящие моменты:

$$\varphi_1 = 0;$$

$$\varphi_2 = \varphi_{1-2} = 0,16^\circ;$$

$$\varphi_3 = \varphi_{1-2} - \varphi_{2-3} = 0,16^\circ - 0,81^\circ = -0,65^\circ;$$

$$\varphi_4 = \varphi_{1-2} - \varphi_{2-3} - \varphi_{3-4} = 0,16^\circ - 0,81^\circ - 0,48^\circ = -1,13^\circ.$$

По найденным значениям строим эпюру углов закручивания (рис.11, в).

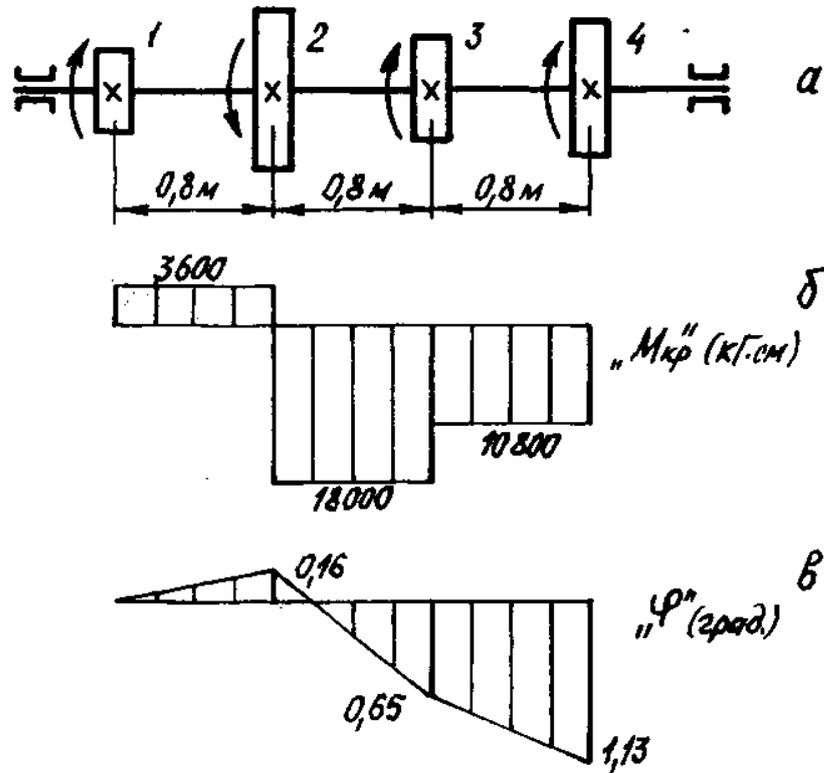


Рис. 11. Схема расчета трансмиссионного вала

#### 4.2. Определение допустимой скорости вращения вала

**Пример.** Стальной вал кольцевого сечения наружным диаметром  $D=100$  мм имеет толщину  $\delta = 10$  мм. Определить допустимую скорость вращения вала, если он передает мощность  $N = 150$  квт. Допускаемый угол закручивания  $[\theta] = 1^\circ / \text{м}$ . Принять для стали  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ .

**Решение.** При известной величине крутящего момента допустимую скорость вращения вала можно определить из формулы:

$$M_{кр} = 97400 \cdot \frac{N}{n}$$

Величину допускаемого крутящего момента находим из условия жесткости вала:

$$[M_{кр}] = G \cdot I_p \cdot [\theta] = 8 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 10^4 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{8}{10} \right)^4 \right] \cdot 1^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = 82370 \text{ кг см.}$$

Тогда допускаемая скорость вращения вала:

$$n = 97380 \cdot \frac{N}{M_{кр}} = 97380 \cdot \frac{150}{82370} = 177 \text{ об/мин.}$$

### 4.3. Расчет максимального крутящего момента

*Пример.* Какой крутящий момент может быть приложен к стальному валу диаметром  $D = 40$  мм при допускаемом напряжении  $[\tau] = 600 \text{ кг/см}^2$ ? Какую мощность может передавать вал при скорости его вращения  $n = 720$  об/мин?

*Решение.* Величину допускаемого крутящего момента находим из условия прочности вала:

$$M_{\max} = [\tau] \cdot W_p = [\tau] \cdot 0,2 \cdot D^3 = 600 \cdot 0,2 \cdot 4^3 = 7680 \text{ кг см.}$$

Мощность, которую может передавать вал:

$$N = \frac{M_{кр} \cdot n}{97380} = \frac{7680 \cdot 720}{97380} = 56,8 \text{ кВт.}$$

## 5. Примеры решения задач по определению силовых и кинематических параметров для стержней различной геометрической формы

### 5.1. Определение силовых параметров для сплошного конического стержня

*Пример.* Сплошной стальной конический стержень круглого поперечного сечения длиной  $l = 1,2$  м (рис.3.12.) скручивается парами сил  $M_{кр} = 200$  кгм, приложенными к его торцам. Найти угол закручивания стержня.

$$\text{Принять: } d_1 = 5 \text{ см, } d_2 = 10 \text{ см, } G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2.$$

*Решение.* Угол закручивания элемента стержня длиной  $dz$  может быть вычислен по формуле:

$$d\varphi = \int \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p(z)},$$

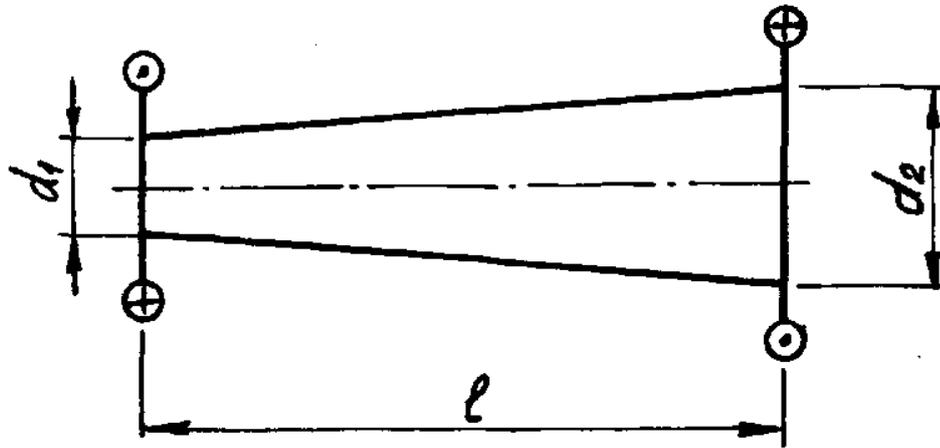


Рис.12. Конический стержень круглого поперечного сечения где  $I_p(z)$  – полярный момент инерции поперечного сечения, расположенного на расстоянии  $z$  от левого торца.

