

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ
ПРИ ОСЕВОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК**

Методические указания к расчетно-графической работе

Содержатся краткие теоретические сведения и примеры расчетов при осевом приложении внешних сил к стержням.

В приведенных примерах излагается методика решения различных типов задач с использованием условий прочности и жесткости и дается численное решение всех задач. Сформулированы вопросы для самоконтроля, указана рекомендуемая для изучения литература. В пособии даются варианты и расчетные схемы индивидуальных заданий, и излагается последовательность выполнения расчетно-графической работы.

Введение

Растяжение и сжатие – виды напряженного состояния, которые очень часто встречаются в элементах строительных конструкций, машин и механизмов. Например, в тросе подъемника, поднимающего груз, или в канате, которым буксируется автомобиль, возникают растягивающие усилия. В фабричной трубе от ее собственного веса или в колоннах каркаса здания, поддерживающих перекрытие, действуют сжимающие усилия. В зависимости от положения подвижной нагрузки на пролетном строении, в элементах мостовых ферм могут возникать как растягивающие, так и сжимающие усилия.

В приводимых примерах будем рассматривать только центральное действие нагрузок, вызывающее одинаковые деформации продольных волокон.

В тех случаях, когда внутренние усилия меняются по сложному закону, строится график, называемый эпюрой продольных сил. Каждая ордината такого графика показывает величину продольной силы в рассматриваемом сечении. Зная величину продольной силы можно рассчитать напряжения в сечении и продольные деформации элемента.

1. Напряжения и деформации при растяжении и сжатии стержней

Рассмотрим стержень, нагруженный системой сил (рис. 1), действующих вдоль его оси и приложенных в центре тяжести поперечных сечений.

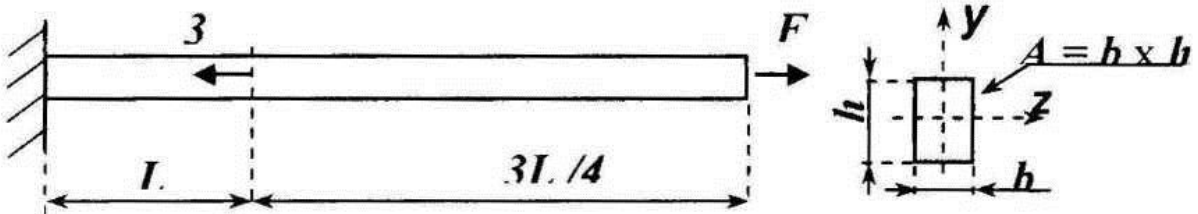
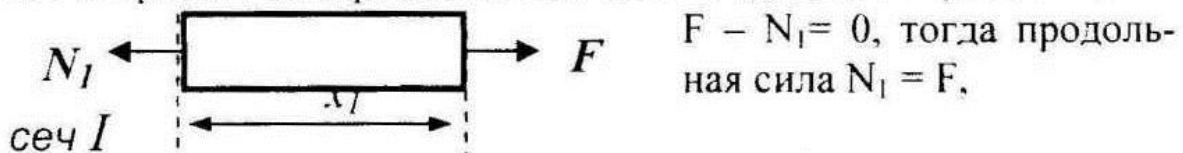


Рис. 1. Расчетная схема стержня

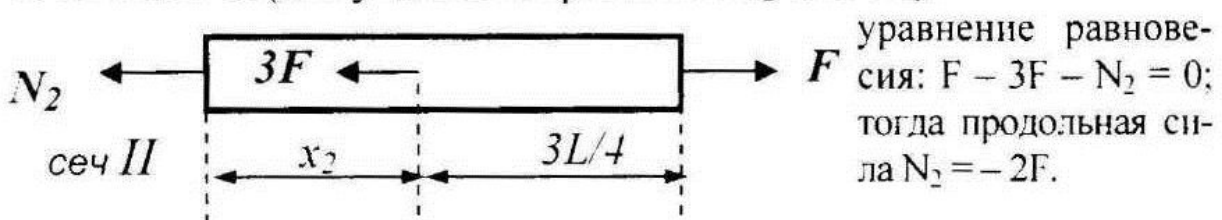
Для анализируемой расчетной схемы стержня на рис. 2 показаны эпюры внутренних усилий, нормальных напряжений, возникающих в сечениях от этих усилий и перемещений сечений стержня.

