

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ЧАСТЬ 1

Конспект лекций для студентов
строительных специальностей

Лекция 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В сопротивлении материалов рассматриваются вопросы расчета отдельных элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочность – это способность сооружений сопротивляться разрушению под действием приложенных к ним внешних нагрузок.

Жесткость – способность элемента конструкции сопротивляться деформации. Изменение формы или размеров тела называется деформацией.

Устойчивость – способность элемента конструкции сохранять одну форму равновесия под действием внешней нагрузки. Признаком потери устойчивости является внезапная смена одной формы равновесия другой.

Простейшие типы конструкций

Брус – тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим. Брус с прямолинейной осью называют *стержнем*. *Ось бруса* – это линия, которая соединяет центры тяжести его поперечных сечений. Горизонтальный брус, работающий на изгиб, обычно называют *балкой*.

Пластинка (пластина) – конструкция, ограниченная двумя плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами.

Оболочка – конструкция, ограниченная двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами. Геометрическое место точек, равноудаленных от наружной и внутренней поверхностей оболочки, называется *срединной поверхностью*. Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, является пластинкой.

Массив – тело, у которого все три размера одного порядка.

Нагрузки

Нагрузки, действующие на конструкцию, являются по отношению к ней внешними силами.

Нагрузки могут рассматриваться как *сосредоточенные* (Н или кг) или *распределенные по поверхности* (Н/м² или кг/см²) или *вдоль линии* (Н/м или кг/м). Нагрузки, распределенные по объему тела (собственных вес конструкции, силы инерции) называются *объемными силами* (Н/м³ или кг/см³).

Кроме силовых имеются и моментные нагрузки в виде *сосредоточенных моментов* (Н·м или кг·см) и моментов, распределенных по линии (Н·м/м или кг·см/см).

Статическая нагрузка не изменяет своей величины или точку приложения во времени и пространстве. Динамическими называются нагрузки, изменяющиеся во времени (например, удар).

Гипотезы, принимаемые в сопротивлении материалов

1. Материал конструкции имеет сплошное строение.
2. Материал конструкции – однороден, т.е. обладает одинаковыми свойствами во всех точках.
3. Материал конструкции – изотропен, т.е. обладает одинаковыми свойствами во всех направлениях.
4. В теле до приложения внешней нагрузки нет внутренних усилий.
5. Принцип независимости действия сил: результат воздействия на конструкцию системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, прилагаемых к конструкции последовательно и в любом порядке.
6. В точках тела, удаленных от мест приложения нагрузок, внутренние силы мало зависят от конкретного способа приложения этих нагрузок.
7. Гипотеза плоских сечений Бернулли: поперечные сечения бруса, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки.

Деформации и перемещения

Под действием приложенных сил тело деформируется. Изменение линейных размеров называется *линейной деформацией*, а изменение угловых размеров – *угловой деформацией*.

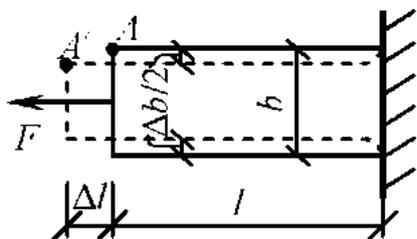


Рис. 1.1

Удлинение – увеличение линейных размеров тела, *укорочение* – уменьшение линейных размеров тела.

Рассмотрим прямой брус (стержень) постоянного сечения длиной l , заделанный одним концом и нагруженный на другом конце растягивающей силой F . Под действием этой силы

брус удлиняется на величину Δl (рис. 1.1), которая называется *полным (абсолютным) удлинением*, тогда

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \tag{1.1}$$

где ε – относительная продольная деформация.

Пусть в результате деформации прямоугольник 1-2-3-4 (рис. 1.2, а) примет вид параллелограмма 1'-2'-3'-4' (рис. 1.2, б). В этом случае изменение первоначального

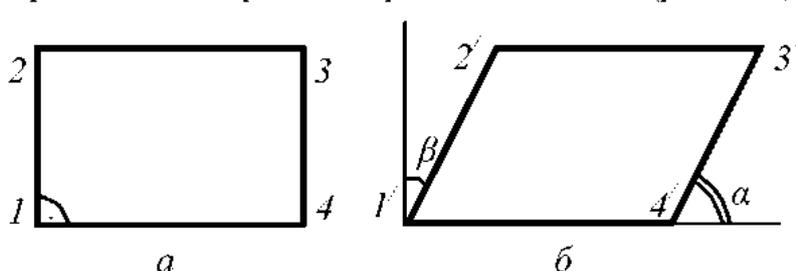


Рис. 1.2

прямого угла между сторонами рассматриваемого прямоугольника будет:

$$\gamma = \alpha + \beta. \quad (1.2)$$

Угол сдвига γ характеризует угловую деформацию в данной точке.

Деформации, исчезающие после разгрузки тела, называются *упругими*.

Перемещение точки – расстояние между первоначальным положением точки (до приложения внешних нагрузок) и ее положением после деформации, взятое в определенном направлении (например, вдоль оси стержня). На рис. 1.1: Δl – продольное перемещение точки А.

МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Для определения внутренних усилий применяется метод сечений, который заключается в следующем.

1. Мысленно делается разрез через исследуемую точку конструкции.
2. Отбрасывается одна из частей, а ее действие заменяется внутренними усилиями, которые уравнивают внешние силы, действующие на отсеченную часть. Внутренние силы, возникающие в теле под действием нагрузки – непрерывно распределенные, но они приводятся в сечении к главному вектору и главному моменту внутренних сил.
3. Составляются уравнения равновесия для отсеченной части тела, из которых определяются внутренние усилия.

Рассмотрим порядок расчета для случая, когда внешние силы лежат в одной плоскости (рис. 1.3).

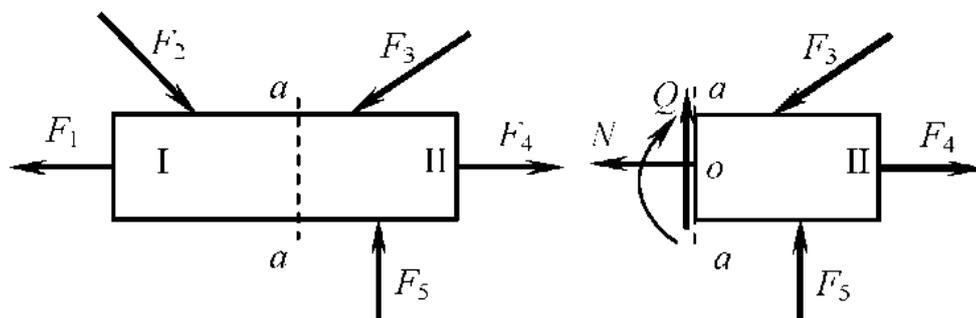


Рис. 1.3

После проведения сечения *a-a* отбросим правую часть (I), а для уравнивания оставшейся части (II) в общем случае необходимо в сечении *a-a* приложить силу N – *нормальную силу*, действующую вдоль оси стержня; Q – *поперечную силу*, действующую в плоскости поперечного сечения *a-a*; и момент M – *изгибающий момент*. После этого составляем уравнения равновесия для отсеченной части (II):

$$\Sigma x = 0. \quad \Sigma y = 0; \quad \Sigma M_o = 0,$$

из которых и определяем N , Q , M .

Если же рассматривается пространственная задача, то в поперечном сечении в общем случае будут возникать шесть внутренних усилий, являющихся компонентами главного вектора и главного момента системы

внутренних сил (рис. 1.4), где N – нормальная сила (*продольная*); Q_y, Q_z – поперечные силы, M_x – крутящий момент; M_y, M_z – изгибающие моменты.

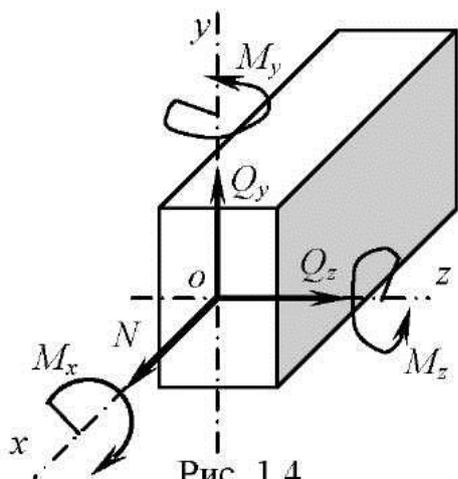


Рис. 1.4

Для определения этих шести усилий необходимо составить шесть уравнений равновесия: приравнять нулю суммы проекций сил на оси координат и суммы моментов сил относительно этих же осей координат. Будем считать, что ось x проходит через центры тяжести поперечных сечений конструкции.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ НАГРУЖЕНИЯ

1. *Растяжение (сжатие)* – в поперечном сечении стержня возникает только нормальная сила N .

2. *Сдвиг* – в поперечном сечении стержня возникают только поперечные силы.

3. *Кручение* – в поперечном сечении стержня возникает только крутящий момент.

4. *Чистый изгиб* – в поперечном сечении стержня возникает только изгибающий момент.

5. Случай сложных деформаций.

НАПРЯЖЕНИЯ

Сосредоточенные внутренние силы и моменты являются статическим эквивалентом внутренних сил, распределенных по площади сечения. Пусть ΔR – равнодействующая внутренних сил на бесконечно малой площади ΔA поперечного сечения стержня, тогда

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} \text{ – напряжение в точке.}$$

Упрощенно можно сказать, что напряжение – это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади. Разложим силу ΔR на две составляющие: касательную ΔQ и нормальную ΔN к поперечному сечению. В этом случае можно получить

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}, \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}, \quad (1.3)$$

где τ – касательное напряжения, σ – нормальное напряжение. Напряжения имеют размерность кг/см², МПа и т.д. Нормальное и касательное напряжения являются составляющими полного напряжения p в точке:

$$p = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}.$$

Лекция 2

ДИАГРАММА РАСТЯЖЕНИЯ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

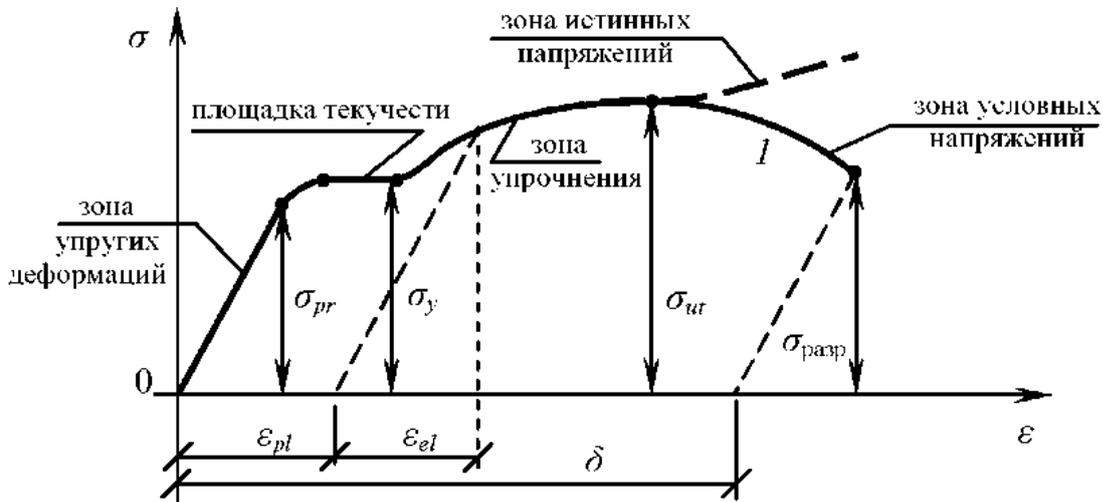


Рис. 2.1

Схемы образца

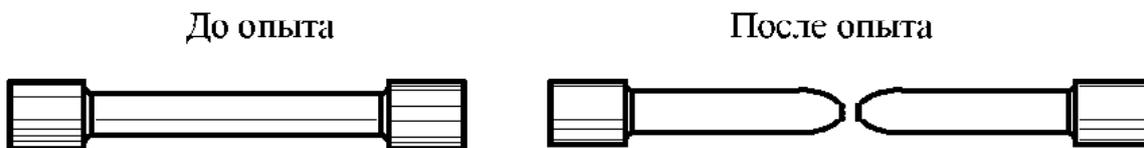


Рис. 2.2

На рис. 2.1 введены условные обозначения:

σ_{pr} – предел пропорциональности; σ_y – предел текучести; $\sigma_{ит}$ – предел прочности при растяжении; ϵ_{pl} – остаточная (пластическая) относительная деформация; ϵ_{el} – упругая относительная деформация.

После зоны упрочнения появляется *шейка* – резкое сужение поперечного сечения бруса.

Условное напряжение в образце определяется делением растягивающей силы на первоначальную площадь поперечного сечения образца. *Истинное напряжение* определяется делением растягивающей силы на площадь поперечного сечения шейки.

Остаточным относительным удлинением δ называется отношение остаточной линейной деформации $\Delta l_{остат.}$ образца к первоначальной его длине l :

$$\delta = \frac{\Delta l_{остат.}}{l} = \frac{l_{разрыв.} - l}{l} 100\%,$$

где $l_{разрыв.}$ – длина образца после разрыва.

Механические характеристики материала включает в себя:

$$E, \sigma_{pp}, \sigma_y, \sigma_{ul} \text{ или } \sigma_{uc}.$$

ДИАГРАММЫ СЖАТИЯ

Диаграмма сжатия пластической стали имеет вид, представленный на рис. 2.3.

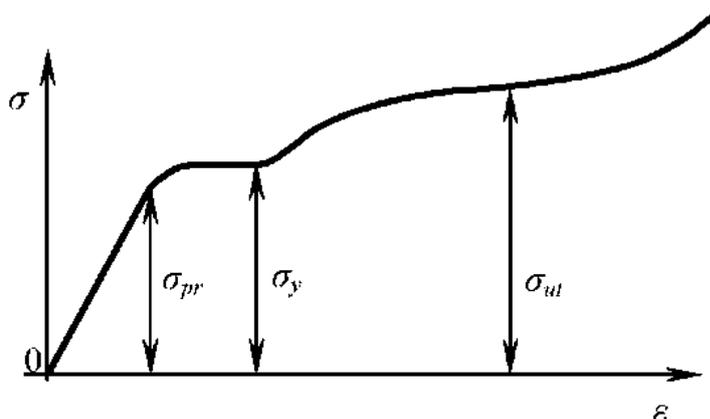


Рис. 2.3

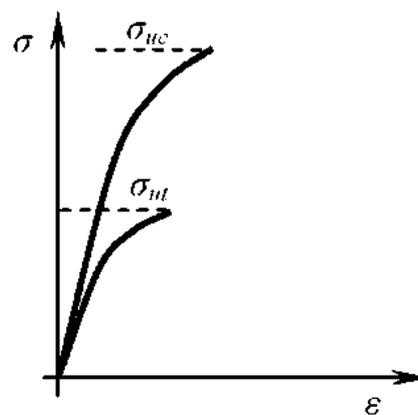


Рис. 2.4

Пределы текучести при растяжении и сжатии для одной и той же пластической стали практически одинаковы. Понятие предела прочности при сжатии пластической стали лишено физического смысла, так как при сжатии образец расплющивается и площадь его сечения увеличивается. Поэтому увеличивается также величины сжимающей силы и условных напряжений, отнесенных к первоначальной площади поперечного сечения образца.

Хрупкие материалы, например, чугун, имеют иную диаграмму сжатия (рис. 2.4). Деформации чугуна с самого начала не следует закону Гука. Они очень малы. Этот материал значительно хуже работает на растяжение (σ_{ul}), чем на сжатие (σ_{uc}).

Пластичность, хрупкость

Пластичность – свойство материала получать значительные остаточные деформации (ϵ_{pl}) не разрушаясь (медь, латунь, малоуглеродистая сталь).

Хрупкость – свойство материала разрушаться при незначительных остаточных деформациях (чугун, камень, бетон, стекло). Величина остаточного удлинения при разрыве составляет 2-5%.

ДОПУСКАЕМЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Фактические напряжения в конструкции, предел прочности, предел текучести установить точно трудно из-за приближенных методов расчета, разнородности материалов и других причин, поэтому вводится понятие – *допускаемые напряжения*.

Условие прочности для хрупких материалов:

$$\sigma_t \leq \sigma_{adm}^t \text{ при растяжении, где } \sigma_{adm}^t = \frac{\sigma_{ut}}{n_t},$$

$$\sigma_t \leq \sigma_{adm}^c \text{ при сжатии, где } \sigma_{adm}^c = \frac{\sigma_{uc}}{n_c}, \quad (2.1)$$

σ_t, σ_c – наибольшие расчетные нормальные растягивающие и сжимающие напряжения; $\sigma_{adm}^t, \sigma_{adm}^c$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии; n_t, n_c – нормативные коэффициенты запаса прочности по отношению к пределу прочности ($n_t, n_c > 1$).

Условие прочности для пластических материалов:

$$\sigma \leq \sigma_{adm} \cdot \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n_y}. \quad (2.2)$$

где σ – наибольшее по абсолютной величине нормальное сжимающее или растягивающее напряжение, σ_{adm} – допускаемое напряжение, n_y – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести σ_y ($n_y > 1$).

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Рассмотрим случай осевого (центрального) растяжения или сжатия на конкретном примере (рис. 2.5). Для определения внутренних усилий в стержне применим 2 раза метод сечений. Для этого сначала проведем сечение I-I и мысленно отбросим верхнюю часть бруса (рис. 2.5, а). Действие отброшенной части заменим нормальной силой N_1 (рис. 2.5, б), для определения которой составим условие:

$$\sum x = N_1 - 2F = 0, \text{ тогда } N_1 = 2F.$$

Полученное значение $N_1 = 2F$ откладываем в масштабе на эпюре нормальных сил (рис. 2.5, г). Затем проводим сечение II-II (рис. 2.5, в) и получаем, что

$$\sum x = N_2 - 2F + 3F = 0, \text{ тогда } N_2 = -F.$$

Построенный график (рис. 2.5, г) показывает изменение нормальных

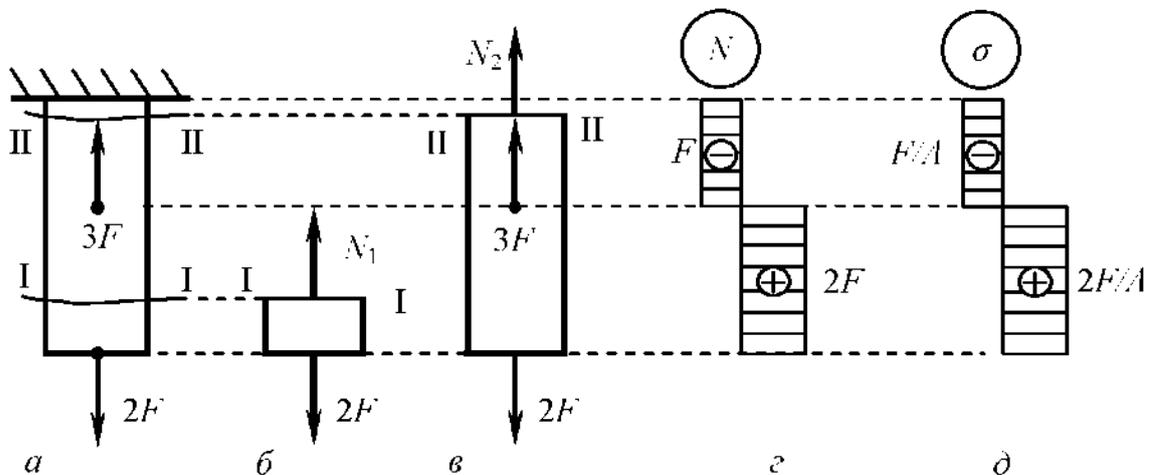


Рис. 2.5

сил по длине бруса без учета его собственного веса и называется *эпюрой нормальных сил*.

Нормальная сила N представляет собой равнодействующую внутренних нормальных напряжений, распределенных по площади A поперечного сечения, то есть

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A, \text{ откуда } \sigma = \frac{N}{A}.$$

Для наглядного изображения изменения нормальных напряжений σ в поперечных сечениях стержня по его длине строится эпюра нормальных напряжений (рис. 2.5, д).

