ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Методические указания к выполнению
расчетно-проектировочной работы

Настоящие методические указания содержат краткий теоретический материал по разделу “Устойчивость сжатых стержней”, а также, пример расчета сжатой стойки квадратного поперечного сечения на устойчивость.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
1. Общие сведения 5
2. Расчеты на устойчивость при помощи коэффициентов уменьшения основного допускаемого напряжения 10
2.1. Проверочный расчет сжатых стержней 12
2.2. Проектировочный расчет 13
3. Пример проектирования сжатой стойки 14
Список литературы 17

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость стержневых конструкций – один из основных разделов механики материалов.

Под устойчивостью понимается свойство системы сохранять свое состояние при внешних воздействиях. Если система таким свойством не обладает, она называется неустойчивой. В равной мере можно сказать, что неустойчивым является её состояние.

В реальных условиях всегда существуют какие-то причины, по которым может произойти отклонение от исходного равновесного состояния. Следовательно, возможность перехода к новому состоянию в неустойчивой системе всегда реализуется. В этом случае говорят, что произошла потеря устойчивости.

Система при потере устойчивости может вести себя поразному. Обычно происходит переход к некоторому новому положению равновесия, что в подавляющем большинстве случаев сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или полным разрушением. В некоторых случаях при потере устойчивости конструкция продолжает работать и выполняет по-прежнему свои основные функции, как, например, тонкостенная обшивка в самолетных конструкциях. Возможны, наконец, и такие случаи, когда потерявшая устойчивость система, не обладая устойчивыми положениями равновесия, переходит в режим незатухающих колебаний

Данные методические указания соответствуют базовым учебным планам специальностей 36.01.01, 36.01.03, 37.01.06 и включают краткие теоретические сведения по разделу “Устойчивость сжатых стержней”, а также, пример расчета сжатой стойки квадратного поперечного сечения на устойчивость.

При защите расчетно-проектировочной работы необходимо ответить на вопросы, связанные с её вычислением и уметь решать контрольные задачи по её тематике.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

При центральном сжатии прямого стержня силой P его прямолинейная форма равновесия является устойчивой до достижения указанной силой так называемого критического значения, превышение которого влечет за собой изгиб (выпучивание) стержня.

Значение критической силы, соответствующее переходу сжатого элемента из одного состояния равновесия в другое, находят по формуле Эйлера, которую с учетом различных случаев закрепления концов сжатого стержня можно записать в виде:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{(\mu l)^2}. \quad (1)$$

где μ - коэффициент приведенной длины стержня, принимаемый в зависимости от характера закрепления концов стержня (рис. 1).

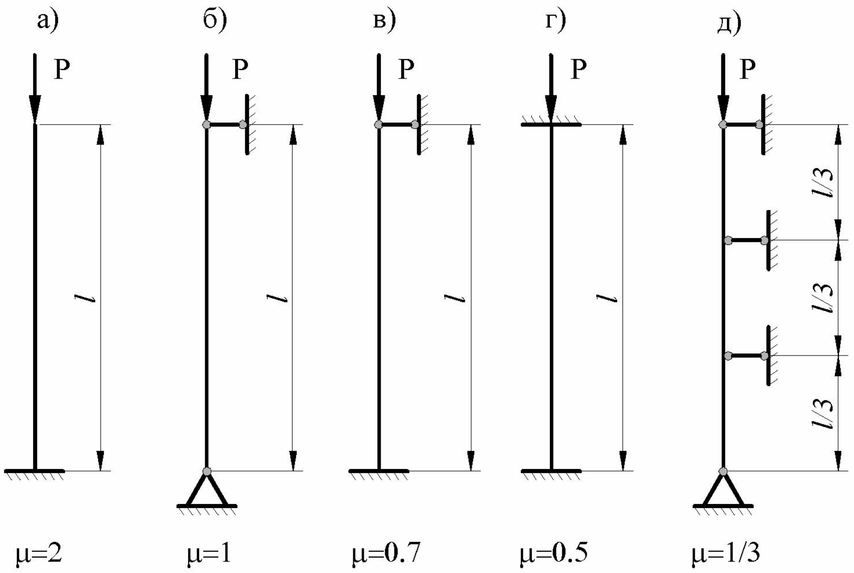

Рис. 1. Схемы закрепления стержней

Анализируя формулу (1), можно сделать вывод, что критическая сила зависит от геометрических размеров стержня и модуля упругости материала, но не зависит от прочностных характеристик материала, из которого изготовлен стержень.