Очевидно, что диаметр бруса в этом сечении:

$$d(z) = \left( d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} \cdot z \right),$$

$$\text{тогда } I_p(z) = \frac{\pi}{32} \left( d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} \cdot z \right)^4.$$

Угол закручивания бруса:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^l \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot I_p(z)} = \int_0^l \frac{M_{кр} \cdot dz}{G \cdot \pi \cdot \left( d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} \cdot z \right)^4} = \\ &= \frac{32 \cdot M_{кр} \cdot l}{3 \cdot \pi \cdot G} \cdot \left( \frac{1}{d_2 - d_1} \right) \cdot \left( \frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3} \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{32 \cdot 200 \cdot 100 \cdot 120}{3 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 10^5} \cdot \left( \frac{1}{(10-5)} \right) \cdot \left( \frac{1}{5^3} - \frac{1}{10^3} \right) = 0,0143 \text{ рад.}$$

## 5.2. Расчет составного стержня круглого поперечного сечения

**Пример.** Составной стержень круглого поперечного сечения (рис.13) представляет собой стальную трубу, внутри которой помещен жестко соединенный с ней медный стержень. К торцам составного сечения приложены пары сил  $M_{кр} = 2000$  кгсм. Определить максимальные касательные напряжения в стальной и медной частях стержня, если  $r_m = r_1 = 2$  см,  $r_c = r_2 = 4$  см, модули упругости при сдвиге для стали и меди соответственно  $G = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup> и  $G_c = 4 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

**Решение.** Очевидно, что отнесенный к единице длины угол закручивания  $\theta$  должен быть одинаков как для стали, так и для меди:  $\theta_c = \theta_m$ .

Выразим угол  $\theta$  через касательные напряжения, действующие в поперечном сечении. Как известно,

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр}}{I_\rho} \cdot \rho \text{ и } \theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_\rho}.$$

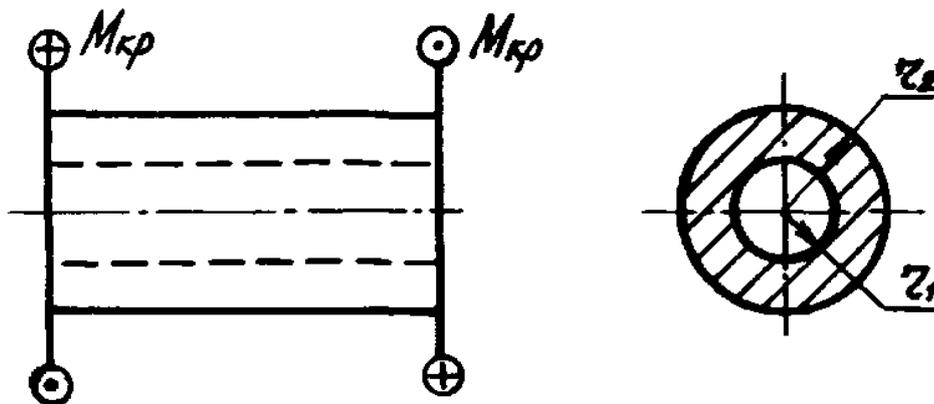


Рис.13. Составной стержень круглого поперечного сечения

Исключая из последних формул  $\frac{M_{кр}}{I_p}$ , получим

$$\frac{M_{кр}}{I_p} = \frac{\tau}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{M_{кр}}{I_p} = G \cdot I_p,$$

отсюда  $\theta = \frac{\tau}{G \cdot \rho}$ .

Из равенства  $\theta_c = \theta_m$  следует:

$$\theta = \frac{\tau_{\max}^c}{G \cdot r_c} = \frac{\tau_{\max}^m}{G \cdot r_m},$$

где  $\tau_{\max}^c$ ,  $\tau_{\max}^m$  - максимальные касательные напряжения соответственно в стальной и медной частях стержня.

Учитывая, что внешний крутящий момент  $M_{кр}$  равен сумме внутренних крутящих моментов, действующих в стальной и медной частях и  $M_{кр} = G \cdot I_p \cdot \theta$ , получим:

$$M_{кр} = M_{кр}^c + M_{кр}^m = G_c \cdot I_p^c \cdot \theta + G_m \cdot I_p^m \cdot \theta.$$

Полярные моменты инерции стальной трубы и медного стержня

$$I_p^c = \frac{\pi}{2} \cdot (r_-^4 - r_+^4) = \frac{\pi}{2} \cdot (4^4 - 2^4) = 377 \text{ см}^4;$$

$$I_p^m = \frac{\pi \cdot r_+^4}{2} = \frac{\pi \cdot 2^4}{2} = 25,1 \text{ см}^4.$$

Решая уравнение относительно  $\theta$ , находим:

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G_+ \cdot I_p^c + G_- \cdot I_p^m}.$$

Находим максимальные касательные напряжения в стальной и медной частях:

$$\tau_{\max}^c = \theta \cdot G_c \cdot r_c = \frac{M_{кр}}{G_c \cdot I_p^c + G_m \cdot I_p^m} \cdot G_c \cdot r_c =$$

$$= \frac{2000}{8 \cdot 10^5 \cdot 377 + 4 \cdot 10^5 \cdot 25,1} \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 4 = 20,5 \text{ кг/см}^2$$

$$\tau_{\max}^m = \theta \cdot G_m \cdot r_m = \frac{M_{кр}}{G_c \cdot I_p^c + G_m \cdot I_p^m} \cdot G_m \cdot r_m =$$

$$= \frac{2000}{8 \cdot 10^5 \cdot 377 + 4 \cdot 10^5 \cdot 25,1} \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 2 = 5,1 \text{ кг/см}^2$$

### 5.3. Вычисление максимальных касательных напряжений стального стержня прямоугольного сечения

*Пример.* Сплошной ступенчатый стальной вал АВ кругового сечения жестко заделан в торцевых сечениях и нагружен крутящим моментом  $M_{кр} = 10$  кНм (рис. 3.14, а). Вычислить максимальные касательные напряжения и угол поворота сечения С.

Принять  $d_1 = 5$  см,  $d_2 = 8$  см,  $l_1 = 0,5$  м,  $l_2 = 1$  м,  $G = 8 \cdot 10^{10}$  Па.