Растягивающие нормальные силы принято считать положительными, а сжимающие – отрицательными (рис. 2.5, д).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Зависимость между нормальным напряжением σ и относительной деформацией ε в пределах упругости при растяжении и сжатии имеет вид (закон Гюка):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.3)$$

где E – *модуль продольной упругости (модуль Юнга)*. Величина E – физическая постоянная материала, например, для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, для дерева $E = 1 \cdot 10^4$ МПа. Формулу (2.3) представим в виде

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}.$$

откуда находим абсолютное удлинение стержня Δl (рис. 2.6, а):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (2.4)$$

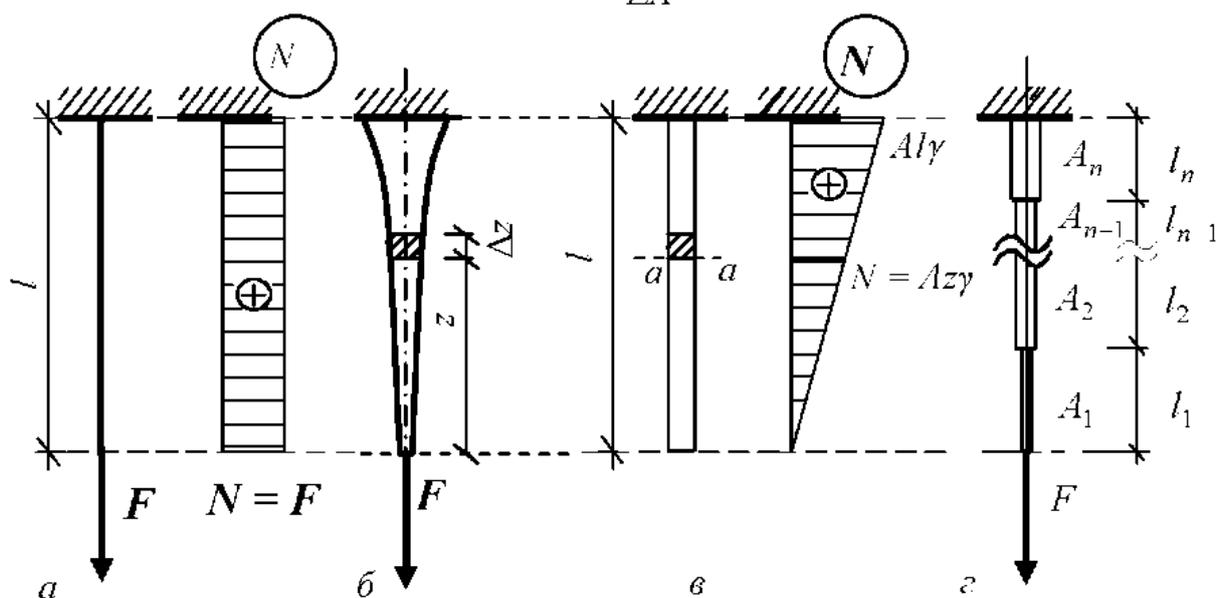


Рис. 2.6

Формулы (2.3), (2.4) являются математическими выражениями закона Гука при растяжении и сжатии бруса, который сформулировал Р. Гук в 1660 г. Произведение EA называется *жесткостью* поперечного сечения бруса при растяжении (сжатии).

Для бруса переменного поперечного сечения (рис. 2.6, б) получаем

$$\Delta(dz) = \frac{Ndz}{EA(z)}, \quad \Delta l = \int_0^l \frac{Ndz}{EA(z)} = \frac{N}{E} \int_0^l \frac{dz}{A(z)}.$$

Рассмотрим удлинение от собственного веса стержня постоянного сечения (рис. 2.6, в):

$$\Delta l = \int_0^l \frac{Ndz}{EA} = \int_0^l \frac{Az\gamma}{EA} dz = \frac{\gamma}{E} \int_0^l z dz = \frac{\gamma l^2}{2E}, \quad (2.5)$$

где γ – объемный вес материала конструкции. Перемещение сечения $a-a$ находим по формуле:

$$\Delta_{a-a} = \frac{\gamma}{E} \int_0^l z dz = \frac{\gamma}{E} \frac{z^2}{2} \Big|_0^l = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2).$$

Для стержня со ступенчатым изменением площади A_i (рис. 2.6, г) и нормальной силы N_i удлинения Δl_i вычисляются на каждом участке с постоянными N_i и A_i , а результаты алгебраически суммируются:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}, \quad (2.6)$$

где n – число участков; i – номер участка ($i = 1; 2; 3; \dots; n$).

Л е к ц и я 3

ПОПЕРЕЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Существует экспериментально установленная зависимость:

$$\varepsilon_t = -\nu \varepsilon,$$

где $\varepsilon_t = \Delta b/b$ – *относительная поперечная деформация*, b – ширина стержня, Δb – абсолютная поперечная деформация (рис. 1.1), ν – *коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации)*, характеризующий способность материала к поперечным деформациям.

Коэффициент Пуассона ν вместе с модулем продольной упругости E характеризует упругие свойства материалов.

Например, для стали $\nu = 0,25-0,3$; для бетона $\nu = 0,17$; для пробки $\nu = 0$.

Теперь мы можем записать все параметры, характеризующие механические свойства материала: E , ν , σ_{pr} , σ_y , σ_{ut} или σ_{uc} .

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Выделим из тела в окрестности произвольной точки бесконечно малую треугольную призму, боковые грани которой перпендикулярны к плоскости чертежа, а высота их равна dz (рис. 3.1). Приложим к призме те же напряжения, которые действовали на нее до выделения ее из тела.

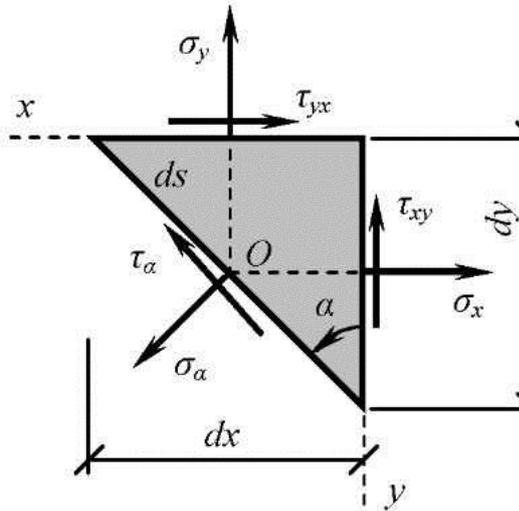


Рис. 3.1

Для определения напряжений σ_α и τ_α , действующих по наклонной площадке, составим три уравнения равновесия. Вначале составим условие равенства нулю моментов относительно точки O :

$$\tau_{yx} dz dx \frac{dy}{2} - \tau dz dy \frac{dx}{2} = 0,$$

откуда получаем закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (3.1)$$

Запишем условия равенства нулю суммы проекций сил на направления напряжений σ_α и τ_α :

$$\sum \sigma_\alpha = \sigma_\alpha ds dz - \sigma_y dz dx \sin \alpha - \tau_{yx} dz dx \cos \alpha - \sigma_x dz dy \cos \alpha - \tau_{xy} dz dy \sin \alpha = 0,$$

$$\sum \tau_\alpha = \tau_\alpha ds dz + \sigma_y dz dx \cos \alpha - \tau_{yx} dz dx \sin \alpha - \sigma_x dz dy \sin \alpha + \tau_{xy} dz dy \cos \alpha = 0.$$

Из рис. 3.1 очевидно, что

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dx}{ds}.$$

Подставим значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ в выражения $\sum \sigma_\alpha = 0$ и $\sum \tau_\alpha = 0$, а затем сократим полученные уравнения на $dz ds$.

В результате будем иметь:

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \sin^2 \alpha + \sigma_x \cos^2 \alpha + (\tau_{yx} + \tau_{xy}) \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{yx} \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \cos^2 \alpha.$$

С учетом равенства (3.1) последние две формулы для определения напряжений на наклонных площадках примут вид:

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \sin^2 \alpha + \sigma_x \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (3.2)$$

$$\tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (3.3)$$

Из формулы (3.2) можно получить, что

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const.},$$

т.е. сумма величин нормальных напряжений в двух взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная.

Напряжения в наклонных площадках стержня при одноосном растяжении

Сравнивая рис. 3.1 и 3.2, отметим, что $\sigma_y = \sigma$, $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$. Подставим эти значения напряжений в формулы (3.2) и (3.3):

$$\sigma_\alpha = \sigma \sin^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = -\sigma \frac{\sin 2\alpha}{2}. \quad (3.4)$$

Формулы (3.4) дают возможность вычислять нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения на наклонных сечениях бруса при одноосном растяжении (сжатии).

Пусть $\alpha = 0^\circ$, тогда из формул (3.4) находим $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$, а при $\alpha = 90^\circ$ имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma = \sigma_{\max}, \quad \tau_\alpha = 0.$$

Примем $\alpha = 45^\circ$, в этом случае $\tau_\alpha = -\sigma / 2 = \tau_{\max}$.

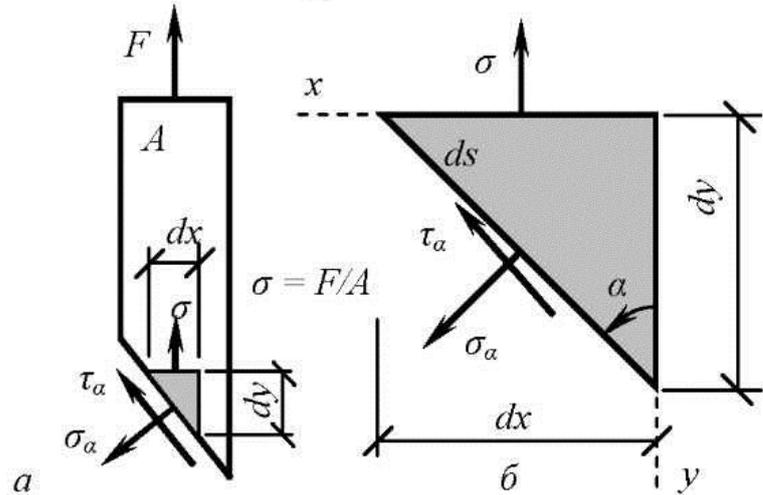


Рис. 3.2

ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ

Максимальные и минимальные нормальные напряжения называются *главными напряжениями*, а площадки, по которым они действуют – *главными площадками*.

Для определения величин главных напряжений используем формулу (3.2):

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = \sigma_y 2 \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_x 2 \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \cdot 2 = 0,$$

$$(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 = -2\tau_\alpha,$$

откуда находим
$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (3.5)$$

где α_o – углы наклона главных площадок к площадке, в которой действует напряжение σ_x . По главным площадкам касательные напряжения равны нулю.

Подставим выражение (3.5) в формулу (3.2) и найдем

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (3.6)$$

Площадки, по которым действуют τ_{\max} и τ_{\min} , называются *площадками сдвига*. Их находим, используя формулу (3.3):

$$\frac{d\tau_{xy}}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}, \quad (3.7)$$

где α_1 – угол наклона площадки сдвига к площадке, по которой действует напряжение σ_x (рис. 3.1).

Сравним формулы (3.5) и (3.7), очевидно, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0}, \quad \text{то есть } \alpha_1 = \alpha_2 \pm 45^\circ.$$

Таким образом, площадки сдвига наклонены к главным площадкам под углами, равными 45° .

Для определения величин τ_{\max} и τ_{\min} примем, что в формуле (3.3) $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_x = \sigma_{\max}$, $\sigma_y = \sigma_{\min}$. Кроме того возьмем $\alpha = 45^\circ$. В этом случае

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (3.8)$$

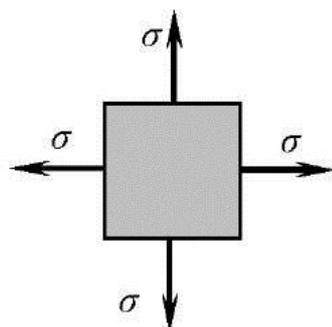


Рис. 3.3

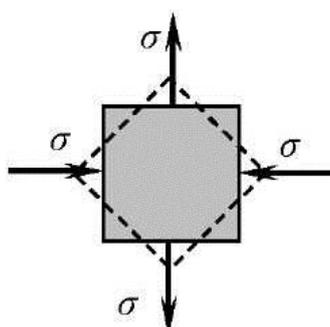


Рис. 3.4

Пример 1. Пусть $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $\tau_{xy} = 0$ (рис. 3.3), тогда по формулам (3.2), (3.3) определяем:

$$\sigma_\alpha = \sigma, \quad \tau_\alpha = 0.$$

Пример 2. (рис. 3.4) Имеем, что $\sigma_x = -\sigma$, $\sigma_y = \sigma$, $\tau_{xy} = 0$. Требуется определить σ_α и τ_α на площадках, наклоненных под углом $\alpha = 45^\circ$. В этом случае по формулам (3.2), (3.3) определяем:

ем: $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = -\sigma$.

Лекция 4

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Выделим в окрестности точки элементарный кубик с взаимно перпендикулярными гранями (рис. 4.1).

При пространственном напряженном состоянии через каждую точку всегда можно провести три площадки, по которым касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие по этим площадкам – *главными напряжениями*. Главные напряжения при трехосном напряженном состоя-

нии принято обозначать через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Все три главные площадки – взаимно перпендикулярны.

Сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть величина постоянная:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.}$$

ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Выделим из тела элементарный параллелепипед (рис.4.2), грани которого совпадают с главными площадками. Обозначим через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ относительные деформации ребер параллелепипеда в направлении главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Пусть ε_{11} – относительная деформация в направлении σ_1 от напряжения σ_1 ; ε_{12} – относительная деформация в направлении σ_1 от напряжения σ_2 ; ε_{13} – относительная деформация в направлении σ_1 от напряжения σ_3 . Тогда на основании принципа независимости действия сил получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} &= \frac{\sigma_1}{E} + (-\nu\varepsilon_{22}) + (-\nu\varepsilon_{33}) = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \end{aligned}$$

По аналогии находим $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} =$

$$= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} &= \frac{\sigma_3}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned}$$

Аналогичные формулы можно записать и для случая, когда грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

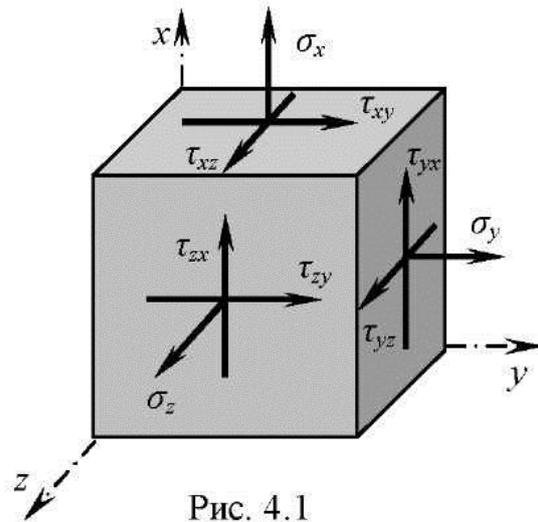


Рис. 4.1

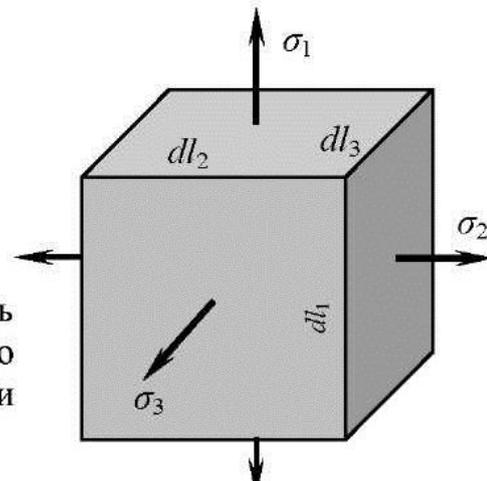


Рис. 4.2

В общем случае кроме нормальных напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ действуют также и касательные напряжения (рис. 4.1). Но касательные напряжения не вызывают удлинений ребер параллелепипеда, а вызывают лишь изменения прямых углов между его гранями.

ОБЪЕМНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Под действием внешней нагрузки упругое тело деформируется, его объем изменяется. Пусть до деформации объем параллелепипеда был

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3,$$

а после приложения внешней нагрузки его объем можно вычислить по формуле (рис. 4.2):

$$\begin{aligned} dV + \Delta(dV) &= (1 + \varepsilon_1)dl_1(1 + \varepsilon_2)dl_2(1 + \varepsilon_3)dl_3 = dl_1 dl_2 dl_3(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \\ &+ \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) \approx dl_1 dl_2 dl_3(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \\ &= dV + dV(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из-за малости $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ по сравнению с единицей в формуле (4.2) пренебрегаем их произведениями. Окончательно получаем:

$$\theta = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \frac{dV(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (4.3)$$

где θ – относительное изменение объема.

Подставим формулы для вычисления $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ в выражение (4.3):

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (4.4)$$

откуда определяем, что

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \text{const}. \quad (4.5)$$

Рассмотрим случай трехосного равномерного растяжения, т.е. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, тогда из формулы (4.4) находим:

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(3\sigma) \geq 0.$$

То есть мы приняли, что если имеется трехосное растяжение, то обязательно должно быть $\theta \geq 0$. В этом случае, согласно последней формулы

$$1 - 2\nu \geq 0, \text{ откуда } 1 \geq 2\nu, \text{ или } \nu \leq 0.5.$$

РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ



Рис. 4.3

При растяжении (сжатии) внешние силы совершают работу вследствие перемещения точек их приложения:

$$dW = F(\delta)d\delta, \quad (4.6)$$

где dW – элементарная работа. Полагая, что сила F растет от нулевого значения до своей ко-

нечной величины F . Но с другой стороны (рис. 4.3)

$$\delta = \Delta l = Fl / (EA); \text{ откуда } F = \delta EA / l.$$

Полученный результат подставим в формулу (4.6):

$$dW = \frac{\delta EA}{l},$$

$$W = \frac{EA}{l} \int_0^\delta \delta d\delta = \frac{EA}{l} \frac{\delta^2}{2} = \frac{F\delta}{2}. \quad (4.7)$$

Работа (W) внешней статически приложенной силы равна половине произведения окончательного значения силы (F) на окончательную величину соответствующего перемещения (δ).

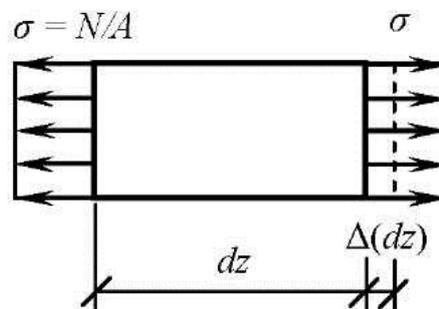


Рис. 4.4

При деформации внутренние силы также совершают работу (рис. 4.4):

$$d\Pi = -\frac{N\Delta(dz)}{2} = -\frac{N}{2} \frac{Ndz}{EA}, \quad \Pi = \int d\Pi = -\frac{N^2}{2EA} \int_0^l dz = -\frac{N^2 l}{2EA}.$$

Величина, равная работе внутренних сил, но имеющая противоположный знак, называется *потенциальной энергией деформации*.

Лекция 5

СДВИГ

Чистым сдвигом называется такой случай плоского напряженного состояния, при котором по боковым граням параллелепипеда действуют только касательные напряжения τ (рис. 5.1). Из формул (3.2, 3.3), полученных ранее, находим

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha, \quad \tau_\alpha = -\tau \cos \alpha.$$

Указанные на рис. 5.1 касательные напряжения будут τ_{\max} и τ_{\min} .

При $\alpha = \pm 45^\circ$ получаем $\sigma_\alpha = \tau = \sigma_{\max}$ и $\sigma_\alpha = -\tau = \sigma_{\min}$.

Опытным путем установлена линейная зависимость

$$\tau = G\gamma, \quad (5.1)$$

которая устанавливает закон Гука при сдвиге, где γ – угол сдвига,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (5.2)$$

G – модуль сдвига (модуль упругости второго рода). Он характеризует способность материала сопротивляться деформации сдвига.

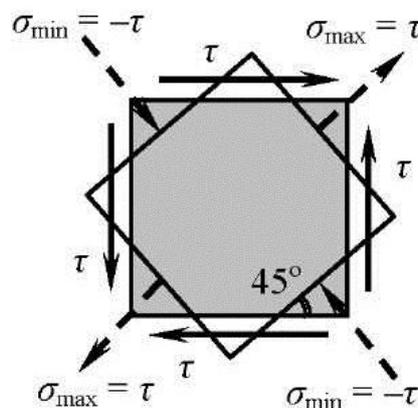


Рис. 5.1

Объемная деформация при сдвиге

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0.$$

Условие прочности при расчете на сдвиг (срез) имеет вид:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm}, \quad (5.3)$$

где τ_{adm} – допускаемое касательное напряжение (допускаемое напряжение на срез). Например, при расчете заклепок принимают $\tau_{adm} = (0,6-0,8) \sigma_{adm}^t$, а при расчете деревянных конструкций на срез принимают $\tau_{adm} = 0,1 \sigma_{adm}^t$ (для сосны).

