

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТ КРИВЫХ БРУСЬЕВ
Методические указания

СОДЕРЖАНИЕ

1 Общие сведения.....	3
2 Эпюры внутренних усилий.....	5
3 Определение напряжений в брусках большой кривизны.....	8
4 Расчет на прочность.....	13
5 Определение перемещений.....	13
Перечень ссылок.....	15

1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Кривой брус в сопротивлении материалов и в теории упругости это тело, геометрическая форма которого образуется движением в пространстве плоской фигуры (называемом поперечным сечением кривого бруса), при этом центр её тяжести всегда остаётся на некоторой кривой (оси кривого бруса), а плоскость фигуры нормальна этой кривой. В зависимости от вида поперечного сечения различают: кривой брус постоянного сечения (пример — звено цепи, составленной из овальных или круглых колец) и кривой брус переменного сечения (пример — крюк подъёмного крана). По виду оси кривой брус может быть плоским (если его ось — плоская кривая) и пространственным (ось — пространственная кривая). Разновидностью кривого бруса является естественно закрученный кривой брус, отличающийся тем, что плоская фигура поперечного сечения при своём движении по оси кривого бруса одновременно вращается вокруг касательной к ней (пример — лопасть воздушного винта самолёта или вентилятора). Задача данной работы- рассмотреть расчет кривых брусков в таких аспектах как: построение эпюры внутренних усилий, определение напряжений и перемещений, а также расчет на прочность.

Рассмотрим расчет кривых брусков, т. е. брусков, имеющих криволинейные оси. К кривым брускам относятся крюки (рис. 1.1 а), проушины (рис. 1.1 б), звенья цепей (рис. 1.1 в), арки мостов (рис. 1.1 г) и др. Наибольшее практическое значение имеют кривые бруска, оси которых расположены в одной плоскости, — плоские кривые бруска.

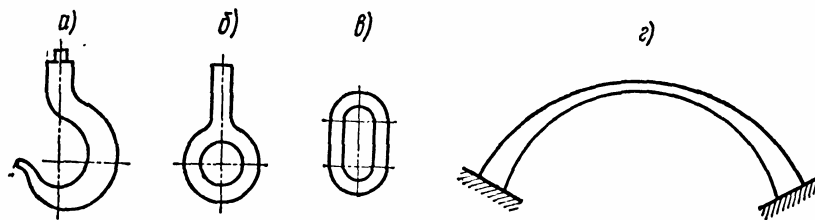


Рисунок 1.1 – Кривые бруска

Определение напряжений в кривом бруске производится различно в зависимости от того, является он бруском малой кривизны или большой кривизны. Высота h поперечного сечения бруска малой кривизны мала по сравнению радиусом r кривизны оси бруска—он составляет менее $0,2r - 0,25r$; высота h бруска большой кривизны составляет более $0,2r - 0,25r$. При этом под высотой понимается наибольший размер поперечного сечения в плоскости кривизны оси бруска (рис. 1.2).

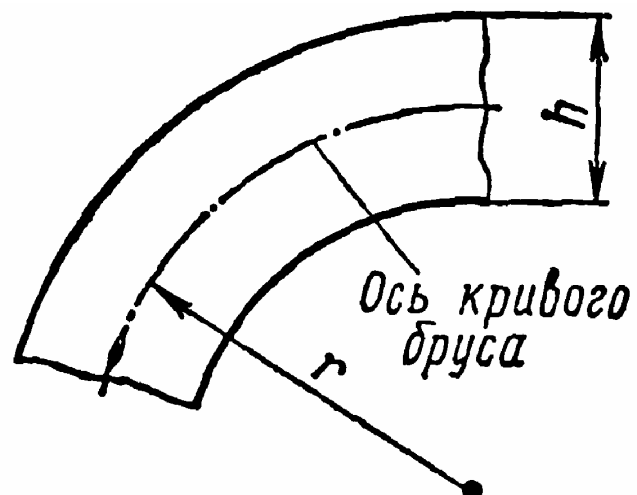


Рисунок 1.2 – Плоскость кривизны оси бруса

Напряжения в брусках малой кривизны с достаточной для практики точностью можно определять по формулам, полученным для прямых брусков. Аналогично по формулам расчета прямых брусков можно определять касательные напряжения в брусках большой кривизны.

