

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ЭЛЕМЕНТЫ РАСЧЕТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ
Учебное пособие

Рассмотрены общие вопросы теории устойчивости продольно сжатых стержней в упругой области. Приводятся сведения по расчету сплошных и сквозных составных колонн. Даны основы инженерного подхода, т. е. приближенного расчета в запас прочности, при проектировании стержней и колонн, базирующегося на принципе равнопрочности конструкции.

Предназначено для студентов всех форм обучения, изучающих полный курс сопротивления материалов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| 1. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ..... | 4 |
| 1. 1. Характеристика явления устойчивости и особенности его изучения..... | 4 |
| 1.1.1. Общие понятия об изучаемом явлении устойчивости..... | 4 |
| 1.1.2. Постановка задачи расчета на устойчивость..... | 6 |
| 1.1.3. Навыки, получаемые студентами при изучении проблем устойчивости..... | 8 |
| 1.2. Устойчивость упругих систем. Понятие о критической нагрузке и ее определение..... | 9 |
| 1.2.1. Выбор расчетной схемы..... | 9 |
| 1.2.2. Моделирование явления потери устойчивости в упругой области.... | 10 |
| 1.2.3. Решение Эйлера для продольно сжатого стержня..... | 13 |
| 1.2.4. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня.... | 16 |
| 1.2.5. Энергетический метод определения критической силы..... | 17 |
| 2. РАСЧЕТ СЖАТЫХ ПРОФИЛЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА..... | 20 |
| 2.1. Прямая задача расчета на устойчивость..... | 20 |
| 2.1.1. Общее выражение для расчета..... | 20 |
| 2.1.2. Определение допускаемой силы..... | 21 |
| 2.2. Обратная задача расчета на устойчивость..... | 21 |
| 2.2.1. Постановка обратной задачи..... | 21 |
| 2.2.2. Расчет сечения для стандартного прокатного профиля..... | 22 |
| 2.2.3. Подбор сечения нестандартной формы..... | 24 |
| 2.3. Рациональная форма поперечного сечения стержня, испытывающего продольный изгиб..... | 25 |
| 2.3.1. Понятие о равнопрочности стержня при продольном изгибе..... | 25 |
| 2.3.2. Оценка относительной материалоемкости (экономичности) стержня..... | 26 |
| 2.3.3. Рациональность полых сечений. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки..... | 29 |
| 3. РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ (СОСТАВНЫХ КОЛОНН)..... | 32 |
| 3.1. Общие понятия о составных колоннах..... | 32 |
| 3.2. Постановка и решение обратной задачи при расчете колонны на устойчивость..... | 34 |
| 3.2.1. Вычисление размеров поперечного сечения (определение номера стандартного профиля..... | 34 |
| 3.2.2. Определение расстояния между соединительными планками... | 36 |
| 3.2.3. Расчет рационального расстояния между ветвями колонны..... | 37 |
| 3.3. Особенности расчета на продольный изгиб стержней (колонн), ослабленных заклепочными или болтовыми отверстиями..... | 48 |
| 4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ..... | 49 |
| Список рекомендуемой литературы..... | 52 |
| Приложение..... | 53 |

1. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ

1.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ЯВЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ОСОБЕННОСТИ ЕГО ИЗУЧЕНИЯ

1.1.1. Общие понятия об изучаемом явлении устойчивости

При работе некоторых элементов конструкций (штока поршня, элементов железнодорожных ферм и мачт электропередач, лопастей несущего винта вертолета и др.) потеря несущей способности может произойти не только потому, что будет исчерпана прочность, но и от того, что элемент не сохранит той формы, которая ему придана конструктором, потеряет свои эксплуатационные свойства и перейдет в предаварийное или аварийное (!) состояние (рис. 1).

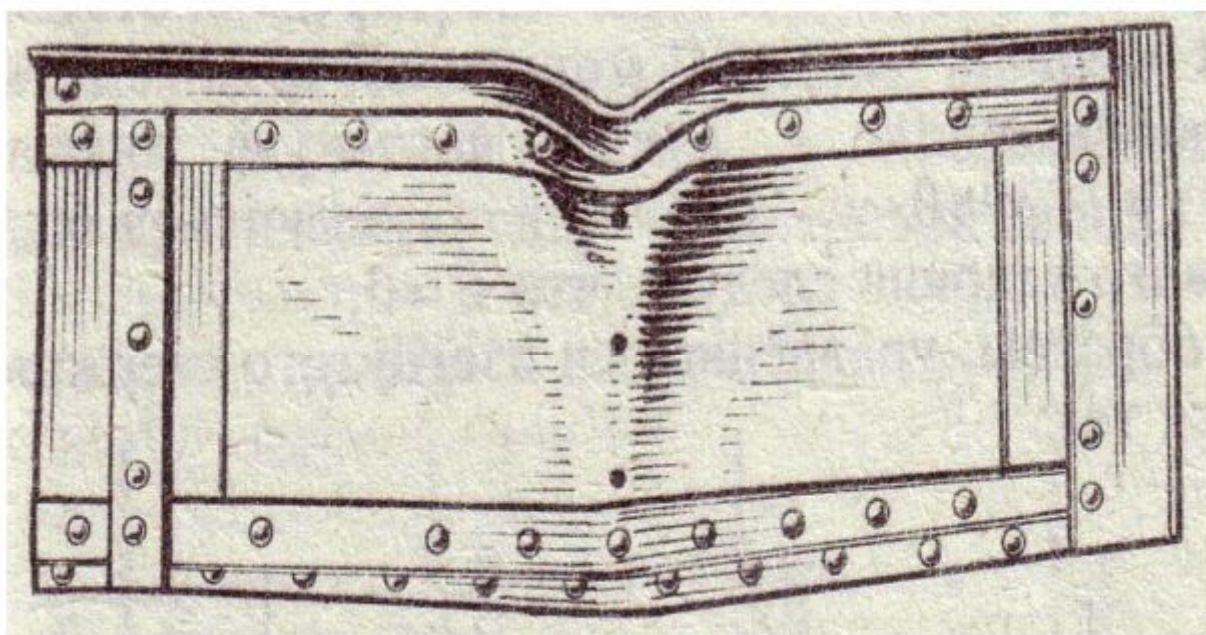


Рис. 1. Практический пример потери устойчивости при плоском изгибе

Наиболее простым для понимания явления потери устойчивости случаем является работа сжатого стержня. Если подвергнуть продольному сжатию, например, тонкую деревянную линейку, то она может сломаться,

изогнувшись. В момент излома сжимающая сила, при которой произойдет разрушение линейки, будет значительно меньше той, которая вызвала бы при сжатии без изгиба напряжение разрушения (временное сопротивление). Излом линейки произойдет потому, что она не сможет сохранить первоначальную форму прямолинейного стержня, а искривится, что будет сопровождаться появлением внутреннего изгибающего момента от сжимающей силы и, следовательно, дополнительных напряжений от изгиба. Говорят: произошла потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия.

В общем случае, при изменении формы элемента конструкции меняется схема его нагружения и вид деформации (пример при плоском изгибе см. на рис. 1), в результате чего элемент попадает в аварийную ситуацию и в любой момент, не выдержав действия дополнительных напряжений, может сломаться.

В приведенном выше примере с линейкой необходимо учесть, что невозможность приложения сжимающей силы точно в центре сечения, наличие искривлений стержня в исходном состоянии, а также внутренние остаточные технологические напряжения являются дополнительными факторами, усугубляющими потерю прямолинейной формы равновесия сжатого стержня и возникновение продольного изгиба. *Продольный изгиб стержня – это наиболее распространенный частный случай «особого вида разрушения», которое, в общем случае, будем называть «потерей устойчивости».*

Для надежной работы конструкции необходимо обеспечить не только ее прочность – надо, чтобы все ее элементы были устойчивы. Они должны при действии нагрузок деформироваться в таких пределах, чтобы сохранялась их первоначальная форма равновесия, т. е. исключался бы переход в аварийное состояние.

Неучет явления потери устойчивости приводит к печальным последствиям. Серьезным уроком, указывающим на необходимость и важность тщательного расчета элементов на устойчивость, является, например, разрушение Квебекского моста (1907 г.) через реку Святого Лаврентия в США: 9000 т металлических конструкций пришло в полную негодность; имелись человеческие жертвы. Восстановление моста, после повторного расчета на прочность (опять по ошибочной методике), привело к его вторичному разрушению (1916 г.). Причина катастрофы заключалась в том, что раскос одной из ферм моста, работающий на сжатие, потерял устойчивость в результате продольного изгиба и повлек за собой разрушение всей конструкции (см. фотографию на обложке данного учебного пособия).

Современный инженер должен ясно представлять: при каких условиях нарушается устойчивая форма равновесия элементов конструкций и уметь применять существующие методы расчета на устойчивость для обеспечения надежной работы объекта в целом.

Явление потери устойчивости изучается в курсе «Сопротивление материалов» в разделе «Устойчивость элементов конструкций» для частных случаев: «Продольный изгиб» и «Продольно-поперечный изгиб» [1–5].

1.1.2. Постановка задачи расчета на устойчивость

С целью получения начальных представлений о постановке задачи расчета на устойчивость сжатых элементов конструкций необходимо вспомнить, что явление потери устойчивости равновесия известно из курса теоретической механики (рис. 2).

Если шару, лежащему на вогнутой поверхности (*a*) сообщить небольшое отклонение от этого положения и отпустить, то он снова возвратится в свое исходное состояние. Шар, лежащий на горизонтальной поверхности (*b*) и смещенный из этого состояния, в исходное состояние не возвращается, но его движение прекращается.

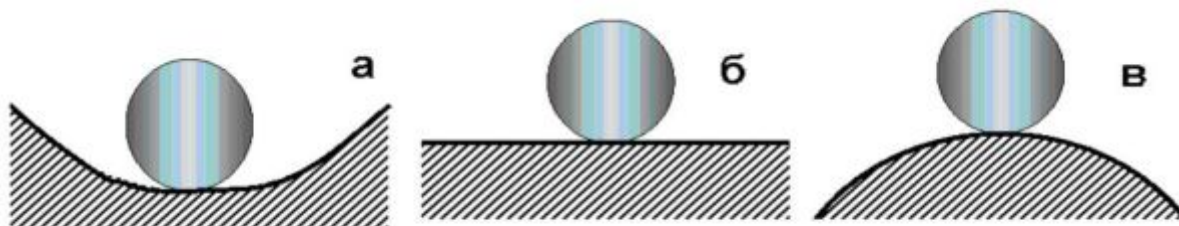


Рис. 2. Характер равновесия:
a – устойчивое; *б* – безразличное; *в* – неустойчивое

Наконец, шар, лежащий в верхней точке выпуклой поверхности, после малейшего отклонения (причина этого отклонения нами не разбирается) от первоначального положения продолжает двигаться дальше (*в*) – наблюдается потеря равновесия. Из приведенных примеров очевидно, что положению устойчивого равновесия соответствует минимум потенциальной энергии системы (рис. 2, *a*).

Аналогичные примеры можно привести и в случае равновесия деформируемых тел при различных схемах нагружения (рис. 3).

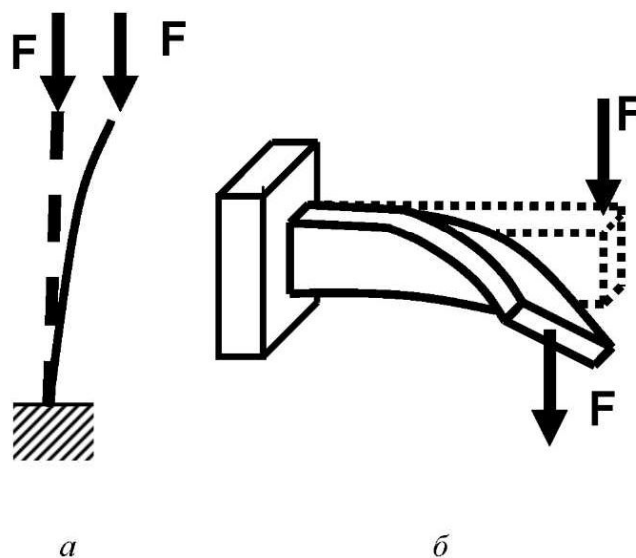


Рис. 3. Примеры потери устойчивости при разных схемах нагружения:
a – продольный изгиб длинного тонкого стержня; *б* – изменение формы равновесия

Из рассмотренных примеров ясно, что основной задачей расчета на устойчивость является определение условий (обычно силовых), при дости-

жении которых начинается переход от устойчивого положения равновесия к неустойчивому – недопустимому для дальнейшей эксплуатации изделия. *Эти условия называют критическими.*

Известно два вида потери устойчивости. Первый – это переход от одной моментной формы равновесия к другой (пример: потеря устойчивости арочной конструкции). Второй – переход от безмоментной формы равновесия к моментной (примеры: потеря устойчивости стоек, колонн, раскосов ферм и пр.). В дальнейшем мы будем заниматься только *вторым видом потери устойчивости.*

1.1.3. Навыки, получаемые студентами при изучении проблем устойчивости

Изучение раздела «Устойчивость элементов конструкций» преследует конкретные учебные цели, связанные с приобретением студентами следующих навыков:

- по овладению методикой расчета на устойчивость элементов конструкций;
- использованию вычислительных средств (обычно – компьютера), с помощью которых существенно сокращается время расчетов, уменьшается вероятность появления вычислительных погрешностей и открывается возможность оперативного анализа полученных результатов;
- использованию справочной технической литературы [6–9], ГОСТов [10] и соблюдению требований ЕСКД при оформлении расчетно-пояснительной записки [11];
- принятию конкретных технических решений с целью повышения несущей способности при одновременном уменьшении материалоемкости (веса) проектируемых стержней или колонн различного конструктивного оформления, т. е. овладению элементарными навыками конструирования.

