ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ
ПЛАСТИНКИ. РЕШЕНИЯ НАВЬЕ

Методические указания

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.

При расчетах конструкций на прочность особое внимание следует уделять расчету тонких пластинок. Курс теории упругости и пластичности, предназначенный для специальности « Прикладная механика », включает раздел определения напряженно-деформированного состояния тонких пластин. Для выполнения практических расчетов студентам необходимо освоить основные теоретические положения теории тонких пластин и основные методы решения систем дифференциальных уравнений, описывающих их напряженное состояние.

1. Основные положения теории.

Изгиб тонких пластинок

Пластинкой называется призматическое тело, высота которого мала по сравнению с размерами в плане (рис.1).

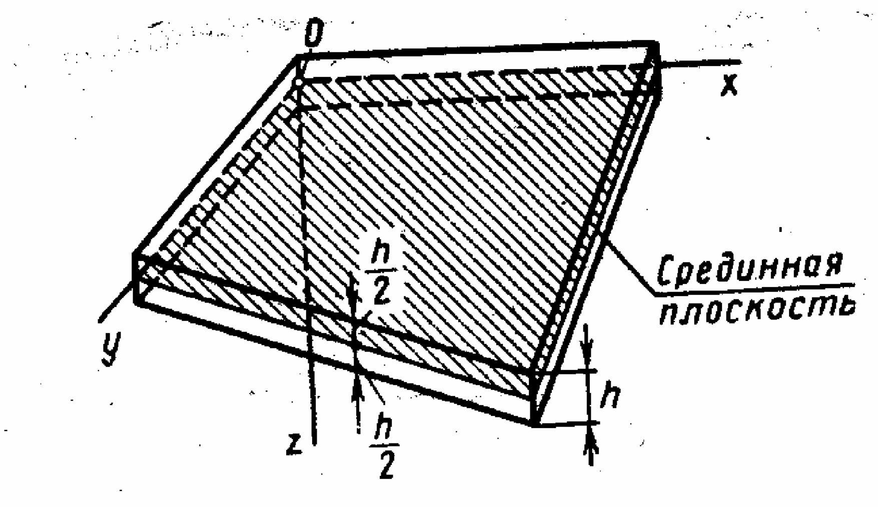

Рис.1. Пластинка

Высотой называется толщина пластинки h.

Срединная плоскость – это плоскость, которая делит пластинку пополам по толщине. При изгибе пластинки средняя плотность превращается в изогнутую поверхность.

Контур пластинки – линия пересечения боковой поверхности со срединной поверхностью.

Для исследования напряженно-деформированного состояния, прямоугольную систему координат x, y, z совпадает со срединной плоскостью. При таком выборе системы координат составляющая перемещении W в направлении оси z представляет собой прогиб пластины.

Тонкими называются пластинки, когда отношение толщины к наименьшему характерному размеру в плане h/b изменяется в пределах 1/5 – 1/80, а величина ожидаемых прогибов не более h/4.

Тонкие пластинки обычно рассчитываются по приближенной теории – технической теории изгиба пластинок.

Эта теория основана на гипотезах Кирхгофа-Лява:

1. Гипотеза прямых нормалей.

Любой прямоугольный элемент, нормальный к срединной поверхности, остается прямолинейным и нормальным к средней поверхности после деформирования пластинки, и длина его не изменяется

Любой прямолинейный элемент перпендикулярный к срединной поверхности направлен вдоль оси z то есть углы между элементом и осями x и y прямые, т. е. сдвиги в указанных плоскостях отсутствуют

$$\gamma_{yz} = 0; \qquad \gamma_{zy} = 0.$$

Гипотеза о сохранение длины прямолинейного элемента предполагает, что линейная деформация ε_z в направлении z отсутствует; $\varepsilon_z=0$

2. Гипотеза о недеформируемой срединной плоскости.

В срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия, сдвига, т. е. она является нейтральной и ее перемещения равны нулю.

$$U_0 = V_0 = 0$$

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости.