*Решение.* Вал является статически неопределимым, так как имеется два реактивных крутящих момента и только одно уравнение статики:

$$M_{кр}^{(A)} + M_{кр}^{(B)} - M_{кр}^{(C)} = 0.$$

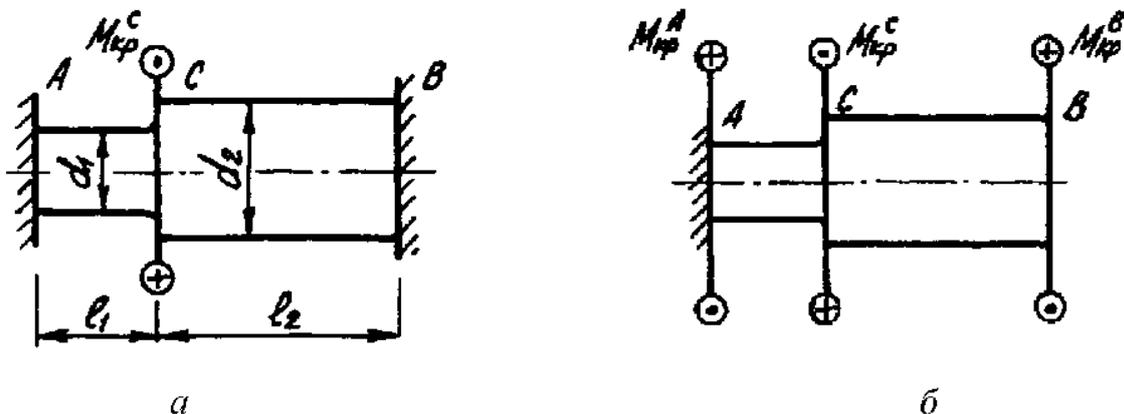


Рис. 14. Ступенчатый вал круглого сечения

Отбросим правую заделку и приложим в сечении  $B$  реактивный крутящий момент  $M_{кр}^{(B)}$  (рис.14,б). Угол поворота сечения  $B$  может быть вычислен как алгебраическая сумма углов поворота этого сечения от крутящих моментов  $M_{кр}^{(B)}$  и  $M_{кр}^{(C)}$ . Очевидно, что его величина равна нулю:

$$\varphi_B = \frac{M_{кр}^{(C)} \cdot l_1}{G \cdot I_p^{(1)}} - \frac{M_{кр}^B \cdot l_1}{G \cdot I_p^{(1)}} - \frac{M_{кр}^B \cdot l_2}{G \cdot I_p^{(2)}} = 0.$$

Из последнего уравнения получим:

$$M_{кр}^{(B)} = \frac{M_{кр}^{(C)}}{1 + \frac{l_2 \cdot I_p^{(1)}}{l_1 \cdot I_p^{(2)}}}.$$

Вычислим полярные моменты инерции сечений вала:

при

$$d_1 = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, I_p^{(1)} = 0,1 \cdot d^4 = 0,1 \cdot 5^4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 62,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

при

$$d_2 = 8 \text{ см} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м}, I_p^{(2)} = 0,1 \cdot d_2^4 = 0,1 \cdot 8^4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 409,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

$$\text{Тогда: } M_{кр}^{(B)} = \frac{10 \cdot 10^3}{1 + \frac{1 \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}}{0,5 \cdot 409,6 \cdot 10^{-8}}} = 7,67 \cdot 10^3 \text{ Нм} = 7,67 \text{ кНм}.$$

Из уравнений статики:

$$M_{кр}^{(A)} = M_{кр}^{(C)} - M_{кр}^{(B)} = 10 - 7,67 = 2,33 \text{ кНм}.$$

Максимальные касательные напряжения в левой части бруса:

$$\tau_{\text{max}}^{(\text{лев})} = \frac{M_{кр}^{(A)}}{W_p^{(1)}} = \frac{M_{кр}^{(A)}}{0,2 \cdot d_1^3} = \frac{2,33 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 5^3 \cdot 10^{-6}} = 93,2 \text{ МПа}.$$

Максимальные касательные напряжения в правой части бруса:

$$\tau_{\max}^{(\text{прав})} = \frac{M_{кр}^{(B)}}{W_p^{(2)}} = \frac{M_{кр}^{(B)}}{0,2 \cdot d_2^3} = \frac{7,67 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 8^3 \cdot 10^{-6}} = 74,9 \text{ МПа}$$

Угол поворота сечения С:

$$\varphi_c = \frac{M_{кр}^{(A)} \cdot l_1}{G \cdot I_p^{(1)}} = \frac{2,33 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 62,5 \cdot 10^{-8}} = 2,33 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$$

#### 5.4 Определение касательных напряжений стального стержня прямоугольного сечения

*Пример.* Стальной стержень прямоугольного сечения  $10 \times 30$  мм длиной 2 м закручивается по торцам парами сил  $M_{кр} = 1000$  кгсм. Определить касательные напряжения посередине длинной и короткой сторон сечения и угол закручивания бруса. Принять  $G = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>.

*Решение.* Для заданного бруса параметр  $h/b = 3$ . Из табл. 3.1 выписываем при  $h/b = 3$  значения коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$ :  $\alpha = 0,267$ ;  $\beta = 0,263$ ;  $\gamma = 0,750$  и вычисляем геометрические характеристики прямоугольного сечения при кручении:

$$I_k = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,263 \cdot 3 \cdot 1,0^3 = 0,789 \text{ см}^4;$$

$$W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0,267 \cdot 3 \cdot 1,0^2 = 0,801 \text{ см}^3.$$

Вычисляем максимальные касательные напряжения, действующие на поверхности бруса посередине длинной и короткой сторон:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k} \frac{1000}{0,801} = 1248 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau' = \gamma \cdot \tau_{\max} = 0,750 \cdot 1248 = 936 \text{ кг/см}^2.$$

Угол закручивания бруса:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{1000 \cdot 200}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,789} = 0,317 \text{ рад}$$

### 5.5. Определение максимального крутящего момента бруса прямоугольного сечения

**Пример.** Для показанного на рис. 15, а бруса прямоугольного сечения  $h \times b = 9 \times 6 \text{ см}$  требуется определить наибольшее допустимое значение крутящего момента, при  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ .

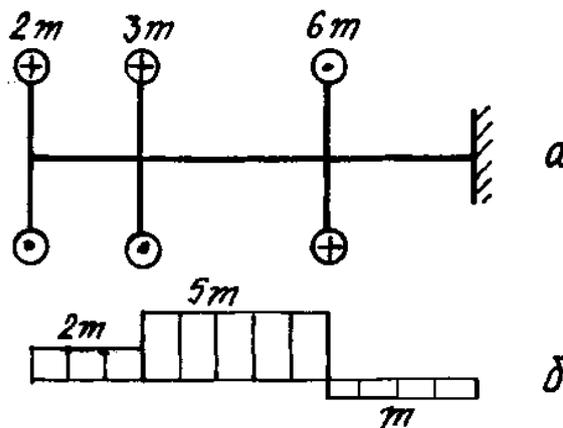


Рис.15. Схема расчета бруса прямоугольного сечения

**Решение.** Определяем величину максимального крутящего момента в поперечном сечении, для чего строим эпюру крутящих моментов - рис.3.15,б. Очевидно, что  $M_{кр\max} = 5 \text{ т}$ .

