

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
Учебное пособие

В пособии в краткой форме приведены основные расчетные зависимости по главным темам курса сопротивления материалов и даны рекомендации по порядку решения задач, решаемых в техническом вузе в течение одного – двух семестров студентами всех направлений и специальностей дневной и заочной форм обучения. Представлены справочные данные, необходимые для решения стандартных задач и выполнения расчетно-графических заданий.

Введение

Данное пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении ими расчетно-графических работ и решении задач по курсу сопротивления материалов. В пособии в краткой форме приведены основные расчетные зависимости по главным темам курса и даны рекомендации по порядку решения задач.

Особое внимание уделено обеспечению обучающихся справочными данными, потребность в которых становится все острее. В ПРИЛОЖЕНИИ приведены и систематизированы все основные справочные величины, необходимы для выполнения расчетов. Сведения собраны из источников, доступность которых в последнее время резко уменьшилась в связи с практически полным прекращением централизованного издания книг такого рода [1-4].

1. Определение геометрических характеристик плоских сечений

В сопротивлении материалов при решении задач, связанных с поведением стержневых систем, обычно одну из осей координат (здесь и далее z) направляют вдоль продольной оси стержня, а две другие (x и y) размещают в плоскости поперечного сечения. Для решения задач механики стержневых систем необходимо знать положение центра тяжести поперечного сечения, направление главных центральных осей и величины главных моментов инерции.

В случаях простых сечений типа прямоугольника, круга или прокатного профиля подобные сведения можно найти в справочной литературе, например в параграфе 1 ПРИЛОЖЕНИЯ данного пособия (далее п.1 ПРИЛОЖЕНИЯ). В случае сложной формы поперечного сечения определение всех указанных выше геометрических характеристик производится с помощью численных процедур. Так, при нахождении центра тяжести сложного сечения (рис. 1.а) его разбивают на простые части и выбирают вспомогательные оси x' и y' . Простой считается такая часть, для которой известны центр тяжести, площадь и моменты инерции относительно ее центральных осей.

Определение координат центра тяжести сложного сечения производится по формулам

$$x'_c = \frac{\sum F_i \cdot x'_i}{\sum F_i}; \quad y'_c = \frac{\sum F_i \cdot y'_i}{\sum F_i}; \quad (1.1)$$

где F_i - площади простых фигур;

x'_m, y'_c - координаты центров тяжести простых фигур относительно вспомогательных осей.

Моменты инерции сложной фигуры относительно центральных осей всего сечения x и y можно определить как сумму моментов инерции простых частей, используя правило параллельного переноса сечения (теорему Штейнера) по формулам

$$\begin{aligned} J_x &= \sum J_{xi} + \sum F_i \cdot y_i^2; \\ J_y &= \sum J_{yi} + \sum F_i \cdot x_i^2; \\ J_{xy} &= \sum J_{xyi} + \sum F_i \cdot x_i \cdot y_i, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где J_{xi}, J_{yi}, J_{xyi} - моменты инерции простых частей относительно их

центральных осей параллельных общим x и y ;

x_i, y_i - координаты центров тяжести простых частей относительно общих центральных осей x и y .

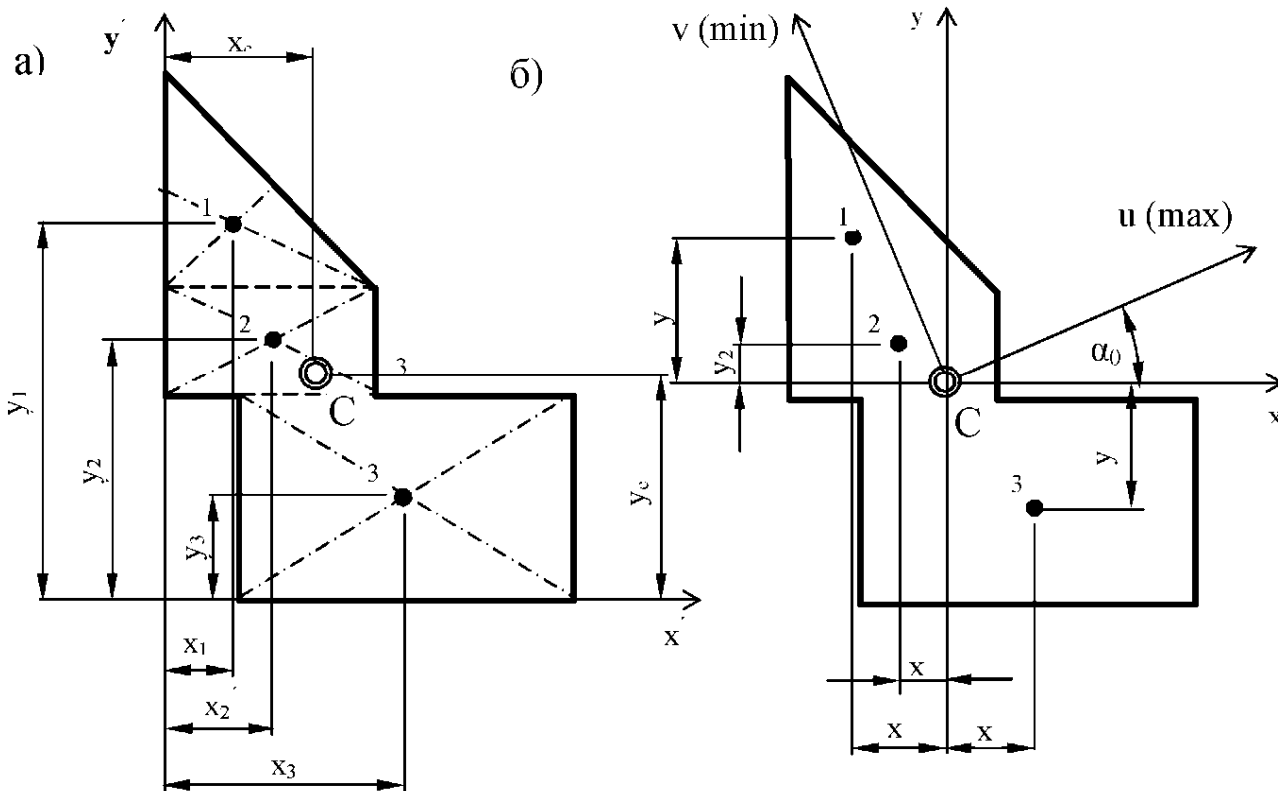


Рис.1 Схемы для определения центра тяжести (а) и моментов инерции относительно центральных осей (б)

Значения моментов инерции простых элементов относительно их собственных центральных осей J_{xi} , J_{yi} и J_{xyi} могут быть определены по формулам п.1.1 ПРИЛОЖЕНИЯ. Если сечение сконструировано из стандартных прокатных профилей (двутавров, швеллеров и т.д.), то значения их моментов инерции принимаются по п.п. 1.2 ПРИЛОЖЕНИЯ. Если оси x_i , y_i отдельного элемента сечения повернуты на угол α по отношению к осям в сортаменте x_1 и y_1 , то для нахождения моментов инерции можно найти по формулам

$$\begin{aligned} J_{xi} &= J'_{xi} \cos^2 \alpha + J'_{yi} \sin^2 \alpha - J'_{xyi} \sin 2\alpha; \\ J_{yi} &= J'_{xi} \sin^2 \alpha + J'_{yi} \cos^2 \alpha + J'_{xyi} \sin 2\alpha; \\ J_{xyi} &= \frac{J'_{xi} - J'_{yi}}{2} \sin 2\alpha + J'_{xyi} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

После определения J_x, J_y, J_{xy} нахождение положения главных осей можно выполнить по зависимости угла поворота α_0 одной из главных осей относительно оси x по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \quad (1.4)$$

Значения главных моментов инерции J_u, J_v можно найти по формуле

$$J_{u \text{ или } v} = J_{\max \text{ или } \min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}. \quad (1.5)$$

В случае, когда сечение имеет ось симметрии, то решение всей задачи существенно упрощается. Такая ось всегда является центральной, т.е. проходит через центр тяжести. Поскольку относительно осей симметрии $J_{xy} = 0$, то такие оси одновременно будут главными. Очевидно, что вычисления по формулам (1.4) и (1.5) в этом случае теряют смысл.

Важным практическим вопросом задачи является установление знаков экстремумов главных осей. При вычислении J_{\max}, J_{\min} можно использовать свойство, что ось $u(\max)$, относительно которой момент инерции имеет максимальное значение, повернута относительно оси x на угол $|\alpha_0| \leq 45^\circ$, если $J_x \geq J_y$. Иногда, когда габаритные размеры сечения ощутимо различаются визуально, может быть полезным свойство вытянутости сечения вдоль оси $v(\min)$.

2. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии

Растяжение или сжатие возникает в стержнях, если они подвержены воздействию продольной нагрузки. В этом случае в поперечных сечениях стержня возникает одно внутреннее усилие - продольная сила N . В статически определимых конструкциях определение продольных сил обычно производится методом сечений. Если нагрузка меняется по длине стержня (рис.2.а), то надо разбить конструкцию на участки с одинаковыми законами изменения продольной силы и составить для каждого участка уравнения продольных сил используя правило суммирования отсеченных нагрузок

$$N = \sum_{l(n)} P_{iz} \quad (2.1)$$

Правило знаков при составлении уравнений (2.1) - отсеченная нагрузка направленная от сечения вызывает растягивающую продольную силу и суммируется со знаком плюс. Если расчету подвергается стержневая система (рис.2, б), то определение величин и знаков внутренних усилий выполняется методами теоретической механики. При этом обычно предполагают, что нагрузка на деформируемые стержни системы имеет узловой характер, т.е. приложена в узлах.

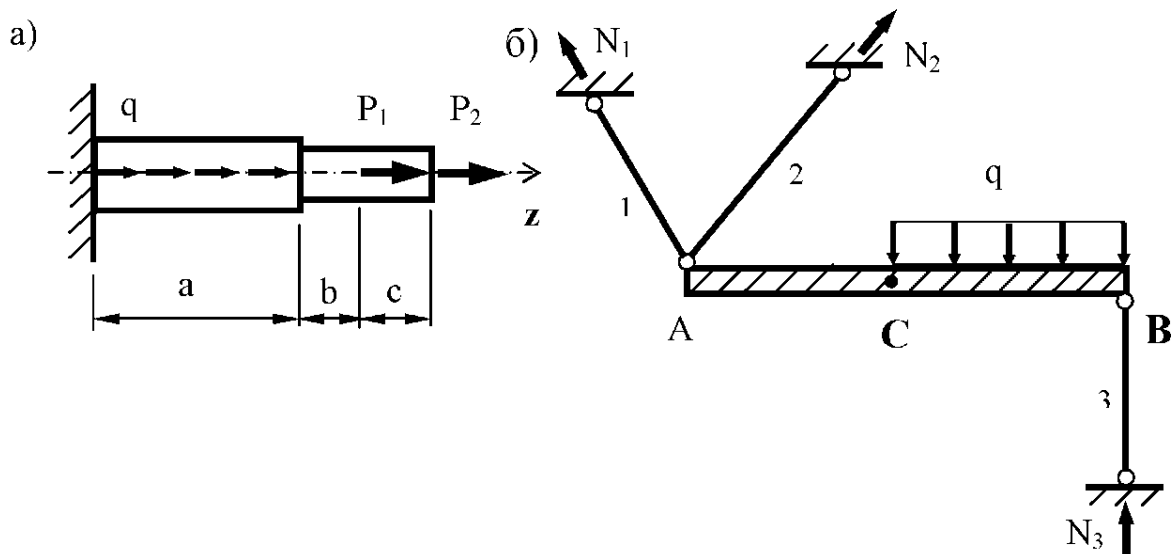


Рис.2. Определение внутренних усилий в отдельном стержне (а) и в шарнирно-стержневой системе (б)

Расчеты на прочность при растяжении и сжатии по методу допускаемых напряжений производят на основе анализа величин нормальных напряжений в поперечных сечениях, которые определяют по формуле

$$\sigma = \frac{N(z)}{F(z)} \quad (2.1)$$

где $N(z)$ - продольная сила в расчетном сечении;

$I'(z)$ - площадь расчетного поперечного сечения.

Проверку прочности при растяжении и сжатии производят по условию

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_{\pm} = \frac{\sigma_0}{n}; \quad (2.2)$$

где σ_{\max} – максимальное по модулю расчетное растягивающее или сжимающее напряжение;

$[\sigma]_{\pm}$ – допускаемое напряжение при растяжении (+) или сжатии (-);

σ_0 – опасное (предельное) для материала конструкции напряжение;

n – нормативный коэффициент запаса прочности (надежности).

Величины предельных напряжений определяются из прямых опытов на растяжение и сжатие стандартных образцов из данного материала. При расчетах σ_0 обычно принимается по справочным источникам. Некоторое количество таких данных для наиболее распространенных типов материалов приведено в п.2 ПРИЛОЖЕНИЯ.

Подбор сечений по критерию прочности выполняется из условия

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]_{\pm}}. \quad (2.3)$$

Расчет по критерию жесткости производите с помощью построения деформированной схемы конструкции - плана перемещений. Для этого после определения внутренних усилий во всех деформируемых элементах системы производят вычисление удлинений по формуле

$$\Delta l = \int_{(l)} \frac{N(z) \cdot dz}{EF(z)}; \quad (2.4)$$

где E - модуль упругости материала, который можно взять из п.2 ПРИЛОЖЕНИЯ.

Если состояние элемента конструкции однородно ($N(z) = \text{const}$; $F(z) = \text{const}$), то формула (2.4) несколько упрощается и принимает вид

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}. \quad (2.5)$$

Определение перемещений в одностержневой конструкции (рис.2, а) производится элементарно из предположения их численного равенства удлинению участка стержня между расчетным сечением и неподвижным сечением. При расчете шарнирно-стержневой системы (рис.2, б) строят план перемещений, используя т.н. метод круговых засечек (рис.3).

Для этого на недеформированной схеме конструкции откладывают найденные удлинения деформируемых стержней и находят новые положения узлов конструкции, проводя круговые засечки. После построения плана перемещений его используют для определения величин и направлений

перемещений точек конструкции. Эти результаты могут быть использованы для проверки жесткости конструкции, которая обычно проводится по условию типа $\delta_i \leq [\delta]$ (2.6)

где δ_i - перемещение характерной точки конструкции, критичное для ее эксплуатации;

$[\delta]$ - допускаемое перемещение, назначаемое по нормам проектирования данного типа конструкций.

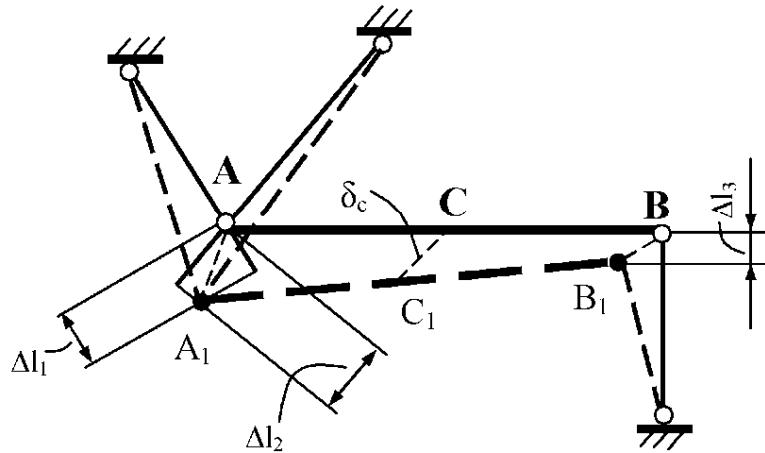


Рис.3. Определение перемещений в шарнирно-стержневой системе

Определение внутренних усилий в статически неопределимых стержневых системах (рис.4) производится по особому плану. Из теоретической механики известно, что если число неизвестных реакций связи m больше числа возможных независимых уравнений статики n для этой системы ($m-n>0$), то такие системы называют статически неопределимыми. Решение таких систем производят в три этапа (три стороны задачи).

1. Статическая сторона задачи состоит в том, что составляются все возможные независимые уравнения статики для элементов системы в количестве m .
2. Геометрическая сторона задачи. Здесь рассматриваются возможные перемещения элементов системы и их деформации, возникающие при этом. С помощью плана перемещений составляются уравнения, связывающие между собой деформации отдельных элементов. Количество таких геометрических уравнений равно $(m-n)$, а сами уравнения называют уравнениями совместности деформаций.
3. Физическая сторона задачи. Деформации элементов системы, используемые в уравнения совместности, связывают с параметрами воздействий на систему (изменением температуры, неточностью изготовления элементов, осадкой опор и т.д.) и усилиями, возникающими в элементах системы, с помощью физических зависимостей типа (2.5).

После определения усилий в элементах системы (раскрытия статической неопределимости) проверка прочности, подбор сечений или проверка жесткости производится по тем же условиям, что и в статически определимых.

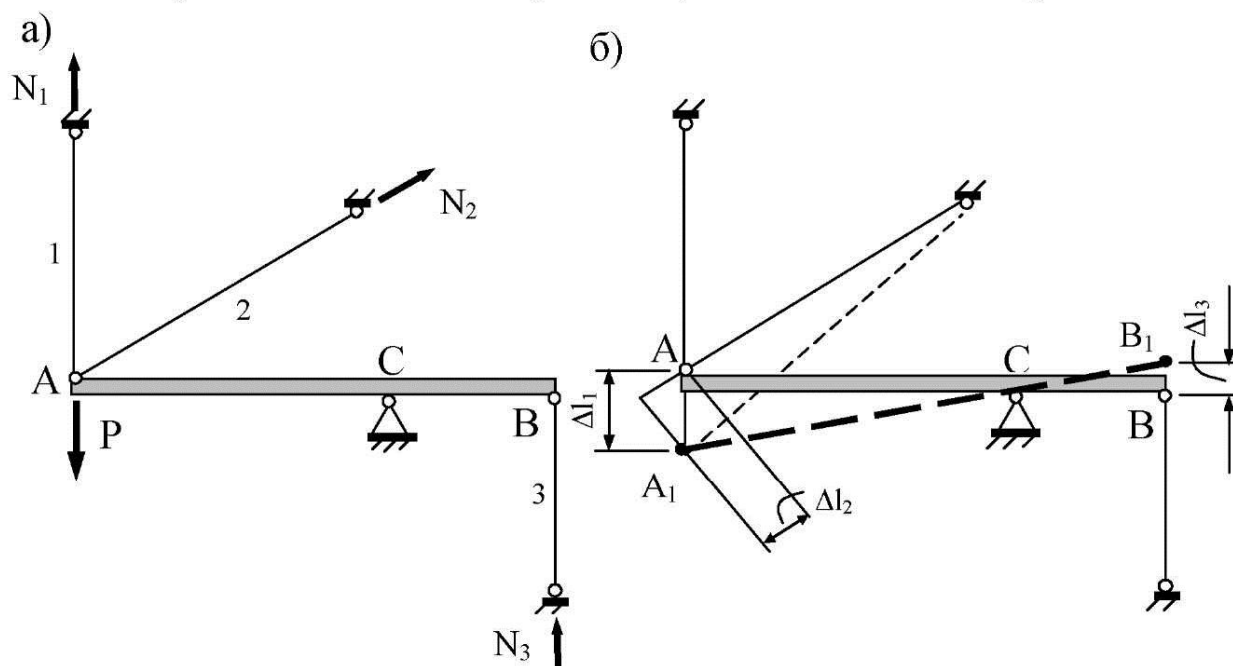


Рис.4. Статически неопределимая система:
а – план сил, б – план перемещений

3.Расчеты на прочность и жесткость при изгибе

Изгибом называется вид сопротивления стержневой конструкции (балки, рамы и т.д.) при котором в ее поперечных сечениях возникают изгибающие моменты. Изгиб является одним из наиболее распространенных видов работы конструкции.