Гипотеза позволяет пренебрегать напряжением σ_z ввиду малости по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y.

Перемещение и деформации в пластинке

Исследуем пластинку, нагруженную поперечной нагрузкой, нормальной к срединной поверхности пластинки. Под действием этой нагрузки пластинка получит перемещение. Для их определения обратимся к принятым гипотезам.

$$\varepsilon_z = 0; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad w = w(x, y).$$

Это обозначает, что все точки пластины, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые перемещение w.

То есть достаточно определить прогиб срединной плоскости пластинки w, чтобы знать вертикальные перемещения во всех точках

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial y};$$

Тогда имеем:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y)$$
$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y) \qquad (1)$$

Для вычисления функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ воспользуемся гипотезой о недеформируемой срединной плоскости. Подставляем условия $u_0=v_0=0$ в формулу (1) при $z=0$,

получаем

$$u_0 = f_1(x, y) = 0; \qquad v_0 = f_2(x, y) = 0;$$

Тогда формулы (1) принимают вид:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}; \qquad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}; \qquad (2)$$

Составляющие перемещения точек пластинки, в направлениях осей x и y, выражены через функцию прогибов серединной плоскости пластины.

Составляющие деформаций пластинки, отличные, от нуля, определяются с помощью формул:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Тогда

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \tag{3}$$

Составляющие деформации выражены через функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Напряжения в пластинке

Для определения нормальных напряжений σ_x и σ_y воспользуемся формулами закона Гука и на основании третьей гипотезы отбросим напряжение σ_z

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E;$$
$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E$$

с учетом зависимостей (3) получим

$$-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}$$

$$-zE\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sigma_x - \nu\sigma_y;$$

$$\sigma_y = -\frac{zE}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\sigma_x = -\frac{zE}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{4}$$

Из закона Гука и формулы (3):

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G;$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \frac{E}{2(1+\nu)} = -\frac{zE\partial^2 w}{(1+\nu)\partial x\partial y} = -\frac{zE}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y};$$

Касательные напряжения в двух других плоскостях согласно первой гипотезе обращаются в нуль

$$\tau_{zy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zy} = 0$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} = 0$$

Такой результат получен вследствие принятых гипотез. В действительности от τ_{zy} и τ_{xz} не равны нулю, поскольку это противоречит условиям равновесия.

Из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez\sigma}{1-\nu^2\partial x} - \nabla^2 w;$$

интегрируем по z:

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \int z dz = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + f_3(x,y) \qquad (5)$$

Для определения произвольной функции $f_3(x,y)$ используем граничные условия:

на нижней и верхней поверхностях пластинки, нет касательных нагрузок:

при $z=\pm h/2$ $\qquad \tau_{zx}=0$

подставляем эти условия в формулу (5)

$$f_3(x,y)=\frac{-Eh^2}{8\left(1-v^2\right)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

подставляем в формулу (5)

$$\tau_{xz}=\frac{Ez^2}{2\left(1-v^2\right)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w-\frac{Eh^2}{8\left(1-v^2\right)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w=$$

$$=-\frac{E}{2\left(1-v^2\right)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)=-\frac{E}{2\left(1-v^2\right)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

$$\tau_{yz}=\frac{-E}{2\left(1-v^2\right)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w$$

В сечениях пластинки, перпендикулярных ее срединной поверхности, возникают напряжения:

$$\sigma_x=-\frac{Ez}{1-v^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$

$$\sigma_y=-\frac{Ez}{1-v^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);$$

$$\tau_{xy}=-\frac{Ez}{1+v}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}; \tag{6}$$

$$\tau_{yz}=-\frac{E}{2\left(1-v^2\right)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w;$$

$$\tau_{zx}=-\frac{E}{2\left(1-v^2\right)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w;$$

