ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Методические указания к контрольным работам

1. *Сложное сопротивление.*

Под сложным сопротивлением подразумеваются различные комбинации простых напряженных состояний брусьев (стержней, балок) – растяжение (сжатие), изгиб, кручение.

В общем случае нагружения бруса в его поперечных сечениях действуют шесть внутренних силовых факторов –

N (продольная сила), Q_x , Q_y (поперечные силы), $M_к$ (крутящий момент), M_x , M_y (изгибающие моменты) (см. рис. 1).

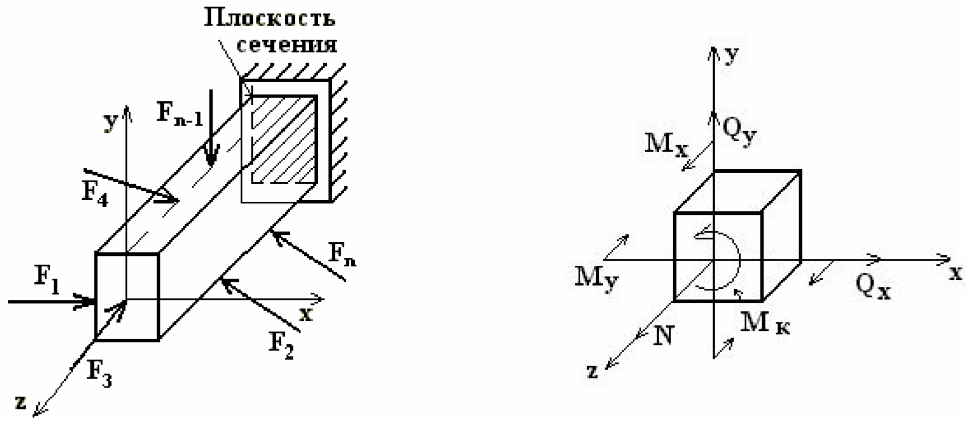


Рис. 1.

Совместное действие указанных силовых факторов приводит к напряженному состоянию, которое можно получить суммированием напряженных состояний, вызванных раздельным нагружением бруса.

Определив, таким образом, касательные и нормальные напряжения в отдельных точках поперечного сечения системы (наиболее нагруженных), по ним – главные нормальные напряжения, можно затем по одному из критериев прочности проверить на прочность стержень. Таким же способом могут быть найдены деформация или перемещения отдельных сечений бруса.

Так называемый принцип суперпозиции или принцип суммирования действия сил применим во всех случаях, когда деформации малы и подчиняются закону Гука. На практике одновременное действие всех названных силовых факторов встречается крайне редко. Чаще приходится иметь дело с более простыми комбинациями нагружений – косой изгиб, растяжение (сжатие) с изгибом, изгиб с кручением и т.д.

2. *Косой изгиб. Понятие о косом изгибе.*

Косым называют изгиб, при котором плоскость действия изгибающего момента, возникающего в сечении, не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса (при этом плоскость действия изгибающего момента обязательно должна проходить через центр тяжести сечения).

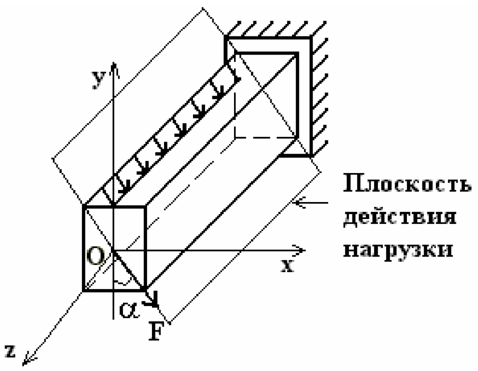


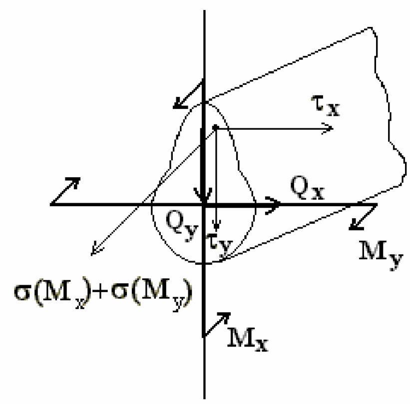
Рис. 2.

На рис. 2. OX, OY – главные центральные оси сечения.

Косой изгиб удобнее всего рассматривать как одновременный изгиб в двух плоскостях OYZ и OXZ. Тогда получим две системы сил, лежащих в плоскостях OXZ и OYZ, каждая из которых вызывает прямой изгиб. В этом случае в сечении бруса возникает четыре внутренних силовых фактора: Q_x, Q_y, M_x и M_y.

3. Определение напряжений при косом изгибе.

Рассмотрим стержень произвольного поперечного сечения, испытывающий деформацию косого изгиба (рис. 3).



$$M_x \neq 0$$
$$M_y \neq 0$$
$$Q_x \neq 0$$
$$Q_y \neq 0$$

Рис. 3.

В произвольной точке К возникают нормальные (σ) и касательные (τ) напряжения. Касательные напряжения при косом изгибе чаще всего малы (но их можно подсчитать по формуле Журавского). Поэтому расчет на прочность при косом изгибе ведется, как правило, только по нормальным напряжениям.

Нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня определяют на основе принципа независимости действия сил по формуле:

$$\sigma = \pm\frac{M_x}{J_x}\cdot|y| \pm \frac{M_y}{J_y}\cdot|x|, \qquad (1)$$

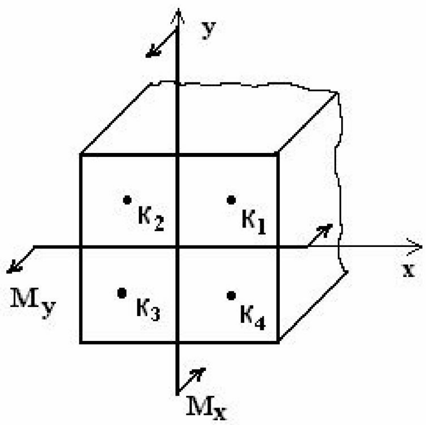
где M_x, M_y –изгибающие моменты,

J_x, J_y – моменты инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей,

x, y – координаты точки, где отыскивается напряжение.