Распределение же нормальных напряжений в поперечных сечениях таких брусков существенно отличается от распределения их в прямых брусках, а потому эти напряжения в брусках большой кривизны определяются по специальным формулам, приведенным в пункте 3.

2 ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Для внутренних усилий M , Q и N , действующих в поперечных сечениях кривого бруса, сохраняется правило знаков, принятое для прямых брусев. Построение эпюр внутренних усилий рассмотрим на конкретном примере плоской круговой балки (т. е. балки с осью, очерченной по дуге окружности), изображенной на рис. 2.1, а.

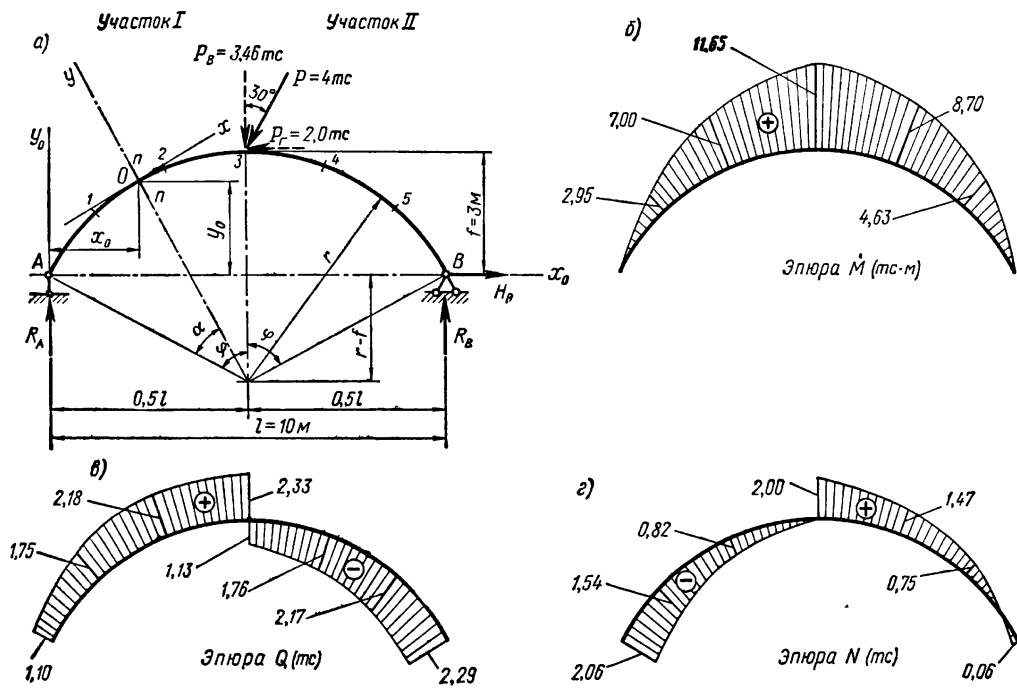


Рисунок 2.1– Эпюры внутренних усилий

Для определения опорных реакций составим уравнения равновесия:

$$\Sigma M_B = R_A \cdot l - P \cdot \cos 30^\circ \cdot l / 2 - P \cdot \sin 30^\circ \cdot f = 0,$$

откуда

$$R_A = P(\cos 30^\circ / 2 - \sin 30^\circ \cdot f / l) = 4(0,866 / 2 + 0,5 \cdot 3 / 10) = 2,33 \text{ mc};$$

$$\Sigma M_A = -R_B \cdot l + P \cdot \cos 30^\circ \cdot l / 2 - P \cdot \sin 30^\circ \cdot f = 0,$$

откуда

$$R_B = P(\cos 30^\circ / 2 - \sin 30^\circ \cdot f / l) = 0;$$

$$\Sigma X_0 = -P \cdot \sin 30^\circ + H_B = 0,$$

откуда

$$H_B = P \cdot \sin 30^\circ = 2 \text{ mc}$$

В этих выражениях величины $P \cdot \cos 30^\circ = P_B = 3,46mc$ и $P \cdot \sin 30^\circ = P_r = 2mc$ представляют собой соответственно вертикальную и горизонтальную составляющие силы P ; ось x_0 горизонтальна.