Перечисленные навыки необходимы инженеру в конкретной профессиональной деятельности, как на стадии проектирования (конструирования), так и на стадии эксплуатации реальных сооружений или машин.

Выполнение расчетно-проектировочной работы на тему «Расчет на устойчивость составной колонны» (по индивидуальному заданию) направлено на формирование у студентов всех вышеперечисленных навыков.

1.2. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ. ПОНЯТИЕ О КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ И ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

1.2.1. Выбор расчетной схемы

Для анализа устойчивости элемента (или системы), необходимо, в первую очередь, задать расчетную схему. Основной, ставшей классической, является схема идеальной системы. Например, если речь идет о сжатом стержне, – его геометрическая ось прямолинейна, материал однороден, сжимающие силы приложены центрально и вдоль оси, остаточные напряжения в материале отсутствуют.

Идеальной системе сообщается отклонение от положения равновесия. Если после устранения причин, вызвавших это отклонение, система возвращается к исходному состоянию равновесия, то это первоначальное состояние считается устойчивым. Динамические силы и силы инерции, возникающие при трансформации системы, не учитываются. Внешние нагрузки, (например, силы), при которых устойчивое положение равновесия становится неустойчивым, называются *критическими нагрузками*.

Если после снятия внешних нагрузок остаточные деформации в системе отсутствуют, потеря устойчивости происходила при упругом деформировании, т. е. в области закона Гука; если после разгрузки наблюдаются остаточные деформации, – в упруго-пластической области. Мы преимущественно будем заниматься упругой потерей устойчивости.

1.2.2. Моделирование явления потери устойчивости в упругой области

Рассмотрим теоретическую модель потери устойчивости на примере абсолютно жесткого маятника, связанного с основанием спиральной пружиной (рис. 4). Абсолютно жесткий маятник, очевидно, не может потерять устойчивость за счет продольного изгиба. Эта простейшая модель содержит в себе все основные свойства, характерные для более сложных задач устойчивости. Она наглядно показывает особенности подхода, который обычно используется при анализе устойчивости упругих систем.

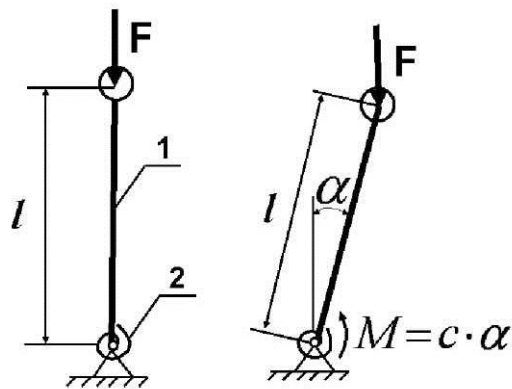


Рис. 4. Расчетная схема жесткого маятника:
 l – маятник; 2 – пружина

Если маятник отклонить от вертикали, пружина будет возвращать его в исходное состояние восстанавливающим моментом $M = c\alpha$, где c – коэффициент жесткости пружины. При определенной длине l и величине груза F маятник не вернется в исходное положение, т. е. перейдет в неустойчивое состояние.

Условие равновесия маятника запишем в виде:

$$Fl \cdot \sin \alpha = c \cdot \alpha . \quad (1)$$

Как видим, это нелинейное уравнение. Если перемещение системы (угол α) мало, то можно принять условие линеаризации в виде

$\sin \alpha = \alpha$ и тогда точное уравнение (1) заменить приближенным:

$$(F \cdot l - c) \cdot \alpha = 0. \quad (2)$$

Отсюда получаем два возможных решения *Первое решение*: $\alpha = 0$. Это означает, что при вертикальном положении маятника условие равновесия выполняется при любом значении силы F . Такое решение тривиально, т. е. не содержит элементов новизны и, таким образом, не представляет интереса. Но уравнение (2) соблюдается и при $F = c/l$ ($\alpha \neq 0$). Т. е., вблизи (угол α мал!) первого состояния равновесия обнаруживается еще одно состояние равновесия, сколь угодно близкое к первому – *второе решение*. Силу, соответствующую этому состоянию, называют критической $F_{\text{кр}} = c/l$. Наблюдается *бифуркация* (*bifurcus* – *раздвоенный*), т. е. *раздвоение поведения системы*.

Из уравнения для критической силы очевидно: чем больше длина маятника l и меньше жесткость пружины c , тем при меньшей силе F теряется устойчивость. Однако здесь возникают нерешенные вопросы:

1. При каком угле α ($\alpha \neq 0$) это произойдет?
2. Какое решение соответствует условию $F > F_{\text{кр}}$?
3. Почему при $F > F_{\text{кр}}$ положение неустойчивое, а при $F < F_{\text{кр}}$ оно становится устойчивым?

Для ответов на эти вопросы необходимо решить исходное уравнение (1) точно. Представим его в виде:

$$\frac{Fl}{c} = \frac{\alpha}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

На рис. 5 показана зависимость $Fl/c = f(\alpha)$.

Рассмотрим первое решение ($\alpha = 0$). При линеаризации уравнения равновесия, т. е. принимая $\sin \alpha = \alpha$, мы получали только узкую часть показанного графика, непосредственно примыкающую к оси ординат. При

этом приближении всю кривую $f(\alpha)$ фактически заменяли горизонтальной прямой, проходящей через точку бифуркации B в окрестности первого решения ($\alpha = 0$). Поэтому и угол α в этом линейном приближении остается неопределенным. Мы знаем только, что он очень мал. При силе $F > F_{кр} = c/l$, уравнение (2) соответствует точкам, лежащим на оси ординат указанного графика (см. рис. 5).

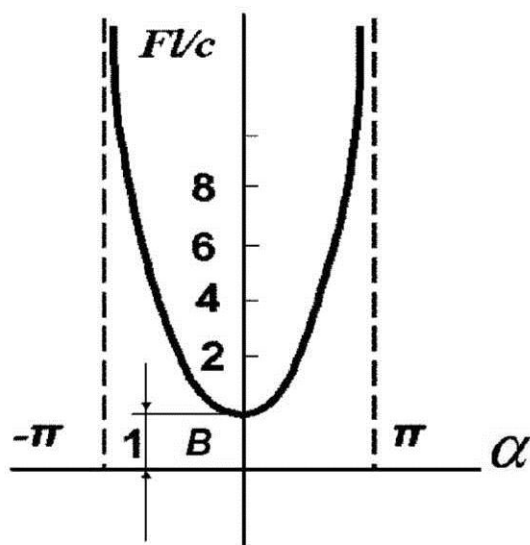


Рис. 5. Зависимость параметра FV/c от угла отклонения маятника (B – точка бифуркации)

Таким образом, мы получили ответы на первые два вопроса. Для решения третьего вопроса подсчитаем величину потенциальной энергии U системы, складывающейся из потенциальной энергии $M \cdot \alpha^2/2$ деформации пружины и потенциальной энергии $F \cdot l \cdot \cos \alpha$ груза:

$$U = \frac{M \cdot \alpha^2}{2} + F \cdot l \cdot \cos \alpha = \frac{c \cdot \alpha^2}{2} + F \cdot l \cdot \cos \alpha. \quad (4)$$

Для определения экстремума функции $U(\alpha)$ продифференцируем уравнение (4) по аргументу α и полученное выражение приравняем к нулю

$$\frac{dU}{d\alpha} = c \cdot \alpha - F \cdot l \cdot \sin \alpha = 0. \quad (5)$$

Как видим, получили уравнение равновесия (1). Таким образом, уравнение равновесия – это условие экстремума потенциальной энергии системы (*но не деформации!*).

После второго дифференцирования имеем:

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} = c - F \cdot l \cdot \cos \alpha. \quad (6)$$

Положим $\alpha = 0$, тогда $\frac{d^2U}{d\alpha^2} = c - F \cdot l = (c/l - F) \cdot l$. Таким образом, если $F < F_{кр} = c/l$, вторая производная положительна и, следовательно, потенциальная энергия принимает минимальное значение, т. е. положение системы устойчивое. Если же $F > F_{кр}$, – положение неустойчивое. Результаты этого анализа, как видим, и являются ответом на третий вопрос.

Разобранный пример очень показателен. Какая бы сложная задача устойчивости в упругой области ни рассматривалась, все указанные особенности, выявленные при обсуждении данной модели, сохраняются. Т. е., *решая упругую задачу в малых перемещениях, мы можем определить величину критической нагрузки (силы), но не можем определить сами перемещения!* В дальнейшем все изложение ведется только для области малых перемещений.

Минимуму потенциальной энергии, т. е. условию устойчивого равновесия, соответствует область значений второй производной $\frac{d^2U}{d\alpha^2} > 0$. Это условие, очевидно, запишется в виде:

$$c - F \cdot l \cdot \cos \alpha > 0. \quad (7)$$

1.2.3. Решение Эйлера для продольно сжатого стержня

Рассмотрим прямолинейный стержень длиной l , шарнирно закрепленный по концам и нагруженный продольной сжимающей силой F (рис. 6), приложенной строго по его геометрической оси. Весом стержня пренеб-

регаем. Рабочие напряжения в стержне при этом не превосходят предел пропорциональности ($\sigma_{\text{мп}}$) материала, т. е. решение ищем в упругой области (области закона Гука).

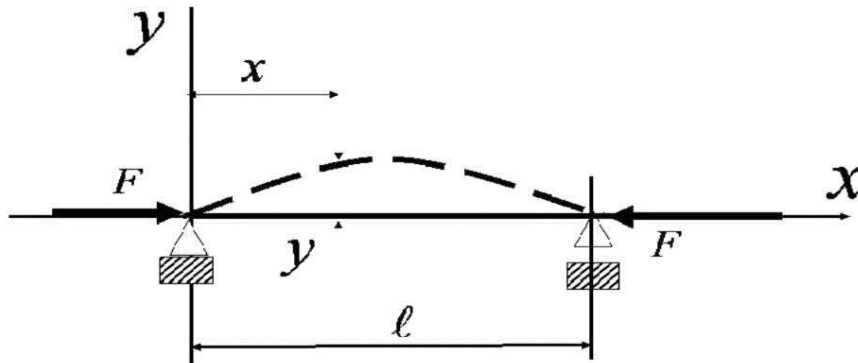


Рис. 6. Расчетная схема продольно сжатого стержня

Как показывает эксперимент, стержень в некоторый момент нагружения начинает изгибаться. Причина этого изгиба, как установлено выше, – переход от устойчивой формы равновесия к неустойчивой. Прогиб в сечении x обозначим через y . Тогда внутренний изгибающий момент в сечении x будет равен $M = F \cdot y$. Из теории плоского изгиба [4, 5] известно:

$$E \cdot I \cdot y'' = M, \quad (8)$$

где $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$; E – модуль Юнга; I – соответствующий осевой момент инерции поперечного сечения. Учитывая противоположные знаки для изгибающего момента и прогиба, имеем:

$$E \cdot I \cdot y'' = -F \cdot y. \quad (9)$$

В самом деле, если стержень изогнут, как показано на рис. 6, то $M < 0$, а $y > 0$; если стержень изогнут в другую сторону – то знаки меняются на противоположные.

Обозначим:
$$\frac{F}{E \cdot I} = K^2. \quad (10)$$

Подставив K^2 в уравнение (9), получим дифференциальное уравнение в следующем виде:

$$y'' + K^2 \cdot y = 0. \quad (11)$$

Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решением этого однородного линейного уравнения второго порядка будет выражение:

$$y = C_1 \cdot \sin(K \cdot x) + C_2 \cdot \cos(K \cdot x). \quad (12)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из граничных условий. При $x = 0$, $y = 0$ и при $x = l$, $y = 0$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 &= 0, \\ C_1 \cdot \sin(K \cdot l) + C_2 \cdot \cos(K \cdot l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Во-первых, очевидно, что при $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Это первое решение тривиально – стержень сохраняет прямолинейную форму, что противоречит поставленной задаче. Второе решение получим, приравняв определитель к нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(K \cdot l) & \cos(K \cdot l) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sin(K \cdot l) = 0,$$

откуда

$$K \cdot l = n \cdot \pi.$$

Используя уравнение (10), получим значение критической силы:

$$F = F_{\text{кр}} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}, \quad (14)$$

где n – произвольное целое число.