Изгибающие моменты M_x и M_y в формуле берутся со знаком «+», если в точках первой четверти им соответствуют растягивающие нормальные напряжения, и со знаком «-», если сжимающие.

Например,



$$\sigma^{K_1} = +\frac{M_x}{J_x}|y_{K_1}| - \frac{M_y}{J_y}|x_{K_1}|;$$

$$\sigma^{K_2} = +\frac{M_x}{J_x}|y_{K_2}| + \frac{M_y}{J_y}|x_{K_2}|;$$

$$\sigma^{K_3} = -\frac{M_x}{J_x}|y_{K_3}| + \frac{M_y}{J_y}|x_{K_3}|;$$

$$\sigma^{K_4} = -\frac{M_x}{J_x}|y_{K_4}| - \frac{M_y}{J_y}|x_{K_4}|.$$

Рис. 4.

Условие прочности по нормальным напряжением имеет вид:

$$|\sigma_{max}| \le R \qquad (2)$$

4. Определение положения нейтральной линии при косом изгибе. Понятие силовой плоскости.

В точках нейтральной линии нормальные напряжения равны нулю ($\sigma = 0$). Уравнение нейтральной линии имеет вид:

$$\frac{M_x}{J_x}|y_N| + \frac{M_y}{J_y}|x_N| = 0 \qquad (3)$$

Из (3) видно, что координаты X_N и Y_N связаны линейно.

Следовательно, (3) уравнение прямой линии.

Координаты $X_N = 0$, $Y_N = 0$ удовлетворяют уравнению (3) $\Rightarrow$ нейтральная линия при косом изгибе проходит через центр тяжести сечения.

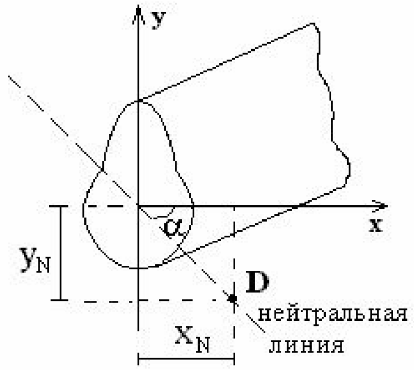


Рис. 5.

Точка $D(X_N ;Y_N)$ принадлежит нейтральной линии. Определим угол наклона нейтральной линии к оси X.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{Y_N}{X_N} \overset{(3)}{=} -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \qquad (4)$$

Силовая плоскость – это плоскость действия результирующего момента $M_{рез}$, φ - угол наклона силовой плоскости к вертикали.

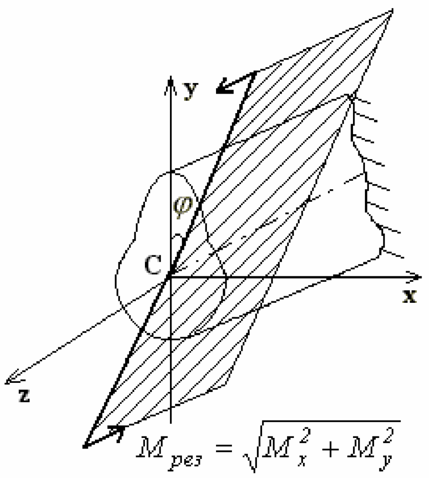


Рис. 6.

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{M_y}{M_x}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}\varphi \cdot \frac{J_x}{J_y} \qquad (5)$$

<u>Свойства нейтральной линии</u>

1. Если $J_x \neq J_y$, то $\alpha \neq \varphi$, то есть силовая плоскость и нейтральная линия не являются перпендикулярными.
2. Если $J_x = J_y$, то из (5) следует, что $\mathrm{tg}\alpha = -\mathrm{tg}\varphi$, то есть нейтральная линия и силовая плоскость перпендикулярны. В этом случае стержень испытывает плоский изгиб (примерами таких стержней являются стержни с сечением – круг, кольцо, квадрат).
3. Знак «минус» в формуле (5) указывает, что силовая плоскость и нейтральная линия при косом изгибе проходят через противоположные квадранты.

5. Вычисление наибольших нормальных напряжений при косом изгибе.

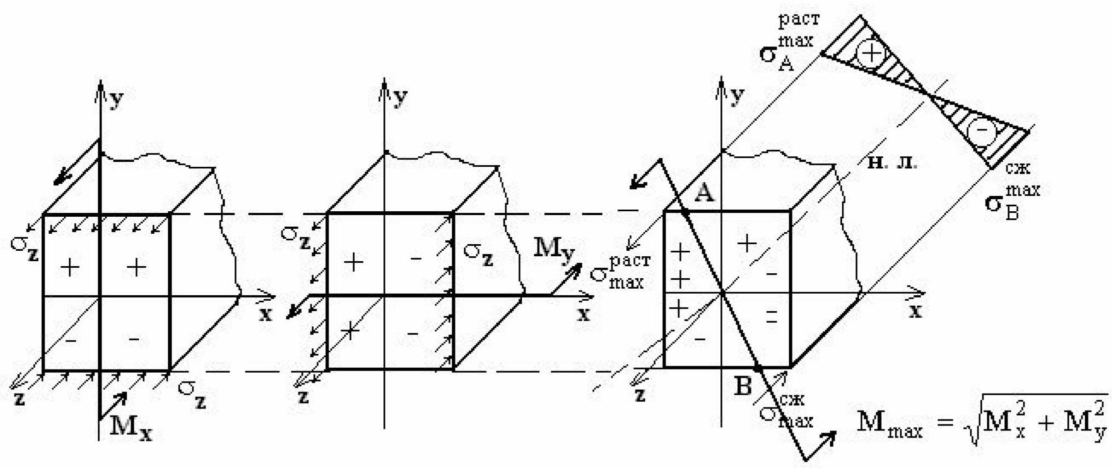


Рис. 7.

Пусть в плоскостях OZY и OXZ действуют изгибающие моменты соответственно M_x и M_y , которые создают растягивающие (+) и сжимающие (-) нормальные напряжения в сечении балки. Суммарные максимальные растягивающие $\sigma_{max}^{р}$ и сжимающие $\sigma_{max}^{сж}$ нормальные напряжения будут действовать в точках, максимально удаленных от нейтральной линии.