Вывод формулы Эйлера основан на применении дифференциального уравнения упругой линии. Поэтому воспользоваться этой формулой можно лишь в том случае, если справедлив закон Гука, т. е. пока критическое напряжение (напряжение сжатия, соответствующее критической силе) не превышает предела пропорциональности:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} \le \sigma_{пц}. \tag{2}$$

Выведем формулу для критического напряжения $\sigma_{кр}$. В соответствии с выражениями (2) и (1)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{A(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2}. \tag{3}$$

Здесь $i^2 = i^2_{мин} = I_{мин}/A$ — квадрат наименьшего из главных радиусов инерции стержня;

$A = A_{бр}$ - площадь брутто поперечного сечения стержня.

Введя безразмерную величину

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{мин}}, \tag{4}$$

называемую гибкостью стержня, окончательно получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{5}$$

т. е. критическое напряжение стержня зависит только от упругих свойств материала (модуля упругости E) и гибкости стержня (λ).

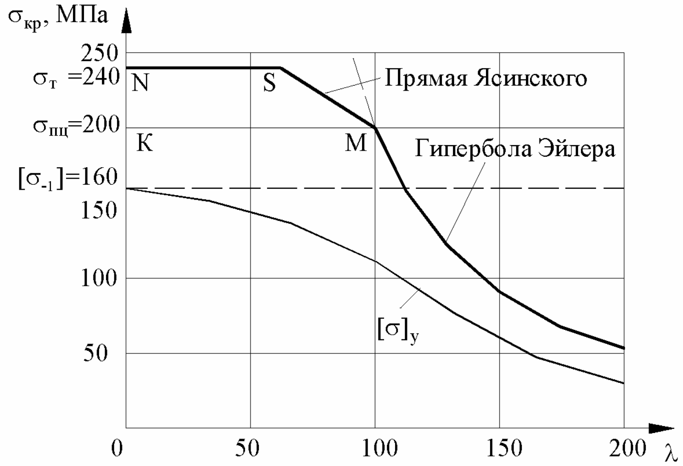

Рис. 2

Функциональная зависимость (5) представляет собой вид изменение формулы Эйлера. В системе координат $\sigma_{кр} - \lambda$ эта зависимость может быть представлена гиперболической кривой, называемой гиперболой Эйлера. В качестве примера приведем такой график (рис. 2) для стержня из стали марки Ст3, для которой модуль упругости $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа а предел пропорциональности $\sigma_{пц} = 200$ МПа. График показывает что по мере возрастания гибкости стержня критическое напряжен стремится к нулю, и наоборот, по мере приближения гибкое стержня к нулю критическое напряжение стремится к бесконечности.

Однако из условия (2) применимости формулы Эйлера в соответствии с формулой (5) имеем

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц},$$

и, следовательно,

$$\lambda_{пред} \ge \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \qquad (6)$$

Значит формула Эйлера становится непригодной при гибкости стержня, меньшей предельного значения $\lambda_{пред}$, зависящего только от свойств материала, т. е. в рассматриваемом случае при

$$\lambda < \lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{2{,}1 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} \approx 100.$$

То же можно получить и графически. Если на оси ординат ($\sigma_{кр}$) отложить величину предела пропорциональности ($\sigma_{пц} = 240$ МПа) и провести из полученной точки К прямую, параллельную оси абсцисс, то она в пересечении с гиперболой Эйлера даст точку М, абсцисса которой и есть $\lambda_{пред}$. Слева от точки М гипербола Эйлера показана штриховой линией, так как здесь она дает значения напряжений, большие предела пропорциональности, т. е. не соответствующие условиям её применимости.