Наименьшее значение силы $F_{\text{кр}}$, отличной от нуля, будет при $n = 1$. Эта сила называется *первой критической*, или *эйлеровой силой* и при минимальном моменте инерции поперечного сечения $I = I_{\text{min}}$ [5] определяется выражением:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{min}}}{l^2}. \quad (15)$$

Кроме того, при $n = 1$ имеем $K \cdot l = \pi$ и уравнение (12) принимает вид:

$$y = C_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) + C_2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{l} \cdot x\right) = C_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right). \quad (16)$$

Отсюда следует, что изогнутая ось стержня соответствует половине волны синусоиды, поскольку легко показать, что в последнем выражении (16) постоянная $C_2 = 0$ – см. первое уравнение системы (13).

1.2.4. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня

На рис. 7 показаны четыре наиболее распространенные на практике случая закрепления концов стержня. Конструктивная длина стержня l во всех четырех случаях одинакова.

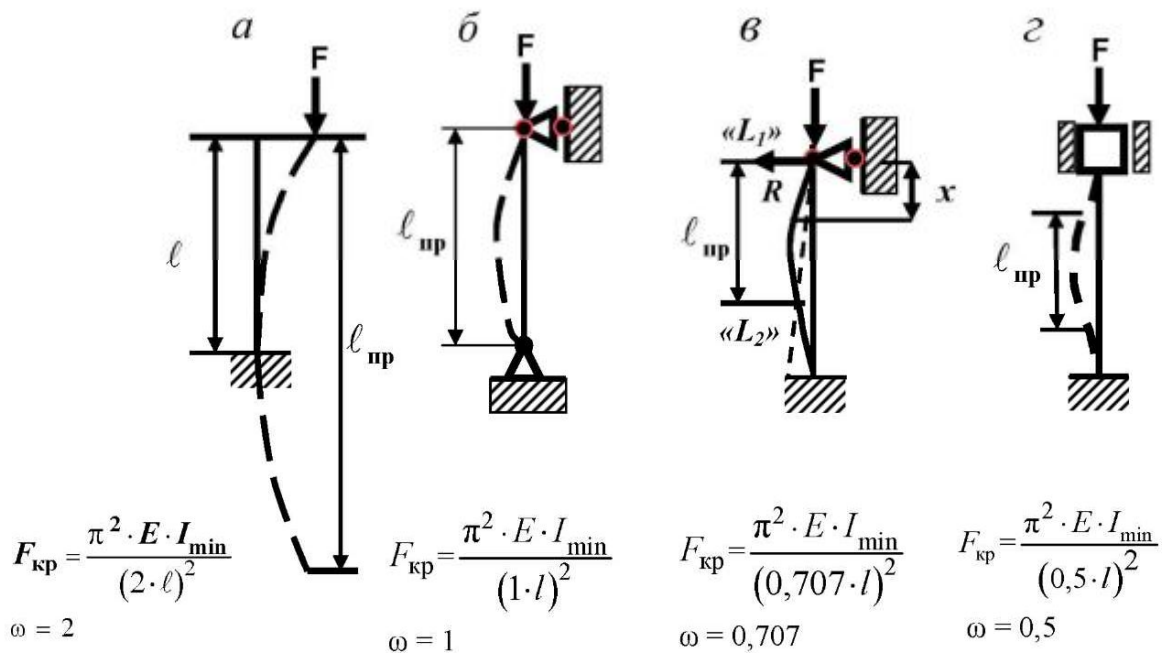


Рис. 7. Некоторые виды закрепления концов стержня и значения критической силы для этих случаев ($l_{\text{пр}} = \omega \cdot l$ – приведенная длина стержня)

В пределах малых перемещений (как принято в п. 1.2.2) рассуждение о форме упругой линии стержня с шарнирным закреплением концов (рис. 7, б) можно распространить на другие случаи закрепления (рис 7, а, в, г). Случай «в» – особый, так как выражение изгибающего момента в этом случае в уравнении (8) будет иным, по сравнению с «а», «б», «г». Объясняется это тем, что точки « L_1 » и « L_2 » (в точке « L_2 » кривизна упругой линии равна нулю) не лежат на прямой, параллельной линии действия силы F . В этом случае возникает поперечная сила R , которая дополнительно войдет в выражение момента, т. е. имеем $M = -F \cdot y + R \cdot x$. В итоге, получим величину $\omega = 0,707$, что установлено [4, 5] аналитическим путем. Окончательно формула для расчета критической силы во всех рассмотренных случаях закрепления концов стержня может быть записана в общем виде:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{min}}}{(\omega \cdot l)^2}, \quad (17)$$

где ω – коэффициент, учитывающий способ закрепления концов стержня (коэффициент приведенной длины), значения ω даны на рис. 7.

Зависимость критической силы от способа закрепления стержня можно проверить экспериментально (см. соответствующую лабораторную работу в курсе «Сопротивление материалов»).

1.2.5. Энергетический метод определения критической силы

Определение критической силы путем решения дифференциального уравнения упругой линии балки не всегда удобно. На практике (в более сложных случаях) этот метод часто приводит к проблемам при аналитическом исследовании задачи. Использование современных компьютеров позволяет перейти к вариационным методам решения, связанным с уве-

личением объема вычислительного процесса, но более простым (с точки зрения аналитического изучения) для определения критических нагрузок. Одним из таких методов является энергетический [5].

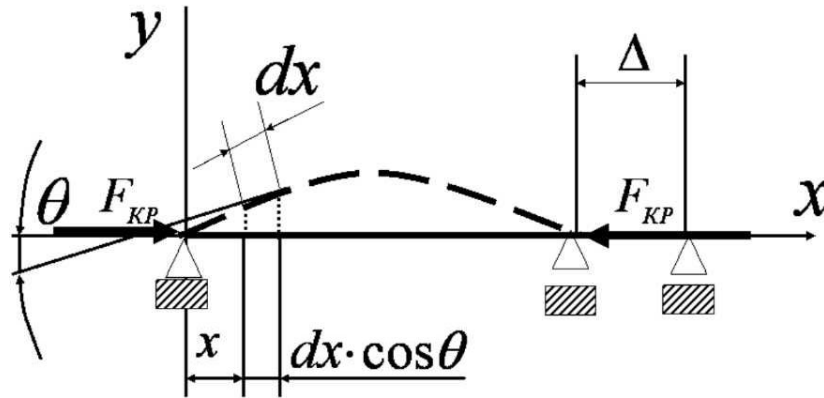


Рис. 8. Расчетная схема для определения критической силы энергетическим методом

Рассмотрим стержень в момент изгиба (рис. 8) подобно тому, как мы это делали в п. 1.2.3. Величина работы силы $F_{кр}$ на перемещении Δ будет определяться выражением:

$$W = F_{кр} \cdot \Delta. \quad (18)$$

Произведение $F_{кр} \cdot \Delta$ не имеет множителя 1/2, поскольку на пути Δ сила $F_{кр}$ своего значения не меняет. При изгибе стержень приобретает потенциальную энергию деформации:

$$U = \int_0^l \frac{M^2 \cdot dx}{2 \cdot E \cdot I_{\min}}. \quad (19)$$

Так как $M = EI_{\min} \cdot y''$, то

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l E \cdot I_{\min} \cdot (y'')^2 \cdot dx. \quad (20)$$

Перемещение Δ может быть определено как разность между длиной l и проекцией изогнутой линии на ось x . Для приращений из рис. 8 имеем:

$$d\Delta = dx - dx \cdot \cos \theta. \quad (21)$$

Разложим $\cos \theta$, используя теорию рядов. Для практической (инженерной) постановки задачи достаточно сохранить два первых слагаемых ряда. Помня, что при малых углах изгиба $\theta = y'$, получим:

$$d\Delta = dx - dx \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (y')^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot (y')^2 \cdot dx.$$

Следовательно

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l (y')^2 \cdot dx. \quad (22)$$

Закон сохранения энергии, для упрощения задачи, примем в виде: $W = U$.

Тогда

$$F_{\text{кр}} = \frac{E \cdot I_{\text{min}} \int_0^l (y'')^2 \cdot dx}{\int_0^l (y')^2 \cdot dx} \quad (23)$$

или

$$F_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l M^2 \cdot dx}{\int_0^l (y')^2 \cdot dx} \cdot \frac{1}{E \cdot I_{\text{min}}}. \quad (24)$$

Если известна функция $y(x)$, то $F_{\text{кр}}$ определяется легко. Но $y(x)$ остается неизвестной до тех пор, пока не решено дифференциальное уравнение для изогнутой оси. Получается, что для определения критической силы надо вернуться к методу Эйлера. Однако есть второй путь. Эту функцию можно предварительно оценить экспериментально или задать приближенно, «угадав» вид упругой линии (уравнение изогнутой оси). При этом очевидно, что необходимо соблюдать граничные условия.

Предположим, для примера, что стержень изгибается не по синусоиде, как показано в задаче Эйлера, а по дуге квадратичной параболы вида:

$$y = D \cdot x \cdot (l - x), \quad (25)$$

где D – некоторая постоянная. Как видим, граничные условия соблюдаются: при $x = 0$; $y = 0$ и при $x = l$; $y = 0$. Тогда $y' = D \cdot (l - 2 \cdot x)$; $y'' = -2D$.

Подставляя значения производных y' и y'' в выражение (23), имеем:

$$F_{кр}^* = \frac{12 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2}. \quad (26)$$

Сравнивая формулу (26) с решением Эйлера (15), видим, что при этом приближенном описании упругой линии расхождение составляет величину: $\frac{12 - \pi^2}{\pi^2} \cdot 100 \cong 22 \%$. Такая погрешность выходит за рамки обычно принятой точности ($\pm 5 \%$) технического решения. Однако для предварительной оценки полученный результат можно считать удовлетворительным.

2. РАСЧЕТ СЖАТЫХ ПРОФИЛЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА

2.1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

2.1.1. Общее выражение для расчета

Подставляя в условие устойчивости $\sigma \leq [\sigma_y]$ выражения для нормального напряжения при сжатии $\sigma = F/A$ (A – площадь поперечного сечения) и допускаемого напряжения на устойчивость при продольном изгибе $[\sigma_y] = \varphi[\sigma_-]$, получим:

$$\frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma_-], \quad (27)$$

где φ – коэффициент снижения допускаемого напряжения на сжатие $[\sigma_-]$. Этот коэффициент принимает значения в интервале $0 \leq \varphi \leq 1$.

Из последнего выражения, в зависимости от формулировки задачи, можно определить допускаемую силу (*прямая задача*) или необходимую площадь поперечного сечения стержня (*обратная задача*).

2.1.2. Определение допускаемой силы

Из выражения (27) записываем допускаемую силу в виде:

$$[F] = \varphi \cdot [\sigma_-] \cdot A. \quad (28)$$

Из формулы (28) следует, что для расчета допускаемой силы необходимо знать величину коэффициента φ . Вначале по известным размерам стержня и способу его закрепления вычисляют конструктивную гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\omega \cdot l}{i_{\min}}, \quad (29)$$

где i_{\min} – минимальный радиус инерции поперечного сечения.

Зная конструктивную гибкость и материал стержня, можно с помощью специальной таблицы (см. табл. П. 2) определить φ . После этого вычисляется допускаемая сила по формуле (28).

2.2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

2.2.1. Постановка обратной задачи

Из выражения (27) определим необходимую площадь поперечного сечения стержня:

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_-]}. \quad (30)$$

Коэффициент φ зависит от вида материала и конструктивной гибкости стержня; конструктивная гибкость стержня, в свою очередь, – от минимального радиуса инерции поперечного сечения стержня, который, как известно, определяется по формуле

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

Радиус инерции, как видно из последней формулы, зависит от искомой площади поперечного сечения A и минимального осевого момента инерции I_{\min} . Таким образом, решение по формуле (30) нельзя получить в конечном аналитическом виде. Поэтому подбор сечения стержня в случае продольного изгиба, т. е. обратная задача, проводится методом итераций (последовательных приближений). В первом приближении, площадь A рассчитывается по наперед заданному значению φ (обычно первое значение принимается в интервале: $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,8$).

Подбор сечения выполняется по-разному: в зависимости от того, является ли данное сечение стандартным прокатным профилем, когда размеры его определяются специальными таблицами сортамента согласно ГОСТа (например, для прокатного сортамента стали) или сечение имеет отличную от стандартной конфигурацию.