Для определения внутренних усилий в сечениях стержня используется метод сечений. В том сечении, где требуется определить внутреннее усилие, стержень мысленно рассекается плоскостью на две части, одна из которых отбрасывается, а ее влияние на оставшуюся заменяется внутренним усилием. Составляется уравнение равновесия для рассматриваемой отсеченной части, в которое входят все внешние силы, расположенные по одну сторону сечения и внутреннее усилие. Из этого уравнения определяется внутреннее усилие.

Из уравнения равновесия для сечения I (рассматривается участок стержня в интервале от 0 до $3L/4$: $0 \leq x_1 \leq 3L/4$) $\sum F_x = 0$:



В сечении II (для участка стержня $0 \leq x_2 \leq L/4$):



Деформация стержня при таком действии нагрузки происходит в соответствии с гипотезой Бернулли: *поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные его продольной оси до приложения нагрузки, остаются плоскими и перпендикулярными оси и после приложения нагрузки.*

Так как все сечения стержня перемещаются параллельно начальным положениям, то все волокна стержня удлиняются или укорачиваются одинаково, в этом случае и нормальные напряжения распределяются по поперечному сечению равномерно.

Используя зависимость между продольной силой в рассматриваемом сечении и нормальным напряжением $N = \int \sigma \, dA$, получим $N = \sigma A$; следовательно, нормальные напряжения в произвольном сечении стержня:

$$\sigma_i = N_i / A_i \quad (1)$$

Знаки нормальных напряжений определяются по знаку продольной силы в рассматриваемом сечении: растягивающие напряжения положительны, сжимающие – отрицательны. Нормальные напряжения, действующие в сечениях первого участка рассматриваемого стержня: $\sigma_1 = F / A$; в сечениях второго участка: $\sigma_2 = - 2F / A$.

При расчетах на прочность фактические нормальные напряжения в поперечных сечениях проектируемого конструктивного элемента не должны превышать предела, обеспечивающего его способность сохранять в процессе эксплуатации качество, заложенное при проектировании.

Существует два метода расчета конструкций:

1. Все элементы строительных конструкций рассчитываются *по методу предельных состояний*, критерием прочности материала служит его расчетное сопротивление при растяжении или при сжатии – R_p или $R_{сж}$. Условие прочности в этом случае:

$$|\sigma_{\max}| \leq R_i \quad (2)$$

2. Детали машиностроительных конструкций рассчитываются *по методу допускаемых напряжений* критерием прочности материала при этом служит допускаемое напряжение при растяжении $[\sigma_p]$ или сжатии $[\sigma_{сж}]$. Условие прочности элемента при таком подходе:

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma_i] \quad (3)$$

Для проектной задачи условия прочности (2) и (3) могут быть использованы при нахождении площади поперечного сечения стержня.

В рассматриваемом примере требуемая площадь поперечного сечения должна назначаться с учетом соблюдения двух условий:

а) при расчетах строительных конструкций по предельным состояниям:

$$1. \sigma_1 = F / A \leq R_p \Rightarrow A_{тр} \geq F / R_p$$

$$2. \sigma_2 = 2F / A \leq R_{сж} \Rightarrow A_{тр} \geq 2F / R_{сж}$$

б) при расчетах машиностроительных конструкций по допускаемым напряжениям:

$$1. \sigma_1 = F / A \leq [\sigma_p] \Rightarrow A_{тр} \geq F / [\sigma_p]$$

$$2. \sigma_2 = 2F / A \leq [\sigma_{сж}] \Rightarrow A_{тр} \geq 2F / [\sigma_{сж}]$$

В том случае, если в поперечных сечениях стержня действуют напряжения разных знаков, площадь поперечного сечения назначается с учетом выполнения обоих условий $|\sigma_{max}| \leq R_p$; $|\sigma_{min}| \leq R_{сж}$

При осевом действии нагрузки происходит продольная и поперечная деформация стержня. Для определения продольной деформации используется закон Гука: $\sigma = \varepsilon \cdot E$, здесь $\varepsilon = \Delta L / L$ – относительное удлинение или укорочение стержня, а E – модуль упругости материала при растяжении или сжатии.