Расчет конструкции на изгиб обычно начинается с определения изгибающих моментов M и поперечных сил Q . Для этого необходимо знать все внешние силы, действующие на конструкцию, как активные (нагрузку), так и реактивные (реакции опор). Опорные реакции определяются из уравнений равновесия.

Если определение Q и M производится аналитическим способом, то можно рекомендовать следующий порядок действий.

- а) Балка разбивается на n участков. За границы участков принимаются сечения, где меняется характер нагрузки. Это места приложения сосредоточенных сил или пар сил, начала и концы распределенных нагрузок, опоры, шарниры и т.п.
- б) Для каждого участка составляются уравнения внутренних усилий $Q(z)$ и $M(z)$ как сумму проекций на ось y и сумму моментов относительно оси x поперечного сечения от внешних сил, лежащих по одну сторону от сечения

$$Q = \sum_{l(\pi)} P_i \cdot y_i; \quad M = \sum_{l(\pi)} m_x(P_i). \quad (3.1)$$

Правила знаков для Q и M , принятые в пособии, проиллюстрированы на рис.5 и трактуются следующим образом. Положительная поперечная сила возникает, если нагрузка сдвигает левую часть балки относительно правой вверх, а правую относительно левой вниз. Положительный изгибающий момент соответствует растяжению нижних волокон (первой четверти поперечного сечения) балки.

в) Для характерных сечений вычисляются значения Q и M . Эти операции могут быть выполнены без составления уравнений 3.1. В этом случае для построения эпюр Q и M используются правила контроля эпюр, основанные на дифференциальных зависимостях

$$\frac{dM}{dz} = Q; \quad \frac{dQ}{dz} = -q. \quad (3.2)$$

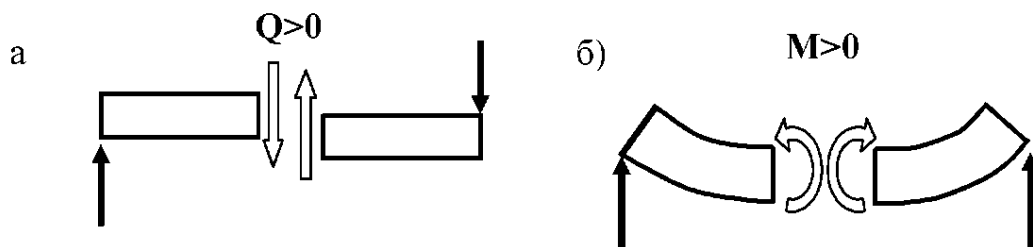


Рис.5. Правила знаков: а – поперечных сил, б– изгибающих моментов

г) С помощью полученных значений строятся эпюры Q и M , которые используются для прочностных расчетов.

Оценка прочности обычно производится с помощью нормальных σ и касательных τ напряжений, которые могут быть найдены по формулам

$$\sigma = \frac{M}{J_x} \cdot y; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{J_x \cdot b(y)}; \quad (3.3)$$

где J_x – момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси, которая совпадает с главной центральной осью x ;
 y – координата расчетной точки сечения относительно нейтральной оси;
 $S_x^{\text{отс}}$ – статический момент отсеченной части сечения (части сечения расположенной ниже расчетной точки) относительно нейтральной оси;
 $b(y)$ – ширина сечения на уровне расчетной точки.

Проверка прочности производится обычно по одной из теорий прочности путем проверки выполнения условия

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} \leq [\sigma]; \quad (3.4)$$

где $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ – эквивалентное напряжение в расчетной точке сечения; определяемое по одной из теорий прочности;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение для материала данной конструкции.

Для определения эквивалентных напряжений используются расчетные напряжения σ и τ , определяемые в опасных сечениях по формулам (3.3). Практика расчетов показывает, что в большинстве случаев влияние касательных напряжений на прочность балки мало. Это позволяет при подборе сечения по критерию прочности использовать условие

$$W_x = \frac{|M_{\text{max}}|}{[\sigma]}; \quad (3.5)$$

где W_x – момент сопротивления изгибу, зависящий от формы и размеров поперечного сечения ($W_x = J_x / y_{\text{max}}$).

Размеры поперечного сечения заданной формы подбираются по сортаментам (см. п.1 ПРИЛОЖЕНИЯ), если сечение состоит из стандартных прокатных профилей, или путем выражения W_x через некоторый параметр размеров сечения и нахождения значения этого параметра из условия (3.5).

Определение перемещений при изгибе при выполнении расчетов по критерию жесткости чаще всего производится методами начальных параметров или Максвелла-Мора. При действии на балку поперечных нагрузок, прямолинейная первоначально ось балки искривляется, а ее поперечные сечения перемещаются в плоскости действия нагрузки, если эта плоскость совпадает с плоскостью симметрии конструкции. Новое положение сечения z определяется двумя величинами - прогибом $v(z)$ и углом поворота $\theta(z)$ (рис.6).

Метод начальных параметров (МНП) сводится к интегрированию дифференциального уравнения изогнутой оси балки (рис.6) в простейшем случае имеющего вид

$$v(z) = -\frac{M(z)}{EJ}; \quad (3.6)$$

где $EJ = \text{const}$ – изгибная жесткость поперечного сечения балки, зависящая от модуля упругости материала балки E (см.п.2 ПРИЛОЖЕНИЯ) и момента инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси J ;

$M(z)$ – функция изгибающего момента.

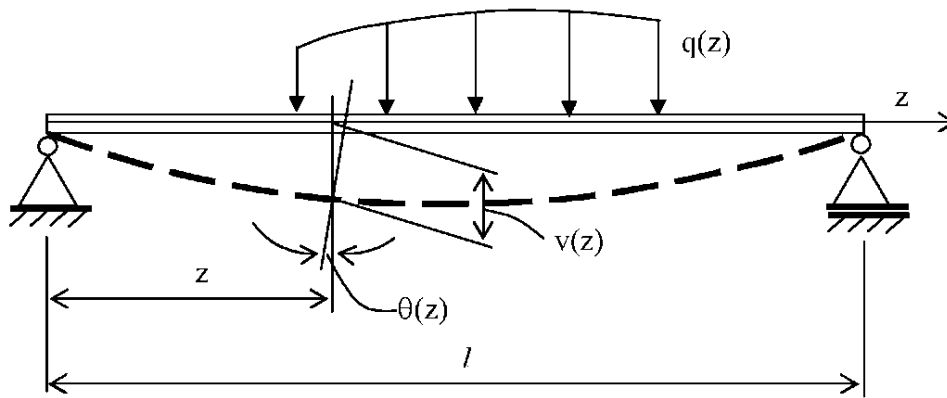


Рис.6 Перемещения при изгибе

Наиболее просто универсальное уравнение изогнутой оси балки $v(z)$ получается с помощью интегрирования уравнения (3.6) по так называемым правилам Клебша, смысл которых иллюстрирует рис. 7.

Определяя изгибающий момент $M(z)$ как сумму моментов внешних сил со стороны начала координат, получим универсальное уравнение

$$M(z) = \sum M_i(z) = R_a \cdot z - P \cdot (z-a) - q \frac{(z-a)^2}{2} + q \frac{(z-c)^2}{2} - m \cdot (z-b)^0, \quad (3.7)$$

которое несложно обобщить на случай любого количества нагрузок каждого типа. Если расчетное сечение лежит левее силы P (т.е. $z < a$), или левее пары m ($z < b$) и т.д., то соответствующее этому фактору слагаемое в уравнении (3.7) отбрасывается. Этот прием можно использовать с помощью т.н. «правила отрицательного аргумента» – если в формуле типа (3.7) аргумент вида $(z - a)$, $(z - b)$, $(z - c)$ и т.д. принимает отрицательное значение, то содержащее его слагаемое отбрасывается.

После подстановки выражения (3.7) в уравнение (3.6) последнее можно проинтегрировать методом разделения переменных, выполняя интегрирование каждого слагаемого в правой части независимо от других («не раскрывая скобок»). В результате этой процедуры получаются универсальные уравнения углов поворота сечений (3.8) и прогибов (3.9)

$$\theta(z) = C_1 - \frac{1}{EJ} \left[R_a \frac{z^2}{2} - P \frac{(z-a)^2}{2} - q \frac{(z-a)^3}{6} + q \frac{(z-c)^3}{6} - m(z-b) \right]; \quad (3.8)$$

$$v(z) = C_2 + C_1 \cdot z - \frac{1}{EJ} \left[R_a \frac{z^3}{6} - P \frac{(z-a)^3}{6} - q \frac{(z-a)^4}{24} + q \frac{(z-c)^4}{24} - m \frac{(z-b)^2}{2} \right]. \quad (3.9)$$

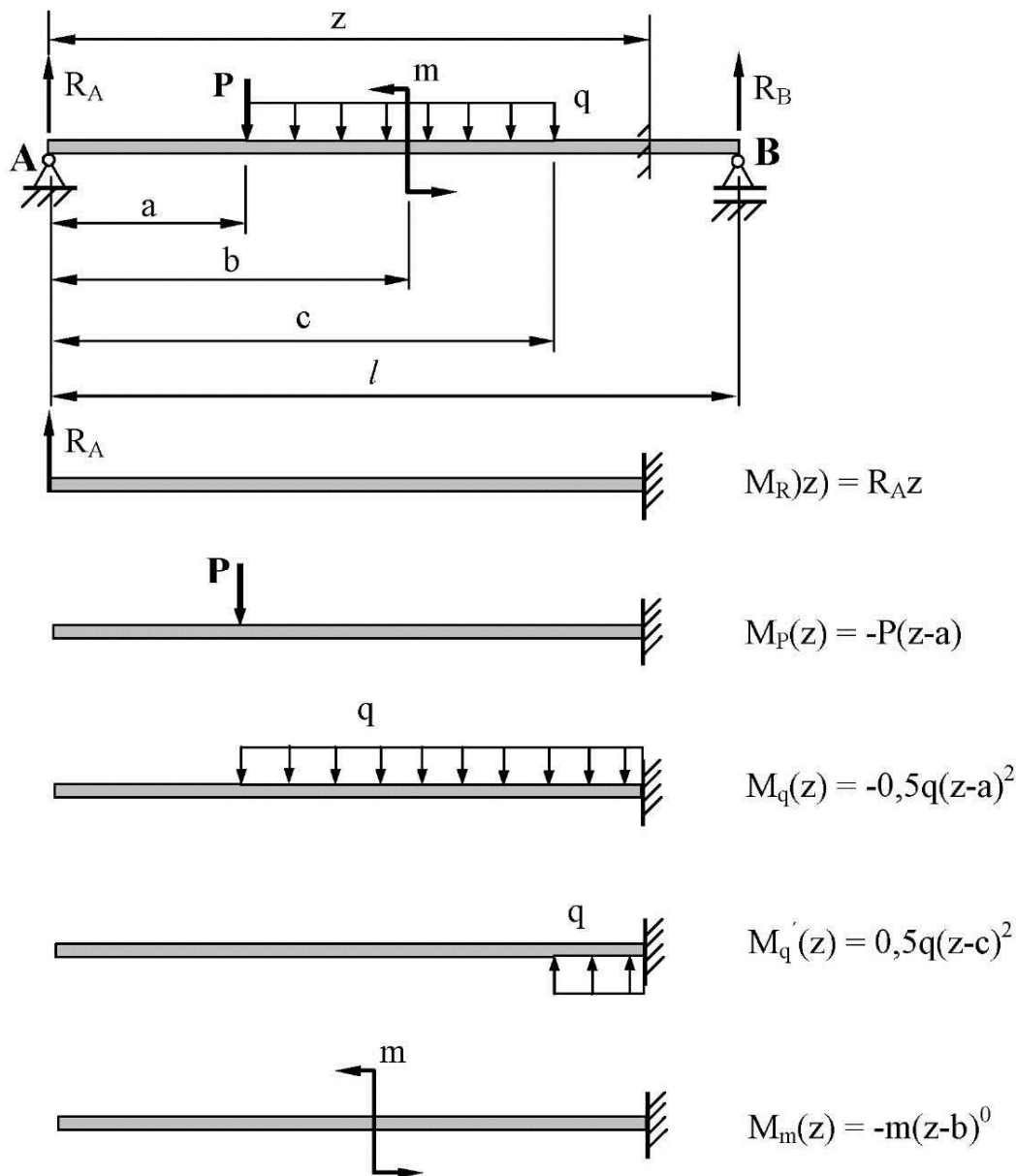


Рис.7. Правила Клебша при составлении универсального уравнения изогнутой оси балки

Уравнения (3.8) и (3.9) содержат произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 , имеющие простой физический смысл $C_1 = \theta(0)$; $C_2 = v(0)$. (3.10)

Значения угла поворота $\theta(0)$ и прогиба $v(0)$ в начале координат называют кинематическими начальными параметрами задачи, откуда и произошло название метода. Если $\theta(0)$ и $v(0)$ неизвестны полностью или частично, то их значения определяются из граничных условий задачи, которые зависят от способа опирания балки. Так для балки, показанной на рис.5, $v_a=v(0)=0$ и $v_b=v(1)=0$, что позволяет найти значения C_1 и C_2 .

В случае составной балки (рис.8), в месте установки шарнира углы поворота сечений слева и справа от шарнира не будут одинаковыми.

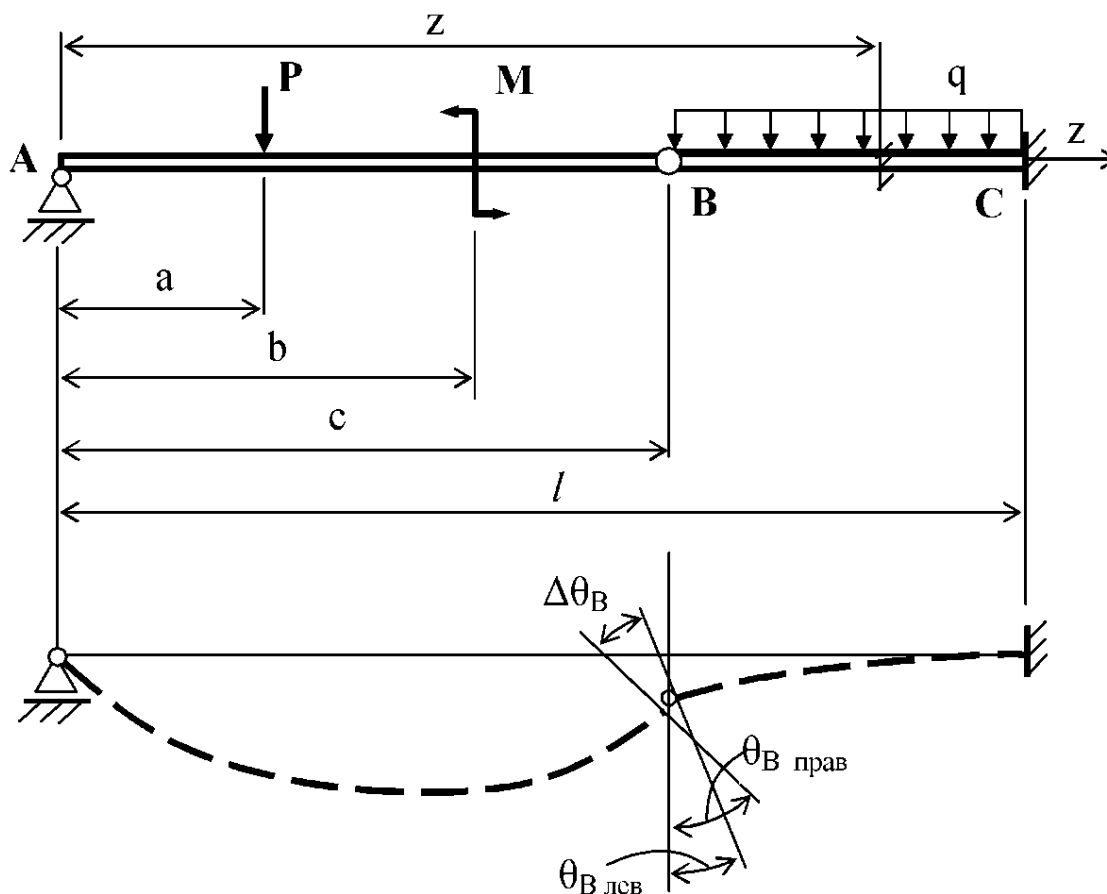


Рис.8. Учет шарнира в составной балке

С точки зрения теории аналитических функций в сечении с шарниром при $z = c$ функция $\theta(z)$ имеет разрыв первого рода на величину $\Delta\theta_b = \theta_{b \text{ прав}} - \theta_{b \text{ лев}}$. Проще всего учесть эту особенность изогнутой оси можно путем введения в универсальное уравнение углов поворота типа (3.8) слагаемого вида $\Delta\theta_b(z-c)^0$. При выводе универсального уравнения прогибов типа (3.9) и вычислении значений углов поворота и прогибов с этим слагаемым оперируют по обычным правилам, обсужденным выше. Произвольные постоянные C_1, C_2 и скачок угла поворота в шарнире $\Delta\theta_b$ определяют стандартно из трех граничных условий, например для схемы на рис.8: $v_A = v(0) = 0$; $v_C = v(l) = 0$; $\theta_C = \theta(l) = 0$.

При решении задачи методом Максвелла-Мора перемещения находят путем вычисления определенного интеграла

$$\Delta_{ip} = \int_0^l \frac{M_p(z) \cdot M_i(z)}{EJ} dz; \quad (3.11)$$

где $M_p(z)$ – функция изгибающих моментов от заданной нагрузки («грузовой изгибающий момент»);

$M_i(z)$ – функция изгибающий момент от вспомогательного единичного состояния («единичный изгибающий момент»).