2.2.2. Расчет сечения для стандартного прокатного профиля

Расчет сечения, как указано выше, проводится методом итераций. Изложим кратко алгоритм подбора сечения для стержней, изготовленных из стандартного профиля (швеллер; двутавр; уголок и прочие, выполненные из стали Ст. 3):

1) задаемся коэффициентом φ (первая итерация), принимая его, в первом приближении, например $\varphi_1 = 0,6$, и по формуле (30) определяем первый ориентировочный размер A_1 :

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma_-]}.$$

Однако этот размер A_1 , определенный по первому значению φ_1 , может быть неверным. Поэтому необходимо провести проверку на устойчивость;

2) пользуясь таблицами сортамента для соответствующего профиля, по найденной величине A_1 выбираем ближайший по площади номер профиля

и для него выписываем табличные значения величин A'_1 ; $i'_{\min 1}$. Затем вычисляем конструктивную гибкость стержня из этого номера профиля:

$$\lambda'_1 = \frac{\omega \cdot l}{i'_{\min 1}};$$

3) по найденной гибкости, зная материал профиля, определяем по таблице коэффициентов снижения допускаемого напряжения (см. табл. П. 2) уточненное значение коэффициента ϕ'_1 , соответствующее принятому номеру профиля, и вычисляем допускаемое напряжение $[\sigma_y] = \phi'_1[\sigma_-]$.

Теперь можно подсчитать действительное напряжение в стержне: $\sigma'_1 = \frac{F}{A'_1}$ для принятого номера, а далее сравнить это напряжение с рассчитанным, в первом приближении, допускаемым напряжением на устойчивость. Устойчивость будет обеспечена, если выполняется условие (27):

$$\sigma'_1 \leq \phi'_1 \cdot [\sigma_-].$$

Обычно номер профиля, найденный в первом приближении, не является окончательным, так как величина σ'_1 может значительно отличаться от $[\sigma_y]$.

Определяем ее отклонение – относительную перегрузку или недогрузку:

$$\frac{\sigma'_1 - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} \cdot 100.$$

Перегрузка более 5 % не допустима!

Следует заметить, что для стандартных профилей, размеры которых определяются табличным сортаментом, недогрузка может быть и более 5 %. Однако *недогрузка более 5 % допускается лишь в том случае, когда при выборе меньшего номера профиля возникает перегрузка более 5 %*. Если условие устойчивости выполняется (в интервале принятых отклонений), то

решение задачи считается на этом законченным. В случае невыполнения условия устойчивости (т. е. при выходе за принятый интервал отклонений) необходимо расчет продолжить, производя повторные итерации;

4) во втором приближении (вторая итерация) задаемся новым значением коэффициента φ . Опыт показывает, что лучшие результаты получаются, если во втором приближении принять:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

Затем, как и в первом пункте алгоритма, вновь определяется площадь сечения:

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 \cdot [\sigma_-]}.$$

Дальнейший ход решения состоит в последовательности, уже отмеченной выше. Расчет будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнуто выполнение условия устойчивости. Обычно при решении подобных задач оказывается достаточным произвести две-три последовательные итерации.

2.2.3. Подбор сечения нестандартной формы

При определении размеров нестандартных сечений стержней, для которых по заданной форме (круг, квадрат, прямоугольник и т. д.) должны быть установлены непосредственные размеры сечения (диаметр круга, сторона квадрата или две стороны прямоугольника и т. д.), расчет, в принципе, остается прежним и также выполняется методом итераций. С целью большей компактности дальнейшего изложения укажем здесь только те операции, которые отличают расчет в данном случае от описанного алгоритма:

1) то же;

2) по определенному в первом пункте алгоритма значению площади A вычисляем размеры сечения. Так, для круга $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, для квадрата $a = \sqrt{A}$.

Здесь необходимо отметить, что для таких сечений как, например, прямо-

угольник (с размерами b ; h) в условии задачи должно быть задано соотношение сторон $\frac{h}{b} = q$, а для полых сечений – соотношение между наружным и внутренним размерами сечения. Так, для прямоугольника будем иметь: $A = b \cdot h$, но $h = q \cdot b$; откуда $A = q \cdot b^2$ и, следовательно, $b = \sqrt{\frac{A}{q}}$.

Определяем минимальный радиус инерции поперечного сечения i_{\min} . Целесообразно вначале вывести формулу в общем виде для вычисления i_{\min} , а затем уже в нее подставлять числовые значения. Так, например, для квадратного сечения будем иметь:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Зная радиус инерции, вычисляем конструктивную гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\omega \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \omega \cdot l}{a} = \frac{3,464 \cdot \omega \cdot l}{a}.$$

Полученными формулами для i_{\min} и λ удобно пользоваться и при повторных итерациях;

3) то же;

4) то же.

2.3. РАЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ, ИСПЫТЫВАЮЩЕГО ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

2.3.1. Понятие о равнопрочности стержня при продольном изгибе

Рациональной формой поперечного сечения стержня при продольном изгибе может быть только такая, при которой величины критических напряжений, определяемые при его изгибе вобеихглавных плоскостях инерции (x, y ; x, z), одинаковы, т. е. соблюдается *условие равнопрочности*:

$$(\sigma_{кр})_y = (\sigma_{кр})_z. \quad (31)$$

Подставляя в условие равнопрочности (31) значения критического напряжения, например, по формуле Эйлера [1, 4, 5], получаем:

$$\frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_y^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_z^2}$$

и, следовательно:

$$\lambda_y = \lambda_z. \quad (32)$$

При одинаковых способах закрепления концов стержня в обеих главных плоскостях инерции (широко распространенный на практике случай)*, очевидно, имеем: $\omega_y = \omega_z$. Тогда условию (32) будет равносильно условие:

$$I_y = I_z, \quad (33)$$

что следует из формулы (29) для конструктивной гибкости стержня.

Выражения (32) или (33) являются *необходимыми условиями рациональной формы поперечного сечения стержня при продольном изгибе*. Этим условиям равнопрочности, очевидно, удовлетворяют стержни, сечения которых по конфигурации обладают центральной симметрией (круг, кольцо, правильный многоугольник и т. д.).

2.3.2. Оценка относительной материалоемкости (экономичности) стержня

Из двух стержней, каждый из которых является равнопрочным по конфигурации сечения, более экономичным (термин «экономичность» применяется в смысле экономии материала при равной несущей способности конструкции) будет тот, которой при одинаковых для них гибкостях, а, значит, при совпадающей несущей способности на устойчивость, имеет меньшую площадь поперечного сечения. Для случая упругого продольного изгиба, т. е. в области Эйлера, это доказывается следующим образом.

*Случаи, когда способы закрепления стержня в разных плоскостях инерции различны ($\omega_y \neq \omega_z$), нами не разбираются.

Выпишем выражения критического напряжения по Эйлеру для двух сравниваемых между собой по экономичности сечений:

$$\sigma'_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\omega \cdot l}{i_1}\right)^2}, \quad \sigma''_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\omega \cdot l}{i_2}\right)^2}. \quad (34)$$

Введем в уравнения (34) площади поперечных сечений стержней, умножив и разделив числитель и знаменатель, соответственно, на A_1 и A_2 :

$$\sigma'_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A_1}{(\omega \cdot l)^2 \frac{A_1}{i_1^2}}, \quad \sigma''_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A_2}{(\omega \cdot l)^2 \frac{A_2}{i_2^2}}. \quad (35)$$

В выражениях (35) $\frac{A}{i^2}$ является удобным безразмерным параметром для оценки экономичности сечения при продольном изгибе, что легко показать.

Из выражений (35) определим площади поперечных сечений стержней:

$$A_1 = \frac{\sigma'_{кр} \cdot (\omega \cdot l)^2 \cdot \frac{A_1}{i_1^2}}{\pi^2 \cdot E}, \quad A_2 = \frac{\sigma''_{кр} \cdot (\omega \cdot l)^2 \cdot \frac{A_2}{i_2^2}}{\pi^2 \cdot E}. \quad (36)$$

Затем запишем отношение площадей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sigma'_{кр} \cdot \frac{A_1}{i_1^2}}{\sigma''_{кр} \cdot \frac{A_2}{i_2^2}}.$$

При одинаковой величине критических напряжений $\sigma'_{кр} = \sigma''$ (т. е. при равнопрочности двух стержней!) для обоих сечений отношение $\frac{A_1}{A_2}$,

определяемое отношением параметров $\frac{A}{i^2}$, непосредственно фиксирует относительный расход материала, т. е. экономичность сечения.

Из всех сплошных сечений, для которых выполняются условия (32) или

(33), круглое сплошное сечение (диаметром d) является самым материалоемким. Поэтому экономичность будем оценивать по сравнению с круглым сечением площадью A_0 , вводя коэффициент экономичности исследуемого сечения (A) при продольном изгибе как отношение A_0/A :

$$K_{\text{э}} = \frac{A_0}{A} = \frac{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{16}{d^2}}{i^2}.$$

Следовательно

$$\left. \begin{aligned} K_{\text{э}} &= 4\pi \cdot \frac{i^2}{A}, \\ K_{\text{э}} &= 4\pi \cdot \frac{I}{A^2}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Если сечение не удовлетворяет условию $I_y = I_z$, то, очевидно, в формулы (37) должны подставляться значения i_{\min} и I_{\min} . С целью сравнения экономичности приведем значения $K_{\text{э}}$ для некоторых сечений:

1) *квадратное сечение*:

$$K_{\text{э}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot a^4}{12 \cdot a^4} = 1,047.$$

Таким образом, квадратное сечение, по сравнению с круглым, оказывается более экономичным, однако преимущество его невелико. Экономия материала для квадратного сечения составляет, как видно, 4,7 %;

2) *двутавровое сечение*. Значения I_{\min} и i_{\min} для двутавровых катаных профилей определяются по таблицам сортамента (ГОСТ 8239–72). Причем отношение $\frac{I}{A^2} = \frac{Y_{\min}}{A^2}$ зависит от номера профиля. Вычислим коэффициент экономичности, например, для двутавра № 30 а:

$$K_{\text{э}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 436,0}{49,90^2} \cong 2,2.$$

В общем, двутавровые профили оказываются экономичнее, чем стержни сплошного круглого сечения, примерно в 1,1...2,2 раза.

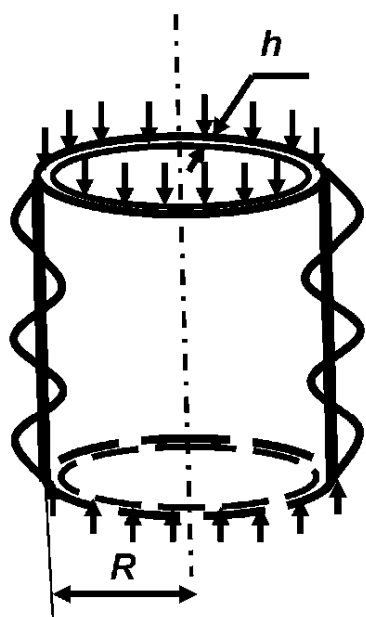


Рис. 9. Оссимметричная форма потери устойчивости тонкостенной трубы

Для стержней, работающих в областях упруго-пластического продольного изгиба или пластического сжатия (II-я и III-я области; см. рисунок, приведенный в Приложении), данный вывод, в принципе, остается справедливым; однако выражения (37) принимают иной, более сложный вид, так как формулой Эйлера в этих случаях пользоваться уже нельзя. Очевидно, что для стержней очень малой гибкости ($\lambda \Rightarrow 0$), величина предельной нагрузки не будет зависеть от формы поперечного сечения, так как разрушающим напряжением для таких стержней является предел текучести (или временное сопротивление).

2.3.3. Рациональность полых сечений. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки

Исходя из условия (37), наиболее экономичными должны быть трубчатые (полые) сечения, так как для них с увеличением пустотелости возрастает величина осевого момента инерции при фиксированной площади поперечного сечения. Это можно доказать аналитически. Однако толщина стенок h таких сечений (рис. 9) не может быть бесконечно малой. Она должна быть достаточной для того, чтобы сами стенки не теряли устойчивость, смятаясь в складки, как показано на этом рисунке.

Потеря устойчивости цилиндрической оболочки (тонкостенной трубы), равномерно сжатой вдоль оси, происходит по-иному, чем сжатых сплошных стержней. Из графика, представленного на рис. 10, видно, что при

этом существует два критических сжимающих усилия («верхнее» $F'_{кр}$ и «нижнее» $F''_{кр}$), различающихся по величине. Потеря устойчивости сопровождается сменой усилия $F'_{кр}$ на $F''_{кр}$. Критическое напряжение, соответствующее верхнему усилию, можно определить по формуле Лоренца:

$$\sigma'_{кр} = \frac{E \cdot h}{R \cdot \sqrt{3(1-\nu^2)}} \cong 0,61 \cdot \frac{E \cdot h}{R}, \quad (38)$$

где h – толщина стенки трубы; R – радиус срединной поверхности трубы; $\nu \approx 0,3$ – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга.