Величина продольной деформации рассматриваемого участка стержня, т.е. его абсолютного удлинения или укорочения определяется по формуле:

$$\Delta L_i = N_i \cdot L_i / E \cdot A_i \quad (4)$$

Эта величина ограничивается эксплуатационными требованиями, предъявляемыми ко всем элементам конструкций. Нормативное удлинение или укорочение стержня, обозначаемое $[\Delta L]$, в зависимости от назначения элемента колеблется в широком интервале от $L / 500$ до $L / 10000$.

Условие жесткости стержня:

$$|\Delta L_{max}| \leq [\Delta L] \quad (5)$$

В рассматриваемом примере удлинение растянутого участка, длина которого равна $3L / 4$: $\Delta L_1 = 3FL / 4EA$; укорочение сжатого участка длиной $L / 4$, примыкающего к жесткой заделке: $\Delta L_2 = - 2FL / 4EA = - FL / 2EA$.

Построение эпюры перемещений сечений стержня (рис. 2).
следует начать от опорного сечения, т.к. в жесткой заделке перемещение сечения равно 0.

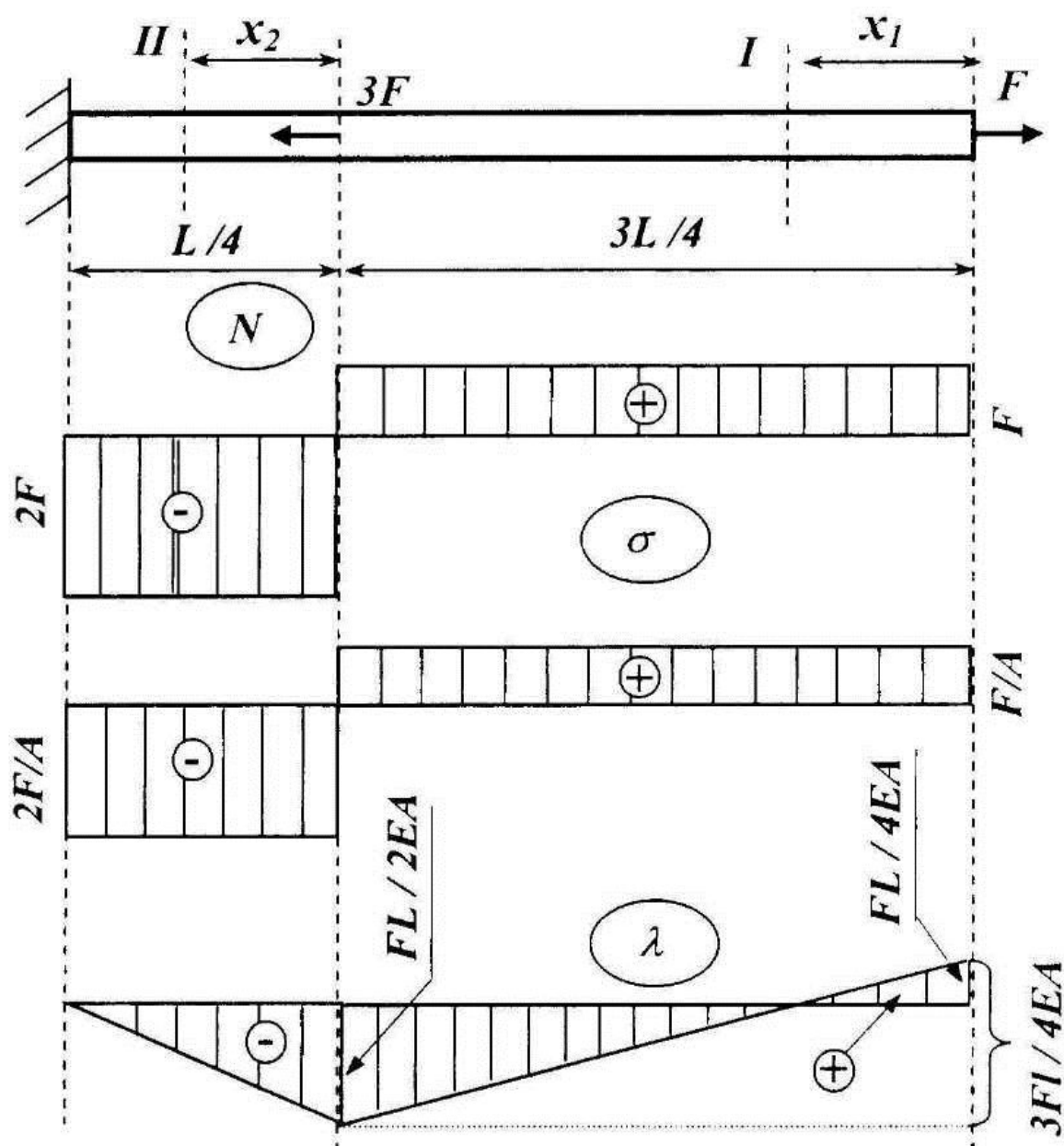


Рис. 2. Эпюры внутренних усилий, напряжений и перемещений

Полная продольная деформация стержня равна алгебраической сумме деформаций всех участков:

$$\lambda = \Delta L_{\text{п}} = \Sigma \Delta L_i = FL / 2EA - FL / 4EA = FL / 4EA.$$

При назначении размеров поперечного сечения из условия жесткости следует оценить величину максимальной продольной деформации:

$$|\Delta L_{\text{max}}| = 3FL / 4EA \leq [\Delta L] \Rightarrow A_{\text{тр}} \geq 3AL / 4E [\Delta L]$$

Размеры поперечного сечения стержня должны быть назначены таким образом, чтобы соблюдались оба критерия – условие прочности по нормальным напряжениям и условие жесткости. Следовательно, окончательно назначается большее, полученное из этих условий, сечение.

2. Пример расчета (проектная задача)

Для стержня, расчетная схема которого показана на рис. 3, требуется назначить размеры прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон $h:b = 2$ из условий прочности и жесткости.

Исходные данные для проектирования:

$$L = 0.6\text{ м}, F = 40\text{ кН}, R_p = 5\text{ МПа}, R_{сж} = 15\text{ МПа}, E = 0.2 \cdot 10^5\text{ МПа},$$