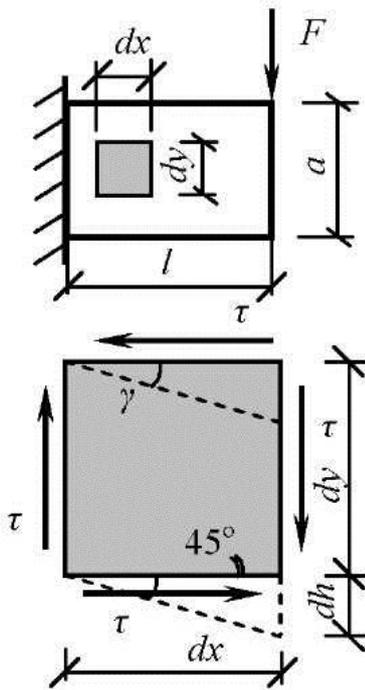


Рис. 5.2

Потенциальная энергия при сдвиге

Из рис. 5.2 находим:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dh}{dx} \approx \gamma, \quad dh = \gamma dx = \frac{\tau}{G} dx = \frac{kQ}{A} \frac{1}{G} ds.$$

Учитывая полученные результаты, по формуле (4.7) определяем

$$dW = \frac{1}{2} Q dh = \frac{kQ^2}{2AG} dx, \quad W = k \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GA} = -U, \quad (5.4)$$

где U – потенциальная энергия при сдвиге.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА СДВИГ

Рассмотрим основы практических методов расчета на сдвиг (срез) заклепочных соединений.

Пример 1. Определить необходимое число (n) односрезных заклепок диаметром d при действии растягивающей силы F (рис. 5.3, а).

При действии статической нагрузки F можно принимать, что поперечная сила Q в каждой заклепке равна

$$Q = \frac{F}{n}.$$

Будем считать, что касательные напряжения τ по плоскости среза распределяются равномерно (рис. 5.3, б), тогда

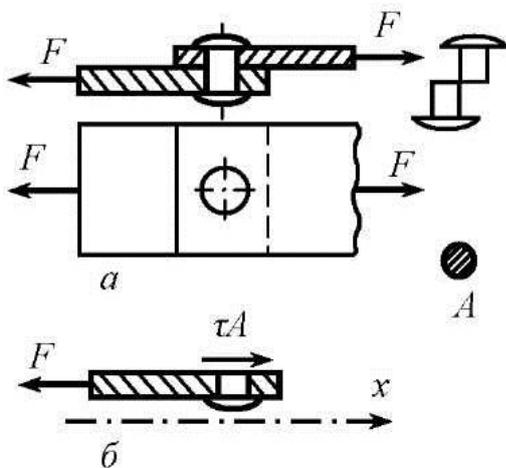


Рис. 5.3

$$\tau = \frac{Q}{A},$$

где $A = \pi d^2/4$ – площадь поперечного сечения одной заклепки.

Составим уравнение равновесия для отсеченной части (рис. 5.3, б):

$$\sum x = F - nA\tau = 0, \text{ откуда } \tau = \frac{F}{nA}.$$

Из условия прочности на срез (5.3) получаем:

$$\tau = \frac{F}{nA} \leq \tau_{adm} \text{ и } n = \frac{F}{A\tau_{adm}} = \frac{4F'}{\pi d^2 \tau_{adm}}.$$

Пример 2. Определить необходимое число n заклепок в двухсрезном соединении (рис. 5.4).

Составим уравнение равновесия отсеченной части (рис. 5.4, б):

$$\sum x = F - n2A\tau_{adm} = 0, \text{ откуда } n = \frac{F}{2A\tau_{adm}} = \frac{2F'}{\pi d^2 \tau_{adm}}.$$

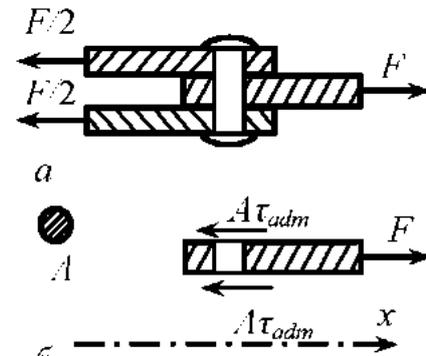


Рис. 5.4

Лекция 6

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

При изучении вопросов прочности, жесткости и устойчивости приходится иметь дело с некоторыми геометрическими характеристиками поперечных сечений конструкций.

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения:

$$A = \int_A dA. \quad (6.1)$$

Статическим моментом плоского сечения относительно некоторой оси называется, взятая по всей его площади A , сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния от этой оси (рис. 6.1):

$$S_z = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A z dA; \quad (6.2)$$

$$S_z = \iint_A y dz dy, \quad S_y = \iint_A z dz dy; \quad (6.3)$$

$$S_z = Ay_c, \quad S_y = Az_c, \quad (6.4)$$

где y_c – расстояние от центра тяжести всего плоского сечения до оси z ; z_c – расстояние от центра тяжести всего сечения до оси y .

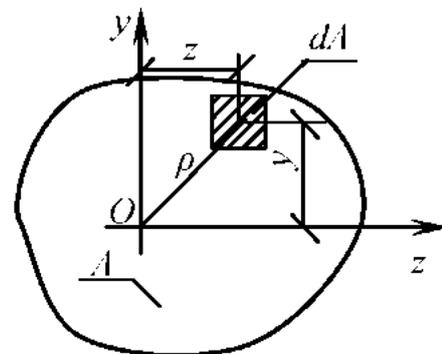


Рис. 6.1

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси:

$$\begin{aligned} S_z &= A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i; \\ S_y &= A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_n z_n = \sum_{i=1}^n A_i z_i. \end{aligned} \quad (6.5)$$

В формулах (6.5) введены обозначения: A_1, A_2, \dots, A_n – площади простых элементов, составляющих плоское сложное сечение; $z_1, y_1, z_2, y_2, z_3, y_3, \dots, z_n, y_n$ – координаты центров тяжести простых составляющих сложного плоского сечения относительно выбранных осей z и y .

Из выражений (6.4) можно определить координаты центра тяжести плоского сечения:

$$z_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_z}{A}. \quad (6.6)$$

Для сложного поперечного сечения формулы (6.6) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_n z_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}, \\ y_c &= \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Выводы

1. Изменение положительного направления оси y вызывает изменение знака статического момента S_z . Аналогично, изменение положительного направления оси x вызывает изменение знака статического момента S_y .

2. Статический момент сечения равен нулю относительно любой оси, проходящей через центр тяжести этого сечения.

3. Если плоское сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда проходит через центр тяжести плоского сечения, а поэтому, согласно п.2, статический момент сечения относительно оси симметрии всегда равен нулю.

4. Если плоское сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести сечения лежит на пересечении этих осей симметрии.

Осевым моментом инерции плоского сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади A сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний от этой оси, т.е.

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA. \quad (6.8)$$

Полярным моментом инерции плоского сечения относительно некоторой точки (полюса) O называется взятая по всей его площади A сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний от этой точки, т.е.

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA. \quad (6.9)$$

Сумма осевых моментов инерции плоского сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции этого сечения относительно точки пересечения указанных осей:

$$I_x + I_y = I_\rho. \quad (6.10)$$

Центробежным моментом инерции плоского сечения относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей z и y называется взятая по всей его площади A сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояния от этих осей, т.е.

$$I_{zy} = \int_A zy dA. \quad (6.11)$$

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Из рис. 6.2 следует:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+b)^2 dA = \\ &= \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA = \\ &= I_z + 2bS_z + b^2 A. \end{aligned}$$

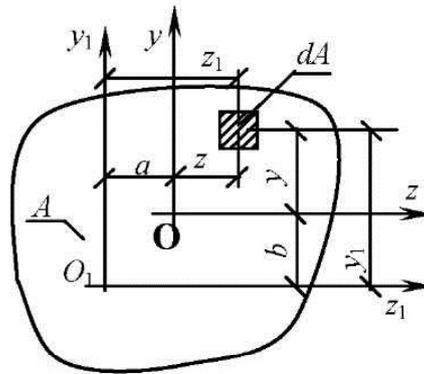


Рис. 6.2

Если предположить, что ось z проходит через центр тяжести поперечного сечения, то $S_z = 0$, и полученное выражение примет вид:

$$I_{z_1} = I_z + b^2 A. \quad (6.12)$$

По аналогии можно получить формулу для определения I_{y_1} :

$$I_{y_1} = I_y + a^2 A. \quad (6.13)$$

Центробежный момент инерции относительно новых осей y_1, z_1 будет:

$$\begin{aligned} I_{y_1 z_1} &= \int_A y_1 z_1 dA = \int_A (y+b)(z+a) dA = \int_A yz dA + b \int_A z dA + a \int_A y dA + ab \int_A dA = \\ &= I_{yz} + bS_y + aS_z + abA. \end{aligned}$$

Если предположить, что оси y, z проходят через центр тяжести сечения, то $S_z = S_y = 0$ и

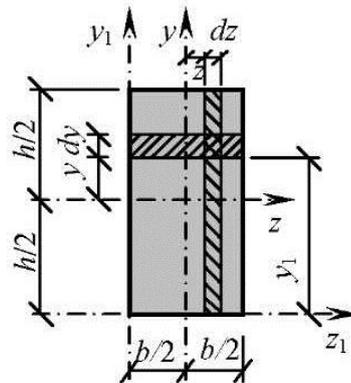


Рис. 6.3

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA. \quad (6.14)$$

Пример 1. Рассмотрим прямоугольное сечение (рис. 6.3): $dA = bdy$:

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_{z_1} = I_z + \left(\frac{h}{2}\right)^2 A = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Но I_{z_1} можно получить, используя формулу (6.8):

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y_1^2 b dy = b \frac{y_1^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{3}.$$

Аналогично находим: $I_y = \frac{hb^3}{12}$, $I_{y_1} = \frac{hb^3}{3}$.

Принимая $dA = dydz$ (рис. 6.3), определяем центробежный момент инерции поперечного сечения:

$$I_{yz} = \int_A yz dA = \int_{h/2}^{h/2} \int_{b/2}^{b/2} yz dy dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{b/2}^{b/2} \int_{h/2}^{h/2} y dy = 0.$$

Полученная формула показывает, что центробежный момент инерции плоского поперечного сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю.

Лекция 7

ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

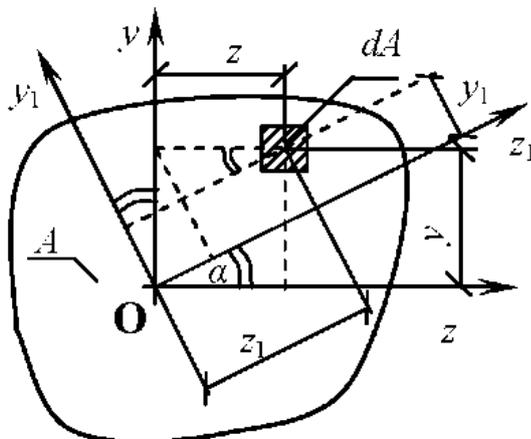


Рис. 7.1

Найдем зависимость между моментами инерции относительно осей y , z и моментами инерции относительно осей y_1 , z_1 , повернутых на угол α . Из рис. 7.1 находим

$$z_1 = z \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha,$$

тогда

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \\ &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \end{aligned}$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha;$$

$$I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)(z \cos \alpha + y \sin \alpha) dA =$$

$$= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha. \quad (7.1)$$

Определим экстремальные значения осевых моментов инерции для рассматриваемого поперечного сечения (рис. 7.1), для чего приравняем нулю первые производные:

$$dI_{y_1} / d\alpha = (I_z - I_y) \sin 2\alpha + 2I_{yz} \cos 2\alpha = 0 = 2I_{y_1 z_1};$$

$$dI_{z_1} / d\alpha = (I_y - I_z) \sin 2\alpha - 2I_{yz} \cos 2\alpha = 0 = -2I_{y_1 z_1}. \quad (7.2)$$

Следовательно, экстремальные значения осевых моментов инерции будут относительно осей, для которых $I_{y_1 z_1} = 0$. Максимальные и минимальные значения осевых моментов инерции называются *главными моментами инерции*. Из любой формулы (7.2) определяем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}, \quad (7.3)$$

где α – угол наклона *главных осей*, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. *Центральные оси* – оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения.

Подставляя формулу (7.3) в выражения (7.1), можно найти значения главных моментов инерции:

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}. \quad (7.4)$$

По структуре формула (7.4) аналогична формуле для определения главных напряжений (3.6).

Из формулы (7.4) очевидно, что $I_{\max} + I_{\min} = I_y + I_z = \text{const.}$

Пример 1. Пусть $I_z = I_u = I_{\max}$, $I_y = I_v = I_{\min}$, то есть осевые моменты инерции I_u , I_v – главные моменты инерции относительно главных осей u , v . Тогда имеем, что $I_{uv} = I_{yz} = 0$ (рис. 7.2). В этом случае формулы (7.1) дают:

$$I_{z_1} = I_u \cos^2 \alpha + I_v \sin^2 \alpha, \quad I_{y_1} = I_v \cos^2 \alpha + I_u \sin^2 \alpha,$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha. \quad (7.5)$$

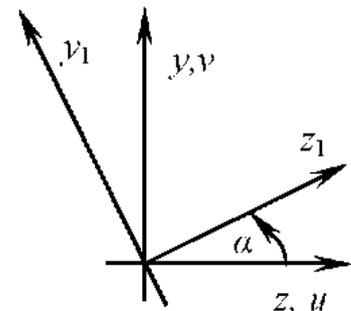


Рис. 7.2

Пример 2. Рассмотрим поперечное сечение в виде неравнобокого уголка № 11/7, $t = 0,8$ см и остальные геометрические размеры (рис. 7.3). Из таблицы (ГОСТ) выписываем все необходимые данные:

$I_z = 54,6 \text{ см}^4$; $I_y = 172 \text{ см}^4$; $I_{\min} = I_u = 32,3 \text{ см}^4$; $A = 13,9 \text{ см}^2$; $\text{tg}\alpha = 0.4$,
 следовательно, $\alpha = -21^\circ 48'$ (рис. 7.3);

$y_c = 1,64 \text{ см}$; $z_c = 3,61 \text{ см}$.

Тогда $I_y - I_z = I_u + I_v$, откуда
 $I_v = I_y + I_z - I_u = 194,3 \text{ см}^4$; $I_{uv} = 0$.

Применяя формулы (7.5), определяем:

$$I_{yz} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{32,3 - 194,3}{2} \sin(-2 \cdot 21^\circ 48') = 55,9 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + 9,36 \cdot (-2,39) \cdot 13,9 = -256 \text{ см}^4,$$

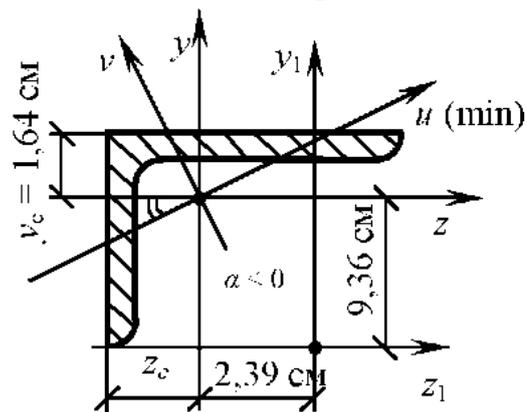


Рис. 7.3

$$I_{y_1} = I_y + 2,39^2 A = 172 + 2,39^2 \cdot 13,9 = 251,4 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_1} = I_z + 9,36^2 A = 54,6 + 9,36^2 \cdot 13,9 = 1272,4 \text{ см}^4.$$

КРУГ МОРА

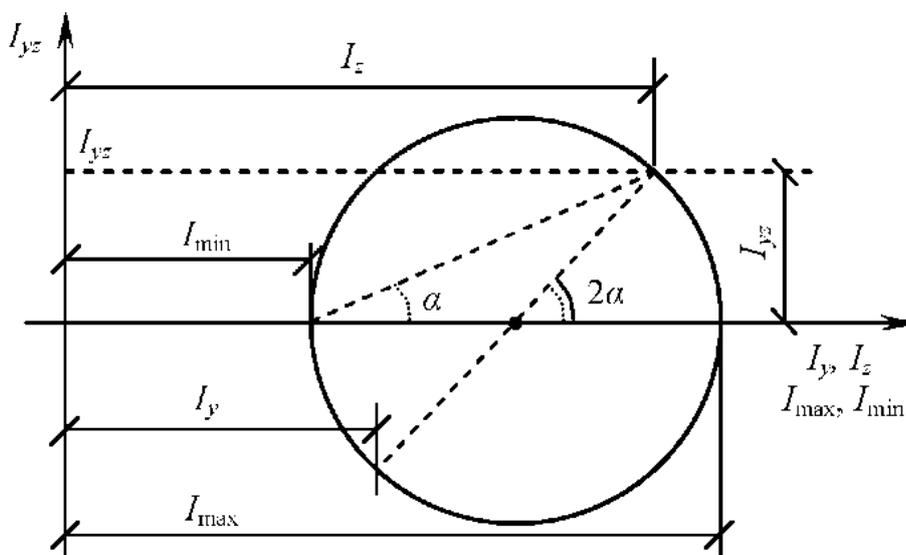


Рис. 7.4

Лекция 8

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

При малом угле закручивания φ (рис. 8.1) принимаются следующие допущения:

1. Круговые сечения *вала* остаются круговыми и диаметр их не меняется.
2. Расстояния между круговыми сечениями остаются постоянными.

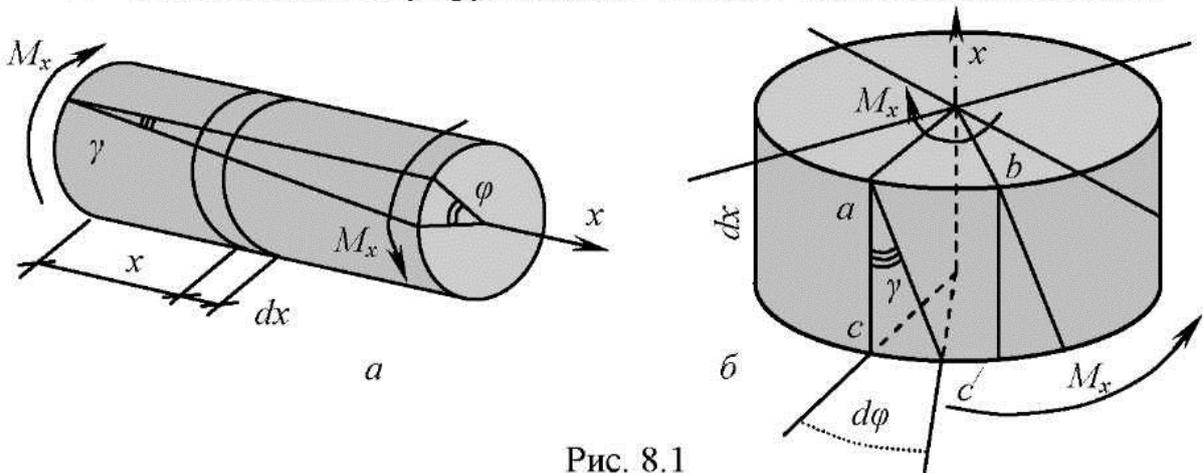


Рис. 8.1

3. Поперечные сечения вала, плоские и нормальные к оси до приложения внешней нагрузки, остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации.

Рассмотрим элементарный цилиндр (рис. 8.1, б):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{cc'}{ac} = \frac{ds}{dx} = \frac{rd\varphi}{dx} = r\theta \approx \gamma,$$

где γ – сдвиг (угол сдвига), θ – *относительный угол закручивания*. Тогда

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}, \quad \gamma = \theta r. \quad (8.1)$$

Применим закон Гука при сдвиге:

$\tau_r = G\gamma = G\theta r$ – на внешней поверхности, $\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\theta\rho$ – на любой цилиндрической внутренней поверхности радиусом $\rho \leq r$.

В рассматриваемом случае отсутствуют нормальные напряжения, следовательно, это – чистый сдвиг.