Критическое напряжение, соответствующее нижнему усилию, рассчитывается по формуле:

$$\sigma''_{кр} \cong 0,19 \cdot \frac{E \cdot h}{R}. \quad (39)$$

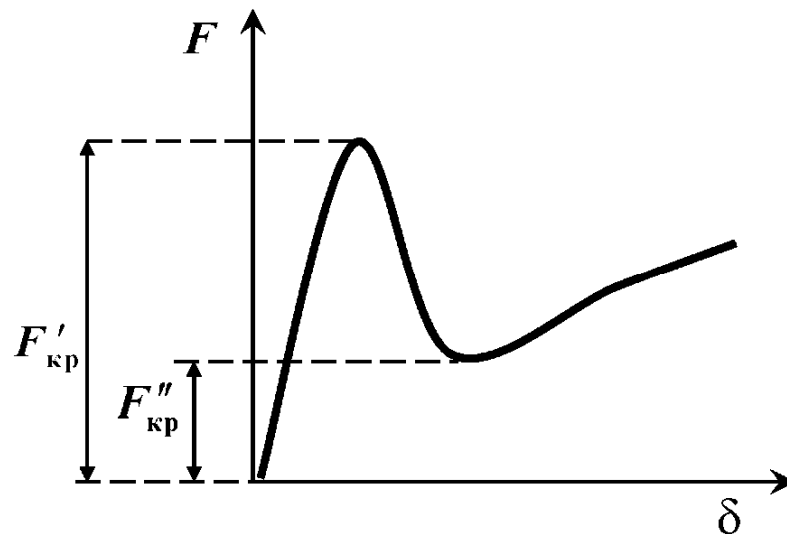


Рис. 10. Кривая изменения нагрузки при сближении торцов сжатой тонкостенной трубы

Приведенные формулы применимы, если $\frac{R}{h} \geq 70$. Из сравнения формул (38) и (39) следует, что «верхнее» и «нижнее» критические напряжения отличаются более чем в три раза.

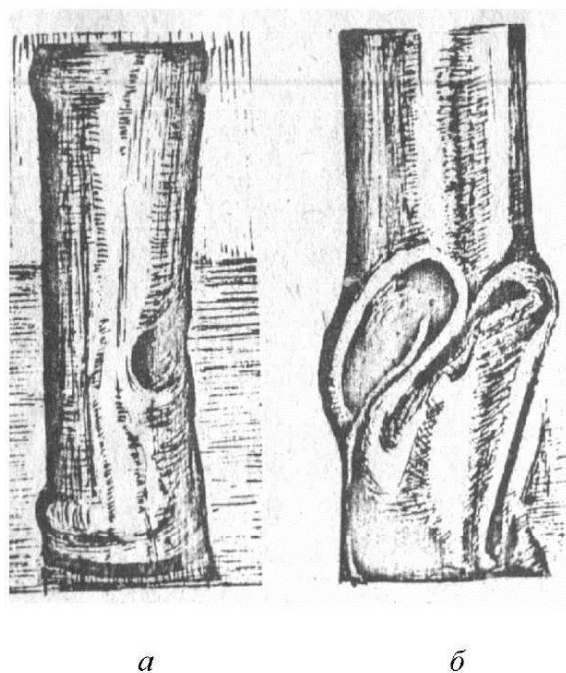


Рис. 11. Внешний вид тонкостенных цилиндрических труб, потерявших устойчивость при сжатии (*а*) или кручении (*б*)

Вывод формулы (38) проводится также методом Эйлера (см. п. 1.2.3), но при существенном упрощении задачи: полагают, что при потере устойчивости все образующие цилиндрической оболочки изгибаются одинаково, т. е. происходит осесимметричная потеря устойчивости. В действительности для тонкостенных труб наблюдается меньшее, чем расчетное по указанной гипотезе, «верхнее» критическое напряжение. Это уменьшение напряжения можно объяснить наличием неизбежных на практике отклонений от точной цилиндрической формы оболочки, начальных несоосностей и рядом других конструктивных, а также технологических факторов. На рис. 11, для примера, приведены фотографии внешнего вида тонкостенных цилиндрических стальных труб, потерявших устойчивость при нагружении сжимающей нагрузкой или крутящим моментом.

3. РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ (СОСТАВНЫХ КОЛОНН)

3.1. Общие понятия о составных колоннах

Колонны, состоящие из нескольких стержней (составные), могут быть сплошными или сквозными (рис. 12).

Сплошными составными колоннами называются стержни, составленные из двух и более частей («ветвей») и испытывающие деформацию продольного изгиба, если их отдельные ветви по всей длине связаны между собой сплошными листами. У *сквозных составных колонн* отдельные ветви не связаны между собой по всей длине, а соединяются друг с другом с помощью соединительной решетки (в частном случае – соединительными планками).

Решетка может быть раскосной (при наличии раскосов) или безраскосной. Соединительная решетка (как и листы) ставится для того, чтобы обеспечить совместную работу отдельных ветвей колонны, но при этом вес конструкции по сравнению со сплошной колонной уменьшается. Решетка влияет на общую устойчивость колонны, что должно учитываться в расчетах. Технология крепления решетки (или листов) нами рассматриваться не будет.

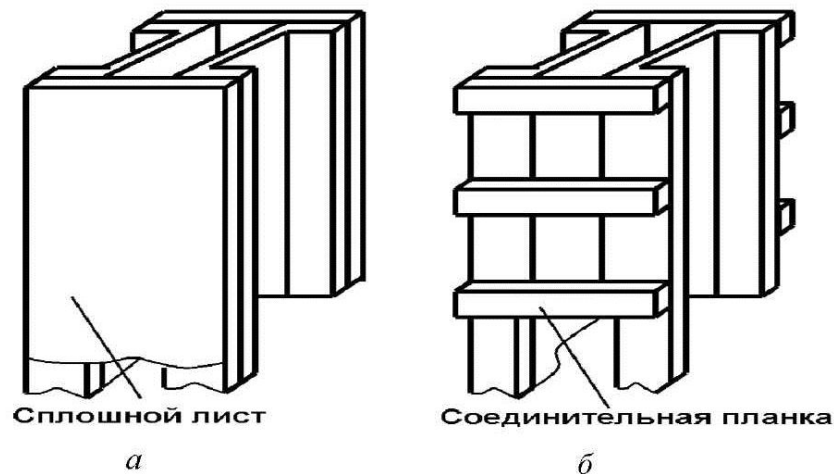


Рис. 12. Сплошная (а) и сквозная (б) колонны

Расчет сквозных колонн оказывается более сложным и включает в себя нахождение интервала между соединительными планками или узлами раскосной решетки и определение расстояния между составными частями, т. е. ветвями. В дальнейшем, в расчете сквозных колонн будем рассматривать только частный случай: ветви колонны связаны соединительными планками, участок между которыми называют *панелью*.

Составные сквозные колонны могут содержать две и (более ветвей) одинакового прокатного профиля. Следует различать два типа поперечных сечений составных сквозных колонн:

- 1) *поперечные сечения* (рис. 13), для которых одна главная центральная ось инерции является «материальной» (ось z), а другая «свободной» (ось y);
- 2) *поперечные сечения* (рис. 14), для которых обе главные центральные оси инерции являются свободными.

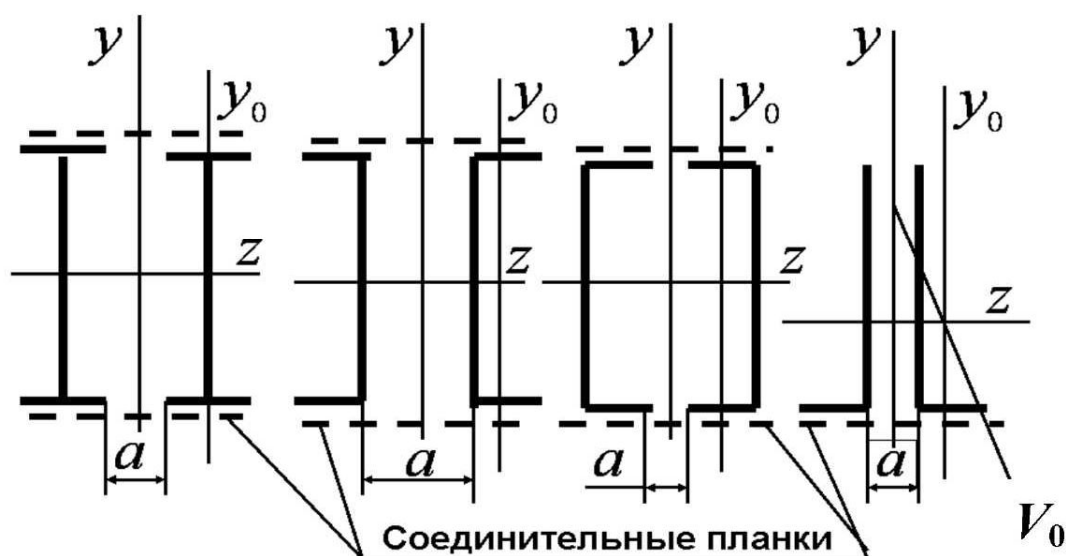


Рис. 13. Поперечные сечения сквозных колонн с материальной осью z и свободной – y (y_0 – центральная ось ветви; V_0 – ось минимального момента инерции уголка; a – «просвет» между ветвями). Соединительные планки условно показаны пунктиром

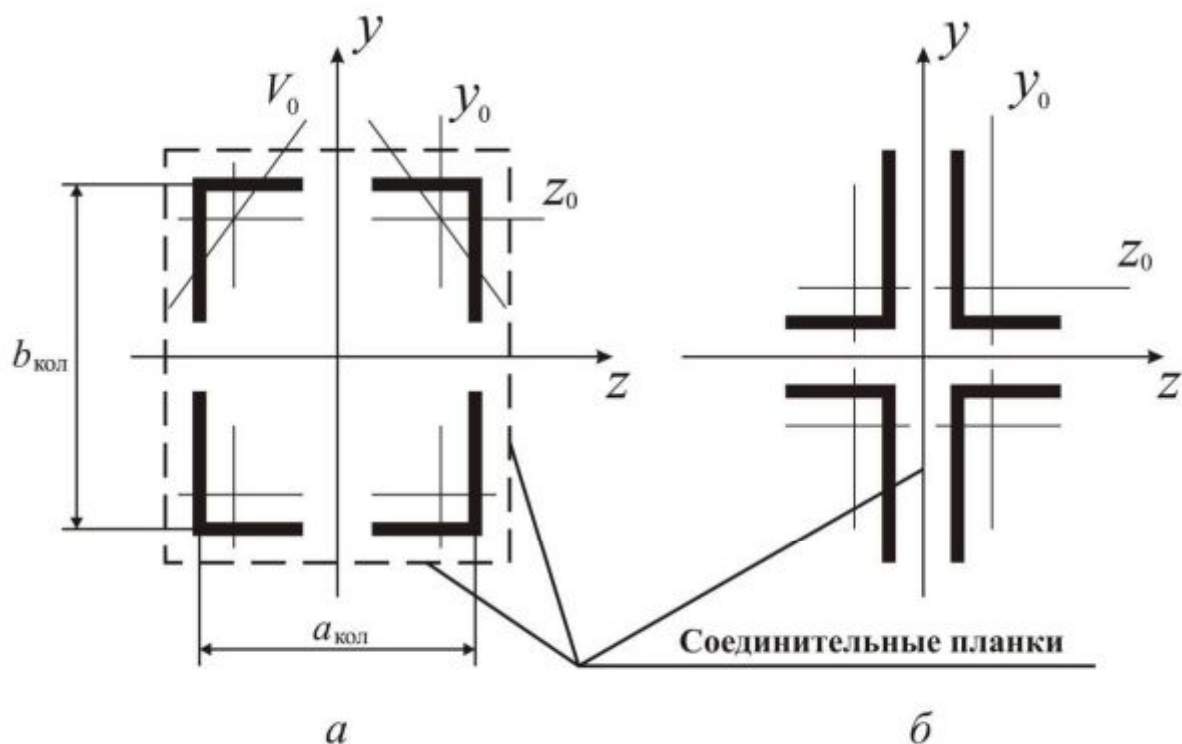


Рис. 14. Два варианта сквозной колонны с обеими (y, z) свободными осями (y_0, z_0 – центральные оси сечения ветви; $a_{\text{кол}}, b_{\text{кол}}$ – конструктивные размеры сечения колонны; V_0 – ось минимального момента инерции уголка). Пунктиром показаны планки

3.2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ РАСЧЕТЕ КОЛОННЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

3.2.1. Вычисление размеров поперечного сечения (определение номера стандартного профиля)

Площадь поперечного сечения колонны определяется по приведенной выше формуле (30), записанной в виде:

$$A_{\text{кол}} = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_-]},$$

где $A_{\text{кол}}$ – общая (суммарная) площадь поперечного сечения колонны. При этом, как и для одиночных стержней, расчет ведется методом итераций. В первом приближении задаются, как и ранее, значением $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,8$.

