ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ: ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ, РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, ЗАДАНИЯ

Учебно-практическое пособие с заданиями

На современном уровне изложены вопросы прочностного расчета отдельного стержня и стержневых систем при центральном растяжении и сжатии. Рассмотрены задачи определения продольных сил, напряжений, деформаций, перемещений с традиционными приемами оценки прочности. Изложены особенности и расчет статически неопределимых систем. Приведены расчетные задания и вопросы для самоконтроля, а также примеры выполнения расчетно-графических работ. Изложение материала и решение задач с методическими указаниями, а также расчетные задания и вопросы для самоконтроля дают возможность студентам самостоятельно изучить материал без помощи преподавателя.

Для студентов высших технических учебных заведений, обучающихся по направлению «Строительство».

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная практика ставит перед специалистами с техническим образованием много задач, связанных с расчетами на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и сооружений того или иного типа. Для успешного решения подобных проблем студенты должны глубоко освоить основы прочностных расчетов. В дисциплине «Сопротивление материалов» излагаются основные понятия и принципы расчета отдельных наиболее распространенных элементов конструкций.

Цель настоящего пособия — оказать помощь студентам в освоении теоретических и практических основ прочностного расчета элементов строительных конструкций при растяжении и сжатии, а также дать возможность организовать самостоятельную работу над программным материалом.

Использование данного пособия предполагает предварительное изучение темы по учебнику, хотя в пособии даются краткие теоретические сведения, вполне достаточные для решения задач. Расчетные формулы даны без выводов, но с необходимыми пояснениями. Приведены решения тестовых задач с методическими указаниями.

В прил. 1 и 2 помещены варианты заданий для расчетно-графических работ.

1. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ СТЕРЖНЕЙ. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

1.1. Общие сведения

Рассмотрим брус, находящийся под действием осевых внешних нагрузок. **Брус** — тело, у которого два размера малы по сравнению с третьем. **Ось бруса** — это линия, которая соединяет центры тяжести его поперечных сечений. Брус с прямолинейной осью называют **стержнем**.

В результате действия внешних нагрузок в сечениях бруса появляются дополнительные силы взаимодействия между его частями; по отношению к брусу они являются внутренними силами. Внутренние силы при центральном растяжении или сжатии приводятся к одному внутреннему усилию — продольной силе N, которая при известных внешних нагрузках и опорных реакциях может быть определена статически с помощью метода сечений.

Центральное (осевое) растяжение и сжатие имеет место в том случае, когда все действующие на брус внешние нагрузки, включая опорные реакции в связях или их равнодействующие, направлены вдоль оси бруса (осевые нагрузки).

Расчетные формулы для растянутых и сжатых стержней одинаковы и различаются только знаком продольного усилия. Будем считать положительной продольную силу, соответствующую растяжению стержня, а отрицательной — соответствующую сжатию. Для нормальных напряжений σ принимается аналогичное правило знаков.

1.2. Продольные силы при центральном растяжении и сжатии. Дифференциальные зависимости

Для установления закона изменения продольной силы N используется метод сечений. В пределах рассматриваемого участка стержня проводится сечение, отбрасывается одна из частей бруса и рассматривается равновесие оставшейся части под действием приложенных к ней нагрузки и продольной силы N.

Продольная сила в произвольном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части стержня на продольную ось z, направленную по нормали к сечению

$$N = \sum F_{iz}. \qquad (1)$$

Отметим, что при применении метода сечений следует для простоты вычислений отбрасывать ту часть бруса, к которой приложено бóльшее количество нагрузок.

Продольная сила N считается положительной при растяжении, т. е. когда она направлена от сечения, и отрицательной, если она вызывает сжатие и направлена к сечению.

В том случае, когда направление продольной силы заранее неизвестно, ее направляют от сечения. Если из условия равновесия продольная сила получается со знаком «плюс», то стержень испытывает растяжение, со знаком «минус» — сжатие.

Определив силы N в различных сечениях стержня, можно построить график изменения N, который называется эпюрой продольных сил. Откладывая значения продольных сил в пределах соответствующих участков, получаем эпюру N. Эпюру принято штриховать прямыми линиями, перпендикулярными продольной оси стержня.

Между продольной силой и распределенной нагрузкой имеется следующая дифференциальная зависимость:

$$\frac{\partial N}{\partial z} = -q. \qquad (2)$$

Формулу (2) можно использовать при контроле правильности построения эпюры N.

Из соотношения (2) следует:

1) на участке, где распределенная нагрузка отсутствует $q = 0$, продольная сила N постоянна;

2) на участке, где q = const, продольная сила N изменяется по линейному закону;

3) в сечении, где приложена сила F, на эпюре N имеется скачок, величина которого равна этой силе.

1.3. Напряжения в поперечных и наклонных сечениях стержня

Напряжение — внутреннее усилие, приходящееся на единицу площади сечения. На основании гипотезы плоских сечений при растяжении и сжатии все продольные волокна стержней испытывают одинаковые удлинения и укорочения.

При растяжении и сжатии нормальные напряжения σ распределены равномерно по поперечному сечению стержня, поэтому

$$\sigma = \frac{N}{A}, \qquad (3)$$

где A — площадь поперечного сечения.

Отметим, что формула (3) справедлива не для всех сечений. В сечениях стержня, близких к местам приложения сосредоточенных сил, нормальные напряжения распределены неравномерно.

Если сечение ослаблено, то площадь сечения нетто определяется по формуле

$$A_{\text{нт}} = A - A_{\text{осл}}.$$

Тогда нормальное напряжение определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{нт}}}. \qquad (4)$$

Во многих задачах возникает необходимость определения напряжений в наклонных сечениях. Нормальные и касательные напряжения в наклонных сечениях определяются по формулам

$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha; \tau_\alpha = -\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha, \tag{5}$$

где $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ — соответственно нормальное и касательное напряжения в наклонном сечении стержня; σ — нормальное напряжение в поперечном сечении стержня.

Из анализа формул (5) следует, что наибольшее нормальное напряжение всегда действует в поперечном сечении, т. е. при $\alpha = 0$ $\sigma_{max} = \sigma$, а наибольшее касательное напряжение действует на площадках, наклоненных под углом $\alpha = \pm 45°$ к площадкам $\tau_{max} = \sigma/2$.

1.4. Деформации и перемещения. Коэффициент Пуассона. Закон Гука

Под действием приложенных сил тела деформируются. При растяжении и сжатии стержня изменяется его длина и размеры поперечного сечения.

Изменение линейных размеров тела называется **линейной деформацией**, а изменение угловых размеров — **угловой деформацией**.

Удлинение — это увеличение линейных размеров тела, а укорочении — уменьшение линейных размеров тела.

Перемещение точки — расстояние между начальным положением точки (до приложения нагрузки) и ее положением после деформации, взятое в определенном направлении, например, вдоль оси стержня.

Введем понятие абсолютной и относительной деформации.

$\Delta l = l_1 - l$ — абсолютная продольная деформация (мм);

$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ — относительная продольная деформация;

$\Delta b = b_1 - b$ — абсолютная поперечная деформация (мм);

$\varepsilon'_b = \dfrac{\Delta b}{b}$ — относительная поперечная деформация;

$\Delta h = h_1 - h$ — абсолютная поперечная деформация (мм);

$\varepsilon'_h = \dfrac{\Delta h}{h}$ — относительная поперечная деформация.

Коэффициент Пуассона

Относительные поперечная и продольная деформации связаны между собой эмпирической зависимостью

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon, \tag{6}$$

где ν — коэффициент Пуассона, определяемый опытным путем.

$$\nu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|. \tag{7}$$

Знак «минус» показывает, что при растяжении стержня его длина увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются; при сжатии стержня его длина уменьшается, а поперечные размеры увеличиваются.

Поперечная деформация в пределах упругих деформаций по всем направлениям одинакова:

$$\varepsilon' = \varepsilon'_b = \varepsilon'_h .$$

Коэффициент Пуассона является упругой константой материала. При упругой деформации коэффициент $0 < \nu < 0{,}5$.

Закон Гука

В 1675 году в Англии была опубликована странная научная работа. В одной из глав не было никакого текста, за исключением 14 латинских букв, произвольно расположенных. Это была анаграмма, т. е. заявка на приоритет. Автор анаграммы Роберт Гук. Ее текст имел крайне лаконичную формулировку: «Каково удлинение, такова и сила».

Как установлено в многочисленных экспериментах, для большинства конструкционных материалов при малых деформациях между напряжениями и деформациями действительно существует эта зависимость.

Зависимость между нормальным напряжением и относительной деформацией ε в пределах упругих деформаций при растяжении и сжатии имеет вид (закон Гука)

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{8}$$

где E — модуль продольной упругости (модуль Юнга).

Отметим, что чем больше E, тем меньше упругие деформации материала при одном и том же напряжении.

Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν — константы материала, которые характеризуют упругие свойства материала.

Нормативные значения E и ν для некоторых наиболее распространенных строительных материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Физико-механические характеристики некоторых конструкционных материалов

Материал	Плотность ρ, кг/м^3	Модуль упругости E, МПа	Модуль сдвига G, МПа	Коэффициент Пуассона ν	Коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^{\ 7}$, °C$^{\ 1}$
Сталь	7850	$2{,}10 \cdot 10^5$	$0{,}80 \cdot 10^5$	0,3	120
Чугун	7200	$0{,}83 \cdot 10^5$	$0{,}45 \cdot 10^5$	0,23…0,27	114
Алюминий	2500…2700	$0{,}63 \cdot 10^5$	$2{,}60 \cdot 10^4$	0,32…0,36	230
Медь	8300…8900	$1{,}08 \cdot 10^5$	$3{,}90 \cdot 10^4$	0,31…0,34	170
Сосна:					
вдоль волокон	310…760	$0{,}10 \cdot 10^5$	$0{,}55 \cdot 10^3$	—	20…50
поперек волокон	310…760	$(0{,}5…1) \cdot 10^3$	—	—	20…50

Деформация стержня

На практике часто требуется найти продольную деформацию стержня под действием растягивающих или сжимающих нагрузок.

Подставив $\sigma = \dfrac{N}{A}$ и $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ в закон Гука (8), получим формулу для вычисления абсолютного удлинения или укорочения стержня при действии продольной силы N, удобную для практических расчетов

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \tag{9}$$

где EA — жесткость поперечного сечения стержня при растяжении и сжатии.

Эта формула справедлива в том случае, когда продольное усилие и площадь сечения постоянны по длине стержня.

Если по длине стержня площадь сечения постоянна, а продольная сила изменяется по какому-либо закону, то удлинение Δl определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{1}{E_i A_i} \int_0^l N(z)dz. \tag{10}$$

Для стержня ступенчато переменного сечения удлинения или укорочения вычисляются на каждом участке и полное удлинение определяется алгебраическим суммированием

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i\, l_i}{E_i A_i}, \tag{11}$$

где n — число участков; i — номер участка ($i = 1, 2, 3, ..., n$).

Условие жесткости для растянутых и сжатых стержней имеет вид

$$\Delta l \le [\Delta l];$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \le [\varepsilon], \tag{12}$$

где Δl — абсолютная деформация; ε — относительная деформация; $[\Delta l]$, $[\varepsilon]$ — допускаемые значения деформаций.

При растяжении (сжатии) поперечные сечения стержня перемещаются в продольном направлении. Перемещения являются следствием деформации.

Учет собственного веса. При учете собственного веса удлинение или укорочения стержня определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E},$$

где $\gamma = \rho g$ — объемный вес материала стержня; ρ — плотность материала; g — ускорение силы тяжести.

Температурные удлинения. При изменении температуры стержня на Δt градусов, возникает дополнительное температурное удлинение

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t; \tag{13}$$

где α — коэффициент линейного расширения материала стержня (см. табл. 1).

Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии. В случае стержня, растягиваемого сосредоточенной силой, удельная потенциальная энергия u, отнесенная к единице объема, вычисляется по формуле

$$u = \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \tag{14}$$

1.5. Расчеты на прочность

Сечения элементов конструкций должны быть определены так, чтобы в течение всего срока эксплуатации была исключена возможность разрушения и возникновения недопустимо больших деформаций конструкции при одновременном требовании экономии материалов.

Существует три метода расчета на прочность при центральном растяжении и сжатии стержней.

Метод допускаемых напряжений

Этот метод применяется при расчете машиностроительных конструкций.

При растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня условие прочности по нормальным напряжениям записывается в виде

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \tag{15}$$

где N — продольная сила по абсолютной величине; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

Метод предельных состояний

При расчете строительных конструкций применяется метод расчета по первой группе предельных состояний.

Первая группа предельных состояний определяется потерей несущей способности — прочности или устойчивости.

Сечение стержня, в котором действует наибольшее напряжение, называется **опасным сечением**.

При центральном растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня должны выполняться условия прочности.

Стальной элемент. Расчет на прочность стальных элементов, подверженных центральному напряжению и сжатию, следует выполнять по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \gamma_c R_y, \tag{16}$$

где σ — наибольшее напряжение в сечении; N — продольная сила в опасном сечении; A — площадь поперечного сечения стержня; γ_c — коэффициент условий работы, принимаемый по СНИПам или другим нормам; R_y — расчетное сопротивление стали растяжению, сжатию, изгибу по пределу текучести.

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то производится проверка прочности по наибольшему по абсолютной величине напряжению

$$R_t = R_c = R_y;$$

$$\sigma_{\text{нб}} \le \gamma_c R_y.$$

Условие прочности по касательным напряжениям записывается в виде

$$\tau \le \gamma_c R_s, \tag{17}$$

где R_s — расчетное сопротивление стали сдвигу.

Для пластических материалов расчетное сопротивление материалов сдвигу принимается $R_s \approx 0,6R_y$.

Бетонный элемент. Для центрально сжатых элементов условие прочности записывается в виде

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{N}{A_b} \le \alpha R_B, \tag{18}$$

где α — коэффициент, принимаемый для бетона тяжелого, мелкозернистого и легкого, равный 1,00; для ячеистого автоклавного — 0,85; для ячеистого неавтоклавного — 0,75.

Метод разрушающих нагрузок

Для конструкции, изготовленной из пластического материала, за разрушающую нагрузку принимается нагрузка, при которой в ее элементах возникают значительные пластические деформации. Конструкция не может воспринимать дальнейшее увеличение нагрузки.

Для конструкции, изготовленной из хрупкого материала, за разрушающую нагрузку принимается нагрузка, при которой в одном из ее элементов возникают напряжения, равные пределу прочности материала.

Определив величину разрушающей нагрузки, можно установить грузоподъемность стержня или стержневой системы по формуле

$$\left[F\right] = \frac{F_{\text{разр}}}{n}, \tag{19}$$

где $\left[F\right]$ — допускаемая нагрузка; n — коэффициент запаса прочности.

При расчете элементов конструкций, работающих на центральное растяжение и сжатие с использованием условий прочности, решаются следующие задачи: проверка прочности, подбор сечения и определение эксплутационной способности (предельного усилия).

Решение первой задачи. Оно сводится к проверке выполнения условий прочности при заданной нагрузке, форме, размерах сечений и свойствах материала (проверочный расчет)

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \gamma R. \tag{20}$$

Решение второй задачи. Сводится оно к определению размеров сечения заданной формы при заданных нагрузках и свойствах материала (проектный расчет).

Вначале определяется величина требуемой площади сечения, затем устанавливаются размеры сечения в зависимости от формы поперечного сечения

$$A_{tp} = \frac{N}{\gamma_c R}; \; A \leq A_{tp}. \tag{21}$$

Рассмотрим решение задач по определению размеров сечения заданной формы.

1. Прямоугольное сечение стержня с соотношением сторон $h/b = n$. Площадь сечения равна $A = bh = b^2 n = \dfrac{N}{\gamma_c R}$, откуда $b = \sqrt{\dfrac{N}{\gamma_c R n}}$ и $h = bn.$

2. Круглое сечение стержня. Определим диаметр d. Площадь сечения равна $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{N}{\gamma_c R}$, откуда $d = \sqrt{\dfrac{4N}{\gamma_c R \pi}}.$

3. Сортамент по ГОСТ. Двутавры, швеллеры и уголки определяются по величине площади сечения по таблицам сортамента.

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{N}{\gamma_c R}.$$

Решение третьей задачи. Определяется эксплуатационная способность (предельное усилие) стержня.

Определяется допускаемая продольная сила

$$[N] = A \cdot \gamma_c \cdot R. \tag{22}$$

Затем определяется соответствующая величина допускаемой нагрузки.

Условие прочности по наибольшим касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\text{нб}} \le \gamma_c R_s, \tag{23}$$

где R_s — расчетное сопротивление материала балки при сдвиге.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Нередко при решении задач необходимо знать и уметь применять на практике соотношения между единицами физических величин, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2

Соотношения между единицами физических величин

Наименование величины	Единицы измерения		Соотношение единиц
	Наименование	Обозначение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	1 Н ≈ 0,1 кгс; 1 кН = 10^3 Н
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	1 Н/м ≈ 0,1 кгс/м; 1 кН/м ≈ 0,1 тс/м
Поверхностная нагрузка, напряжение, модуль упругости, модуль сдвига	Паскаль (ньютон на квадратный метр)	Па	1 Па ≈ 0,1 кгс/м^2; 1 кПа ≈ 0,1 тс/м^2; 1 МПа ≈ 10 кгс/см^2

Рассмотрим примеры определения продольных сил, нормальных напряжений и перемещений и построения их эпюр для брусьев в статически определимых задачах.

Пример 1

По оси двухступенчатого бруса приложены силы F_1 = 30 кН, F_2 = 80 кН. Соответствующие площади поперечных сечений равны: A_1 = 2 см^2, A_2 = 4 см^2. Определить опорную реакцию R_0, продольные силы и нормальные напряжения в сечениях 1-1, 2-2 и 3-3 для бруса, изображенного на рис. 1, *а*.

Решение. На схеме показываем координатную ось z с началом в сечении жесткой заделки.

Из уравнения равновесия определяем опорную реакцию R_0.

$\sum F_z = 0;\ R_0 - F_2 + F_1 = 0$, откуда $R_0 = 80 - 30 = 50$ кН.

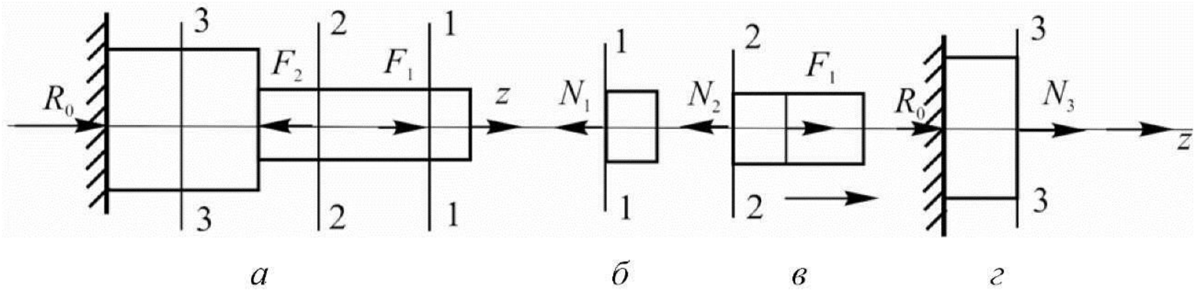


Рис. 1

Используя метод сечений, определяем в сечении 1-1 продольную силу. Продольную силу направим от сечения (рис. 1, *б*) и рассмотрим равновесие части бруса, расположенного правее сечения.

$\sum F_z = 0;\ -N_1 = 0.$

Откуда $N_1 = 0$.

Для вычисления нормального напряжения в поперечном сечении используем формулу (3)

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1},$$

откуда $\sigma = 0$.

Определяем в сечении 2-2 продольную силу и нормальное напряжение. Отбросим левую часть, ее действие заменим продольной силой N_2 (рис. 1, *в*).

Запишем уравнение равновесия

$\sum F_z = 0;\ -N_2 + F_1 = 0.$

Откуда $N_2 = 30$ кН (растяжение).

Вычисляем нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{N_2}{A_1} = \frac{30}{2} = 15\ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 150\ \text{МПа}.$$

Определяем в сечении 3-3 продольную силу и нормальное напряжение. Отбросим правую часть, ее действие заменим продольной силой N_3 (рис. 1, *г*).

Уравнение равновесия:

$\sum F_z = 0;\ N_3 + R_0 = 0;\ N_3 = -50$ кН (сжатие).

Вычисляем нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{N_3}{A_2} = -\frac{50}{4} = -12{,}5 \text{ кН / см}^2 = -125 \text{ МПа}.$$

Пример 2

Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений для бруса, изображенного на рис. 2, *а*. Определить полную деформацию.

Собственный брус учитывать не будем. По оси двухступенчатого бруса приложены силы F_1 = 50 кН, F_2 = 120 кН, F_3 = 100 кН. Соответствующие площади поперечных сечений и длины участков: A_1 = 10 см^2, A_2 = 20см^2, l_1 = 20 см, l_2 = 30 см, l_3 = 20 см. Принять $E = 210 \cdot 10^2$ кН/см^2.

Решение. Для определения продольных сил разбиваем брус на три участка. Отметим, что продольные силы в сечениях можно найти без определения опорной реакции, рассматривая равновесие отсеченных частей со стороны свободного края бруса.

На схеме показываем ось *z* с началом в нижнем сечении.

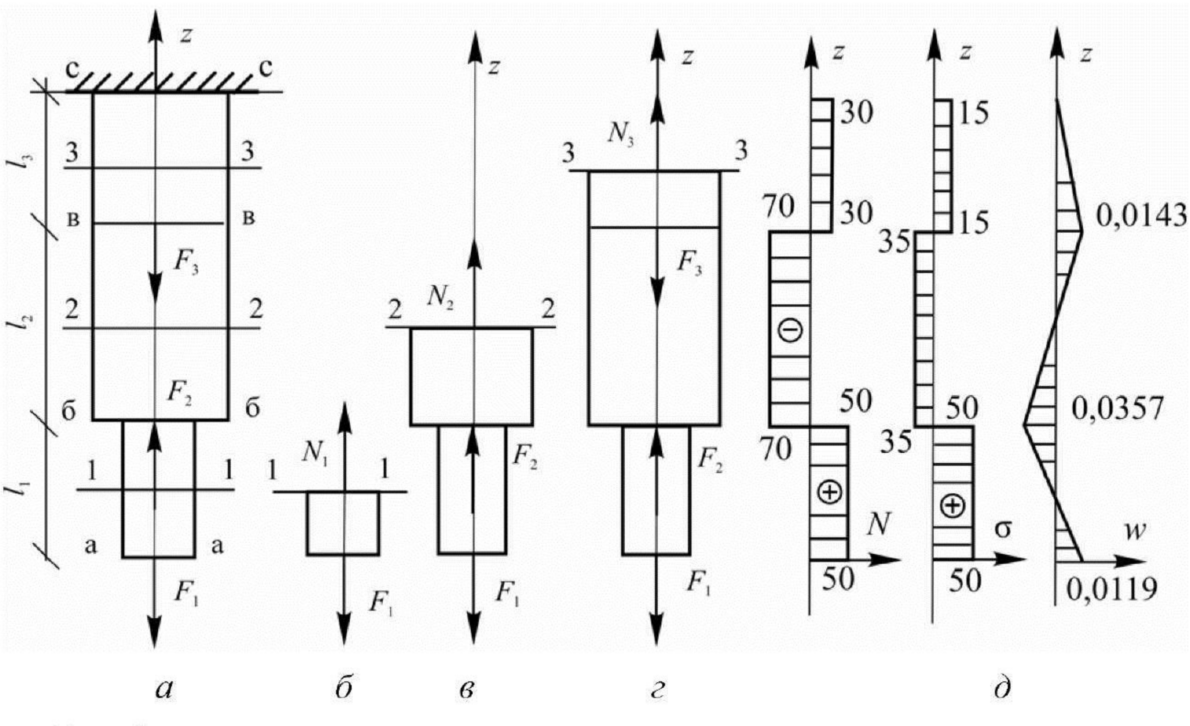


Рис. 2

У ч а с т о к 1. $0 \le z \le 20$ см. Проводим сечение 1-1 (рис. 2, *б*) и отбрасываем верхнюю часть бруса, заменяя действие отброшенной части продольной силой N_1.

Запишем уравнение равновесия

$\sum F_z = 0$; $N_1 = F_1 = 0$; N_1= 50 кН = const (растяжение).