Как отмечалось ранее, модуль поперечной упругости можно определить по формуле

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8.2)$$

Составим уравнение равновесия (рис. 8.2):

$$\sum M_x = \int_A \tau_\rho dA \cdot \rho - M_x = 0, \quad M_x = \int_A \tau_\rho \rho dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_\rho;$$

где $I_\rho = \pi r^4/2$ – полярный момент инерции круглого поперечного сечения,

$$M_x = G \frac{d\varphi}{dx} I_\rho \text{ или } d\varphi = \frac{M_x dx}{GI_\rho}, \quad (8.3)$$

$$M_x = G\theta I_\rho \text{ или } \theta = \frac{M_x}{GI_\rho}. \quad (8.4)$$

Подставляем формулу (8.4) в закон Гука при сдвиге:

$$\tau_\rho = G\theta\rho = \frac{M_x}{I_\rho} \rho. \quad (8.5)$$

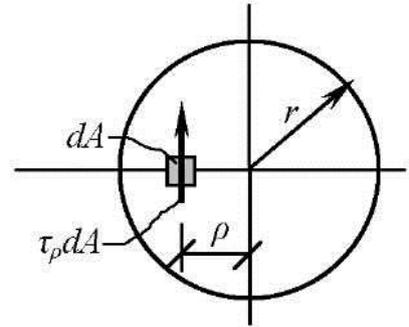


Рис. 8.2

Из последней формулы очевидно, что $\tau_{\max} = \tau_r = \frac{M_x}{I_\rho} r = \frac{M_x}{W_\rho}$,

где $W_\rho = \frac{I_\rho}{r} = \frac{\pi r^3}{2}$ -- полярный момент сопротивления.

Таким образом, условие прочности при сдвиге (5.3) можно записать

как
$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho} \leq \tau_{adm}. \quad (8.6)$$

Подбор сечения круглого вала

Из условия прочности (8.6) определяем:

$$W_\rho = \frac{M_x}{\tau_{adm}} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}, \text{ откуда находим } d = \sqrt[3]{\frac{16M_x}{\pi\tau_{adm}}}.$$

Эпюры крутящих моментов

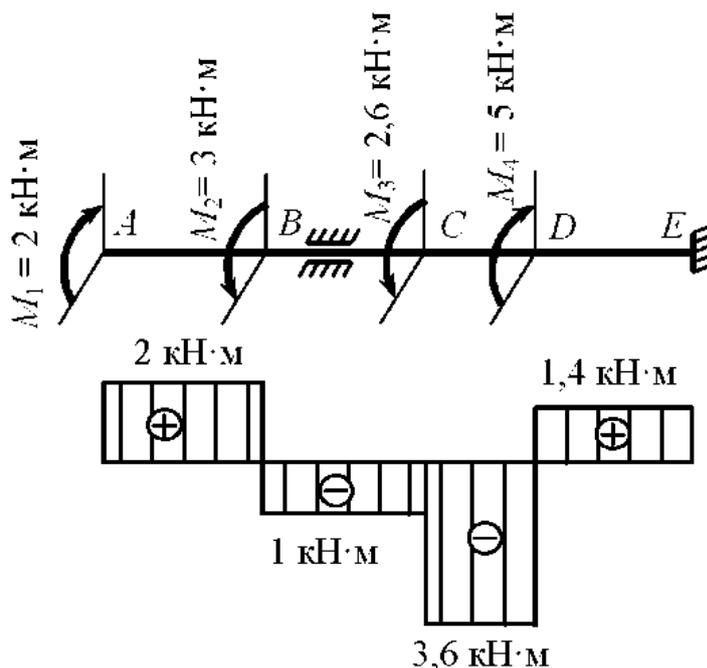


Рис. 8.3

КРУЧЕНИЕ ПОЛОГО ВАЛА

Для полого вала имеем: $I_\rho = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32}$, $W_\rho = \frac{2I_\rho}{d} = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{16d}$,

тогда из формулы (8.6) получаем: $\tau_{\max} = M_x / W_\rho$.

Если толщина стенки h полого вала мала, то можно предположить, что касательные напряжения распределяются равномерно по толщине и равны $\tau_{\text{ср}}$, в этом случае согласно рис. 8.4 запишем

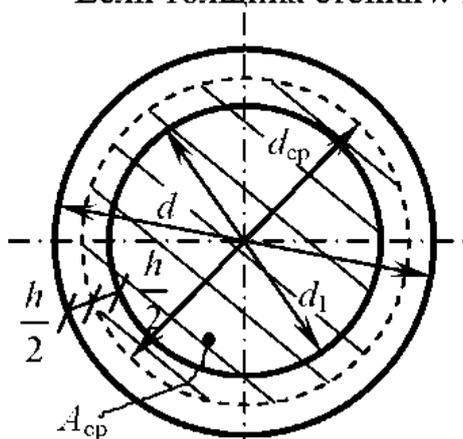


Рис. 8.4

$$M_x = \tau_{\text{ср}} h \pi d_{\text{ср}} \frac{d_{\text{ср}}}{2} = 2\tau_{\text{ср}} A_{\text{ср}} h,$$

где $A_{\text{ср}}$ – площадь, ограниченная контуром средней линии стенки полого вала. И наконец,

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{M_x}{2hA_{\text{ср}}}. \quad (8.7)$$

Л е к ц и я 9

КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Задачи на кручение прямых брусьев некруглого поперечного сечения решаются методами теории упругости. В отличие от круглых брусьев, при кручении которых поперечные сечения остаются плоскими и круглыми, сечения стержней любой другой формы искривляются. Происходит *депланация* поперечного сечения. При этом диагонали и оси симметрии прямоугольного сечения не искривляются и остаются в одной плоскости.

Брус прямоугольного поперечного сечения

Для удобства пользования формулам, применяемым при расчете брусьев прямоугольного сечения, придается такой же вид, как и в случае круглого сечения. В соответствии с этим наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении бруса и углы закручивания φ определяются по формулам:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\kappa}, \quad \varphi = \frac{M_x l}{GI_\kappa} \quad (9.1)$$

где $I_\kappa = ab^3, W_\kappa = \beta b^3$ (9.2)

I_κ – геометрическая характеристика крутильной жесткости, W_κ – момент сопротивления при кручении; коэффициенты α, β – определяются по таблице 9.1; h, b – размеры сторон прямоугольного сечения.

При $h/b \geq 10$ можно пользоваться упрощенными формулами:

Таблица 9.1

$$I_\kappa = \frac{hb^3}{3}, \quad W_\kappa = \frac{I_\kappa}{b} = \frac{hb^2}{3} \quad (9.3)$$

Касательные напряжения τ в серединах коротких сторон прямоугольного сечения определяют по формуле:

$$\tau = \gamma \tau_{\max} \quad (9.4)$$

а τ_{\max} возникают в серединах длинных сторон.

h/b	α	β	γ
1,0	0,140	0,208	1,000
1,5	0,294	0,346	0,859
2,0	0,457	0,493	0,795
3,0	0,790	0,801	0,793
4,0	1,123	1,150	0,745
6,0	1,789	1,789	0,743
8,0	2,456	2,456	0,742
10	3,123	3,123	0,742

При $h/b \geq 4$ можно принимать $\gamma \approx 0,74 = \text{const}$.

Из приведенных формул видно, что напряжения при кручении не зависят от физических свойств материала конструкции, так как модуль сдвига G не входит в формулы напряжений (9.1), (9.4).

Пример 1. Дан брус прямоугольного сечения с $h = 40$ см, $b = 20$ см и длиной $l = 2$ м, на который действует крутящий момент $M_x = 4$ т·м. Материал бруса – сталь с $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см².

Решение. Имеем $h/b = 2$ (рис. 9.1), тогда из табл. 9.1 выбираем

$$\alpha = 0,457; \beta = 0,493; \gamma = 0,795.$$

По формулам (9.2) находим

$$I_\kappa = 0,457 \cdot 20^4 = 73000 \text{ см}^4; W_\kappa = 0,493 \cdot 20^3 = 3940 \text{ см}^3.$$

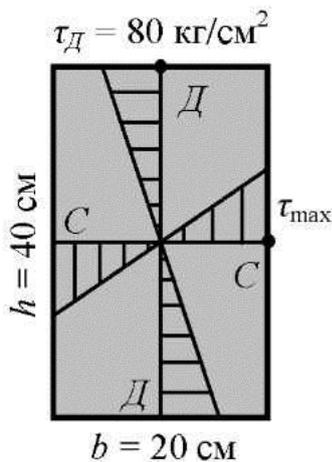


Рис. 9.1

Максимальное касательное напряжение в точках C поперечного сечения (рис. 9.1) определяем по первой формуле (9.1):

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_k} = \frac{400000}{3940} = 101,5 \text{ кг/см}^2.$$

Касательные напряжения в точках D вычисляем по формуле (9.4):

$$\tau_D = \gamma \tau_{\max} = 0,795 \cdot 101,5 = 80 \text{ кг/см}^2.$$

Полный угол закручивания находим по второй формуле (9.1):

$$\varphi = \frac{400000 \cdot 200}{8 \cdot 10^5 \cdot 73000} = 137 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 0,08^\circ.$$

Тонкостенный стержень открытого профиля

Пример 2. Рассмотрим тонкостенный стержень открытого профиля в виде двутавра (рис. 9.2).

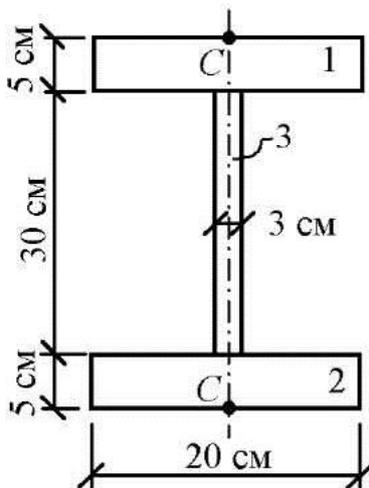


Рис. 9.2

Сечение разбиваем на 3 прямоугольника и для каждого из них определяем:

$$1 \text{ и } 2: \quad h/b = 20/5 = 4, \quad \alpha = 1,123; \beta = 1,15;$$

$$I_{k1} = I_{k2} = \alpha b^4 = 1,123 \cdot 5^4 = 702 \text{ см}^4,$$

$$3: \quad I_{k3} = \frac{hb^3}{3} = \frac{30 \cdot 3^3}{3} = 270 \text{ см}^4.$$

Для всего сечения в целом имеем:

$$I_k = I_{k1} + I_{k2} + I_{k3} = 702 + 702 + 270 = 1674 \text{ см}^4;$$

$$W_k = 1674/5 = 335 \text{ см}^3,$$

где за b_{\max} необходимо принять размер меньшей стороны прямоугольного сечения, входящего в общее сечение, и имеющего наибольшую толщину (в нашем случае – это элементы 1 и 2; $b_{\max} = 5$ см).

Наибольшее касательное напряжение возникает в серединах длинных сторон прямоугольников 1 и 2 (точки C):

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_k} = \frac{4 \cdot 10^5}{335} = 1192 \text{ кг/см}^2,$$

где для примера взято $M_x = 4 \text{ т} \cdot \text{м}$; $l = 200$ см – длина двутавра;

$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_k} = \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 200}{8 \cdot 10^5 \cdot 1674} = 0,06 \text{ рад}.$$

Кручение тонкостенных стержней с замкнутым профилем

Если поперечное сечение имеет замкнутый контур, то необходимо применять формулы (8.7):

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{M_x}{2hA_{\text{ср}}} = \tau_{\text{max}}, \quad d\varphi = \frac{M_x S dx}{4GA_{\text{ср}}^2 h}, \quad (9.5)$$

где $A_{\text{ср}}$ – площадь поперечного сечения, ограниченного средней линией контура, S – длина средней линии.

Пример 3. Определить наибольшее касательное напряжение и угол закручивания φ трубчатого сечения (рис. 9.3), если внешний крутящий момент $M_x = 2$ кН·м действует на участке длиной $l = 1$ м, а модуль сдвига материала стержня $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. По рис. 9.3 находим $t_{\text{min}} = 0,5$ см, $A_{\text{ср}} = 6 \cdot 3,5 = 21$ см², тогда формула (9.5) дает

$$\tau_{\text{max}} = \frac{2}{2 \cdot 21 \cdot 10^{-4} \cdot 0,005} = 95238 \text{ КПа} = 95,238 \text{ МПа.}$$

Максимальное касательное напряжение будет в середине длинной стороны (точка C) поперечного сечения, имеющей минимальную толщину $t_{\text{min}} = 0,5$ см.

По второй формуле (9.5) определяем угол закручивания сечения на длине стержня в 1 м:

$$\varphi = \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 (21 \cdot 10^{-4})^2} \left[\frac{3,5 \cdot 2}{1} + \frac{6 \cdot 2}{0,5} \right] = 0,044 \text{ рад.}$$

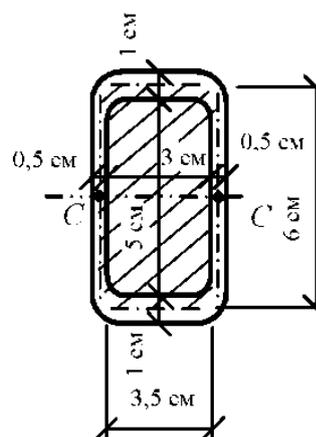


Рис. 9.3

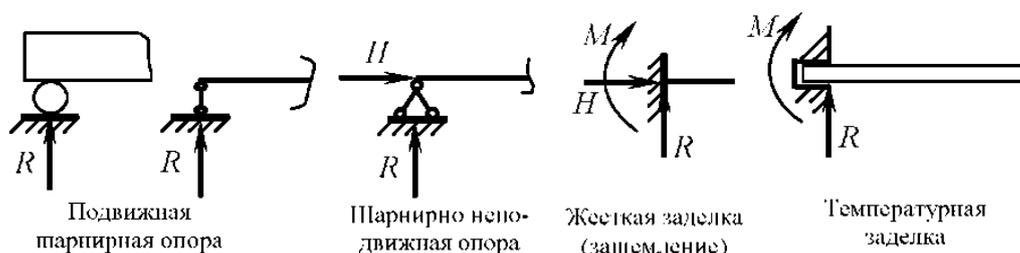
Значительно более жесткими и поэтому более целесообразными при кручении являются тонкостенные стержни замкнутого профиля.

Лекция 10

ИЗГИБ

Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях бруса изгибающих моментов. Они возникают, если стержень подвергается действию поперечной нагрузки или сосредоточенных моментов. При действии такой нагрузки ось стержня искривляется. Указанный вид нагружения называют *изгибом*, а стержни, работающие в основном на изгиб – *балками*.

Чаше встречается *поперечный изгиб*, когда в поперечных сечениях балки наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Если плоскость действия изгибающей о момента проходит через одну из главных осей поперечного сечения, изгиб балки носит название *плоского (простого) изгиба*.



Типы опор балок

Балка с одним заделанным концом называется *консольной балкой* (*консолью*).

Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Поперечная сила в сечении балки $a - a$ считается *положительной*, если равнодействующая внешних сил слева от рассматриваемого сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз (рис. 10.1, *а*), и *отрицательной* – в противоположном случае (рис. 10.1, *б*). Иногда пользуются следующим правилом: положительная поперечная сила стремится повернуть балку вокруг рассматриваемого сечения по часовой стрелке, а отрицательная – против часовой стрелки.

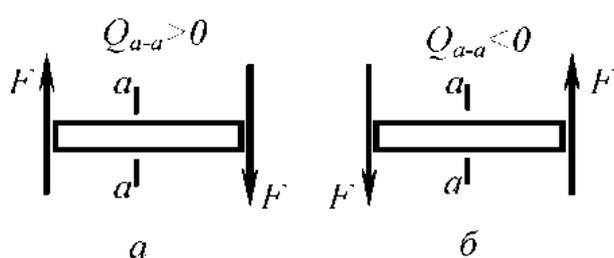


Рис. 10.1

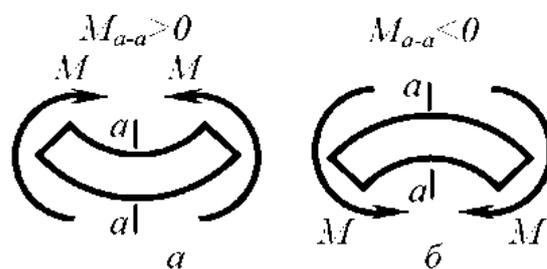


Рис. 10.2

Ординаты эпюр поперечных сил, соответствующие положительным значениям, будем откладывать вверх от осей эпюр, а отрицательным – вниз (ось эпюры должна быть направлена параллельно оси балки).

Изгибающий момент в сечении балки $a - a$ считается *положительным*, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки (рис. 10.2, *а*), и *отрицательным* – в противоположном случае (рис. 10.2, *б*).

Ординаты эпюр изгибающих моментов, соответствующие положительным значениям, будем откладывать вниз от осей этих эпюр, а отрицательным – вверх (ось эпюры должна быть направлена параллельно оси балки). Таким образом, устанавливая откладывать положительные ординаты эпюры изгибающих моментов вниз от оси балки, мы получим, что эпюра оказывается построенной *со стороны растянутых волокон* балки.

Пример 1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис. 10.3.

Решение. Определим вертикальные опорные реакции R_A и R_B балки. Отметим, что левая опора – шарнирно неподвижная опора, поэтому в ней возникает вертикальная опорная реакция R_A , препятствующая вертикальному смещению, и горизонтальная опорная реакция H , исключаяющая горизонтальное смещение закрепленного сечения балки. Однако при заданной вертикальной нагрузке имеем: $\Sigma X = H = 0$, следовательно, $H = 0$.

Для определения реакций R_A и R_B составим уравнения равновесия в

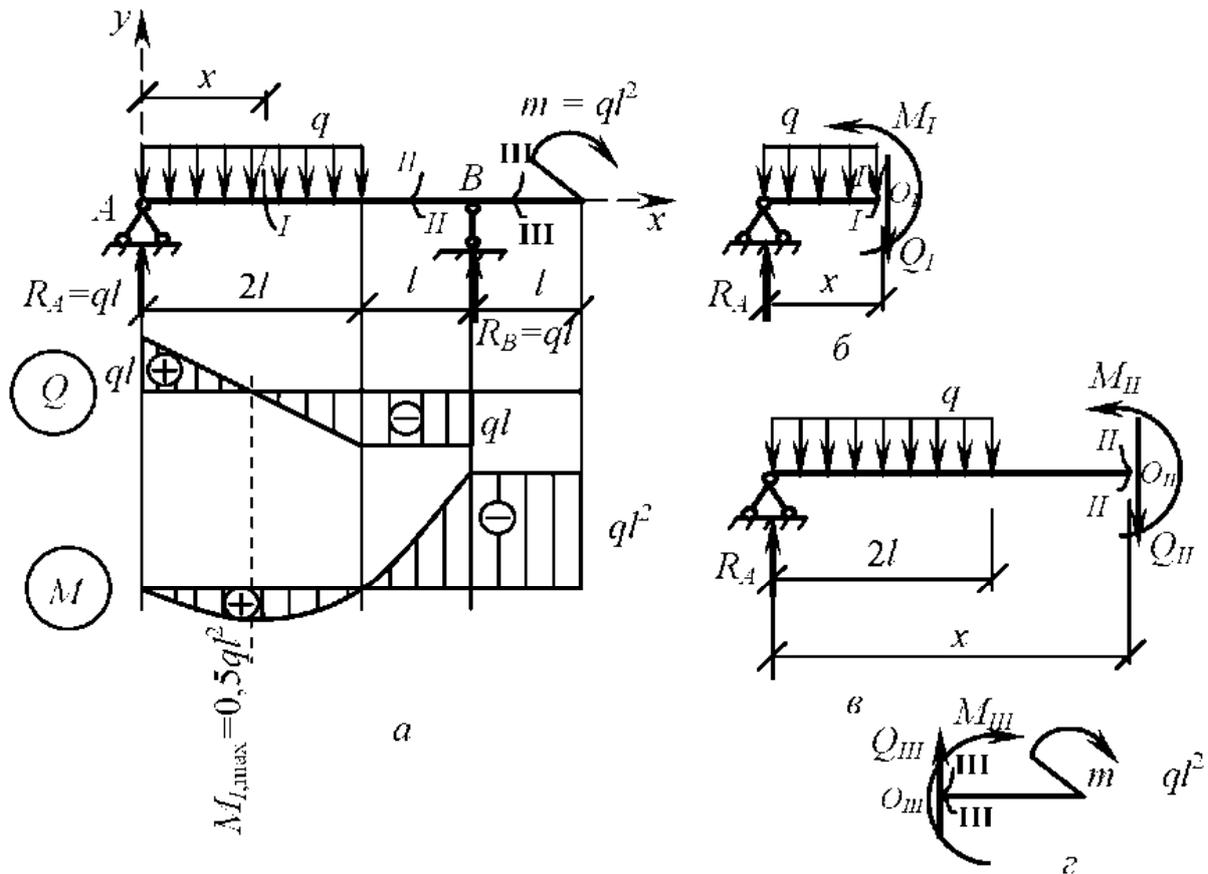


Рис. 10.3

виде сумм моментов всех сил относительно точек A и B:

$$\Sigma M_B = R_A \cdot 3l - q \cdot 2l(l+l) + m = 0, \text{ откуда находим } R_A = ql;$$

$$\Sigma M_A = m - R_B \cdot 3l + q \cdot 2l \cdot l = 0, \text{ откуда определяем } R_B = ql.$$

Для проверки найденных значений R_A и R_B составим условие равенства нулю суммы всех сил на вертикальную ось y :

$$\Sigma Y = R_A - q \cdot 2l + R_B = ql - 2ql + ql = 0.$$

Следовательно, реакции R_A и R_B определены правильно.