Если число ветвей колонны равно n , то площадь сечения одной ветви

$A_{\text{вет}} = \frac{A_{\text{кол}}}{n}$. По этой площади, пользуясь таблицей сортамента, определяют номер профиля. Здесь необходимо отметить, что осевой момент инерции I_{min} для колонн с одной материальной осью необходимо брать относительно этой оси z (рис. 13), так как величина осевого момента инерции относительно другой оси y оказывается зависящей от просвета a , который на этой стадии расчета неизвестен.*

Чтобы проверить достаточность размеров найденного сечения, проводят проверку устойчивости колонны по алгоритму, описанному в гл. 2 (п. 2.2). При вычислении конструктивной гибкости колонны $\lambda_{\text{кол}}$ минимальный радиус инерции поперечного сечения необходимо определять также по осевому моменту инерции $I_{z, \text{кол}}$, не зависящему от расстояния a между ветвями. Заметим, что

$$i_{\text{min кол}} = i_{z, \text{кол}} = \sqrt{\frac{I_{z, \text{кол}}}{A_{\text{кол}}}} = \sqrt{\frac{nI_{z, \text{вет}}}{nA_{\text{вет}}}} = \sqrt{\frac{I_{z, \text{вет}}}{A_{\text{вет}}}} = i_{z, \text{вет}},$$

т. е. радиусы инерции поперечного сечения колонны и ветви относительно материальной оси z оказываются одинаковыми, а, следовательно:

$$\lambda_{\text{кол}} = \lambda_{\text{вет}}.$$

*В расчете составных колонн, у которых обе главные центральные оси инерции поперечного сечения являются свободными (рис. 14), при нахождении $A_{\text{кол}}$ (т. е. при определении номера профиля) должно быть задано расстояние a между ветвями и наоборот: просвет a может быть вычислен только в том случае, если номер профиля известен (номер задается по конструктивным, технологическим, экономическим или иным соображениям).

3.2.2. Определение расстояния между соединительными планками

Расстояние между соединительными планками («длина панели») выбирается так, чтобы гибкость отдельной ветви на этой длине $l_{\text{пан}}$ (рис. 15) не превышала значения «30». Выбор этой величины объясняется стремлением полностью предотвратить продольный изгиб одной ветви колонны между соединительными планками. Как известно, при таком значении λ критическое напряжение для стальных стержней оказывается близким к пределу текучести (см. рисунок, приведенный в Приложении). Таким образом, уже при указанной гибкости ветвь колонны между планками будет работать не на устойчивость, а на сжатие – *возможность потери устойчивости для нее полностью исключена!*

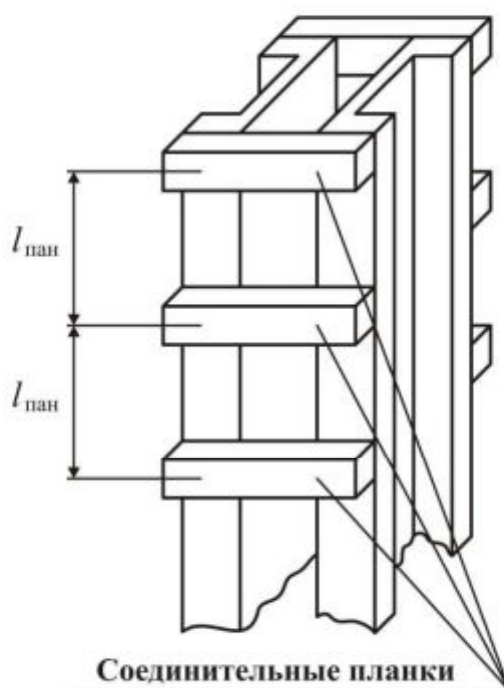


Рис. 15. Схема скрепления ветвей сквозной колонны соединительными планками

Отрезок ветви длиной $l_{\text{пан}}$ условно рассматривается как стержень с шарнирными закреплениями его концов ($\omega = 1$). В действительности, закрепление концов стержня длиной $l_{\text{пан}}$ является более жестким ($\omega < 1$), чем это

дают два шарнира. Для проведения расчетов, в запас прочности (устойчивости), будем принимать гибкость панели, равной 30 и $\omega_{\text{пан}} = 1$. Таким образом, расстояние между планками определится из условия:

$$\lambda_{\text{пан}} = 30 \quad (40)$$

и, следовательно

$$\frac{\omega_{\text{пан}} \cdot l_{\text{пан}}}{i_{\text{min пан}}} = 30.$$

Из последнего выражения получаем:

$$l_{\text{пан}} = 30 \cdot i_{\text{min пан}}. \quad (41)$$

Очевидно, что $i_{\text{min пан}} = i_{\text{min вет.}}$.

Радиус инерции $i_{\text{min пан}}$ должен определяться как наименьшая величина радиуса инерции поперечного сечения одной ветви. Для сечений, представленных на рис. 13 (кроме уголков), имеем:

$$i_{\text{min пан}} = i_{y_0 \text{ вет.}}$$

Для уголков (см. рис. 13, 14) необходимо выбирать радиус инерции поперечного сечения одного из профилей относительно его собственной главной центральной оси (V_0), относительно которой осевой момент инерции минимален.

Полученная из условия (41) величина $l_{\text{пан}}$ округляется в сторону уменьшения (в запас прочности!) и окончательно принимается такой, при которой колонна будет иметь целое число участков – панелей.

3.2.3. Расчет рационального расстояния между ветвями колонны

Сплошные колонны. Моменты инерции поперечных сечений сплошных колонн (рис. 16) относительно главных центральных осей инерции определяются как для монолитных стержней. Очевидно, что рациональной формой поперечных сечений этих колонн следует считать такую, при

которой соблюдается соотношение (33). Запишем его для колонны в следующем виде:

$$I_{y, \text{кол}} = I_{z, \text{кол}}. \quad (42)$$

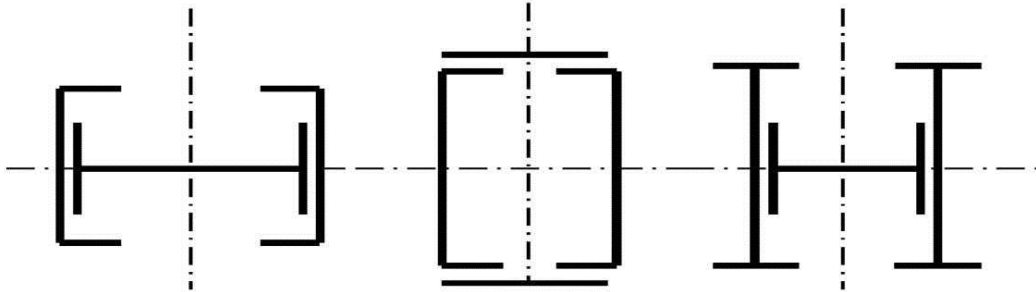


Рис. 16. Примеры вариантов выполнения поперечных сечений сплошных составных колонн

Если пренебречь, *в запас прочности*, влиянием на устойчивость колонны площадей поперечных сечений соединительных листов, то, используя теорему Штейнера [1, 4, 5] об осевых моментах инерции относительно двух параллельных осей (рис. 17), одна из которых (y_0) является центральной для ветви, можно записать:

$$I_{y, \text{кол}} = 2 \cdot (I_{y_0, \text{вет}} + c^2 \cdot A_{\text{вет}}),$$

где $I_{y_0, \text{вет}}$ и $A_{\text{вет}}$ – соответственно осевой момент инерции поперечного сечения ветви относительно собственной центральной оси y_0 и площадь сечения; c – расстояние между параллельными осями. Последнее выражение, учитывая $I_{z, \text{кол}} = 2 \cdot I_{z, \text{вет}}$ и условие (42), можно переписать в виде:

$$I_{z, \text{вет}} = I_{y_0, \text{вет}} + c^2 A_{\text{вет}}.$$

Отсюда получим:

$$c = \sqrt{\frac{I_{z, \text{вет}} - I_{y_0, \text{вет}}}{A_{\text{вет}}}}.$$

Величина c позволяет установить искомый размер a . Так, для сечения, представленного на рис. 17, следует, что $\frac{a}{2} = c - z_0$; откуда

$$a = 2 \cdot (c - z_0),$$

где z_0 – справочная величина, определяемая по таблице прокатного сортамента заданного или выбранного профиля.

Для сплошных колонн наличие соединительных листов увеличивает устойчивость колонны, поскольку они вместе с поперечными сечениями ветвей работают как единое целое. Поэтому *при уточненном расчете*, вычисляя осевые моменты инерции, необходимо учитывать влияние соединительных листов. Так, для поперечного сечения, представленного на рис. 17, согласно теореме Штейнера, нужно записать:

$$I_{y, \text{кол}} = 2 \cdot \left[\left(I_{y_0, \text{вет}} + c^2 \cdot A_{\text{вет}} \right) + \frac{(a + 2 \cdot b)^3 t}{12} \right];$$

$$I_{z, \text{кол}} = 2 \cdot \left[\left(I_{z, \text{вет}} \right) + \frac{(a + 2 \cdot b)t^3}{12} + \left(\frac{h+t}{2} \right)^2 (a + 2b)t \right].$$

Подставляя выражения $I_{y, \text{кол}}$ и $I_{z, \text{кол}}$ в условие (42), получаем:

$$I_{y_0, \text{вет}} + \left(\frac{a}{2} + z_0 \right)^2 \cdot A_{\text{вет}} + \frac{(a + 2 \cdot b)^3 \cdot t}{12} = I_{z, \text{вет}} + \left(\frac{h^2 + 2ht}{4} \right) \cdot (a + 2 \cdot b)t. \quad (43)$$

В это выражение, ввиду малости, не включены члены, содержащие t^3 :

$$\frac{(a + 2 \cdot b) \cdot t^3}{12}; \quad \frac{(a + 2 \cdot b) \cdot t^3}{4}.$$

Решая кубическое уравнение (43), определяем необходимое расстояние a между ветвями. При этом удобно воспользоваться подстановкой: $a + 2b = v$. Решение уравнения (43) оставляем для самостоятельной работы.

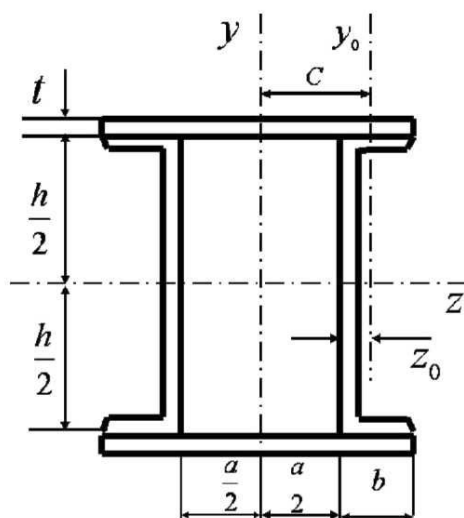


Рис. 17. Схема к определению расстояния между составными частями (ветвями) сплошной колонны

Сквозные колонны с одной материальной и другой свободной осями. Для таких колонн (рис. 18) соединительные планки в поперечном сечении параллельны материальной оси z . Если бы соединительные планки обеспечивали монолитную связь между отдельными ветвями, то, как и для сплошных колонн, просвет a определялся бы по методике, изложенной в предыдущем подпункте.

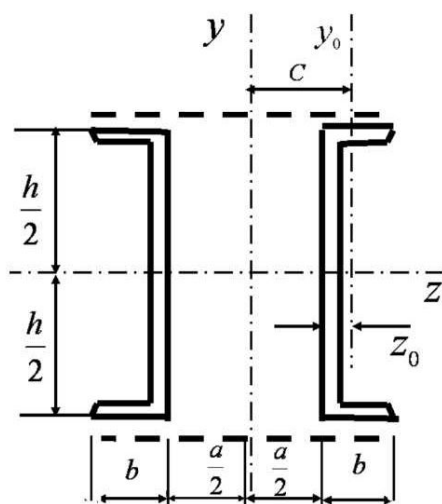


Рис. 18. Схема к определению расстояния между ветвями сквозной колонны с одной материальной и другой свободной осями (пунктиром условно показаны планки)

Однако соединительные планки не могут обеспечить такой монолитной связи между ветвями сквозной колонны, так как они ставятся на некотором расстоянии ($l_{\text{пан}}$) друг от друга. Это приводит к увеличению действительной гибкости колонны относительно свободной оси y и, следовательно, более легкой потере устойчивости колонны относительно этой оси. Поэтому гибкость сквозной колонны относительно свободной оси не может быть определена так, как это выполнялось для сплошной колонны. Эта гибкость зависит и от гибкости участков ветви на длине панели ($\lambda_{y_0 \text{ пан}}$), т. е. оказывается зависящей от расстояния $l_{\text{пан}}$ между соединительными планками. Необходимо особо подчеркнуть, что в нашем случае ось y_0 для любых сечений параллельна оси y .