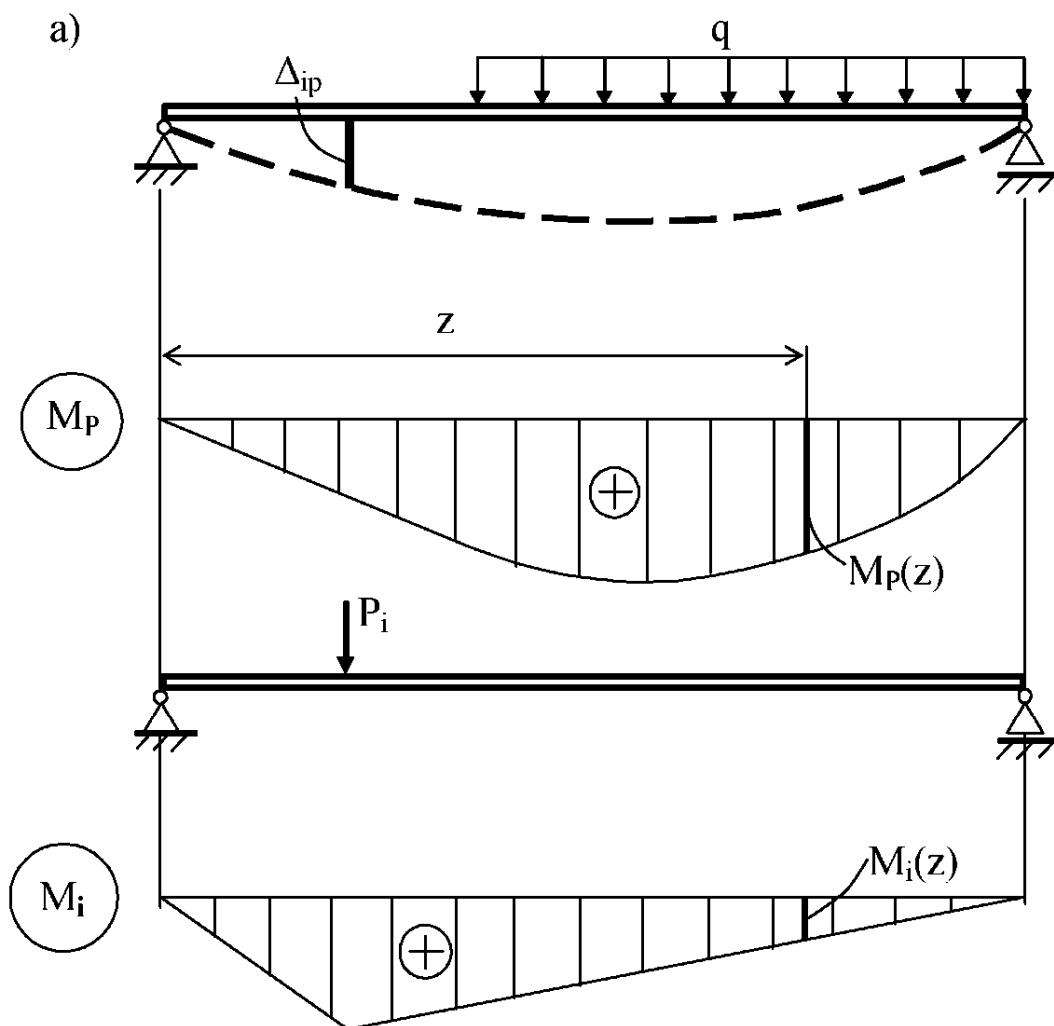


Рис.9. Грузовое (а) и единичное (б) состояния в методе Максвелла-Мора

Если определяется прогиб v_i , то единичное нагружение осуществляется силой $P_i=1$, приложенной вертикально в месте искомого перемещения. При определении угла поворота сечения θ_i единичное нагружение производится парой $m_i = 1$. Если после вычисления интеграла (3.11) получается величина

$\Delta_{ip} > 0$, то это значит, что найденное перемещение совпадает по направлению с принятым единичным воздействием P_i или m_i .

Для упрощения вычисления интеграла (3.11) удобно пользоваться одним из численных методов интегрирования, например правилом Верещагина. Оно справедливо на участке балки длиной «а», на котором обе подинтегральные функции $M_i(z)$ и $M_p(z)$ аналитические (гладкие), а одна из них (обычно единичных моментов) еще и линейная.

В этом случае справедливо правило «перемножения эпюр»

$$\frac{1}{EJ} \int_a M_i(z) \cdot M_p(z) \cdot dz = \frac{\omega_p \cdot M_i^c}{EJ}; \quad (3.12)$$

где ω_p – площадь грузовой эпюры M_p на участке «а» (рис.10, а);

M_i^c – ордината на единичной эпюре M_i , под центром тяжести грузовой эпюры на участке «а».

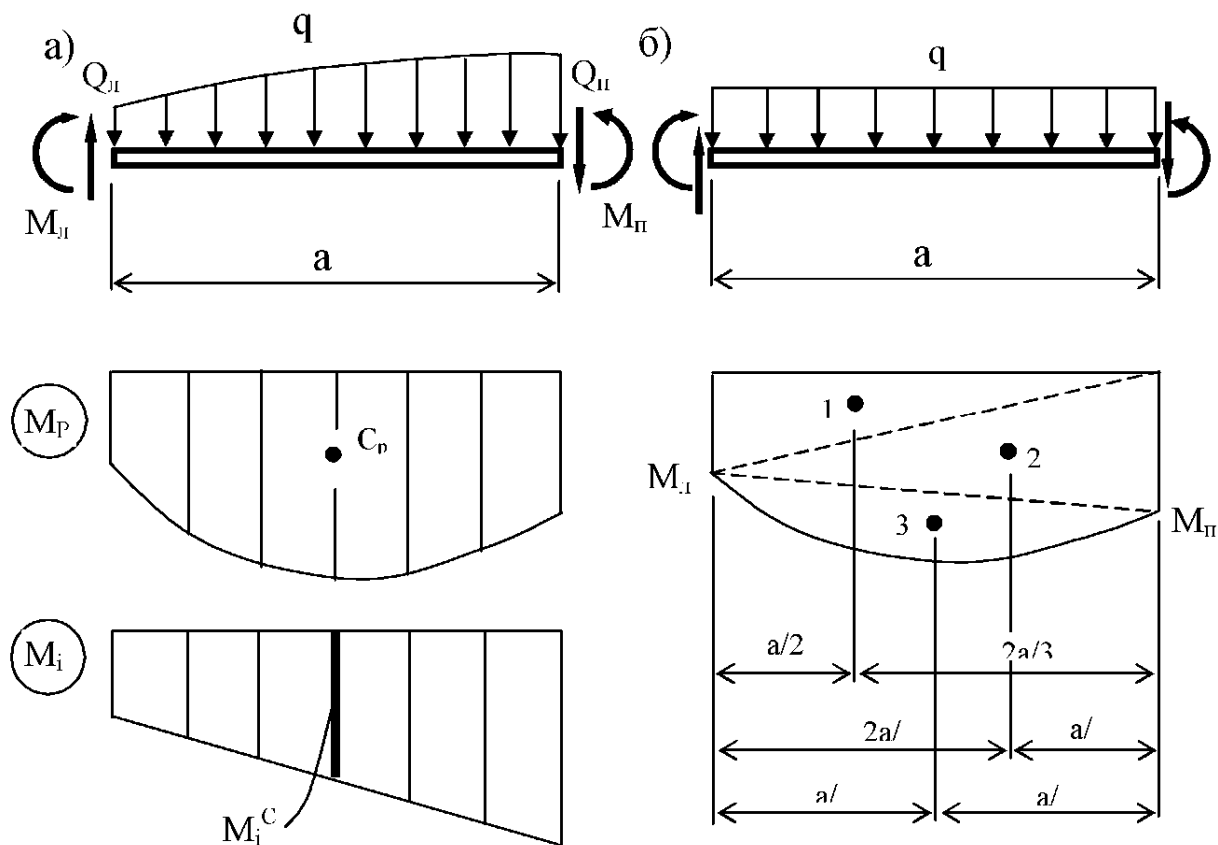


Рис.10. К использованию правила Верещагина (а) и расслоению эпюр (б)

При использовании правила Верещагина надо разбить балку на участки по длине, на каждом из которых обе эпюры изгибающих моментов M_p и M_i аналитические. Затем грузовую эпюру разбивают (раслаивают) на простые элементы по принципу независимости действия сил. Смысл этой процедуры проиллюстрирован на рис.10, б, где показаны центры тяжести простых элементов 1, 2 и 3, площади которых можно найти по формулам

$$\omega_{p1} = \frac{M_{л} a}{2}; \omega_{p2} = \frac{M_{п} a}{2}; \omega_{p3} = \frac{qa^3}{12}. \quad (3.13)$$

В случае отсутствия на участке распределенной нагрузки ($q = 0$) расслоение упрощается, так как эпюра M_p становится линейной трапецией и элемент типа 3 (симметричная квадратная парабола) исчезает. Очевидно, что возможны и другие способы расслоения, но приведенный выше способ, на наш взгляд, является простейшим.

Результаты определения перемещений и построения изогнутой оси балки обычно используют для проверки жесткости, которая состоит в проверке выполнения условия

$$v_{\max} = f \leq [f]. \quad (3.14)$$

Допускаемый прогиб $[f]$ является нормируемой величиной, т.е. задается нормами проектирования для данного типа конструкции. Для большинства обычных балок он не превышает $1/400 - 1/600$ длины балки. По условию жесткости (3.14) можно выполнять проектировочный расчет, который состоит в подборе сечения удовлетворяющего этому условию.

Расчеты статически неопределимых изгибаемых конструкций обычно выполняются методом сил. Он состоит в том, что за основные неизвестные задачи принимаются реакции лишних связей. При расчете статически неопределимой конструкции используется основная система, которая получается из заданной конструкции путем отбрасывания лишних связей. Для любой заданной конструкции существует возможность создания бесконечного множества основных систем, так как можно отбрасывать не только внешние связи (опоры), но и внутренние. Отбрасывание внутренних связей, например, можно сделать путем постановки сквозных шарниров. На рис. 10-1, а приведены плоская изгибаемая три раза статически неопределимая рама и некоторые из возможных основных систем, полученные отбрасыванием внешних (рис. 10-1, б) или внутренних (рис. 10-1, в) связей.

Основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой. Геометрическая неизменяемость конструкции состоит в том, что перемещения ее точек возможны только за счет деформаций элементов конструкции.

Центральной процедурой метода сил является раскрытие статической неопределимости, которая состоит в определении основных неизвестных – реакций лишних связей. Для этого составляются канонические уравнения метода сил – уравнения деформаций. Смысл этих уравнений состоит в том, что перемещения в основной системе от заданной нагрузки и реакций лишних связей должны быть такими же, как и в заданной конструкции.

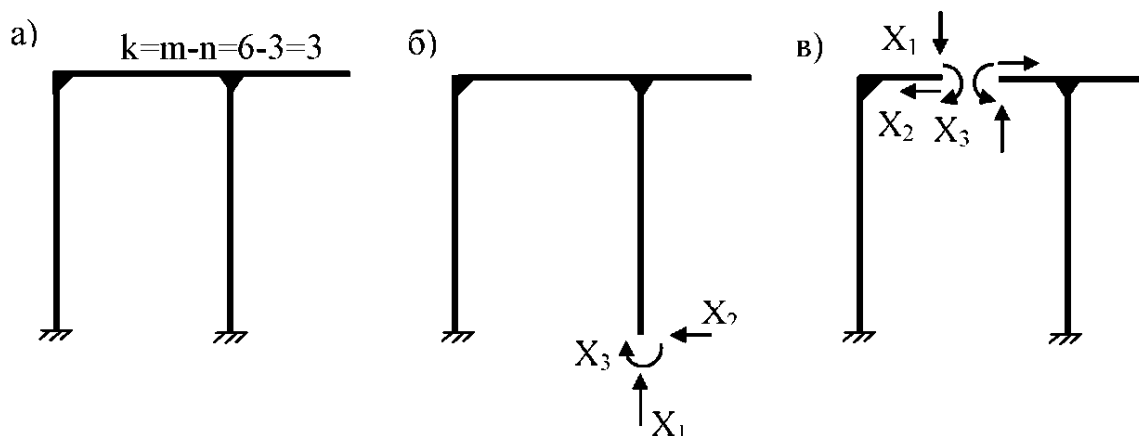


Рис. 10-1. Статически неопределимая рама (а) и возможные основные системы (б, в)

Уравнение деформации в методе сил для i -й лишней связи имеет вид

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{ii} X_i + \dots + \delta_{ik} X_k + \Delta_{ip} = 0; \quad (3.15)$$

где δ_{ij} – единичное перемещение (перемещение в основной системе в направлении i -й лишней связи от действия единичной реакции j -й лишней связи $X_j = 1$);

X_i – реакция i -й лишней связи;

Δ_{ip} – грузовое перемещение (перемещение в направлении i -й лишней связи от заданной нагрузки).

Количество канонических уравнений метода сил равно степени статической неопределимости системы k . В матричной форме система этих уравнений имеет вид

$$[\delta]\{X\} + \{\Delta\} = 0; \quad (3.16)$$

где $[\delta]$ – квадратная симметричная матрица единичных перемещений размерностью $k \times k$; $\{X\}$ и $\{\Delta\}$ – векторы реакций лишних связей и грузовых перемещений размерностью k .

Единичные δ_{ij} и грузовые Δ_{ip} перемещения в стержневых конструкциях, работающих на изгиб, определяются методом Максвелла-Мора по формулам

$$\delta_{ij} = \int_L \frac{M_i M_j}{EJ} ds; \quad \Delta_{ip} = \int_L \frac{M_i M_p}{EJ} ds; \quad (3.17)$$

где M_i, M_j – изгибающие моменты в основной системе от действия
единичных реакций i -й и j -й связей $X_i = X_j = 1$ (единичные моменты);

M_p – изгибающие моменты в основной системе от заданной нагрузки
(грузовые моменты).

После решения системы уравнений (3.16) и нахождения основных неизвестных X_i внутренние усилия в конструкции могут быть найдены обычными способами. Определение изгибающих моментов удобно выполнять по принципу независимости действия сил (суперпозиции) с использованием ранее найденных единичных и грузовых моментов

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_k X_k + M_p. \quad (3.18)$$

Нерезрезные балки являются частным случаем статически неопределимых изгибаемых конструкций. Нерезрезными в технике называют сплошные балки с числом пролетов более двух (рис. 10-2, а).

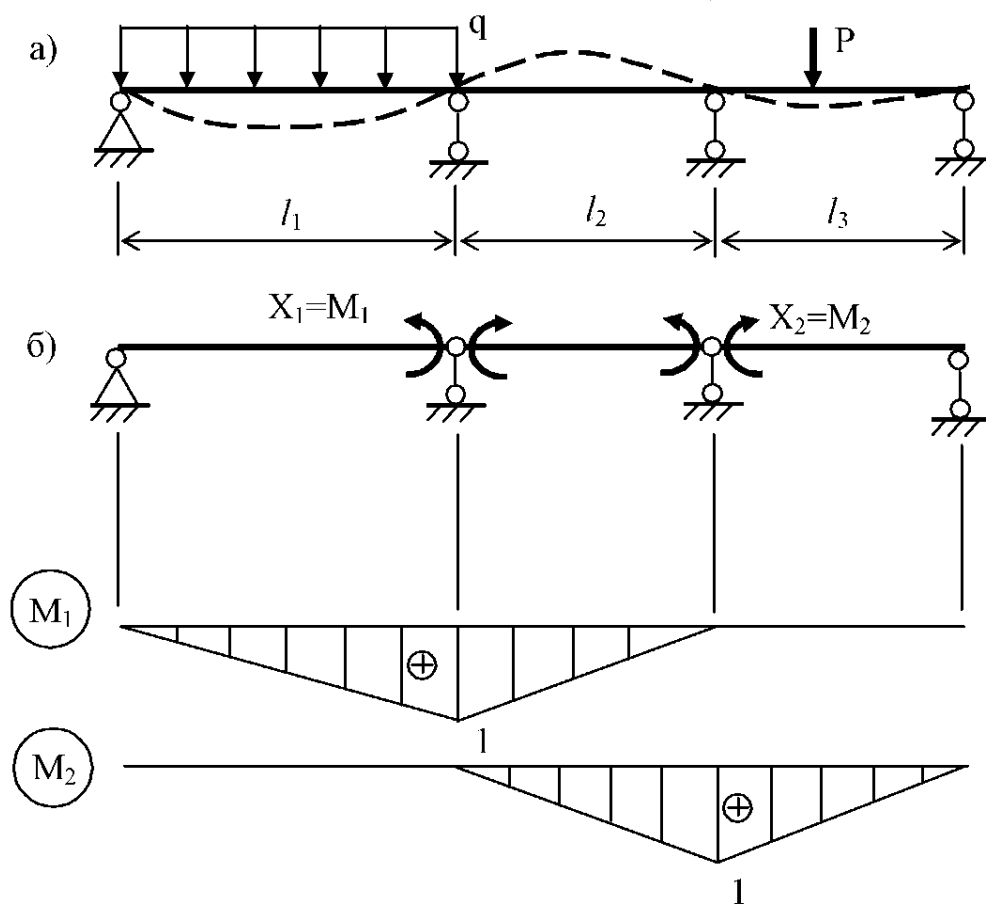


Рис. 10-2. Нерезрезная балка (а) и ее основная система (б)

Степень статической неопределимости нерезрезных балок равна числу пролетов минус единица ($k = L_{\text{прол}} - 1$). Так, например, для балки, представленной на рис. 10-2, а, $k = 3 - 1 = 2$. Расчет нерезрезных балок можно производить методом сил по стандартным методикам. По ряду причин удобным является вариант метода сил, когда основная система представляет собой цепь шарнирных балок на двух опорах (рис. 10-2, б), а основными

неизвестными являются изгибающие моменты в сечениях над опорами (опорные моменты). В этом случае каноническое уравнение для произвольной i -й опоры имеет простой трехчленный вид

$$\delta_{i,j-1}M_{i-1} + \delta_{i,j}M_i + \delta_{i,j+1}M_{i+1} + \Delta_{ip} = 0. \quad (3.19)$$

Грузовой член уравнения (3.19), равный углу взаимного поворота сечения смежных балок основной системы на i -й опоре (угол раскрытия), может быть определен из выражения

$$\Delta_{ip} = \int_{(l_i)} \frac{\bar{M}_i^{\text{лев}} M_p^{\text{лев}}}{EJ} dz + \int_{(l_{i+1})} \frac{\bar{M}_i^{\text{прав}} M_p^{\text{прав}}}{EJ} dz = \theta_{i0}^{\text{лев}} + \theta_{i0}^{\text{прав}}; \quad (3.20)$$

где первый и второй интегралы Максвелла-Мора вычисляются перемножением грузовой и единичной эпюр изгибающих моментов только в пролетах, примыкающих к опоре i . Обычно уравнение (3.19) записывают в форме

$$M_{i-1}l_i + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}l_{i+1} = -6EJ(\theta_{i0}^{\text{лев}} + \theta_{i0}^{\text{прав}}) \quad (3.21)$$

и называют уравнением трех моментов. Углы поворота опорных сечений балок основной системы $\theta_{i0}^{\text{лев}}$ и $\theta_{i0}^{\text{прав}}$ можно определять с помощью справочных формул для простых балок на двух опорах (см. п. 4.1 ПРИЛОЖЕНИЯ). Достоинство решения задачи с помощью уравнения трех моментов состоит в том, что система канонических уравнений вида (3.16) имеет трехдиагональный вид. Это свойство обеспечивает относительную простоту и устойчивость решения системы уравнений. Во всем остальном план расчета неразрезной балки аналогичен плану расчета рамы.

Расчет конструкций взаимодействующих с деформируемым основанием является часто встречающимся случаем в инженерной практике. Простейшая конструкция такого типа - балка на упругом винклеровском основании. Основным отличием такой балки от рассмотренных ранее конструкций является то, что деформируемое основание создает реакцию (отпор) $p(z)$, пропорциональный прогибу балки v в данном сечении (рис. 11)

$$p(z) = -k \cdot v(z). \quad (3.15)$$

Здесь k - коэффициент пропорциональности, носящий название «отпорность основания» и зависящий от свойств основания и ширины постели балки b , т.е. $k = k_0 b$. В свою очередь k_0 - коэффициент отпорности основания (коэффициент постели). Ориентировочные значения коэффициента постели для наиболее распространенных типов естественных и искусственных грунтовых оснований можно найти в п.4.3 ПРИЛОЖЕНИЯ. В случае необходимости коэффициент постели может быть определен из прямых натурных экспериментов.