Вычисляем нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{50}{10} = 5 \text{ кН/см}^2 = 50 \text{ МПа}.$$

У ч а с т о к 2. 20 см $\le z \le$ 50 см. Проводим сечение 2-2 (рис. 2, *б*) и отбрасываем верхнюю часть бруса, заменяя действие отброшенной части продольной силой N_2.

Запишем уравнение равновесия

$\sum F_z = 0$; $N_2 + F_2 - F_1 = 0$; N_2 = –120 + 50 = –70 кН = const (сжатие).

Вычисляем нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{70}{20} = -3{,}5 \text{ кН/см}^2 = -35 \text{ МПа} = \text{const}.$$

У ч а с т о к 3. 50 см $\le z \le$ 70 см. Проводим сечение 3-3 (рис. 2, *в*) и отбрасываем верхнюю часть бруса, заменяя действие отброшенной части продольной силой N_3.

Запишем уравнение равновесия

$\sum F_z = 0$; $N_3 + F_2 - F_1 - F_3 = 0$; N_3 = –120 + 50 + 100 = 30 кН =
= const (растяжение).

Вычисляем нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{N_3}{A_2} = \frac{30}{20} = 1{,}5 \text{ кН/см}^2 = 15 \text{ МПа} = \text{const}.$$

Продольные силы и нормальные напряжения на участках постоянны по величине.

Откладывая в масштабе значения продольных сил и нормальных напряжений в переделах соответствующих участков, получаем эпюры продольных сил и нормальных напряжений (рис. 2, *г*, *д*).

Эпюра нормальных напряжений показывает, что наибольшее значение нормальные напряжения достигают в пределах первого участка

$\sigma = 50$ МПа.

Отметим, что в сечениях, где приложены сосредоточенные силы F_1, F_2, F_3, на эпюре N имеются скачки, величина которых равна этим силам.

При проектировании и расчетах конструкций при растяжении-сжатии, наряду с вычислением продольных сил, напряжений, возникает необходимость определять деформации (перемещения) отдельных точек и узлов конструкций.

Перемещение и деформация — эти два понятия необходимо четко разграничивать. Часть стержня может деформироваться, а другая часть бруса как абсолютно твердое тело может перемещаться на размер деформации первой части стержня.

Умение вычислять удлинения и перемещения стержней при растяжении и сжатии важно при монтаже конструкций, а также при решении статически неопределимых задач. Способ вычисления деформаций (перемещений) рассмотрим далее.

Определяем удлинения (укорочения) участков стержня по формуле (9).

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{50 \cdot 20}{210 \cdot 10^2 \cdot 10} = 0{,}00476 \text{ см} = 0{,}0476 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{70 \cdot 30}{210 \cdot 10^2 \cdot 20} = -0{,}005 \text{ см} = -0{,}0500 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{30 \cdot 20}{210 \cdot 10^2 \cdot 20} = 0{,}00143 \text{ см} = 0{,}0143 \text{ мм}.$$

Знак «+» означает, что участок удлиняется, а знак «–» — укорачивается.

Полное удлинение стержня равно

$$\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \Delta l = 0{,}0476 - 0{,}05 + 0{,}0143 = 0{,}0119 \text{ мм}.$$

Определяем перемещения сечений а-а, б-б, в-в, с-с по отношению к жесткой заделке.

Сечение с-с. Перемещение заделки $w_{\text{с-с}} = 0$.

Сечение в-в. Перемещение $w_{\text{в-в}} = \Delta l_3 = 0{,}0143$ мм.

Сечение б-б. Перемещение $w_{\text{б-б}} = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0{,}0143 - 0{,}0500 = -0{,}0357$ мм.

Сечение а-а. Перемещение $w_{\text{а-а}} = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,0143 - 0,0500 + 0,0476 = 0,0119$ мм.

Эпюра перемещений построена на рис 2.2, *д*.

Пример 3

Определить продольную силу и нормальное напряжение в сечении жесткой заделки бруса, изображенного на рис. 3, с учетом собственного веса, для которого F = 50 Кн, A = 10 см^2, l = 40 см, собственный вес γ = 0,0078 кг/см^3 = 0,078·10^{-3} кН/см^3.

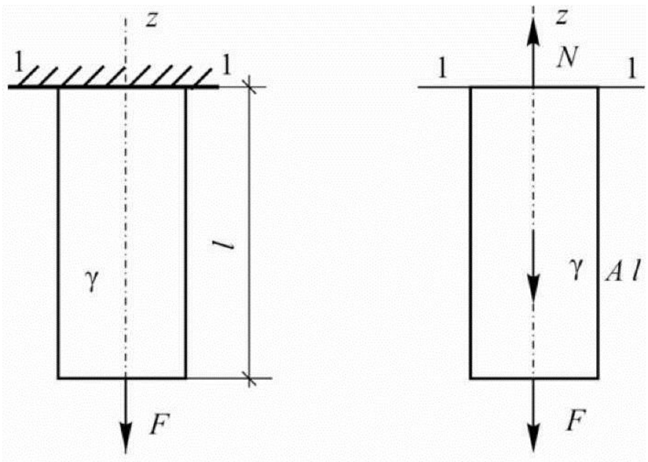


Рис. 3

Решение. Проводим в жесткой заделке сечение 1-1 и запишем уравнение равновесия

$$\sum F_z = 0;\ N - \gamma \cdot A \cdot l - F = 0,$$

откуда определяем продольную силу

$$N = 0{,}078 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 40 + 50 = 0{,}0312 + 50 = 50{,}03 \text{ кН}.$$

Нормальное напряжение в сечении равно

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{50{,}03}{10} = 5 \text{ кН/см}^2 = 50 \text{ МПа}.$$

Отметим, что собственный вес необходимо учитывать в случаях, когда собственный вес сравним с нагрузкой.

Рассмотрим примеры расчетов на растяжение и сжатие стержневых систем в статически определимых задачах.

Статически определимые стержневые системы — стержневые системы, усилия в которых можно определить с помощью только уравнений статики.

Пример 4

Для статически определимой стержневой системы (рис. 4) определить усилия и нормальные напряжения в стержнях BC и DC. Площадь поперечного сечения стержня BC $A_1 = 5$ см^2, стержня DC $A_2 = 6$ см^2.

Решение

1. Статическая часть задачи. Пользуясь методом сечений, вырежем узел C и составим для него уравнения равновесия. Усилия N_1 и N_2 направляем от узла C, считая их растягивающими. Силовая схема показана на рис. 4.

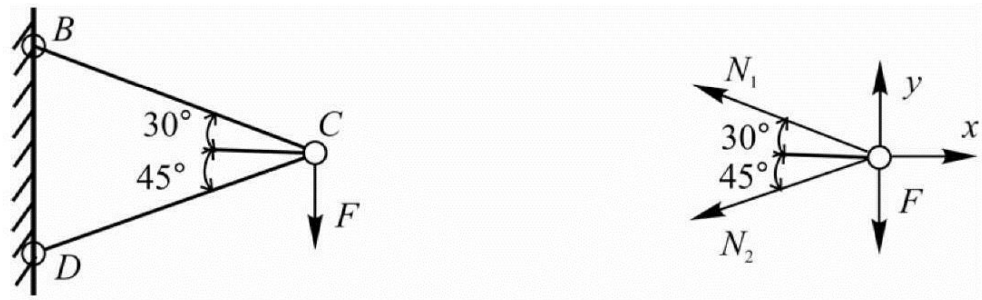


Рис. 4

Для плоской системы сходящихся сил статика дает только два уравнения равновесия

$$\sum F_x = -N_1 \cos 30° - N_2 \cos 45° = 0;$$

$$\sum F_y = N_1 \sin 30° - N_2 \sin 45° - F = 0;$$

$$\sum F_x = -N_1 \cdot 0,866 - N_2 \cdot 0,707 = 0;$$

$$\sum F_y = N_1 \cdot 0,5 - N_2 \cdot 0,707 - 100 = 0,$$

откуда

$N_1 = 73{,}18$ кН (растяжение),

$N_2 = -89{,}69$ кН (сжатие).

2. Определяем нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней.

Стержень BC. $\sigma = \dfrac{N_1}{A_1} = \dfrac{73,18}{5} = 14,64$ кН/см^2 $= 146,4$ МПа.

Стержень DC. $\sigma = \dfrac{N_2}{A_2} = -\dfrac{89,69}{6} = -14,95$ кН/см^2 $= -149,5$ МПа.

Пример 5

Жесткий брус *CD*, деформацией которого можно пренебречь, подвешен на двух стержнях длиной l = 2 м (рис. 5, *а*). Стержни выполнены из стали. Левый стержень диаметром d = 3 см, правый — квадратного сечения a = 3 см. К брусу в точке *B* приложена нагрузка F = 240 кН. Проверить прочность, если коэффициент условий работы γ_c = 1, а расчетное сопротивление R = 240 МПа. Определить удлинения стержней и вертикальное перемещение точки *B*.

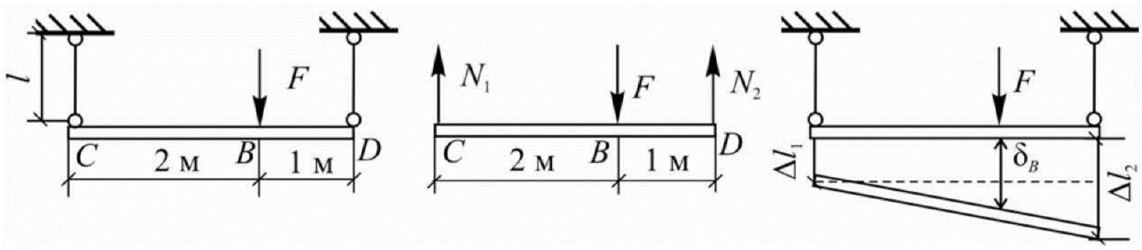


Рис. 5

Для проверки прочности необходимо определить нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней. Затем, используя условие прочности стержней работающих на растяжении, проверяется прочность.

Решение

1. Статическая часть. Определение усилий. Мысленно рассекаем систему на две части, отбрасываем верхнюю часть и прикладываем усилия N_1 и N_2, уравновешивающие нижнюю часть. Направление стрелок продольных усилий принимаем от бруса, т. е. считаем силы растягивающими (положительными). Силовая схема представлена на рис. 5, *б*.

Для равновесия плоской системы параллельных сил можно составить только два независимых уравнения равновесия

$$\sum M_C = N_2 \cdot 3 - F \cdot 2 = 0;$$

$$\sum M_D = -N_1 \cdot 3 + F \cdot 1 = 0.$$

Отсюда продольные силы в поперечных сечениях равны

$$N_2 = \frac{240 \cdot 2}{3} = 160 \text{ кН}; \; N_1 = \frac{240 \cdot 1}{3} = 80 \text{ кН}.$$

Проверка

$\sum F_y = N_1 + N_2 - F = 0$; 80 +!60 = 240.

Следовательно, усилия определены правильно.

2. Определяем нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней. Площади сечений первого и второго стержня равны

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2}{4} = 7{,}07\,\text{см}^2;\; A_2 = a^2 = 3^2 = 9\ \text{см}^2.$$

Тогда

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{80}{7{,}07} = 11{,}32\ \text{кН/см}^2 = 113{,}2\ \text{МПа};$$

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = \frac{160}{9} = 17{,}78\ \text{кН/см}^2 = 177{,}8\ \text{МПа}.$$

Проверка прочности (проверочный расчет) по формуле (16)

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{N}{A} \le \gamma_c R_y.$$

Наибольшее напряжение возникает в сечении второго стержня, поэтому достаточно проверить прочность этого стержня, так как стержни выполнены из одного материала.

$$\sigma_{\text{нб}} = 177{,}8\ \text{МПа} < \gamma_c R_y = 1 \cdot 240\ \text{МПа}.$$

Следовательно, прочность конструкции обеспечена.

Удлинения стержней найдем по формуле (9)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{80 \cdot 200}{21 \cdot 10^3 \cdot 7{,}07} = 0{,}1078\ \text{см} = 1{,}078\ \text{мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{160 \cdot 200}{21 \cdot 10^3 \cdot 9} = 0{,}1693\ \text{см} = 1{,}693\ \text{мм}.$$

Рассмотрим систему в деформированном состоянии (рис. 5, *в*).