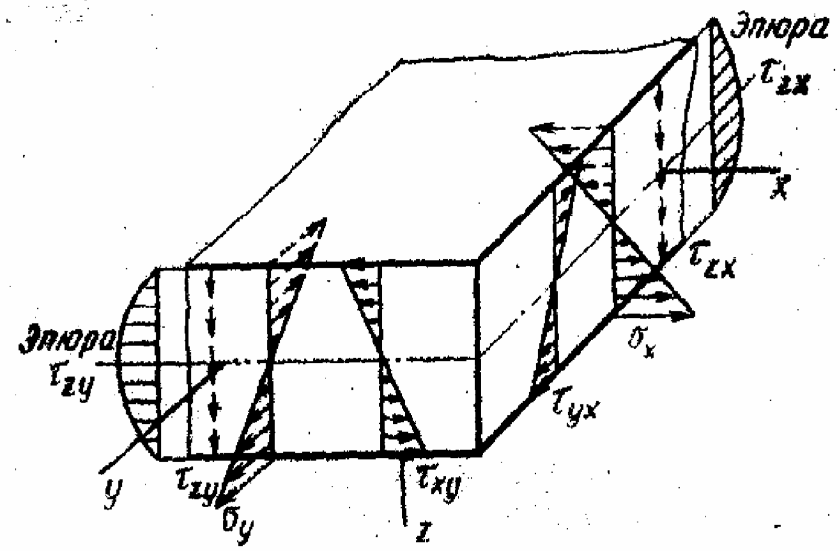

Рис.2.Картина распределения напряжений по высоте сечения

Усилия в пластинке

Рассмотрим усилия, которые соответствуют напряжениям в сечениях пластинки, нормальным к ее срединной поверхности.

N_x – нормальная сила, приходящаяся на единицу ширины рассматриваемого сечения; M_x – изгибающий момент; Q_x – поперечная сила; S_x – сдвигающее усилие; M_{xy} - крутящий момент

Суммируя элементарные усилия по высоте пластинки, получим:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz; \qquad M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz; \qquad Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz;$$

$$S_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz; \qquad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} z dz.$$

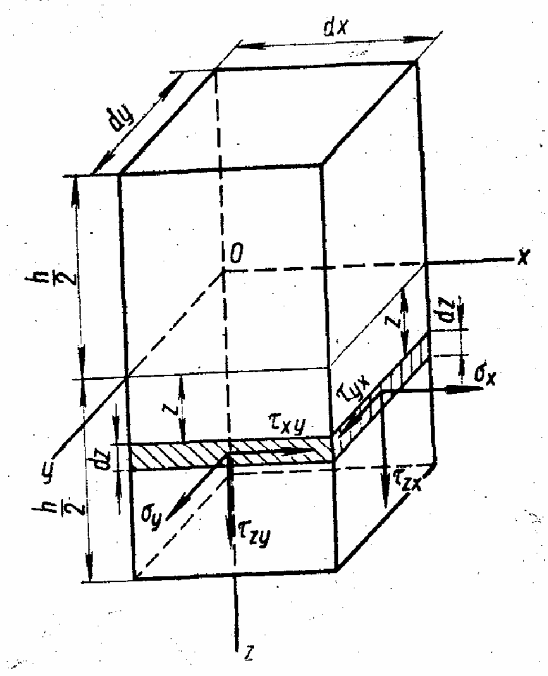

Рис.3. Бесконечно малый элемнет

Под действием поперечной нагрузки в сечениях пластинки, перпендикулярных ее срединной плоскости, возникают следующие усилия:

$$
\begin{aligned}
&M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
&M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\
&Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w;\\
&Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w;\\
&M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость (физико-геометрическая характеристика пластинки при изгибе).

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

Напряжения и усилия в пластинке выражены через функцию прогибов W(x,y). Для определения усилий и напряжения необходимо знать эту функцию.

Вырезаем из серединной плоскости пластинки бесконечно малый элемент размерами dx и dy, и покажем приложенные к нему усилия.