С учетом допущения (3.15) решение задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$d^4 v(\zeta) + 4v(\zeta) = \frac{4}{k} q(\zeta). \quad (3.16)$$

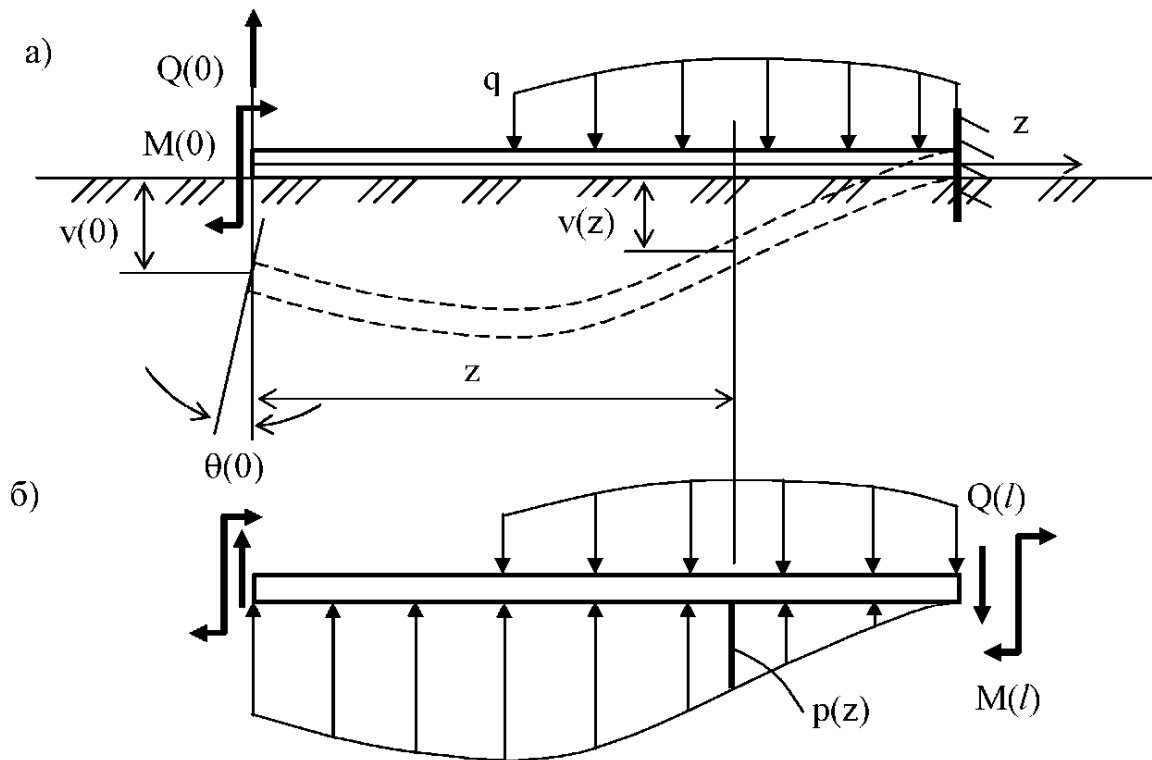


Рис.11. Балка на упругом основании:
а – расчетная схема, б – схема нагрузок

Здесь ζ – безразмерная координата сечения, связанная с размерной (абсолютной) координатой z зависимостью

$$\zeta = m \cdot z, \quad (3.17)$$

где $m = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ – упругая характеристика балки.

Решение уравнения (3.16) методом начальных параметров (МНП) в форме, предложенной А.Н.Крыловым, приводит к интегралу

$$v(\zeta) = C_1 \cdot V_1(\zeta) + C_2 \cdot V_2(\zeta) + C_3 \cdot V_3(\zeta) + C_4 \cdot V_4(\zeta) + V_*(\zeta); \quad (3.18)$$

где $V_i(\zeta)$ – фундаментальные функции А.Н.Крылова, определяемые

по формулам

$$V_1(\zeta) = \text{ch}\zeta \cdot \cos \zeta;$$

$$V_2(\zeta) = \frac{1}{2} (\text{ch}\zeta \cdot \sin \zeta + \text{sh}\zeta \cdot \cos \zeta);$$

$$V_3(\zeta) = \frac{1}{2} \text{sh}\zeta \cdot \sin \zeta;$$

$$V_4(\zeta) = \frac{1}{4} (\text{ch}\zeta \cdot \sin \zeta - \text{sh}\zeta \cdot \cos \zeta).$$

(3.19)

Значения фундаментальных функций V_i протабулированы и частично приведены в п. 4.2 ПРИЛОЖЕНИЯ. Одно из замечательных свойств фундаментальных функций состоит в том, что производная от одной из таких функций является другой фундаментальной функцией. Действительно

$$V_1'(\zeta) = -4V_4(\zeta); \quad V_2'(\zeta) = V_1(\zeta); \quad V_3'(\zeta) = V_2(\zeta); \quad V_4'(\zeta) = V_3(\zeta). \quad (3.20)$$

Частное решение уравнения (3.16) по методу начальных параметров для общего случая нагрузки $q(\zeta)$ имеет вид

$$V_*(\zeta) = \int_0^{\zeta} V_4(\zeta-t) \cdot \frac{4}{k} \cdot q(\zeta) \cdot dt. \quad (3.21)$$

Для конкретных и наиболее распространенных случаев нагружения частные решения приведены в табл.3.1. После нахождения интеграла $v(\zeta)$ определение функций углов поворота $\theta(\zeta)$ и внутренних усилий $Q(\zeta)$, $M(\zeta)$ могут быть найдены по следующим зависимостям

$$\theta(\zeta) = m \cdot v'(\zeta); \quad M(\zeta) = -EJm^2 \cdot v''(\zeta); \quad Q(\zeta) = -EJm^3 \cdot v'''(\zeta). \quad (3.22)$$

Выражения (3.22) легко получаются с использованием зависимостей (3.20).

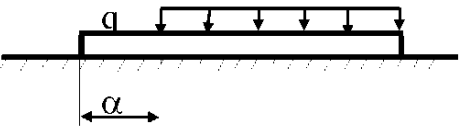
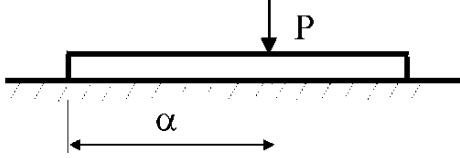
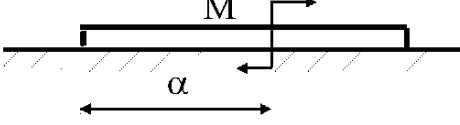
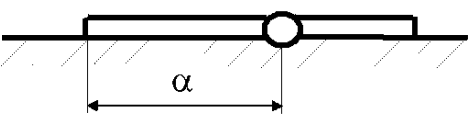
После определения уравнений перемещений и внутренних усилий находятся произвольные постоянные интегрирования C_i из граничных условий задачи. Они бывают трех типов: кинематические, статические и смешанные. Если на концах балки заданы только перемещения v и θ , то условия называются кинематическими. В случае, когда на концах балки заданы только внутренние усилия Q и M , граничные условия являются статическими. Смешанные граничные условия состоят в том, что на концах балки задаются как перемещения, так и внутренние усилия. Последний случай наиболее распространен в расчетной практике.

В силу известных свойств решения в форме МНП, произвольные постоянные C_i могут быть определены через известные перемещения и внутренние усилия в начале координат (начальные параметры задачи)

$$C_1 = v(0); \quad C_2 = \frac{\theta(0)}{m}; \quad C_3 = -\frac{M(0)}{EJm^2}; \quad C_4 = -\frac{Q(0)}{EJm^3}. \quad (3.23)$$

Таблица 3.1.

Частные решения для некоторых видов нагрузок

№	Вид воздействия	Частное решение
1		$V_q(\zeta) = \frac{q}{k} \cdot [1 - V_1(\zeta - \alpha)]$
2		$V_p(\zeta) = \frac{4Pm}{k} \cdot V_4(\zeta - \alpha)$
3		$V_M(\zeta) = -\frac{4Mm^2}{k} \cdot V_3(\zeta - \alpha)$
4		$V_{\Delta\theta}(\zeta) = \frac{\Delta\theta}{m} \cdot V_2(\zeta - \alpha)$ $\Delta\theta$ - скачок угла поворота в шарнире

Обычно в начале координат известна только часть начальных параметров (чаще всего два). Тогда недостающие граничные условия формулируют на другом конце балки при $\zeta = \lambda$. Нахождение скачка угла поворота $\Delta\theta$ в промежуточном шарнире производится с помощью условия равенства нулю изгибающего момента в этом сечении. При вычислениях перемещений и внутренних усилий можно использовать правило отрицательного аргумента рассмотренное выше.

4. Сложное сопротивление

Сложным сопротивлением называют состояние стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает несколько внутренних усилий. Такое состояние обычно возникает, если нагрузка на стержень имеет пространственный характер - как продольный, так и поперечный. Наиболее важными являются сложный изгиб, изгиб со сжатием и изгиб с кручением.

Сложный изгиб возникает в случаях, когда пространственная поперечная нагрузка проходит через продольную ось балки (рис.12). Решение задачи в этом случае обычно производится с помощью принципа

независимости действия сил. В соответствии с этим принципом нагрузка, действующая на балку, разбивается на две части, каждая из которых действует в главной плоскости балки и вызывает прямой изгиб (рис.12, а, б). После такого разбиения определяются внутренние усилия - поперечные силы Q_x, Q_y и изгибающие моменты M_x, M_y по правилам, рассмотренным в разделе 3.

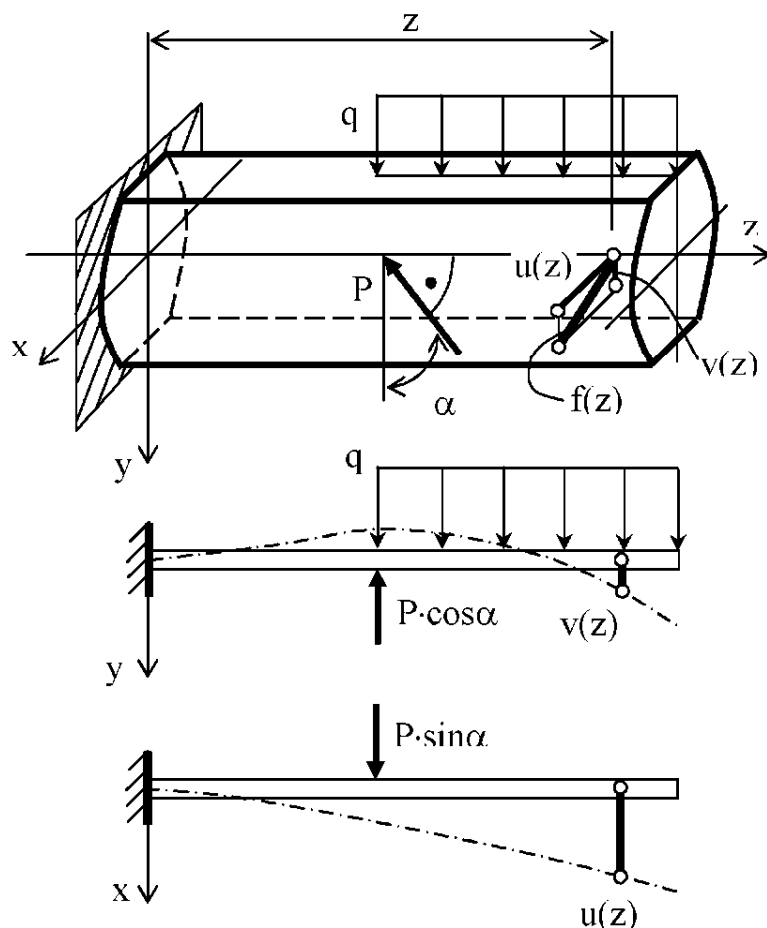


Рис.12. Решение задачи сложного изгиба

При сложном изгибе расчеты на прочность обычно производят с учетом только нормальных напряжений в поперечном сечении, которые определяют по формуле

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} \cdot x + \frac{M_x}{J_x} \cdot y; \quad (4.1)$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты от нагрузок, действующих в главных плоскостях;
 J_x, J_y – главные моменты инерции поперечного сечения;
 x, y – координаты расчетной точки сечения.

При проверке прочности решение задачи начинают с определения внутренних усилий, построения их эпюр и определения опасного сечения в котором комбинация изгибающих моментов наиболее неблагоприятна. После этого находят положение нейтральной оси в опасном сечении необходимой для нахождения опасных точек. Положение нейтральной оси можно найти по ее уравнению, которое получается, если приравнять выражение (4.1) нулю. Нейтральная ось (н.о.) проходит через центр тяжести сечения, а опасными будут точки сечения наиболее удаленные от н.о. (рис. 13). Определение наибольших растягивающих и сжимающих напряжений производится по формуле (4.1) путем подстановки в нее координат опасных точек I и II. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{I, II} = \sigma_{\max, \min} \leq [\sigma]_{\pm}. \quad (4.2)$$

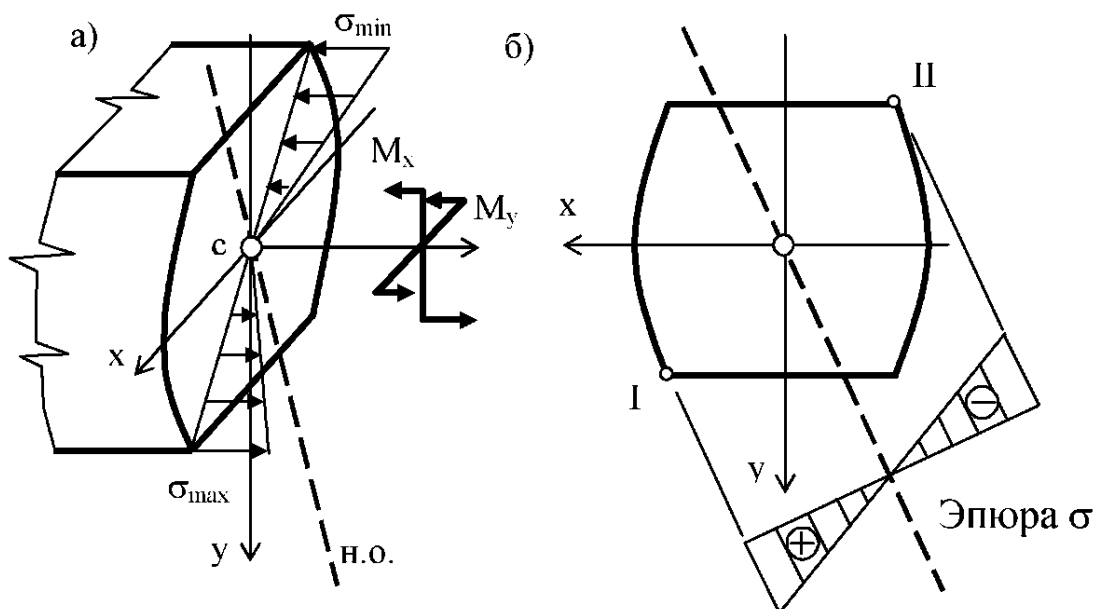


Рис.13. Напряжения (а) и их распределение (б) при сложном изгибе

Перемещения при сложном изгибе находятся средствами, изложенными в разделе 3 методами начальных параметров или Максвелла-Мора. После независимого определения компонентов полного прогиба $v(z)$ и $u(z)$ (рис.12) находятся полные прогибы $f(z)$ по формуле

$$f(z) = \sqrt{u(z)^2 + v(z)^2}. \quad (4.3)$$

Изгиб со сжатием (растяжением) возникает в ситуациях, когда наряду с поперечной изгибающей нагрузкой имеется продольная нагрузка (рис.14, а). Принципы определения внутренних усилий - изгибающих моментов и продольных сил точно такие же, как и при сложном изгибе. Нагрузка

разделяется на три компоненты: две изгибающих в главных плоскостях и продольная. Определение нормальных напряжений производится по общей формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y. \quad (4.4)$$

Проверка прочности производится в том же порядке, что и при сложном изгибе. Оценка прочности может проводиться по условию (4.2). Единственное отличие от сложного изгиба в распределении нормальных напряжений в сечении состоит в том, что нейтральная ось не проходит через центр тяжести сечения (рис.14, б) и ее положение будет определяться отрезками a_x и a_y , отсекаемыми ею на координатных осях. Их можно найти по формулам

$$a_x = -\frac{N}{M_y} \cdot \frac{J_y}{F}; \quad a_y = -\frac{N}{M_x} \cdot \frac{J_x}{F}. \quad (4.5)$$

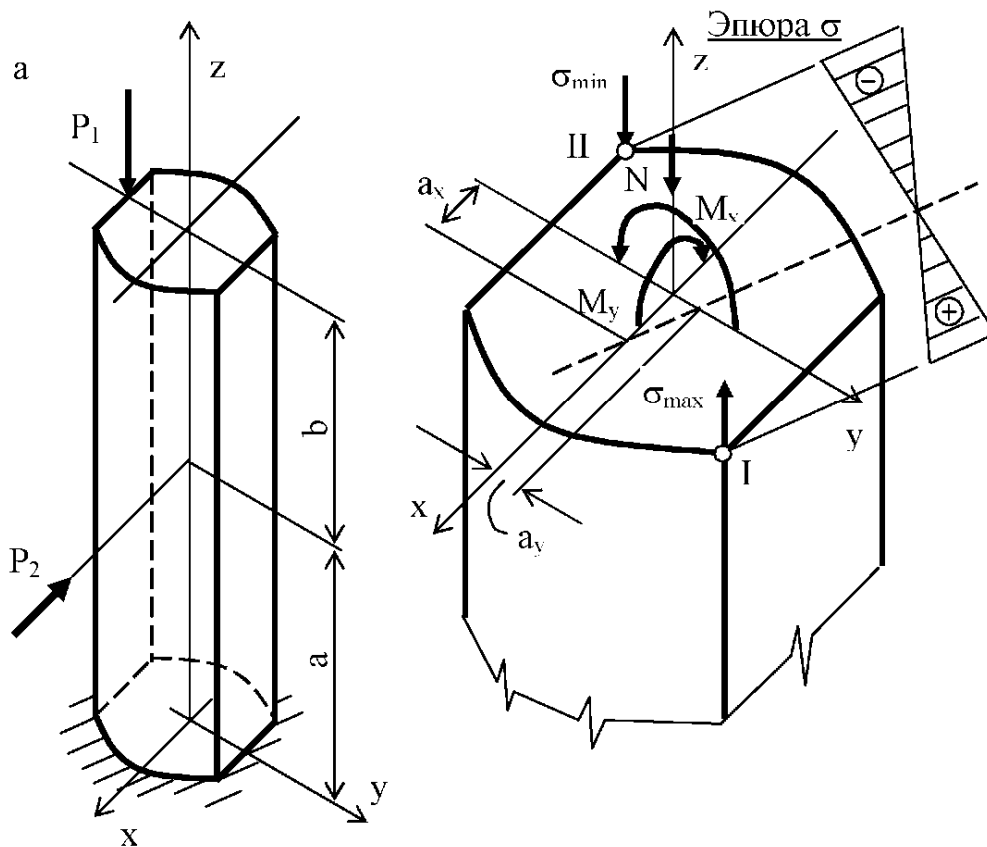


Рис.14. Нагрузка (а) и напряжения (б) при изгибе со сжатием

5. Расчеты на устойчивость при сжатии

При некоторых воздействиях на конструкцию может произойти потеря устойчивости, которая состоит в том, что исходная форма равновесия перестает быть устойчивой. Неустойчивые формы равновесия обычно чрезвычайно опасны и недопустимы в реальных конструкциях. Частным, но важным случаем такого рода является потеря устойчивости при центральном сжатии.