Условия прочности

$$\sigma_{max}^{раст} = \sigma_A \le R_{раст}$$

$$\sigma_{max}^{сж} = \sigma_B \le R_{сж}$$

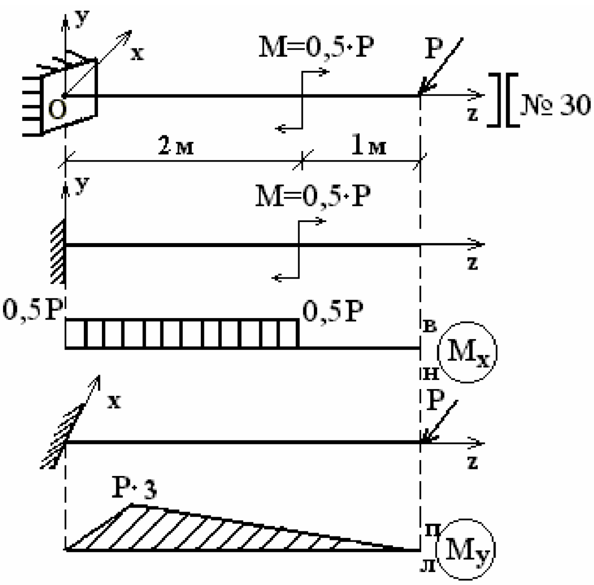
где $R_{раст}$ и $R_{сж}$ – расчетные напряжения и сжатия.

6. Пример расчета.

Пример 1.

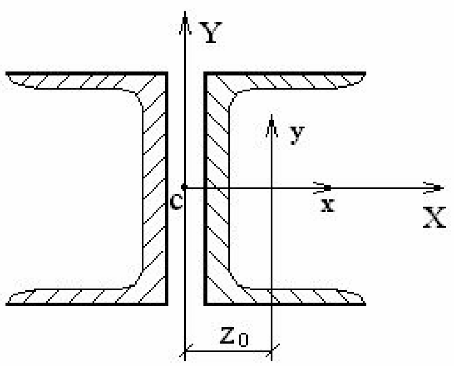
Для стальной балки требуется:

1) Определить положение нейтральной линии;
2) Построить эпюру нормальных напряжений в долях силы Р вдоль оси, перпендикулярной нейтральной линии;
3) Определить грузоподъемность балки, если R = 240 мПа.



Решение.

1) Определим геометрические характеристики сечения.



По таблице стандартных профилей находим

$J_x^{[№30} = 5810 см^4$

$J_y^{[№30} = 327 см^4$

$A^{[№30} = 40,5 см^2$

$z_0^{[№30} = 2,52 см$

x y – собственные оси швеллера.

X C Y – главная центральная система координат.

Ось x параллельна оси X, ось y параллельна оси Y.

Определим главные центральные моменты инерции относительно осей X и Y.

$J_x^{][} = 2 \cdot J_x^{[№30} = 2 \cdot 5810 см^4 = 11620 \cdot 10^{-8} м^4$.

$J_y^{][} = 2\left[J_y^{[№30} + \left(z_0^{[№30}\right)^2 A^{[№30}\right] = 2\left[327 + (2,52)^2 \cdot 40,5\right] \approx 1168 \cdot 10^{-8} м^4$.

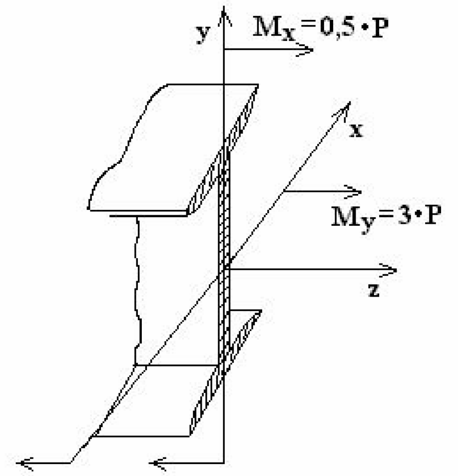
2) Рассмотрим плоскость OYZ (вертикальную плоскость) и построим эпюру M_x.

3) Рассмотрим плоскость OXZ (горизонтальную плоскость) и построим эпюру M_y.

4) Опасным является сечение в заделке, так как относительно этого сечения изгибающие моменты являются наибольшими.

$M_x = 0,5 \cdot P^в (кН \cdot м)$ (растянуто верхнее волокно).

$M_y = 3 \cdot P^п (кН \cdot м)$ (растянуто правое волокно).



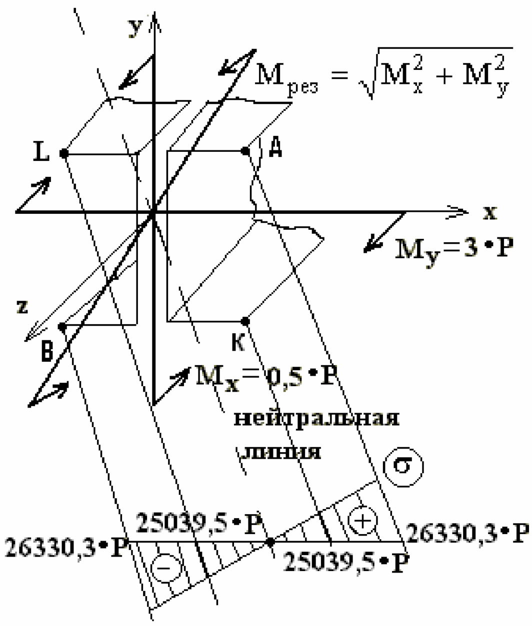


Рис. 8.

Силовая плоскость (плоскость действия результирующего момента $M_{рез} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$) проходит через I и III квадранты. Тогда нейтральная линия должна проходить через II и IV квадранты.