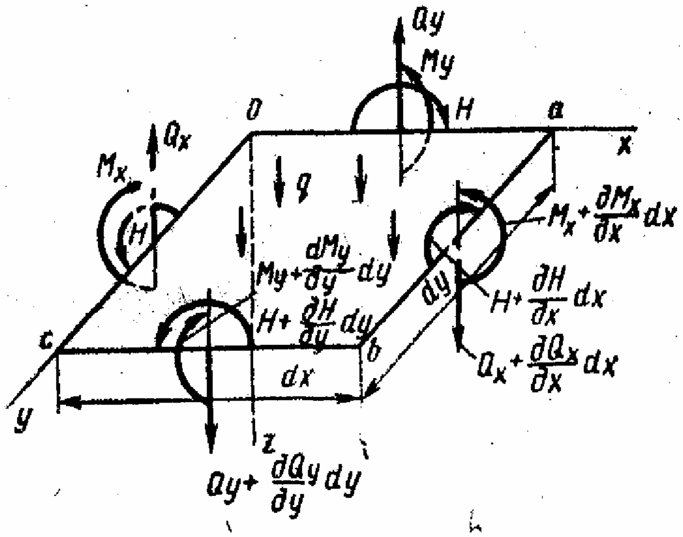

Рис.4. Внутренние усилия в бесконечно малом элементе пластинки

Чтобы элемент находился в равновесии, должны удовлетворяться шесть условий: сумма проекций всех сил на оси x, y, z=0, сумма моментов относительно каждой оси равны нулю. При этом усилие умножаем на длину грани. После преобразований имеем:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q \qquad (8)$$

Основное уравнение изгиба пластинки - уравнение Софи Жермен (8).

При его интегрировании появляются произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий, зависящих от характера закрепления ее краев.

Условия на контуре пластинки

В зависимости от способа закрепления краев на контуре пластинки задаются прогибы и углы поворота срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы.

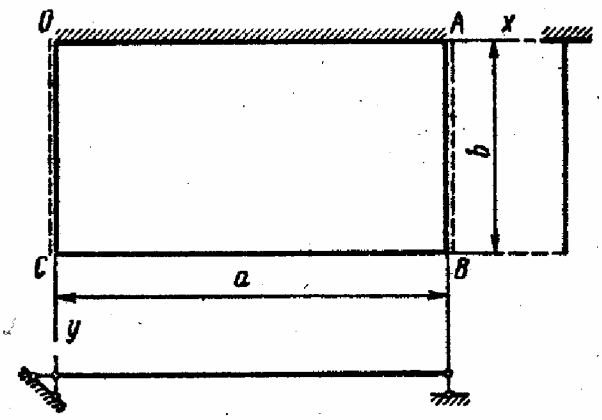

Рис.5. Граничные условия

Условия, при которых на контурах задаются усилия - называются статическими.

Условия, при которых на контурах задаются перемещения - называются геометрическими.

Смешанные условия – одновременно заданы и перемещения и усилия.

На каждом крае следует задавать два граничных условия.

1. Защемленный край OA

а) при y=0 w=0

б) невозможен поворот сечение относительно оси x $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

2. Шарнирное опирание OC и AB

а) w=0;

б) M_x=0; $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$;

при x=const и w=0 вторая производная $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$;

при x=0 и x=a w=0; $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$.

3. Свободный край СВ

Здесь обращаются в нуль изгибающий момент Му, поперечная сила Q_y и крутящий момент Н.

Вместо двух условий три (т. е. решение приближенное). Объединим два последних условия.

Н и Q_y на контуре пластинки заменим одной силой статистически им эквивалентной.