Прямолинейная форма равновесия центрально сжатого стержня оказывается неустойчивой, если сжимающая сила превышает некоторое значение, называемое критическим - критическую силу $P_{кр}$.

Практический интерес представляет лишь наименьшее значение этой силы, при превышении которой стержень впервые потеряет устойчивость прямолинейной формы равновесия. В расчетах на устойчивость при сжатии важную роль играет соотношение продольных и поперечных размеров стержня, которое можно оценить интегральной геометрической характеристикой - гибкостью λ . По Эйлеру гибкость стержня определяется выражением

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{\beta \cdot l}{i_{\min}}; \quad (5.1)$$

где l_0 - приведенная длина стержня;

l - фактическая (заданная) длина стержня;

β - коэффициент приведения длины, который можно определить по рис.15;

i_{\min} - минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня, определяемый по формуле

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}; \quad (5.2)$$

где J_{\min} - минимальный главный момент инерции поперечного сечения стержня.

Если фактическая гибкость стержня больше предельной для данного материала величины ($\lambda \geq \lambda_{пред}$), то первая критическая сила определяется по формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\beta \cdot l)^2}. \quad (5.3)$$

Значения $\lambda_{пред}$ для разных материалов приводятся в справочниках. В частности, для мягких конструкционных сталей $\lambda_{пред}=100$. Гибкости, превышающие предельную, считаются большими.

По нормам проектирования считается, что если гибкость стержня менее некоторой малой величины λ_0 , то влиянием потери устойчивости можно пренебречь. При средних значениях гибкости ($\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{пред}$) определение

критических значений нагрузки можно производить по эмпирической формуле Ясинского

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot F = (a - b \cdot \lambda) \cdot F; \quad (5.4)$$

где a , b - эмпирические коэффициенты Ясинского, имеющие размерность напряжений и приводимые в п.5.1 ПРИЛОЖЕНИЯ.

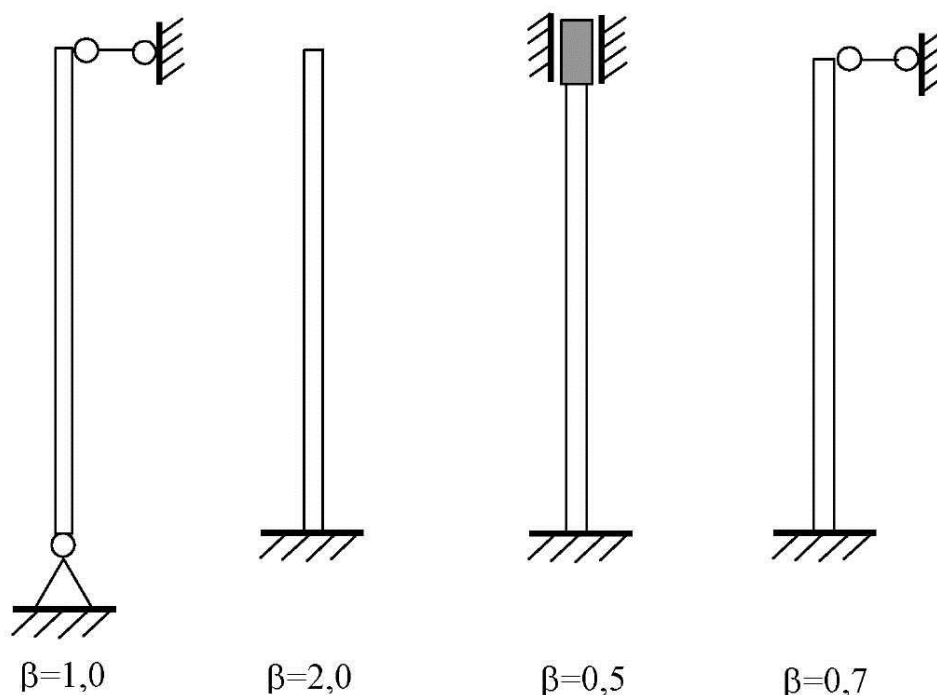


Рис.15. Способы закрепления стержня и величины коэффициента β

Для стержней малой гибкости при $\lambda \leq \lambda_0$, критическое напряжение принимается равным пределу текучести σ_T для пластичных материалов и пределу прочности при сжатии σ_B для хрупких.

При расчетах на прочность и жесткость всегда учитываются местные ослабления поперечного сечения, т.е. в расчетах используется ослабленная площадь $F_{нетто}$. В расчетах на устойчивость небольшие (до 20% площади сечения) ослабления не учитываются и в расчетных зависимостях используется неослабленная площадь сечения $F_{брутто}$.

Для того, чтобы сжатый стержень не потерял устойчивости, необходимо чтобы всегда выполнялось условие $P < P_{кр}$ (или эквивалентное ему $\sigma < \sigma_{кр}$). Для обеспечения надежности по устойчивости (запаса устойчивости) в расчетах вводится условие устойчивости

$$\sigma = \frac{P}{F_{брутто}} \leq [\sigma]_{уст} = \frac{\sigma_{кр}}{n_{уст}}; \quad (5.5)$$

где $[\sigma]_{уст}$ - допускаемое напряжение на устойчивость;

$n_{уст}$ - коэффициент запаса устойчивости (принимается равным: для мягких сталей - 1.8÷3.0, для дерева - 2.8 ÷ 3.2).

В практических расчетах обычно допускаемое напряжение на устойчивость выражается через допускаемое напряжение по условию прочности при сжатии $[\sigma]_-$ (основное) с помощью коэффициента понижения основного допускаемого напряжения (коэффициента продольного изгиба) φ

$$[\sigma]_{уст} = [\sigma]_- \cdot \varphi. \quad (5.6)$$

Величина коэффициента φ зависит от вида материала, гибкости стержня и нормативных требований надежности (коэффициентов запаса устойчивости и прочности). Значения коэффициента φ нормируются и для некоторых материалов могут быть взяты в п. 5.2 ПРИЛОЖЕНИЯ. Легко видеть по этим сведениям, что коэффициент продольного изгиба не превышает единицы ($0 < \varphi < 1$). Это означает, что потеря устойчивости снижает несущую способность по сравнению с критерием прочности.

Проверка устойчивости может быть выполнена по условию

$$\frac{P}{\varphi F_{брутто}} \leq [\sigma]_-. \quad (5.7)$$

Условие (5.7) используется для подбора сечения в форме

$$F_{брутто} \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]_-}. \quad (5.8)$$

Однако, в условии (5.8) величины $F_{брутто}$ и φ связаны между собой сложной неаналитической зависимостью. Поэтому на практике подбор сечения осуществляется методом последовательных приближений, путем назначения некоторого начального значений площади сечения и проверки его по условию (5.7). Если попытка оказывается неудачной, то корректируют размеры сечения и повторяют расчеты до удовлетворения условия (5.7).

6. Расчеты на прочность при циклических нагрузках

Опыт эксплуатации и исследований конструкций машин и сооружений, воспринимающих переменную, циклически меняющуюся нагрузку, показывает, что часто прочность таких конструкций оказывается существенно ниже, чем при статическом нагружении. Причиной такого поведения являются переменные напряжения. Они приводят к образованию внутри материала микротрещин между зёрнами материала. При определенной для каждой комбинации условий величине переменных напряжений эти трещины прогрессируют и объединяются в макротрещины. В вершинах таких макротрещин возникает большая концентрация напряжений, что ускоряет процессы и приводит к лавинообразному катастрофическому разрушению детали конструкции. Описанные процессы были названы усталостным разрушением материала. В настоящее время под усталостью понимают процесс постепенного накопления повреждений в материале при действии переменных

напряжений, приводящих к образованию макротрещин и разрушению. Свойство материала сопротивляться усталости называется выносливостью.

Максимальное напряжение, при котором материал способен сопротивляться, не разрушаясь, при любом произвольно большом числе повторений переменных нагрузок, называется пределом выносливости или пределом усталости.

Изменение напряжений за один период называется циклом напряжений. Различным законам изменения напряжений соответствуют различные виды циклов. Симметричный цикл возникает, если $\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$, т.е. наибольшее и наименьшее напряжения цикла равны по модулю. Асимметричный цикл можно представить как сумму напряжений симметричного цикла с амплитудным значением σ_a и среднего постоянного напряжения σ_m (рис.16). В случае, когда σ_{\max} или σ_{\min} равны нулю, цикл называется пульсирующим или отнулевым.

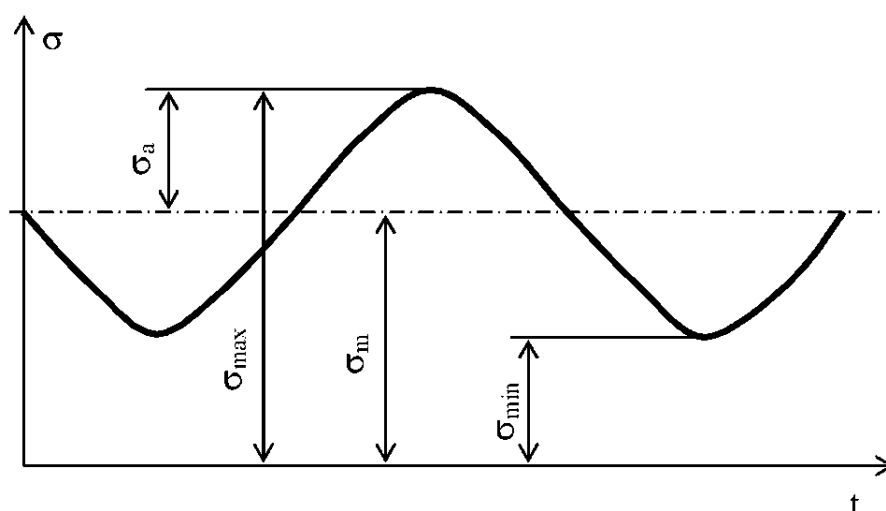


Рис.16. Изменение напряжений во времени при асимметричном цикле

Для асимметричного цикла (рис.16) будут справедливы следующие зависимости

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \quad (6.1)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (6.2)$$

Для характеристики цикла служит коэффициент асимметрии цикла, определяемый выражением

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (6.3)$$

Коэффициенты запаса прочности при изгибе n_σ и при кручении n_τ определяются соответственно из выражений

$$n_{\sigma} = K_{\sigma} \frac{\sigma_{-1}}{\varepsilon \cdot \beta \cdot \sigma_a + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m} ; n_{\tau} = K_{\tau} \frac{\tau_{-1}}{\varepsilon \cdot \beta \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_m} ; \quad (6.4)$$

где σ_{-1} , τ_{-1} – пределы выносливости при симметричных циклах при изгибе и кручении соответственно (для наиболее распространенных сталей можно принимать по п. 6.1 ПРИЛОЖЕНИЯ);

K_{σ} , K_{τ} – эффективные коэффициенты концентрации (см. п.6.2 ПРИЛОЖЕНИЯ);

ε – масштабный коэффициент (см. п.6.2 ПРИЛОЖЕНИЯ);

β – коэффициент, учитывающий качество обработки поверхности (см. п.6.2 ПРИЛОЖЕНИЯ);

ψ_{σ} , ψ_{τ} – коэффициенты, характеризующие чувствительность материала к асимметрии цикла, соответственно, при изгибе и кручении (см. п.6.2 ПРИЛОЖЕНИЯ)

Для определения коэффициентов запаса при изгибе и кручении необходимо найти максимальные напряжения соответствующих циклов по формулам изгиба и кручения, а затем остальные напряжения соответствующих циклов по их коэффициентам асимметрии и использовать их в формулах (6.4). По найденным значениям n_{σ} и n_{τ} вычисляется общий коэффициент запаса прочности n и сравнивается с нормативным (заданным) значением ($n \geq n_0$)

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (6.5)$$

Если условие прочности не выполняется ($n < n_0$), то производится подбор нового диаметра вала из выражения

$$d_{\text{нов}} = d_{\text{пр}} \sqrt[3]{\frac{n_0}{n}} ; \quad (6.6)$$

где $d_{\text{пр}}$ – старый диаметр вала, для которого производился проектировочный расчет;

n – вычисленное значение коэффициента запаса прочности;

n_0 – нормативное (заданное) значение коэффициента запаса прочности.

Далее все расчеты повторяются для нового диаметра вала до тех пор, пока не будет удовлетворено условие прочности.

ЛИТЕРАТУРА

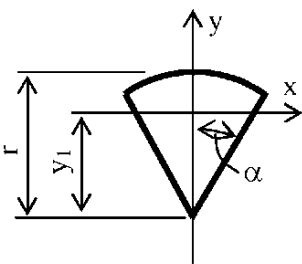
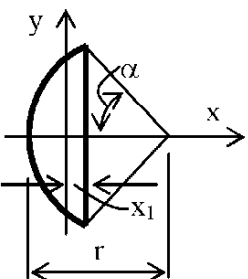
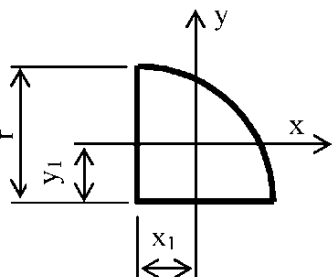
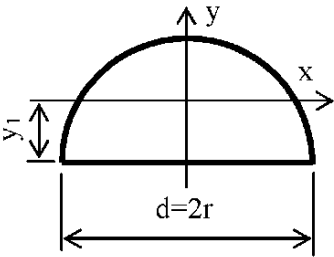
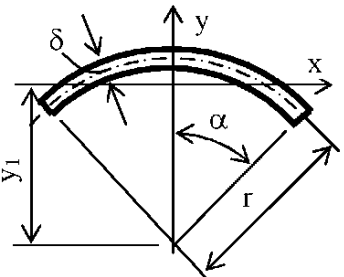
1. Писаренко, Г. С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев – Киев: Наукова думка, 1975. – 704с.
2. Фесик, С. П. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Высшая школа, 1982. – 260с.
3. Атаров, Н.М., Насонкин Ю.Д. Примеры решения задач по сопротивлению материалов. Ч. 2 : Уч. пособие / Моск. инж. – стр. ин-т им В. В. Куйбышева. – М.: МИСИ, 1989. – 134с.
4. Энциклопедический справочник. Инженерные расчеты в машиностроении. Т.1, кн.2. – М.: Наука, 1961. – 456с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

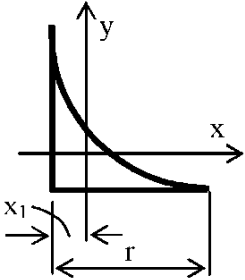
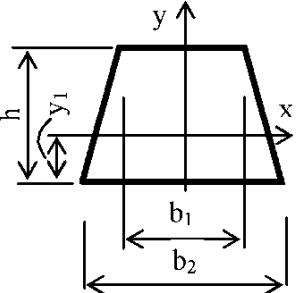
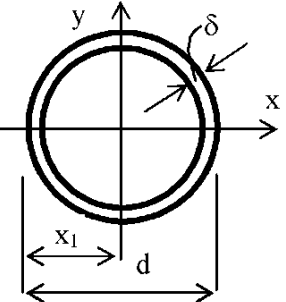
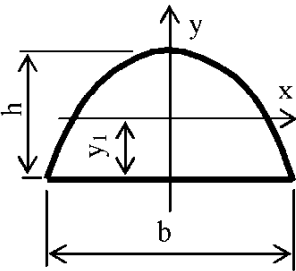
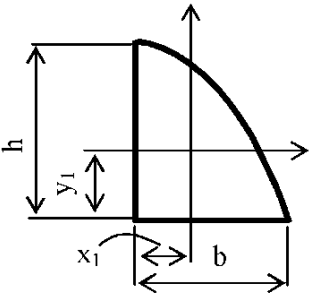
1. Геометрические характеристики сечений 1.1. Геометрические характеристики простых фигур

Фигура	Эскиз	Площадь сечения F	Моменты инерции J_x, J_y, J_{xy}	Коорд. крайн. точек
1	2	3	4	5
Прямоугольник		$F = bh$	$J_x = \frac{bh^3}{12}$ $J_y = \frac{b^3h}{12}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
Прямоугольный треугольник		$F = \frac{bh}{2}$	$J_x = \frac{bh^3}{36}$ $J_y = \frac{b^3h}{36}$ $J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$	$x_1 = \frac{b}{3}$ $y_1 = \frac{h}{3}$
Равнобедренный треугольник		$F = \frac{bh}{2}$	$J_x = \frac{bh^3}{36}$ $J_y = \frac{b^3h}{48}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{3}$
Круг		$F = \frac{\pi d^2}{4}$	$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = y_1 = r$

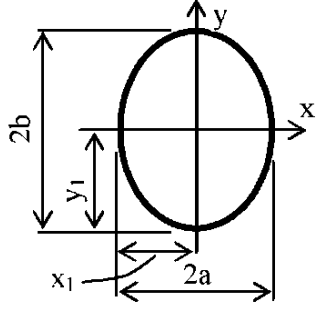
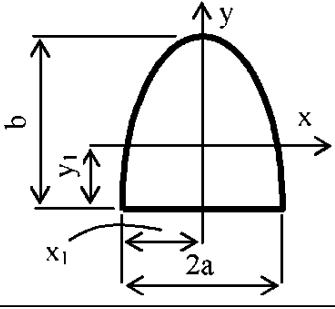
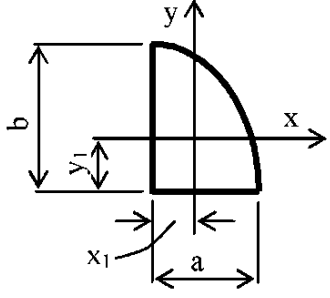
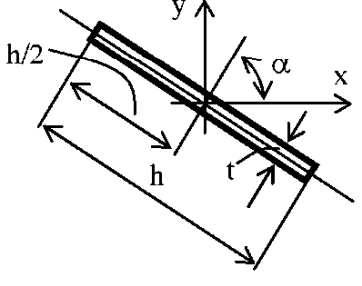
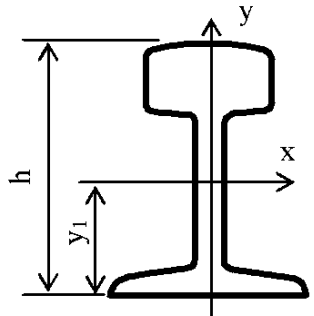
1.1. Геометрические характеристики простых фигур (продолжение 1)