Однако явление продольного изгиба продолжает существовать и за пределом упругости. Опытным путем установлено, что действительные критические напряжения для стержней средней и малой гибкости ($\lambda < \lambda_{пред}$) ниже значений, определенных по формуле Эйлера. Таким образом, в этом случае формула Эйлера дает завышенные значения критической силы, т. е. всегда переоценивает действительную устойчивость стержня. Поэтому использование формулы Эйлера для стержней, теряющих устойчивость за пределом упругости, не только принципиально неправильно, но и крайне опасно по своим последствиям.

Теоретическое решение задачи об устойчивости за пределом пропорциональности сложно, поэтому обычно пользуются эмпирическими формулами, полученными в результате обработки большого количества опытных данных. Данные формулы носят также название формул Ясинского, который впервые предложил простую эмпирическую формулу для вычисления критических напряжений за пределом пропорциональности:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda . \tag{7}$$

Значения коэффициентов a и b для некоторых материалов даны в табл. 1.

Для чугуна пользуются параболической зависимостью

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2 . \tag{8}$$

где $c = 0{,}53$.

Таблица 1.

Материал	$\lambda_{пред}$	a	b
		МПа	
Ст2, Ст3, Ст4	100	310	1,14
Ст5	100	464	3,26
Чугун	80	776	12

По этим данным для каждого материала при $0 < \lambda < \lambda_{пред}$ можно построить график зависимости критических напряжений от гибкости стержня.

При некотором значении гибкости (обозначим его λ_0) величина ($\sigma_{кр}$), вычисленная по формуле (7) или (5), становится равной предельному напряжению при сжатии, а именно: для пластичных материалов

$$\sigma_{кр} = \sigma_T,$$

а для хрупких материалов

$$\sigma_{кр} = \sigma_B. \tag{9}$$

Стержни, у которых $\lambda < \lambda_0$, называют стержнями малой жёсткости. Их рассчитывают только на прочность.

В рассматриваемом примере (рис. 2) часть графика критических напряжений за пределом пропорциональности (при $40 < \lambda < 100$) представит собой слегка наклоненную прямую SM, а часть (при $0 < \lambda < 40$) - горизонтальную линию NS. Следовательно график $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ для стали Ст3 состоит из трех частей: гиперболы Эйлера при $\lambda > 100$, наклонной прямой при $40 < \lambda < 100$ и почти горизонтальной прямой при $\lambda < 40$. Наклонная прямая SM соответствует напряжениям между пределом пропорциональности пределом текучести. Горизонтальная прямая SN соответствует напряжению, равному пределу текучести.

2. РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОМОЩИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УМЕНЬШЕНИЯ ОСНОВНОГО ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Как правило, центрально сжатые стержни теряют свою несущую способность от потери устойчивости раньше, чем от потери прочности, так как критическое напряжение всегда меньше предела текучести или предела прочности:

$$\sigma_{кр} < \sigma_{пред},$$

где $\sigma_{пред} = \sigma_T$ - для пластичных материалов;

$\sigma_{пред} = \sigma_B$ - для хрупких материалов.

Необходимо напомнить, что для стержней малой гибкости ($\lambda < \lambda_0$, λ_0 - значение гибкости, при котором величина $\sigma_{кр}$, вычисленное по формуле Ясинского, становится равной предельному напряжению) трудно говорить о явлении потери устойчивости прямолинейной формы стержня, как это имеет место для стержней средней и большой гибкости. Несущая способность стержней малой гибкости определяется прочностью материала.