$$[\Delta L] = L / 2000.$$

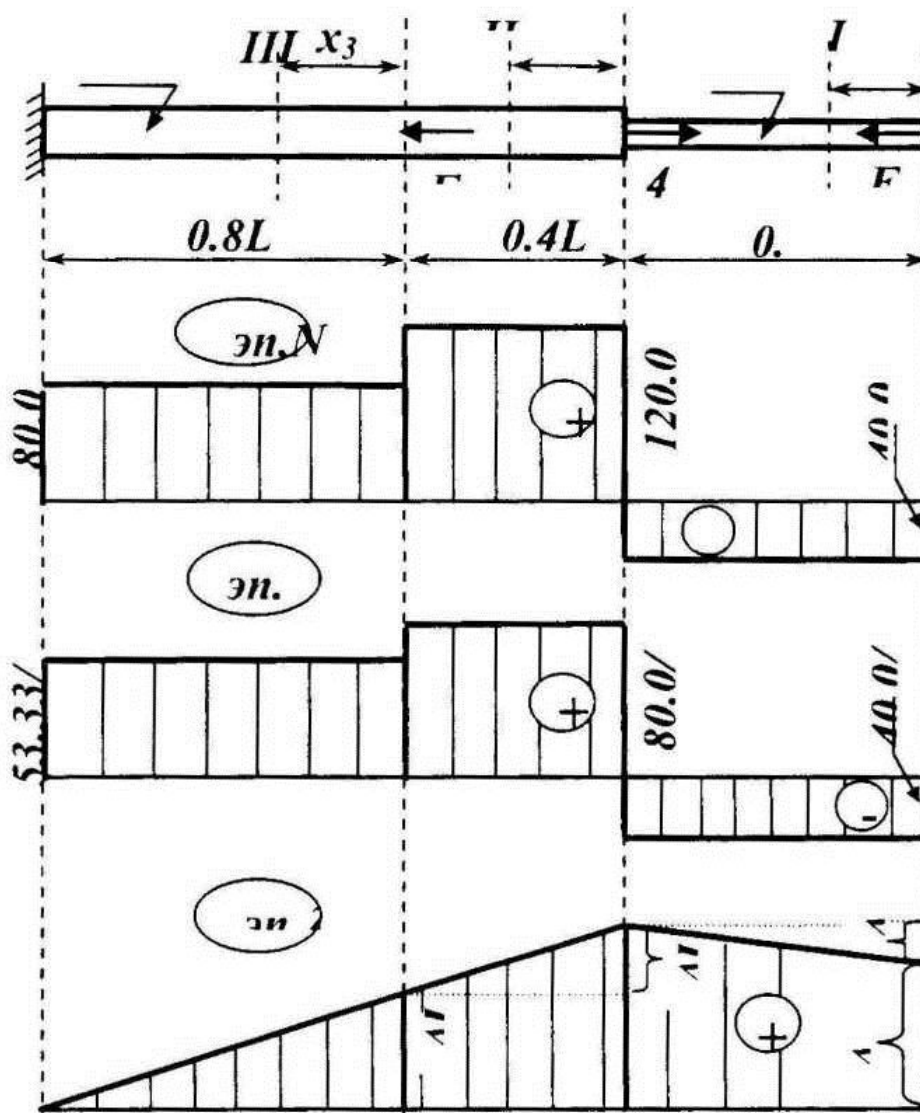


Рис. 3. Эпюры внутренних усилий, напряжений и перемещений

Расчет на прочность произвести по первому предельному состоянию.

Для определения положения опасных сечений стержня, т.е. сечений, в которых от действия внешней нагрузки возникают экстремальные нормальные напряжения, необходимо построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Для построения этих эпюр стержень разбивается на характерные участки, границами участков служат сечения, в которых приложены сосредоточенные силы или меняются размеры поперечного сечения.

Сечение I ($0 \leq x_1 \leq 0.5 L$) из уравнения равновесия отсеченной части стержня:

$$\sum x = 0 \Rightarrow N_1 = -F = -40 \text{ кН}$$

Нормальные напряжения в сечениях первого участка:

$$\sigma_1 = N_1 / A_1 = -F / A = \sigma_{\min}$$

Сечение II ($0 \leq x_2 \leq 0.4 L$) из уравнения равновесия отсеченной части стержня:

$$\sum x = 0 \Rightarrow N_2 = -F + 4F = 3F = 120 \text{ кН}$$

Нормальные напряжения в сечениях второго участка:

$$\sigma_2 = N_2 / A_2 = 3F / 1.5A = 2F / A = \sigma_{\max}$$

Сечение III ($0 \leq x_3 \leq 0.8 L$) из уравнения равновесия отсеченной части стержня

$$\sum x = 0 \Rightarrow N_3 = -F + 4F - F = 2F = 80 \text{ кН}$$

Нормальные напряжения в сечениях третьего участка:

$$\sigma_3 = N_3 / A_3 = 2F / 1.5A = 1.333F / A$$