Определяем значение радиуса r оси балки и центрального угла φ . Из рис. 2.1,а:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= l / (2r); \\ \cos \varphi &= (r - f) / r,\end{aligned}$$

следовательно,

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = [l / (2r)]^2 + \left(\frac{r - f}{r}\right)^2 = 1,$$

откуда

$$l^2 + 4r^2 - 8rf + 4f^2 = 4r^2$$

и

$$r = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} = \frac{10^2 + 4 \cdot 3^2}{8 \cdot 3} = 5,67i;$$

$$\sin \varphi = l / (2r) = \frac{10}{2 \cdot 17/3} = 0,822$$

$$\text{и } \varphi = 61^\circ 54'.$$

Проведем через произвольную точку O участка I балки поперечное сечение $n-n$. Положение этого сечения определяется углом α (рис. 2.1, а). С сечением $n-n$ совместим ось y подвижной системы координат; ось x перпендикулярна ей и касательна к оси балки в точке O . Координаты точки O в неподвижной системе координат x_0y_0 равны:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0,5l - r \sin(\varphi - \alpha) = 5 - 5,67 \sin(\varphi - \alpha); \\ y_0 &= f - r [1 - \cos(\varphi - \alpha)] = 5,67 \cos(\varphi - \alpha) - 2,67.\end{aligned}$$

Составим выражения изгибающего момента M^I , поперечной силы Q^I и продольной силы N^I в поперечных сечениях участка I балки:

$$M^I = \sum_{\bar{e}\bar{d}\bar{a}} \dot{I} = R_A \cdot x_0 = 2,33 [5 - 5,67 \sin(\varphi - \alpha)] = 11,65 - 13,21 \sin(\varphi - \alpha);$$

$$Q^I = \sum_{\bar{e}\bar{d}\bar{a}} Y = R_A \cdot \cos(\varphi - \alpha) = 2,33 \cos(\varphi - \alpha);$$

$$N^I = \sum_{\bar{e}\bar{d}\bar{a}} X = -R_A \cdot \sin(\varphi - \alpha) = -2,33 \sin(\varphi - \alpha).$$

Аналогично составим выражения M^{II}, Q^{II}, N^{II} для участка II балки:

$$M^{II} = \sum_{\bar{e}\bar{d}\bar{a}} \dot{I} = R_A \cdot x_0 - P_B(x_0 - 0,5l) - P_r(f - y_0) = 2,33 [5 + 5,67 \sin(\alpha - \varphi)] -$$

$$-3,46 \cdot 5,67 \sin(\alpha - \varphi) - 2 \cdot 5,67 [1 - \cos(\alpha - \varphi)] = 0,31 - 6,41 \sin(\alpha - \varphi) + 11,34 \cos(\alpha - \varphi);$$

$$Q^{II} = \sum_{\bar{e}\bar{d}\bar{a}} Y = (R_A + R_B) \cos(\alpha - \varphi) - P_r \sin(\alpha - \varphi) = -1,13 \cos(\alpha - \varphi) - 2,0 \sin(\alpha - \varphi);$$

$$N^{II} = \sum_{\bar{e}\bar{d}\bar{a}} X = (R_A - P_B) \cdot \sin(\alpha - \varphi) + P_r \cos(\alpha - \varphi) = -1,13 \sin(\alpha - \varphi) + 2,0 \cos(\alpha - \varphi).$$

По полученным значениям усилий в поперечных сечениях балки на рис. 2.1 б, в, г построены эпюры M , Q и N .