Воспользуемся формулой (4) и определим угол наклона нейтральной линии к оси X

$$tg\alpha = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} = -\frac{3P}{0,5P} \cdot \frac{11620 \cdot 10^{-8}}{1168 \cdot 10^{-8}} \approx -59,69$$

$$\alpha = arctg(-59,69),$$

$$\alpha \approx -89^0$$

Знак «минус» показывает, что угол α откладываем от оси X против хода часовой стрелки.

7) Определим координаты угловых точек сечения A, L, B, K в главной центральной системе координат XY

$A(X_A = 10;\quad Y_A = 15)$;

$L(X_L = -10;\quad Y_L = 15)$;

$B(X_B = -10;\quad Y_B = -15)$;

$K(X_K = 10;\quad Y_K = -15)$.

Подсчитаем напряжения в точках A, L, B, K.

$$\sigma_A = \frac{M_x}{J_x} \cdot Y_A + \frac{M_y}{J_y} \cdot X_A = \frac{0{,}5 \cdot P}{11620 \cdot 10^{-8}} \cdot 15 \cdot 10^{-2} + \frac{3 \cdot P}{1168 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} =$$

$$= 645{,}4 \cdot P - 25684{,}9 \cdot P \approx 26330{,}3 \cdot P\left(\frac{1}{м^2}\right)$$

$$\sigma_L = \frac{M_x}{J_x} \cdot Y_L + \frac{M_y}{J_y} \cdot X_L = \frac{0{,}5 \cdot P}{11620 \cdot 10^{-8}} \cdot 15 \cdot 10^{-2} + \frac{3 \cdot P}{1168 \cdot 10^{-8}} \cdot (-10) \cdot 10^{-2} =$$

$$= 645{,}4 \cdot P - 25684{,}9 \cdot P \approx -25039{,}5 \cdot P\left(\frac{1}{м^2}\right)$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{J_x} \cdot Y_B + \frac{M_y}{J_y} \cdot X_B = \frac{0{,}5 \cdot P}{11620 \cdot 10^{-8}} \cdot (-15) \cdot 10^{-2} + \frac{3 \cdot P}{1168 \cdot 10^{-8}} \cdot (-10) \cdot 10^{-2} =$$

$$= -645{,}4 \cdot P - 25684{,}9 \cdot P \approx -26330{,}3 \cdot P\left(\frac{1}{м^2}\right)$$

$$\sigma_K = \frac{M_x}{J_x} \cdot Y_K + \frac{M_y}{J_y} \cdot X_K = \frac{0{,}5 \cdot P}{11620 \cdot 10^{-8}} \cdot (-15) \cdot 10^{-2} + \frac{3 \cdot P}{1168 \cdot 10^{-8}} \cdot 10 \cdot 10^{-2} =$$

$$= -645{,}4 \cdot P - 25684{,}9 \cdot P \approx 25039{,}5 \cdot P\left(\frac{1}{м^2}\right)$$

Продлим нейтральную линию и на перпендикуляре построим эпюру напряжений.

8) Определим грузоподъемность балки

$|\sigma_{max}| = 26330{,}3 \cdot P.$

Условия прочности $|\sigma_{max}| \le R$

$$26330{,}3 \cdot P \le 240 мПа$$

$$P \le \frac{240}{26330{,}3}(Мн)$$

$$P \le 0{,}0091(Мн)$$

7. *Внецентренное действие продольных сил. Основные понятия. Расчет на прочность.*

Внецентренным растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения, при котором равнодействующая внешних сил не совпадает с осью стержня, как при центральном растяжении (сжатии), а смещена относительно продольной оси и остается ей параллельной (рис.9).

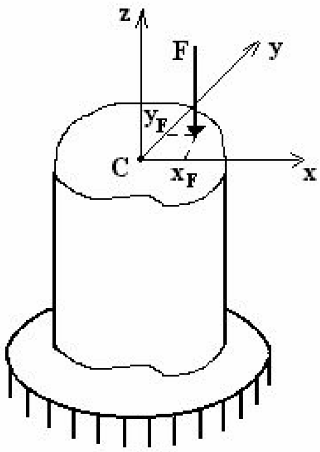


Рис.9. Внецентренное сжатие.

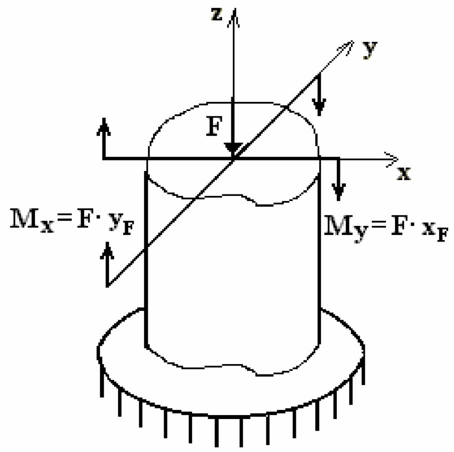


Рис.10.

X C Y – главная центральная система координат.

Если привести силу к оси бруса, то можно представить внецентренное растяжение (в данном примере рис.9 – сжатие), как сочетание центрального растяжения (сжатия) с чистым косым изгибом (Рис.10).

Внецентренное растяжение (сжатие) испытывают короткие стержни. Все сечения являются равноопасными, поэтому нет необходимости в построении эпюр внутренних силовых факторов.

Расчет на прочность при внецентренном растяжении (сжатии) производят по следующим формулам:

$$\sigma = \pm\frac{F}{A} \pm \frac{M_x \cdot y}{J_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{J_y} \qquad (6)$$

$$\sigma = \pm\frac{F}{A}\left[1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2}\right] \qquad (7)$$

В формуле (6):

x_F, y_F- координаты точки приложения силы в главной центральной системе координат;

x, y - координаты точки, в которой требуется подсчитать напряжение;

i_x, i_y - главные радиусы инерции поперечного сечения.

(Квадраты главных радиусов инерции определяются по формулам: $i_x^2 = \frac{J_x}{A}$, $i_y^2 = \frac{J_y}{A}$, где, J_x, J_y – главные центральные моменты инерции поперечного сечения.)

F – равнодействующая внешних сил;

A – площадь поперечного сечения.

При действии на стержень сжимающей силы в формуле (7) принимают знак (-), при действии на стержень растягивающей силы в формуле (7) принимают знак (+).

