ОПД.Ф.02.02 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ
РАСЧЕТ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Учебное пособие

Рассматриваются круглые и кольцевые пластины, находящиеся под воздействием осесимметричной нагрузки при температурном нагреве. Приводится математическая модель напряженно-деформированного состояния рассматриваемых элементов конструкций. Излагается метод начальных параметров, позволяющий построить аналитическое решение поставленной задачи, на конкретных примерах поясняется алгоритм расчета. Приводятся методические указания по практическому применению метода начальных параметров. Особое внимание уделяется корректной формулировке граничных условий при решении задач. Приводятся сопровождающие функции для расчета пластин и основные типы граничных условий.

Данное учебное пособие предназначено студентам, обучающимся по специальности 230104. Может быть использовано студентами других специальностей, связанных с прочностными расчетами элементов конструкций.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ 4

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 5

3. УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН 8

4. ЧИСТЫЙ ИЗГИБ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ 10

5. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ 16

6. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ 18

7. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ 21

Методические указания 24

Указатель применяемых обозначений 26

Приложение 1. Сопровождающие функции для расчета пластин 27

Приложение 2. Граничные условия на внутреннем контуре кольцевой пластины 29

Приложение 3. Граничные условия на наружном контуре пластины 30

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Круглой пластиной постоянной толщины_называется тело, ограниченное круговой цилиндрической поверхностью и двумя перпендикулярными к ее оси плоскостями, расстояние между которыми (толщина пластинки) мало по сравнения с радиусом цилиндрической поверхности. *Кольцевая пластина* представляет собой тело, ограниченное двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями и двумя перпендикулярными к их оси плоскостями (рис.1.1).

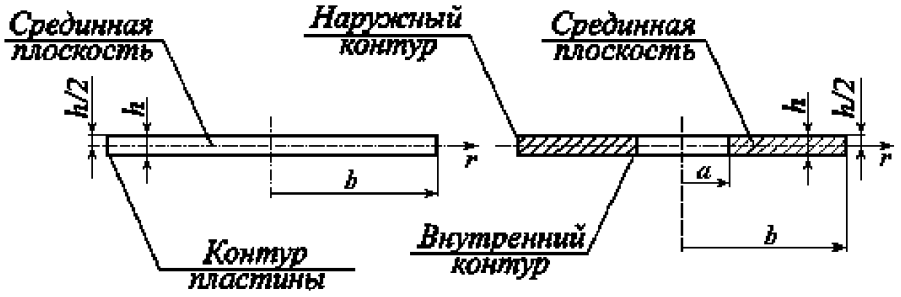


Рис.1.1. Круглая и кольцевая пластины

Плоскость, делящая толщину пластины пополам, называется *срединной плоскостью*; линии пересечения срединной плоскости с боковыми гранями образуют *контур*_пластины.

Изучаются пластины, известным образом закрепленные по контуру, находящиеся под воздействием осесимметричной нагрузки при температурном нагреве. Круглая или кольцевая пластина, несущая симметричную относительно центральной оси нагрузку, деформируется тоже симметрично, т.е. во всех точках равноудаленных от центра пластины перемещения одинаковы. При деформации изгиба точки срединной поверхности пластины получают перемещения (прогибы), перпендикулярные срединной плоскости, и после деформации образуют поверхность вращения (срединную поверхность деформированной пластины). Очевидно, что ввиду симметрии перемещения и углы поворота являются функциями только полярной координаты r.

Таким образом, рассматривается такое нагружение пластины, которое сопровождается ее *изгибом.* Если пластинка нагружена только моментной нагрузкой, поперечные силы в сечениях пластинки отсутствуют, и такой изгиб называется *чистым* (по аналогии с чистым изгибом бруса).

По характеру напряженного состояния, образующегося при изгибе поперечной нагрузкой, различают три типа пластин:

- жесткие,
- гибкие,
- абсолютно гибкие пластины или мембраны.

Пластину называют *жесткой*, если можно без заметной погрешности считать срединный слой нейтральным или, иными словами, свободным от напряжений растяжения-сжатия. На практике пластину принято считать жесткой, если стрела прогиба $\boldsymbol{f}$ не превышает 1/5 толщины: $f \le \frac{h}{5}$. Допущение об изгибном характере напряженного состояния отвечает реальному распределению напряжений лишь для *тонких* пластин, относительная толщина которых (отношение $\frac{h}{R}$) не превышает 1/5. *Толстыми* считаются такие пластины, толщина которых превышает 1/5 их наименьшего размера в плане. Толстые пластины испытывают трехмерное напряженное состояние, которое описывается системой дифференциальных уравнений теории упругости.

Гибкой называются пластины, при расчете которых в пределах упругости наряду с чисто изгибными напряжениями необходимо учитывать напряжения, равномерно распределенные по толщине пластинки и называемые *мембранными* или *цепными*. На практике пластину считают гибкой, если стрела прогиба $\boldsymbol{f}$ больше 1/5 толщины, но меньше пяти толщин: $\frac{h}{5} \le f \le 5h$.

Абсолютно гибкой пластиной или *мембраной* называется пластина, при исследовании упругой деформации которой можно пренебречь собственно изгибными напряжениями по сравнению с мембранными напряжениями. При стреле прогиба, превышающей толщину более чем в 5 раз, пластину можно рассматривать как абсолютно гибкую.

В дальнейшем будем рассматривать *тонкие жесткие пластины с осесимметричной нагрузкой.*

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается кольцевая пластина, в отдельных кольцевых сечениях которой установлены опоры, препятствующие осевым перемещениям этих сечений. Толщина пластины $\boldsymbol{h}$ и физико-механические характеристики материала (модуль упругости $\boldsymbol{E}$, коэффициент Пуассона μ, температурный коэффициент линейного расширения α) в общем случае изменяются вдоль радиуса пластины, и является заданными функциями координаты $\boldsymbol{r}$.

На рассматриваемую пластину может действовать следующая система внешних нагрузок:

- распределенная по срединной плоскости пластины нагрузка $\boldsymbol{q}$, нормальная к этой плоскости, МПа;
- распределенная по срединной поверхности пластины радиальная нагрузка q_r, МПа;
- равномерно распределенная по окружности моментная нагрузка $\boldsymbol{m}$,

Н·мм/мм;

- равномерно распределенная по окружности поперечная нагрузка, равнодействующая которой равна ***P***, Н;

Схема нагружения пластины представлена на рис.1.2. Указаны положительные направления составляющих внешней нагрузки.

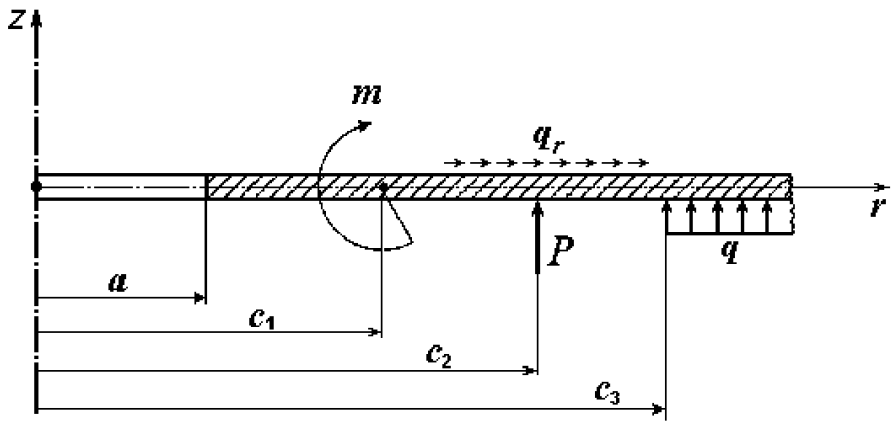


Рис.2.1. Схема нагружения пластины

В общем случае пластина может быть нагрета до температуры $T = T_0 + kz$ (z – расстояние точки пластины от срединной плоскости). Температура срединной плоскости изменяется вдоль радиуса по заданному закону $T_0 = T_0(r)$. По толщине пластины температура изменяется по линейному закону с заданным коэффициентом пропорциональности $k = k(r) = \dfrac{\Delta T(r)}{h(r)}$, где $\Delta T(r)$ – перепад температуры по толщине пластины.

Условимся считать прогибы пластины под действием поперечной нагрузки малыми по сравнению с основными размерами пластины. Вследствие малости прогибов и отсутствия радиальной нагрузки можно пренебречь радиальными смещениями точек срединной плоскости пластины.

Теория тонких пластин с малыми прогибами строится на следующих основных допущениях:

- точки пластины, лежащие до нагружения на нормали к срединной плоскости, остаются в процессе изгиба на нормали к ее срединной поверхности (гипотеза прямых нормалей);
- нормальными напряжениями в направлении, поперечном к срединной плоскости пластины, т.е. давлением между слоями пластины, допустимо пренебрегать (так как они весьма малы в случае поверхностной распределенной нагрузки, или носят локальный характер – создается узкая область контактных напряжений – в случае сосредоточенных нагрузок);

• в срединной плоскости пластинка не испытывает деформаций. При изгибе эта плоскость остается нейтральной.