Связь между усилиями M , Q и N , действующими в поперечных сечениях кривого бруса, определяется следующими дифференциальными зависимостями*:

$$\frac{dM}{ds} = Q; \quad (1.10)$$

$$\frac{dQ}{ds} = q - N/r; \quad (2.10)$$

$$\frac{dN}{ds} = t + Q/r. \quad (3.10)$$

где q и t — интенсивности распределенных нагрузок соответственно перпендикулярной и параллельной оси бруса; ds — длина элементарного отрезка оси кривого бруса.

Формула (1.1) аналогична формуле Журавского для прямых брусков.

Зависимости (1.1) - (1.3) могут использоваться для проверки построенных эпюр M , Q и N . Проверим с их помощью эпюры, изображенные на рис. 2.1 .

На участке I балки (см. рис. 1.3, а) ординаты эпюры Q положительны, а на участке II — отрицательны. Поэтому в соответствии с зависимостями (1.1) и (1.3) значения M и N на участке I возрастают слева направо (т. е. с увеличением криволинейной координаты s), а на участке II — убывают. Ординаты эпюры N на участке I отрицательны, а на участке II — положительны; в соответствии с зависимостью (1.2) значения Q на участке I возрастают, а на участке II — убывают.

Производная dM/ds на отрезке, например, 2-3 оси балки (см. рис. 2.1 , б) имеет среднее значение, равное (см. рис. 2.1 , б)

$$\frac{M_3 - M_2}{s_{2-3}} = \frac{11,65 - 7,00}{2,04} = 2,28 mc,$$

где длина участка

$$s_{2-3} = r\varphi/3 = 5,67 \cdot \frac{61,9^\circ}{3 \cdot 180^\circ} = 2,04 i .$$

Этому среднему значению производной в соответствии с зависимостью (1.1) примерно равна средняя величина Q на отрезке 2-3 (см. рис. 2.1, в).

Производная dQ/ds на участке, например, 3-4 балки имеет среднее значение

$$\frac{Q_4 - Q_3}{s_{3-4}} = \frac{-1,76 - (-1,13)}{2,04} = -0,31 mc / i .$$

В соответствии с зависимостью (1.2) такое же примерно значение на отрезке 3-4 имеет среднее отношение $(-N/r)$, равное

$$-(2,00 + 1,47) / (2 \cdot 5,67) \approx -0,31 mc / i .$$

Аналогично можно проверить выполнение условий (1.1)—(1.3) и на других отрезках оси балки.

3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАРЯЖЕНИЙ В БРУСЬЯХ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

Выведем формулы для определения нормальных напряжений в брусках большой кривизны.

При выводе этих формул предполагается, что:

- 1) кривой брус является плоским (т. е. ось его представляет собой плоскую кривую);
- 2) брус симметричен относительно плоскости, в которой расположена его ось, а внешние силы действуют в этой плоскости;
- 3) поперечные сечения бруса, плоские до его деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений);
- 4) давление продольных волокон бруса друг на друга не влияет существенно на распределение напряжений в бруске, а потому его можно не учитывать.

При изгибе брусков малой кривизны нормальные напряжения с достаточной степенью точности можно определять по формуле Навье для балок с прямой осью. Максимальные напряжения, подсчитанные по формуле Навье для бруса прямоугольного сечения с отношением $H/r = 1/15$, отличаются на 2 % от напряжений, вычисленных по формулам для бруса большой кривизны; при $H/r = 1/10$ - на 3,5 %, при $H/r = 1/5$ - на 7 %.

Рассмотрим случай чистого изгиба бруса большой кривизны ($H/r \geq 1/5$) (рис. 2.1). Предполагаем, что радиус r_n нейтрального слоя неизвестен и не совпадает с радиусом R оси стержня.