8. Определение положения нейтральной линии при внецентренном действии продольных сил.

Для нахождения опасной точки (наиболее напряженной точки) на сложном профиле надо построить нейтральную линию сечения. Опасной в сечении будет точка, наиболее удаленная от нейтральной линии.

Уравнение нейтральной линии получим, приравняв $\sigma = 0$ по формуле (7)

$$1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} = 0 \qquad (8)$$

где $i_y^2 = \frac{J_y}{A}$, $\quad i_x^2 = \frac{J_x}{A}$.

Нейтральная линия – прямая, ее точки пересечения с осями координат определяются выражениями:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad y = 0 \rightarrow a = -\frac{i_y^2}{x_F} \\ &\text{при} \quad x = 0 \rightarrow b = -\frac{i_x^2}{y_F} \end{aligned} \qquad (9)$$

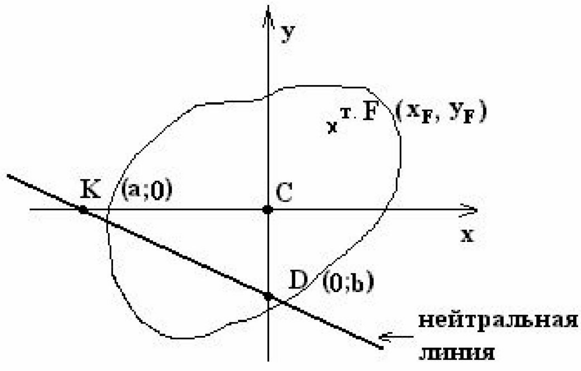


Рис.11.

Точки K, D – точки пересечения нейтральной линии с осями координат.

<u>*Свойства нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии):*</u>

- нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения.
- нейтральная линия и точка приложения силы находится в разных полуплоскостях относительно центра тяжести сечения.
- <u>Частный случай;</u> если точка приложения силы $F(x_F, y_F)$ лежит на оси x(y), то нейтральная линия проходит в противоположной полуплоскости параллельно оси y(x). (рис.4.).

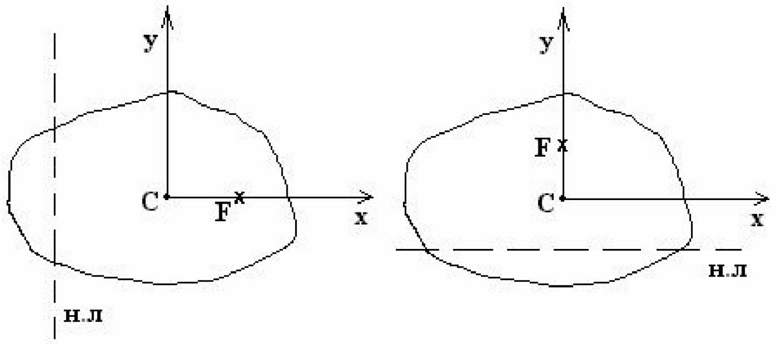


Рис.12.

9. Ядро сечения.

Известно, что строительные конструкции в большинстве своем изготавливаются из хрупких материалов (кирпич, бетон, железобетон). Эти материалы хорошо работают на сжатие и практически не терпят растягивающих усилий, поэтому при их использовании необходимо определить положение ядра сечения.

Ядро сечения – это такая зона приложения сжимающей внецентренной нагрузки, при действии которой все волокна стержня испытывают один вид деформации: сжатие.

По мере приближения точки приложения силы к центру тяжести поперечного сечения стержня (рис.13) нейтральная линия удаляется от центра тяжести.

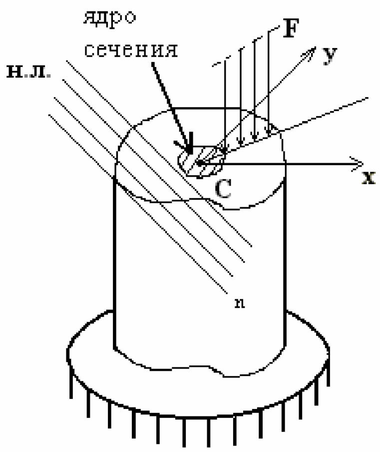


Рис.13.

В каком-то положении «n»-нейтральная линия занимает положение касательной к контуру сечения, то есть все сечение оказывается в зоне сжатия.

Перемещая точку приложения силы по всем направлениям от центра тяжести сечения, можно построить границу области (ядра сечения) предельных положений точки приложения силы, тогда в сечении нормальные напряжения будут одного знака.

Если внешний контур сечения, к которому можно провести касательные состоит из прямолинейных отрезков, то ядро сечения – многоугольник. Этот многоугольник имеет столько вершин, сколько касательных можно провести к контуру.

Если сечение симметрично относительно какой-нибудь оси, то ядро сечения тоже симметрично относительно этой оси.

10. Примеры расчетов.

Пример 2.

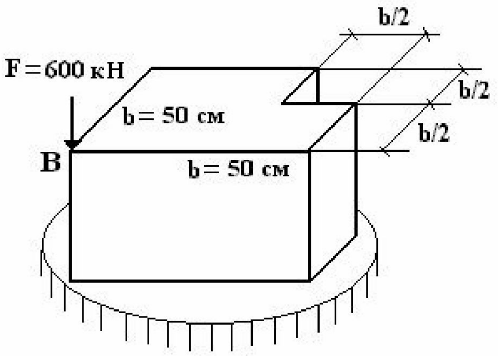
Чугунный короткий стержень сжимается продольной силой