Для заданного бруса параметр  $h/b = 1,5$ . Из таблицы 3.1 выписываем при  $h/b = 1,5$  значения коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$ :  $\alpha = 0,231$ ,  $\beta = 0,196$ ,  $\gamma = 0,860$  и вычисляем момент сопротивления при кручении:

$$W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0,231 \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot (6 \cdot 10^{-2})^2 = 74,8 \cdot 10^{-6} \text{ Нм}^3.$$

Записываем условие прочности бруса при кручении:

$$\frac{M_{кр\max}}{W_k} = \frac{5 \text{ т}}{W_k} \leq [\tau].$$

Из последнего выражения следует:

$$m = \frac{W_k [\tau]}{5} = \frac{74,8 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^6}{5} = 897,6 \text{ Нм.}$$

### 5.6. Подбор поперечного сечения прямоугольного бруса

**Пример.** Для бруса прямоугольного сечения, нагруженного крутящими моментами (рис. 3.16,а), требуется подобрать поперечное сечение при  $h = 2b$ ,  $[\tau] = 120 \text{ МПа}$ ,  $[\theta] = 0,5^\circ$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Для определения величины максимального крутящего момента в поперечном сечении строим эпюру крутящих моментов (рис. 16,б). Очевидно, что  $M_{кр \max} = 25 \text{ кНм}$

При  $h/b=2$  из табл.1 выписываем значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ :  $\alpha = 0,246$ ;  $\beta = 0,229$  и вычисляем геометрические характеристики прямоугольного сечения при кручении:

$$I_k = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,229 \cdot 2b \cdot b^3 = 0,458b^4;$$

$$W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0,246 \cdot 2b \cdot b^2 = 0,492b^3.$$

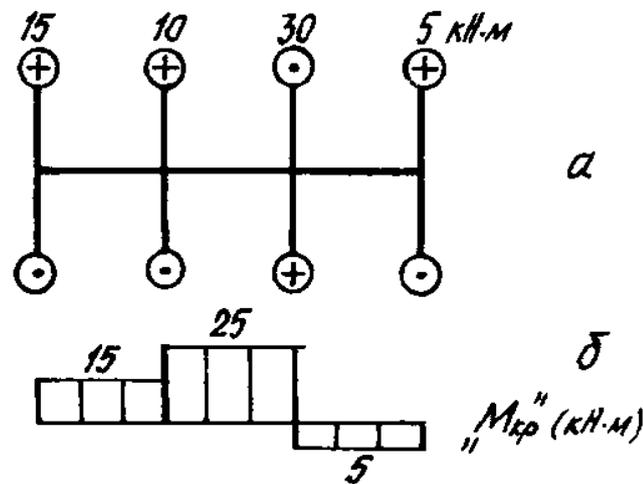


Рис.16.Схема расчета бруса прямоугольного сечения

Из условия прочности бруса при кручении находим размер  $b$ :

$$\frac{M_{кр\max}}{W_k} = \frac{25 \cdot 10^3}{0,492 \cdot b^3} = 120 \cdot 10^6;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{25 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6 \cdot 0,492}} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 7,5 \text{ см.}$$

Из условия жесткости бруса при кручении находим  $[\theta]$ :

$$[\theta] = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_k} = \frac{25 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,458 \cdot b^4} = \frac{0,5 \cdot \pi}{180} = 8,72 \cdot 10^{-3},$$

отсюда

$$b = \sqrt[4]{\frac{25 \cdot 10^3}{8,72 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,458}} = 2,98 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 3 \text{ см.}$$

Принимаем размеры сечения  $b = 7,5 \text{ см}$ ,  $h = 15 \text{ см}$ , что обеспечивает как прочность, так и жесткость бруса.

## 5.7. Сравнение максимальных крутящих моментов для стержней различной геометрии поперечных сечений

*Пример.* Сравнить крутящие моменты, которые могут передать стержни, показанные на рис. 17а, б при равенстве наибольших касательных напряжений, возникающих при их кручении.

*Решение.* Из формулы (1.7) для стержня круглого поперечного сечения следует

$$M_{кр1} = \tau_{\max} \cdot W_p = \frac{\tau \cdot \pi \cdot a^3}{16}.$$

Для квадратного сечения при  $h/b = 1$  и  $\alpha = 0,208$  (см. табл.1)

$$M_{кр2} = \tau_{\max} \cdot W_k = \tau \cdot \alpha \cdot h \cdot b^2 = \tau \cdot 0,208 \cdot a \cdot a^2 = \tau \cdot 0,208 \cdot a^3$$

Следовательно:

$$\frac{M_{кр2}}{M_{кр1}} = \frac{0,208 \cdot \tau \cdot a^3}{\frac{\tau \cdot \pi \cdot a^3}{16}} = 1,05.$$

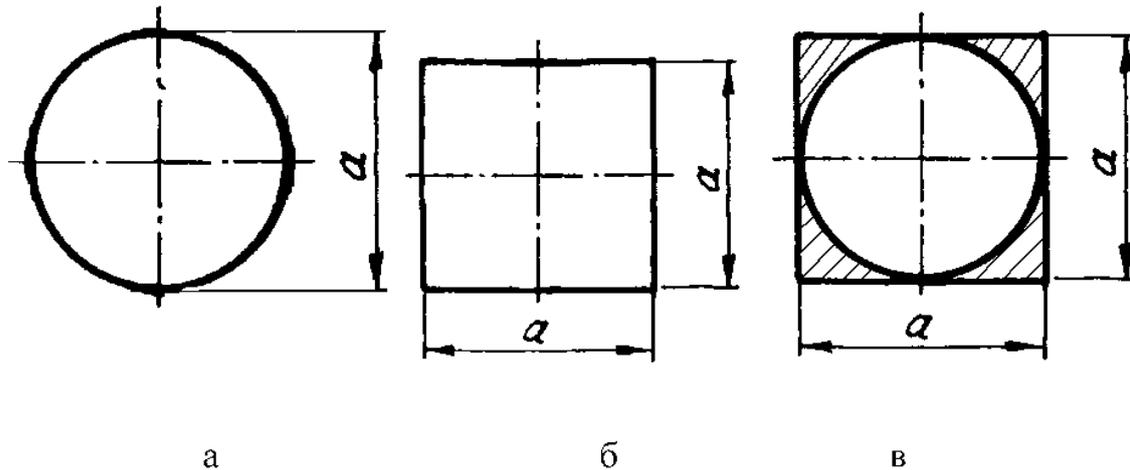


Рис.17. Возможные варианты поперечных сечений стержней

Это означает, что удаляя заштрихованную часть квадратного сечения (рис.17,в), мы теряем в величине передаваемого крутящего момента всего 5 %, при этом площадь сечения (и соответственно вес бруса) уменьшается на

$$\frac{a^2 - \frac{\pi \cdot a^2}{4}}{a^2} = 0,215, \text{ т.е. на } 21,5 \%$$

Невыгодность применения валов квадратного сечения очевидна. Можно показать, что конструирование валов прямоугольного сечения с точки зрения экономии материала еще более невыгодно.

### 5.8. Определение наибольших касательных напряжений статически неопределимой конструкции бруса

**Пример.** Для бруса, показанного на рис.18, а, требуется определить наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении. Брус состоит из трех участков разного сечения (рис.18,б); модуль упругости  $G$  не изменяется по всей длине бруса.

**Решение.** Рассматриваемая конструкция статически неопределима, так как для ее расчета необходимо знать величины двух опорных моментов  $m_A$  и  $m_B$ , которые не могут быть определены из уравнений статики.

Вычислим моменты инерции сечений бруса и моменты сопротивления при кручении.

