ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Методические указания к выполнению
контрольной работы для студентов
заочной формы обучения

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

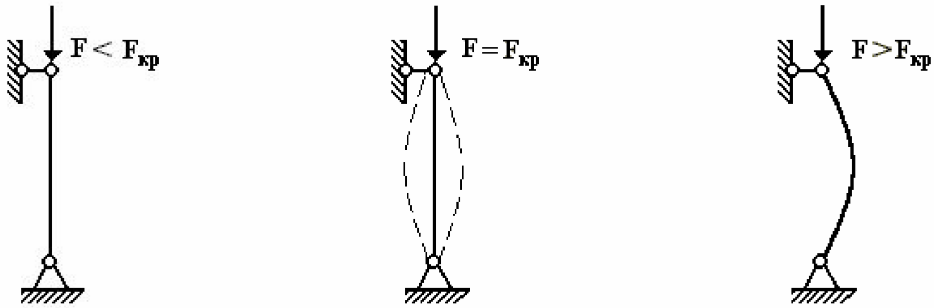
1. Понятие об устойчивости.

На рис. 1. показаны четыре формы равновесия механической системы.

Устойчивое положение равновесия | Безразличное (критическое) | Неустойчивое | Устойчивое положение при малых отклонениях и неустойчивое при больших

Рис. 1. Формы равновесия механической системы.

Равновесное состояние деформируемой системы, например, стержня также может быть устойчивым (рис. 2а), безразличным (критическим) (рис. 2б) и неустойчивым (рис. 2в).



а б в

Рис. 2. Формы равновесия стержня при сжатии.

Строгое определение устойчивости по теореме Пуанкаре звучит так.

Пусть идеально прямой стержень нагружен строго центральной продольной силой $F < F_{кр}$ (рис. 3).

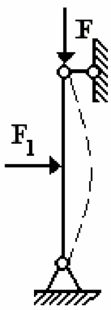


Рис. 3. К понятию устойчивости стержня при сжатии.

При таких предположениях прямолинейная форма стержня всегда будет являться возможной формой равновесия. Об устойчивости этой формы равновесия стержня можно судить по реакции ее на поперечную нагрузку F_1, которая вызовет прогиб стержня. При отсутствии силы F малая F_1 вызовет малый прогиб стержня. При небольшой силе F положение стержня не изменится, а равновесие его сохранится устойчивым.

Равновесие стержня устойчиво, если задавшись любой величиной прогиба $f > 0$, всегда можно указать такую конечную величину возмущения $\varepsilon > 0$, что при $|F_1| < \varepsilon$ величина прогиба ν ни в одной точке системы не достигнет величины f, то есть будет $|\nu| < f$.

Нагрузка, при которой начальная (исходная) форма равновесия стержня перестает быть устойчивой, называется ***критической***. Приложение к стержню силы $F = F_{кр}$ или $F > F_{кр}$ вызывает его продольный изгиб.

2. Определение критической силы по формуле Эйлера.

Академик Петербургской академии наук Леонард Эйлер (1707-1783) в 1744 году впервые поставил и решил задачу о потере устойчивости прямолинейной формы сжатого стержня.

Для шарнирно-закрепленного, центрально-сжатого стержня постоянного сечения длиной ℓ (рис. 2) формула Эйлера имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{\ell^2}, \qquad (1)$$

где, E – модуль упругости материала стержня;

J_{min} - минимальный момент инерции поперечного сечения стержня.

Для стержней с другими видами закрепления их концов (рис. 4) формулу Эйлер записывают в виде:

$$F_{кр} \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2}, \qquad (2)$$

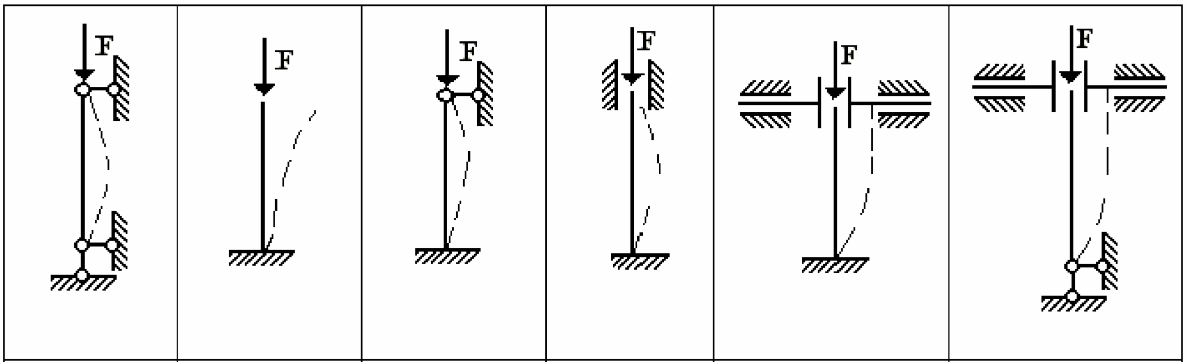
где, $\mu \ell$ - приведенная длина стержня;

μ - коэффициент приведения длины.

Выражение «приведенная длина» означает, что в формуле Эйлера с помощью коэффициента μ стержни с разным закреплением можно привести к основному стержню, шарнирно-закрепленному по концам. Коэффициент приведения длины μ иногда можно оценить по числу полуволн n, по которым выпучится стержень, теряя устойчивость, а именно, можно принять

$$\mu = \frac{1}{n}$$

На рис. 4 показаны наиболее часто встречающиеся на практике случаи закрепления концов стержня и соответствующие им значения коэффициента μ.



$n=1$	$n=\frac{1}{2}$	$n=\frac{3}{2}$	$n=2$	$n=1$	$n=\frac{1}{2}$
$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=0{,}7$	$\mu=0{,}5$	$\mu=1$	$\mu=2$

Рис. 4.

Формула Эйлера применима только в пределах выполнения закона Гука, когда критическое напряжение $\sigma_{кр}=\frac{F_{кр}}{A}$ не достигает значения предела пропорциональности материала стержня $\sigma_{пц}$.

Применимость формулы Эйлера можно определить, оценив гибкость стержня λ и сравнив эту гибкость с ее предельным значением $\lambda_{пред}$.

Гибкость стержня определяется по формуле:

$$\lambda=\frac{\mu\ell}{i_{min}},$$

где $i_{min}=\sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$ - минимальный радиус инерции (геометрическая характеристика сечения);

Значение предельной гибкости $\lambda_{пред}$ определяется из условия:

$$\sigma_{кр}=\sigma_{пц},$$

где $\sigma_{пц}$ - предел пропорциональности материала стержня.

Для малоуглеродистой стали, если принять $E=2\cdot10^5$мПа, $\sigma_{пц}=200$мПа, получаем $\lambda_{пред}\approx100$.

Следовательно, формула Эйлера для определения критического значения сжимающей силы $F_{кр}$ в виде:

$$F_{кр}=\frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu\ell)^2}$$

применима в случае, если гибкость стержня λ находится в пределах

$$\lambda_{пред}<\lambda$$

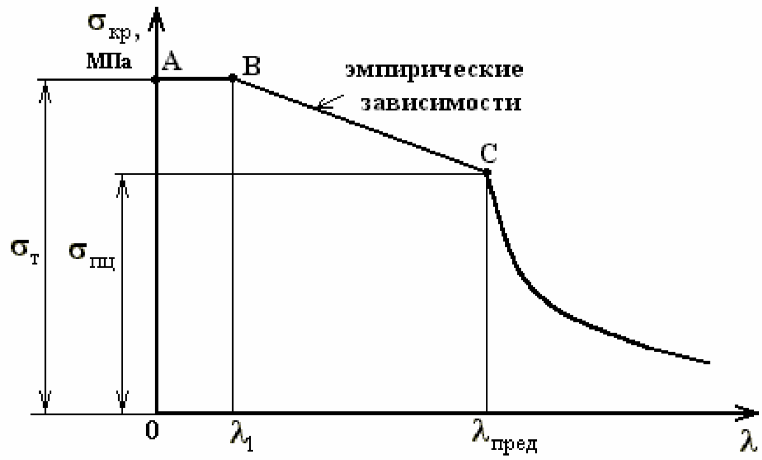


Рис.5.