Ввиду малости перемещений следует предположить, что точки C и D перемещаются по вертикали.

Тогда вертикальное перемещение точки B определяется из рис. 5, *в*.

$$\delta_B = \Delta l_1 + \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{3} = 1{,}078 + \frac{1{,}693 - 1{,}078}{3} = 1{,}283\ \text{мм}.$$

Рассмотрим примеры расчетов на растяжение и сжатие статически неопределимых систем.

Статически неопределимые системы — системы, для которых реакции связей и внутренние усилия не могут быть найдены только из уравнений равновесия.

При расчете составляются дополнительные уравнения перемещений, учитывающие характер деформации системы. Число дополнительных уравнений определяется степенью статической неопределимости системы. Степень статической неопределимости определяется разностью между числом неизвестных и числом независимых уравнений статики. Все эти системы имеют «лишние связи» в виде дополнительных закреплений, но они необходимы с точки зрения эксплутационных целей.

На примерах решений задач рассмотрим и способы составления уравнений перемещений.

Особенности статически неопределимых систем:

1) чем больше жесткость элемента EA, тем большую часть прилагаемой нагрузки он способен воспринять;

2) усилия в элементах системы зависят от температуры;

3) в их элементах возникают усилия от неточности изготовления или сборки.

Расчет статически неопределимых систем производят по следующей схеме:

1. Статическая часть задачи. Составляют уравнения равновесия и определяют степень статической неопределимости.
2. Геометрическая часть задачи. Составляют уравнения совместности перемещений, рассматривая систему в деформированном состоянии. Их число равно числу степени статической неопределимости.
3. Физическая часть задачи. Удлинения (укорочения), входящие в уравнения перемещений, с помощью закона Гука выражают через усилия.
4. Синтез. Находят усилия, решая совместно статические и физические уравнения.

Пример 6

Для ступенчатого стержня (рис. 6, *а*), находящегося под действием силы F = 200 кН, построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений. Площадь сечения A = 20 см^2, модуль упругости 210 ГПа, жесткость сечения первой части стержня $2EA$, второй — EA, l_1 = 20 см, l_2 = 30 см.

Решение

1. Статическая часть задачи. Уравнения равновесия. Сила F направлена вниз, опорные реакции R_1 и R_2 будут направлены вверх. Силы действуют по одной прямой, поэтому можно составить единственное уравнение статики (рис. 6, *б*)

$$\sum F_z = R_1 - F + R_2 = 0;\ R_1 + R_2 = 200.$$

Одно уравнение содержит два неизвестных, тогда степень статической неопределимости равна $С_н = 2 - 1 = 1$. Необходимо получить одно дополнительное уравнение — уравнение совместности деформаций (перемещений).

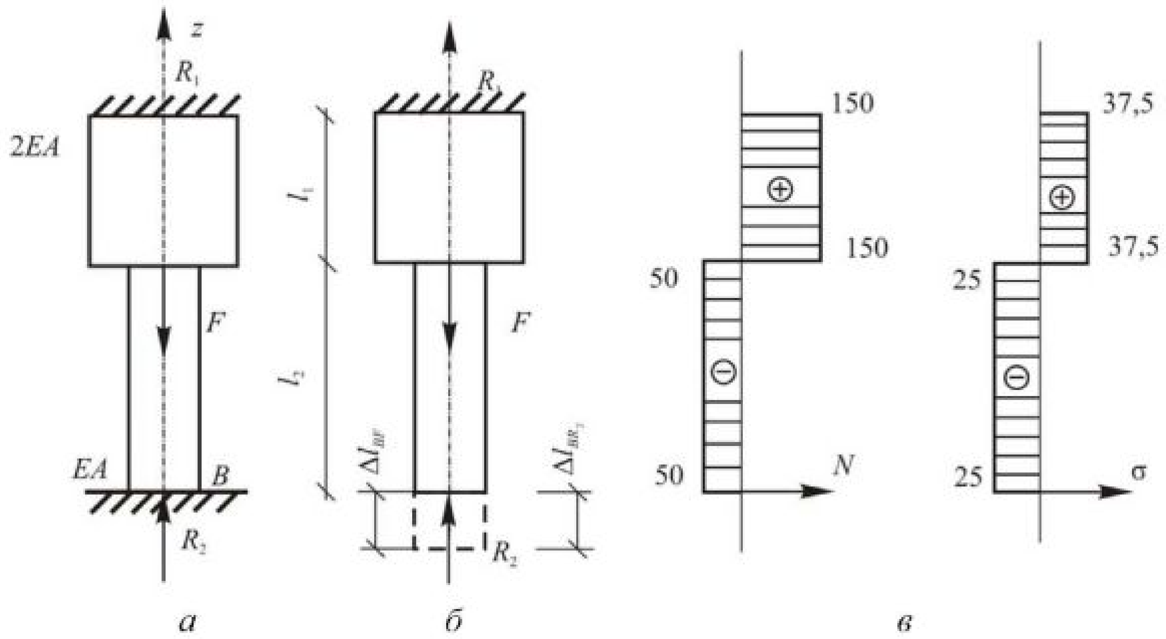


Рис. 6

2. Геометрическая часть задачи. Уравнение совместности деформаций (перемещений). Мысленно отбросим одну из заделок, например нижнюю, заменив ее действие реакцией R_2. Полная деформация стержня (рис. 6, *б*) должна равняться нулю ($\Delta l = 0$).

Представим это условие в развернутом виде. Перемещение сечения *B* от действия силы *F* и от действия реакции R_2 равняется нулю

$$\Delta l = \Delta l_{BF} + \Delta l_{BR_2} = 0.$$

3. Физическая часть задачи. Дополнительное уравнение. Согласно формуле (9) перемещение сечения *B* от силы *F* определяется деформацией участка l_1:

$$\Delta_{BF} = \frac{Fl_1}{2EA}.$$

Перемещение сечения *B* от действия реакции R_2 определяется деформацией первого и второго участков

$$\Delta l_{BR_2} = \Delta l_{1R_2} + \Delta l_{2R_2} = -\frac{R_2 l_1}{2EA} - \frac{R_2 l_2}{EA}.$$

Тогда перемещение сечения B будет определяться, как

$$\Delta l = \Delta l_{BF} + \Delta l_{BR_2} = \frac{Fl_1}{2EA} - \frac{R_2 l_1}{2EA} - \frac{R_2 l_2}{EA} = 0.$$

4. Синтез. Решая систему уравнений, определим значения реакций

$$R_2 = \frac{Fl_1}{\left(l_1 + 2l_2\right)} = \frac{200 \cdot 20}{(20 + 2 \cdot 30)} = 50 \text{ кН};$$

$$R_1 = -R_2 + 2F = -50 + 200 = 150 \text{ кН}.$$

Используя метод сечений, найдем величины продольных сил и нормальных напряжений в поперечных сечениях.

Участок 1. Сечение 1-1. Рассматривая равновесие отсеченной части, получим

$$\sum F_z = 0;\ R_1 - N_1 = 0;$$

$$N_1 = R_1 = 150 \text{кН}.$$

Участок растянут.

Нормальное напряжение в поперечном сечении определяем по формуле (3)

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{150}{40} = 3,75 \text{ кН/см}^2 = 37,5 \text{МПа}.$$

Участок 2. Сечение 2-2. Рассматривая равновесие отсеченной части, получим

$$\sum F_z = 0;\ R_2 + N_2 = 0;$$

$$N_2 = -R_2 = -50 \text{кН}.$$

Участок сжат.

Тогда

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{50}{20} = -2,5 \text{ кН/см}^2 = -25 \text{ МПа}.$$

Следует отметить, что чем больше жесткость элемента EA, тем большую часть прилагаемой нагрузки он воспринимает.

На рис. 6, *в* построены эпюры продольных сил и нормальных напряжений. Наибольшие нормальные напряжения возникают в сечениях первого участка.

Рассмотрим, как влияет температура на напряжения и деформации в статически неопределимых стержнях.

При нагревании на Δt стержня, заделанного одним концом, увеличиваются его поперечные и продольные размеры. Увеличение длины составит

$$\Delta l_t = \alpha \Delta t l,$$

где α — температурный коэффициент линейного расширения.

Значения α для некоторых материалов приведены в табл. 1. Следует отметить, если система представляет статически определимую систему, то изменение температуры не вызовет никаких внутренних усилий.

При нагревании на Δt статически неопределимых стержней, заделанных двумя концами, или стержневых систем возникают дополнительные температурные внутренние силы и напряжения.

Пример 7

Пусть дана система, представленная на рис. 6, *а*. Брус нагрет на величину $\Delta t = 50\,°\text{C}$. Температурный коэффициент линейного расширения $\alpha = 120 \cdot 10^{-7}$.

Площадь сечения $A = 10$ см^2. Модуль упругости материала стержня равен $E = 210$ ГПа $= 2{,}1 \cdot 10^3$ кН/см^2. Определить влияние температуры на напряжения и деформации в брусе.

Решение. Для определения усилий и напряжений применяется обычный метод расчета статически неопределимых систем. Задачу решим с учетом действия силы F.

Уравнение равновесия для стержня не меняется

$$\sum F_z = R_1 - F + R_2 = 0.$$

Задача является один раз статически неопределимой.

При составлении дополнительного уравнения примем во внимание, что удлинения частей стержня возникают от продольных сил и изменения температуры.

Удлинение стержня длиною $l = l_1 + l_2$ с учетом температурного удлинения равняется нулю

$$\Delta l = \Delta l_{BF} + \Delta l_{BR_2} + \Delta l_t + \alpha \Delta t l = 0;$$

$$\Delta l = \frac{Fl_1}{2EA} - \frac{R_2 l_1}{2EA} - \frac{R_2 l_2}{EA} + \alpha \Delta t \left(l_1 + l_2\right) = 0.$$

Учитывая, что $N_1 = R_1$ и $N_2 = -R_2$, получим следующую систему уравнений:

$$N_1 - F_2 - N_2 = 0;$$

$$\frac{Fl_1}{2} + N_2\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) + EA\alpha\Delta t\left(l_1 + l_2\right) = 0.$$

Отсюда находим

$$N_2 = -\left[0,5Fl_1 + EA\alpha\Delta t\left(l_1 + l_2\right)\right] / \left(0,5l_1 + l_2\right);$$

$$N_1 = F_2 + N_2.$$

Определяем усилия и напряжения с учетом действия силы и температуры

$$N_2 = -\left(0,5 \cdot 200 \cdot 20 + 21 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 120 \cdot 10^{-7} \cdot 50\right) / 40 =$$

$$= -50 - 3,15 = -53,15 \text{ кН};$$

$$N_2 = -50 - 3,15 = -53,15 \text{ кН};$$

$$N_1 = 200 - 53,15 = 146,85 \text{ кН};$$

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{146,85}{40} = 3,67 \text{ кН/см}^2 = 36,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{53,15}{20} = -2,66 \text{ кН/см}^2 = -26,6 \text{ МПа}.$$

Определим продольные усилия и напряжения только от нагревания стержня без учета силы $F = 0$

$$N_2 = -3,15 \text{кН};$$

$$N_1 = -3,15 \text{кН};$$

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{3,15}{40} = -0,0786 \text{ кН/см}^2 = -0,79 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{3,15}{20} = -0,158 \text{ кН/см}^2 = -1,58 \text{ МПа}.$$

Следовательно, при нагревании статически неопределимого стержня в сечениях возникают сжимающие продольные силы и напряжения.

3. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

3.1. Общие требования к выполнению расчетно-графических работ

Выполнение расчетно-графических работ (РГР) является важнейшей частью изучения дисциплин «Техническая механика» и «Сопротивление материалов». Целью РГР является приобретение навыков проведения инженерных расчетов, выработка умения правильно оформлять техническую документацию.

Для каждой работы даются формулировка содержания задания, расчетная схема и числовые данные в табл. П.1, П.2 (прил. 1, 2). Результаты расчетов оформляются в виде пояснительной записки, включающей расчеты и графический материал. На отчете за РГР студент отвечает на контрольные вопросы и решает задачу по теме.

Постановка и варианты заданий РГР 1 и 2 приведены в прил. 1, 2.

Расчетно-графические работы выполняют и сдают в установленные сроки, предусмотренные графиком учебного процесса рабочей программы дисциплины.

Работа считается завершенной лишь в том случае, если она зачтена преподавателем и об этом объявлено студенту.