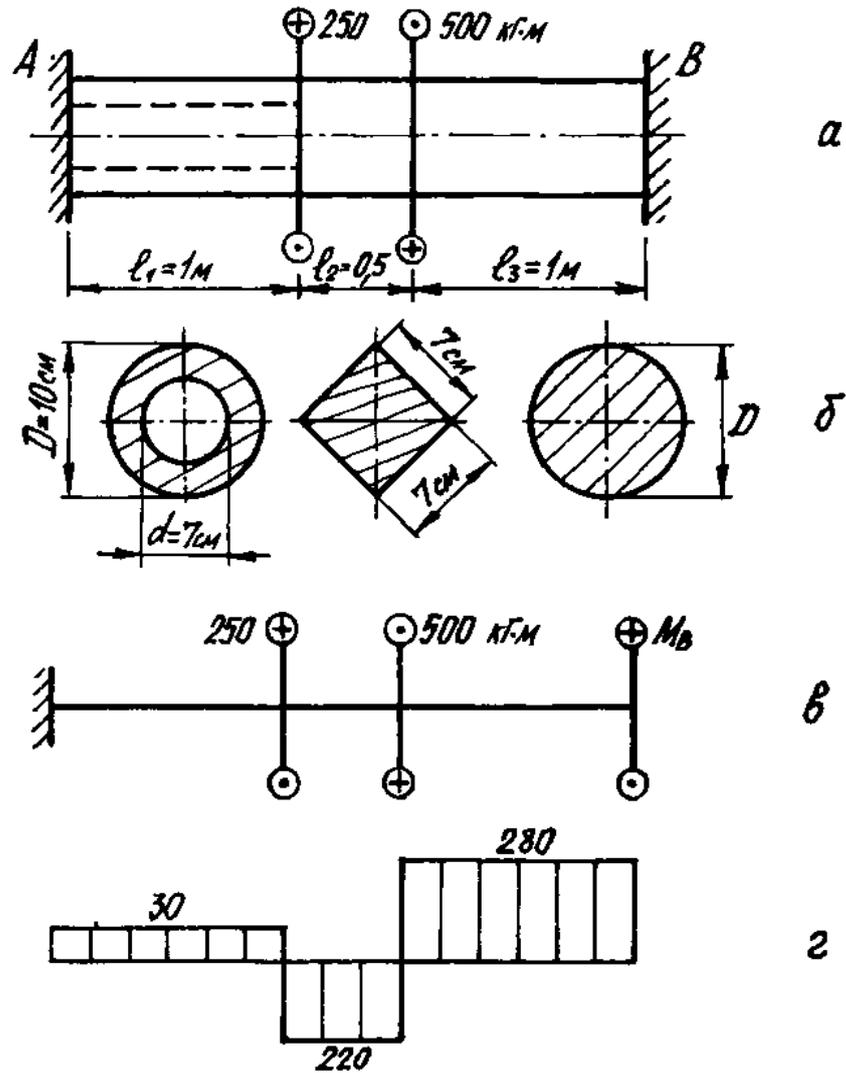


Рис. 18. Схемы расчета касательных напряжений

Левый участок:

$$I_{\kappa}^{\text{лев}} = I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 10^4}{32} - \frac{\pi \cdot 7^4}{32} = 746 \text{ см}^4;$$

$$W_{\kappa}^{\text{лев}} = W_p = \frac{I_b}{\rho_{\text{max}}} = \frac{746}{5} = 149,2 \text{ см}^3;$$

средний участок:

$$I_{\kappa}^{\text{ср}} = \beta \cdot h \cdot b^3 = 0,141 \cdot b \cdot b^3 = 0,141 b^4 = 0,141 \cdot 7^4 = 338 \text{ см}^4;$$

$$W_{\kappa}^{cp} = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0,208 \cdot b \cdot b^2 = 0,208 \cdot b^3 = 0,208 \cdot 7^3 = 71,3 \text{ см}^3;$$

правый участок:

$$I_{\kappa}^{np} = I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 10^4}{32} = 980 \text{ см}^4.$$

$$W_{\kappa}^{np} = W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 10^3}{16} = 196 \text{ см}^3.$$

Отбросим правую опору, заменяя ее приложением неизвестного момента  $m_B$  (рис.18, в); очевидно, что угол поворота сечения  $B$  равен нулю  $\varphi_B = 0$ .

По принципу независимости действия сил этот угол равен алгебраической сумме углов поворота, зависящих от приложенных к брусу крутящих моментов :

$$\varphi_B = \varphi_B(m_1) + \varphi_B(m_2) + \varphi_B(m_B) = 0.$$

Записанное выше выражение представляет собой *уравнение совместности деформаций*.

Вычислим каждое из слагаемых последнего выражения:

$$\varphi_B(m_1) = \frac{m_1 \cdot l_1}{G \cdot I_{\kappa 1}} = \frac{25000 \cdot 100}{G \cdot 746};$$

$$\varphi_B(m_2) = -\frac{m_2 \cdot l_1}{G \cdot I_{\kappa 1}} - \frac{m_2 \cdot l_2}{G \cdot I_{\kappa 2}} = -\frac{50000 \cdot 100}{G \cdot 746} - \frac{50000 \cdot 50}{G \cdot 338}.$$

Знак «минус» поставлен потому, что угол поворота сечения  $\varphi_B(m_1)$  от действия момента  $m_1$  (имеющего направление, обратное моменту  $m_2$ ) в предыдущем выражении принят положительным.

$$\varphi_B(m_B) = \frac{m_B \cdot l_1}{G \cdot I_{\kappa 1}} + \frac{m_B \cdot l_2}{G \cdot I_{\kappa 2}} + \frac{m_B \cdot l_3}{G \cdot I_{\kappa 3}} = \frac{m_B \cdot 100}{G \cdot 746} + \frac{m_B \cdot 50}{G \cdot 338} + \frac{m_B \cdot 100}{G \cdot 980}.$$

Подставляя вычисленные значения углов поворота сечения в уравнение совместности деформаций, получим:

$$\varphi_B = \frac{25000 \cdot 100}{G \cdot 746} - \frac{50000 \cdot 100}{G \cdot 746} - \frac{50000 \cdot 50}{G \cdot 338} +$$

$$+ \frac{m_B \cdot 100}{G \cdot 746} + \frac{m_B \cdot 50}{G \cdot 338} + \frac{m_B \cdot 100}{G \cdot 980} = 0,$$

откуда получаем

$$m_B = 28000 \text{ кл'см} = 280 \text{ кл'м}.$$

Используя метод сечений, вычисляем крутящие моменты, действующие в правом, среднем и левом участках бруса.

Правый участок:

$$M_{np} = 280 \text{ кл'м}.$$

Средний участок:

$$M_{cp} = 280 - 500 = -220 \text{ кл'м}.$$

Левый участок:

$$M_{cp} = 280 - 500 + 250 = 30 \text{ кл'м}.$$

Находим максимальные касательные напряжения в каждом участке бруса.