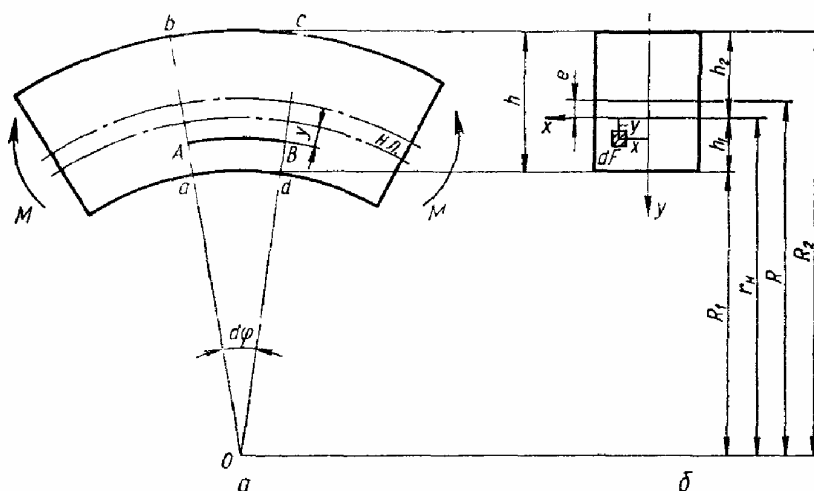


Рисунок 3.1 – Изгиб бруса большой кривизны

При выводе формулы для определения нормальных напряжений в бруске большой кривизны исходят из тех же гипотез, что и при выводе формулы

Навье, т. е пользуются гипотезой плоских сечений и гипотезой о том, что продольные волокна материала не давят одно на другое. Выбираем направление осей сечения x и y , как показано на рис. 3.2 (при этом ось x считается совпадающей с нейтральной линией, положение которой пока неизвестно). Направление y к центру кривизны принято за положительное.

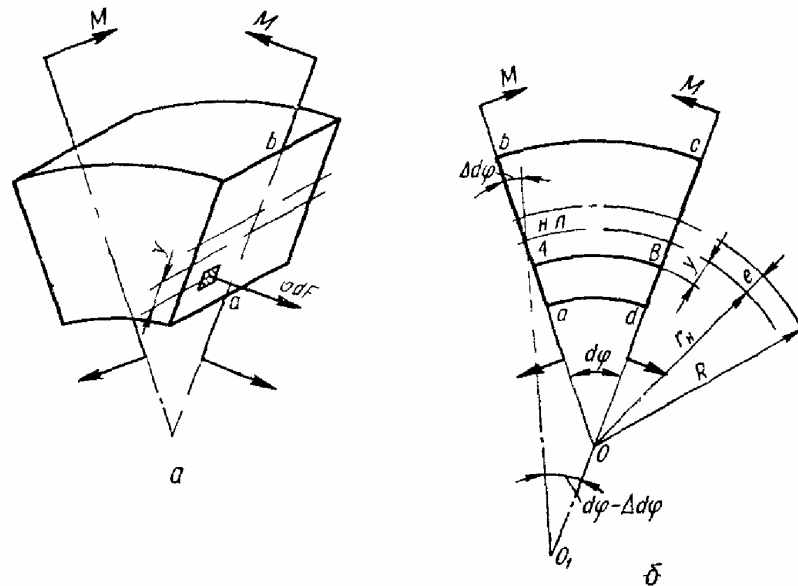


Рисунок 3.2 – Элемент бруса

Рассмотрим *статическую сторону задачи* и запишем условие равновесия применительно к элементу бруса (рис. 3.2, а), оставшемуся после удаления отсеченных частей. Для нашего случая, когда в сечении действует один силовой фактор M_x , будем иметь

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad (3.1)$$

$$\int_F \sigma y dF = M. \quad (3.2)$$

В силу симметрии F

$$M_y = \int_F \sigma x dF = 0.$$

Рассмотрим *геометрическую сторону задачи*. Относительное удлинение произвольно выделенного элементарного участка AB , находящегося на расстоянии y от нейтральной линии (рис. 3.2, б) и получившего в результате деформации удлинение $y\Delta d\varphi$, равно

$$\varepsilon = \frac{y\Delta d\varphi}{(r_H - y)d\varphi}, \quad (3.3)$$

где $(r_H - y)d\varphi$ – длина элемента до деформации.