3.2. Пример выполнения расчетно-графической работы 1 «Расчет статически определимого стержня на растяжение-сжатие»

Для выполнения РГР 1 в табл. 3 приведены исходные данные.

Таблица 3

Исходные данные для выполнения расчетно-графической работы 1

№ схемы	№ строки	a, м	A, см^2	F_1, кН	F_2, кН	q_1, кН/м	q_2, кН/м	E, ГПа	$\sigma_т$, МПа
		1	20	180	240	200	300	210	240

На расчетной схеме показываем координатную ось z с началом в сечении жесткой заделки, направленной к свободному концу стержня (рис. 7). В этом случае вектор положительного перемещения сечения будет совпадать с положительным направлением координатной оси z.

В жесткой заделке возникает опорная реакция R_0. Направление реакции на расчетной схеме можно задавать произвольно.

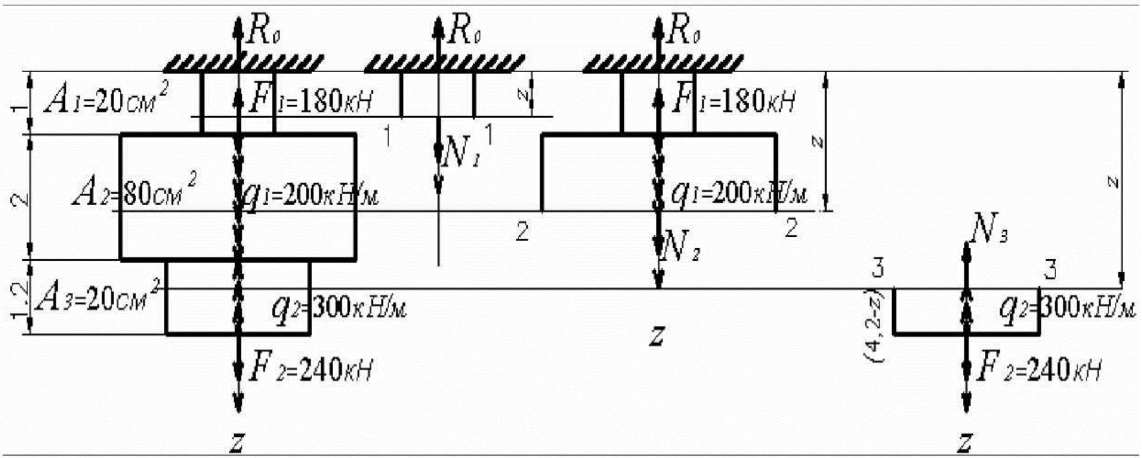


Рис. 7

Решение

1. Из уравнения равновесия определяем опорную реакцию R_0:

$$\sum F_z = -R_0 - F_1 + q_1 \cdot 2 - q_2 \cdot 1{,}2 + F_2 = 0;$$

$$-R_0 - 180 + 200 \cdot 2 - 300 \cdot 1{,}2 + 240 = 0,$$

отсюда находим

$$R_0 = 100 \text{ кН}.$$

Знак «+» означает, что направление реакции соответствует выбранному направлению. Знак «–» означал бы, что направление реакции не соответствует выбранному направлению. Можно оставить заданное направление реакции и учитывать знак реакции либо поменять направление реакции и знак «–» в дальнейшем не учитывать.

2. Определяем продольные силы и нормальные напряжения в характерных сечениях каждого участка бруса и строим их эпюры.

Стержень имеет три участка (см. рис. 7). Обозначим их на расчетной схеме 1, 2, 3. Первый участок примыкает к жесткой заделке.

Продольные силы определяем с помощью метода сечений. Проводим сечения в произвольном месте внутри каждого участка 1-1, 2-2, 3-3, разделяя каждый раз стержень на нижнюю и верхнюю части. Из уравнения равновесия отсеченной части бруса получаем аналитическое выражение для определения продольной силы.

Нормальное напряжение в поперечном сечении бруса определяется отношением продольной силы в этом сечении к его площади.

Введем обозначения длин и площадей участков стержня:

$l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, $l_3 = 1{,}2$ м; $A_1 = 20$ см^2, $A_2 = 80$ см^2, $A_3 = 40$ см^2.

У ч а с т о к 1. Сечение 1-1. $0 \le z \le 1$ м.

$\Sigma F_z = 0$; $-R_0 + N_1 = 0$; $N_1 = R_0 = 100$ кН = const (растяжение).

Найдем нормальное напряжение в поперечном сечении стержня

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100}{20} = 5 \text{ кН/см}^2 = 50 \text{ МПа}.$$

Аналогично рассматриваются и другие участки.

У ч а с т о к 2. Сечение 2-2. 1 м $\le z \le 3$ м.

$\Sigma F_z = 0$; $-R_0 - F_1 + q_2 (z-1) + N_2 = 0$; $N_2 = 280 - 200\,(z-1) =$

$= 480 - 200\,z$.

При $z = 1$ м $N_2 = 280$ кН; $\sigma = \dfrac{N_2}{A_2} = \dfrac{280}{80} = 3{,}5\ \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 35\,\text{МПа}.$

При $z = 3$ м $N_2 = -120$ кН (сжатие); $\sigma = \dfrac{N_2}{A_2} = -\dfrac{120}{80} = -1{,}5 \text{ кН/см}^2 =$

$= -15$ МПа.

У ч а с т о к 3. Сечение 3-3. 3 м $\le z \le 4{,}2$ м.

$\Sigma F_z = 0$; $-N_3 + F_2 - q_3\,(4{,}2 - z) = 0$; $N_3 = 240 - 300\,(4{,}2 - z) =$

$= -1020 + 300z$.

При $z = 3$ м $N_3 = -120$ кН; $\sigma = \dfrac{N_3}{A_3} = -\dfrac{120}{40} = -3 \text{ кН/см}^2 = -30\,\text{МПа}.$

При $z = 4{,}2$ м $N_3 = 240$ кН; $\sigma = \dfrac{N_3}{A_3} = -\dfrac{240}{40} = -6 \text{ кН/см}^2 = -60\,\text{МПа}.$

3. По значениям N и σ в характерных сечениях стержня строим эпюры N и σ.

Эпюры N и σ построены в масштабе (рис. 8). Штриховые линии изображают значения продольной силы или напряжения в сечениях и их проводят перпендикулярно нулевой линии.

Отметим, что в сечениях под сосредоточенной силой на эпюре N имеется скачок, численно равный этой силе. На эпюре σ скачок обусловлен изменением продольной силы или площади сечения.

По наибольшим значениям нормальных напряжений можно установить опасные сечения. Максимальное значение по модулю нормального напряжения в сечении стержня равно σ_{max} = 60 МПа.

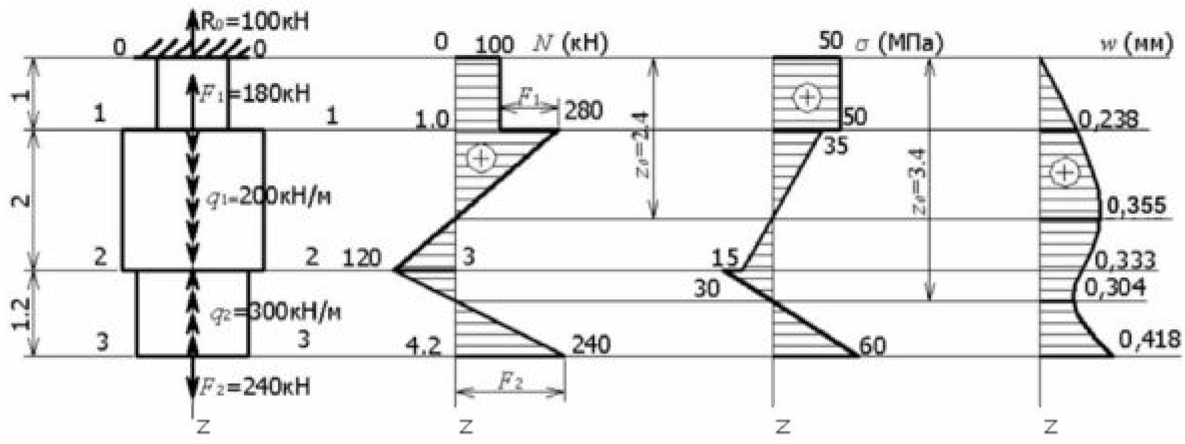


Рис. 8

Определим положение сечений, где N = 0, так как в этих сечениях на участке перемещения имеют экстремальные значения. Такие сечения — на втором и третьем участках.

Если на участке имеется сечение, где продольная сила равна нулю, необходимо определить положение этого сечения. В этом сечении перемещение принимает экстремальное значение. В примере имеются два таких участка.

Приравнивая к нулю уравнения продольных сил на этих участках, найдем положение сечений, где $N = 0$.

2-й участок

$N_2 = 280 - 200\,(z_0 - 1) = 0$, отсюда $z_0 = 2{,}4$ м;

3-й участок:

$N_3 = 240 - 300\,(4{,}2 - z_0) = 0$, отсюда $z_0 = 3{,}4$ м.

Перейдем к определению линейных деформаций участков и стержня.

4. Общую линейную деформацию стержня найдем как сумму деформаций отдельных участков

$\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3.$

На первом участке продольная сила и площадь сечения постоянны и его линейная деформация определяется по формуле (9)

$E = 210$ ГПа $= 210 \cdot 10^2$ кН/см^2; $l_1 = 100$ см; $A_1 = 20$ см^2.

Определяем деформацию первого участка

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{100 \cdot 100}{210 \cdot 10^2 \cdot 20} = 0,0238 \text{ см} = 0,238 \text{ мм}.$$

Первый участок удлиняется на 0,238 мм.

На втором и третьем участках продольные силы являются функциями от z. В этом случае значения деформаций участков определяются по формуле (10).

Деформация второго участка равна

$$\Delta l_2 = \frac{1}{EA_2}\int_1^3 N_2 dz = \frac{100}{210 \cdot 10^2 \cdot 80}\int_1^3 (480 - 200z)dz =$$

$$= \frac{1}{16\ 800}\left(480z - \frac{200z^2}{2}\right)_1^3 = \frac{1}{16\ 800}\left[480(3-1) - 100\left(3^2 - 1^2\right)\right] =$$

$$= 0,0095 \text{ см} = 0,095 \text{ мм}.$$

Деформация третьего участка равна

$$\Delta l_3 = \frac{1}{EA_3}\int_3^{4,2} N_3 dz = \frac{100}{210 \cdot 10^2 \cdot 40}\int_3^{4,2} (-1020 + 300z)dz =$$

$$= 0,0085 \text{ см} = 0,085 \text{ мм}.$$

Общая линейная деформация стержня равна

$\delta = 0,238 + 0,095 + 0,085 = 0,418$ мм.

Знак «+» означает, что стержень удлиняется на 0,418 мм.

5. Перейдем к определению осевых перемещений w по отношению к сечению жесткой заделки.

С этой целью намечаются характерные сечения, перемещение которых будет определяться. Положение этих сечений будем определять координатой z.

Определяем перемещения сечений w по найденным значениям деформаций отдельных участков бруса.

Перемещение сечения жесткой заделки:

$z = 0$; $w = 0$.

Перемещение сечения на границе участков 1 и 2:

$z = 1$ м; $w_1 = \Delta l_1 = 0,238$ мм.

Перемещение сечения на границе участков 2 и 3:

$z = 3$ м; $w_3 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0{,}238 + 0{,}095 = 0{,}333$ мм.

Перемещение сечения свободного края:

$z = 4{,}2$ м; $w_{4,2} = \delta = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0{,}333 + 0{,}085 = 0{,}418$ мм.

Следовательно, свободный край поступательно перемещается в положительном направлении координатной оси z на величину $\delta = 0{,}418$ мм.

Дополнительно найдем перемещения сечений, где продольная сила равна нулю.