Первые два допущения носят название *гипотез Кирхгофа-Лява.*

Радиальные и кольцевые нормальные напряжения, возникающие в тонкой жесткой пластине под действием указанной выше (рис.1.2) осесимметричной нагрузки, распределяются по толщине пластины по линейному закону и в точках срединной поверхности равны нулю, как показано на рис.1.3.

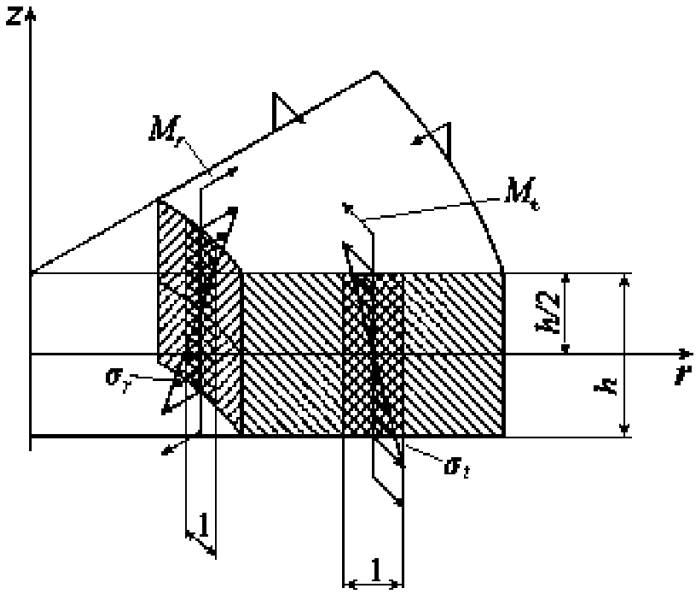


Рис.2.2. Внутренние усилия и напряжения в пластине

Статическими эквивалентами внутренних нормальных сил, приходящихся на единицу длины кольцевого и радиального сечений, являются кольцевой и радиальный изгибающие моменты M_r и M_t (Н·мм/мм). На рис.1.3 показаны их положительные направления. Ввиду симметрии изгибающие моменты являются функциями только координаты ***r***.

Напряжения в пластинах достигают наибольшей величины в точках верхней и нижней поверхностей и связаны с изгибающими моментами соотношениями:

$$\sigma_r^{\max} = \mp \frac{6M_r}{h^2}, \tag{2.1}$$

$$\sigma_t^{\max} = \mp \frac{6M_t}{h^2}. \tag{2.2}$$

В формулах (2.1) и (2.2) верхние знаки относятся к верхней поверхности пластины, а нижние – к нижней.

Решение задачи о расчёте напряжённо-деформированного состояния рассматриваемых конструкций строим на основе теории тонких пластин в геомет-

рически и физически линейной постановке: полагаем, что перемещения точек пластины малы и справедлив закон Гука. Также для пластины должны быть справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява.

3. УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Разрешающую систему дифференциальных уравнений для кольцевой пластины получим из общей системы уравнений для осесимметричных оболочек [1]. При выводе уравнений принимаем во внимание, что для пластины имеют место следующие особенности:

- угол между нормалью и осью вращения $\varphi = 0$:
- направление касательной к меридиану совпадает с радиальным направлением $(s \equiv r)$;
- перемещение $\boldsymbol{u}$ по касательной к меридиану совпадает с радиальным перемещением Δ;
- прогиб пластины $w = -\zeta$ (ζ – осевое перемещение);
- распорное усилие $\boldsymbol{R}$ совпадает с радиальным нормальным усилием N_r;
- поперечное усилие $Q = -F$ ($\boldsymbol{F}$ – осевое усилие).

С учетом указанных особенностей получаем следующую систему дифференциальных уравнений для кольцевой пластины:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dw}{dr} = -\vartheta, \\
&\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\mu}{r}\vartheta + \frac{M_r}{D} + k\alpha(1+\mu), \\
&\frac{d}{dr}(M_r r) = D\left(1-\mu^2\right)\frac{\vartheta}{r} + \mu M_r + Qr - D(1-\mu^2)k\alpha, \\
&\frac{d}{dr}(Qr) = -rq, \\
&\frac{du}{dr} = -\frac{\mu}{r}u + \frac{1-\mu^2}{Eh}N_r + \alpha T_0(1+\mu), \\
&\frac{d}{dr}(N_r r) = \frac{Eh}{r}\Delta + \mu N_r - rq_r - Eh\alpha T_0,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где ϑ – угол поворота нормали к срединной плоскости пластины, рад;

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость, Н*мм.

Систему дифференциальных уравнений (3.1) дополним следующими уравнениями, также заимствованными из теории оболочек [1]:

$$N_t == \mu N_r + Eh\left(\frac{u}{r} - \alpha T_0\right), \tag{3.2}$$

$$M_t == \mu M_r + \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\vartheta}{r} - k\alpha\right). \tag{3.3}$$

Система уравнений (3.1) распадается на две подсистемы. Подсистема, состоящая из первых четырех уравнений системы (3.1), описывает поперечный изгиб пластины. Подсистема, включающая последние два уравнения системы (3.1), описывает растяжение пластины в ее плоскости.

Положительные направления внутренних усилий и перемещений принимаем в соответствии с теорией тонких жестких пластин (рис.3.1).

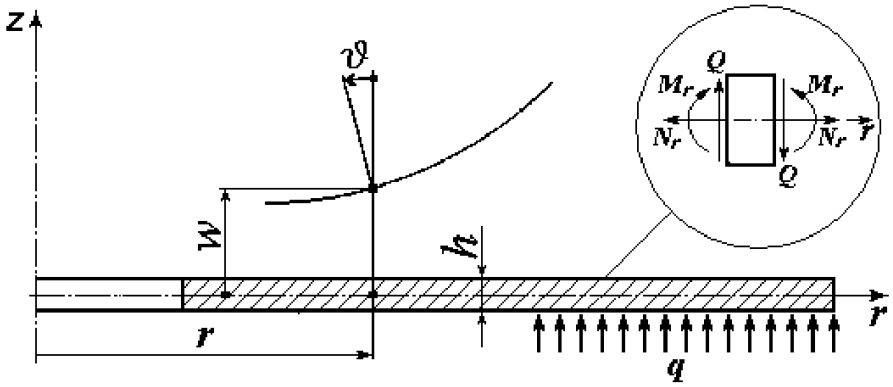


Рис.3.1. Положительные направления внутренних усилий и перемещений

В теории тонких пластин изгибающие моменты M_r и M_t, поперечная сила Q и угол поворота нормали ϑ имеют обратные знаки по сравнению с теорией оболочек. Придерживаясь теории тонких пластин, вносим соответствующие изменения в уравнения (3.1). В результате получаем следующую систему дифференциальных уравнений для решения задачи об изгибе кольцевой пластины:

$$\frac{dw}{dr} = \vartheta,$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\mu}{r}\vartheta + \frac{M_r}{D} - k\alpha(1+\mu),$$

$$\frac{d}{dr}(M_r r) = D\left(1-\mu^2\right)\frac{\vartheta}{r} + \mu M_r + Qr + D(1-\mu^2)k\alpha, \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dr}(Qr) = rq.$$

С учетом изменения знаков изгибающих моментов M_r, M_t и угла поворота нормали ϑ уравнение (3.3) примет вид

$$M_t == \mu M_r + \frac{Eh^3}{12}\left(\frac{\vartheta}{r} + k\alpha\right). \qquad (3.5)$$

Система дифференциальных уравнений (3.2) с переменными коэффициентами в общем случае может быть решена только численными методами. Если толщина пластины постоянна, физико-механические параметры конструкционного материала и параметры температурного воздействия сохраняют постоянные значения, т.е. $h,\ E,\ \mu,\ \alpha,\ T_0,\ k = const$, можно получить аналитическое решение рассматриваемой задачи.

4. ЧИСТЫЙ ИЗГИБ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим чистый изгиб кольцевой пластины, когда поперечные силы в ее кольцевых сечениях отсутствуют, т.е. $Q = 0$.