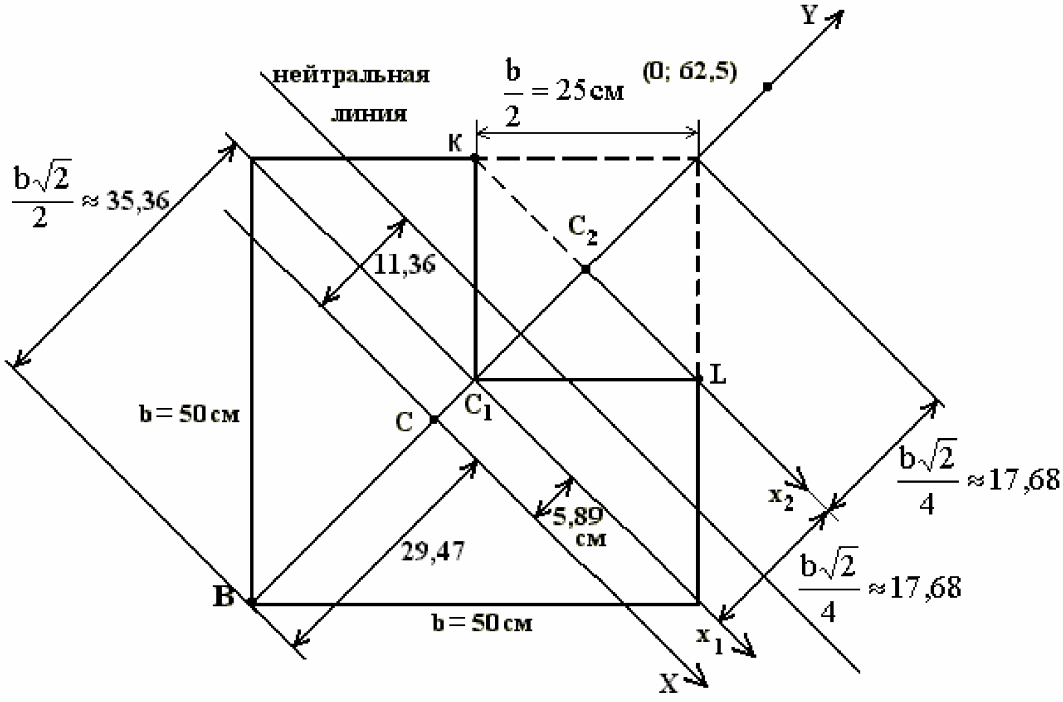
F = 600кН, приложенной в точке В.

Требуется:

1) Определить положение нейтральной линии;
2) Вычислить наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения.

Решение:





1) Изобразим сечение в масштабе.
2) Определим положение главных центральных осей. Сечение обладает осью симметрии, поэтому ось Y можем показать сразу. Определим положение центра тяжести фигуры. (фигура состоит из двух квадратов). Выберем произвольную вспомогательную систему координат.

   x_1 C_1 Y – вспомогательная система координат;

   определим координаты точек C_1 и C_2 в системе x_1 C_1 Y.

   $$C_1(x_1 = 0; y_1 = 0), \qquad C_2\left(x_2 = 0; y_2 = \frac{b\sqrt{2}}{4} \approx 17,68\right)$$

   Тогда,

   $$x_c = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A} = 0$$

   $$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A} = \frac{17,68 \cdot (-625)}{1875} = -5,89\text{см}$$

   A_1, A_2 – площадь первого и второго квадрата соответственно.

   $A = A_1 - A_2$ – площадь всей фигуры.

   $A_1 = b^2 = 2500\text{см}^2$

   $$A_2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 625\text{см}^2$$

   $$A = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2500 - 625 = 1875\text{см}^2$$

   $C(x_c = 0;\ y_c = -5,89)$ – положение центра тяжести во вспомогательной системе координат x_1 C_1 Y.

   Ось X проводим перпендикулярно оси Y через точку C.

Так как сечение симметричное, то X C Y – главная центральная система координат.

3) Определим главные центральные моменты инерции и квадраты главных радиусов сечения.

$$J_{Xc} = J_{Xc}^{(1)} - J_{Xc}^{(2)} = \frac{b^4}{12} - a_1^2 \cdot A_1 - \left(\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^4}{12} - (5{,}89 + a_2^2)^2 \cdot A_2 \right) =$$

$$= 520833{,}33 - 86725 - 32552{,}08 + 347212{,}5 \approx 748768{,}75\text{см}^4;$$

где $a_1 = 5{,}89$см – расстояние между осями X и x_1;
$a_2 = 5{,}89 + 17{,}68 = 23{,}57$ – расстояние между осями X и x_2.

$$J_{Yc} = J_{Yc}^{(1)} - J_{Yc}^{(2)} = \frac{b^4}{12} - \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^4}{12} = 520833{,}33 - 32552{,}08 \approx 488281{,}25\text{см}^4$$

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{748768{,}75\text{см}^4}{1875\text{см}^2} \approx 399{,}34\text{см}^2$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{488281{,}25\text{см}^4}{1875\text{см}^2} \approx 260{,}42\text{см}^2$$

4) Определим координаты точки B (точки приложения силы) в главной центральной системе координат x_c C y_c.

$$B\left(x_F = 0, \quad y_F = -\left(\frac{b\sqrt{2}}{2} - 5{,}89 \right) = -35{,}36 \right)$$

5) Определим положение нейтральной линии.

$$1 + \frac{x_F \cdot x_N}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_N}{i_x^2} = 0,$$ где x_N, y_N – координаты точек нейтральной линии.

В данной задаче

$$1 + \frac{-35{,}36 \cdot y_N}{399{,}34} = 0$$

$$1 - 0{,}088 \cdot y_N = 0$$

$$y_N = \frac{1}{0{,}088} \approx 11{,}36$$

Нейтральная линия проходит через точку (x_N=0; y_N=11,36) параллельно оси x_c.

6) В данной задаче на стержень действует сжимающая сила, поэтому нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения будем определять по формуле

$$\sigma = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right)$$

где x, y – это координаты точки, в которой считают напряжения.