λ_1- это максимальное значение гибкости, при котором рассчитывать стержень на устойчивость не надо.

$\lambda_1^{ст} = 40 \div 50$

3. Определение критической силы с помощью формулы Ясинского.

Если гибкость стержня меньше предельного значения ($\lambda < \lambda_{пред}$; отрезок ВС на рис. 5), то формула Эйлера становится неприменимой, так как критические напряжения превышают предел пропорциональности и закон Гука неприменим. В этих случаях критическое напряжение определяют по эмпирическим формулам, полученным на основании опытов и приведенных в справочниках. Одна из этих формул – формула Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2,$$

где a, в, c – коэффициенты, зависящие от свойств материала.

Для малоуглеродистой стали (Ст 3) эти коэффициенты равны

$$a = 310мПа$$
$$b = 1{,}14мПа$$
$$c = 0$$

тогда $\sigma_{кр} = a - b\lambda$

$$F_{кр} = (a - b\lambda) \cdot A$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

4. Практический расчет сжатых стержней на устойчивость.

При любом методе расчета на устойчивость должно быть обеспечено условие

$$\sigma < \sigma_{кр}$$

Введем коэффициент запаса по устойчивости $n_у$

Тогда $$\sigma \le \frac{\sigma_{кр}}{n_у}$$ - условие устойчивости

Коэффициент запаса по устойчивости зависит от возможности случайного увеличения силы F и возможности ее внецентренного приложения, от наличия начальных несовершенств в геометрии стержня и способах ее опирания и так далее.

Сопоставим между собой неравенства

$$\sigma = \frac{F}{A} \le R \qquad и \qquad \sigma \le \frac{\sigma_{кр}}{n_у}$$

и обозначим отношение их правых частей через φ:

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{n_у R}$$

отсюда $$\frac{\sigma_{кр}}{n_у} = \varphi \cdot R \qquad (*)$$

Величина φ называется коэффициентом продольного изгиба и определяет степень снижения расчетного сопротивления материала при продольном изгибе. Поскольку коэффициент φ зависит от критического напряжения, которое, например, для упругого стержня определяется выражением

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

то очевидно, что он зависит от гибкости стержня и от механических свойств материала.

Значения коэффициента φ для различных материалов установлены нормами и приводятся в виде таблиц (см. «Краткий справочник по сопротивлению материалов», ТюмГАСА, 2000г).

С учетом равенства (*) представим формулу

$$\sigma = \frac{F}{A} < \frac{\sigma_{кр}}{n_у}$$

в виде $$\sigma = \frac{F}{A} \le \varphi \cdot R$$

Разделим это соотношение на φ

$$\frac{\sigma}{\varphi} = \frac{F}{\varphi A} \le R$$

обозначим $\sigma_{расч} = \dfrac{\sigma}{\varphi}$

и назовем $\sigma_{расч}$ расчетным напряжением.

Тогда $$\sigma_{расч} = \frac{F}{A} \le R \cdot \varphi \qquad (**)$$

- формула для проверки устойчивости.

Формула (**) удобна тем, что она позволяет пользоваться одним расчетным сопротивлением материала при растяжении и сжатии.

Если задана сжимающая сила, а также все геометрические характеристики стержня, то проверка прочности на сжатие с учетом продольного изгиба каких-либо затруднений не вызывает. Более сложной задачей оказывается подбор сечения стержня при заданной длине и сжимающей силе. Дело в том, что коэффициент φ зависит от гибкости стержня, а гибкость неизвестна, поскольку неизвестны размеры сечения. В таком случае расчет выполняется методом последовательных приближений.

Вначале задаются каким-либо значением φ (например, полагают $\varphi = 0{,}5$) и из неравенства (**) определяют площадь поперечного сечения стержня. По найденной площади подбирается поперечное сечение, определяется его радиус инерции и, наконец, гибкость стержня. Для полученной гибкости по таблице (см. Кр. спр. [1], стр. 25) определяется уточненное значение φ, после чего вычисляется напряжение. Если оно отличается от расчетного сопротивления на величину, большую допустимой нормами погрешности, то определяется уточненное значение площади поперечного сечения.

Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока разница между напряжением $\sigma_{расч}$ и расчетным сопротивлением не окажется меньше, как правило, 5%.

5. Примеры.

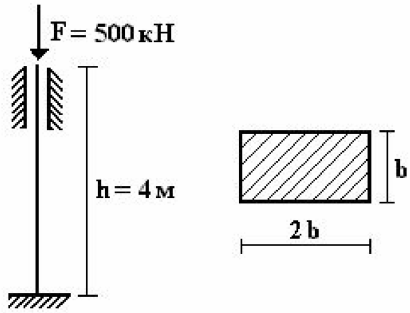
Пример 1.

Стальной стержень длиной $h = 4м$ сжимается силой $F = 500кН$.

Требуется:

1. Найти размеры поперечного сечения при $R = 210мПа$ с помощью метода последовательных приближений;
2. Найти значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Решение:



1) В условии устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \varphi \cdot R$$

неизвестны величины φ и А.

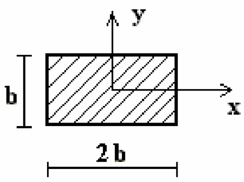
В первом приближении $\varphi_1 = 0{,}5$

$$A \ge \frac{F}{\varphi_1 R} = \frac{500(\text{кН})}{210 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{кН}}{\text{м}^2}\right)} \cdot \frac{1}{\varphi_1} = 2{,}38 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{0{,}5} = 4{,}76 \cdot 10^{-3} \left(\text{м}^2\right)$$

С другой стороны $A = 2b^2$

$2b^2 \ge 4{,}76 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, $b \ge \sqrt{\frac{4{,}76 \cdot 10^{-3}}{2}} \approx 0{,}049(\text{м})$

Определим минимальный радиус инерции



$$J_x = \frac{2b \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{6}$$

$$J_y = \frac{b \cdot (2b)^3}{12} = \frac{8}{12} b^4 = \frac{2}{3} b^4$$

$$J_{min} = J_x = \frac{1}{6} b^4 \Rightarrow i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{b^4}{6 \cdot 2b^2}} = \frac{b}{\sqrt{12}} =$$

$$= \frac{1}{3{,}46} b \approx 0{,}29b$$

Коэффициент приведения длины μ, согласно рис. 4 равен 0,5.

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{min}} = \frac{0{,}5 \cdot 4}{0{,}29 \cdot b} = \frac{6{,}897}{b} = \frac{6{,}897}{0{,}049} \approx 141$$

По таблице из справочника (коэффициенты φ продольного изгиба центрально сжатых элементов по СНиП II 23 – 81) находим

при $\lambda = 140 \qquad \varphi = 0{,}315$

при $\lambda = 150$ $\quad\varphi = 0{,}276$

при $\Delta\lambda = 10$ $\quad 10 \cdot \Delta\varphi = 0{,}039$

$\Delta\varphi = 0{,}0039$

Интерполяцией определяем

$$\varphi_1'(141) = \varphi(140) - 1 \cdot \Delta\varphi = 0{,}315 - 0{,}0039 \approx 0{,}31$$

Сравниваем φ_1 и φ_1'

$0{,}5 \neq 0{,}31$

Проверка:

Считаем напряжения

$$\sigma_{расч} = \frac{F}{A} = \frac{500(кН)}{4{,}76 \cdot 10^{-3}(м^2)} = 105{,}04 \cdot 10^3 кПа \approx 105{,}04 мПа$$

$$\varphi_1' R = 0{,}31 \cdot 210(мПа) \approx 65{,}1 мПа$$

$$\Delta\% = \left|\frac{\sigma_{расч} - \varphi_1' R}{\varphi_1' R}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{105{,}04 - 65{,}1}{65{,}1}\right| \cdot 100\% \approx 61\%$$