Для построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил балку

необходимо разбить на три участка. Назовем участком балки каждую ее часть, в пределах которой законы изменения внешней нагрузки остаются

постоянными. Границами участков являются поперечные сечения балки, в которых к ней приложены сосредоточенные нагрузки (в том числе опорные реакции) или, в которых начинается или заканчивается распределенная нагрузка. За границу участка необходимо также считать поперечное сечение балки, в котором интенсивность распределенной нагрузки начинает изменяться по новому закону. В рассматриваемом примере это явление не встречается.

Учитывая это, устанавливаем, что участок I расположен в пределах $0 \leq x \leq 2l$, участок II расположен в границах $2l \leq x \leq 3l$, а участок III имеет пределы $3l \leq x \leq 4l$.

У ч а с т о к I. Проведем на этом участке сечение I–I на расстоянии x от левого конца балки. Отбросив правую часть балки, составим уравнения равновесия для оставшейся левой части балки (рис. 10.3, б). Действие отброшенной части балки заменим положительной поперечной силой Q_I и положительным изгибающим моментом M_I (метод сечений). В этом случае

$$\sum Y = R_A - qx - Q_I = 0, \text{ тогда } Q_I = R_A - qx = q(l - x);$$

$$\sum M_{O_I} = R_A x - \frac{qx^2}{2} - M_I = 0, \text{ тогда } M_I = R_A x - \frac{qx^2}{2} = q\left(lx - \frac{x^2}{2}\right).$$

Здесь qx – равнодействующая равномерно распределенной нагрузки в пределах отрезка длиной x участка I. Эта равнодействующая приложена посередине участка длиной x , а поэтому ее момент относительно точки O_I будет равен

$$\left(-qx \cdot \frac{x}{2}\right) = -\frac{qx^2}{2}.$$

Полученные значения Q_I и M_I действительны только в пределах участка I ($0 \leq x \leq 2l$).

Зависимость $Q_I = q(l - x)$ от x – линейная, следовательно, для построения эпюры Q в пределах участка I достаточно определить величины Q_I в начале участка ($x = 0$): $Q_I = ql$ при $x = 0$ и в конце участка I ($x = 2l$):

$$Q_I = q(l - 2l) = -ql \text{ при } x = 2l.$$

Зависимость $M_I = q(lx - x^2 / 2)$ от x – квадратичная, т.е. эпюра M на участке I представляет собой параболу. Для построения эпюры M вычисляем значения M_I в начале и в конце участка I :

$$x = 0 \rightarrow M_I = 0; \quad x = 2l \rightarrow M_I = q(l \cdot 2l - 4l^2 / 2) = 0.$$

Для определения максимального или минимального значения изгибающего момента M в пределах участка I воспользуемся положением, что функция достигает своего экстремума, когда первая производная ее по аргументу равна нулю.

Принимая $dM_I / dx = q(l - x) = 0$, находим $x = l$ – абсцисса поперечного сечения балки, где M принимает экстремальное значение. И наконец, определяем $M_{I,\max}(x = l) = q(l \cdot l - l^2 / 2) = ql^2 / 2$.

У ч а с т о к II. Проведем сечение II – II и, отбросив правую часть балки, составим уравнения равновесия для оставшейся левой части балки (рис. 10.3, в). В этом случае:

$$\sum Y = R_A - q2l - Q_{II} = 0, \text{ тогда } Q_{II} = -ql;$$

$$\sum M_{O_{II}} = R_A x - q2l(x - l) - M_{II} = 0, \text{ тогда } M_{II} = ql(2l - x).$$

Величина поперечной силы Q_{II} на втором участке имеет постоянное значение $Q_{II} = -ql$, а зависимость изгибающего момента M_{II} от x – линейная, следовательно, для построения эпюры M на участке II достаточно определить величины M_{II} при двух значениях абсциссы x :

$$\begin{aligned} \text{при } x = 2l \text{ имеем } M_{II} &= ql(2l - 2l) = 0; \\ \text{а если } x = 3l, \text{ тогда } M_{II} &= ql(2l - 3l) = -ql^2. \end{aligned}$$

У ч а с т о к III. Проведем сечение III – III. Сейчас удобнее отбросить левую часть балки и рассмотреть оставшуюся правую часть балки (рис. 10.3, г). В сечении III – III показываем положительную поперечную силу Q_{III} и положительный изгибающий момент M_{III} (см. рис. 10.1 и 10.2).

Для оставшейся части составим уравнения равновесия:

$$\sum Y = Q_{III} = 0, \text{ следовательно, } Q_{III} = 0;$$

$$\sum M_{O_{III}} = M_{III} + m = 0, \text{ откуда находим } M_{III} = -m = -ql^2.$$

По полученным значениям Q_{III} и M_{III} на рис. 10.3, а построены эпюры Q и M для участка III балки.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Выделим двумя сечениями элемент балки (рис. 10.4):

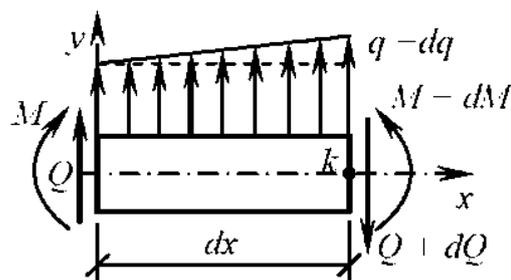


Рис. 10.4

$$\Sigma Y = Q - (Q + dQ) + \frac{q + (q + dq)}{2} dx = 0,$$

откуда $dQ = qdx + \frac{dqdx}{2} = 0$. Бесконечно малыми величинами второго порядка пренебрегаем и окончательно

получаем:
$$q = \frac{dQ}{dx}. \quad (10.1)$$

Составим еще одно уравнение равновесия:

$$\Sigma M_k = M - (M + dM) + Qdx + qdx \frac{dx}{2} + \frac{dqdx}{2} \frac{dx}{3} = 0. \quad (10.2)$$

В уравнении (10.2) оставляем только бесконечно малые первого порядка, в результате получаем:

$$-dM + Qdx = 0, \text{ то есть } Q = \frac{dM}{dx}. \quad (10.3)$$

Таким образом, первая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе. Эта зависимость называется *теоремой Журавского*.

Используя полученные зависимости (10.1), (10.3), можно сделать несколько важных выводов:

1. Тангенс угла между касательной к линии, ограничивающей эпюру M , и осью эпюры M равен поперечной силе Q .
2. На участках балки, где поперечная сила положительна, изгибающий момент возрастает (слева направо), а на участках, где она отрицательна — убывает.
3. Чем больше по абсолютной величине значение поперечной силы Q , тем круче линия, ограничивающая эпюру M .
4. Если эпюра Q имеет постоянное значение, то на этом участке эпюра M ограничена прямой линией.
5. Если на границе соседних участков балки в эпюре Q имеется скачок, то линии, ограничивающие эпюру M на этих участках, сопрягаются с изломом, то есть не имеют в точке сопряжения общей касательной.
6. Изгибающий момент достигает максимума или минимума в сечениях балки, в которых поперечная сила равна нулю.
7. На участках балки, где распределенная нагрузка q отсутствует, поперечные силы постоянны, а изгибающие моменты меняются по линейному закону.

Лекция 11

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Помимо уже известных гипотез (лекция 1) будем считать, что продольные волокна не давят друг на друга.

Слой балки, не испытывающий при изгибе ни растяжения, ни сжатия, называется *нейтральным слоем*.

Рассмотрим случай чистого изгиба. На рис. 11.1, а показан изогнутый участок балки, где $1/\rho$ – кривизна нейтрального слоя,

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(ds)}{ds} = \frac{y d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y}{\rho},$$

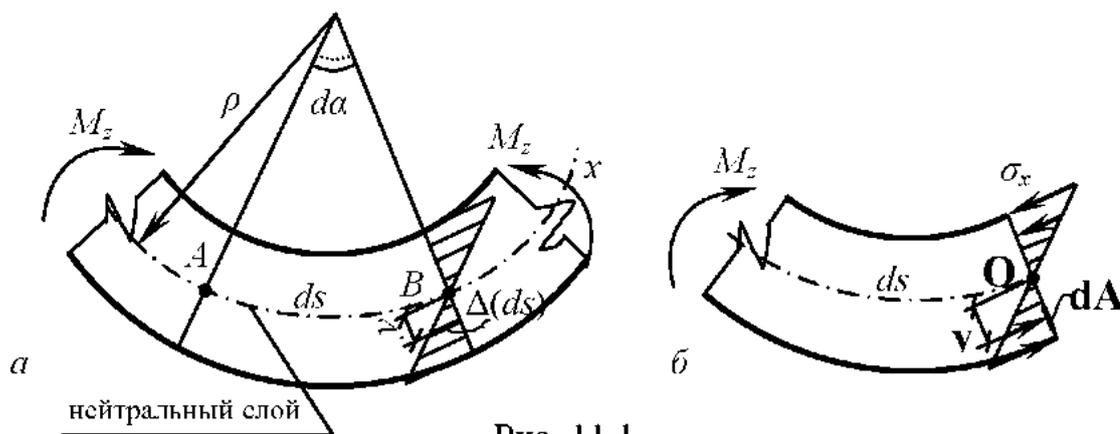


Рис. 11.1

по по закону Гука имеем $\sigma_x = \varepsilon_x E = \frac{y}{\rho} E$, откуда $\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_x}{yE}$, (11.1)

Составим уравнение равновесия (рис. 11.1, б):

$$\sum X = \int_A \sigma_x dA = 0, \quad \int_A \sigma_x dA = \int_A \frac{yE}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0,$$

откуда находим $S_z = 0$, следовательно, нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Из другого уравнения равновесия определяем (рис. 11.1, б)

$$\sum M_o = -M_z + \int_A \sigma_x dA \cdot y = 0, \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA = \int_A \frac{yE}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z,$$

или
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (11.2)$$

Приравняем соответствующие члены уравнений (11.1) и (11.2):

$$\frac{\sigma_x}{Ey} = \frac{M_z}{EI_z}, \quad \text{откуда} \quad \sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (11.3)$$

В результате получили уравнение, позволяющее определить нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения балки, если известен изгибающий момент и момент инерции сечения. Опуская индекс x в обозначениях, запишем формулу (11.3) в виде:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y, \quad (11.4)$$

Обозначим
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad (11.5)$$

где W_z – момент сопротивления поперечного сечения. Следовательно

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_{adm} \quad (11.6)$$

– условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям.

Для сечений, не симметричных относительно нейтральной оси, например, для треугольного, расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных растянутых и сжатых волокон (y_{\max}) различны, поэтому для таких сечений имеются два момента сопротивления:

$$W_z^c = \frac{I_z}{y_{\max}^c}, \quad W_z^t = \frac{I_z}{y_{\max}^t},$$

где y_{\max}^c , y_{\max}^t – расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных сжатых и растянутых волокон соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

При поперечном изгибе в поперечных сечениях возникают, помимо изгибающих моментов, и поперечные силы. Наличие поперечной силы связано с возникновением касательных напряжений в поперечных сечениях балки, а по закону парности касательных напряжений и в ее продольных сечениях (рис. 11.2).

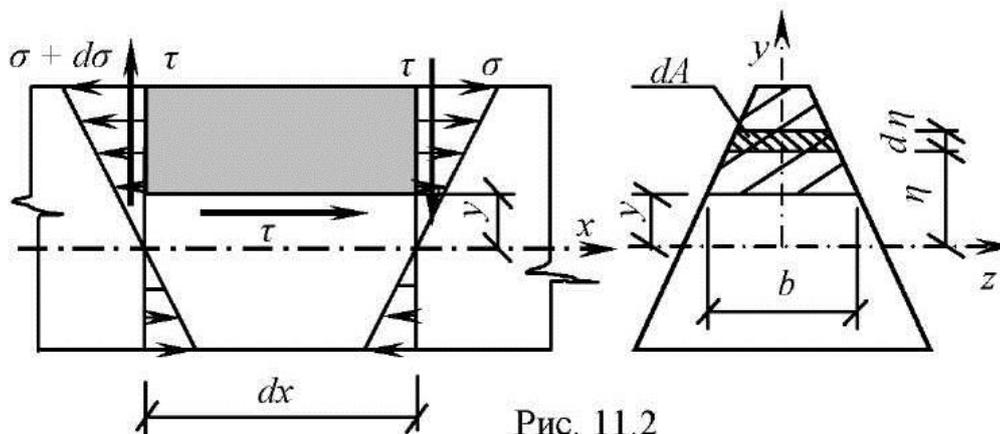


Рис. 11.2

Тремя сечениями выделим элемент балки (рис. 11.2) и составим уравнения равновесия:

$$\sum x = \int_A \sigma dA - \int_A (\sigma + d\sigma) dA + \tau b dx = 0,$$

$$\tau = \frac{1}{b dx} \left[\int_A (\sigma + d\sigma) dA - \int_A \sigma dA \right] = \frac{1}{b dx} \left(\int_A \frac{M_z + dM_z}{I_z} \eta - \int_A \frac{M_z}{I_z} \eta \right) dA =$$

$$= \frac{dM_z}{dx I_z b} \int_A \eta dA = \frac{Q_y S_z^{omc}}{b I_z}, \quad (11.7)$$

где S_z^{omc} – статический момент отсеченной площади поперечного сечения относительно оси z , проходящей через его центр тяжести.

Зависимость (11.7) впервые была установлена Д.И. Журавским и называется его именем.

Пример. Построим эпюру касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения (рис. 11.3). Для прямоугольного поперечного сечения имеем:

$$S_z^{omc} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

По формуле (11.7) определяем:

$$\tau = \frac{Q_y 12}{b \cdot bh^3} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (11.8)$$

Построим эпюру τ по трем точкам:

$$\tau(y=0) = \tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{2A};$$

$$\tau\left(y = \frac{h}{2}\right) = \tau\left(y = -\frac{h}{2}\right) = 0.$$

Эпюра τ показана на рис. 11.3. Она представляет собой параболу (см. формулу (11.8)). Наибольшее касательное напряжение для балки прямоугольного поперечного сечения имеет место на уровне нейтральной оси x ($y=0$), там где нормальное напряжение равно нулю (см. формулу (11.4)).

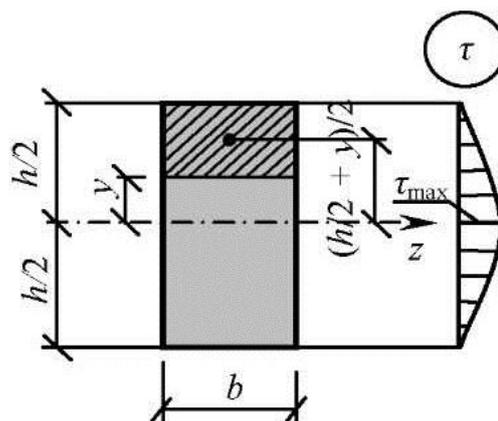


Рис. 11.3

Лекция 12

НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ БАЛКИ.

ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Сравнивая рис. 12.1 и рис. 3.1, делаем вывод, что необходимо положить $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$, $\sigma_y = 0$, тогда из формулы (3.2) получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha, \quad (12.1)$$

а из формулы (3.3) находим

$$\tau_\alpha = \sigma \frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau \cos 2\alpha, \quad (12.2)$$

Главные напряжения получаем из формулы (3.6):

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (12.3)$$

а формула (3.5) дает: $\operatorname{tg} 2\alpha_o = \frac{2\tau}{\sigma}. \quad (12.4)$

Максимальные касательные напряжения находим из выражения (3.8):

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (12.5)$$

Пример 1. Построить эпюры главных напряжений и τ_{\max} , τ_{\min} для прямоугольного поперечного сечения (рис. 12.2).

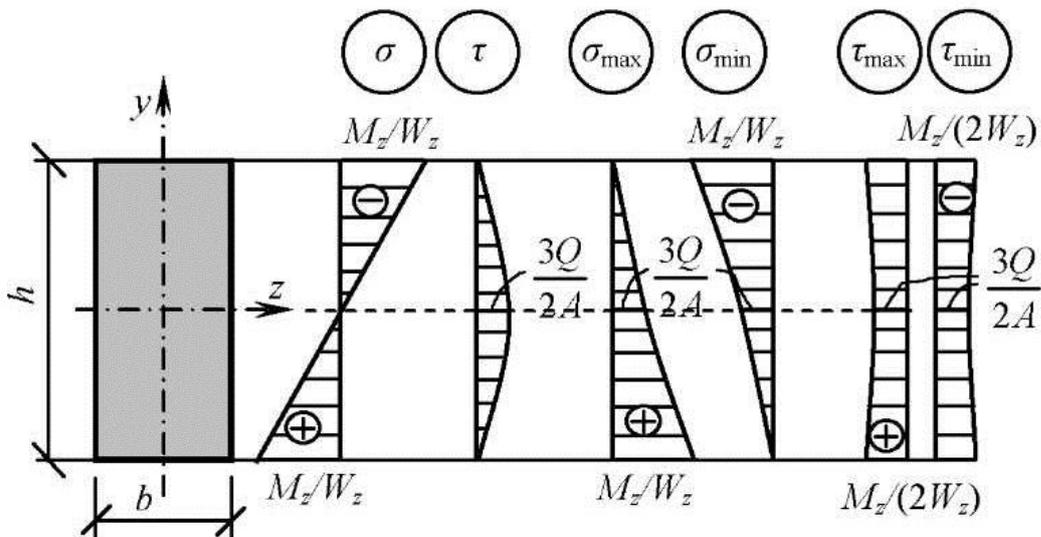


Рис. 12.2

КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

ТОШКОСТЕННОГО БРУСА. ЦЕНТР ИЗГИБА

Теория определения касательных напряжений, изложенная на лекции 11, справедлива лишь для сплошных сечений. В тонкостенных стержнях, даже при совпадении силовой плоскости с одной из главных осей сечения, может наблюдаться явление закручивания. Рассмотрим балку открытого профиля (рис. 12.3).

В вертикальной стенке касательные напряжения τ_y определяются по формуле Журавского (11.7):

$$\tau_y = \frac{QS_z^{омс}}{bI_z}.$$

Равнодействующая касательных напряжений τ_y в стенке дает силу, равную Q (рис. 12.3, б).