Левый участок:

$$\tau_{\max}^{(лев)} = \frac{M_{лев}}{W_K^{лев}} = \frac{3000}{149,2} = 20,1 \text{ кг/см}^2;$$

средний участок:

$$\tau_{\max}^{(cp)} = \frac{M_{cp}}{W_K^{cp}} = \frac{22000}{71,3} = 308,6 \text{ кг/см}^2;$$

правый участок:

$$\tau_{\max}^{np} = \frac{M_{np}}{W_K^{np}} = \frac{28000}{196} = 142,8 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальные касательные напряжения, действующие в поперечном сечении заданного бруса равны

$$\tau_{\max}^{(cp)} = 308,6 \text{ кг/см}^2.$$

## 5.9. Вычисление крутящего момента тонкостенного стержня замкнутого прямоугольного сечения

**Пример.** Тонкостенный стержень замкнутого прямоугольного сечения (рис.19) закручен моментами, приложенными к его торцам. Вычислить допускаемое значение крутящего момента из условия прочности стержня, если  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ .

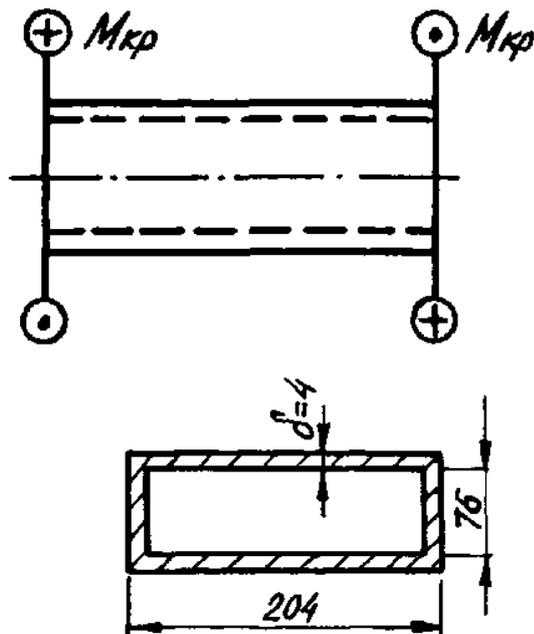


Рис.19. Тип тонкостенного стержня прямоугольного сечения

**Решение.** Вычислим площадь, ограниченную средней линией профиля:

$$F^* = 20 \cdot 8 = 160 \text{ см}^2 = 0,016 \text{ м}^2.$$

Из условия прочности стержня:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}} = \frac{M_{кр}}{2 \cdot \delta_{\min} \cdot F^*} \leq [\tau]$$

следует:

$$M_{кр} \leq 2 \cdot \delta_{\min} \cdot F^* \cdot [\tau] =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,016 \cdot 100 \cdot 10^6 = 12800 \text{ Нм.}$$

### 5.10. Расчет максимальных касательных напряжений тонкостенной трубы

*Пример.* Вычислить максимальные касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении тонкостенной трубы при ее закручивании моментом  $M_{кр} = 2000$  кгсм. Внешний диаметр трубы  $D = 10$  см, толщина стенки  $\delta = 0,6$  см.

*Решение.* Вычислим максимальные касательные напряжения в поперечном сечении тонкостенной трубы по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{0,2 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4)}$$

$$\text{Параметр } \alpha = \frac{d}{D} = \frac{D - 2\delta}{D} = 1 - \frac{2\delta}{D} = 1 - \frac{2 \cdot 0,6}{10} = 0,88.$$

Тогда:

$$\tau_{\max} = \frac{2000}{0,2 \cdot 10^3 \cdot (1 - 0,88^4)} = 25 \text{ кг/см}^2.$$

Вычислим теперь максимальные касательные напряжения в поперечном сечении тонкостенной трубы, рассматривая ее как тонкостенный стержень замкнутого профиля.

Площадь, ограниченная средней линией профиля:

$$F^* = \frac{\pi \cdot d_*^2}{4} = \frac{\pi \cdot 9,4^2}{4} = 69,4 \text{ см}^2.$$

Максимальные касательные напряжения в поперечном сечении тонкостенной трубы:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{M_{кр}}{2 \cdot \delta_{\min} \cdot F^*} = \frac{2000}{2 \cdot 0,6 \cdot 69,4} = 24 \text{ кг/см}^2.$$

Разница в вычислениях при использовании различных методов расчета не превышает:

$$\frac{25 - 24}{24} \cdot 100 = 4,2\%.$$

### 5.11. Расчет касательных напряжений для конструкций тонкостенного профиля

*Пример.* Вычислить максимальные касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня тонкостенного профиля длиной  $l = 1$  м (рис. 3.20) и угол закручивания концевого сечения, если:  $M_{кр} = 2000$  Нм;  $a = 40$  см;  $G = 8 \cdot 10^{10}$  Па;  $t_1 = t_2 = 4$  см;  $t_3 = 2$  см.

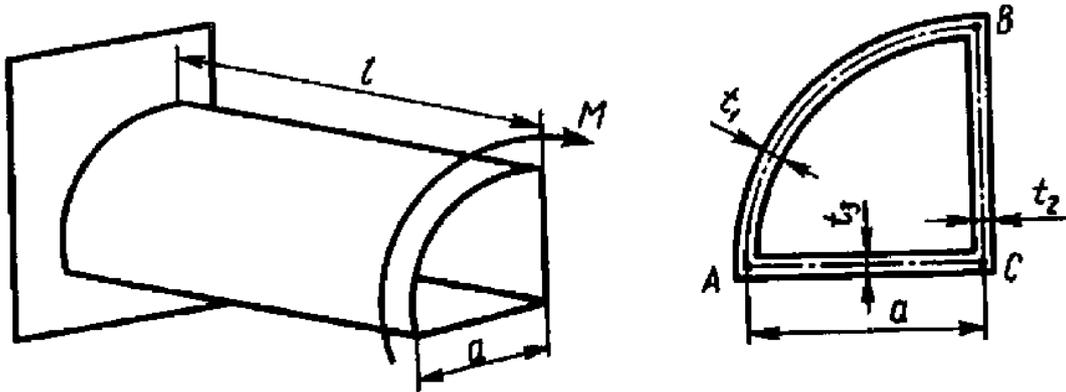


Рис.20. Тип тонкостенного профиля

*Решение.* Вычислим площадь, ограниченную средней линией профиля:

$$F^* = \frac{\pi \cdot a^2}{4} = \frac{\pi \cdot 40^2}{4} = 1256,6 \text{ см}^2.$$

Максимальные касательные напряжения при кручении замкнутого тонкостенного профиля на участке с наименьшей толщиной стенки определяются по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\kappa}} = \frac{M_{кр}}{2 \cdot \delta_{\min} \cdot F^*} = \frac{2000}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1256,6 \cdot 10^{-4}} = 0,397 \text{ МПа}.$$

Угол закручивания на участке длиной  $l$  бруса при постоянном крутящем моменте

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{M_{кр} \cdot l}{4 \cdot (F^*)^2 \cdot G} \cdot \int_s \frac{ds}{\delta} = \frac{M_{кр} \cdot l}{4 \cdot (F^*)^2 \cdot G} \cdot \left( \int_{AB} \frac{ds}{t_3} + \int_{BC} \frac{ds}{t_2} + \int_{CA} \frac{ds}{t_1} \right) = \\ &= \frac{2000 \cdot 1}{4 \cdot (1256,6 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 8 \cdot 10^{10}} \cdot \left( \frac{\pi \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} + \frac{40 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} + \frac{40 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} \right) = \\ &= 2,56 \cdot 10^{-2} \text{ рад.} \end{aligned}$$

### 5.12. Сравнение прочности и жесткости тонкостенных труб различного профиля

**Пример.** Сравнить по прочности и жесткости две тонкостенные трубы, одна из которых имеет разрез вдоль ее образующей. Обе трубы скручиваются одинаковым по величине крутящим моментом (рис. .21).