Условие прочности по растягивающим напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 2F / A \leq R_p, \text{ отсюда } A_{\text{тр}} \geq 2F / R_p$$

$$A_{\text{тр}} \geq 2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} / 5 = 160 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 160 \text{ см}^2$$

Условие прочности по сжимающим напряжениям:

$$\sigma_{\min} = |\sigma_1| = F / A \leq R_{\text{сж}}, \text{ отсюда } A_{\text{тр}} \geq F / R_{\text{сж}}$$

$$A_{\text{тр}} \geq 40 \cdot 10^{-3} / 15 = 26.7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 26.7 \text{ см}^2$$

Из условий прочности требуемая площадь поперечного сечения стержня должна быть не менее 160 см^2 .

Для назначения размеров поперечного сечения из условия жесткости необходимо построить эпюру продольных деформаций стержня (эп. λ).

Анализ расчетной схемы стержня показывает, что поперечное сечение, примыкающее к жесткой заделке, не может перемещаться, следовательно, при построении эпюры перемещений за начало отсчета нужно принять жесткую заделку.

Расчетная схема для определения удлинения третьего участка:

Перемещение произвольного сечения стержня на этом участке:

$$\Delta L_{3(x)} = N_3 \cdot x / E \cdot A_3 \quad (0 \leq x \leq 0.8L);$$

удлинение третьего участка составляет:

$$\Delta L_3 = 2F \cdot 0.8 L / 1.5E \cdot A = 1.07F \cdot L / E \cdot A$$

Продольные деформации второго участка:

$\Delta L_{2(x)} = N_2 \cdot x / E \cdot A_2$,
удлинение второго участка:

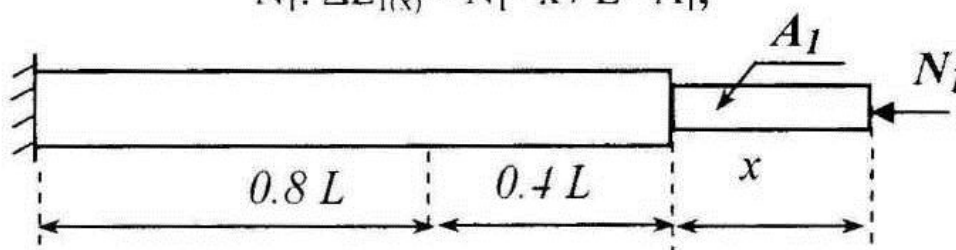
$$\Delta L_2 = 3F \cdot 0.4 L / 1.5 E \cdot A = 0.8FL / EA,$$

тогда деформация второго и третьего участков:

$$\Delta L_3 + \Delta L_2 = 1.87FL / EA$$

Укорочение первого участка от действия сжимающей силы

$$N_1: \Delta L_{1(x)} = N_1 \cdot x / E \cdot A_1,$$



деформация этого участка: $\Delta L_1 = - F \cdot 0.5 L / E \cdot A$.

Продольная деформация стержня, определяемая как алгебраическая сумма деформаций каждого из участков, равна:

$$\lambda = \Sigma \Delta L = \Delta L_3 + \Delta L_2 - \Delta L_1 = 1.37F \cdot L / E \cdot A$$

Построение эпюры продольных деформаций и эпюр внутренних усилий и напряжений показано на рис. 3. Назначение размеров поперечного сечения стержня производится по величине максимальной деформации участка. Условие жесткости:

$$\Delta L_3 = |\Delta L_{\max}| = 1.07 F L / E A \leq L / 2000;$$

$$A_{\text{тр}} \geq 1.07 \cdot 600 F / E$$

$$A_{\text{тр}} \geq 1.07 \cdot 2000 \cdot 40 \cdot 10^{-3} / 0.2 \cdot 10^5 = 42.8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 42.8 \text{ см}^2$$

Так как площадь поперечного сечения, вычисленная из условий прочности, превышает величину площади, полученной из условия жесткости, окончательно назначено: $A=160 \text{ см}^2$. Размеры сечения получены из условия $b \times h = 2b^2 = 160 \text{ см}^2$.

$$b = 160 / 2 = 8.9 \text{ см}, h = 2b = 17.8 \text{ см}.$$

3. Пример расчета (проверочная задача)

Требуется оценить прочность и жесткость стержня, расчетная схема которого показана на рис. 4. Расчет на прочность произвести по методу допускаемых напряжений.

Данные для расчета: $L = 1.0 \text{ м}$, $F = 0.65 \text{ МН}$, $q = 1.0 \text{ МН / м}$, $A_1 = 0.04 \text{ м}^2$, $A_2 = 0.1 \text{ м}^2$, $[\sigma_{сж}] = 50 \text{ МПа}$, $[\sigma_p] = 20 \text{ МПа}$, $E = 0.15 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\Delta L] = L / 1000$.