Полагая, что $h,\ E,\ \mu,\ \alpha,\ k = const$, ставим задачу получить аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (3.2)

Прежде всего, отметим, что из уравнения (3.4) вытекает:

$$\frac{D\vartheta}{r} = \frac{M_t - \mu M_r}{1-\mu^2} - Dk\alpha\ . \qquad (4.1)$$

Следовательно, третье уравнение системы (3.2) можно записать в виде

$$\frac{d}{dr}\left(M_r r\right) = M_t + Qr \qquad (4.2)$$

или, учитывая, что при чистом изгибе $Q = 0$,

$$\frac{d}{dr}\left(M_r r\right) = M_t\ . \qquad (4.3)$$

Умножим второе уравнение системы (3.2) на $D(1-\mu)r$, а третье уравнение умножим на ***r***, после чего сложим эти уравнения, учитывая, что $Q = 0$. В результате получим:

$$r\frac{d}{dr}\left[(1-\mu)(D\vartheta) + M_r r\right] = (1-\mu)(D\vartheta) + M_r r\ . \qquad (4.4)$$

Становится очевидным, что решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$r\frac{dy}{dr} = y\ , \qquad (4.5)$$

где

$$y = (1-\mu)(D\vartheta) + M_r r \ . \tag{4.6}$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{y}{r} = const \tag{4.7}$$

или с учетом выражения (4.6)

$$(1-\mu)\frac{D\vartheta}{r} + M_r = const \ . \tag{4.8}$$

Подставляя в уравнение (4.8) выражение (4.1) для $\frac{D\vartheta}{r}$, получим

$$\frac{M_t + M_r}{1+\mu} - Dk\alpha(1-\mu) = const \ . \tag{4.9}$$

или

$$M_r + M_t = const \ . \tag{4.10}$$

Соотношение (4.10) показывает, что сумма радиального и кольцевого изгибающих моментов во всех кольцевых сечениях пластины одинакова.

Обозначим радиальный и кольцевой изгибающие моменты на внутреннем контуре пластины $r = a$ через M_r^0 и M_t^0, т.е. $M_r(a) = M_r^0$, $M_t(a) = M_t^0$. Тогда, принимая во внимание соотношение (4.10), можно записать

$$M_r + M_t = M_r^0 + M_t^0 \ . \tag{4.11}$$

Подставляем в уравнение (4.11) выражение (4.3) для кольцевого изгибающего момента M_t. В результате получим:

$$\frac{d}{dr}(M_r r) + M_r = M_r^0 + M_t^0 \tag{4.12}$$

или

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(M_r r^2) = M_r^0 + M_t^0 \ . \tag{4.13}$$

Интегрируя уравнение (4.13) в пределах от ***a*** до ***r***, получим

$$M_r(r)r^2 - M_r^0 a^2 = (M_r^0 + M_t^0)\frac{r^2 - a^2}{2} \ , \tag{4.14}$$

откуда

$$M_r = M_r^0 \frac{1 + a^2/r^2}{2} + M_t^0 \frac{1 - a^2/r^2}{2} \ . \tag{4.15}$$

Выражение для кольцевого изгибающего момента получим из уравнения (4.3):

$$M_t = M_r^0 \frac{1 - a^2 / r^2}{2} + M_t^0 \frac{1 + a^2 / r^2}{2}. \qquad (4.16)$$

Введем в рассмотрение функции:

$$\psi_{rr}(\lambda) = \psi_{tt}(\lambda) = \frac{1 + \lambda^2}{2}, \qquad (4.17)$$

$$\psi_{rt}(\lambda) = \psi_{tr}(\lambda) = \frac{1 - \lambda^2}{2}, \qquad (4.18)$$

где

$$\lambda = a / r. \qquad (4.19)$$

Теперь уравнения (21) и (22) можно переписать в виде:

$$M_r = M_r^0 \psi_{rr}(\lambda) + M_t^0 \psi_{rt}(\lambda), \qquad (4.20)$$

$$M_t = M_r^0 \psi_{tr}(\lambda) + M_t^0 \psi_{tt}(\lambda). \qquad (4.21)$$

Уравнение для углов поворота нормали получим, подставляя в соотношение (4.1) уравнения (4.20) и (4.21):

$$\frac{D\vartheta}{r} = M_r^0 \frac{\psi_{tr}(\lambda) - \mu \psi_{rr}(\lambda)}{1 - \mu^2} + M_t^0 \frac{\psi_{tt}(\lambda) - \mu \psi_{rt}(\lambda)}{1 - \mu^2} - Dk\alpha. \qquad (4.22)$$

Введем в рассмотрение функции:

$$\psi_{\vartheta r}(\lambda) = \frac{\psi_{tr}(\lambda) - \mu \psi_{rr}(\lambda)}{1 - \mu^2}, \qquad (4.23)$$

$$\psi_{\vartheta t}(\lambda) = \frac{\psi_{tt}(\lambda) - \mu \psi_{rt}(\lambda)}{1 - \mu^2}. \qquad (4.24)$$

Теперь уравнение (4.22) для углов поворота нормали можно записать в виде

$$D\vartheta = M_r^0 r \psi_{\vartheta r}(\lambda) + M_r^0 r \psi_{\vartheta t}(\lambda) - Dk\alpha r. \qquad (4.25)$$

Умножим обе части первого уравнения системы (3.4) на $\boldsymbol{D\,dr}$ и проинтегрируем полученное соотношение в пределах от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{r}$:

$$Dw(r) - Dw(a) = \int_a^r D\vartheta dr. \qquad (4.26)$$

Подставим в уравнение (4.26) выражение (4.25) для $D\vartheta$. Одновременно введем обозначение для прогиба на внутреннем контуре пластинки:

$$w_0 = w(a). \qquad (4.27)$$

В результате получим

$$Dw = Dw_0 + M_r^0 \int_a^r r\psi_{\vartheta r}(\lambda)\,dr + M_t^0 \int_a^r r\psi_{\vartheta t}(\lambda)\,dr - \int_a^r Dk\alpha r dr\,. \qquad (4.28)$$

Подставляя в уравнение (4.28) выражения (4.23) и (4.24) для функций $\psi_{\vartheta r}(\lambda)$, $\psi_{\vartheta t}(\lambda)$ и принимая во внимание выражение (4.19) для параметра λ, получим уравнение для прогибов пластинки:

$$Dw = Dw_0 + M_r^0 r^2 \cdot \frac{1}{r^2}\int_a^r r\frac{\psi_{tr}(a/r) - \mu\psi_{rr}(a/r)}{1-\mu^2}dr +$$

$$+ M_t^0 r^2 \cdot \frac{1}{r^2}\int_a^r r\frac{\psi_{tt}(a/r) - \mu\psi_{rt}(a/r)}{1-\mu^2}dr - Dk\alpha\frac{r^2 - a^2}{2}\,. \qquad (4.29)$$

Вводим в рассмотрение функции

$$\psi_{wr}(\lambda) = \frac{1}{r^2}\int_a^r \frac{\psi_{tr}(\lambda) - \mu\psi_{rr}(\lambda)}{1-\mu^2} r dr\,, \qquad (4.30)$$

$$\psi_{wr}(\lambda) = \frac{1}{r^2}\int_a^r \frac{\psi_{tr}(\lambda) - \mu\psi_{rr}(\lambda)}{1-\mu^2} r dr\,. \qquad (4.31)$$

Уравнение (4.29) принимает вид:

$$Dw = Dw_0 + M_r^0 r^2 \psi_{wr}(\lambda) + M_t^0 r^2 \psi_{wt}(\lambda) - Dk\alpha r^2 \psi_{wT}(\lambda), \qquad (4.32)$$

где

$$\psi_{wT}(\lambda) = \frac{1-\lambda^2}{2}\,. \qquad (4.33)$$

Выражения для функций $\psi_{wr}(\lambda)$ и $\psi_{wt}(\lambda)$ получим, выполняя интегрирование в уравнениях (4.30) и (4.31):

$$\psi_{wr}(\lambda) = \frac{1}{4(1-\mu^2)}[(1-\mu)(1-\lambda^2) + (1+\mu)\lambda^2 \ln\lambda^2]\,, \qquad (4.34)$$

$$\psi_{wt}(\lambda) = \frac{1}{4(1-\mu^2)}[(1-\mu)(1-\lambda^2) - (1+\mu)\lambda^2 \ln\lambda^2]\,. \qquad (4.35)$$

Таким образом, в результате решения системы дифференциальных уравнений (3.2) получены расчетные соотношения для случая чистого изгиба кольцевой пластины:

$$\begin{aligned} M_r &= M_r^0 \psi_{rr}(\lambda) + M_t^0 \psi_{rt}(\lambda), \\ M_t &= M_r^0 \psi_{tr}(\lambda) + M_t^0 \psi_{tt}(\lambda), \\ D\vartheta &= M_r^0 r\psi_{\vartheta r}(\lambda) + M_t^0 r\psi_{\vartheta t}(\lambda) - Dk\alpha r\,, \\ Dw &= Dw_0 + M_r^0 r^2 \psi_{wr}(\lambda) + M_t^0 r^2 \psi_{wt}(\lambda) - Dk\alpha r^2 \psi_{wT}(\lambda). \end{aligned} \qquad (4.36)$$

Уравнения (4.36) записаны в форме метода начальных параметров. Начальными параметрами являются радиальный и кольцевой изгибающие моменты M_r^0, M_t^0, а также прогиб w_0 на внутреннем контуре пластины. Их численные значения определяются из граничных условий на внутреннем и наружном контурах пластины. Функции ψ_{ij} $\left(i = r,t,\vartheta,w;\ j = r,t,T\right)$ называются сопровождающими функциями для пластины. Их числовые значения проведены в работе [2]. Параметр λ выполняет функцию безразмерной координаты кольцевых сечений пластины.