**Решение.** Оценим сравнительную прочность труб, вычислив отношения максимальных касательных напряжений, возникающих в их поперечных сечениях:

$$\frac{\tau_{\max}^{(1)}}{\tau_{\max}^{(2)}} = \frac{M_{кр} / W_K^{(1)}}{M_{кр} / W_K^{(2)}} = \frac{W_K^{(2)}}{W_K^{(1)}}$$

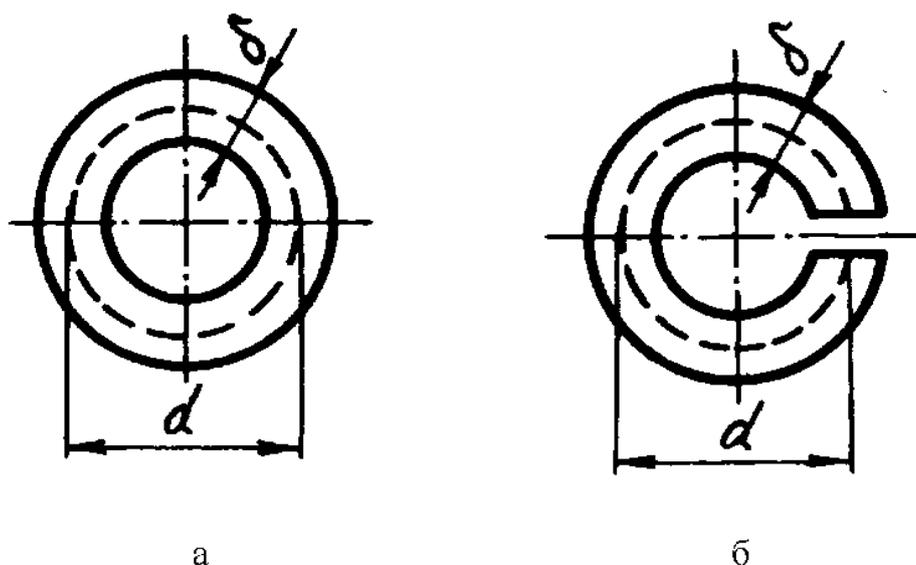


Рис.21. Виды тонкостенных труб

Для сплошной тонкостенной трубы:

$$W_K = W_K^{(1)} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \delta}{2}, \quad I_K = I_K^{(1)} = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \delta}{4}.$$

Для тонкостенной трубы с разрезом вычисляем геометрические характеристики, используя соответствующие формулы для узкого прямоугольника:

$$W_K = W_K^{(2)} = \frac{\pi \cdot d \cdot \delta^2}{3}, \quad I_K = I_K^{(2)} = \frac{\pi \cdot d \cdot \delta^3}{3}.$$

При заданном отношении  $\frac{d}{\delta} = 18$  имеем:

$$\frac{W_K^{(2)}}{W_K^{(1)}} = \frac{\frac{\pi \cdot d \cdot \delta^2}{3}}{\frac{\pi \cdot d^2 \cdot \delta}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta}{d} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{27}.$$

Результат показывает, что наличие разреза снижает прочность сплошной трубы в 27 раз.

Что касается жесткости, то она уменьшается еще более значительно:

$$\frac{I_K^{(2)}}{I_K^{(1)}} = \frac{\frac{\pi \cdot d \cdot \delta^3}{3}}{\frac{\pi \cdot d^3 \cdot \delta}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\delta^2}{d^2} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{\delta}{d}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^2 = \frac{1}{243}.$$

Результаты рассмотренного примера говорят о том, что тонкостенные брусья открытого профиля плохо сопротивляются закручиванию.

### 5.13. Вычисление максимальных касательных напряжений тонкостенного стержня открытого профиля

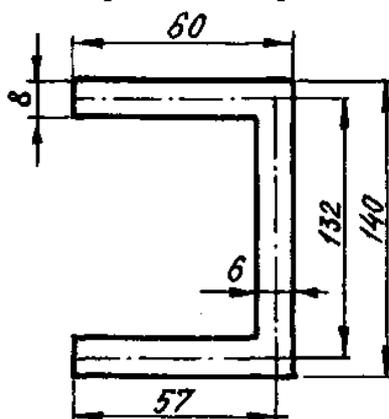


Рис.22. Тонкостенный профиль

**Пример.** Стальной тонкостенный стержень открытого профиля (рис.22) закручивается моментом  $M_{кр} = 100$  кНм.

Вычислить максимальные касательные напряжения в поперечном сечении стержня и угол его закручивания. Длина стержня  $l = 2$  м, модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^{10}$  Па.

**Решение.** Разбиваем заданное сечение тонкостенного стержня открытого профиля на три прямоугольника. В стержне открытого профиля, составленного из нескольких узких прямоугольников (см. рис.22), имеющих разную толщину, максимальные касательные напряжения возникают в средних точках длинных сторон элемента с наибольшей толщиной; эти напряжения определяются по формуле (1.36):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{к}} = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot \delta_{\max}}{\sum S_i \cdot \delta_i^3} = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot \delta_{\max}}{S_1 \cdot \delta_1^3 + S_2 \cdot \delta_2^3 + \dots + S_n \cdot \delta_n^3}$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{3 \cdot 100 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{57 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3} + 57 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3} + 132 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 27,6 \cdot 10^6 \text{ Па} \end{aligned}$$

Угол закручивания стержня определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot l}{G \cdot (S_1 \cdot \delta_1^3 + S_2 \cdot \delta_2^3 + \dots + S_n \cdot \delta_n^3)}$$

После подстановки чисел получим:

$$\varphi = \frac{3 \cdot 100 \cdot 2}{8 \cdot 10^{10} \cdot (57 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3} + 57 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3} + 132 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-3})} = 0,086 \text{ рад}$$

#### 5.14. Вычисление наибольших касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении двутавра

**Пример.** Вычислить максимальные касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении двутавра № 10 (рис.23) длиной  $l = 3\text{ м}$  при его кручении и угол закручивания, если  $M_{кр} = 120 \text{ Нм}$ .

$$G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па.}$$

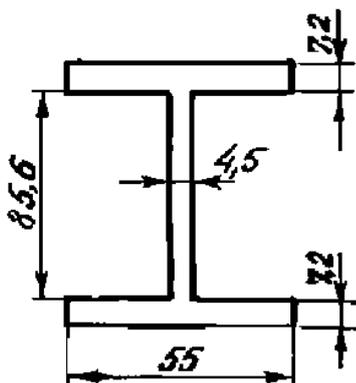


Рис.23 Двутавр

**Решение.** По таблице сортамента устанавливаем размеры сечения. Высота стенки  $h = 85,6 \text{ мм}$  (из высоты двутавра вычитается удвоенная толщина полок), ее толщина  $d = 4,5 \text{ мм}$ ; ширина полки  $b = 55 \text{ мм}$ ; толщина  $t = 7,2 \text{ мм}$ .