Рассмотрим крутящий момент, распределенный вдоль грани ВС параллельной оси x

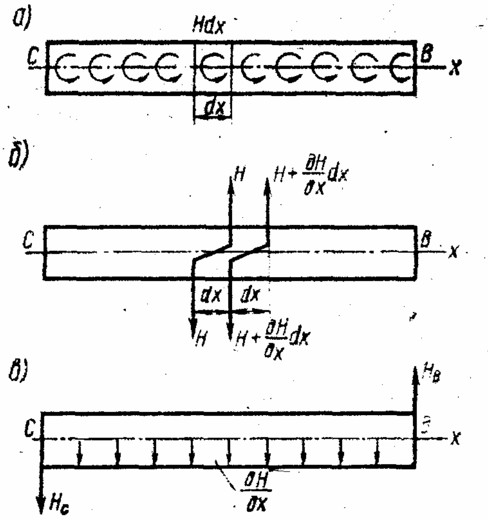

Рис.6. Распределение крутящего момента и перерезывающей силы

На длине dx действует крутящий момент H·dx. Его можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил Н с плечом dx.

M_y=0; $Q_y^{прив.}$=0

На свободной грани СВ

При y=b, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ $\qquad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$;

2. Решение в форме Навье

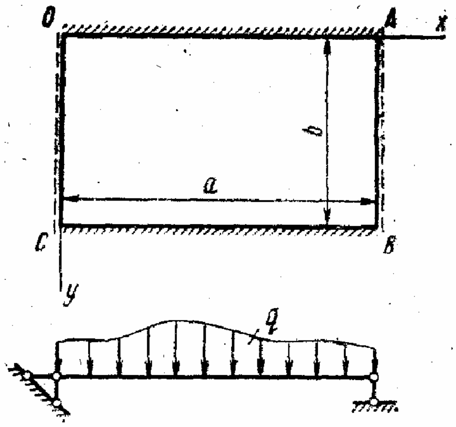

Рис.7. Прямоугольная пластинка.

Решение основного уравнения изгиба (8) для прямоугольной пластинки в замкнутой форме получить не удается. Его приходится искать в виде бесконечного ряда. Рассмотрим шарнирно опертую по контуру прямоугольную пластинку (рис.7), находящуюся под действием поперечной нагрузки интенсивностью q(x,y), изменяющейся по любому закону. Начало координат расположим в углу пластинки. Размер пластинки в направлении оси x равен a, а в направлении оси y - b. Решение уравнения (8) будем искать в виде двойного тригонометрического ряда по синусам:

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{b}, \qquad (9)$$

где A_{mn} – постоянные числа, коэффициенты ряда; m и n – целые положительные числа: 1, 2, 3, …

Ряд (9) можно представить в развернутом виде:

$$w(x,y)=A_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}+A_{12}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}+$$

$$=A_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}+A_{22}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}+\ldots$$

Для шарнирно опертой по контуру пластинки имеем следующие граничные условия:

При x=0 и x=a $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$; (10)

При y=0 и y=b $w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$; (11)

Убедимся, что ряд (9) удовлетворяет этим условиям. Действительно, на грани пластинки x=0 $sin\frac{m\pi x}{a} = sin0 = 0$ и, следовательно, прогиб w(0, y)=0. На грани x=a $sin\frac{m\pi x}{a} = sin\, m\pi = 0$, а значит, и прогиб w(a, y)=0. Точно так же обращаются в нуль прогибы на гранях y=0 и y=b. Следовательно, граничные условия (10) и (11) в отношении прогибов выполняются.

Вторые производные функции прогибов

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_m \sum_n A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum_m \sum_n A_{mn}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b};$$

содержат синусы тех же аргументов, что и сама функция. Поэтому производные обращаются в нуль на всех гранях пластинки: при x=0, x=a и x =b. Следовательно, граничные условия (10) и (11) для изгибающих моментов также выполняются.