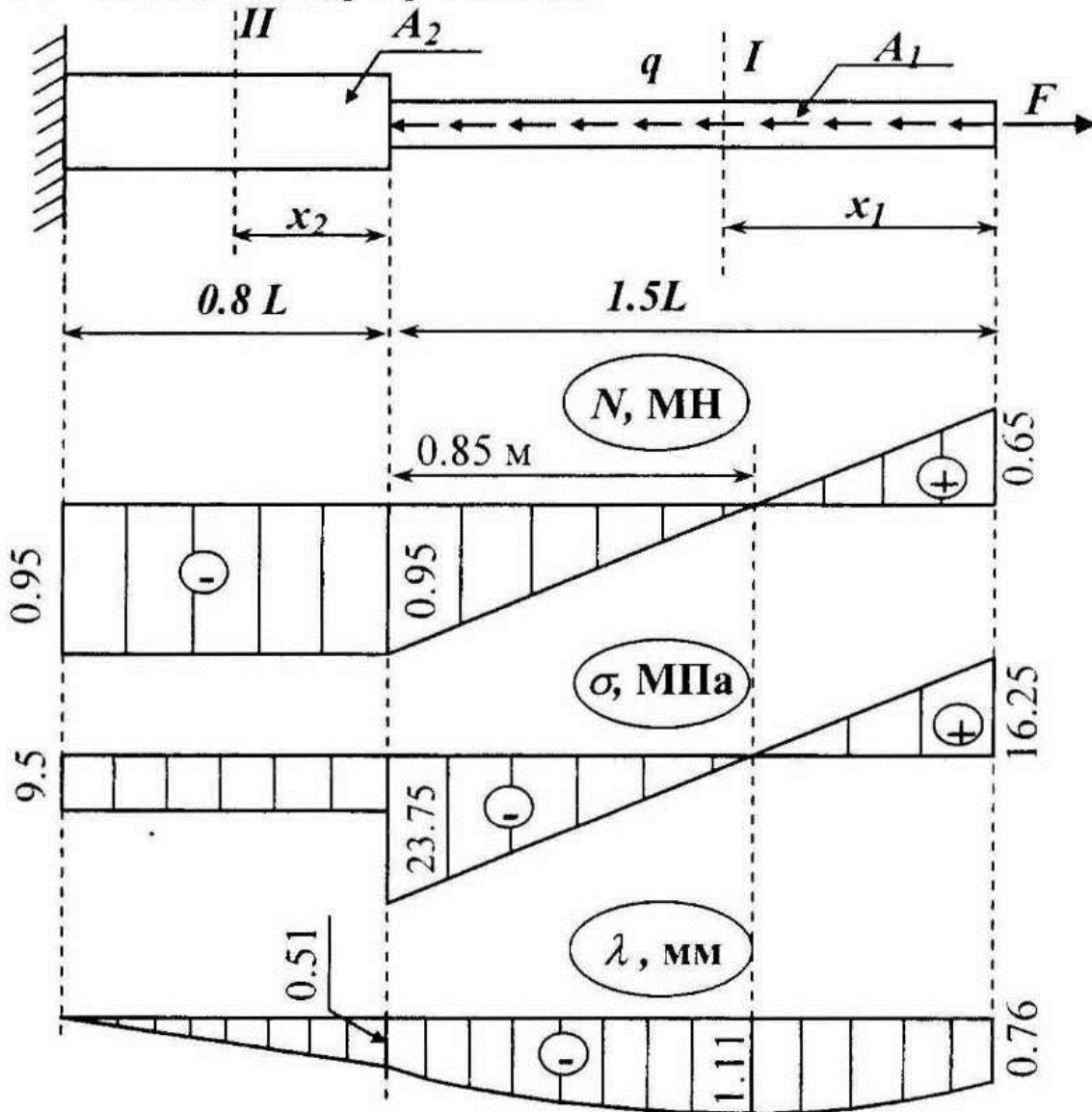


Рис. 4. Эпюры внутренних усилий, напряжений и перемещений

Для выполнения проверочного расчета на прочность необходимо построить эпюры внутренних усилий и нормальных напряжений, затем сравнить полученные результаты с напряжениями, допускаемыми для данного материала.

Стержень разбивается на два характерных участка, для каждого из них составляются аналитические выражения для определения продольной силы и нормального напряжения.

Сечение I ($0 \leq x_1 \leq 1.5L$)

$$N_1 = F - q x_1; \quad x_1 = 0 \Rightarrow N_1 = F = 0.65 \text{ МН},$$

$$x_1 = 1.5 \text{ м} \Rightarrow N_1 = 0.65 - 1.5 \cdot 1.0 = -0.95 \text{ МН};$$

$$\sigma_{1(x)} = N_{1(x)} / A_1;$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 0.65 / 0.04 = 16.25 \text{ МПа},$$

$$x_1 = 1.5 \text{ м} \Rightarrow \sigma_1 = -0.95 / 0.04 = -23.75 \text{ МПа}.$$

Сечение II ($0 \leq x_2 \leq 0.8L$)

$$N_2 = F - 1.5ql; \quad N_2 = 0.65 - 1.5 \cdot 1.0 = -0.95 \text{ МН};$$

$$\sigma_2 = N_2 / A_2; \quad \sigma_2 = -0.95 / 0.1 = -9.5 \text{ МПа}.$$

Анализ эпюры нормальных напряжений приводит к следующим выводам:

- максимальное (растягивающее) напряжение

$$\sigma_{max} = 16.25 \text{ МПа} \leq [\sigma_p] = 20 \text{ МПа}$$
 – условие прочности соблюдается;

- минимальное (сжимающее) напряжение

$$|\sigma_{min}| = 23.75 \text{ МПа} \leq [\sigma_{сж}] = 50 \text{ МПа}$$
 – условие прочности соблюдается.