Момент инерции двутавра при кручении определяется по формуле (1.37):

$$I_{к} = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum h \delta^3,$$

где  $\delta$  и  $h$  – соответственно малая и большая стороны каждого из прямоугольников, составляющих сечение.

Коэффициент  $\eta$  для двутаврового сечения  $\eta = 1,15$ .

Итак,

$$I_k = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum h \cdot \delta^3 = 1,15 \cdot \frac{1}{3} \cdot (85,6 \cdot 4,5^3 + 2 \cdot 55 \cdot 7,2^3) = 187289 \text{ мм}^4,$$

принимаем  $I_k = 18,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ .

Момент сопротивления сечения определяется по формуле (1.38):

$$W_k = \frac{I_k}{\delta_{\max}},$$

где  $\delta_{\max}$  – наибольшая из толщин прямоугольников, составляющих сечение.

После подстановки чисел получим:

$$W_k = \frac{I_k}{\delta_{\max}} = \frac{18,7 \cdot 10^{-8}}{7,2 \cdot 10^{-3}} = 26 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в средних точках длинных сторон элемента с наибольшей толщиной профиля (в данном случае полок):

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_k} = \frac{120}{26 \cdot 10^{-6}} = 4,615 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,615 \text{ МПа}$$

Изучив первую часть пособия, читатель овладевает основными теоретическими сведениями и формулами для расчета, знакомится с определяющими терминами раздела (крутящий момент, кручение бруса круглого и некруглого сечения, расчет цилиндрических винтовых пружин), которые после разбора примеров решения задач, помогут им при самостоятельной работе на практических занятиях и экзаменах.

Дальнейшим этапом работы по разработке учебных пособий курса «Сопротивление материалов» является выпуск разделов «Изгиб», «Растяжение–сжатие» и др. На основе всех этих разделов будет подготовлена программа тестирования студентов на ЭВМ.

## Библиографический список

1. Беляев Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов. Л.: Наука, 1967. – 352 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. – 512 с.
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1975. – 624 с.
4. Сопротивление материалов / Под ред. А.Ф.Смирнова М.: Высш. школа, 1975. – 480 с.
5. Рудицин М.Н. и др. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Высш.школа, 1970. – 410 с.
6. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. М.: Высш.школа, 1985. – 399 с.
7. Беляев Н.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1976. – 608 с.
8. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. В.К. Качурина. М.: Наука, 1984. – 432 с.
9. Додин Ю.С., Лысюк А.Я., Суменков А.Л. Сборник индивидуальных задач по сопротивлению материалов. Растяжение – сжатие /Новомосковск, НИ РХТУ, 1991. – 86 с.
10. Додин Ю.С., Лысюк А.Я., Суменков А.Л. Сборник индивидуальных задач по сопротивлению материалов. Кручение/ Новомосковск, НИ РХТУ, 1991. – 37 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| Предисловие .....   | 3  |
| Введение.....   | 3  |
| 1. Основные теоретические сведения и расчетные формулы кручения прямого бруса .....                       | 4  |
| 2. Примеры расчета типовых задач по определению силовых параметров, действующих на брус при кручении..... | 14 |
| 2.1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ОТ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МОМЕНТОВ .....  | 14 |
| 2.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРИ ДЕЙСТВИИ НА БРУС РАСПРЕДЕЛЕННОГО КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА.....                          | 16 |

|   |           |
|---|-----------|
| 2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И УГЛА ЗАКРУЧИВАНИЯ.....   | 17        |
| 2.4. РАСЧЕТ МАКСИМАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ВАЛА И МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ПРИ СДВИГЕ .....                      | 18        |
| 2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ .....  | 18        |
| <b>3. Примеры решения типовых задач по определению геометрических параметров валов .....</b>  | <b>19</b> |
| 3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАМЕТРА ВАЛА ИЗ УСЛОВИЯ ЕГО ПРОЧНОСТИ .....   | 19        |
| 3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КАРДАННОГО ВАЛА .....   | 21        |
| 3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ДИАМЕТРА ВАЛА ИЗ УСЛОВИЯ ЕГО ЖЕСТКОСТИ .....   | 22        |
| 3.4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАРУЖНОГО И ВНУТРЕННЕГО ДИАМЕТРОВ ПОЛОГО ВАЛА.....  | 24        |
| <b>4. Примеры решения задач по вычислению силовых и кинематических параметров трансмиссионных валов .....</b>                       | <b>25</b> |
| 4.1 ПОСТРОЕНИЕ ЭПОР КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ И УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ .....  | 25        |
| 4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВАЛА.   | 27        |
| 4.3. РАСЧЕТ МАКСИМАЛЬНОГО КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА.....  | 28        |
| <b>5. Примеры решения задач по определению силовых и кинематических параметров для стержней различной геометрической формы.....</b> | <b>28</b> |
| 5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ СПЛОШНОГО КОНИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ .....   | 28        |
| 5.2. РАСЧЕТ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ.....  | 30        |
| 5.3.ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ СТАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ .....                                   | 32        |
| 5.4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ СТАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ .....   | 34        |

|  |    |
|--|----|
| 5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА<br>БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ.....                      | 35 |
| 5.6. ПОДБОР ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА<br>.....  | 36 |
| 5.7. СРАВНЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ<br>СТЕРЖНЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ..... | 37 |
| 5.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ<br>СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ КОНСТРУКЦИИ БРУСА.....      | 38 |
| 5.9. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА ТОНКОСТЕННОГО<br>СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ.....          | 42 |
| 5.10. РАСЧЕТ МАКСИМАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ<br>ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБЫ.....                                | 43 |
| 5.11. РАСЧЕТ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ КОНСТРУКЦИЙ<br>ТОНКОСТЕННОГО ПРОФИЛЯ .....                         | 44 |
| 5.12. СРАВНЕНИЕ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ<br>ТРУБ РАЗЛИЧНОГО ПРОФИЛЯ .....                        | 45 |
| 5.13. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ<br>НАПРЯЖЕНИЙ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО<br>ПРОФИЛЯ .....   | 47 |
| 5.14. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ,<br>ВОЗНИКАЮЩИХ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ДВУГЛАВРА.....     | 48 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....   | 50 |