Из рассмотрения *физической стороны задачи*, определяемой законом Гука

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{E \Delta d \varphi}{d \varphi} \cdot \frac{y}{r_H - y}, \quad (3.4)$$

условие (3.1) перепишем в виде

$$\int_F \sigma dF = \frac{E \Delta d \varphi}{d \varphi} \int_F \frac{y dF}{r_H - y} = 0$$

Так как

$$\frac{E \Delta d \varphi}{d \varphi} \neq 0,$$

то

$$\int_F \frac{y dF}{r_H - y} = 0. \quad (3.5)$$

Из (3.2) находим

$$\int_F \sigma y dF = \frac{E \Delta d \varphi}{d \varphi} \int_F \frac{y^2 dF}{r_H - y} = M \quad (3.6)$$

Так как

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_H - y} = \int_F \frac{y^2 + r_B y - r_H y}{r_H - y} dF = - \int_F \left(y - \frac{r_H y}{r_H - y} \right) dF = - \int_F y dF + r_H \int_F \frac{y dF}{r_H - y} = -S_x + 0,$$

или

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_H - y} = -S_x = -(-\ell)F = \ell F, \quad (3.7)$$

Можем представить (3.6) так:

$$\frac{E \Delta d \varphi}{d \varphi} \ell F = M.$$

Отсюда

$$\frac{E \Delta d \varphi}{d \varphi} = \frac{M}{\ell F}, \quad (3.8)$$

где ℓ — расстояние от нейтральной линии до центра тяжести; площадь поперечного сечения.

Подставив (3.8) в (3.4), найдем формулу для определения нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma = \frac{M_y}{\ell F (r_H - y)}, \quad (3.9)$$

$$\sigma = \frac{M_y}{S_x (r_H - y)}. \quad (3.10)$$

Здесь M — изгибающий момент в сечении; S_x — статический момент площади сечения кривого бруса относительно нейтральной линии.

Из анализа (3.9) или (3.10) видно, что нормальные напряжения по высоте распределяются по гиперболическому закону (рис. 3.3, б).