Перемещение сечения, определяемое координатой $z_0 = 2{,}4$ м, равно

$$w_2^* = \Delta l_1 + \Delta l_2^*,$$

где Δl_2^* — деформация части бруса, расположенного между сечением $z = 1$ м и сечением $z_0 = 2{,}4$ м.

$$\Delta l_2^* = \frac{1}{EA_2}\int_{l_1}^{z_0} N_2 dz = \frac{100}{210 \cdot 10^2 \cdot 80}\int_1^{2,4}(480 - 200z)dz = 0{,}0117 \text{ см} =$$

$$= 0{,}117 \text{ мм}.$$

Тогда

$$w_2^* = 0{,}238 + 0{,}117 = 0{,}355 \text{ мм}.$$

Перемещение сечения, определяемое координатой $z_0 = 3{,}4$ м, равно

$$w_3^* = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3^*,$$

где Δl_3^* — деформация части бруса между сечением $z = 3$ м и сечением $z_0 = 2{,}4$ м.

$$\Delta l_3^* = \frac{1}{EA_3}\int_{l_1+l_2}^{z_0} N_3 dz = \frac{100}{210 \cdot 10^2 \cdot 40}\int_3^{3,4}(-1020 + 300z)dz =$$

$$= -0{,}0029 \text{ см} = -0{,}029 \text{ мм},$$

тогда

$$w_3^* = 0{,}333 - 0{,}029 = 0{,}304 \text{ мм}.$$

Эпюра осевых перемещений изображена в масштабе на рис. 8.

Если на участке бруса с равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q нет сечения, где $N = 0$, определяется, как правило, перемещение сечения в середине этого участка.

3.3. Пример выполнения расчетно-графической работы 2 «Расчет на растяжение и сжатие статически неопределимой стержневой системы»

В табл. 4 приведены исходные данные для выполнения РГР 2.

Таблица 4

Исходные данные для выполнения расчетно-графической работы 2

№ схемы	№ строки	a, м	b, м	h, м	$\frac{A_1}{A_2}$	F, кН	q, кН/м	E, ГПа (кН/см^2)	R, МПа (кН/см^2)	$\sigma_т$, МПа (кН/см^2)
		3	2	2	2	220	10	210 ($210 \cdot 10^2$)	210 (21)	240 (24)

Решение

1. Статическая часть задачи. Уравнения равновесия. Удалим опорные связи и стержни в расчетной схеме (рис. 9) и действие их заменим реакциями и продольными усилиями в стержнях.

Продольные усилия в стержнях — растягивающие (рис. 10). Стрелки усилий в стержнях направляем от бруса.

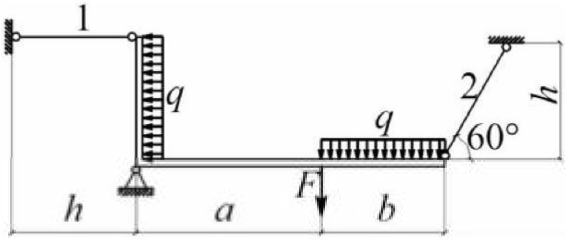


Рис. 9

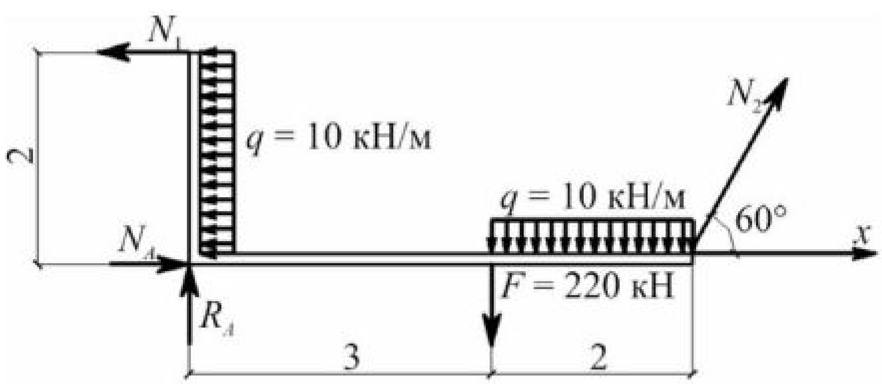


Рис. 10

Уравнения статики:

$\sum F_x = 0$; $H_A + N_2 \cos 60° - q \cdot 2 - N_1 = 0$; $H_A + 0{,}5N_2 - 20 - N_1 = 0$;

$\sum F_y = 0$; $R_A - F - q \cdot 2 + N_2 \sin 60° = 0$; $R_A - 220 - 20 + 0{,}866N_2 = 0$;

$\sum M_A = 0$; $N_1 \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 4 + N_2 \cdot 5 \sin 60° = 0$;

$2N_1 + 10 \cdot 2 \cdot 1 - 220 \cdot 3 - 10 \cdot 2 \cdot 4 + 4{,}33 \cdot N_2 = 0$; $2N_1 + 4{,}33N_2 = 720$.

Степень статической неопределимости определяется как разница между числом неизвестных и числом уравнений статики

$С_н = 4 - 3 = 1$.

Таким образом, система один раз статически неопределима.

Далее нет необходимости определять реакции H_A и R_A, так как они в дальнейших расчетах не применяются.

Поэтому будем использовать уравнение

$\sum M_A = 2N_1 + 4{,}33\ N_2 = 720$.

2. Геометрическая часть задачи. Уравнение совместности перемещений. Рассмотрим систему в деформированном состоянии и установим связь между перемещениями точек ее элементов (рис. 11).

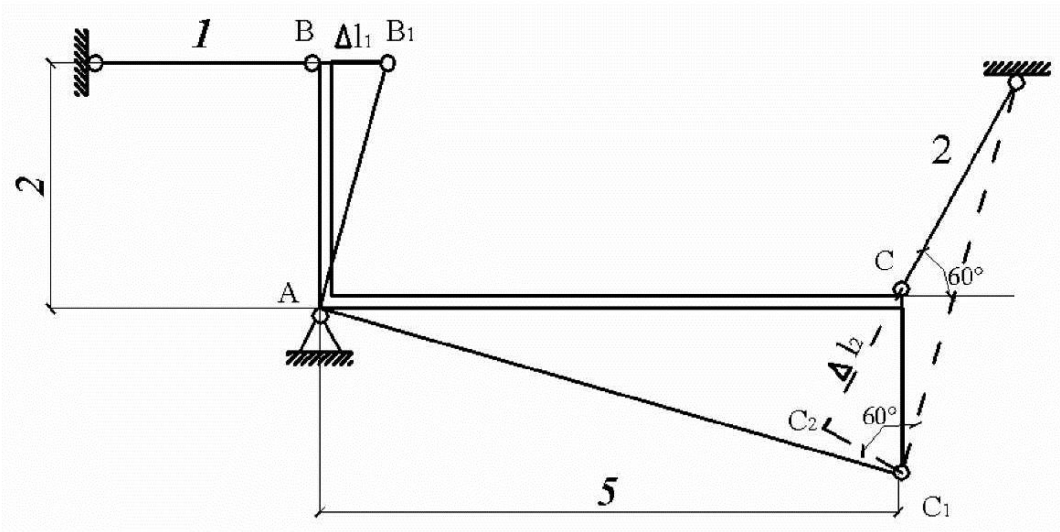


Рис. 11

Ввиду малости деформаций перемещения точек B и C считаются по прямой.

Длины стержней $l_1 = 2$ м; $l_2 = 2/\sin 60° = 2{,}31$ м.

Деформацию первого стержня обозначим $BB_1 = \Delta l_1$, второго — $CC_2 = \Delta l_2$.

Из подобия треугольников BAB_1 и CAC_1 следует

$$\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}; \ \frac{\Delta l_1}{2} = \frac{\Delta l_2}{5\sin 60^\circ};$$

$\Delta l_1 - 0{,}4619\ \Delta l_2 = 0.$

Полученное уравнение называют уравнением совместности деформаций (перемещений).

3. Физическая часть задачи. Дополнительное уравнение. На основании закона Гука по формуле (9) выражаем удлинения элементов системы, входящие в уравнение перемещений, через усилия

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}; \ \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}; \ \frac{N_1 l_1}{EA_1} - 0{,}4619\frac{N_2 l_2}{EA_2} = 0.$$

Подставив отношение $A_1 = 2\,A_2$ в уравнение совместности деформаций, получим дополнительное уравнение

$N_1 - 1{,}067\ N_2 = 0.$

Решая систему уравнений, находим неизвестные усилия

$2N_1 + 4{,}33N_2 = 720;$

$N_1 - 1{,}067\ N_2 = 0;$

$N_1 = 118{,}85$ кН, $N_2 = 111{,}39$ кН.

4. Подбираем поперечное сечение стержней в виде двух стальных равнополочных уголков (ГОСТ 8509—93) по методу предельных состояний. Используя условия прочности $\sigma = N\,/\,A \le R$, определяем требуемые площади сечений

$$A_{1\text{тр}} = \frac{N_1}{R} = \frac{118{,}85}{21} = 5{,}66\ \text{см}^2;$$

$$A_{2\text{тр}} = \frac{N_2}{R} = \frac{111{,}39}{21} = 5{,}30\ \text{см}^2.$$

Проверяем отношение $\dfrac{A_1}{A_2} = 2; \ \dfrac{5{,}66}{5{,}30} = 1{,}07 \ne 2.$

В связи с этим необходимо изменить площади сечений стержней таким образом, чтобы они были не меньше требуемых по условию прочности, и отношение между ними приблизительно равнялось двум.

Очевидно, площадь второго стержня необходимо сохранить $A_2 = A_{2,тр} = 5{,}30$ см^2, а площадь первого стержня определим, используя отношение

$$A_1 = 2A_2;\ A_1 = 25{,}30 = 10{,}60 \text{ см}^2 > A_{1,тр} = 5{,}66 \text{ см}^2.$$

Иначе, если сохранить площадь первого стержня $A_1 = 5{,}56$ см^2, а площадь второго стержня определим, используя отношение $A_2 = = A_1 /2$, то тогда

$$A_2 = 5{,}66 \cdot 10^{-4}/2 = 2{,}83 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 < A_{2,тр} = 5{,}30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Этот вариант недопустим, так как площадь сечения второго стержня меньше требуемой площади.

По сортаменту горячекатанных равнополочных уголков (ГОСТ 8509—93) подбираем сечения стержней из двух уголков.

Используя первый вариант, найдем для каждого стержня требуемую площадь сечения одного уголка

$$\frac{A_1}{2} = \frac{10{,}60}{2} = 5{,}30 \text{ см}^2;\ \frac{A_2}{2} = \frac{5{,}30}{2} = 2{,}65 \text{ см}^2.$$

Подбор номера уголка осуществляется по сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8509—93) и величине площади сечения, которая должна быть не менее требуемой.

Для первого стержня принимаем равнополочный уголок 56×5 с площадью поперечного сечения $A = 5{,}41$ см$^2 > 5{,}30$ см^2.

Тогда сечение первого стержня, составленное из двух уголков, будет иметь площадь

$$A_1 = 2A = 2 \cdot 5{,}69 = 11{,}38 \text{ см}^3 > A_{1,тр} = 5{,}66 \text{ см}^2.$$

Аналогично подбираем сечение второго стержня.

Для второго стержня принимаем равнополочный уголок 50×4 площадью поперечного сечения $A = 3{,}89$ см$^2 > 2{,}65$ см^2.

Тогда сечение второго стержня, составленное из двух уголков, будет иметь площадь

$$A_2 = 2A = 2 \cdot 3{,}89 = 7{,}78 \text{ см}^2 > A_{2,тр} = 5{,}30 \text{ см}^2.$$

Проверим отношение A_1/A_2

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{11{,}38}{7{,}78} = 1{,}46 \neq 2.$$

Из соотношения видно, что надо сохранить найденную площадь сечения второго стержня и изменить площадь сечения первого стержня.

Определяем требуемую площадь сечения первого стержня

$A_1 = 2A_2 = 2 \cdot 7{,}78 = 15{,}56$ см^2.

Площадь сечения одного уголка должна быть не менее 7,78 см^2.

По сортаменту горячекатанных равнополочных уголков (ГОСТ 8509—93) подбираем сечение одного уголка. Сортамент прокатной стали приведен на последних страницах учебников и задачниках по сопротивлению материалов [2, 4, 5].

Принимаем уголок 70 × 6 с площадью сечения 8,15 см^2. Тогда площадь сечения первого стержня равна $A_1 = 2 \times 8{,}15 = 16{,}30$ см^2.

Проверим отношение A_1/A_2

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16{,}3}{7{,}78} = 2{,}09 \approx 2.$$

Таким образом, найдены необходимые площади поперечных сечений стержней из двух равнополочных уголков

$A_1 = 16{,}30$ см^2; $A_2 = 7{,}78$ см^2.