1	2	3	4	5
Сектор круга		$F = \alpha r^2$ α - в рад	$J_x = \frac{r^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32 \sin^2 \alpha}{9\alpha})$ $J_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $J_{xy} = 0$	$y_1 = \frac{2r}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Сегмент круга		$F = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$J_x = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha + 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha)$ $J_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3} \cos \alpha \sin^3 \alpha)$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = r \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} - \cos \alpha \right)$
Четверть круга		$F = 0,785r^2$	$J_x = J_y = 0,0549r^4$ $J_{xy} = -0,0165r^4$	$x_1 = y_1 = 0,424r$
Половина круга		$F = 0,393d^2$	$J_x = 0,1lr^4$ $J_y = 0,393r^4$ $J_{xy} = 0$	$y_1 = 0,424r$
Сектор тонкост. кольца		$F = 2r\alpha\delta$	$J_x = 0,5\delta r^3 (2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4 \sin^2 \alpha}{\alpha})$ $J_y = 0,5\delta r^3 (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $J_{xy} = 0$	$y_1 = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

1.1. Геометрические характеристики простых фигур (продолжение 2)

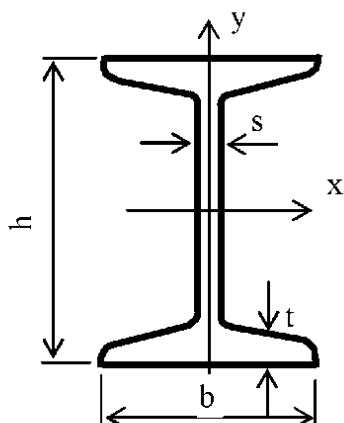
1	2	3	4	5
Круговой треугольник		$F = 0,265r^2$	$J_x = J_y = 0,00755r^4$ $J_{xy} = -0,00755r^4$	$x_1 = 0,223r$
Равнобедренная трапеция		$F = \frac{h(b_1 + b_2)}{2}$	$J_x = \frac{h^3(6b_1^2 + 6b_1b_2 + b_2^2)}{36(2b_1 + b_2)}$ $J_y = \frac{h(b_2^4 - b_1^4)}{48(b_2 - b_1)}$ при $b_0 = b_2 - b_1$	$y_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{b_2 + 2b_1}{b_2 + b_1}$
Тонкостенное кольцо		$F = \pi\delta d$	$J_x = J_y = \frac{\pi\delta d^3}{8}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = y_1 = 0,5d = r$
Параболический сегмент		$F = \frac{2bh}{3}$	$J_x = \frac{8bh^3}{175}$ $J_y = \frac{hb^3}{30}$ $J_{xy} = 0$	$y_1 = \frac{2h}{5}$
Параболический полусегмент		$F = \frac{2bh}{3}$	$J_x = \frac{2bh^3}{175}$ $J_y = \frac{19b^3h}{480}$ $J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{60}$	$x_1 = \frac{3b}{8}$ $y_1 = \frac{2h}{5}$

1.1. Геометрические характеристики простых фигур (продолжение 3)

1	2	3	4	5
Эллипс		$F = \pi ab$	$J_x = \frac{\pi ab^3}{4}$ $J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = a$ $y_1 = b$
Эллиптический сегмент		$F = \frac{\pi ab}{2}$	$J_x = 0,090ab^3$ $J_y = \frac{\pi a^3 b}{8}$ $J_{xy} = 0$	$x_1 = a$ $y_1 = 0,424b$
Четверть эллипса		$F = \frac{\pi ab}{4}$	$J_x = 0,0549ab^3$ $J_y = 0,0549a^3b$ $J_{xy} = -0,0165a^2b^2$	$x_1 = 0,424a$ $y_1 = 0,424b$
Тонкая полоса ($t < 0,1h$)		$F = ht$	$J_x = \frac{th^3}{12} \cos^2 \alpha$ $J_y = \frac{th^3}{12} \sin^2 \alpha$ $J_{xy} = -\frac{th^3}{24} \sin 2\alpha$	
Рельс железнодорож. (приближенно)		$F \approx 0,238h^2$	$J_x \approx 0,032h^4$	$y_1 \approx 0,5h$

1.2. Сортаменты прокатных профилей

1.2.а. Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)

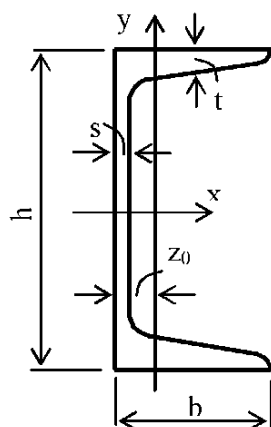


h – высота двутавра;
 b – ширина полки;
 s – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 F – площадь поперечного сечения;

J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент половины сечения.

	Масса 1 м. кг	Размеры, мм				F , см ²	J_x , см ⁴	W_{x_3} , см ³	S_{x_3} , см ³	J_y , см ⁴	W_{y_3} , см ³
		h	b	s	t						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	23	17,9	6,49
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	62,3	58,6	14,5
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	81,4	82,6	18,4
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104	115	23,1
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131	157	28,6
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163	198	34,5
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	210	260	41,5
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	268	337	49,9
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	339	419	59,9
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	423	516	71,1
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	545	667	86,1
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	708	808	101
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	919	1043	123
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	1181	1356	151
60	108,0	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	1491	1725	182

1.2.6. Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240-97)

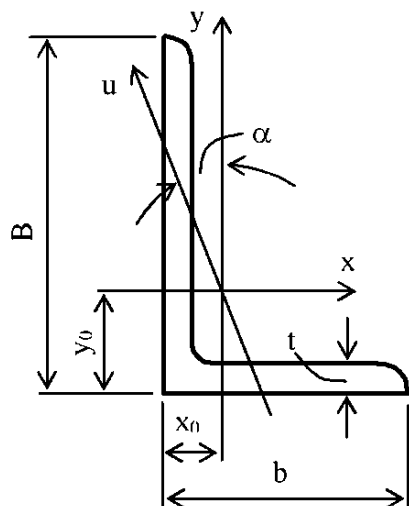


h-высота швеллера;
b-ширина полки;
s-толщина стенки;
t-средняя толщина полки;
F-площадь сечения;

W-момент сопротивления сечения при изгибе;
S-статический момент половины сечения;
z₀-расстояние от центра тяжести до наружной грани стенки;
J-момент инерции.

Номер швеллера	Масса а 1 м, кг	Размеры, мм				F, см ²	J _x , см ⁴	W _x , см ³	S _x , см ³	J _y , см ⁴	W _y , см ³	z ₀ , см
		h	b	s	t							
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	5,59	5,61	2,75	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	9,00	8,70	3,68	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	23,30	12,80	4,75	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,90	174,0	34,8	20,40	20,40	6,46	1,44
12	10,40	120	52	4,8	7,8	13,30	304,0	50,6	29,60	31,20	8,52	1,54
14	12,30	140	58	4,9	8,1	15,60	491,0	70,2	40,80	45,40	11,00	1,67
16	14,20	160	64	5,0	8,4	18,10	747,0	93,4	54,10	63,30	13,80	1,80
16а	15,30	160	68	5,0	9,0	19,50	823,0	103,0	59,40	78,80	16,40	2,00
18	16,30	180	70	5,1	8,7	20,70	1090,0	121,0	69,80	86,00	17,00	1,94
18а	17,40	180	74	5,1	9,3	22,20	1190,0	132,0	76,10	105,00	20,00	2,13
20	18,40	200	76	5,2	9,0	23,40	1520,0	152,0	87,80	113,00	20,50	2,07
22	21,00	220	82	5,4	9,5	26,70	2110,0	192,0	110,00	151,00	25,10	2,21
24	24,00	240	90	5,6	10,0	30,60	2900,0	242,0	139,00	208,00	31,60	2,42
27	27,70	270	95	6,0	10,5	35,20	4160,0	308,0	178,00	262,00	37,30	2,47
30	31,80	300	100	6,5	11,0	40,50	5810,0	387,0	224,00	327,00	43,60	2,52
33	36,50	330	105	7,0	11,7	46,50	7980,0	484,0	281,00	410,00	51,80	2,59
36	41,90	360	110	7,5	12,6	53,40	10820,0	601,0	350,00	513,00	61,70	2,68
40	48,30	400	115	8,0	13,5	61,50	15220,0	761,0	444,00	642,00	73,40	2,75

1.2.в. Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (по ГОСТ 8510-86)



В-ширина большой полки;
 б-ширина малой полки;
 t-толщина полки;
 F-площадь сечения;
 J-момент инерции;
 x_0, y_0 -расстояния от центра тяжести до наружных граней полки.

Номер уголка	Масса l м, кг	Размеры, мм			F, см ²	J _x , см ⁴	J _y , см ⁴	J _u , мин см ⁴	J _{xy} , см ⁴	x ₀ , см	y ₀ , см	tgα
		B	b	t								
2,5/1,6	0,91	25	16	3	1,16	0,70	0,22	0,13	0,22	0,42	0,86	0,392
3/2	1,12	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	0,51	1,00	0,427
	1,46			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,54	0,54	1,04	0,421
3,2/2	1,17	32	20	3	1,49	1,52	0,46	0,28	0,47	0,49	1,08	0,382
	1,52			4	1,94	1,93	0,57	0,35	0,59	0,53	1,12	0,374
4/2,5	1,48	40	25	3	1,89	3,06	0,93	0,56	0,96	0,59	1,32	0,385
	1,94			4	2,47	3,93	1,18	0,71	1,22	0,63	1,37	0,281
	2,37			5	3,03	4,73	1,41	0,86	1,44	0,66	1,41	0,374
4/3	2,26	40	30	4	2,67	4,18	2,01	1,09	1,68	0,78	1,28	0,544
	2,46			5	3,28	5,04	2,41	1,33	2,00	0,82	1,32	0,539
4,5/2,8	1,68	45	28	3	2,14	4,41	1,32	0,72	1,38	0,64	1,47	0,382
	2,20			4	2,80	5,68	1,69	1,02	1,77	0,68	1,51	0,379
5/3,2	1,90	50	32	3	2,42	6,18	1,99	1,18	2,01	0,72	1,60	0,469
	2,40			4	3,17	7,98	2,56	1,52	2,59	0,76	1,65	0,401
5,6/3,6	2,81	56	36	4	3,58	11,37	3,79	2,19	3,74	0,84	1,82	0,406
	3,46			5	4,41	13,82	4,48	2,65	4,50	0,88	1,87	0,404

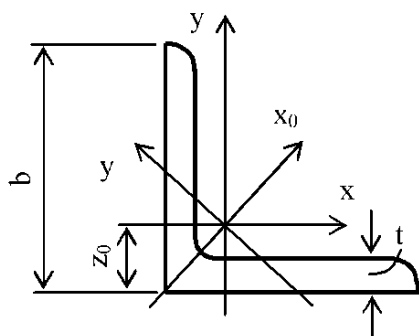
Приложение 1.2.в. (продолжение 1)

Номер уголка	Масса м, кг	Размеры, мм			F, см ²	J _x , см ⁴	J _y , см ⁴	J _u , min см ⁴	J _{xy} , см ⁴	x ₀ , см	y ₀ , см	tgα
		B	b	t								
6,3/4,0	3,17	63	40	4	4,04	16,33	5,16	3,07	5,25	0,91	2,03	0,397
	3,91			5	4,98	19,91	6,26	3,73	6,41	0,95	2,08	0,396
	4,63			6	5,90	23,31	7,29	4,36	7,44	0,99	2,12	0,393
	6,03			8	7,68	29,60	9,15	5,58	9,27	1,07	2,20	0,386
6,5/5	4,36	65	50	5	5,56	22,41	12,08	6,41	9,77	1,26	2,00	0,576
	5,18			6	6,60	27,46	14,12	7,52	11,46	1,30	2,04	0,575
	5,98			7	7,62	31,32	16,05	8,68	12,94	1,34	2,08	0,571
	6,77			8	8,62	35,00	18,88	9,65	13,61	1,37	2,12	0,570
7/4,5	4,39	70	45	5	5,59	27,76	9,05	5,34	9,12	1,05	2,28	0,406
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,81	12,47	7,24	12,00	1,17	2,39	0,436
	5,69			6	7,25	40,92	14,60	8,48	14,10	1,21	2,44	0,435
	6,57			7	8,37	46,77	16,61	9,69	16,18	1,25	2,48	0,435
	7,43			8	9,47	52,38	18,52	10,87	17,80	1,29	2,52	0,430
8/5	4,49	80	50	5	6,36	41,64	12,68	7,57	13,20	1,13	2,60	0,387
	5,92			6	7,55	48,98	14,85	8,88	15,50	1,17	2,65	0,386
8/6	6,39	80	60	6	8,15	52,06	25,18	13,61	20,98	1,49	2,47	0,547
	7,39			7	9,42	59,61	28,74	15,58	24,01	1,53	2,52	0,546
	8,37			8	10,67	66,88	32,15	17,49	26,83	1,57	2,56	0,544
9/5,6	6,17	90	56	5,5	7,86	55,28	19,67	11,77	20,54	1,26	2,92	0,384
	6,76			6	8,54	70,58	21,22	12,70	22,23	1,28	2,95	0,384
	8,77			8	11,18	90,87	27,08	16,29	28,33	1,36	3,04	0,380
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,29	30,58	18,20	31,50	1,42	3,23	0,393
	8,70			7	11,09	12,86	34,99	20,83	36,10	1,46	3,28	0,392
	9,87			8	12,57	26,96	39,21	23,38	40,50	1,50	3,32	0,391
	12,14			10	15,47	53,95	47,18	28,34	48,60	1,58	3,40	0,387

Приложение 1.2.в. (продолжение 2)

Номер уголка	Масса l м, кг	Размеры, мм			F, см ²	J _x , см ⁴	J _y , см ⁴	J _{u, min} см ⁴	J _{xy} , см ⁴	x ₀ , см	y ₀ , см	tgα
		B	b	t								
10/6,5	8,81	100	65	7	11,23	114,05	38,32	22,77	38,00	1,52	3,24	0,415
	9,99			8	12,73	128,31	42,96	25,24	42,64	1,56	3,28	0,414
	12,30			10	15,67	155,52	51,68	30,60	51,18	1,64	3,37	0,410
11/7	8,98	110	70	6,5	11,45	142,42	45,61	26,94	46,80	1,58	3,55	0,402
	10,93			8	13,93	171,54	54,64	32,31	55,90	1,64	3,61	0,400
12,5/8	11,04	125	80	7	14,06	226,53	73,73	43,40	74,70	1,80	4,01	0,407
	12,58			8	15,98	225,62	80,95	48,82	84,10	1,84	4,05	0,406
	15,47			10	19,70	311,61	100,47	59,33	102,00	1,92	4,14	0,404
	18,34			12	23,36	364,79	116,84	69,47	118,00	2,00	4,22	0,400
14/9	14,13	140	90	8	18,00	363,68	119,79	70,27	121,00	2,03	4,49	0,411
	17,47			10	22,24	444,45	145,54	85,51	147,00	2,12	4,58	0,409
16/10	17,96	160	100	9	22,87	605,97	186,03	110,40	194,00	2,24	5,19	0,391
	19,85			10	25,28	666,59	204,09	121,16	213,00	2,28	5,23	0,390
	23,58			12	30,04	784,22	238,75	142,14	249,00	2,36	5,32	0,388
	27,26			14	34,72	897,19	271,60	162,49	282,00	2,43	5,40	0,385
18/11	22,20	180	110	10	28,33	952,28	276,37	165,44	295,00	2,44	5,88	0,376
	26,40			12	33,69	1122,56	324,09	194,28	348,00	2,52	5,97	0,374
20/ 12,5	27,37	200	125	11	34,87	1449,02	446,36	263,84	465,00	2,79	6,50	0,392
	29,74			12	37,89	1568,19	481,93	285,04	503,00	2,83	6,54	0,392
	34,43			14	43,87	1800,83	550,77	326,54	575,00	2,91	6,62	0,390
	39,07			16	49,77	2026,08	616,66	366,99	643,00	2,99	6,71	0,388

1.2.г. Уголки стальные горячекатанные равнополочные (по ГОСТ 8509-93)



b -ширина полок;
 t -толщина полок;
 F -площадь поперечного сечения;
 J -момент инерции;

J_{xy} -центробежный момент инерции;
 z_0 -расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		F, см ²	J _x , см ⁴	J _{x0, max} см ⁴	J _{y0, min} , см ⁴	J _{xy} , см ⁴	z ₀ , см
		B	t						
2	0,89	20	3	1,13	0,40	0,63	0,17	0,23	0,60
	1,15		4	1,46	0,50	0,78	0,22	0,28	0,64
2,5	1,12	25	3	1,43	0,81	1,29	0,34	0,47	0,73
	1,46		4	1,86	1,03	1,62	0,44	0,59	0,76
2,8	1,27	28	3	1,62	1,16	1,84	0,48	0,68	0,80
3	1,36	30	3	1,74	1,45	2,30	0,60	0,85	0,85
	1,78		4	2,27	1,84	2,92	0,77	1,08	0,89
3,2	1,46	32	3	1,86	1,77	2,80	0,74	1,03	0,89
	1,91		4	2,43	2,26	3,58	0,94	1,32	0,94
3,5	1,60	35	3	2,04	2,35	3,72	0,97	1,37	0,97
	2,10		4	2,67	3,01	4,76	1,25	1,75	1,01
	2,58		5	3,28	3,61	5,71	1,52	2,10	1,05
4	1,85	40	3	2,35	3,55	5,63	1,47	2,08	1,09
	2,42		4	3,08	4,58	7,26	1,90	2,68	1,13
	2,98		5	3,79	5,53	8,75	2,30	3,22	1,17
4,5	2,08	45	3	2,65	5,13	8,13	2,12	3,00	1,21
	2,73		4	3,48	6,63	10,52	2,74	3,89	1,26
	3,37		5	4,29	8,03	12,74	3,33	4,71	1,30
5	2,32	50	3	2,96	7,11	11,27	2,95	4,16	1,33
	3,05		4	3,89	9,21	14,63	3,80	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,20	17,77	4,63	6,57	1,42
	4,47		6	5,69	13,07	20,72	5,43	7,65	1,46

Приложение 1.2.г. (продолжение 1)

Номер уголка	Масса l м, кг	Размеры, мм		F, см ²	J _x , см ⁴	J _{x0, max} , см ⁴	J _{y0, min} , см ⁴	J _{xy} , см ⁴	Z ₀ , см
		B	t						
5,6	3,44	56	4	4,38	13,10	20,79	5,41	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	15,97	25,36	6,59	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,86	29,90	7,81	11,00	1,69
	4,81		5	6,13	23,10	36,80	9,52	13,70	1,74
	5,72		6	7,28	27,06	42,91	11,18	15,90	1,78
7	4,87	70	4,5	6,20	29,04	465,03	12,04	17,00	1,88
	5,38		5	6,86	31,94	50,67	13,22	18,70	1,90
	6,39		6	8,15	37,58	59,64	15,52	22,10	1,94
	7,39		7	9,42	42,98	68,19	17,77	25,20	1,99
	8,37		8	10,67	48,16	76,35	19,97	28,20	2,02
7,5	5,80	75	5	7,39	39,53	62,65	16,41	23,10	2,02
	6,89		6	8,78	46,57	73,87	19,28	27,30	2,06
	7,96		7	10,15	53,34	84,61	22,07	31,20	2,10
	9,02		8	11,50	59,84	94,89	24,80	35,00	2,15
	10,07		9	12,83	66,10	104,72	27,48	38,60	2,18
8	6,78	80	5,5	8,63	52,68	82,56	21,80	30,90	2,17
	7,36		6	9,38	56,97	90,40	23,54	33,40	2,19
	8,51		7	10,85	65,31	103,60	26,97	38,30	2,23
	9,65		8	12,30	73,36	116,39	30,32	43,00	2,27
9	8,33	90	6	10,61	82,10	130,00	33,97	48,10	2,43
	9,64		7	12,28	94,30	149,67	38,94	55,40	2,47
	10,93		8	13,93	16,36	168,42	43,80	62,30	2,51
10	10,06	100	6,5	12,82	122,10	193,46	50,73	71,40	2,68
	10,79		7	13,75	130,59	207,01	54,16	76,40	2,71
	12,25		8	15,60	147,19	233,46	60,92	86,30	2,75
	15,10		10	19,24	178,95	283,83	74,08	110,00	2,83
	17,90		12	22,80	208,90	330,95	86,84	122,00	2,91
	20,63		14	26,28	237,15	374,98	99,32	138,00	2,99