Критическое напряжение для центрально сжатых стержней средней и большой гибкости представляет, пожалуй, большую опасность, чем предел текучести для пластичных материалов или предел прочности для хрупких материалов при простом растяжении. Очевидно, что при практическом решении вопроса об устойчивости стержня нельзя допустить возникновения в нем критического напряжения, а следует принять соответствующий запас устойчивости.

Чтобы получить допускаемое напряжение на устойчивость, нужно выбрать коэффициент запаса n_y. Тогда

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}. \tag{10}$$

Коэффициент запаса на устойчивость всегда принимают несколько больше основного коэффициента запаса на прочность

($n_у > n$). Это делается потому, что для центрально сжатых стержней ряд обстоятельств, неизбежных на практике (эксцентриситет приложения снимающих сил, начальная кривизна и неоднородность стержня), способствуют продольному изгибу, в то время как при других видах деформации эти обстоятельства почти не сказываются. Коэффициент запаса устойчивости для сталей выбирают в пределах 1,8 - 3,0; для чугуна - в пределах 5,0 - 5,5. Заметим, что меньшие значения $n_у$ принимают при большей гибкости.

Допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma]_у = \sigma_{кр} / n_у$ и допускаемое напряжение на прочность при сжатии $[\sigma_-] = \sigma_{пред} / n$ взаимно связаны. Составим их отношение:

$$\frac{[\sigma]_у}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{кр}}{n_у} \frac{n}{\sigma_{пред}}, \text{ или } [\sigma]_у = \frac{\sigma_{кр}}{n_у} \frac{n}{\sigma_{пред}} [\sigma_-]. \tag{11}$$

Обозначив $\frac{\sigma_{кр}}{n_у} \frac{n}{\sigma_{пред}} = \varphi$, получим

$$[\sigma]_у = \varphi[\sigma_-]. \tag{12}$$

Здесь φ - коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость. Этот коэффициент для каждого материала можно вычислить при всех значениях гибкости λ и представить в виде таблицы или графика зависимости φ от λ. Значения коэффициента φ для некоторых сталей и чугуна приведена в табл. 2. Пользуясь аналогичными таблицами, можно достаточно просто рассчитывать стержни на устойчивость.

Составим условие устойчивости сжатых стержней:

$$\sigma < [\sigma]_у. \tag{13}$$

Так как

$$\sigma = \frac{N}{A_{бр}}, \ [\sigma]_у = \varphi[\sigma_-],$$

Таблица 2

Гибкость, λ	Коэффициент φ			Гибкость, λ	Коэффициент φ		
	Ст2, Ст3, Ст4	Ст5	Чугун		Ст2, Ст3, Ст4	Ст5	Чугун
0	1,00	1,00	1,00	110	0,52	0,43	—
10	0,99	0,98	0,97	120	0,45	0,36	—
20	0,96	0,95	0,91	130	0,40	0,33	—
30	0,94	0,92	0,81	140	0,36	0,29	—
40	0,92	0,89	0,69	150	0,32	0,26	—
50	0,89	0,86	0,57	160	0,29	0,24	—
60	0,86	0,82	0,44	170	0,26	0,21	—
70	0,81	0,76	0,34	180	0,23	0,19	—
80	0,75	0,70	0,26	190	0,21	0,17	—
90	0,69	0,62	0,20	200	0,19	0,16	—
100	0,60	0,51	0,16	—	—	—	—

то условие устойчивости принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{A_{бр}} \leq \varphi[\sigma_{-}]. \tag{14}$$

При расчете на устойчивость местные ослабления сечения практически не изменяют величину критической силы, поэтому в расчётные формулы вводится полная площадь $A_{бр}$, поперечного сечения.

Существуют два вида расчета на устойчивость сжатых стержней - проверочный и проектировочный.