5. Определим нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней и линейные деформации стержней. Нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{118{,}85}{16{,}30} = 7{,}29 \text{ кН/см}^2 = 72{,}90 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = \frac{111{,}39}{7{,}78} = 1{,}46 \text{ кН/см}^2 = 14{,}60 \text{ МПа}.$$

Удлинения первого и второго стержней

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{118{,}85 \cdot 200}{210 \cdot 10^2 \cdot 16{,}30} = 0{,}0694 \text{ см} = 0{,}694 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} - \frac{111{,}39 \cdot 231}{210 \cdot 10^2 \cdot 7{,}78} = 0{,}1574 \text{ см} = 1{,}574 \text{ мм}.$$

6. Определим предельные (разрушающие) нагрузки на стержневую систему. Предельное состояние, как исчерпание несущей спо-

собности системы, наступит при достижении силами разрушающих значений. Стержни изготовлены из пластического материала — стали. При увеличении нагрузки рост нормальных напряжений прекращается, как только они достигнут значения предела текучести $\sigma_т = 240$ МПа $= 24$ кН/см^2.

Тогда предельные продольные силы примут следующие значения:

$N_{1,т} = \sigma_т A_1 = 24 \cdot 16{,}30 = 391{,}2$кН;

$N_{2,т} = \sigma_т A_2 = 24\ 7{,}78 = 186{,}72$ кН.

Подставляя значения предельных продольных усилий в уравнение равновесий, получим предельное значение изгибающего момента

$M_{A,т} = 2N_{1,т} + 4{,}33N_{2,т} = 2\ 391{,}2 + 4{,}33 \cdot 186{,}72 = 1590{,}98$ кНм.

Найдем предельное значение коэффициента одновременного увеличения нагрузок, при котором система разрушится

$$K_т = \frac{M_{Aт}}{M_A} = \frac{1590{,}98}{720} = 2{,}21.$$

Определяем величины предельных нагрузок

$F_{пред} = K_т F = 2{,}21 \cdot 220 = 486{,}2$ кН;

$q_{пред} = K_т q = 2{,}21 \cdot 10 = 22{,}1$ кН/м.

7. Определим допускаемые нагрузки. В этом случае нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней достигают величины расчетного сопротивления $R = 210$ МПа $= 21$ кН/см^2.

Найдем значения допускаемых усилий в стержнях

$[N_1] = RA_1 = 21 \times 16{,}30 = 342{,}30$ кН;

$[N_2] = RA_2 = 21 \times 7{,}78 = 163{,}38$ кН.

Подставляя значения усилий в уравнение равновесия, найдем допускаемый изгибающий момент:

$[M_A] = 2[N_1] + 4{,}33[N_2] = 2 \cdot 342{,}30 + 4{,}33 \cdot 163{,}38 = 1392{,}04$ кНм.

Допускаемый коэффициент одновременного увеличения нагрузки найдем по формуле

$$[K] = \frac{[M_A]}{M_A} = \frac{1392{,}04}{720} = 1{,}93 \le K_т = 2{,}21.$$

Определяем значения допускаемых нагрузок.

$[F] = 1{,}93 \cdot 220 = 424{,}6$ кН;

$[q] = 1{,}93 \cdot 10 = 19{,}3$ кН/м.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая деформация стержня называется центральным растяжением-сжатием?
2. Как вычисляются при растяжении-сжатии стержня значения продольных сил и нормальных напряжений в поперечных сечениях?
3. Как определяются абсолютные и относительные продольные и поперечные деформации стержня? Какие деформации имеют размерность, а какие нет?
4. Что называется модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν?
5. Какой зависимостью при линейном напряженном состоянии выражается закон Гука? Приведите две формы записи закона Гука.
6. Какие системы называют статически определимыми и статически неопределимыми? Каковы особенности расчета статически неопределимых систем и их свойства?
7. Как проводится проверка прочности стержней по методу предельных состояний?
8. Какие три характерных вида задач встречаются при расчете стержней на прочность?

Библиографический список

Основная литература

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Е. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. — М. : Высш. шк., 2008. — 559 с.
2. *Андреев, В. И.* Техническая механика / В. И. Андреев, А. Г. Паушкин, А. Н. Леонтьев. — М. : Высш. шк., 2011.
3. *Варданян, Г. С.* Сопротивление материалов с основами строительной механики / Г. С. Варданян, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. — М. : Инфра-М, 2011.
4. *Копнов, В. А.* Сопротивление материалов : руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ / В. А. Копнов, С. Н. Кривошапко. — 2-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2005. — 351 с.
5. *Михайлов, А. М.* Сопротивление материалов : учебник для вузов по направлению «Строительство» / А. М. Михайлов. — М. : Академия, 2009. — 446 с.

Дополнительная литература

1. *Атаров, Н. М.* Сопротивление материалов в примерах и задачах / Н. М. Атаров. — М. : Инфра-М, 2010.
2. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. — М. : Инфра-М, 2010.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Варианты заданий к расчетно-графической работе 1 «Расчет на растяжение-сжатие статически определимого стержня»

Содержание задания

Для упругого ступенчатого бруса при исходных данных по номеру строки табл. П.1 для расчетной схемы требуется:

определить продольные силы и нормальные напряжения в характерных поперечных сечениях;

построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений;

определить линейные деформации участков и стержня;

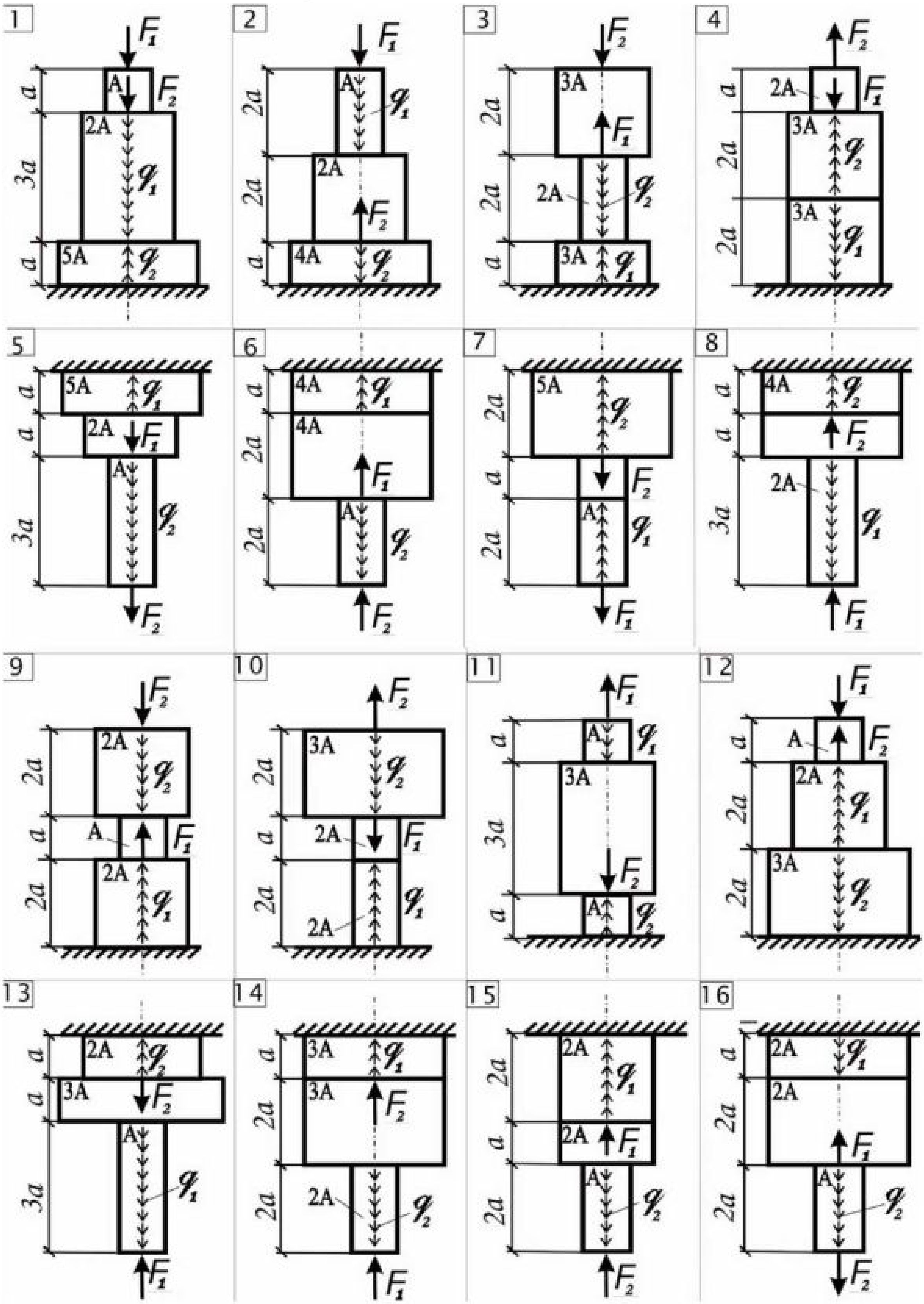
определить перемещения характерных сечений стержня по отношению к сечению жесткой заделки и построить эпюру перемещений.

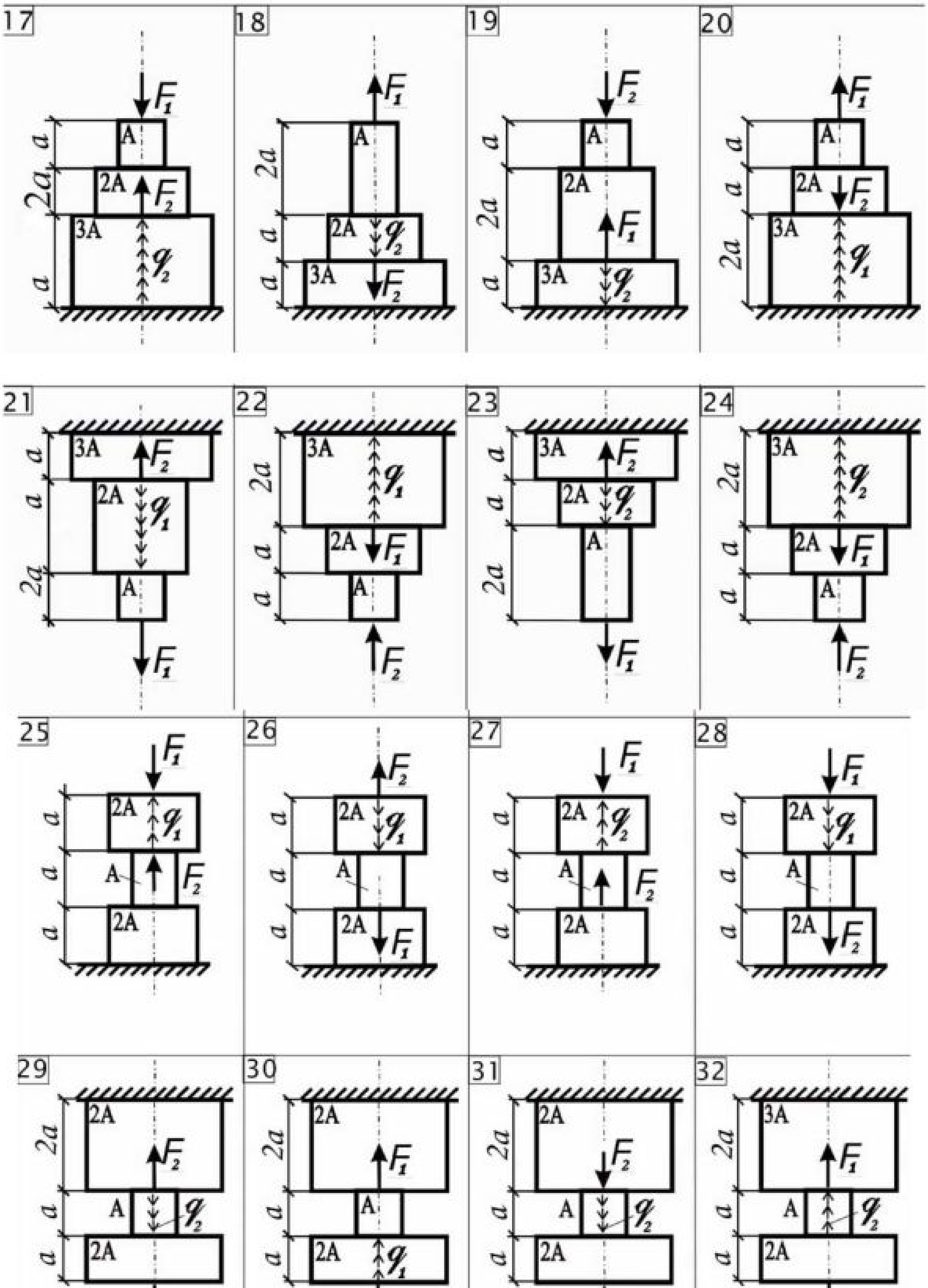
Таблица П.1

Исходные данные к расчетно-графической работе 1

№ строки	α, м	A, см^2	F_1, кН	F_2, кН	q_1, кН/м	q_2, кН/м	E, ГПа	$\sigma_т$, МПа
1	0,5	12	30	60	10	20	210	240
2	0,75	10	24	40	15	12	210	240
3	1	12	8	20	20	40	210	240
4	0,4	10	30	40	10	15	210	240
5	0,5	12	40	30	12	30	210	240
6	0,6	10	60	20	20	30	210	240
7	0,7	6	50	80	11	14	210	240
8	0,8	8	80	20	9	20	210	240
9	0.9	10	60	20	20	40	210	240
10	0,6	12	50	80	12	25	210	240