$61\% > 5\%$

Во втором приближении принимаем

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_1') = \frac{1}{2}(0{,}5 + 0{,}31) = 0{,}405;$$

$$A \geq 2{,}38 \cdot \frac{10^{-3}}{0{,}405} \approx 5{,}88 \cdot 10^{-3}(м^2)$$

$$b \geq \sqrt{\frac{5{,}88 \cdot 10^{-3}}{2}} \approx 0{,}54 \cdot 10^{-1} = 0{,}054(м)$$

$$\lambda = \frac{6{,}897}{0{,}054} \approx 128$$

при $\lambda = 120$ $\quad\varphi = 0{,}419$

при $\lambda = 130$ $\quad\varphi = 0{,}364$

$10\Delta\varphi = 0{,}419 - 0{,}364 = 0{,}055$

$\Delta\varphi = 0{,}0055$

$$\varphi_2'(128) = \varphi(120) - 8 \cdot \Delta\varphi = 0{,}419 - 8 \cdot 0{,}0055 = 0{,}375$$

Сравниваем φ_2 и φ_2'

$0{,}405 \neq 0{,}375$

Проверка:

$$\sigma_{расч} = \frac{F}{A} = \frac{500(кН)}{5{,}88 \cdot 10^{-3}(м^2)} \approx 85{,}03 мПа$$

$$\varphi_1' R = 0{,}375 \cdot 210(мПа) \approx 78{,}75 мПа$$

$$\Delta\% = \left|\frac{\sigma_{расч} - \varphi_2' R}{\varphi_2' R}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{85{,}03 - 78{,}75}{78{,}75}\right| \cdot 100\% \approx 8\%$$

$8\% > 5\%$

В третьем приближении

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_2') = \frac{1}{2}(0{,}405 + 0{,}375) = 0{,}39$$

$$A \geq 2{,}38 \cdot \frac{10^{-3}}{0{,}39} \approx 6{,}1 \cdot 10^{-3} (м^2)$$

$$b \geq \sqrt{\frac{6{,}1}{2} \cdot 10^{-3}} = 0{,}055(м)$$

$$\lambda = \frac{6{,}897}{b} = \frac{6{,}897}{0{,}055} \approx 125$$

при $\lambda = 120 \qquad \varphi = 0{,}419$

при $\lambda = 130 \qquad \varphi = 0{,}364$

$$10\Delta\varphi = 0{,}055$$

$$\Delta\varphi = 0{,}0055$$

$$\varphi_3'(\lambda = 125) = \varphi(120) - 5 \cdot \Delta\varphi = 0{,}419 - 5 \cdot 0{,}0055 \approx 0{,}3915$$

Сравниваем φ_3 и φ_3'

$$0{,}39 \approx 0{,}3915$$

Проверка:

$$\sigma_{расч} = \frac{F}{A} = \frac{500(кН)}{6{,}1 \cdot 10^{-3}(м^2)} \approx 81{,}97 мПа$$

$$\varphi_1' R = 0{,}3915 \cdot 210(мПа) \approx 82{,}22 мПа$$

$$\Delta\% = \left| \frac{\sigma_{расч} - \varphi_{31}' R}{\varphi_3' R} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{81{,}97 - 82{,}22}{82{,}22} \right| \cdot 100\% \approx 0{,}3\%$$

$0{,}3\% < 5\%$

Полученное значение φ близко к принятому, поэтому окончательно

$$\underline{b \geq 5{,}5 см}$$

1) Найдем значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости. Поскольку гибкость $\lambda = 125$, а для малоуглеродистой стали предельная гибкость $\lambda_{пред} = 100$, то в нашем случае

$$\lambda > \lambda_{пред} \qquad (125 > 100),$$

значит применима формула Эйлера.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{6} \cdot 5{,}5^4 \cdot 10^{-8}}{(0{,}5 \cdot 4)^2} \approx 751{,}8 кН.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{751{,}8 кН}{500 кН} \approx 1{,}5.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. сопротивление материалов. - М.: Высш. шк., 2000.
2. Костенко Н.А., Балясникова С.В. и др. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 2000.
3. Куриленко Е.Ю., Суворова Е.Н. Краткий справочник по сопротивлению материалов. – Тюмень. ТюмГАСА, 2001г.
4. Пономарев А.Т., Зорин В.А. Сопротивление материалов. Курс лекций. Учеб. пособие – М.: Приор - издат, 2002.
5. Сапунов В.Г. Классический курс сопротивления материалов в решениях задач. Учеб. пособие – М.: Эдиториал УРСС, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