Приложение 1.2.г. (продолжение 2)

Номер уголка	Масса l м, кг	Размеры, мм		F, см ²	J _x , см ⁴	J _{x0} , max см ⁴	J _{y0} , min, см ⁴	J _{xy} , см ⁴	Z ₀ , см
		B	t						
11	11,89	110	7	15,15	175,61	278,54	72,68	106,00	2,96
	13,50		8	17,20	198,17	314,51	81,83	116,00	3,00
12,5	15,46	125	8	19,69	294,36	466,76	121,98	172,00	3,36
	17,36		9	22,00	327,48	520,00	135,88	192,00	3,40
	19,10		10	24,33	359,82	571,04	148,59	211,00	3,45
	22,68		12	28,89	422,23	670,02	174,43	248,00	3,53
	26,20		14	33,37	481,76	763,90	199,62	282,00	3,61
	29,65		16	37,77	538,56	852,84	224,29	315,00	3,68
14	19,41	140	9	24,72	465,72	739,42	192,03	274,00	3,76
	21,45		10	27,33	512,29	813,62	210,96	301,00	3,82
	25,50		12	32,49	602,49	956,98	248,01	354,00	3,90
16	24,67	160	10	31,43	774,24	1229,10	319,33	455,00	4,30
	27,02		11	34,42	844,21	1340,06	347,77	496,00	4,35
	29,35		12	37,39	912,89	1450,00	375,78	537,00	4,39
18	30,47	180	11	38,80	1216,44	1933,10	499,78	716,00	4,85
	33,12		12	42,19	1316,62	2092,78	540,45	776,00	4,89
20	36,97	200	12	47,10	1822,78	2896,16	749,40	1073,00	5,37
	39,92		13	50,85	1960,77	3116,18	805,35	1156,00	5,42
	42,80		14	54,60	2097,00	3333,00	861,00	1236,00	5,46
	60,08		16	61,98	2362,57	4860,42	969,74	1393,00	5,54
22	47,40	220	14	160,38	2814,36	4470,15	1158,56	1655,00	5,91
	53,83		16	68,58	3175,44	5045,37	1305,52	1869,00	6,02
25	61,55	250	16	78,40	4717,10	7492,10	1942,09	2775,00	6,75
	68,86		18	87,72	5247,24	8336,69	2157,78	3089,00	6,83
	76,11		20	96,96	5764,87	9159,73	2370,01	3395,00	6,91
	83,31		22	106,12	6270,32	9961,30	2579,04	3691,00	7,00
	93,97		25	119,71	7006,39	11125,52	2887,26	4119,00	7,11

2. Механические характеристики основных конструкционных материалов

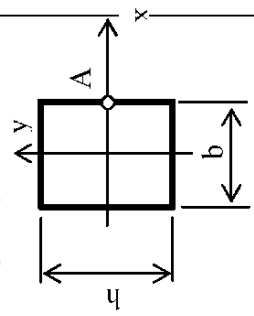
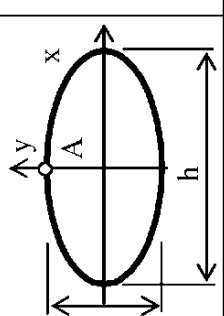
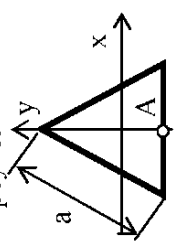
Материал (в соответствии с ГОСТ)	Удельный вес γ , кН/м ³	Модуль упругости $E \times 10^{-3}$	Коэффициент Пуассона μ	Предел пропорциональности $\sigma_{пр}$	Предел текучести $\sigma_{т}$, МПа	Предел прочности $\sigma_{в}$, МПа	Коэффициент линейного расширения
1	2	3	4	5	6	7	8
Углерод. стали общ. кач. (ГОСТ 380-60)	78	2,0-2,1	0,24-	-	180	320-400	10-13
Ст1	78	2,0-2,1	0,28	-	190-	340-420	10-13
Ст2	78	2,0-2,1	0,24-	210	220	360-410	10-13
Ст3	78	2,0-2,1	0,28	-	210-	420-520	10-13
Ст4	78	2,0-2,1	0,24-	-	240	500-620	10-13
Ст5			0,28		240-		
			0,24-		260		
			0,28		260-		
			0,24-		280		
			0,28				
Сталь спец. назначения (ГОСТ 6713-53) Ст3 мостовая	78	2,0-2,1	0,24-0,28		240	380	10-13
Стали качественные (ГОСТ 1050-60)	78,3	1,9	0,24-		210	340-420	11,6-
10	78,2	2,02	0,28		250	420-500	14,6
20	78,2	2,02	0,24-		300	500-600	11,1-
30	78,1	2,135	0,28		340	580-700	14,4
40			0,24-				12,6-
			0,28				15,6
			0,24-				12,4-
			0,28				14,6
Легированные стали (ГОСТ 5058-65)	78	2,1	0,24-		390-	640-660	10-13
15ХСНД	78	2,185	0,28		420	730-1050	13,4-
40Х	78	1,98	0,24-		650-	1100-1700	14,8
30ХГСА			0,28		900		11,0
			0,24-		850-		
			0,28		1500		
Серые чугуны (ГОСТ 1412-54)	68-71	0,8-1,5	0,23-		-	(+)120,(-)	10-12
СЧ 12	70-72	0,8-1,5	0,27		-)500	10-12
СЧ 18	72-73	0,85	0,23-		0,75 σ_B	(+)180,(-)	10-12
СЧ 21	73-74	1,3	0,27		0,85 σ_B)700	10-12
СЧ 32			0,23-			(+)210,(-)	
			0,27)950	
			0,23-			(+)320?(-)	
			0,27)1200	

2. Механические характеристики основных конструкционных материалов (продолжение)

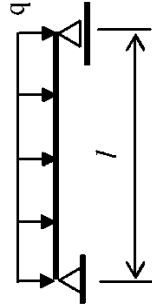
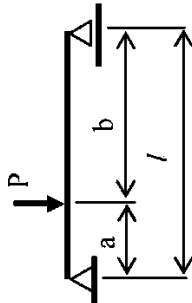
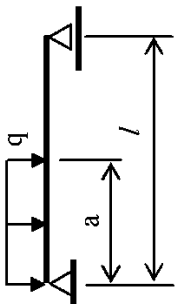
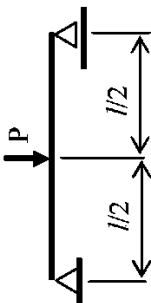
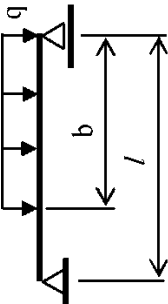
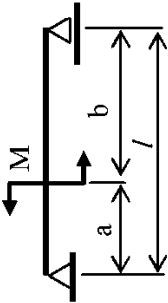
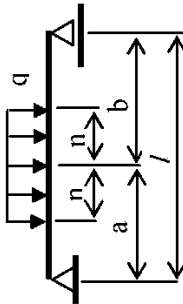
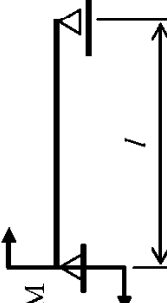
1	2	3	4	5	6	7	8
Алюмин. деформ. сплавы (ГОСТ 4784-65)	26,7	0,71	0,3		80	190	23,8
Амг2М (магналин)	26,4	0,71	0,3		150	300	24,7
Амг6М (магналин)	27,8	0,71	0,31		290	440	22,7
Д16П (дюралюмин)							
Медь и медные сплавы							
медь техническая		1,0-1,1	0,31-		60-80	220	16,7
Л68 (латунь)	86	1,1	0,34		91	320	19
мягкая ГОСТ1019-47)	86	1,15	0,36		520	660	19
Л68 (латунь твердая «(-)	82	1,0	0,36		160	380	15,6
БрА5 (бронза мягкая ГОСТ 493-54))			0,32- 0,36				
Свинец (ГОСТ 3778-65)	113,4	0,15-0,18	0,42		5-10	15-18	28
Цинк (ГОСТ 3640-47)	71,3	0,53	0,27		10	64	39,7
Никель (ГОСТ 849-56)	89	1,8-2,27	0,23	122-	280-900	500-1000	13,3-
тверд. состояние		1,121	0,32	260	470	610	16,3
Титан ВТ1	45	0,18-0,22	0,04-			(+)330,	8
Стеклопластик (ГОСТ 100087-62)	14-18,5	0,04-0,10	0,63		78	(-)200	0,45-
Текстолиты (ГОСТ 5-52)	13-14,5	0,041				(+)78,	8,3
Оргстекло (ГОСТ 10667-65)	11,8-12	0,78-0,85	0,18-			(-)190	0,45-
Стекло (ГОСТ 10135-62)	22-80	0,18	0,32			(+)80,(-)95	8,3
Лед	10,0	0,027				(+)60,	3,3-
Песчаник	25-28	0,14-0,24				(-)1200	4,1
Кладка из кирпича	25-28		0,16-			(+)2, (-)15-	120
Бетон классов В5-В15	25	0,10-0,15	0,18	(//)61		40	0,5-15
Дерево (15% влажности)		0,11		(//)56		(+)0,4,	50,7
сосна		0,15-0,18	0,49	(//)34		(-)3-9	
обыкновенная	4,8-5,4	0,07-0,15	0,44	(//)45		(-)5-48	4-7
ель	4,6		0,41			(//)-(+)100,	
обыкновенная			0,43			(-)45	
береза	6,4-7,3					(//)-	
обыкновенная						(+)110,(-	
дуб	7,6)40	
						(//)-(+)180,	
						(-)48	
						(//)-(+)116,	
						(-)40	

Примечание: специальные знаки обозначают- (+)-растяжение; (-)-сжатие; (//)-нагружение вдоль волокон

3. Расчетные характеристики поперечных сечений при кручении

Эскиз сечения	Момент инерции при кручении J_K	Момент сопротивления при кручении W_K	Примечания																																				
<p>Прямоугольник</p> 	$J_K = \alpha h b^3$	$W_K = \beta h b^2$	<p>Значения коэффициентов α и β</p> <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>1,00</th> <th>1,50</th> <th>1,75</th> <th>2,00</th> <th>2,50</th> <th>3,00</th> <th>4,00</th> <th>6,00</th> <th>8,00</th> <th>10,0</th> <th>∞</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>α</td> <td>0,141</td> <td>0,196</td> <td>0,214</td> <td>0,229</td> <td>0,249</td> <td>0,263</td> <td>0,281</td> <td>0,299</td> <td>0,307</td> <td>0,313</td> <td>0,333</td> </tr> <tr> <td>β</td> <td>0,208</td> <td>0,231</td> <td>0,239</td> <td>0,246</td> <td>0,256</td> <td>0,267</td> <td>0,282</td> <td>0,299</td> <td>0,307</td> <td>0,313</td> <td>0,333</td> </tr> </tbody> </table> <p>Максимальные напряжения возникают в точке A, расположенной посредине длинной стороны</p>		1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10,0	∞	α	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333	β	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10,0	∞																												
α	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333																												
β	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333																												
<p>Эллипс</p> 	$J_K = \frac{\pi h b}{64} (h^2 + b^2)$	$W_K = \frac{\pi b^2 h}{16}$	<p>Максимальное напряжение возникает в точке A</p>																																				
<p>Равносторонний треугольник</p> 	$J_K = \frac{\sqrt{3} a^4}{80}$	$W_K = \frac{a^3}{20}$	<p>Максимальное напряжение возникает в точке A</p>																																				

4. Справочные данные для расчета балок
4.1. Формулы для расчета элементарных балок

Схема нагружения	Угол поворота на левой опоре	Угол поворота на правой опоре	Схема нагружения	Угол поворота на левой опоре	Угол поворота на правой опоре
	$\frac{ql^3}{24EJ}$	$\frac{ql^3}{24EJ}$		$\frac{Pab(l+a)}{6EJ}$	$\frac{Pab(l+b)}{6EJ}$
	$\frac{qa^2(2l-a)^2}{24EJ}$	$\frac{qa^2(2l^2-a^2)}{24EJ}$		$\frac{Pl^2}{16EJ}$	$\frac{Pl^2}{16EJ}$
	$\frac{qb^2(2l^2-b^2)}{24EJ}$	$\frac{qb^2(2l-b)^2}{24EJ}$		$\frac{M(l^2-3b^2)}{6EJ}$	$\frac{M(3a^2-l^2)}{6EJ}$
	$\frac{qnb(l^2-b^2-n^2)}{3EJ}$	$\frac{qna(l^2-a^2-n^2)}{3EJ}$		$\frac{MI}{3EJ}$	$\frac{MI}{6EJ}$

4.2. Значения фундаментальных функций А.Н.Крылова

ζ	$V_1(\zeta)$	$V_2(\zeta)$	$V_3(\zeta)$	$V_4(\zeta)$	ζ	$V_1(\zeta)$	$V_2(\zeta)$	$V_3(\zeta)$	$V_4(\zeta)$
0,0	1	0	0	0	2,4	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,9461
0,1	1,0000	0,1000	0,0050	0,00015	2,5	-4,9128	-0,5885	1,8105	2,1293
0,2	0,9997	0,2000	0,0200	0,0014	2,6	-5,8003	-1,1236	1,7256	2,3065
0,3	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045	2,7	-6,7565	-1,7599	1,5827	2,4725
0,4	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107	2,8	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
0,5	0,9895	0,4990	0,1248	0,0208	2,9	-8,8471	-3,3079	1,0838	2,7443
0,6	0,9784	0,5975	0,1798	0,0360	3,0	-9,9669	-4,2485	0,7069	2,8346
0,7	0,9600	0,6944	0,2444	0,0571	3,1	-11,1119	-5,3023	0,2303	2,8823
0,8	0,9318	0,7891	0,3186	0,0852	3,2	-12,2656	-6,4711	-0,3574	2,8769
0,9	0,8931	0,8804	0,4021	0,1211	3,3	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,8068
1,0	0,8337	0,9668	0,4945	0,1657	3,4	-14,5008	-9,1507	-1,9121	2,6589
1,1	0,7568	1,0465	0,5952	0,2203	3,5	-15,5198	-10,6525	-2,9014	2,4195
1,2	0,6561	1,1173	0,7035	0,2852	3,6	-16,4218	-12,2508	-4,0459	2,0735
1,3	0,5272	1,1767	0,8183	0,3612	3,7	-17,1622	-13,9315	-5,3544	1,6049
1,4	0,3556	1,2217	0,9383	0,4490	3,8	-17,6875	-15,6761	-6,8343	0,9969
1,5	0,1664	1,2486	1,0620	0,5490	3,9	-17,9387	-17,4599	-8,4909	0,2321
1,6	-0,0753	1,2535	1,1873	0,6615	4,0	-17,8498	-19,2524	-10,3265	-0,7073
1,7	-0,3644	1,2319	1,3118	0,7864	4,1	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
1,8	-0,7060	1,1789	1,4326	0,9237	4,2	-16,3505	-22,7055	-14,5274	-3,1812
1,9	-1,1049	1,0888	1,5464	1,0727	4,3	-14,7722	-24,2669	-16,8773	-4,7501
2,0	-1,5656	0,9558	1,6490	1,2325	4,4	-12,5180	-25,6373	-19,3743	-6,5615
2,1	-2,0923	0,7735	1,7359	1,4019	4,5	-9,4890	-26,7447	-21,9959	-8,6290
2,2	-2,6882	0,5351	1,8018	1,5791	4,6	-5,5791	-27,5057	-24,2117	-10,9638
2,3	-3,3562	0,2335	1,8408	1,7614	4,7	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,5732

4.3. Коэффициенты постели основных типов оснований

№№ п. п.	Материал основания	$K_0 \times 10^{-6}$, кН/м ³
1	Песок свеженаасыпанный / Глина мокрая, размягченная	0,001 – 0,005
2	Песок слежавшийся / Гравий насыпной / Глина влажная	0,005 – 0,05
3	Песок и гравий, плотно слежавшиеся / Щебень / Глина малой влажности	0,05 – 0,1
4	Грунт песчано-глинистый, искусственно уплотненный / Глина твердая	0,1 – 0,2
5	Известняк, песчаник, мерзлого	0,2 – 1,0
6	Кирпич, бутовая кладка	4,0 – 6,0
7	Бетон, железобетон	8,0 – 15,0
8	Твердая скала	1,0 – 15,0

9	Искусственное свайное основание	0,05 – 0,15
---	---------------------------------	-------------

5. Справочные данные для расчетов на устойчивость

5.1. Данные для применения решения Ф.С.Ясинского

Формулы Ф.С.Ясинского: для материалов по п.п. 1-5 $\sigma_{кр} = a - b\lambda$; для чугуна $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$

№№ пп	Материал	$\lambda_{прел}$	λ_0	a, МПа	b, МПа	c, МПа
1	Стали Ст2, Ст3	100	40	310	1,14	
2	Сталь Ст5	100		464	3,26	
3	Сталь 40	90		321	1,16	
4	Кремнистая сталь	100		589	3,82	
5	Дерево (сосна)	110	0	29,3	0,194	
6	Чугун	80		776	12,0	0,053

5.2. Значения коэффициента продольного изгиба

λ	Стали			Серые чугуны		Алюмин. сплавы		Кладка каменная	Железо-бетон	Бетон тяжел.	Дерево (сосна)	
	Ст	Ст5 НЛ-1	НЛ-2 (15ХС НД)	СПК	СЧ 12	СЧ 21	АМг6м (магнал.)					Алюмин. Сплавы Д16Т (дюр алюм.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1,0	1,00	1,0	1,0	1,00	1,00	1,000	1,000	1,00	1,00	1,00	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,97	0,95	0,973	0,999	0,99	1,00	1,00	0,99
20	0,97	0,95	0,95	0,95	0,91	0,87	0,945	0,998	0,96	1,00	0,96	0,97
30	0,95	0,92	0,93	0,91	0,81	0,75	0,917	0,835	0,91	1,00	0,90	0,93
40	0,92	0,89	0,90	0,87	0,69	0,60	0,870	0,700	0,85	1,00	0,84	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,83	0,57	0,43	0,770	0,568	0,78	1,00	0,76	0,80
60	0,86	0,82	0,78	0,79	0,44	0,32	0,685	0,465	0,72	0,83	0,70	0,71

70	0,81	0,76	0,71	0,72	0,34	0,23	0,603	0,353	0,65	0,73	0,63	0,61
80	0,75	0,70	0,63	0,65	0,26	0,18	0,530	0,269	0,58	0,64	0,57	0,49
90	0,69	0,62	0,54	0,55	0,20	0,14	0,465	0,212	0,53	0,57	0,51	0,38