Расчетные схемы ступенчатых стержней




17
F1
A
2A
F2
3A
q2
a
2a
a
18
F1
A
2a
2A
q2
3A
F2
a
a
19
F2
A
2A
F1
3A
q2
a
2a
a
20
F1
A
2A
F2
3A
q1
a
a
2a
21
3A
F2
2A
q1
A
F1
a
a
2a
22
3A
q1
2A
F1
A
F2
2a
a
a
23
3A
F2
2A
q2
A
F1
a
a
2a
24
3A
q2
2A
F1
A
F2
2a
a
a
25
F1
2A
q1
A
F2
2A
a
a
a
26
F2
2A
q1
A
2A
F1
a
a
a
27
F1
2A
q2
A
F2
2A
a
a
a
28
F1
2A
q1
A
2A
F2
a
a
a
29
2A
F2
A
q2
2A
F1
2a
a
a
30
2A
F1
A
2A
q1
F2
2a
a
a
31
2A
F2
A
q2
2A
F1
2a
a
a
32
3A
F1
A
q2
2A
F2
2a
a
a

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Варианты заданий к расчетно-графической работе 2 «Расчет на растяжение-сжатие статически неопределимой стержневой системы»

Содержание задания

Для статически неопределимой стержневой системы при исходных данных по номеру строки табл. П.2 для схемы №…, состоящей из невесомого абсолютно жесткого бруса, поддерживаемого двумя стальными стержнями и шарнирно-неподвижной опорой, требуется:

определить усилия, возникающие в стержнях 1 и 2 от действия нагрузок;

подобрать поперечные сечения стальных стержней из двух равнополочных уголков по методу предельных состояний (при подборе поперечного сечения обеспечить заданное соотношение площадей A_1/A_2) при расчетном сопротивлении материала на растяжение-сжатие R = 210 МПа и модуле продольной упругости E = 210 ГПа;

найти коэффициент увеличения нагрузки, при котором система разрушится;

определить разрушающие нагрузки;

найти допустимый коэффициент увеличения нагрузки;

определить допустимые нагрузки.

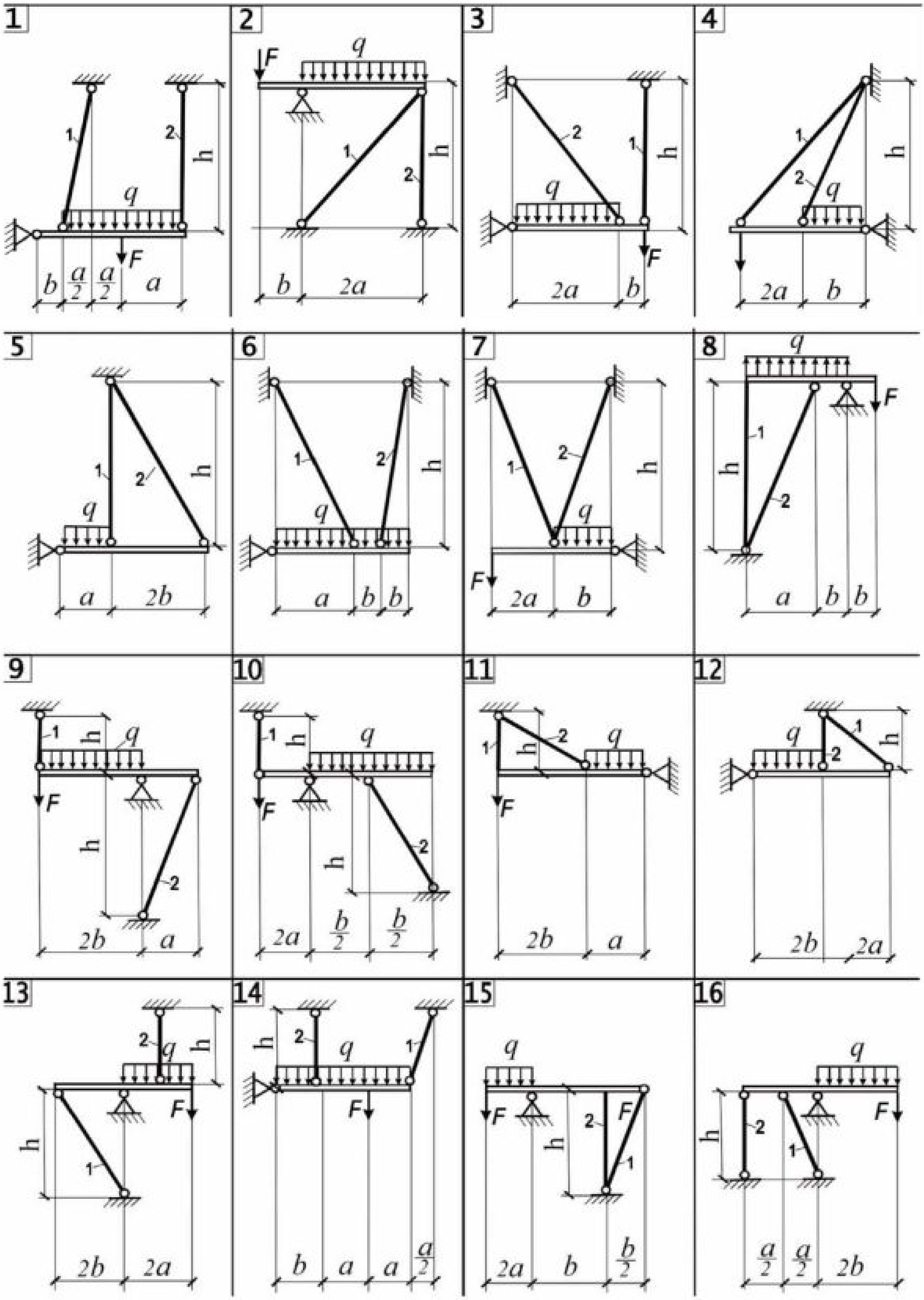
Определить нормальные напряжения в стержнях системы, если второй стержень выполнен короче на $\Delta = 0{,}3$ мм (факультативно).

Таблица П.2

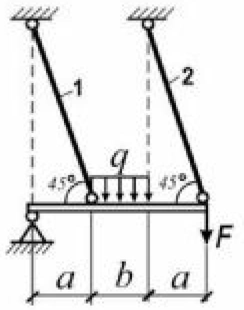
Исходные данные к расчетно-графической работе 2

№ схемы	a, м	b, м	h, м	$\frac{A_1}{A_2}$	F, кН	q, кН/м	E, ГПа (кН/см^2)	R, МПа (кН/см^2)	$\sigma_т$, МПа
1	2	1,8	1,5	2	150	50	210	210	240
2	2,1	1,6	1,4	1,5	110	40	210	210	240
3	2,2	1,4	1,2	2	120	30	210	210	240
4	2,4	1,2	1,6	1,4	130	40	210	210	240
5	2,6	1,0	1,5	1,6	140	50	210	210	240
6	2,8	1,2	1.4	1,8	150	30	210	210	240
7	2,6	1,4	1,2	1,2	110	40	210	210	240
8	2,4	1,6	1,5	1,4	120	50	210	210	240
9	2,2	1,8	1,6	1,6	130	30	210	210	240
10	2,0	2,0	2,0	1,8	140	40	210	210	240

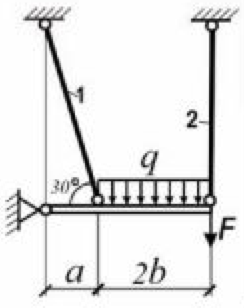
Расчетные схемы статически неопределимых систем



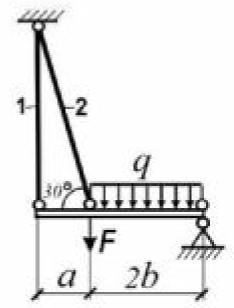
17



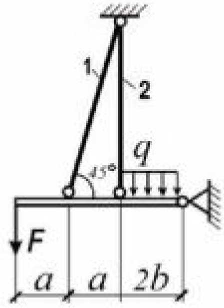
18



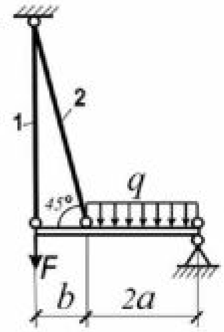
19



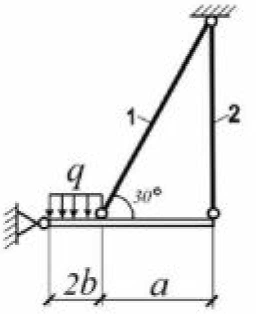
20



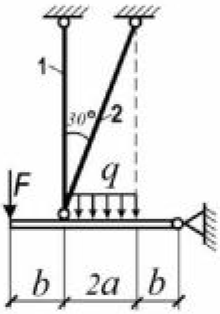
21



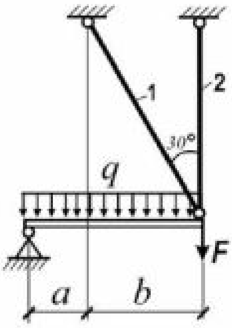
22



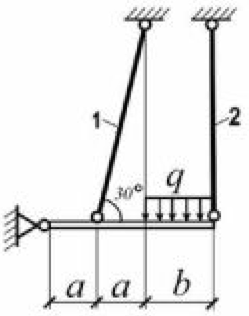
23



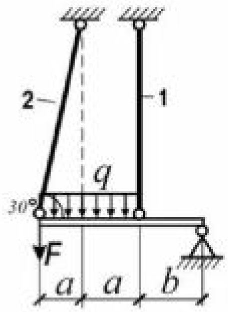
24



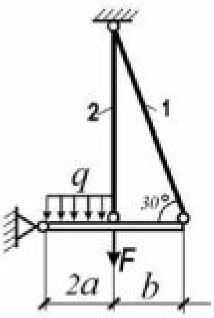
25



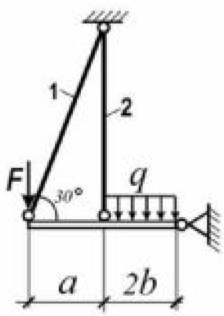
26



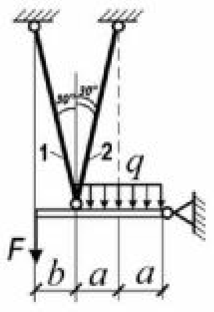
27



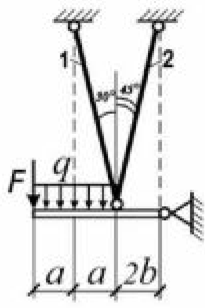
28



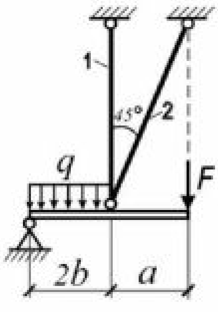
29



30



31



32