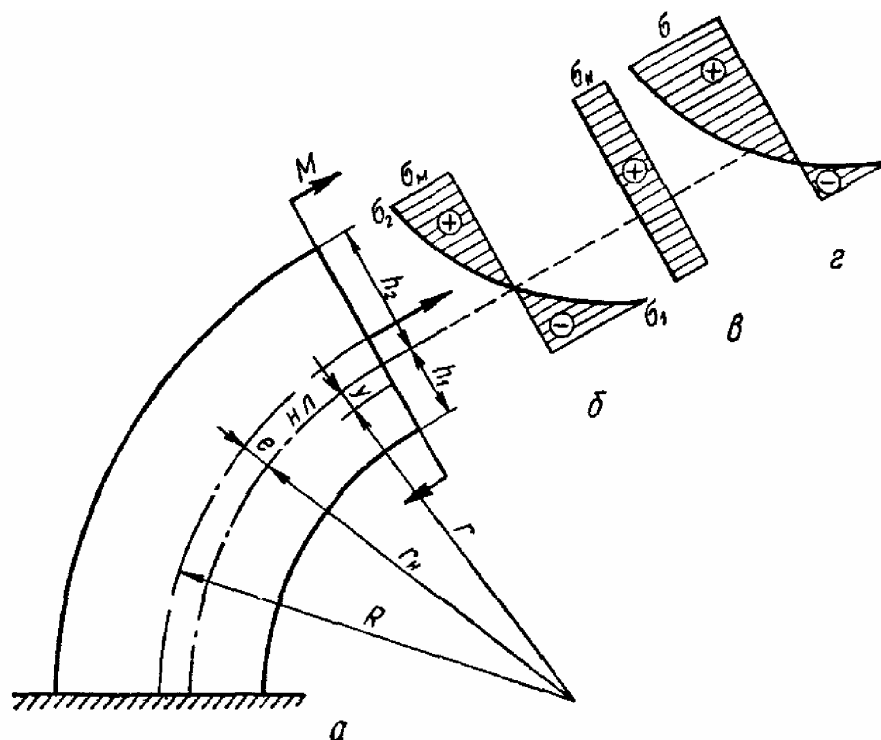


Рисунок 3.3 – Эпюры напряжений в бруске большой кривизны

Абсолютные величины напряжений в крайних волокнах сечения бруса согласно (3.9) определяются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Mh_1}{F\ell R_1}; \\ \sigma_2 &= \frac{Mh_2}{F\ell R_2};\end{aligned}\tag{3.11}$$

где R_1 и R_2 — соответственно радиусы кривизны внутренних и внешних волокон кривого бруса; h_1 и h_2 — расстояния от нейтральной линии до этих волокон. Знак напряжения определяется по направлению изгибающего момента в сечении.

Формулы (3.9) — (3.11) могут быть использованы, если известна входящая в эти формулы величина ℓ или радиус нейтрального слоя r_n , поскольку

$$\ell = R - r_n,\tag{3.12}$$

где R — радиус слоя, в котором расположены центры тяжести сечения бруса. Радиус r_n определим из уравнения (3.5).

Произведя замену переменных $r = r_n - y$ или $y = r_n - r$, перепишем уравнение (3.5) в следующем виде:

$$\int_F \frac{y dF}{r_n - y} = \frac{r_n - r}{r} dF = 0.$$

или

$$r_H \int_F \frac{dF}{r} - F = 0.$$

Отсюда

$$r_H = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}. \quad (3.13)$$

Так как для прямоугольного сечения $F=bh$ (h - высота сечения; b -ширина сечения) ; $dF=bdr$, формула (3.13) может быть описана в виде

$$r_H = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{bdr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2,303 \lg \frac{R_2}{R_1}} \quad (3.14)$$

Воспользовавшись рядом

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{h}{R} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right],$$

получим

$$\ell = R - r_H = R - \frac{R}{\left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right]}.$$

В первом приближении

$$\ell = R \left(1 - \frac{R}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^2} \right) \approx \frac{h^2}{12R}. \quad (3.15)$$

Во втором приближении

$$\ell = \frac{h^2}{12R} \left[1 + \frac{4}{15} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 \right]. \quad (3.16)$$

На основании (3.13) аналогичным путем можно получить приближение для ℓ в случае других форм поперечного сечения. Из (3.12) по известным r_H могут быть определены величины ℓ .

4 РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

Условие прочности для стержня малой кривизны, когда в его сечении действуют изгибающий момент и нормальная сила (рис. 3.3, г) имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} + \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (4.1)$$

где F — площадь сечения; W — момент сопротивления сечения.

Для стержня большой кривизны на основании (3.9) условие прочности будет

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{F\ell(r_H - y)} + \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (4.2)$$

При этом нужно рассматривать точки сечения, в которых суммарные напряжения от изгиба и растяжения будут наибольшими (рис. 3.3 б, в, г). Для этих точек в формулу (3.18) следует подставлять $y=h_1$ над $y=h_2$ и соответственно $r_n - y=R_1$ или $r_n - y=R_2$.

Если брус большой кривизны изготовлен из материала, для которого допускаемые напряжения на растяжение $[\sigma_+]$ и сжатие $[\sigma_-]$ различны (некоторые чугуны, пластмассы и др.), то условия прочности должны выполняться для крайних точек сечения, как в растянутой, так и в сжатой области.