5.2. Значения коэффициента продольного изгиба (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
100	0,60	0,51	0,45	0,43	0,16	0,12	0,415	0,172	0,48	0,52	0,45	0,31
110	0,52	0,43	0,39	0,35			0,365	0,142	0,43			0,25
120	0,45	0,38	0,33	0,30			0,327	0,119	0,38			0,22
130	0,40	0,32	0,29	0,26			0,296	0,101	0,35			0,18
140	0,36	0,28	0,26	0,23			0,265	0,087	0,32			0,16
150	0,32	0,26	0,23	0,21			0,235	0,076	0,29			0,14
160	0,29	0,24	0,21	0,19								0,12
170	0,26	0,21	0,19	0,17								0,11
180	0,23	0,19	0,17	0,15								0,10
190	0,21	0,17	0,15	0,14								0,09
200	0,19	0,16	0,14	0,13								0,08

6. Справочные данные для расчетов на многоцикловую усталость

6.1. Сведения о характеристиках усталости материалов

6.1.а. Значения коэффициента чувствительности к асимметрии цикла ψ

σ_B , МПа	350-550	520-750	700-1000	1000-1200	1200-1400
ψ_{σ} , изгиб и растяжение	0	0,05	0,10	0,20	0,25
ψ_{τ} , кручение	0	0	0,05	0,10	0,15

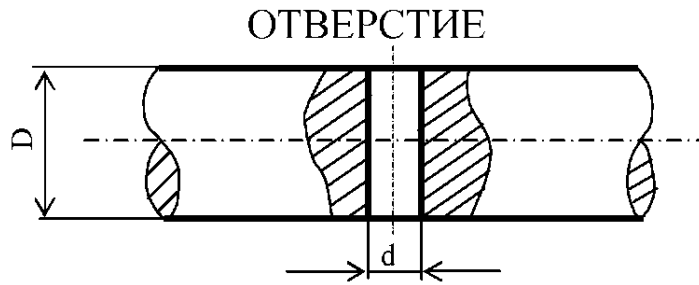
6.1.6. Основные механические характеристики сталей для изготовления валов

Вид стали	№№ пп	Марка стали	Предел прочности σ_B , МПа	Предел текучести σ_T , МПа	Предел выносливости при изгибе	Предел выносливости при кручении	Предел выносливости при растяжении
Углерод мартенов. стали	2	3					
	1	Ст3	(400-500)/470	(230-250)/240			
	2	Ст4	(420-520)/480	(240-260)/250			
	3	Ст5	(500-620)/580	(270-290)/280	$\sigma_1 = 0,33\sigma_B + 70$	$\tau_1 = 0,53\sigma_1$	$\sigma_{1P} = 0,71\sigma_1$
	4	Ст6	(600-720)/630	(300-320)/310			
	5	Ст7	Не менее 700	(330-350)/340			
	6	Сталь 20	(400-540)/510	260			
Углеродистые качества мартеновские стали	7	Сталь 25	(480-580)/550	280			
	8	Сталь 30	(520-620)/580	300			
	9	Сталь 35	(560-660)/620	320			
	10	Сталь 40	(600-720)/660	340			
	11	Сталь 45	(640-760)/700	360	$\sigma_1 = 0,33\sigma_B + 70$	$\tau_1 = 0,53\sigma_1$	$\sigma_{1P} = 0,71\sigma_1$
	12	Сталь 50	(680-800)/730	380			
	13	Сталь 55	(710-830)/760	400			
	14	Сталь 60	(730-850)/780	420			
	15	Сталь 65	(760-880)/800	430			
	16	Сталь 70	(780-900)/820	440			
Углерод-мартанц. качества. стали	17	15Г	500	250			
	18	20Г	520	280			
	19	30Г	620	320			
	20	40Г	700	360			
	21	45Г	770	380	$\sigma_1 = 0,31\sigma_B + 70$	$\tau_1 = 0,54\sigma_1$	$\sigma_{1P} = 0,73\sigma_1$
	22	50Г	800	400			
	23	15Г2	560	210			
	24	20Г2	610	340			
	25	30Г2	700	400			

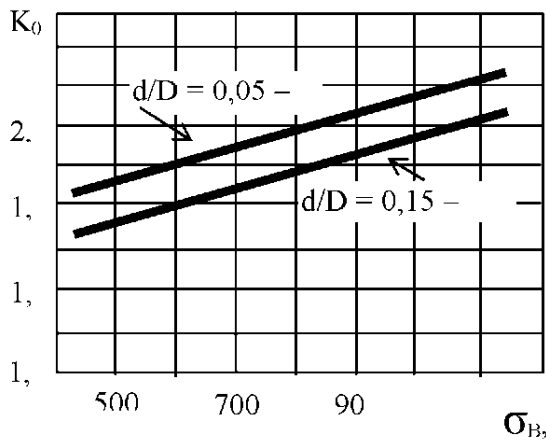
6.1.б. Основные механические характеристики сталей для изготовления валов (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
Углер.- марл. кач. Ст.	26	35Г2	780	420	$\sigma_{-1} = 0,31\sigma_B + 70$	$\tau_{-1} = 0,54\sigma_{-1}$	$\sigma_{-1P} = 0,73\sigma_{-1}$
	27	40Г2	820	460			
	28	45Г2	880	490			
	29	50Г2	910	520			
	30	20Х	800	650			
	31	30Х	900	750			
	32	35Х	950	800			
	33	40Х	1000	850			
	34	45Х	1050	900			
	35	20ХН	800	650			
	36	40ХН	1000	850			
	37	45ХН	1050	900			
	38	12ХН3А	1000	850			
	39	12Х2НЧА	1200	1000			
	40	20ХН3А	950	800			
	41	20Х2НЧА	1400	1200			
	42	30ХН3А	1100	900			
	43	18ХГТ	1150	950			
	44	30ХГТ	1500	1300			
	45	35ХГТ	1150	950			
	46	40ХГТ	1250	1050			
	47	38ХЮ	950	800			
	48	30ХГС	1100	950			
	49	35ХГСА	1400	1050			
	50	20ХГР	1000	800			
	51	40ХГР	1100	950			

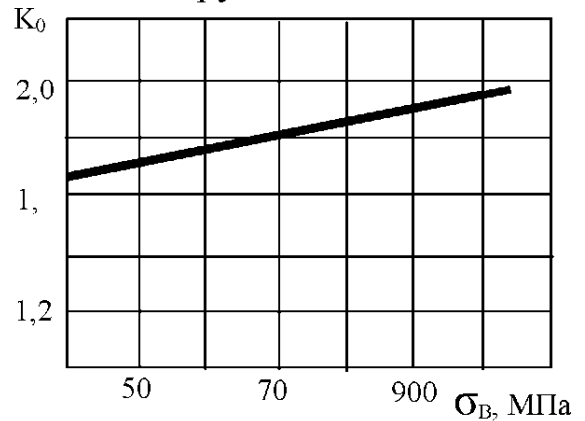
6.2. Сведения о влиянии различных факторов на величины пределов выносливости



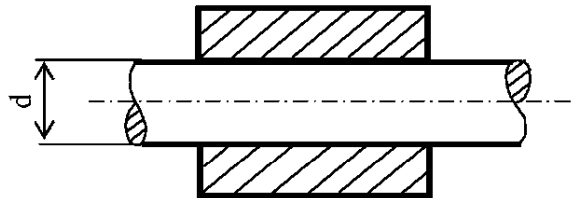
Эффективный коэффициент концентрации
Изгиб



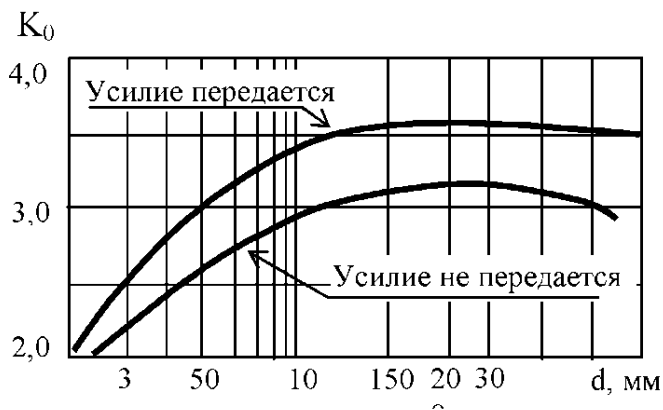
Кручение



НАПРЕССОВКА

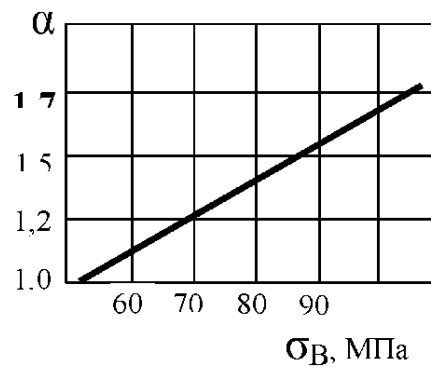


Эффективный коэффициент концентрации
коэффициент



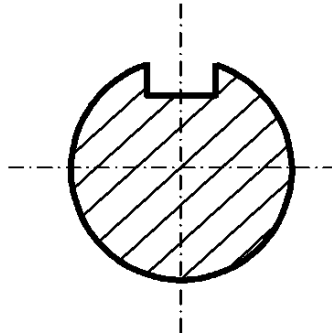
Поправочный

$$K = \alpha K_0$$

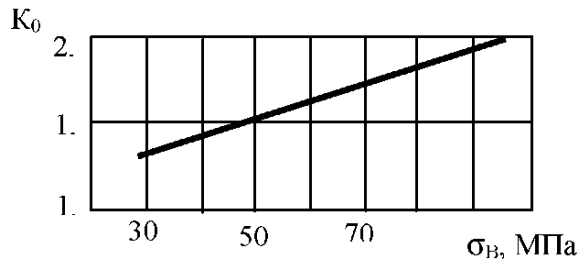


6.2. Сведения о влиянии различных факторов на величины пределов выносливости (продолжение 1)

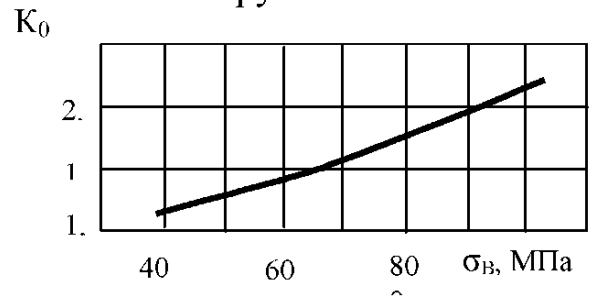
ШПОНОЧНЫЙ ПАЗ



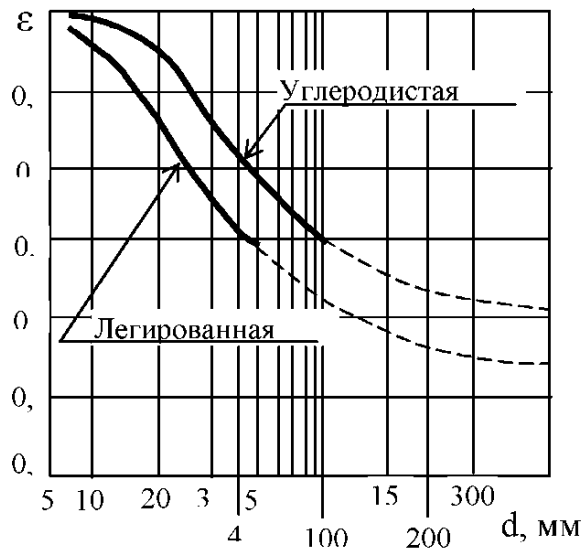
Изгиб



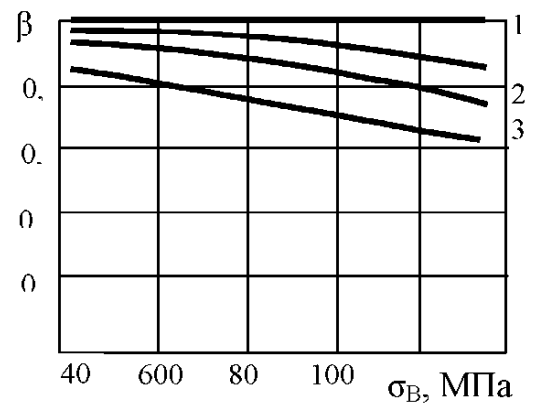
Кручение



Масштабный фактор



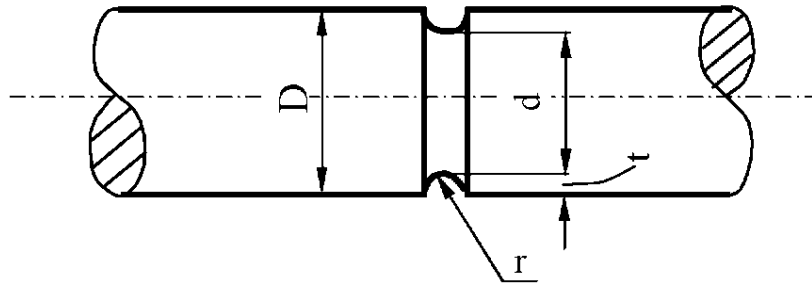
Поверхностный фактор



- 1 – тщательное полирование
- 2 – грубое полирование
- 3 – тонкое шлифование
- 4 – грубое шлифование

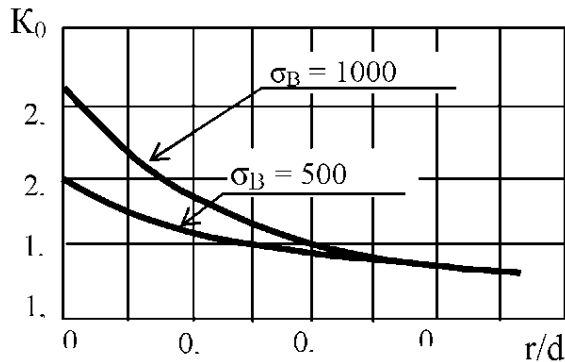
6.2. Сведения о влиянии различных факторов на величины пределов выносливости (продолжение 2)

ПРОТОЧКА

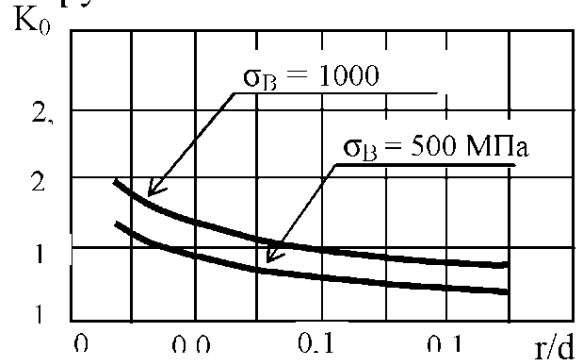


Эффективный коэффициент концентрации

Изгиб



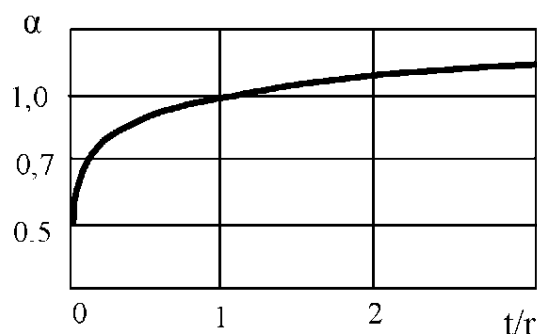
Кручение



для $t/r = 1$

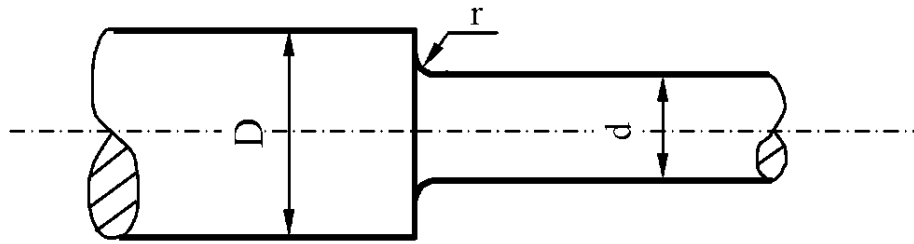
Поправочный коэффициент

$$K = 1 + \alpha(K_0 - 1)$$

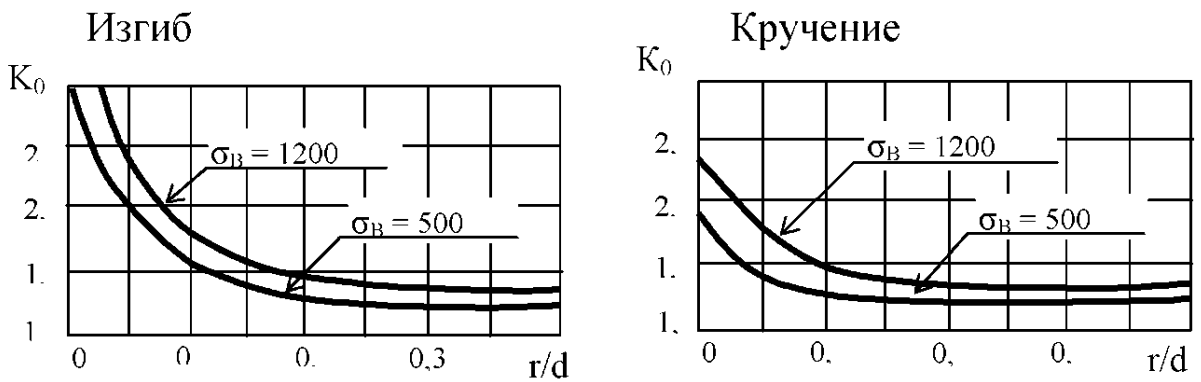


6.2. Сведения о влиянии различных факторов на величины пределов выносливости (продолжение 3)

ГАЛТЕЛЬ

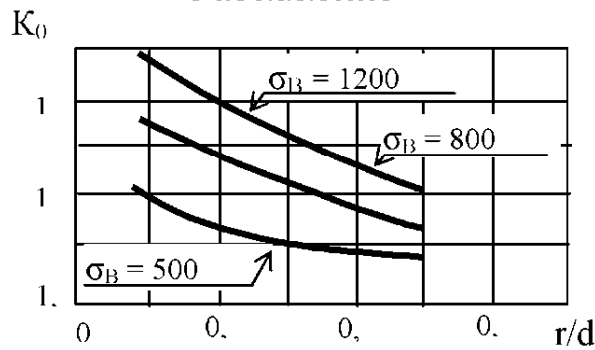


Эффективный коэффициент концентрации

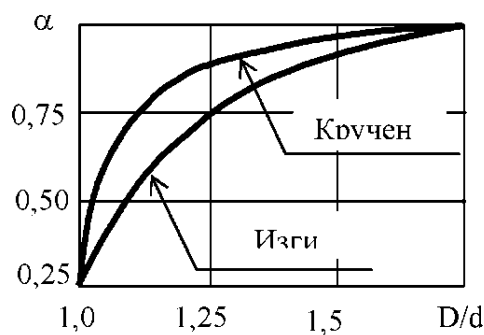


Растяжение

Для $D/d = 2$



Поправочный коэффициент



$$K = 1 + \alpha(K_0 - 1)$$