7) Наибольшие сжимающие напряжения достигаются в точке B. Эта точка, наиболее удаленная от нейтральной линии в области сжатия.

$$\sigma_{max}^{сж} = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F \cdot x_B}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_B}{i_x^2}\right) =$$

$$= -\frac{600(кН)}{1875 \cdot 10^{-4}(м^2)}\left(1 + \frac{(-29,47)(-29,47)}{399,34}\right) \approx -10,2мПа$$

Наибольшее растягивающие напряжения достигаются в точках K и L
$y_K = y_L = 23,57$см.

$$\sigma_{max}^{раст} = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F \cdot x_L}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_L}{i_x^2}\right) =$$

$$= -\frac{600(кН)}{1875 \cdot 10^{-4}(м^2)}\left(1 + \frac{(-29,47)(-23,57)}{399,34}\right) = -0,32 \cdot 10^4 \cdot (1 - 1,739) \approx$$

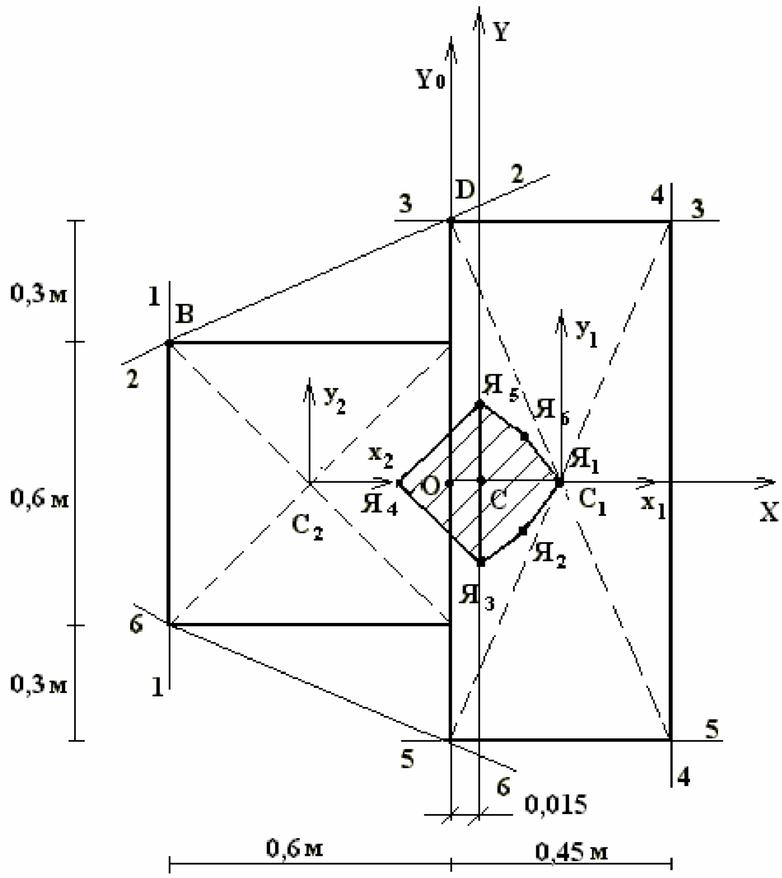
$$\approx 0,237 \cdot 10^4 кПа \approx 2,37мПа$$

Ответ: $\sigma_{max}^{раст} \approx 2,37мПа$

$\sigma_{max}^{сж} = -10,2мПа.$

Пример 3.

Построить ядро сечения.



Решение:

1) Определяем тип контура ядра сечения.
2) Определяем число вершин многоугольника, получившегося внутри контура (то есть число предельных касательных к сечению стержня).

   6 предельных касательных $\Rightarrow$ 6 вершин.
3) Определяем положение главных центральных осей. Сечение обладает горизонтальной осью симметрии, поэтому ось «X» можем показать сразу. XOY_0 – вспомогательная система координат. (ось «Y_0» проводим произвольно).

   Сечение состоит из двух простых фигур (прямоугольника и квадрата). Определим координаты центров тяжести C_1 и C_2 в произвольной системе координат XOY_0.

   $C_1(x_1 = 0{,}225;\ y_1 = 0)$ - центр тяжести прямоугольника.

   $C_2(x_2 = -0{,}3;\ y_2 = 0)$ - центр тяжести квадрата.

   $A_1 = 0{,}45 \cdot 1{,}2 = 0{,}54(м^2)$ - площадь прямоугольника.

$A_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36(м^2)$ - площадь квадрата.

$$x_c = \frac{x_1A_1 + x_2A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0{,}225 \cdot 0{,}54 + (-0{,}3) \cdot 0{,}36}{0{,}54 + 0{,}36} = \frac{0{,}1215 - 0{,}108}{0{,}9} = 0{,}015(м).$$

$$y_c = \frac{y_1A_1 + y_2A_2}{A_1 + A_2} = 0 \text{ (так как } C_1 \text{ и } C_2 \text{ лежат на оси).}$$

Центр тяжести всего сечения в системе координат XOY_0 имеет координаты C(0,015; 0). (Покажем на чертеже).

Ось Y проводим перпендикулярно оси Y_0 через центр тяжести C.

Так как сечение симметричное, то ось симметрии и ось ей перпендикулярная, проходящая через центр тяжести образуют главную центральную систему координат.

X, Y – главные центральные оси сечения.

4) Определяем геометрические характеристики сечения относительно главных центральных осей.

Вычисляем главные центральные моменты инерции J_x и J_y.

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)}; \qquad J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)}.$$

$J_x^{(1)}, J_y^{(1)}$ - главные центральные моменты инерции прямоугольника.

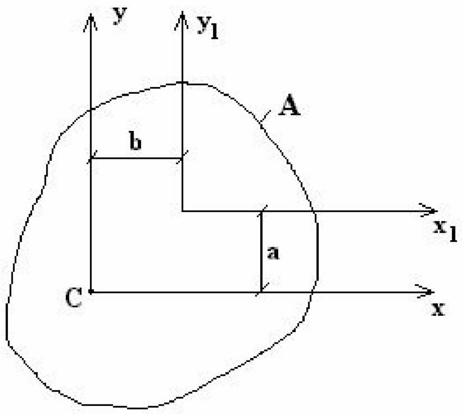
$J_x^{(2)}, J_y^{(2)}$ - главные центральные моменты инерции квадрата.