В качестве примера выполним расчет кольцевой пластины, расчетная схема которой представлена на рис.4.1. Пластина жестко закреплена по внутреннему контуру, на наружном контуре пластины приложена моментная нагрузка $\boldsymbol{m}$. Отношение внутреннего радиуса к наружному $a/b = 0,2$. Температурный нагрев пластины отсутствует.

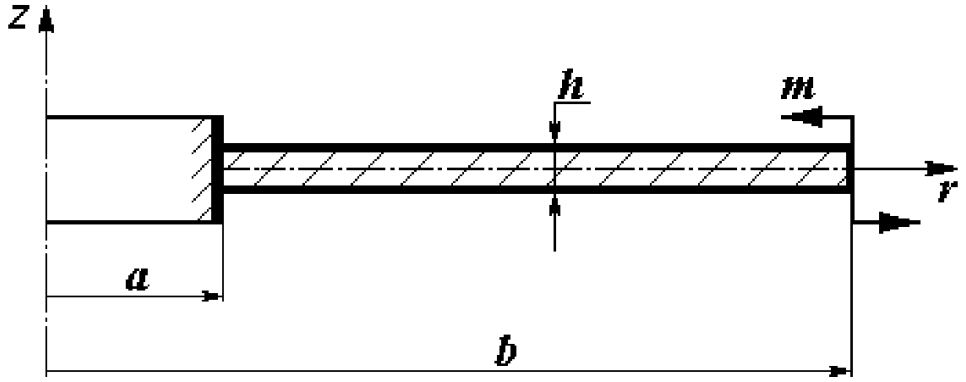


Рис.4.1. Расчетная схема пластины

Ввиду отсутствия поперечной нагрузки осевая реакция опоры на внутреннем контуре пластины равна нулю. Следовательно, пластина работает в условиях чистого изгиба, и ее напряженно-деформированное состояние описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
M_r &= M_r^0\psi_{rr}\left(a/r\right) + M_t^0\psi_{rt}\left(a/r\right),\\
M_t &= M_r^0\psi_{tr}\left(a/r\right) + M_t^0\psi_{tt}\left(a/r\right),\\
D\vartheta &= M_r^0 r\psi_{\vartheta r}\left(a/r\right) + M_t^0 r\psi_{\vartheta t}\left(a/r\right),\\
Dw &= Dw_0 + M_r^0 r^2\psi_{wr}\left(a/r\right) + M_t^0 r^2\psi_{wt}\left(a/r\right).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Для определения начальных параметров M_r^0, M_t^0, w_0 формулируем граничные условия:

$$\text{при } r = a \quad (\lambda = 1): \qquad \vartheta = 0, \qquad w = w_0 = 0;$$
$$\text{при } r = b \quad (\lambda = a/b): \quad M_r = +m. \tag{4.38}$$

Вычисляя по уравнениям (4.37) угол поворота нормали на внутреннем контуре пластины при $r = a$ и радиальный изгибающий момент на наружном контуре при $r = b$, получаем с учетом граничных условий (4.38) систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных M_r^0, M_t^0:

$$M_r^0 a\psi_{\vartheta r}(1) + M_t^0 a\psi_{\vartheta t}(1) = 0,$$
$$M_r^0 \psi_{rr}(a/b) + M_t^0 \psi_{rt}(a/b) = m. \tag{4.39}$$

По таблицам работы [1] находим числовые значения сопровождающих функций, входящих в уравнения (4.39):

$$\psi_{\vartheta r}(1) = -0{,}3297, \qquad \psi_{\vartheta t}(1) = 1{,}0989;$$
$$\psi_{rr}(0{,}2) = 0{,}5200, \qquad \psi_{rt}(0{,}2) = 0{,}4800.$$

Подставляем значения сопровождающих функций в систему (4.39) и находим ее решение:

$$M_r^0 = 1{,}506\boldsymbol{m}, \qquad M_t^0 = 0{,}4518\boldsymbol{m}.$$

Подставляя числовые значения начальных параметров в уравнения (4.37), получаем расчетные формулы для определения внутренних усилий и перемещений:

$$\frac{M_r}{m} = 1{,}506\psi_{rr}(a/r) + 0{,}4518\psi_{rt}(a/r),$$
$$\frac{M_t}{m} = 1{,}506\psi_{tr}(a/r) + 0{,}4518\psi_{tt}(a/r),$$
$$\frac{D\vartheta}{m} = 1{,}506r\psi_{\vartheta r}(a/r) + 0{,}4518r\psi_{\vartheta t}(a/r), \tag{4.40}$$
$$\frac{Dw}{m} = 1{,}506r^2\psi_{wr}(a/r) + 0{,}4518r^2\psi_{wt}(a/r).$$

Расчет изгибающих моментов и перемещений по формулам (4.40) выполняем для ряда заданных значений радиуса $\boldsymbol{r}$. Значения сопровождающих функций для соответствующих значений параметра $\lambda = a/r$ принимаем по таблицам работы [2]. Напряжения вычисляем по формулам (2.1) и (2.2). В результате расчета получаем полную информацию о напряженно-деформированном состоянии рассматриваемой пластины.

5. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим кольцевую пластину, нагруженную наиболее часто встречающимися силовыми факторами: моментной нагрузкой $\boldsymbol{m}$, поперечной сосредоточенной нагрузкой, равнодействующая которой равна $\boldsymbol{P}$, и равномерно распределенной по срединной плоскости пластины нагрузкой $\boldsymbol{q}$ (рис.5.1).

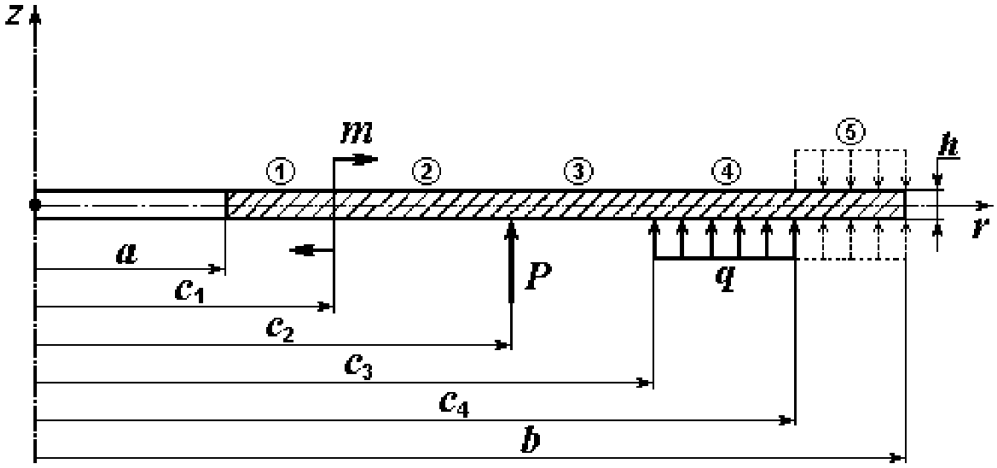


Рис. 5.1. Общий случай нагружения пластины

Из этих трех типов силовых факторов могут быть сформированы практически все встречающиеся на практике виды нагрузок. Система указанных силовых факторов должна удовлетворять условиям равновесия пластины. Как было указано в п.2, пластина может быть нагрета до температуры $T(r) = T_0(r) + kz$.

Пластина на рис. 5.1 имеет пять участков нагружения. Общие уравнения изгиба пластины могут быть записаны в форме метода начальных параметров:

$$M_r = M_r^0 \psi_{rr}\left(\frac{a}{r}\right) + M_t^0 \psi_{rt}\left(\frac{a}{r}\right)\Bigg|_1 + m\psi_{rm}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 + P\psi_{rP}\left(\frac{\tilde{n}_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^2\psi_{rq}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4 - qr^2\psi_{rq}\left(\frac{c_4}{r}\right)\Bigg|_5$$

$$M_t = M_r^0 \psi_{tr}\left(\frac{a}{r}\right) + M_t^0 \psi_{tt}\left(\frac{a}{r}\right)\Bigg|_1 + m\psi_{tm}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 + P\psi_{tP}\left(\frac{\tilde{n}_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^2\psi_{tq}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4 - qr^2\psi_{tq}\left(\frac{c_4}{r}\right)\Bigg|_5$$

$$D\vartheta = -Dk\alpha r + M_r^o r\psi_{\vartheta t}\left(\frac{a}{r}\right) + M_t^o r\psi_{\vartheta t}\left(\frac{a}{r}\right)\Bigg|_1 + mr\psi_{\vartheta m}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 + Pr\psi_{\vartheta P}\left(\frac{\tilde{n}_2}{r}\right)\Bigg|_3 +$$

$$+ qr^3\psi_{\vartheta q}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4 - qr^3\psi_{\vartheta q}\left(\frac{c_4}{r}\right)\Bigg|_5 , \qquad (5.1)$$

$$Dw = Dw_0 - Dk\alpha r^2\psi_{wT}\left(\frac{a}{r}\right) + M_r^o r^2\psi_{wt}\left(\frac{a}{r}\right) + M_t^o r^2\psi_{wt}\left(\frac{a}{r}\right)\Bigg|_1 + mr^2\psi_{wm}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 +$$

$$+ Pr^2\psi_{wP}\left(\frac{\tilde{n}_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^4\psi_{wq}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4 - qr^4\psi_{wq}\left(\frac{c_4}{r}\right)\Bigg|_5 . \quad \left(\psi_{wT} \equiv \psi_{rt}\right).$$