Примем, что касательные напряжения τ_x в горизонтальных полках распределены по толщине стенки равномерно. Рассмотрим равновесие элемента полки, изображенного на рис. 12.3, в:

$$\sum x = - \int_{h/2}^{h/2} (\sigma + d\sigma)ady + \int_{h/2}^{h/2} \sigma ady + \tau_x dxt = 0, \text{ откуда}$$

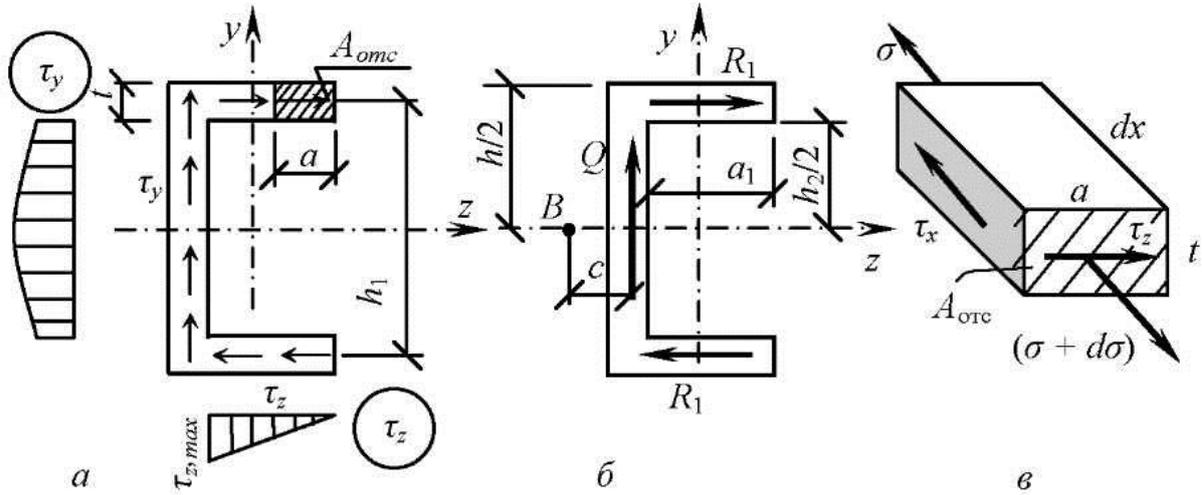


Рис. 12.3

$$\begin{aligned} \tau_x &= \frac{1}{tdx} \int_{-h_2/2}^{h/2} d\sigma a dy = \frac{1}{tI_z} \frac{dM_z}{dx} \int_{-h_2/2}^{h/2} y a dy = \frac{Q}{tI_z} a \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_2^2}{4} \right) = \\ &= \frac{Qa}{tI_z} \frac{(h+h_2)(h-h_2)}{4} = \frac{Qa}{tI_z} \frac{h_1}{2} \frac{2t}{2} = \frac{QS_{(z)}^{omc}}{tI_z} = \tau_z. \end{aligned}$$

Таким образом, формула для вычисления касательного напряжения τ_z

$$\tau_z = \frac{QS_{(z)}^{omc}}{tI_z} \quad (12.6)$$

по структуре похожа на формулу (11.7) для вычисления τ_y .

Наибольшее касательное напряжение τ_z будет в месте соединения полки со стенкой, там где $S_{(z)}^{omc} = a_1 t h_1 / 2$, то есть

$$\tau_{z,max} = \frac{Q a_1 t h_1}{2 t I_z} = \frac{Q a_1 h_1}{2 I_z}.$$

Равнодействующая касательных напряжений τ_z вычисляется следующим образом:

$$R_1 = \frac{1}{2} \tau_{z,max} a_1 t = \frac{1}{2} \frac{Q a_1 h_1}{2 I_z} a_1 t = \frac{Q a_1^2 h_1 t}{4 I_z}.$$

Существует такая точка B сечения, относительно которой момент равнодействующих касательных напряжений равен нулю. Эта точка называется *центром изгиба*. Положение этой точки находим из уравнения:

$$\sum M_B = R_1 h_1 - Q \cdot c = 0, \text{ а } c = R_1 h_1 / Q, \text{ или окончательно}$$

$$c = \frac{Q a_1^2 h_1 t}{4 I_z} \cdot \frac{h_1}{Q} = \frac{a_1^2 h_1^2 t}{4 I_z}. \quad (12.7)$$

Чтобы при изгибе не возникало кручения, необходимо внешнюю силу прикладывать в центре изгиба. Если сечение имеет две оси симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

Лекция 13

РАСЧЕТ НА СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Расчет балок на прочность обычно ведется по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях, то есть необходимо рассматривать сечение, где $M_z = M$ имеет наибольшее значение.

При расчете на прочность элементов конструкций, работающих на изгиб, возможны три следующих вида задач:

1. Проверка напряжений (проверочный расчет).
2. Подбор сечения.
3. Определение допустимой нагрузки.

Рассмотрим основные случаи расчетов на прочность при изгибе на примерах.

Пример 1. Подобрать сечение стальной балки из двутавра (рис. 13.1).

Из СНИПа принимаем $R_y = \sigma_{adm} \cdot \gamma_c = 240$ МПа, где γ_c — коэффициент условий работы, принимаемый по таблице; R_y — расчетные сопротивления проката для стальных конструкций.

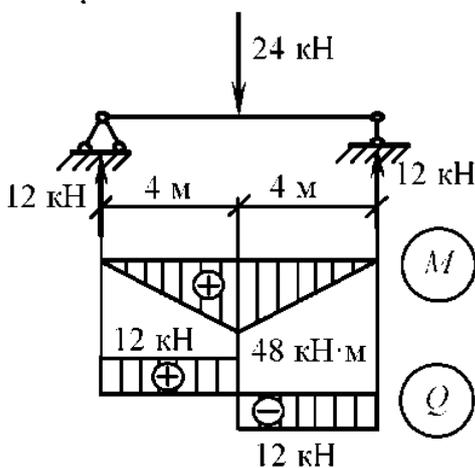


Рис. 13.1

Расчет на прочность стальных элементов, изгибаемых в одной из главных плоскостей, следует выполнять по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z,\max}}{W_{zn,\min}} \leq R_y = \sigma_{adm} \gamma_c. \quad (13.1)$$

где $W_{zn,\min}$ – момент сопротивления нетто относительно оси z , определяемый по одной из формул

$$W_z^t = \frac{I_z}{y_{\max}^t}, \quad W_z^c = \frac{I_z}{y_{\max}^c}, \quad (13.2)$$

Для двутавра $W_z^c = W_z^t = W_z$. Пусть в нашем случае $\gamma_c = 1$. По эпюре изгибающих моментов принимаем $M_{z,\max} = 48$ кНм (рис. 13.1). Из формулы (13.1) находим:

$$W_{zn,\min} = \frac{M_{z,\max}}{\sigma_{adm} \gamma_c} = \frac{48 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6 \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 200 \text{ см}^3.$$

По сортаменту стальных прокатных профилей «Двутавры стальные» находим соответствующий номер двутаврового профиля: 2 № 16 с моментом сопротивления одного двутавра $W_z = 109 \text{ см}^3$ или для двух двутавров $W_{zn} = 109 \cdot 2 = 218 \text{ см}^3$.

Прочность назначенного сечения будет:

$$\sigma_{\max} = \frac{48 \cdot 10^{-3}}{219 \cdot 10^{-6}} = 220 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm} = 240 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение составляет: $\frac{240 - 220}{240} 100\% = 8\%$.

Сечение считается подобранным удовлетворительно, если недонапряжение составляет до 5-7%.

Проверяем выбранное сечение по максимальному касательному напряжению. Имеем $Q_{\max} = 12$ кН, статический момент половины сечения одного двутавра № 16 берем из сортамента стальных прокатных профилей «Двутавры стальные» $S_z = 62,3 \text{ см}^3$, толщина стенки двутавра $b = 5$ мм, осевой момент инерции $I_z = 873 \text{ см}^4$. В этом случае по формуле (11.7) определяем:

$$\tau_{\max} = \frac{(12/2) \cdot 10^{-3} \cdot 62,3 \cdot 10^{-6}}{0,005 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 8,6 \text{ МПа} \leq \tau_{adm}.$$

Пример 2. Подобрать прямоугольное поперечное сечение однопролетной шарнирно опертой балки, нагруженной распределенной по всей длине балки нагрузкой $q = 16$ кН/м, причем $\gamma_c = 1$, $R_y = \sigma_{adm} \gamma_c = 240$ МПа, длина балки $l = 4$ м. Из формулы (13.1) находим

$$W_z = \frac{M_{z,\max}}{\sigma_{adm} \gamma_c} = \frac{ql^2}{8\sigma_{adm}} = \frac{16000 \cdot 4^2}{8 \cdot 240 \cdot 10^6} = 0,133 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = \frac{bh^2}{6}.$$

Положим, что задано отношение высоты балки h к ее ширине b : $h = 3b$. В этом случае, согласно последней формулы

$$0,133 \cdot 10^{-3} = \frac{h(3h)^2}{6} = 1,5b^3, \quad \text{откуда находим } b = \sqrt[3]{\frac{0,133 \cdot 10^{-3}}{1,5}} = 0,045 \text{ м}.$$

Окончательно принимаем $b = 4,5$ см; $h = 3b = 13,5$ см.

Пример 3. Запроектируем балку, во всех поперечных сечениях которой нормальные напряжения, возникающие от заданной нагрузки, будут одинаковыми. Такая балка называется *балкой равного сопротивления при изгибе*.

Рассмотрим балку прямоугольного сечения, заделанную одним концом и нагруженную на другом конце силой F . Наибольший изгибающий момент возникает на опоре $M_{\max} = Fl$, а в других сечениях будет $M_x = -Fx$, где x – расстояние от свободного конца балки до рассматриваемого сечения. Установим размеры поперечных сечений балки при условии, что $b = \text{const}$. Тогда

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{F \cdot x}{\sigma_{adm}}, \quad h = \sqrt{\frac{6xF}{b\sigma_{adm}}},$$

то есть высота поперечного сечения h балки изменяется вдоль балки по закону параболы.

Если принять, что балка имеет постоянную высоту $h = \text{const}$, то

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{F \cdot x}{\sigma_{adm}}, \quad b = \frac{6xF}{h^2\sigma_{adm}}.$$

Следовательно, ширина поперечного сечения балки прямо пропорционально абсциссе x этого сечения.

ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

При упругом изгибе за опасное принималось такое состояние, когда нормальные напряжения в крайних точках сечения балки достигали предела текучести σ_y (рис. 13.2, а). Однако такое состояние не является предельным. Возможен дальнейший рост нагрузки вследствие распространения текучести на внутренние волокна балки (рис. 13.2, б). В опасном сечении образуется так называемый *пластический шарнир*. В этом сечении изгибающий момент достигает предельного значения M_u :

$$M_u = \int_A \sigma_y dA \cdot y = \sigma_y \int_A y dA = \sigma_y (S_1 + S_2),$$

где S_1, S_2 – статические моменты верхней и нижней частей площади сечения относительно нейтральной оси.

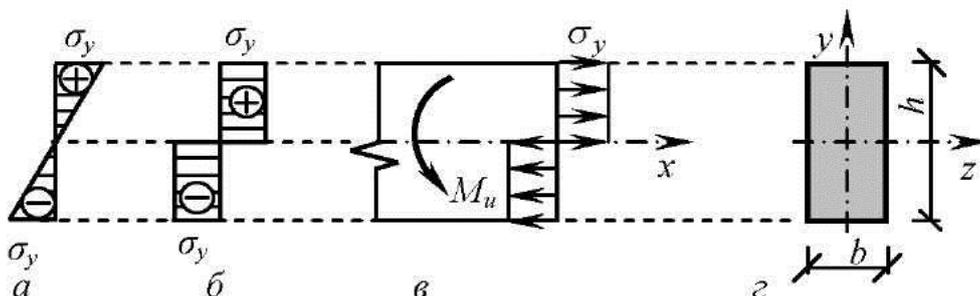


Рис. 13.2

Для прямоугольного поперечного сечения имеем (рис. 13.2, з):

$$M_u = \int_A \sigma_y dA \cdot y = \sigma_y b \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_y \frac{bh^2}{4} = \sigma_y W_{z,pl}, \quad (13.3)$$

где
$$W_{z,pl} = \frac{bh^2}{4} \quad (13.4)$$

пластический момент сопротивления при изгибе.

Составим соотношение:
$$\frac{M_u}{M} = \frac{W_{z,pl}}{W_z} = \frac{bh^2}{4} \cdot \frac{6}{bh^2} = 1,5.$$

то есть предельный момент при учете пластических деформаций увеличивается в 1,5 раза, если поперечное сечение балки – прямоугольное (рис. 13.2, з).

Рассмотрим случай чистого плоского изгиба и составим уравнение равновесия (рис. 13.2, в):

$$\sum x = \sigma_y A_1 - \sigma_y A_2 = 0, \text{ то есть } A_1 = A_2,$$

где A_1, A_2 – площади растянутой и сжатой частей сечения, следовательно, при пластическом изгибе нейтральная ось делит сечение на две равновеликие части.

Пример 4. Определить допускаемую нагрузку F_{adm} для консольной балки (рис 13.3) прямоугольного поперечного сечения, $b = 5$ см; $h = 10$ см (рис. 13.2). Балка изготовлена из стали с $\sigma_y = 2400$ кг/см², коэффициент запаса прочности при расчете по пределу текучести $n_y = 2$.

Решение: Расчет начинаем с определения пластического момента сопротивления:

$$W_{z,pl} = \frac{bh^2}{4} = \frac{5 \cdot 10^2}{4} = 125 \text{ см}^3,$$

затем определяем $M_u = \sigma_y W_{z,pl} = 2400 \cdot 125 = 3 \cdot 10^5$ кг·см. Но с другой стороны $M_u = F_{pl} l = F_{pl} 200$, тогда $200 F_{pl} = 300000$, откуда $F_{pl} = 1500$ кг.

И, наконец, $F_{adm} = F_{pl} / n_y = 1500 / 2 = 750$ кг.

В примере использован метод расчета конструкций по расчетным предельным состояниям.

Определим нормальное напряжение в наиболее опасном сечении:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{F_{adm} l \cdot 6}{bh^2} = \frac{750 \cdot 200 \cdot 6}{5 \cdot 10^2} = 1800 \text{ кг/см}^2.$$

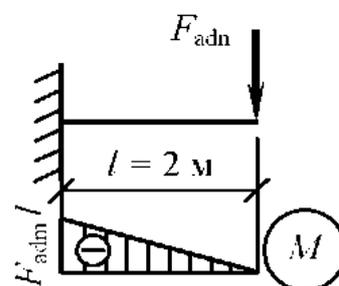


Рис. 13.3

Лекция 14

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

Подобно тому как это было сделано для сосредоточенной внешней силы (лекция 4), можно показать, что работа внешнего момента может быть вычислена по формуле: $W = M \cdot a/2$, где a – угол поворота сечения в точке приложения момента. Тогда элементарная работа изгибающего момента M_z может быть найдена по формуле (рис. 11.1):

$$dW = -M_z d\alpha / 2, \text{ но при изгибе имеем: } d\alpha = \frac{ds}{\rho} = \frac{dx}{\rho}, \text{ где } \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (14.1)$$

и тогда
$$dW = -M_z \frac{dx M_z}{2EI_z} = -\frac{M_z^2 dx}{2EI_z}; U = -W = \int \frac{M_z^2 dx}{2EI_z},$$

где U – потенциальная энергия изгиба, EI_z – жесткость балки при изгибе.

В общем случае изгиба в поперечных сечениях балки кроме изгибающих моментов возникают еще и поперечные силы. Потенциальная энергия сдвига, определяемая по формуле (5.4) и соответствующая работе поперечной силы, как показывают исследования, невелика и ею обычно пренебрегают.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ОСИ ПРЯМОГО БРУСА И ЕГО ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Под действием внешних сил ось балки искривляется. Изогнутая ось балки называется *упругой линией балки*, а перемещения точек оси балки по нормали к ее недеформированной оси называются *прогибами* (рис. 14.1).

Будем искать прогибы балки y в виде

$$y = y(x). \quad (14.2)$$

Нам уже известна формула (14.1), но из курса высшей математики также известно, что кривизна кривой (14.2) вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\rho} = k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \approx y''. \quad (14.3)$$

Первая производная y' , входящая в знаменатель формулы (14.3), представляет собой тангенс угла φ между осью x и касательной к упругой линии балки. Практически углы φ очень малы и их квадратами, по сравнению с единицей, можно пренебречь.

Приравниваем соответствующие части уравнений (14.1) и (14.3):

$$y'' = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (14.4)$$

Полученное уравнение называется *основным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки*. Оно – приближенное, так как при его

выводе точное выражение кривизны оси заменено приближенным и не учтены деформации балки, связанные с наличием поперечных сил. В подавляющем большинстве случаев это влияние несущественно и им можно пренебречь.

Проинтегрируем выражение (14.4):

$$\frac{dy}{dx} = \varphi = \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C, \quad (14.5)$$

а затем и выражение (14.5):

$$y = \int \left(\int \frac{M_z}{EI_z} dx \right) dx + Cz + D, \quad (14.6)$$

где C, D – произвольные постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий.

Порядок вычисления линейных и угловых перемещений поперечных сечений балки рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1. Определим прогибы y и углы поворота φ балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 14.1). Для рассматриваемого случая однопролетной балки уравнение (14.4) примет вид:

$$y'' = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right).$$

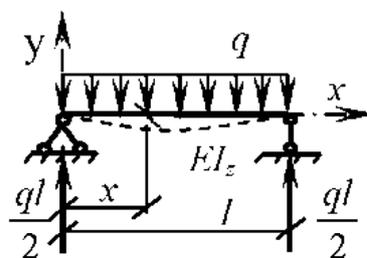


Рис. 14.1

Проинтегрируем это уравнение дважды, имея в виду, что $EI_z = \text{const}$:

$$y' = \varphi = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{ql}{4} x^2 - \frac{q}{6} x^3 \right) + C, \quad y = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{ql}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 \right) + Cx + D.$$

Для определения постоянных интегрирования C и D запишем граничные условия:

при $x = 0$ имеем $y = 0$ и получаем $D = 0$.

при $x = l$ имеем $y = 0$, то есть $0 = \left(\frac{ql^4}{12} - \frac{q}{24} l^4 \right) + Cl$, и $C = -\frac{ql^3}{24EI_z}$.

Поставленные граничные условия означают, что на концах балки перемещения равны нулю (рис. 14.1). Полученные значения C и D подставим в выражения для y и φ :

$$y = \frac{qlx^3}{12EI_z} \left(l - \frac{x}{2} \right) - \frac{ql^3x}{24EI_z}, \quad \varphi = \frac{qx^2}{2EI_z} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{3} \right) - \frac{ql^3}{24EI_z}. \quad (14.7)$$

По этим уравнениям можно определить прогиб и угол поворота в любом сечении балки. Рассмотрим, например, середину балки, то есть примем $x = l/2$, тогда формулы (14.7) дадут

$$\varphi(x = \frac{l}{2}) = 0, \quad y = -\frac{5ql^4}{384EI_z}. \quad (14.8)$$

Практическое значение имеет наибольший прогиб. Для определения абсциссы x сечения, где возникает максимальный прогиб, следует приравнять нулю первую производную $y' = \varphi = 0$. Полученное значение абсциссы затем необходимо подставить в формулу (14.6) и найти y_{\max} .

В рассматриваемом примере $\varphi = 0$ при $x = l/2$ и, следовательно, полученное значение y в виде (14.8) есть y_{\max} .

Пример 2. Определить прогибы и углы поворота балки на двух опорах, нагруженной посередине сосредоточенной силой F (рис. 14.2). Балка имеет постоянную жесткость на изгиб EI_z .

В этом случае уравнение упругой линии балки будем записывать для двух участков отдельно.

Рассмотрим сначала первый участок ($0 \leq x \leq l/2$):

$$y_1'' = \frac{1}{EI_z} \frac{F}{2} x, \quad y_1' = \frac{1}{EI_z} \frac{F}{4} x^2 + C, \quad y = \frac{F}{12EI_z} x^3 + Cx + D, \quad (14.9)$$

а затем второй участок ($l/2 \leq x \leq l$):

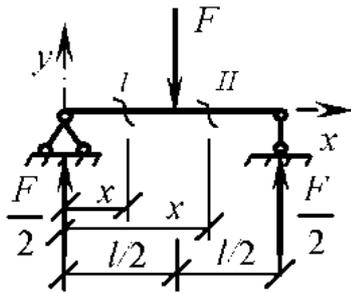


Рис. 14.2

$$y_2'' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{F}{2} x - F \left(x - \frac{l}{2} \right) \right],$$

$$y_2' = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{F}{4} x^2 - F \frac{(x - l/2)^2}{2} \right] + C,$$

$$y_2 = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{F}{12} x^3 - \frac{F(x - l/2)^3}{6} \right] + Cx + D. \quad (14.10)$$

Поставим граничные условия. Левый конец балки ($x = 0$) принадлежит первому участку, поэтому граничное условие ставим для первого участка:

$$y_1(x = 0) = D = 0, \quad \text{откуда } D = 0.$$

Правый же конец балки относится ко второму участку, поэтому для второго участка граничное условие примет вид:

$$y_2(x = l) = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{F}{12} l^3 - \frac{F}{6} \frac{l^3}{8} \right) + Cl = 0. \quad \text{откуда находим } C = -\frac{Fl^2}{16EI_z}.$$

Подставляя полученные значения C и D в выражения (14.9) и (14.10), запишем окончательно

$$y_1' = \varphi_1 = \frac{F}{4EI_z} \left(x^2 - \frac{l^2}{4} \right), \quad y_1 = \frac{Fx}{4EI_z} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{l^2}{4} \right),$$

$$y_2' = \varphi_2 = \frac{F}{2EI_c} \left[-\frac{x^2}{2} + xl - \frac{3}{8}l^2 \right], \quad y_2 = \frac{F}{4EI_c} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2(x-l/2)^3}{3} - \frac{l^2}{4}x \right].$$

Лекция 15

ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ ПРЯМОГО БРУСА

Если число участков балки по характеру изменения моментов равно n , то число произвольных постоянных по участкам будет равно $2n$ ($C_1, C_2, \dots, C_n, D_1, D_2, \dots, D_n$).