Таким образом, оказывается необходимым установить действительную гибкость колонны $(\lambda_{y \text{ кол}})_д$, состоящей из нескольких ветвей. Эта гибкость уже является функцией двух переменных:

$$(\lambda_{y \text{ кол}})_д = f(\lambda_{y \text{ кол}}; \lambda_{y_0 \text{ пан}}).$$

Аналитически можно показать, что эта функция описывается выражением:

$$(\lambda_{y \text{ кол}})_д = \sqrt{\lambda_{y \text{ кол}}^2 + \lambda_{y_0 \text{ пан}}^2}. \quad (44)$$

Здесь необходимо принять $\lambda_{y_0 \text{ пан}} = 30$ (см. п. 3.2.2). Если бы планки были поставлены без разрывов (соединение ветвей сплошным листом достаточной толщины), то гибкость $\lambda_{y_0 \text{ пан}} = 0$ и из формулы (44) следует, что $(\lambda_{y \text{ кол}})_д = \lambda_{y \text{ кол}}$ – как это имело место для сплошных колонн. Таким образом, для сквозных колонн всегда $(\lambda_{y \text{ кол}})_д > (\lambda_{y \text{ кол}})$.

Разделив левую и правую части уравнения (44) на $\lambda_{y \text{ кол}}$, получим:

$$\frac{(\lambda_{y \text{ кол}})_д}{\lambda_{y \text{ кол}}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_{y_0 \text{ пан}}}{\lambda_{y \text{ кол}}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{30}{\lambda_{y \text{ кол}}}\right)^2}. \quad (45)$$

$$\text{При } \lambda_{y \text{ кол}} = 50 \Rightarrow \frac{(\lambda_{y \text{ кол}})_д}{\lambda_{y \text{ кол}}} = 1,166;$$

$$\text{При } \lambda_{y \text{ кол}} = 150 \Rightarrow \frac{(\lambda_{y \text{ кол}})_д}{\lambda_{y \text{ кол}}} = 1,020.$$

Следовательно, при гибкостях колонны $\lambda_{y \text{ кол}} > 150$ учет дополнительной гибкости, вносимой немонолитностью колонны (при наличии решетки), не будет давать значительной поправки; она снижается до 2 %.

Условие равной устойчивости (*равнопрочности*) для сквозных колонн в главных плоскостях инерции с учетом деформируемости решетки принимает вид:

$$(\lambda_{y \text{ кол}})_д = \lambda_{z \text{ кол}}. \quad (46)$$

Для определения действительной гибкости колонны $(\lambda_{y \text{ кол}})_д$, кроме $\lambda_{y_0 \text{ пан}}$, как видно из уравнения (44), необходимо знать $(\lambda_{y \text{ кол}})$, вычисляемую по формуле:

$$\lambda_{y \text{ кол}} = \frac{\omega \cdot l_{\text{кол}}}{i_{y \text{ кол}}}.$$

Это, в свою очередь, требует знания радиуса инерции поперечного сечения колонны относительно оси y . Однако на данной стадии расчета этот радиус инерции неизвестен, так как расстояние a между составными частями (ветвями) еще не установлено. Поскольку действительная гибкость колон-

ны относительно оси y оказывается больше, то для соблюдения условия равнопрочности (46) нужно уменьшить $i_{z \text{ кол}}$. Через моменты инерции это уменьшение запишется в виде:

$$I_{z \text{ кол}} = \frac{I_{y \text{ кол}}}{m}, \quad (47)$$

где коэффициент m обычно выбирается в интервале $1 \dots 1,35$.

Чем меньше гибкость колонны $\lambda_{y \text{ кол}}$, тем большую величину m нужно подставлять в уравнение (47). Этот вывод непосредственно следует из приведенного анализа уравнения (45). Для прикладных задач, в первом приближении, можно рекомендовать значения введенного коэффициента, представленные в данной таблице.

Значения коэффициента m

| $\lambda_{y \text{ кол}}$ | m |
|---------------------------|------|
| 30...60 | 1,35 |
| 60...90 | 1,25 |
| 90...120 | 1,15 |
| 120...150 | 1,05 |
| > 150 | 1,00 |

Предварительно подсчитав $I_{z \text{ кол}}$ по формуле (47), можно уже определить расстояние между ветвями колонны на основании теоремы Штейнера. Так, для сечения, представленного на рис. 18, запишем:

$$I_{y \text{ кол}} = 2 \cdot (I_{y_0 \text{ вет}} + c^2 \cdot A_{\text{вет}}). \quad (48)$$

Учитывая условие (47) и соотношение $I_{z \text{ кол}} = 2I_{z \text{ вет}}$ получим:

$$m I_{z \text{ кол}} = m 2I_{z \text{ вет}} = 2(I_{y_0 \text{ вет}} + c^2 A_{\text{вет}}).$$

Откуда

$$c = \sqrt{\frac{mI_{z_{вет}} - I_{y_0_{вет}}}{A_{вет}}}. \quad (49)$$

Из рис. 18 следует, что

$$\frac{a}{2} = c - z_0$$

и, следовательно,

$$a = 2(c - z_0). \quad (50)$$

Для проверки достаточности полученного расстояния a необходимо произвести проверку устойчивости. Вначале определяют гибкость колонны относительно свободной оси:

$$\lambda_{y_{кол}} = \frac{\omega I_{кол}}{i_{y_{кол}}} = \frac{\omega I_{кол}}{\sqrt{\frac{I_{y_{кол}}}{A_{кол}}}} = \frac{\omega I_{кол}}{\sqrt{\frac{mI_{z_{кол}}}{A_{кол}}}} = \frac{\omega I_{кол}}{i_{z_{кол}} \sqrt{m}} = \frac{\lambda_{z_{кол}}}{\sqrt{m}}. \quad (51)$$

Затем по формуле (44) рассчитывают действительную гибкость колонны:

$$(\lambda_{y_{кол}})_д = \sqrt{\frac{\lambda_{z_{кол}}^2}{m} + \lambda_{y_0_{пан}}^2}. \quad (52)$$

Теперь, зная $(\lambda_{y_{кол}})_д$ и материал колонны, можно определить коэффициент снижения допускаемого напряжения (см. табл. П. 2), а, следовательно, и $[\sigma_y] = \varphi[\sigma_-]$. Если выполняется условие устойчивости $\sigma \leq [\sigma_y]$, то расчет по определению просвета a считается законченным.

Сквозные колонны с обеими свободными осями. Приведенные на рис. 14 сечения могут состоять из уголков как равнополочных, так и неравнополочных. Для сечений, представленных на рис. 14, б, просвет между ветвями задается конструктивно и поэтому не определяется.

Расчет колонн, поперечное сечение которых представлено на рис. 14, а, в общем случае (для любых уголков) производится по максимальной действительной гибкости, вычисляемой по формуле:

$$(\lambda_{\max})_д = \sqrt{\lambda_{\max \text{ кол}}^2 + \lambda_{y_0 \text{ пан}}^2 + \lambda_{z_0 \text{ пан}}^2}, \quad (53)$$

где $\lambda_{\max \text{ кол}}$ – максимальная гибкость колонны относительно оси y или оси z (если рассматривать сечение колонны из 4-х ветвей, работающих как единое целое); $\lambda_{y_0 \text{ пан}}$, $\lambda_{z_0 \text{ пан}}$ – гибкости отдельных ветвей (уголков) на длине панели относительно собственных центральных осей y_0 и z_0 , параллельных свободным осям y и z . При определении $\lambda_{y_0 \text{ пан}}$ и $\lambda_{z_0 \text{ пан}}$ отдельных ветвей на длине панели $l_{\text{пан}}$, эти ветви рассматриваются как стержни с обоими шарнирными концами, т. е. принимается $\omega_{\text{пан}} = 1$. Как уже отмечалось выше, максимальная гибкость ветви (например, $\lambda_{y_0 \text{ пан}}$) на длине панели равна 30. Из последнего условия находят эту длину:

$$l_{\text{пан}} = 30 \cdot i_{y_0 \text{ пан}}.$$

По найденному расстоянию $l_{\text{пан}}$ определяется вторая (минимальная) гибкость ветви на длине панели относительно другой центральной оси сечения уголка:

$$\lambda_{z_0 \text{ пан}} = \frac{\omega_{\text{пан}} \cdot l_{\text{пан}}}{i_{z_0 \text{ пан}}} = \frac{30 \cdot i_{y_0 \text{ пан}}}{i_{z_0 \text{ пан}}}.$$

Очевидно, что в частном случае для равнополочных ($i_{y_0 \text{ пан}} = i_{z_0 \text{ пан}}$) уголков $\lambda_{y_0 \text{ пан}} = \lambda_{z_0 \text{ пан}} = 30$.

Если сечение сквозной колонны состоит из неравнополочных уголков (рис. 19), то при заданном размере $a_{\text{кол}}$ (или $b_{\text{кол}}$), исходя из условия ее

равной устойчивости (*равнопрочности*) в двух взаимно перпендикулярных плоскостях ($x, y; x, z$), приводящего к равенству действительных гибкостей

$$(\lambda_{y \text{ кол}})_D = (\lambda_{z \text{ кол}})_D, \quad (54)$$

можно определить второй необходимый размер сечения колонны.

Для этого случая, учитывая формулу (53), условие (54) можно представить в следующем виде:

$$\sqrt{\lambda_{y \text{ кол}}^2 + \lambda_{y_0 \text{ пан}}^2 + \lambda_{z_0 \text{ пан}}^2} = \sqrt{\lambda_{z \text{ кол}}^2 + \lambda_{y_0 \text{ пан}}^2 + \lambda_{z_0 \text{ пан}}^2}.$$

Отсюда видно, что условие равнопрочности удовлетворяется при

$$\lambda_{y \text{ кол}} = \lambda_{z \text{ кол}}.$$

Если закрепление концов колонны таково, что соблюдается равенство коэффициентов $\omega_{y \text{ кол}} = \omega_{z \text{ кол}}$, то из этого вытекает:

$$I_{y \text{ кол}} = I_{z \text{ кол}}. \quad (55)$$

Следовательно, для разбираемого типа колонн условия (54) и (55) оказываются идентичными, в то время как для сквозных колонн с одной материальной осью при выполнении соотношения

$$(\lambda_{y \text{ кол}})_D = \lambda_{z \text{ кол}}$$

имело место неравенство:

$$I_{y \text{ кол}} \geq I_{z \text{ кол}}.$$

Пользуясь, как и прежде, теоремой Штейнера, можно в общем виде составить две функции:

$$I_{y \text{ кол}} = \zeta(a_{\text{кол}}),$$

$$I_{z \text{ кол}} = \xi(b_{\text{кол}}).$$

Исходя из условия (55), $\zeta(a_{\text{кол}}) = \xi(b_{\text{кол}})$. Из записанного равенства функций, при одном заданном размере сечения колонны, определяют другой.

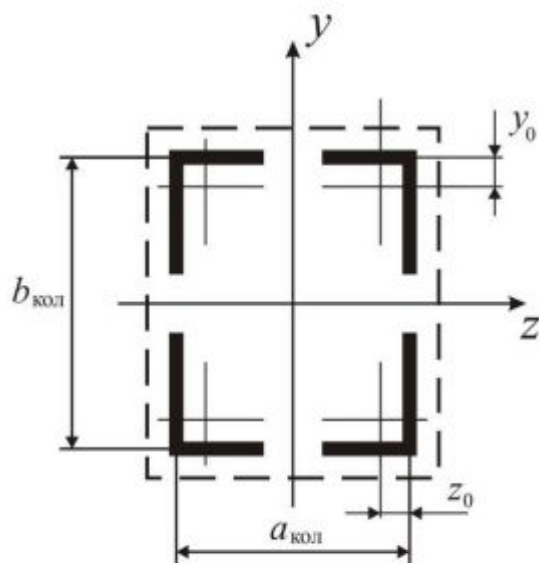


Рис. 19. Схема к определению размеров сечения колонны с неравнополочными уголками

В качестве примера – для сечения, представленного на рис. 19, – последние выражения примут следующий вид:

$$I_{y_{\text{кол}}} = 4 \left[I_{y_0_{\text{вет}}} + \left(\frac{a_{\text{кол}}}{2} - z_0 \right)^2 A_{\text{вет}} \right];$$

$$I_{z_{\text{кол}}} = 4 \left[I_{z_0_{\text{вет}}} + \left(\frac{b_{\text{кол}}}{2} - y_0 \right)^2 A_{\text{вет}} \right],$$

где y_0, z_0 – справочные величины (координаты центра тяжести уголков); далее:

$$I_{y_0_{\text{вет}}} + \left(\frac{a_{\text{кол}}}{2} - z_0 \right)^2 A_{\text{вет}} = I_{z_0_{\text{вет}}} + \left(\frac{b_{\text{кол}}}{2} - y_0 \right)^2 A_{\text{вет}},$$

откуда можно определить искомое расстояние $b_{\text{кол}}$, задавая $a_{\text{кол}}$ (или наоборот).

Расчет считается произведенным правильно, если выполняется условие устойчивости:

$$\sigma \leq \varphi[\sigma_-],$$

где φ определяется по таблице для коэффициентов снижения допускаемого напряжения, исходя из максимальной действительной гибкости $(\lambda_{\max})_д$, вычисляемой по формуле (53).

3.3. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НА ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ (КОЛОНН), ОСЛАБЛЕННЫХ ЗАКЛЕПЧНЫМИ ИЛИ БОЛТОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Мы не рассматривали технологию скрепления листов или планок с ветвями колонны. Распространенными способами такого крепления являются: сварка, заклепчное или болтовое соединения. Кратко отметим лишь некоторые особенности прочностного расчета в двух последних случаях.