Определим коэффициенты ряда (9). Для этого подсчитаем четвертые производные функции прогибов

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_m \sum_n A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_m \sum_n A_{mn}\left(\frac{mn\pi^2}{ab}\right)^2 sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b};$$

и поставим их в уравнение (8). После упрощения получим

$$D\pi^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} = q(x,y); \quad (12)$$

Чтобы определить коэффициенты ряда, входящего в левую часть уравнения (12), необходимо и правую часть этого уравнения разложить в тригонометрический ряд. Представим нагрузку в виде двойного тригонометрического ряда Фурье по синусам в прямоугольной области $0 \le x \le a$; $0 \le y \le b$:

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b}, \quad (13)$$

Коэффициенты этого ряда определяются по формуле, известной из курса математического анализа:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} dxdy, \quad (14)$$

Подставляя ряд (13) в уравнение (12), получаем

$$D\pi^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b} = \sum_m \sum_n C_{mn} sin\frac{m\pi x}{a} sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Два ряда равны между собой, если равны их соответствующие члены. Таким образом,

$$D\pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = C_{mn}$$

Подставляя сюда вместо C_{mn} выражение (14), находим коэффициенты ряда (9) в такой форме:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab\left(m^2/a^2 + n^2/b^2\right)^2}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy. \quad (15)$$

Итак, функция (9) является решением поставленной задачи, так как она удовлетворяет условиям на контуре пластинки и при выборе коэффициентов ряда в форме (15) удовлетворяет основному уравнению изгиба пластинки. Дальнейшая конкретизация задачи зависит от вида функции q(x, y). Рассмотрим некоторые частные случаи.

1.Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластинки.

В этом случае q(x, y)=q=const. Тогда, согласно формуле (15),

$$A_{mn} = \frac{4q}{D\pi^4 ab\left(m^2/a^2 + n^2/b^2\right)^2}\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}dx\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}dy. \quad (16)$$

После интегрирования получаем

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 ab\left(m^2/a^2 + n^2/b^2\right)^2}\left(m = 1,3,5,\ldots,n = 1,3,5,\ldots\right).$$

Подставляя значения этих коэффициентов в ряд (9), находим выражение функции прогибов:

$$\max w = \frac{16q}{\pi^6 D}\sum_m\sum_n \frac{\sin(m\pi/2)\sin(n\pi/2)}{mn\left(m^2/a^2 + n^2/b^2\right)^2} \quad (17)$$

(m=1,3,5,…; n=1,3,5,…).

Подставляя сюда значения цилиндрической жесткости и вынося за скобки a^4, получаем

$$\max w = \frac{192qa^4}{\pi^6 Eh^3}\left(1 - \nu^2\right)\sum_m\sum_n \frac{\sin(m\pi/2)\sin(n\pi/2)}{mn\left(m^2 + n^2a^2/b^2\right)^2}$$

(m=1,3,5,…; n=1,3,5,…).

Для практического использования получаемых результатов составляют таблицы.

2. Сила P сосредоточена в точке с координатами $x=x_0$; $y=y_0$.

Представим эту силу в виде нагрузки, распределенной по бесконечно малой площадке dxdy вокруг точки:

$$q(x,y) = P/(dxdy). \qquad (18)$$

При вычислении двойного интеграла в формуле (15) следует учесть, что он обращается в нуль во всех точках, кроме приложения силы P, где он равен:

$$\int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} dxdy = P \sin\frac{n\pi x_0}{b} \sin\frac{n\pi y_0}{b}.$$

Подставляя это значение в указанную формулу, получаем выражение коэффициентов ряда (9):

$$A_{mn} = \frac{4P \sin(m\pi x_0/a)\sin(m\pi y_0/b)}{D\pi^6 ab\left(m^2/a^2 + n^2/b^2\right)^2}$$

Подставляя это выражение в ряд (9), находим функцию прогибов для пластинки:

$$w = \frac{4p}{D\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x_0/a)\sin(n\pi y_0/b)}{\left(m^2/a^2 + n^2/b^2\right)^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}; \qquad (19)$$

Зная функцию прогибов, обычным путем можно найти изгибающие моменты, поперечные силы и крутящие моменты.

Литература

1. В.И.Самуль Основы теории упругости и пластичности. –М.: Высшая школа, 1982 – 284с.
2. А.Ф.Смирнов Сопротивление материалов. . –М.: Высшая школа, 1975 – 480с.
3. М.Я Выгодский Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1975 – 870с.