Сформулируем правила, при выполнении которых число произвольных постоянных независимо от числа участков будет равно двум. Этих правил три:

1. Каждая нагрузка должна давать непрерывную функцию изгибающего момента до конца балки. Если этого нет, то нагрузку надо преобразовывать путем добавления уравновешенных нагрузок.
2. В выражении изгибающего момента сосредоточенный момент надо писать с множителем $(x - a)^0 = 1$, где a – абсцисса точки приложения момента (рис. 15.1).
3. Интегрирование биномов производить со сложным дифференциалом, не открывая скобок.

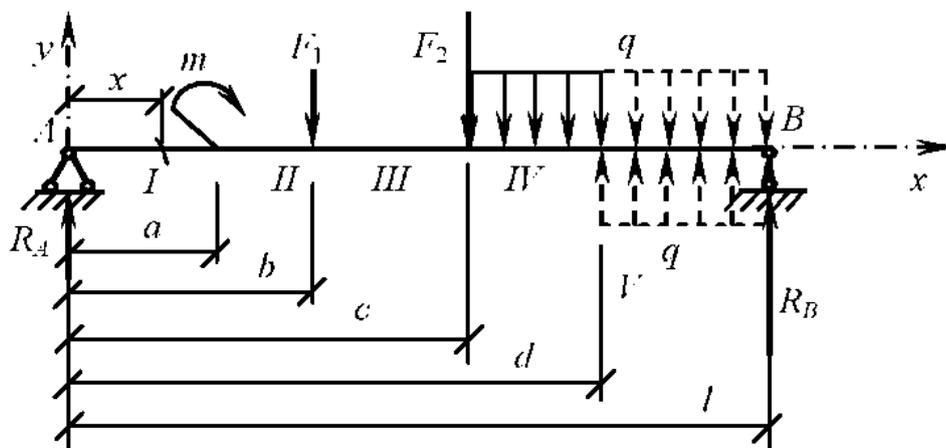


Рис. 15.1

Рассмотрим пример. В однопролетной балке выделяем 5 участков, причем распределенную нагрузку продолжаем до конца балки и одновременно на участке V прикладываем равномерно распределенную нагрузку, равную по величине, но противоположно направленную заданной.

Запишем уравнения для каждого участка (рис. 15.1):

$$EI_c y_1'' = M_1 = R_A x, \quad (0 \leq x \leq a);$$

$$EI_c y_2'' = M_2 = R_A x + m(x-a)^0, \quad (a \leq x \leq b);$$

$$EI_z y_3'' = M_3 = R_A x + m(x-a)^0 - F_1(x-b), \quad (b \leq x \leq c);$$

$$EI_z y_4'' = M_4 = R_A x + m(x-a)^0 - F_1(x-b) - F_2(x-c) - q(x-c)^2 / 2, \quad (c \leq x \leq d);$$

$$EI_z y_5'' = M_5 = R_A x + m(x-a)^0 - F_1(x-b) - F_2(x-c) - q(x-c)^2 / 2 + q(x-d)^2 / 2, \quad (d \leq x \leq l).$$

Интегрируя полученные уравнения со сложным дифференциалом, получим

$$EI_z y_1' = R_A x^2 / 2 + C;$$

$$EI_z y_2' = R_A x^2 / 2 + m(x-a) + C;$$

$$EI_z y_3' = R_A x^2 / 2 + m(x-a) - F_1(x-b)^2 / 2 + C;$$

$$EI_z y_4' = R_A x^2 / 2 + m(x-a) - F_1(x-b)^2 / 2 - F_2(x-c)^2 / 2 - q(x-c)^3 / 6 + C;$$

$$EI_z y_5' = R_A x^2 / 2 + m(x-a) - F_1(x-b)^2 / 2 - F_2(x-c)^2 / 2 - q(x-c)^3 / 6 + q(x-d)^3 / 6 + C.$$

Интегрируя последние пять уравнений, получим формулы для вычисления прогибов балки на каждом из 5 участков:

$$EI_z y_1 = R_A x^3 / 6 + Cx + D;$$

$$EI_z y_2 = R_A x^3 / 6 + m(x-a)^2 / 2 + Cx + D;$$

$$EI_z y_3 = R_A x^3 / 6 + m(x-a)^2 / 2 - F_1(x-b)^3 / 6 + Cx + D;$$

$$EI_z y_4 = R_A x^3 / 6 + m(x-a)^2 / 2 - F_1(x-b)^3 / 6 - F_2(x-c)^3 / 6 - q(x-c)^4 / 24 + Cx + D;$$

$$EI_z y_5 = R_A x^3 / 6 + m(x-a)^2 / 2 - F_1(x-b)^3 / 6 - F_2(x-c)^3 / 6 - q(x-c)^4 / 24 + q(x-d)^4 / 24 + Cx + D.$$

В итоге получили уравнения для каждого участка балки, которые содержат только две произвольные функции интегрирования C и D . Эти постоянные определяются из граничных условий. Например, в рассматриваемом примере граничные условия имеют вид (рис. 15.1):

при $x = 0$ должно быть $y_1 = 0$, откуда $D = 0$;

при $x = l$ должно быть $y_5 = 0$, откуда можно найти постоянную C .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим прямой брус AB , который после приложения внешней нагрузки искривился и занял положение кривой $A'B'$ (рис. 15.2).

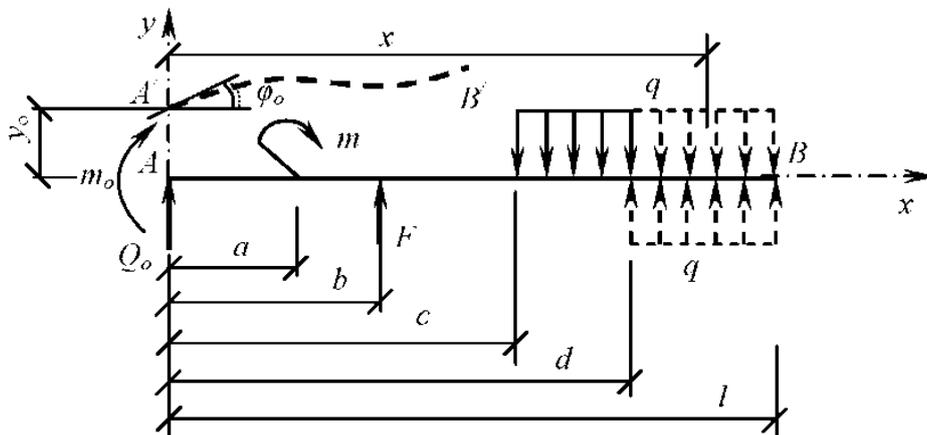


Рис. 15.2

Запишем выражения, характеризующие упругую линию прямого бруса для сечения x :

$$EI_z y'' = m_o + Q_o x + m(x-a)^0 + F(x-b) - q(x-c)^2/2 + q(x-d)^2/2,$$

$$EI_z y' = EI_z \varphi_o + m_o x + Q_o x^2/2 + m(x-a) + F(x-b)^2/2 - q(x-c)^3/6 + q(x-d)^3/6,$$

$$EI_z y = EI_z y_o + EI_z \varphi_o x + m_o x^2/2 + Q_o x^3/6 + m(x-a)^2/2 + F(x-b)^3/6 - q(x-c)^4/24 + q(x-d)^4/24, \quad (15.1)$$

где величины y_o, φ_o показаны на рис. 15.2. Величины y_o, φ_o, m_o, Q_o называются начальными параметрами, а уравнения (15.1) – уравнениями упругой линии в начальных параметрах.

Если известны все начальные параметры, то уравнения (15.1) можно записать сразу.

Пример. Пусть дана консольная балка с постоянной жесткостью EI (рис. 15.3). Для нее можно сразу записать:

$$EI y = m_o \frac{x^2}{2} + Q_o \frac{x^3}{6} = -\frac{Fl}{2} x^2 + \frac{Fx^3}{6}.$$

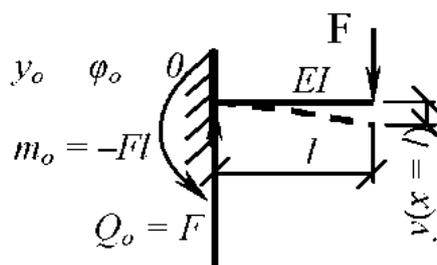


Рис. 15.3

Лекция 16

ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Вопрос о прочности гораздо проще решить экспериментальным путем, но это очень дорого и громоздко.

Составление условий прочности для одноосного напряженного состояния или для простейшего двухосного не вызывает затруднений. Для обеспечения прочности материала требуется, чтобы наибольшее нормальное или касательное напряжение не превосходило соответствующего допускаемого напряжения. Но есть и более сложные случаи напряженного состояния (рис. 4.1, рис. 4.2).

Считают, что элемент конструкции находится в опасном состоянии, если такое состояние имеется в какой-либо его точке. Эту точку называют *опасной точкой*.

Существуют различные взгляды на причины, вызывающие опасное состояние материала. Рассмотрим три теории прочности, которые называют классическими теориями прочности и энергетическую теорию. Теории прочности представляют собой гипотезы о критериях, определяющих условия перехода материала в опасное состояние.

Расчеты по различным теориям прочности часто дают противоречивые результаты, не соответствующие также и опытным данным.

Первая теория прочности (Галилей, XVII век)

Сформулирована она может быть следующим образом: предельное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает значения предельного напряжения.

Условия прочности по первой теории прочности имеют вид:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{adm}, \quad |\sigma_3| \leq \sigma_{adm} \quad \text{для пластичных материалов,}$$

$$\sigma_1 \leq \sigma_{adm}^t, \quad |\sigma_3| \leq \sigma_{adm}^c \quad \text{для хрупких материалов.}$$

В практических расчетах первая теория прочности в настоящее время почти не применяется. Первая теория прочности даст совпадение экспериментальных и теоретических данных для случая растяжения хрупких материалов, когда σ_1 по абсолютной величине значительно больше других. Но эта теория не может объяснить, почему материал сопротивляется огромным давлениям при всестороннем сжатии.

Вторая теория прочности (Мариотт, 1692 г.)

Вторая теория прочности представляет собой гипотезу, согласно которой опасное состояние материала наступает в результате того, что наибольшее относительное удлинение достигает опасного значения.

Для пластичного материала условие прочности по второй теории прочности имеет вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \varepsilon_{adm} = \frac{\sigma_{adm}}{E},$$

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{adm}. \quad (16.1)$$

Для хрупкого материала условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{adm}^t. \quad (16.2)$$

Эта теория находится в противоречии с экспериментальными данными для пластических материалов. В настоящее время в практических расчетах практически не применяется.

Третья теория прочности (Кулон, 1773 г.)

Третья теория прочности утверждает, что касательные напряжения – фактор, вызывающий разрушение материала.

Условие прочности по этой теории имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{2},$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\max}. \quad (16.3)$$

Третья теория прочности объясняет, почему в случае всестороннего равномерного сжатия материал может, не разрушаясь, выдерживать большие напряжения. Однако она не объясняет разрушение материала при всестороннем равномерном растяжении. Недостатком третьей теории является

ся также то, что она не учитывает главное напряжение σ_2 . Расхождение результатов теоретических расчетов и опытных данных достигает 10-15%.

Во многих практических случаях третья теория прочности дает удовлетворительное совпадение результатов теоретического расчета с опытными данными для пластических материалов. Она широко используется при расчетах конструкций из пластических материалов.

Для хрупких материалов эта теория не применима.

Четвертая (энергетическая) теория прочности (Бельтрами 1885 г.)

Энергетическая теория прочности утверждает, что причиной возникновения опасного состояния является величина удельной потенциальной энергии изменения формы.

Запишем значение удельной потенциальной энергии деформации:

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2dl_1dl_2dl_3} (\sigma_1 dl_2 dl_3 \varepsilon_1 dl_1 + \sigma_2 dl_1 dl_3 \varepsilon_2 dl_2 + \sigma_3 dl_1 dl_2 \varepsilon_3 dl_3) = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_2 \sigma_2 + \varepsilon_3 \sigma_3). \quad (16.4)$$

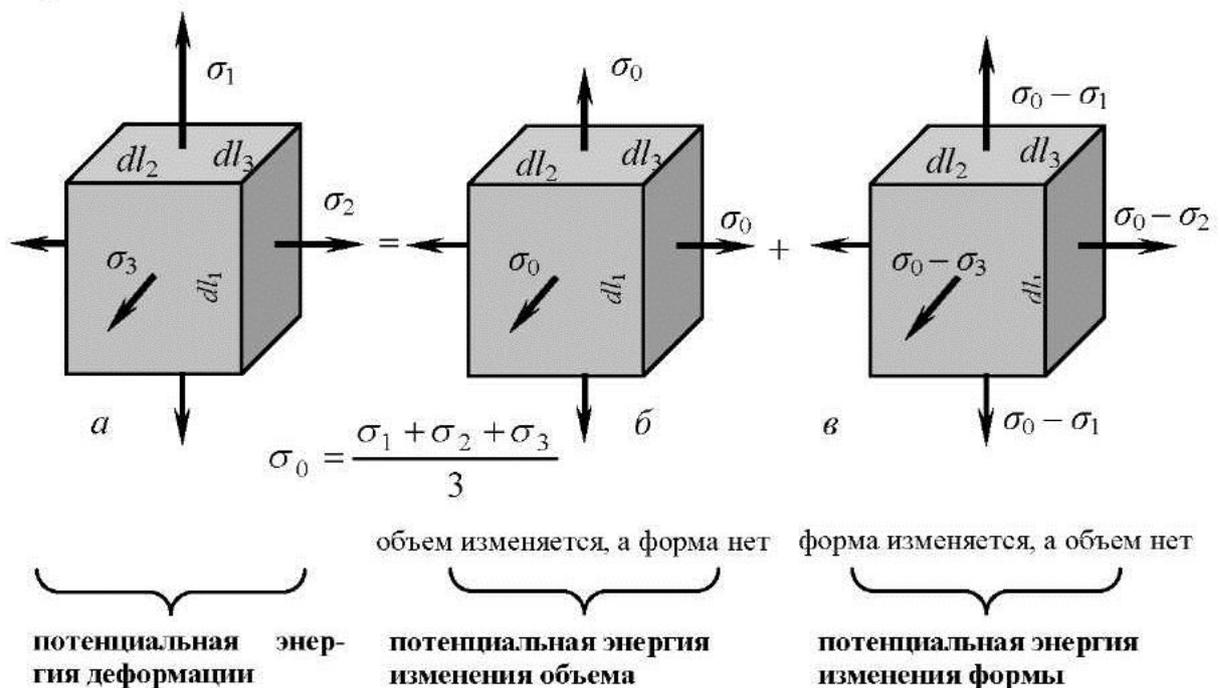


Рис. 16.1

Подставим формулы для вычисления ε_1 , ε_2 , ε_3 (см. лекцию 4) в выражение (16.4):

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \right]. \quad (16.5)$$

Напряженное состояние бесконечно малого элемента конструкции (рис. 16.1, а) можно расчленить на два состояния (рис. 16, б, в).

Следуя изложенной выше методике можно определить, что удельная потенциальная энергия изменения формы u_ϕ будет:

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 \right) \quad (16.6)$$

Условие прочности по четвертой теории прочности имеет вид:

$$u_\phi \leq u_{\phi,adm} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{adm}^2. \quad (16.7)$$

Рассматривая совместно два выражения (16.6) и (16.7), окончательно получаем:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq \sigma_{adm}. \quad (16.8)$$

Достоинством энергетической теории является то, что она учитывает все три главных напряжения, но не может объяснить причины разрушения материала при всестороннем равномерном растяжении.

Эта теория широко используется при расчете конструкций из пластичных материалов. Для хрупких материалов она непригодна.

Теория прочности Мора

Главное напряжение σ_2 влияет незначительно на прочность материалов, в пределах 15%. Поэтому можно считать, что прочность материала определяется лишь напряжениями σ_1 и σ_3 . Таким образом, расчет прочности в общем случае трехосного напряженного состояния сводится к расчету прочности при двухосном напряженном состоянии.

Для анализа прочности материала в этом случае удобно пользоваться кругами Мора (рис. 16.2).

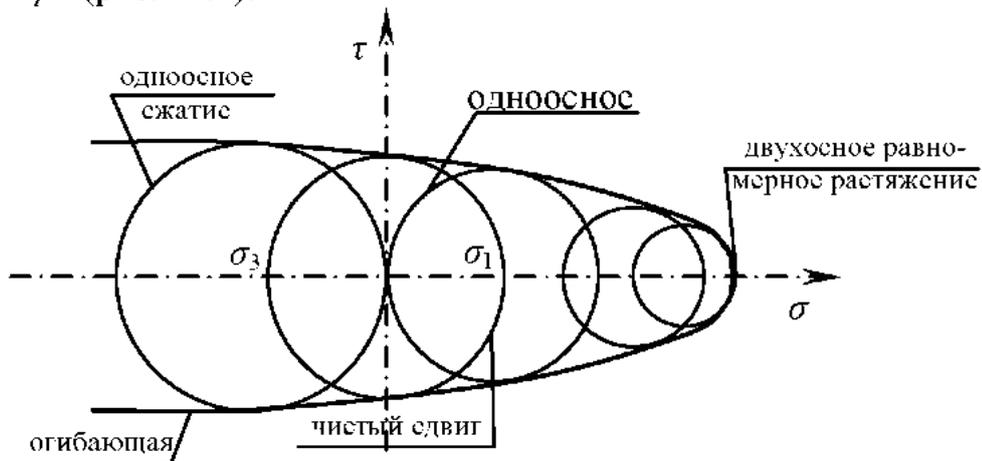
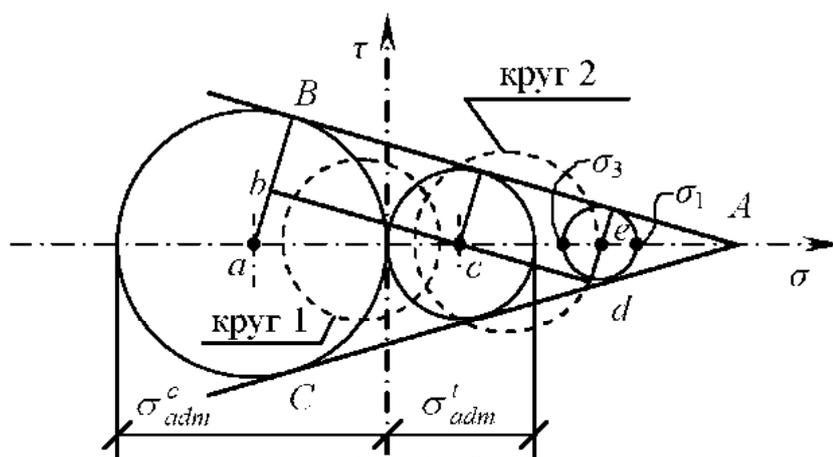


Рис. 16.2

Получение достаточного количества опытных данных для точного построения огибающей затруднительно. Поэтому практически огибающую, соответствующую допускаемым напряжениям, заменяют прямыми AB и AC , которые являются касательными к кругам Мора (рис. 16.3).

Условие прочности проверяется следующим образом. По значениям σ_1 и σ_3 строят круг (рис. 16.3). Если этот круг (круг 1) будет расположен между прямыми AB и AC , то считается, что материал в окрестности рассматриваемой точки имеет избыточную прочность, а если круг будет пересекать эти прямые (круг 2), то считается, что этот материал имеет недостаточную прочность.