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} = \frac{0{,}45 \cdot 1{,}2^3}{12} + \frac{0{,}6 \cdot 0{,}6^3}{12} = 0{,}0648 + 0{,}0108 \approx 0{,}0756\left(м^4\right)$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = \left[\frac{1{,}2 \cdot 0{,}45^3}{12} + (0{,}225 - 0{,}015)^2 \cdot 0{,}54\right] +$$

$$+\left[\frac{0{,}6 \cdot 0{,}6^3}{12} + (0{,}3 + 0{,}015)^2 \cdot 0{,}36\right] \approx$$

$$\approx 0{,}0794\left(м^4\right)$$



(здесь использовали формулы для определения моментов инерции относительно параллельных осей. Осевые моменты инерции плоского сечения относительно произвольных осей x_1 и y_1, параллельных центральным осям x и y, определяют по формулам

$$J_{X_1} = J_X + a^2A,$$

$$J_{Y_1} = J_Y + b^2A;$$

где a, b – расстояния между осями x и x_1, y и y_1, A – площадь поперечного сечения. принимается, что x, y – центральные оси, то есть оси, проходящие через центр тяжести C плоского сечения).

Вычислим квадраты главных радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{0{,}0756}{0{,}54 + 0{,}36} = \frac{0{,}0756}{0{,}9} \approx 0{,}084\left(м^2\right)$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{0{,}0794}{0{,}54 + 0{,}36} = \frac{0{,}0794}{0{,}9} \approx 0{,}088\left(м^2\right)$$

5) Определяем вершины ядра сечения.

Пусть известно положение нейтральной линии. Требуется определить координаты точки приложения силы.

1. Рассмотрим положение нейтральной линии 1 – 1.

$Я_1(x_F - ?\ y_F - ?)$

Используем свойство нейтральной линии. Так как нейтральная линия 1 – 1 проходит параллельно оси Y, то точка приложения силы $Я_1$ находится на оси X, то есть $y_F = 0$.

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_N} = -\frac{0{,}088}{(-0{,}615)} \approx 0{,}14(м)$$

x_N – абсцисса точки нейтральной линии 1 – 1 (расстояние от точки C до нейтральной линии 1 – 1).

$Я_1(x_F = 0{,}14;\ y_F = 0)$.

2. Рассмотрим положение нейтральной линии 2 – 2.

$Я_2(x_F - ?\ y_F - ?)$

Возьмем две точки нейтральной линии 2 – 2 (лучше выбирать точки, где легко можно подсчитать координаты)

B(-0,615; 0,3) и D(-0,015; 0,6)

Подставим координаты точек B и D в уравнение нейтральной линии.

$$1 + \frac{x_F \cdot x_B}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_B}{i_x^2} = 0 \qquad (*)$$

$$1 + \frac{x_F \cdot x_D}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_D}{i_x^2} = 0 \qquad (**)$$

Решим систему уравнений (*) – (**)

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{x_F \cdot (-0{,}615)}{0{,}084} + \dfrac{y_F \cdot 0{,}3}{0{,}088} = 0 & (*) \\ 1 + \dfrac{x_F \cdot (-0{,}015)}{0{,}084} + \dfrac{y_F \cdot 0{,}6}{0{,}088} = 0 & (**) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - x_F \cdot 7{,}32 + y_F \cdot 3{,}41 = 0 & (*) \\ 1 - x_F \cdot 0{,}19 + y_F \cdot 6{,}82 = 0 & (**) \end{cases}$$

Из (*) $\Rightarrow$ $\quad -x_F \cdot 7{,}32 = -1 - y_F \cdot 3{,}41$

$$x_F = \frac{1 + y_F \cdot 3{,}41}{7{,}32}$$

$$x_F \approx 0{,}14 + y_F \cdot 0{,}47 \qquad (***)$$

Подставим (***) в (**)

$$1 - (0{,}14 + y_F \cdot 0{,}47) \cdot 0{,}19 + y_F \cdot 6{,}82 = 0$$

$$1 - 0{,}0266 - y_F \cdot 0{,}0893 + y_F \cdot 6{,}82 = 0$$

$$0{,}9734 + 6{,}7307 \cdot y_F = 0$$

$$y_F = -\frac{0{,}9734}{6{,}7307} \approx -0{,}145$$

$$x_F = \frac{1 + (-0{,}145) \cdot 3{,}41}{7{,}32} \approx 0{,}07$$

$$Я_2(x_F = 0{,}07; \quad y_F = -0{,}145)$$

3. Рассмотрим положение нейтральной линии 3 – 3.

   $Я_3(x_F - ?\ y_F - ?)$

   Используем свойство нейтральной линии. Так как нейтральная линия 3 – 3 проходит параллельно оси X, то точка приложения силы $Я_3$ находится на оси Y, то есть $x_F = 0$.

   $$y_F = -\frac{i_x^2}{y_N} = -\frac{0{,}084}{0{,}6} = -0{,}14$$

   y_N – ордината точки нейтральной линии 3 – 3 (расстояние от точки C до нейтральной линии 3 – 3).

   $Я_3(x_F = 0; \quad y_F = -0{,}14)$.

4. Рассмотрим положение нейтральной линии 4 – 4.

   $Я_4(x_F - ?\ y_F - ?)$

   Используем свойство нейтральной линии. Так как нейтральная линия 4 – 4 проходит параллельно оси Y, то точка приложения силы $Я_4$ находится на оси X, то есть $y_F = 0$.

   $$x_F = -\frac{i_y^2}{x_N} = -\frac{0{,}088}{0{,}435} \approx -0{,}2$$

   $Я_4(x_F = -0{,}2; \quad y_F = 0)$.

5. Далее воспользуемся симметрией сечения и достроим точки $Я_5$ и $Я_6$ симметрично точкам $Я_3$ и $Я_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов. 3-е изд. – М.: Высш. шк., 1999. – 592 с.
2. Куриленко Е.Ю., Суворова Е.Н. Краткий справочник по сопротивлению материалов. – Тюмень. ТюмГАСА, 2001г.
3. Пирогов Е.Н., Гольцев В.Ю. Сопротивление материалов: Конспект лекций. – М.: Айрис - пресс, 2003 – 176 с.
4. Пономарев А.Т., Зорин В.А. Сопротивление материалов. Курс лекций. Учеб. пособие – М.: Приор - издат, 2002 – 336 .
5. Сапунов В.Г. Классический курс сопротивления материалов в решениях задач. Учеб. пособие – М.: Эдиториал УРСС, 2002 – 160 с.
6. Сопротивление материалов. Учеб. пособие / под ред. Н.А. Костенко. – М.: Высш. шк., 2000 – 430 с.

СОДЕРЖАНИЕ