5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для определения перемещений в стержнях любой кривизны удобно пользоваться методом Мора

В стержнях малой кривизны можно пренебречь продольной деформацией и деформацией сдвига. Тогда в случае плоского изгиба можно пользоваться формулой Мора в виде

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \frac{\overline{M}_i M_p ds}{EJ} \quad (5.1)$$

При плоском изгибе бруса большой кривизны деформации элемента от действия усилий M_p и N_p тоже состоят из удаления $\Delta(ds)$ отрезка ds оси и относительного поворота $d\theta$ сечений, ограничивающих элемент (рис. 4.1 а, б).

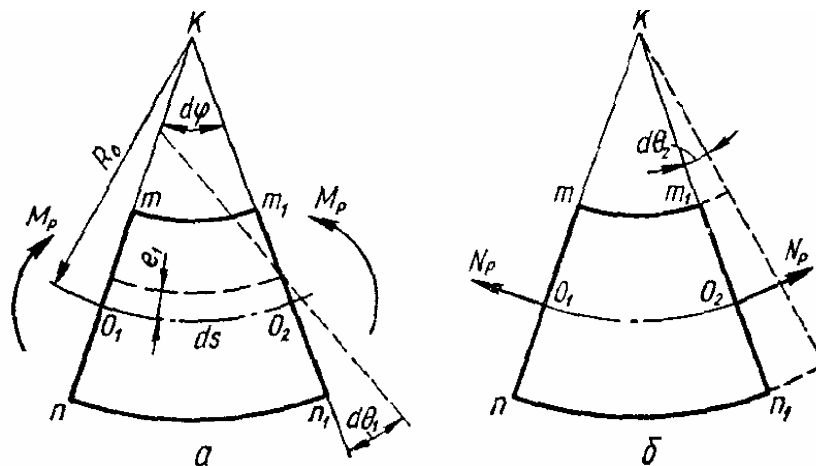


Рисунок 5.1 – Элемент кривого бруса

Взаимный угол поворота сечений $\Delta d\varphi = d\theta_1$, вызванный изгибающим моментом, можно определить из (3.8),

$$d\theta_1 = \frac{M_p d\varphi}{ES} = \frac{M_p ds}{ESR_0}.$$

где $S = |S_x| = \ell F$.

Угол поворота сечений, вызванный осевыми силами вследствие неодинаковой длины волокон элемента (рис. 5.1 б), равен

$$d\theta_2 = \frac{N_p ds}{EFR_0}$$

Полный угол поворота

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 = \frac{M_p ds}{ESR_0} + \frac{N_p ds}{EFR_0} \quad (5.2)$$

Удлинение элемента в результате действия осевых сил

$$\Delta(ds)_1 = \frac{N_p ds}{EF}$$

Удлинение, вызванное поворотом сечения на угол $d\theta_1$,

$$\Delta(ds)_2 = \ell d\theta_1 = \frac{M_p ds}{ESR_0} \ell = \frac{M_p ds}{EFR_0}$$

Полное удлинение осевого волокна

$$\Delta(ds) = \Delta(ds)_1 + \Delta(ds)_2 = \frac{N_p ds}{EF} + \frac{M_p ds}{EFR_0} \quad (5.3)$$

Подставляя (5.2) и (5.3) в формулу возможных перемещений, находим общую формулу для определения перемещений бруса большой кривизны

$$\Delta_{ip} = \int_s \left[\frac{\overline{M}_i M_p}{ESR_0} + \frac{\overline{N}_i M_p + \overline{M}_i N_p}{EFR_0} + \frac{\overline{N}_i N_p}{EF} + k \frac{\overline{Q}_i Q_p}{GF} \right] ds \quad (5.4)$$

Обычно на практике пренебрегают влиянием поперечной силы, в результате чего последнее слагаемое в (5.4) не учитывается.

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов, «Высшая школа», 1975, 654 с.
2. Сопротивление материалов. Под общей редакцией Г.С. Писаренко «Высшая школа», 1973, 672 с.
3. Методические указания к выполнению расчетно-проектировочных работ, дипломного и курсового проектирования для студентов УГТУ, Екатеринбург, 1994