2.1. Проверочный расчет сжатых стержней

Порядок проверочного расчёта на устойчивость при использовании таблицы коэффициентов φ следующий:

1) исходя из известных размеров и формы поперечного сечения, определяем наименьший осевой момент инерции $I_{мин}$, площадь

$A_{бр}$, вычисляем минимальный радиус инерции $i_{мин} = \sqrt{\dfrac{I_{мин}}{A_{бр}}}$ и гибкость $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{мин}}$;

2) по таблице находим коэффициент φ и вычисляем допускаемое напряжение на устойчивость по формуле $[\sigma]_y = \varphi[\sigma_-]$;

3) сравниваем действительное напряжение $\sigma = \dfrac{P}{A_{бр}}$ с допускаемым напряжением $[\sigma]_y$ на устойчивость:

$$\sigma < [\sigma]_y.$$

2.2. Проектировочный расчет

В расчетной формуле на устойчивость

$$\sigma = \frac{P}{\varphi A_{бр}} \le [\sigma_-], \text{ или } A_{бр} \ge \frac{P}{\varphi[\sigma_-]}, \tag{15}$$

имеются две неизвестные величины - коэффициент φ и искомая площадь брутто $A_{бр}$ поперечного сечения. Поэтому при подбор сечений приходится пользоваться методом последовательных приближений, варьируя величину коэффициента φ. Обычно в первой попытке берут $\varphi = 0{,}5 \div 0{,}7$. Принимая какое-либо из этих значений φ_1, определяют требуемую площадь $A_{бр}$ и подбирают сечение. Подобранное сечение проверяют и устанавливают фактическое значение φ_1'. Если φ_1' значительно отличается от φ_1, то и напряжение отличается от допускаемого. Тогда следует повторить расчет, т.е. сделать вторую попытку, приняв среднее по величине значение между φ_1 и φ_1':

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}. \tag{16}$$

В результате второй попытки устанавливают φ_2'. Если требует третья попытка, то $\varphi_3 = \dfrac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2}$ и т. д.

3. ПРИМЕР ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЖАТОЙ СТОЙКИ

Подобрать размер поперечного сечения квадратной стойки показанной на рис. 1. в) (для данной стойки $\mu = 0{,}7$). Стойка нагружена сжимающей силой $P = 40$ кН, длина стойки $l = 1{,}2$ м, материал стойки – сталь 3. Определить критическое напряжение, критическую силу и запас устойчивости как отношение критической силы к заданной. Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_-] = 160$ МПа.

Используя условие устойчивости (15) и метод последовательных приближений, определим размеры поперечного сечения квадратной стойки.

Первое приближение.

Принимаем $\varphi_1 = 0{,}6$. Тогда

$$A_1 \geq \frac{P}{\varphi_1[\sigma_{-1}]} = \frac{40 \cdot 10^3}{0{,}6 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0{,}00042 \text{ м}^2 = 4{,}2 \text{ см}^2.$$

Для квадратного сечения имеем: $A_1 = a^2$, тогда $a = \sqrt{A} = 2{,}05$ см.

Найдём фактическое значение гибкости стержня и коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения.

Для этого находим:

минимальное значение осевого момента инерции $I_{\min} = I_x = I_y = \dfrac{a^4}{12}$ см^4;

минимальное значение радиуса инерции $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\dfrac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{12}} = \dfrac{a}{\sqrt{12}}$ см;

фактическая гибкость стойки $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}}$.

Подставив числовые значения, получим

$$i_{\min} = \frac{2{,}05}{\sqrt{12}} = 0{,}592\,,\ \lambda = \frac{0{,}7 \cdot 120}{0{,}592} = 141{,}9\,.$$

Используя данные таблицы 2 путём линейной интерполяции определяем фактическое значение коэффициента φ:

$$\varphi_1^* = \varphi_{140} - \frac{\varphi_{140} - \varphi_{150}}{10} \cdot 1{,}9 = 0{,}36 - \frac{0{,}36 - 0{,}32}{10} \cdot 1{,}9 = 0{,}352\,.$$

Поскольку найденное фактическое значение коэффициента $\varphi_1^* = 0{,}352$ значительно отличается от принятого значения $\varphi_1 = 0{,}6$, то вычисления продолжаем дальше.