Сопровождающие функции, входящие в уравнения (5.1), представлены в Приложении 1. Подробные таблицы значений сопровождающих функций приведены в работе [2]. Первый индекс сопровождающей функции ψ_{ij} $\left(i = r,t,\vartheta,w;\ j = r,t,m,P,q,T\right)$ указывает на соответствующее уравнение, второй индекс – на силовой фактор, при котором находится эта функция. Аргументом сопровождающей функции является безразмерный параметр $\lambda_i = c_i / r$, где c_i – координата включения учитываемого силового фактора, ***r*** – координата исследуемого сечения (текущая координата). При этом всегда $c_i \le r$, так что параметр λ_i изменяется в пределах $0 \le \lambda_i \le 1$. Необходимо еще раз подчеркнуть, что силовой фактор ***P***, входящий в уравнения (5.1) является равнодействующей поперечной сосредоточенной нагрузки, равномерно распределенной по окружности радиуса c_2.

Для расчета первого участка пластины $\left(a \le r \le c_1\right)$ следует пользоваться членами уравнений, расположенными слева от вертикальной черты с индексом 1. Для расчета второго участка $\left(c_1 \le r \le c_2\right)$ надо брать слагаемые до вертикальной черты с индексом 2 и т.д. Для расчета последнего, пятого участка следует производить вычисления, пользуясь полными уравнениями (5.1). При переходе от четвертого участка к пятому для сохранения принятой структуры уравнений равномерно распределенную положительную нагрузку ***q*** считаем приложенной к пластине и на пятом участке; одновременно на пятом участке прикладываем отрицательную (компенсирующую) равномерно распределенную нагрузку ***q***, как показано на рис.5.1.

При расчете кольцевой пластины начальные параметры M_r^0, M_t^0, w_0 в общем случае неизвестны. Их определяют из граничных условий на внутреннем и наружном контурах пластины. Основные типы граничных условий на внутреннем контуре пластины представлены в Приложении 2, на наружном контуре – в Приложении 3.

6. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Алгоритм расчета кольцевой пластины включает в себя следующие операции.

1. Составляем расчетную схему заданной конструкции. На схеме необходимо показать участки нагружения пластины и реакции осевых опор.

2. Записываем общие уравнения изгиба заданной пластины в форме метода начальных параметров с учетом особенностей построенной расчетной схемы.

3. Находим начальные параметры M_r^0 , M_t^0 , w_0 и реакции осевых опор пластины. Для определения этих величин используем:

- граничные условия на внутреннем и наружном контурах пластины,
- уравнение равновесия пластины $\sum F_z = 0$,
- условия равенства нулю прогибов в кольцевых сечениях, где установлены промежуточные осевые опоры.

4. Выполняем расчет компонентов напряженно-деформированного состояния в заданных кольцевых сечениях пластины.

В качестве примера выполним расчет кольцевой пластины, представленной на рис.6.1.

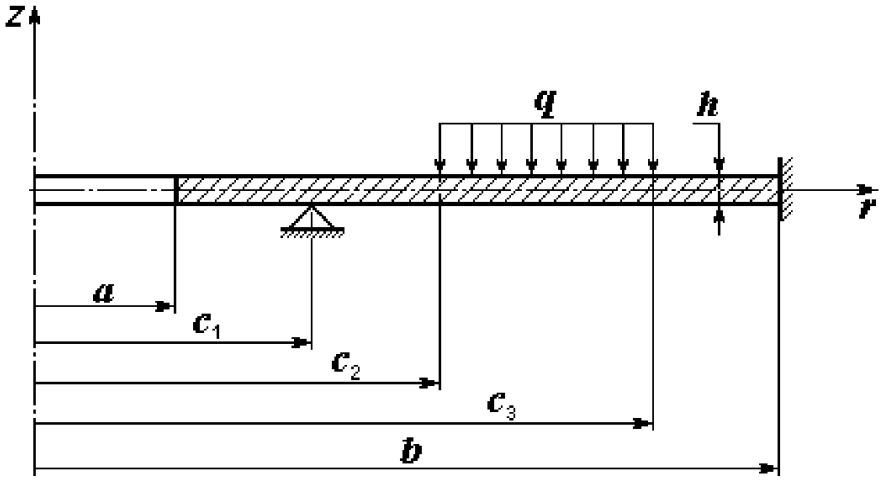


Рис.6.1. Схема нагружения кольцевой пластины

Пластина жестко закреплена по наружному контуру, внутренний контур свободен от закреплений. В кольцевом сечении с радиусом c_1 установлена осевая опора. Пластина находится под воздействием нагрузки q, распределенной по площади между кольцевыми сечениями с радиусами c_2 и c_3. Температурный нагрев пластины отсутствует. Заданы геометрические размеры пластины и значения физико-механических параметров конструкционного материала.

Расчетная схема пластины представлена на рис.6.2.

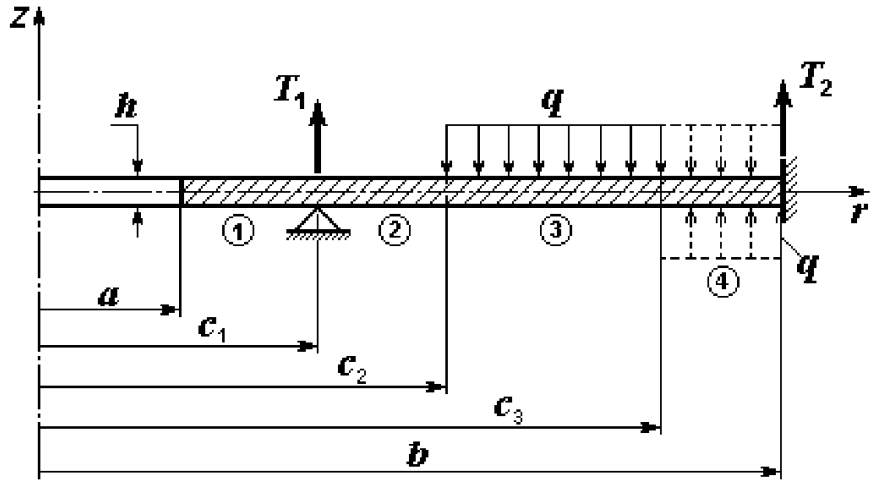


Рис.6.2. Расчетная схема кольцевой пластины

Пластина имеет четыре участка нагружения: участок 1 $(a \le r < c_1)$; участок 2 $(c_1 < r < c_2)$ и т.д. Воздействие отрицательной нагрузки q распространяется и на четвертый участок $(c_3 < r \le b)$. Для компенсации на четвертом участке приложена положительная нагрузка q. В опорах пластины возникают осевые реакции T_1 и T_2.

Общие уравнения изгиба данной пластинки принимают следующий вид:

$$M_r = M_r^0 \psi_{rr}\left(\frac{a}{r}\right) + M_t^0 \psi_{rt}\left(\frac{a}{r}\right)\Bigg|_1 + T_1 \psi_{rP}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 - qr^2 \psi_{rq}\left(\frac{c_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^2 \psi_{rq}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4,$$

$$M_t = M_r^0 \psi_{tr}\left(\frac{a}{r}\right) + M_t^0 \psi_{tt}\left(\frac{a}{r}\right)\Bigg|_1 + T_1 \psi_{tP}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 - qr^2 \psi_{tq}\left(\frac{c_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^2 \psi_{tq}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4,$$

$$D\vartheta = M_r^0 r\psi_{\vartheta r}\left(\frac{a}{r}\right) + M_t^0 r\psi_{\vartheta t}\left(\frac{a}{r}\right)\Bigg|_1 + T_1 r\psi_{\vartheta P}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 - qr^3 \psi_{\vartheta q}\left(\frac{c_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^3 \psi_{\vartheta q}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4,$$

$$Dw = Dw_0 + M_r^0 r^2 \psi_{wr}\left(\frac{a}{r}\right) + M_t^0 r^2 \psi_{wt}\left(\frac{a}{r}\right)\Bigg|_1 + T_1 r^2 \psi_{wP}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 -$$

$$- qr^4 \psi_{wq}\left(\frac{c_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^4 \psi_{wq}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4. \qquad (6.1)$$