Рассматривая подобие треугольников abc и ced , можно получить условие прочности в виде:



$$\sigma_1 - \frac{\sigma^t_{adm}}{\sigma^c_{adm}} \sigma_3 \leq \sigma^t_{adm}. \quad (16.9)$$

Условие (16.9) выражает *упрощенную теорию прочности Мора*. Теория прочности Мора широко используется при расчетах конструкций из хрупких материалов. Для пластичных материалов теория прочности Мора совпадает с третьей теорией прочности, так как в этом случае

$$\sigma^c_{adm} = \sigma^t_{adm} = \sigma_{adm}.$$

Лекция 17

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ПОЛОЖЕНИЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ (обзорная лекция)

Пример 1. Определить нормальное напряжение в бетоне и арматуре железобетонной колонны, квадратное поперечное сечение которой показана-

но на рис. 17.1, причем $h = 30$ см, модуль продольной упругости стали $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа, а бетона тяжелого класса В 30 – $E_b = 32,5 \cdot 10^3$ МПа.

В поперечном сечении колонны установлены четыре стержня диаметром 20 мм, следовательно, по справочнику принимаем, что общая их расчетная площадь поперечного сечения $A_a = 12,56$ см². Площадь поперечного сечения, занимаемого бетоном, определяется как

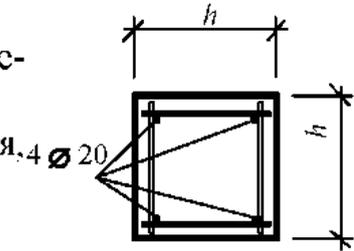


Рис. 17.1

$$A_b = h^2 - A_a = 30^2 - 12,56 = 887,44 \text{ см}^2.$$

Пусть в поперечном сечении колонны действует сжимающая сила N , тогда уравнение равновесия примет вид:

$$N_a + N_b + N = 0.$$

Для определения усилий в арматуре N_a и в бетоне N_b одного записанного выше уравнения равновесия недостаточно, так как задача один раз статически неопределима. Составим дополнительное уравнение возможных перемещений (уравнение совместности деформаций). Очевидно, что между арматурой и бетоном существует сцепление, так что абсолютное и относительное удлинения арматуры и бетона равны

$$\Delta l_a = \Delta l_b \text{ или } \frac{N_a l_a}{E A_a} = \frac{N_b l_b}{E_b A_b}.$$

Учитывая, что $l_a = l_b$, получаем равенство относительных удлинений:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b \text{ или } \frac{N_a}{E A_a} = \frac{N_b}{E_b A_b}, \text{ или, что то же самое } \frac{\sigma_a}{E} = \frac{\sigma_b}{E_b}, \text{ откуда находим}$$

$$\sigma_a = \sigma_b \frac{E}{E_b} = \sigma_b \frac{2,06 \cdot 10^5}{32,5 \cdot 10^3} = 6,34 \sigma_b.$$

Подставляя полученное соотношение в уравнение равновесия при учете, что $N_a = \sigma_a A_a$, $N_b = \sigma_b A_b$, и полагая, что внешняя сосредоточенная сжимающая сила $N = 600$ кН, имеем

$$N_a + N_b + 600 = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b + 600 = 6,34 \sigma_b A_a + \sigma_b A_b + 600 = \\ = \sigma_b (6,34 \cdot 12,56 + 887,44) \cdot 10^{-4} + 600 = 0, \text{ откуда находим}$$

$$\sigma_b = -6205 \text{ кПа} = -6,2 \text{ МПа}; \quad \sigma_a = -6,34 \sigma_b = -39,3 \text{ МПа}.$$

Напряжения имеют знак «минус», так как колонна работает на сжатие.

Пример 2. Определить расстояние a между элементами пакета, состоящего из трех досок размером 5×24 см, при условии равенства главных моментов инерции относительно осей x и y (рис. 17.2).

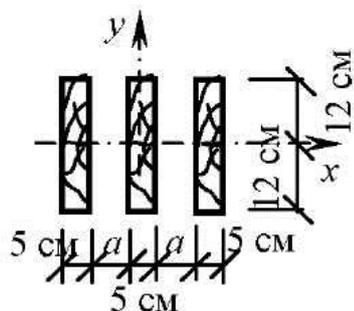


Рис. 17.2

Решение. Момент инерции всего сечения относительно оси x будет

$$I_x = 3 \frac{5 \cdot 24^3}{12} = 17280 \text{ см}^4.$$

При определении момента инерции сечения относительно оси y для двух крайних прямоугольников следует воспользоваться формулой (6.13), так как ось y не является для них центральной и, следовательно, для всего пакета из трех досок будем иметь

$$I_y = 3 \cdot 24 \cdot 5^3 / 12 + 2(5+a)^2 \cdot 5 \cdot 24 = 240a^2 + 2400a + 6750.$$

По условию задачи $I_x = I_y$, или $17280 = 240a^2 + 2400a + 6750$. Решив полученное квадратное уравнение, найдем $a = 3,3$ см.

Пример 3. Построить эпюру крутящих моментов для вала постоянно по длине поперечного сечения, жестко защемленного обоими торцами и нагруженного скручивающим сосредоточенным моментом M (рис. 17.3), расположенным на расстоянии a от левого закрепления.

Решение. Так как вал защемлен с двух торцов, то в обоих защемлениях возникнут реактивные опорные моменты M_A и M_B . Для их определения используем вначале уравнения статики. В данном случае можно составить только одно уравнение равновесия:

$$\sum_i M_x = 0,$$

или $M_A + M_B + M = 0. \quad (17.1)$

Уравнение содержит две неизвестные величины: M_A и M_B . Следовательно, данная задача является один раз статически неопределимой.

Рассматриваем картину деформации вала (рис. 17.3, б). Видно, что взаимный угол закручивания правого торца относительно левого равен нулю. Угол поворота правого торца относительно левого может быть представлен в виде суммы углов закручивания отдельных участков вала.

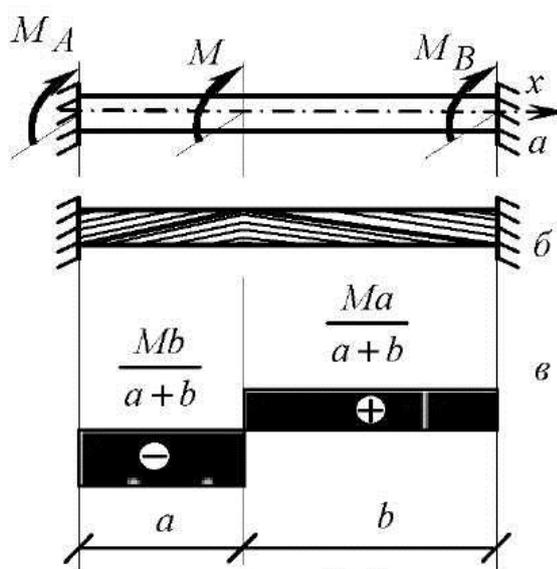


Рис. 17.3

Углы закручивания по участкам определяются следующим образом: для участка длиной a : $\varphi_a = T_a a / (GI_\rho)$, для участка длиной b : $\varphi_b = T_b b / (GI_\rho)$, где T_a и T_b – крутящие моменты на соответствующих участках вала. Суммарный угол закручивания по условию закрепления концов равен нулю:

$$\sum_i \varphi_i = \varphi_a + \varphi_b = \frac{T_a a}{GI_\rho} + \frac{T_b b}{GI_\rho} = 0. \quad (17.2)$$

Это и есть деформационное уравнение задачи. Преобразуем его. Применяя метод сечений, выразим крутящие моменты T_a и T_b :

$$T_a = M_A, \quad T_b = -M_B.$$

Подставив эти значения моментов в уравнение (17.2), и сократив полученное уравнение на постоянный множитель GI_ρ , получим

$$M_A a - M_B b = 0. \quad (17.3)$$

Решая совместно уравнения (17.1) и (17.3), найдем

$$M_A = -\frac{Mb}{a+b}; \quad M_B = -\frac{Ma}{a+b}.$$

Знак «-» указывает на то, что истинное направление реактивных моментов противоположно выбранному первоначально. Вычислив реактивные моменты, строим эпюру крутящих моментов по известным правилам (рис. 17.3, в).

Можно отметить следующую особенность эпюр крутящих моментов в статически неопределимых валах с $GI_\rho = \text{const}$: суммарная площадь эпюры крутящих моментов равна нулю, что по существу предопределено уравнением (17.3). Если вал ступенчатый, то нулю должна быть равна сумма площадей эпюры крутящих моментов, отнесенных к полярным моментам инерции сечений на соответствующих участках.

Пример 4. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, показанной на рис. 17.4.

Решение. Определим опорные реакции балки R_A и R_B . Учитываем, что равнодействующая треугольной распределенной нагрузки численно будет равна площади занимаемой этой нагрузкой на рисунке, т.е. $ql/2$. Точка приложения равнодействующей нагрузки будет на расстоянии $2l/3$ от левой опоры или, что то же самое, на расстоянии $l/3$ от правой опоры. В этом случае имеем:

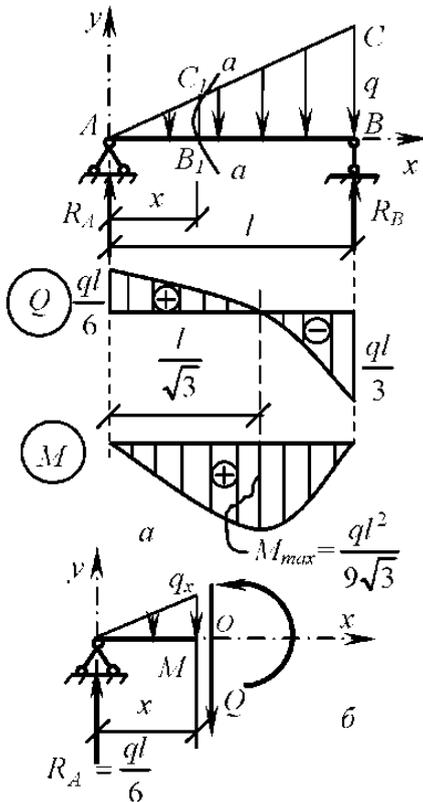


Рис. 17.4

$$\sum M_A = R_B l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{3} l = 0, \quad R_B = \frac{ql}{3};$$

$$\sum M_B = R_A l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{1}{3} l = 0, \quad R_A = \frac{ql}{6}.$$

Проверим полученные результаты, для чего спроектируем все силы на ось y

$$\sum Y = ql/6 + ql/3 - ql/2 = 0.$$

Следовательно, опорные реакции R_A и R_B определены правильно. Проведем сечение $a - a$ и мысленно отбросим правую часть балки, заменив действие отброшенной части положительной поперечной силой Q и изгибающим моментом M (рис. 17.4, б). Из подобия треугольников ΔABC и ΔAB_1C_1 получим $q_x/q = x/l$, откуда $q_x = qx/l$.

Составим уравнения равновесия для оставшейся части балки:

$$\sum Y = R_A - \frac{q_x x}{2} - Q = 0, \text{ тогда } Q = \frac{ql}{6} - \frac{q_x x}{2} = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l};$$

$$\sum M_o = R_A x - \frac{q_x x}{2} \cdot \frac{1}{3} x - M = 0, \text{ тогда } M = \frac{ql}{6} x - \frac{qx^3}{6l} = \frac{q}{6} \left(lx - \frac{x^3}{l} \right).$$

Определяем значение поперечной силы Q в начале и в конце балки: при $x = 0$ имеем $Q = ql/6$, а при $x = l$ получаем $Q = -ql/3$.

Найдем абсциссу поперечного сечения, в котором $Q = 0$, для чего приравняем к нулю выражение для определения поперечной силы:

$$Q = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l} = 0, \text{ откуда находим } x = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, максимальное значение изгибающего момента будет в поперечном сечении, для которого $x = l/\sqrt{3} \approx 0.577l$, т.е.

$$M_{\max}(x = l/\sqrt{3}) = \frac{q}{6} \left(lx - \frac{x^3}{l} \right) = \frac{q}{6} \left(\frac{l \cdot l}{\sqrt{3}} - \frac{l^3}{3\sqrt{3}l} \right) = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}}.$$

В начале ($x = 0$) и в конце ($x = l$) балки получаем, что $M = 0$. По полученным данным строим эпюры Q и M (рис. 17.4, а).

Пример 5. Определить прогиб балки, изображенной на рис. 17.5. Жесткость балки на изгиб – EI .

Решение. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = R_B l - m = 0, \text{ тогда } R_A = R_B = m/l.$$

Балка состоит из одного участка. Составляем уравнение упругой оси балки:

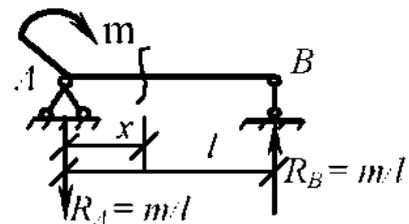


Рис. 17.5

$$y'' = \frac{1}{EI} \left(mx^0 - \frac{m}{l} x \right),$$

а затем его интегрируем:

$$\varphi = y' = \frac{1}{EI} \left(mx - \frac{m}{l} \frac{x^2}{2} \right) + C, \quad y = \frac{1}{EI} \left(m \frac{x^2}{2} - \frac{m}{2l} \frac{x^3}{3} \right) + Cx + D. \quad (17.4)$$

Для определения постоянных интегрирования C и D поставим граничные условия: при $x = 0$ имеем $y = 0$ и при $x = l$ также имеем $y = 0$, т.е. получаем $y(x = 0) = D = 0$, откуда $D = 0$, далее

$$y(x = l) = \frac{1}{EI} \left(\frac{ml^2}{2} - \frac{ml^2}{6} \right) + Cl = 0, \text{ откуда находим } C = -ml/(3EI).$$

Подставляя полученное значение C в формулы (17.4), окончательно запишем результаты:

$$\varphi = \frac{m}{EI} \left(x - \frac{x^2}{2l} - \frac{l}{3} \right), \quad y = \frac{m}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} - \frac{lx}{3} \right).$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Котлов В.А., Кривошапко С.И. Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: «Высшая школа», 2005. – 352 с.

2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: «Высшая школа». 1975. – Изд. 4-е. – 654 с.

3. Степин П.А. Сопротивление материалов. – М.: «Высшая школа», 1983. – 304 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Основные задачи сопротивления материалов. Гипотезы сопротивления материалов.

2. Внешние и внутренние силы. Понятие о напряжениях. Нормальные и касательные напряжения.

3. Абсолютные и относительные линейные и угловые (сдвиг) деформации

4. Центральное растяжение (сжатие) прямых стержней. Нормальные внутренние силы и напряжения.

5. Закон Гука при центральном растяжении стержней. Продольные и поперечные относительные деформации. Продольный модуль упругости, коэффициент Пуассона.

6. Построение эпюр нормальных сил и нормальных напряжений при растяжении стержней. Основные закономерности и характер эпюр.

7. Нормальные силы и нормальные напряжения от собственного веса стержней при центральном растяжении.

8. Диаграмма растяжения пластичных материалов (на примере стали). Основные характерные точки диаграммы растяжения.
9. Остаточные деформации при растяжении. Разгрузка и повторное нагружение. Работа внешних сил, совершаемая при растяжении стержня.
10. Диаграммы сжатия пластичных и хрупких материалов. Пластичность, хрупкость (дать определения).
11. Понятие о допускаемых напряжениях. Условие прочности при центральном растяжении (сжатии) стержней
12. Три вида задач прикладной механики, решаемых на основе уравнений прочности для центрально растянутых стержней.
13. Определение деформаций и перемещений центрально растянутых (сжатых) стержней.
14. Деформации и перемещения от собственного веса при центральном растяжении (сжатии) стержней.
15. Напряжения в наклонных сечениях при центральном растяжении стержней
16. Закон парности касательных напряжений при центральном растяжении. Максимальные касательные напряжения.
17. Статически неопределимые задачи при растяжении стержней. Методы их решения.
18. Расчет стержневых растянутых систем по предельному состоянию.
19. Плоское напряженное состояние. Закон парности касательных напряжений. Напряжения на наклонных площадках.
20. Главные площадки, главные напряжения при плоском напряженном состоянии. Максимальные касательные напряжения.
21. Круг Мора для напряжений (плоское напряженное состояние).
22. Закон Гука при плоском напряженном состоянии.
23. Чистый сдвиг. Соотношение между продольным модулем упругости и модулем сдвига.
24. Потенциальная энергия деформации при сдвиге.
25. Сдвиг. Расчет заклепок в односрезном и двухсрезном соединении.
26. Понятие о пространственном напряженном состоянии. Основные компоненты тензора напряжений. Закон Гука.
27. Объемная деформация. Относительное изменение объема.
28. Главные площадки, главные оси, главные напряжения пространственного напряженного состояния. Первый инвариант напряженного состояния. Максимальные касательные напряжения.
29. Геометрические характеристики поперечного сечения. Геометрические характеристики прямоугольника и круга (вывод).
30. Статический момент сечения. Определение координат центра тяжести сечения.
31. Изменение геометрических характеристик при параллельном переносе осей.

32. Изменение геометрических характеристик при повороте осей. Главные оси. Главные моменты инерции.

33. Круг Мора для моментов инерции. Определение положения главных осей и главных моментов инерции с помощью круга Мора.

34. Кручение стержней круглого поперечного сечения. Подбор сечения круглого сплошного вала по условию прочности и условию жесткости.

35. Кручение стержней прямоугольного поперечного сечения.

36. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля в виде двутавра (дать пример определения максимального касательного напряжения и угла закручивания. Крутящий момент известен).

37. Поперечный изгиб. Внутренние усилия, правило знаков. Зависимость между распределенной нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом.

38. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при поперечном изгибе. Контроль правильности построения эпюр (на примере)

39. Гипотезы изгиба балок. Формулы нормальных напряжений (вывод). Условие прочности при поперечном изгибе.

40. Касательные напряжения при поперечном изгибе (вывод).

41. Касательные напряжения в тонкостенных стержнях. Центр изгиба.

42. Изгиб. Распределение касательных напряжений в прямоугольном и двутавровом сечении.

43. Главные напряжения при поперечном изгибе.

44. Распределение главных нормальных и максимальных касательных напряжений в двутавровом сечении.

45. Потенциальная энергия деформации при изгибе.

46. Пластический изгиб статически определимых балок. Пластический шарнир. пластический момент сопротивления при изгибе.

СОДЕРЖАНИЕ

Л е к ц и я 1	Основные понятия. Простейшие типы конструкций. Нагрузки. Гипотезы, принимаемые в сопротивлении материалов. Деформации и перемещения. Метод сечений. Частные случаи нагружения. Напряжения.....	3
Л е к ц и я 2	Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали. Диаграммы сжатия. Пластичность, хрупкость. Допускаемые нормальные напряжения. Центральное растяжение (сжатие). Определение перемещений.....	7
Л е к ц и я 3	Поперечная деформация. Плоское напряженное состояние. Напряжения в наклонных площадках стержня при одноосном растяжении. Главные напряжения. Главные площадки.....	11

Л е к ц и я 4	Пространственное напряженное состояние. Обобщенный закон Гука. Объемная деформация. Работа внешних и внутренних сил при растяжении.....	14
Л е к ц и я 5	Сдвиг. Потенциальная энергия при сдвиге. Практические расчеты на сдвиг.....	17
Л е к ц и я 6	Геометрические характеристики плоских сечений. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.....	19
Л е к ц и я 7	Изменение моментов инерции при повороте осей. Круг Мора	22
Л е к ц и я 8	Кручение стержней круглого поперечного сечения. Подбор сечения круглого вала. Эпюры крутящих моментов. Кручение полого вала.....	24
Л е к ц и я 9	Кручение прямого бруса некруглого поперечного сечения. Брус прямоугольного поперечного сечения. Тонкостенный стержень открытого профиля. Кручение тонкостенных стержней с замкнутым профилем....	27
Л е к ц и я 10	Изгиб. Типы опор балок. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и распределенной нагрузкой.....	29
Л е к ц и я 11	Определение нормальных напряжений при изгибе. Определение касательных напряжений при поперечном изгибе.....	34
Л е к ц и я 12	Напряжения в наклонных сечениях балки. Главные напряжения. Касательные напряжения при изгибе тонкостенного бруса. Центр изгиба.....	37
Л е к ц и я 13	Расчет на статическую прочность при изгибе по допускаемым напряжениям. Пластический изгиб статически определимых балок.....	40
Л е к ц и я 14	Потенциальная энергия деформации при изгибе. Дифференциальное уравнение изогнутой оси прямого бруса и его интегрирование.....	43
Л е к ц и я 15	Правила интегрирования дифференциального уравнения упругой линии прямого бруса. Определение перемещений в балках постоянного сечения методом начальных параметров	46

	ров.....	
Л е к ц и я 16	Теории прочности.....	49
Л е к ц и я 17	Применение теоретических положений сопротивления материалов для решения практических задач (обзорная лекция).....	53
–	Дополнительная литература.....	57
–	Вопросы для самопроверки.....	58