Второе приближение.

На втором приближении принимаем:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1^* + \varphi_1}{2} = \frac{0{,}352 + 0{,}6}{2} = 0{,}476.$$

Тогда находим:

$$A_2 \ge \frac{P}{\varphi_2[\sigma_{-1}]} = \frac{40 \cdot 10^3}{0{,}476 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0{,}00053 \text{ м}^2 = 5{,}3 \text{ см}^2.$$

$$a = \sqrt{5{,}3} = 2{,}3 \text{ см},\ i_{\min} = \frac{2{,}3}{\sqrt{12}} = 0{,}664 \text{ см},\ \lambda = \frac{0{,}7 \cdot 120}{0{,}664} = 126{,}5\,.$$

$$\varphi_2^* = \varphi_{120} - \frac{\varphi_{120} - \varphi_{130}}{10} \cdot 6{,}5 = 0{,}45 - \frac{0{,}45 - 0{,}4}{10} \cdot 6{,}5 = 0{,}418.$$

Фактическое значение коэффициента $\varphi_2^* = 0{,}418$ ещё сильно отличается от принятого значения коэффициента на втором приближении $\varphi_2 = 0{,}476$. Поэтому вычисления повторяем ещё.

Третье приближение.

На третьем приближении принимаем:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2^* + \varphi_2}{2} = \frac{0{,}418 + 0{,}476}{2} = 0{,}447.$$

Тогда находим:

$$A_3 \geq \frac{P}{\varphi_3[\sigma_{-1}]} = \frac{40 \cdot 10^3}{0{,}447 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0{,}00056 \text{ м}^2\text{=}5{,}6 \text{ см}^2.$$

$$a = \sqrt{5{,}6} = 2{,}37 \text{ см}, \; i_{\min} = \frac{2{,}37}{\sqrt{12}} = 0{,}684 \text{ см}, \; \lambda = \frac{0{,}7 \cdot 120}{0{,}684} = 122{,}8.$$

$$\varphi_3^* = \varphi_{120} - \frac{\varphi_{120} - \varphi_{130}}{10} \cdot 2{,}8 = 0{,}45 - \frac{0{,}45 - 0{,}4}{10} \cdot 2{,}8 = 0{,}436.$$

Проверим прочность подобранной стойки.
Фактическое напряжение в сжатой стойке:

$$\sigma = \frac{40 \cdot 10^3}{5{,}6 \cdot 10^{-4}} = 71{,}4 \text{ МПа.}$$

Допускаемое напряжение для сжатой стойки на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma_-] = 0{,}436 \cdot 160 = 69{,}8 \text{ МПа.}$$

Перенапряжение составляет:

$$\frac{\sigma - [\sigma]_y}{[\sigma]_y} \cdot 100\% = \frac{71{,}4 - 69{,}8}{69{,}8} \cdot 100\,\% = 2{,}3\,\%,$$

что допустимо.

Окончательно принимаем $a = 2{,}37$ см, $A = 5{,}6$ см^2.

Определим критическое напряжение и критическую силу для спроектированной стойки.

Поскольку гибкость стойки в нашем случае $\lambda = 122{,}2 > \lambda_{пред} = 100$, следовательно, для определения критической силы используем формулу Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11}}{122{,}2^2} = 138{,}8 \text{ МПа.}$$

Тогда критическое значение силы

$$P_{кр} = \sigma_{кр} A = 138{,}8 \cdot 10^6 \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-4} = 77{,}7 \text{ кН.}$$

Определим значение коэффициента запаса устойчивости:

$$n = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{77{,}7}{40} = 1{,}94.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сопротивление материалов/ Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г.С.—5-е изд., перераб. и доп.—К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. –775 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. Учебник для втузов. Изд. 4-е. “Высш. школа”, 1975.
3. Сопротивление материалов. Феодосьев В.И., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1972 г., 544 стр.
4. Сопротивление материалов. Н.М. Беляев, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1976 г., 608 стр.