Для определения неизвестных начальных параметров M_r^0 , M_t^0 , w_0 и реакций опор пластины T_1 и T_2 используем:

- граничное условие на внутреннем контуре пластины

$$M_r = 0 \text{ при } r = a; \tag{6.2}$$

- граничные условия на наружном контуре пластины:

$$\vartheta = 0 \text{ при } r = b, \tag{6.3}$$

$$w = 0 \text{ при } r = b; \tag{6.4}$$

- условие равенства нулю прогиба в кольцевом сечении пластины $r = c_1$, где установлена дополнительная осевая опора:

$$w = 0 \text{ при } r = c_1; \tag{6.5}$$

- уравнение равновесия пластины:

$$T_1 + T_2 - q\pi\left(c_3^2 - c_2^2\right) = 0. \tag{6.6}$$

Из условия (6.2) непосредственно следует

$$M_r^0 = 0. \tag{6.7}$$

Вычисляя по уравнениям (6.1) угол поворота нормали и прогиб на наружном контуре пластины при $r = b$, получаем с учетом граничных условий (6.2), (6.3) и (6.4) следующие соотношения:

$$M_t^0 b\psi_{\vartheta t}\left(\frac{a}{b}\right) + T_1 b\psi_{\vartheta P}\left(\frac{\tilde{n}_1}{b}\right) - qb^3\psi_{\vartheta q}\left(\frac{c_2}{b}\right) + qb^3\psi_{\vartheta q}\left(\frac{c_3}{b}\right) = 0, \tag{6.8}$$

$$Dw_0 + M_t^0 b^2\psi_{wt}\left(\frac{a}{b}\right) + T_1 b^2\psi_{wP}\left(\frac{\tilde{n}_1}{b}\right) - qb^4\psi_{wq}\left(\frac{c_2}{b}\right) + qb^4\psi_{wq}\left(\frac{c_3}{b}\right) = 0. \tag{6.9}$$

Вычисляя по уравнению (6.1) прогиб в кольцевом сечении $r = c_1$ пластины, получаем с учетом условия (6.5):

$$Dw_0 + M_t^0 b^2\psi_{wt}\left(\frac{a}{\tilde{n}_1}\right) = 0. \tag{6.10}$$

Соотношения (6.6), (6.8) – (6.10) составляют систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных M_t^0 , w_0, T_1, T_2. Решая эту систему, находим начальные параметры и реакции опор пластины. Далее по формулам (6.1) находим изгибающие моменты и перемещения в заданных кольцевых сечениях пластины. Напряжения вычисляем по формулам (2.1) и (2.2).

7. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Расчетная схема круглой пластины представлена на рис.7.1.

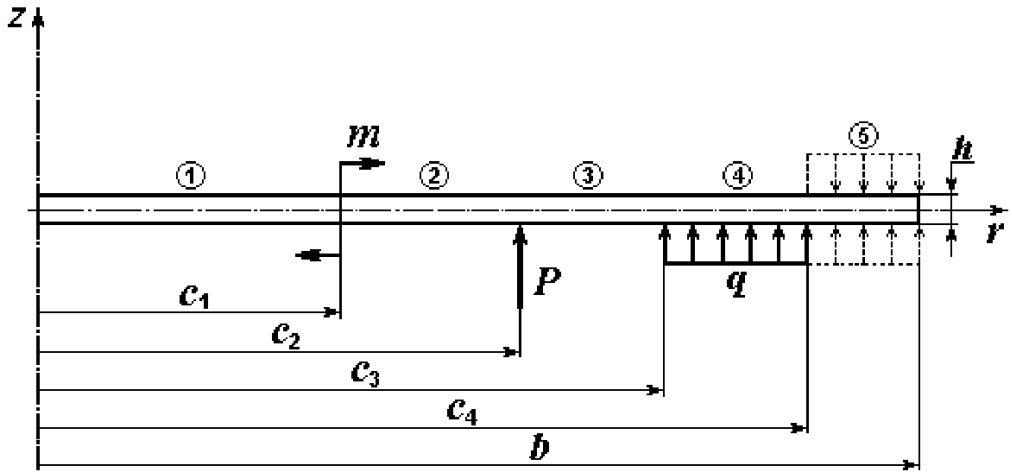


Рис.7.1. Расчетная схема круглой пластины

Круглая пластина, так же как и кольцевая (рис.5.1), находится под воздействием моментной нагрузки $\boldsymbol{m}$, поперечной сосредоточенной нагрузки $\boldsymbol{P}$ и равномерно распределенной по срединной плоскости пластины нагрузки $\boldsymbol{q}$. Кроме того, пластина может быть нагрета до температуры $T(r)=T_0(r)+kz$.

Общие уравнения изгиба для первого участка круглой пластины получим из уравнений (5.1) для кольцевой пластины, полагая равным нулю радиус центрального отверстия $(a=0)$ и принимая во внимание, что в центре круглой пластины $M_r^0=M_t^0$.

Обозначим изгибающий момент в центре круглой пластины M_0. Используя выражения для сопровождающих функций, приведенные в Приложении 1, получаем следующие уравнения для первого участка круглой пластины:

$$M_r=M_0\psi_{rr}(0)+M_0\psi_{rt}(0)=M_0\left(\psi_{rr}(0)+\psi_{rt}(0)\right)=M_0\,,$$

$$M_t=M_0\psi_{tr}(0)+M_0\psi_{tt}(0)=M_0\left(\psi_{tr}(0)+\psi_{tt}(0)\right)=M_0\,,$$

$$\begin{aligned}D\vartheta&=-Dk\alpha r+M_0r\psi_{\vartheta r}(0)+M_0r\psi_{\vartheta t}(0)=\\&=-Dk\alpha r+M_0r\left(\psi_{\vartheta r}(0)+\psi_{\vartheta t}(0)\right)=-Dk\alpha r+M_0r\psi_{\vartheta}^0\,,\end{aligned}\qquad(7.1)$$

$$\begin{aligned}Dw&=Dw_0-Dk\alpha r^2\psi_{wT}(0)+M_0r^2\psi_{wr}(0)+M_0r^2\psi_{wt}(0)=\\&=Dw_0-Dk\alpha r^2\psi_{wT}(0)+M_0r^2\left(\psi_{wr}(0)+\psi_{wt}(0)\right)=\\&=Dw_0-0{,}5Dk\alpha r^2+M_0r^2\psi_w^0\,.\end{aligned}$$

Уравнения для остальных участков круглой пластины полностью совпадают с соответствующими уравнениями для кольцевой пластины.

Таким образом, общие уравнения изгиба круглой пластины, записанные в форме метода начальных параметров, принимают следующий вид.

$$M_r = M_0\big|_1 + m\psi_{rm}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 + P\psi_{rP}\left(\frac{\tilde{n}_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^2\psi_{rq}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4 - qr^2\psi_{rq}\left(\frac{c_4}{r}\right)\Bigg|_5,$$

$$M_t = M_0\big|_1 + m\psi_{tm}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 + P\psi_{tP}\left(\frac{\tilde{n}_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^2\psi_{tq}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4 - qr^2\psi_{tq}\left(\frac{c_4}{r}\right)\Bigg|_5,$$

$$D\vartheta = -Dk\alpha r + M_0 r\psi_\vartheta^0\big|_1 + mr\psi_{\vartheta m}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 + Pr\psi_{\vartheta P}\left(\frac{\tilde{n}_2}{r}\right)\Bigg|_3 +$$

$$+ qr^3\psi_{\vartheta q}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4 - qr^3\psi_{\vartheta q}\left(\frac{c_4}{r}\right)\Bigg|_5, \qquad (7.2)$$

$$Dw = Dw_0 - 0{,}5Dk\alpha r^2 + M_0 r^2\psi_w^0\big|_1 + mr^2\psi_{wm}\left(\frac{\tilde{n}_1}{r}\right)\Bigg|_2 +$$

$$+ Pr^2\psi_{wP}\left(\frac{\tilde{n}_2}{r}\right)\Bigg|_3 + qr^4\psi_{wq}\left(\frac{c_3}{r}\right)\Bigg|_4 - qr^4\psi_{wq}\left(\frac{c_4}{r}\right)\Bigg|_5,$$

где $\psi_\vartheta^0 = \dfrac{1}{1+\mu}$, $\psi_w^0 = \dfrac{1}{2(1+\mu)}$.

Уравнения (7.2) для круглой пластины содержат два начальных параметра: M_0 и w_0 – изгибающий момент и прогиб в центре пластины. В общем случае эти параметры неизвестны. Они определяются из граничных условий.

Алгоритм расчета круглой пластины практически не отличается от алгоритма расчета кольцевой пластины за исключением того, что граничные условия в данном случае могут быть сформулированы только для наружного контура пластины $(r = b)$. Основные типы граничных условий на наружном контуре пластины представлены в Приложении 3.