Ослабление сечений стержней (колонн) отверстиями под заклепки или болты носит локальный характер, так как отверстия выполняются только в некоторых сечениях. Сопротивление же потере устойчивости при продольном изгибе зависит от жесткости (гибкости) на всей длине. Поэтому эти ослабления (даже в нескольких сечениях) практически не влияют на величину критической силы. В связи с этим, условие устойчивости записывается, как и прежде, в виде:

$$\frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma_-]$$

и, следовательно, весь расчет на устойчивость (по вычислению допускаемой нагрузки или определению размеров сечения) остается таким же, как он был изложен ранее.

В отличие от условия устойчивости, условие прочности стержня (колонны) на сжатие должно учитывать действительную площадь попереч-

ного сечения, так называемое нетто-сечение ($A_{\text{нетто}}$), уменьшенную отверстиями. Поэтому в таких случаях необходимо проводить, кроме проверки на устойчивость, еще и проверку на прочность. Условие прочности на сжатие при этом принимает вид:

$$\frac{F}{A_{\text{нетто}}} \leq [\sigma_-]. \quad (56)$$

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ

1. Какой случай изгиба называется продольным изгибом стержня?
2. Что называется критической силой?
3. Напишите формулу Эйлера и объясните смысл всех входящих в нее членов.
4. Что такое приведенная (расчетная) длина стержня?
5. Каковы характерные числовые значения коэффициента в формуле для критической силы, учитывающего способ закрепления концов стержня? Как называется этот коэффициент?
6. Напишите соотношения, устанавливающие область применения формулы Эйлера.
7. Как определяются критические напряжения, если гибкость стержня меньше предельного значения?
8. Запишите формулы для определения допускаемых напряжений на устойчивость и на сжатие через коэффициенты запаса.
9. Почему критическую силу определяют по минимальному значению момента инерции поперечного сечения стержня?
10. Напишите условие устойчивости при продольном изгибе стержня.
11. Что такое коэффициент φ ? В каких пределах он изменяется и почему? Что нужно знать, чтобы определить его величину?

12. Проведите исследование формулы $\sigma_{кр} = a - b\lambda$. Для чего она служит?
13. Напишите формулу для определения допускаемой нагрузки при продольном изгибе стержня. Объясните смысл членов, входящих в эту формулу.
14. Напишите формулу для подбора сечения стержня при продольном изгибе. Объясните, почему по этой формуле подбор сечения производится методом итераций.
15. Какова последовательность подбора сечения одиночного стержня при продольном изгибе (на примере любого прокатного профиля)?
16. Какова последовательность подбора сечения стержня при его продольном изгибе (сечение простейшей формы: прямоугольник, круг)?
17. Сформулируйте два необходимых условия для определения рациональной формы поперечного сечения стержня, испытывающего продольный изгиб.
18. Выведите формулу для коэффициента экономичности сечения при продольном изгибе стержня.
19. Проведите сравнение экономичности различных поперечных сечений при продольном изгибе стержня.
20. В чем состоят отличительные особенности потери устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочкой?
21. Какая ось поперечного сечения составной колонны называется материальной, а какая – свободной? Какие колонны называются сплошными и какие – сквозными?
22. Как определяется расстояние между соединительными планками сквозной колонны?
23. Как определяется расстояние между составными частями сплошной колонны?
24. Напишите формулу для определения действительной гибкости сквозной колонны относительно свободной оси и проведите ее исследование.

25. Как определяется расстояние между составными частями сквозной колонны с одной свободной и другой материальной осями?

26. Как определяются размеры сечения сквозной колонны с обеими свободными осями?

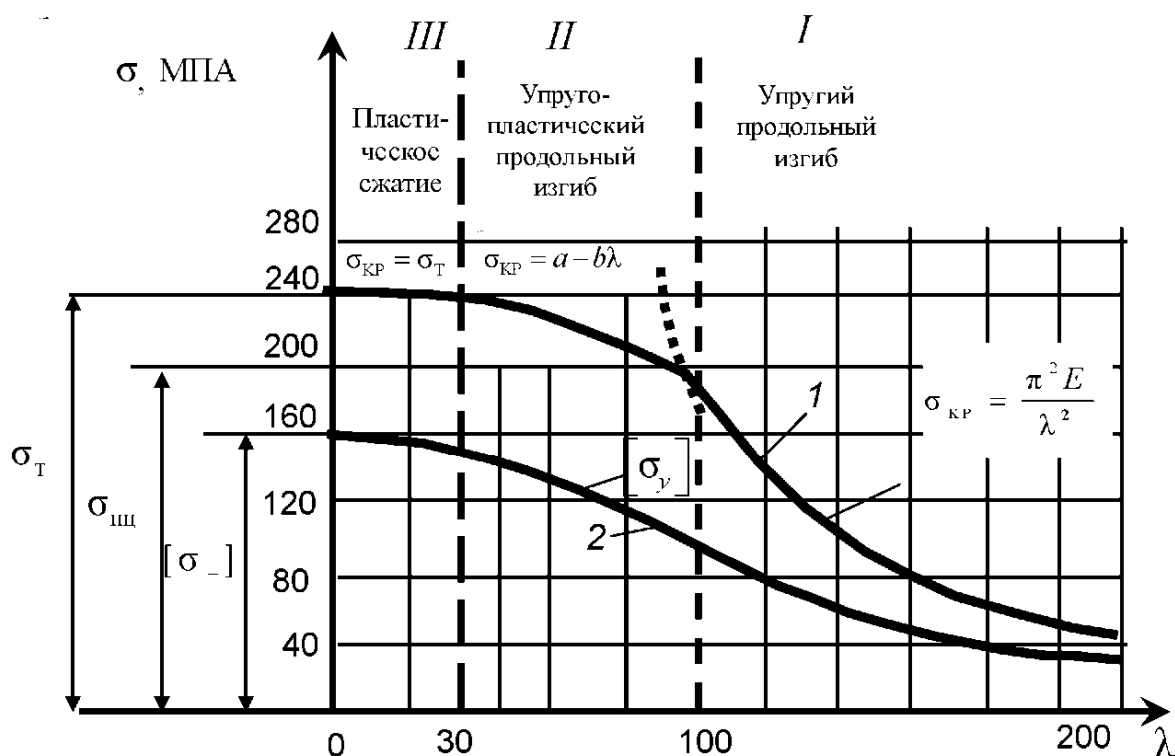
27. Для каких составных колонн условие равенства гибкостей $\lambda_y = \lambda_z$ идентично условию $I_y = I_z$ а для каких – нет?

28. Запишите выражения для проверки устойчивости и прочности на сжатие при продольном изгибе стержней, поперечное сечение которых ослаблено заклепочными или болтовыми отверстиями.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сопротивление материалов / Н. А. Костенко [и др.]. – М.: Высш. шк., 2000.
2. *Саргсян, А. Е.* Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов / А. Е. Саргсян. – М.: Высш. шк., 2002.
3. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г. С. Варданян [и др.]. – М.: Изд-во АВС, 1995.
4. *Феодосьев, В. И.* Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана (Сер. Механика в техн. ун-те. Т. 2), 2001.
5. *Дарков, А. В.* Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1989.
6. *Ицкович, Г. М.* Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие для вузов / Г. М. Ицкович, Л. С. Минин, А. И. Винокуров. – М.: Высш. шк., 2001.
7. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1988.
8. Устойчивость сжатых элементов конструкций : метод. указания / А. С. Краев, З. П. Журкина. – Волгоград : ВолгПИ, 1988.
9. Расчет на устойчивость сжатых элементов конструкций : метод. указания / А. В. Гурьев, О. М. Игнатьева. – Волгоград : ВолгПИ, 1988.
10. Вопросы стандартизации в курсе «Сопротивление материалов» : метод. указания / А. В. Гурьев, З. П. Журкина. – Волгоград : ВолгПИ, 1985.
11. Выполнение расчетно-проектировочных и курсовых работ по сопротивлению материалов : метод. указания / А. В. Гурьев, Н. М. Епихина. – Волгоград : ВолгПИ, 1985.

ПРИЛОЖЕНИЕ



Графики критических (1) и допускаемых на устойчивость (2) напряжений для стали марки Ст. 3

В области упругой деформации (I) для стержней большой гибкости, когда справедлива теоретическая формула Эйлера (при напряжениях $\sigma_{кр} \leq \sigma_{шц}$), критическое напряжение определяется выражением:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (\text{П. 1})$$

Кривая критических напряжений, представляемая уравнением (П. 1), называется «гиперболой Эйлера».

В области упруго-пластической деформации (II) для стержней средней гибкости (при напряжениях $\sigma_T > \sigma_{кр} > \sigma_{шц}$) критические напряжения нужно определять по теоретическим формулам, например, по формуле Энгессера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_{пр}}{\lambda^2}, \quad (\text{П. 2})$$

где $E_{пр}$ – модуль продольного изгиба. В отличие от E в уравнении (П. 1), $E_{пр}$ является переменной величиной. Можно рассчитывать эти напряжения по эмпирическим формулам, например, по формуле Тетмайера-Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda, \quad (\text{П. 3})$$

представляющей линейную зависимость между $\sigma_{кр}$ и λ , (a и b – эмпирические коэффициенты, зависящие от свойств материала). В табл. П. 1 приведены эти коэффициенты для некоторых материалов.

Таблица П. 1

Эмпирические коэффициенты формулы Тетмайера – Ясинского для трех марок сталей

| Марка стали | a , МПа | b , МПа |
|-------------|-----------|-----------|
| Ст. 3 | 310 | 1,14 |
| Ст. 4 | 343 | 1,42 |
| Ст. 5 | 348 | 1,42 |

В области пластической деформации (III) при малой гибкости стержней, для которых потеря устойчивости в результате изгиба стержня не происходит, за критическое напряжение принимают:

- для пластичного материала $\sigma_{кр} = \sigma_T$;
- для хрупкого материала $\sigma_{кр} = \sigma_B$.

Поэтому для коротких стержней (при $\lambda = 0 \dots 30$) величина коэффициента снижения допускаемого напряжения будет близкой к единице.

**Значения коэффициентов ϕ (коэффициентов снижения допускаемого напряжения)
при продольном изгибе для различных материалов в зависимости
от конструктивной гибкости**

| Гибкость λ | Стали | | | Чугуны | | Дюралюминий (Д16Т) | Древесина (сосна) |
|-----------------------|---------------------------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|----------------------|
| | Ст. 1; Ст. 2; Ст. 3 | Ст. 5 | 15ХСНД; 15ГС | СЧ 12, СЧ 21 | СЧ 24, СЧ 28 | | |
| 0 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 10 | 0,990 | 0,980 | 0,980 | 0,970 | 0,950 | 0,999 | 0,990 |
| 20 | 0,970 | 0,960 | 0,950 | 0,910 | 0,870 | 0,998 | 0,970 |
| 30 | 0,950 | 0,930 | 0,920 | 0,810 | 0,750 | 0,835 | 0,930 |
| 40 | 0,920 | 0,900 | 0,890 | 0,690 | 0,600 | 0,700 | 0,870 |
| 50 | 0,890 | 0,850 | 0,840 | 0,570 | 0,430 | 0,568 | 0,800 |
| 60 | 0,860 | 0,800 | 0,780 | 0,440 | 0,320 | 0,455 | 0,710 |
| 70 | 0,810 | 0,740 | 0,710 | 0,340 | 0,230 | 0,353 | 0,610 |
| 80 | 0,750 | 0,670 | 0,630 | 0,260 | 0,180 | 0,269 | 0,490 |
| 90 | 0,690 | 0,590 | 0,540 | 0,200 | 0,140 | 0,212 | 0,380 |
| 100 | 0,600 | 0,500 | 0,460 | 0,160 | 0,120 | 0,172 | 0,310 |
| 110 | 0,520 | 0,430 | 0,390 | – | – | 0,142 | 0,250 |
| 120 | 0,450 | 0,370 | 0,330 | – | – | 0,119 | 0,220 |
| 130 | 0,400 | 0,320 | 0,290 | – | – | 0,101 | 0,180 |
| 140 | 0,360 | 0,280 | 0,250 | – | – | 0,087 | 0,160 |
| 150 | 0,310 | 0,250 | 0,230 | – | – | 0,076 | 0,140 |
| 160 | 0,290 | 0,230 | 0,210 | – | – | – | 0,120 |
| 170 | 0,260 | 0,210 | 0,190 | – | – | – | 0,110 |
| 180 | 0,230 | 0,190 | 0,170 | – | – | – | 0,100 |
| 190 | 0,210 | 0,170 | 0,150 | – | – | – | 0,090 |
| 200 | 0,190 | 0,150 | 0,130 | – | – | – | 0,080 |
| 210 | 0,170 | 0,140 | 0,120 | – | – | – | – |
| 220 | 0,160 | 0,130 | 0,110 | – | – | – | – |