В качестве примера выполним расчет круглой пластины, представленной на рис.7.2. В кольцевом сечении $r = c$ пластина нагружена поперечной сосредоточенной нагрузкой, равнодействующая которой равна ***P***. На наружном контуре, $(r = b)$, установлена шарнирная опора. Температурный нагрев пластины отсутствует. Заданы геометрические размеры пластины и значения физико-механических параметров конструкционного материала.

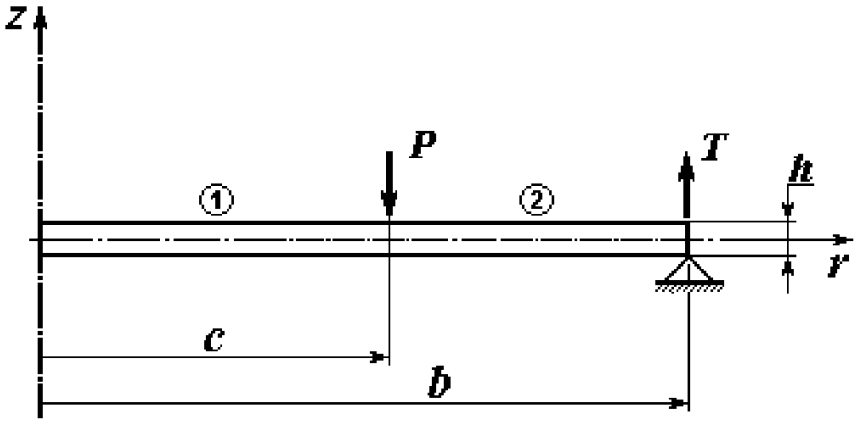


Рис.7.2. Расчетная схема круглой пластины

Пластина имеет два участка нагружения: участок 1 $(a \le r < c)$ и участок 2 $(c < r \le b)$. В шарнирной опоре на наружном контуре пластины возникает осевая реакция $\boldsymbol{T}$.

Общие уравнения изгиба данной пластинки:

$$
\begin{aligned}
M_r &= M_0\big|_1 - P\psi_{rP}\left(\frac{\tilde{n}}{r}\right)\Bigg|_2, \\
M_t &= M_0\big|_1 - P\psi_{tP}\left(\frac{\tilde{n}}{r}\right)\Bigg|_2, \\
D\vartheta &= M_0 r\psi_{\vartheta}^{0}\big|_1 - Pr\psi_{\vartheta P}\left(\frac{\tilde{n}}{r}\right)\Bigg|_2, \\
Dw &= Dw_0 + M_0 r^2\psi_{w}^{0}\big|_1 - Pr^2\psi_{wP}\left(\frac{\tilde{n}}{r}\right)\Bigg|_2.
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Для определения неизвестных начальных параметров M_0, w_0 и реакции шарнирной опоры пластины $\boldsymbol{T}$ используем:

- граничные условия на наружном контуре пластины:

$$M_r = 0 \quad \text{при } r = b, \tag{7.4}$$

$$w = 0 \quad \text{при } r = b; \tag{7.5}$$

- уравнение равновесия пластины:

$$T - P = 0. \tag{7.6}$$

Вычисляя по уравнениям (7.3) радиальный изгибающий момент и прогиб на наружном контуре пластины при $r = b$, получаем с учетом граничных условий (7.4) и (7.5) следующие соотношения:

$$M_0 - P\psi_{rP}\left(\frac{\tilde{n}}{b}\right) = 0\,, \tag{7.7}$$

$$Dw_0 + M_0 b^2 \psi_w^0 - Pb^2 \psi_{wP}\left(\frac{\tilde{n}}{b}\right) = 0\,. \tag{7.8}$$

Соотношения (7.7) и (7.8) составляют систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных M_0 и w_0. Решая эту систему, находим начальные параметры:

$$M_0 = P\psi_{rP}\left(\frac{\tilde{n}}{b}\right), \tag{7.9}$$

$$w_0 = \frac{Pb^2}{D}\left[\psi_{wP}\left(\frac{\tilde{n}}{b}\right) - \psi_{rP}\left(\frac{\tilde{n}}{b}\right)\psi_w^0\right]. \tag{7.10}$$

Реакция шарнирной опоры, как следует из уравнения равновесия пластины (7.6):

$$T = P\,. \tag{7.11}$$

На заключительном этапе расчета по формулам (7.3) находим изгибающие моменты и перемещения в заданных кольцевых сечениях пластины. Напряжения вычисляем по формулам (2.1) и (2.2).

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

При изучении метода расчета пластин и решении практических задач необходимо обратить внимание на следующие вопросы:

1. При расчете пластины важно правильно записать общие уравнения изгиба с учетом конкретных условий нагружения. В уравнениях, записанных в форме метода начальных параметров, должны быть учтены все внешние силовые факторы, включающиеся слева от рассматриваемого сечения (для правой половины пластины). Не следует при этом забывать об опорных реакциях. Силовые факторы, включающиеся справа от исследуемого сечения, в уравнения не входят. Так при расчете круглой пластины (пример в п.7) в общие уравнения изгиба не вошла реакция осевой шарнирной опоры $\boldsymbol{T}$.

2. Особое внимание обратите на знаки, с которыми вы включаете в общие уравнения изгиба отдельные слагаемые. Если внешний силовой фактор приложен к пластине в положительном направлении (положительные направления внешних нагрузок приведены на рис.2.1), то слагаемое, учитывающее влияние этого фактора, входит в уравнения изгиба со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

3. Необходимо хорошо усвоить правило знаков для внутренних силовых

факторов в пластине – радиального и кольцевого изгибающих моментов, а также углов поворота и прогибов пластины. Изгибающие моменты считаем положительными в том случае, когда при изгибе пластины верхние ее волокна сжимаются, а нижние растягиваются. Угол поворота нормали к пластине положителен, если направлен против часовой стрелки (для правой половины пластины), положительные прогибы совпадают с положительным направлением оси симметрии пластины (рис. 3.1).

4. При изучении основных типов граничных условий обратите внимание на случай нагружения пластины по контуру моментной нагрузкой (Приложения 1 и 2). Граничные условия в этом случае записываются в соответствии с указанным выше правилом знаков для радиального изгибающего момента. Если на контуре пластины радиальный изгибающий момент положителен (сжаты верхние волокна), то заданная моментная нагрузка ***m*** входит в граничные условия со знаком плюс. Противоположную по направлению моментную нагрузку следует ввести в граничные условия со знаком минус.

5. При отсутствии температурного воздействия в тех сечениях пластины, где угол поворота равен нулю, радиальный и кольцевой изгибающие моменты связаны соотношением $M_t = \mu M_r$. Справедливость этого утверждения вытекает из уравнения (4.1).

В частности, начальные параметры M_r^0 и M_t^0 в кольцевой пластине, защемленной по внутреннему контуру, связаны соотношением $M_t^0 = \mu M_r^0$, которое удобно использовать при расчете пластины.

6. При определении вертикальных реакций опор пластины следует иметь в виду, что в нашем распоряжении для этой цели имеется, по существу, только одно уравнение статики, выражающее равенство нулю суммы проекций на вертикальную ось сил, действующих на пластину:

$$\sum F_z = 0 .$$

Остальные пять уравнений равновесия, которые можно составить для пластины, как пространственного тела, обращаются в тождества 0 ≡ 0 (проверьте самостоятельно!).

Поэтому, если пластина имеет одну кольцевую опору, то равнодействующую вертикальной реакции этой опоры можно определить из уравнения равновесия. Такую пластину называют статически определимой. Если же на пластину наложены более, чем одна осевая связь, $(n > 1)$, ее можно назвать статически неопределимой, и для определения реакций связей, кроме уравнения равновесия, следует дополнительно составить $n-1$ уравнений, выражающих ограничения, накладываемые дополнительными связями на прогибы пластины.

УКАЗАТЕЛЬ ПРИМЕНЯЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

a – радиус внутреннего контура кольцевой пластины, мм;
b – радиус наружного контура пластины, мм;
h – толщина пластины, мм;
E – модуль упругости материала пластины, МПа;
μ – коэффициент Пуассона материала пластины;

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость, Н·мм;

m – распределенная по окружности моментная нагрузка, Н·мм /мм;
P – равнодействующая распределенной по окружности поперечной нагрузки, Н;
q – равномерно распределенная по площади нагрузка, МПа;
M_r – радиальный изгибающий момент, Н·мм /мм;
M_t – кольцевой изгибающий момент, Н·мм /мм;
N_r – радиальное нормальное усилие, Н/мм;
N_t – кольцевое нормальное усилие, Н/мм;
Q – поперечное усилие, Н/мм;
ϑ – угол поворота нормали к срединной плоскости пластины, рад;
w – прогиб пластины, мм;
u – перемещение по касательной к меридиану, мм;
Δ – радиальное перемещение, мм;
σ_r – радиальное напряжение, МПа;
σ_t – кольцевое напряжение, МПа;
λ – безразмерный параметр;
r – полярный радиус кольцевого сечения пластины, мм;
T_0 – температура срединной плоскости пластины;
α – температурный коэффициент линейного расширения, 1/К,
$\psi_{ij}(\lambda)$, $(i = r, t, \vartheta, w; \quad j = r, t, m, P, q)$ – сопровождающие функции.

Приложение 1

СОПРОВОЖДАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛАСТИН

Для уравнения M_r

$$\psi_{rr}(\lambda) = \frac{1}{2}(1+\lambda^2)$$

$$\psi_{rt}(\lambda) = \frac{1}{2}(1-\lambda^2)$$

$$\psi_{rm}(\lambda) = \frac{1}{2}[1+\mu+(1-\mu)\lambda^2]$$

$$\psi_{rp}(\lambda) = \frac{1}{8\pi}[(1-\mu)(1-\lambda^2)-(1+\mu)\ln\lambda^2]$$

$$\psi_{rq}(\lambda) = \frac{1}{16}\left\{3+\mu-\lambda^2\left[4-2(1+\mu)\ln\lambda^2-(1-\mu)\lambda^2\right]\right\}$$

Для уравнения M_t

$$\psi_{tr}(\lambda) = \psi_{rt}(\lambda) = \frac{1}{2}(1-\lambda^2)$$

$$\psi_{tt}(\lambda) = \psi_{rr}(\lambda) = \frac{1}{2}(1+\lambda^2)$$

$$\psi_{tm}(\lambda) = \frac{1}{2}(1+\mu-(1-\mu)\lambda^2)$$

$$\psi_{tp}(\lambda) = -\frac{1}{8\pi}[(1-\mu)(1-\lambda^2)+(1+\mu)\ln\lambda^2]$$

$$\psi_{rq}(\lambda) = \frac{1}{16}\left\{1+3\mu-\lambda^2\left[4\mu-2(1+\mu)\ln\lambda^2-(1-\mu)\lambda^2\right]\right\}$$

Для уравнения $D\vartheta$

$$\psi_{\vartheta r}(\lambda)=\frac{1}{2(1-\mu^2)}[1-\mu-(1+\mu)\lambda^2]$$

$$\psi_{\vartheta t}(\lambda)=\frac{1}{2(1-\mu^2)}[1-\mu+(1+\mu)\lambda^2]$$

$$\psi_{\vartheta m}(\lambda)=\frac{1}{2}(1-\lambda^2)$$

$$\psi_{\vartheta p}(\lambda)=\frac{1}{8\pi}[\lambda^2-1-\ln\lambda^2]$$

$$\psi_{\vartheta q}(\lambda)=\frac{1}{16}[1-\lambda^2(\lambda^2-2\ln\lambda^2]$$

$$\psi_{\vartheta}^{0}(\lambda)=\frac{1}{1+\mu}$$

Для уравнения Dw

$$\psi_{wr}(\lambda)=\frac{1}{4(1-\mu^2)}[(1-\mu)(1-\lambda^2)+(1+\mu)\lambda^2\ln\lambda^2]$$

$$\psi_{wt}(\lambda)=\frac{1}{4(1-\mu^2)}[(1-\mu)(1-\lambda^2)-(1+\mu)\lambda^2\ln\lambda^2]$$

$$\psi_{wm}(\lambda)=\frac{1}{4}[1-\lambda^2(1-\ln\lambda)^2]$$

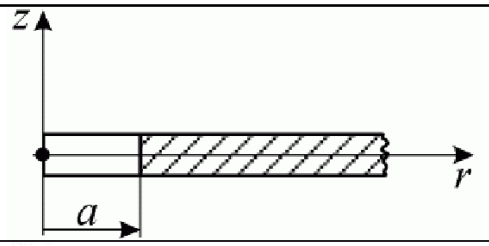
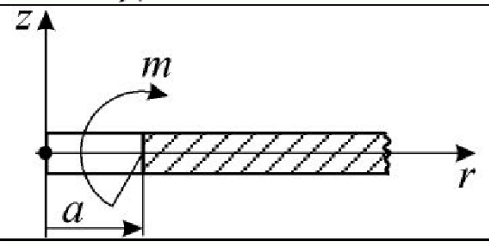
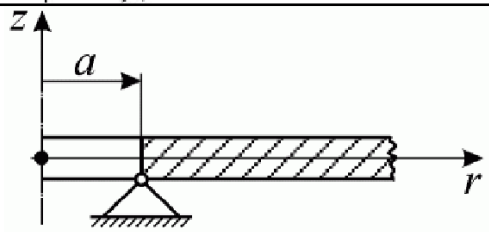
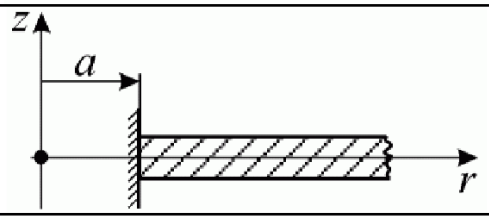
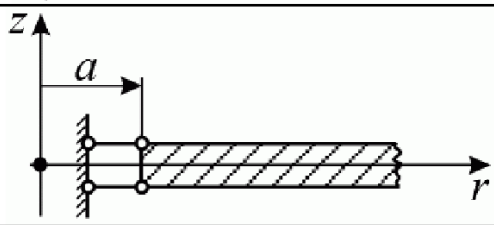
$$\psi_{wp}(\lambda)=\frac{1}{8\pi}[\lambda^2-1-\frac{1}{2}(1+\lambda^2)\ln\lambda^2]$$

$$\psi_{wq}(\lambda)=\frac{1}{64}\{1+\lambda^2[4-5\lambda^2+(2+\lambda^2)\cdot 2\ln\lambda^2]\}$$

$$\psi_{w}^{0}(\lambda)=\frac{1}{2(1+\mu)}$$

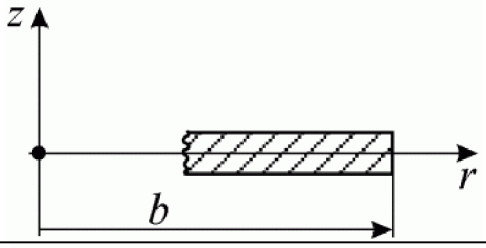
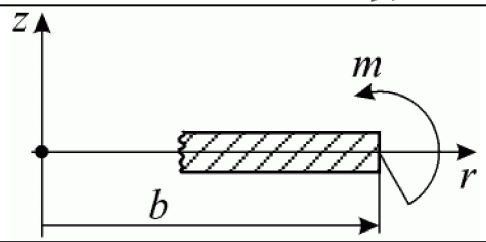
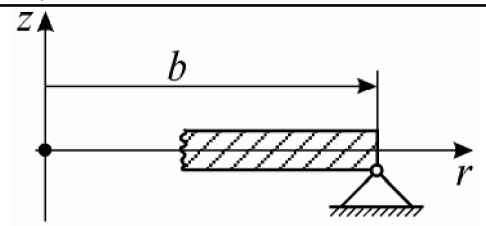
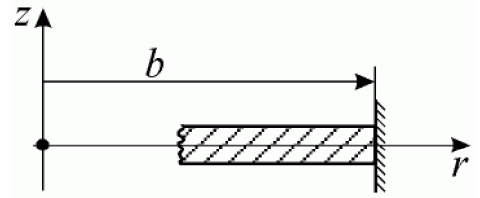
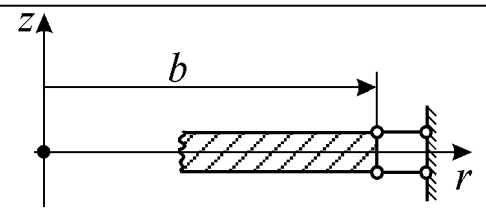
Приложение 2

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ВНУТРЕННЕМ КОНТУРЕ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Закрепление контура пластины	Расчётная схема	Граничные условия
Свободный контур		$M_r(a) = M_r^0 = 0$
Моментная нагрузка		$M_r(a) = M_r^0 = +m$
Шарнирная опора		$M_r(a) = M_r^0 = 0$ $w(a.) = w_0 = 0$
Жесткая заделка		$\vartheta(a) = 0$ $w(a.) = w_0 = 0$
Подвижная заделка		$\vartheta(a) = 0$

Приложение 3

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА НАРУЖНОМ КОНТУРЕ ПЛАСТИНЫ

Закрепление контура пластины	Расчётная схема	Граничные условия
Свободный контур		$M_r(b)=0$
Моментная нагрузка		$M_r(b)=+m$
Шарнирная опора		$M_r(b)=0$ $w(b)=0$
Жесткая заделка		$\vartheta(b)=0$ $w(b)=0$
Подвижная заделка		$\vartheta(b)=0$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Л.Д. Луганцев. Инженерный анализ оболочечных конструкций на ЭВМ: Учебное пособие – М.: МГУИЭ, 2007. – 40 с., ил.

2. Л.Д. Луганцев. Методы и алгоритмы инженерного анализа. Вопросы и задачи: Учебное пособие - М.: МГУИЭ, 2007. – 40 с., ил.