Эпюры продольных сил и нормальных напряжений показаны на рис. 4.

Для расчета на жесткость необходимо определить продольную деформацию каждого участка стержня и построить эпюру перемещений, показанную на рис. 4. За начало отсчета принимается опорное сечение, т.к. его перемещение равно 0.

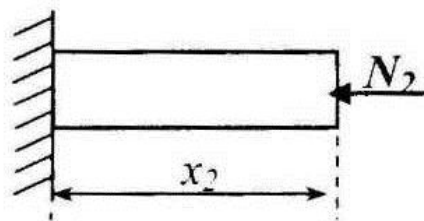
Рассматривая расчетную схему для определения деформации второго участка, получим:

$$\Delta L_2 = N_2 \cdot x_2 / E \cdot A_2; \quad (0 \leq x_2 \leq 0.8L)$$

$$\text{при } x = 0 \quad \Delta L_2 = 0;$$

$$\text{при } x = 0.8 \text{ м} \Rightarrow \Delta L_2 = -0.65 \cdot 1.5 / 0.15 \cdot 10^5 \cdot 0.04 = -0.51 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Полная деформация этого участка $\Delta L_{2п} = -0.51 \text{ мм}.$

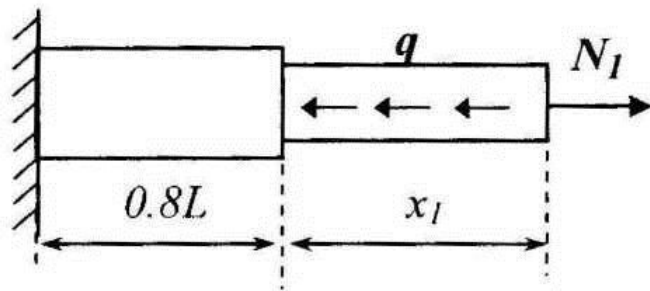


Из расчетной схемы для определения продольной деформации первого участка:

$$\Delta L_1 = N_{1(x)} \cdot x_1 / E \cdot A_1 - q \cdot x_1^2 / 2E \cdot A_1; \quad (0 \leq x_1 \leq 1,5L)$$

где $N_1 = F - q(1,5L - x_1)$.

При $x_1 = 0 \Rightarrow \Delta L_1 = 0$.



Так как продольная деформация стержня на рассматриваемом участке нелинейная, дополнительно определяется величина перемещения для сечения, в котором $N_1 = 0$ ($x = 0,85$ м).

$$\text{при } x = 0,85 \text{ м} \Rightarrow \Delta L_1 = (0,65 - 1,0 \cdot 0,65) 0,85 / 0,15 \cdot 10^5 \cdot 0,04 - 1,0 \cdot 0,85^2 / 2 \cdot 0,15 \cdot 10^5 \cdot 0,04 = - (0,0 + 0,60) \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta L_1 = - 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{при } x = 1,5 \text{ м} \Rightarrow \Delta L_1 = 0,65 \cdot 1,5 / 0,15 \cdot 10^5 \cdot 0,04 -$$

$$- 1,0 \cdot 1,5^2 / 2 \cdot 0,15 \cdot 10^5 \cdot 0,04 = (1,625 - 1,875) 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta L_1 = - 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Полная деформация первого участка $\Delta L_{1n} = - 0,25$ мм.

При построении эпюры перемещений сечений этого участка необходимо учитывать укорочение участка стержня, примыкающего к заделке. Тогда ординаты ΔL_i на эпюре следующие:

$$\text{при } x = 0 \Rightarrow \Delta L = - 0,51 + 0 = - 0,51 \text{ мм};$$

$$\text{при } x = 0,85 \text{ м} \Rightarrow \Delta L = - (0,51 + 0,60) = - 1,11 \text{ мм};$$

при $x = 1,5$ м полная деформация всего стержня:

$$\Delta L_{\text{полн}} = - (0,51 + 0,25) = - 0,76 \text{ мм}.$$

Заданная величина нормативной продольной деформации $[\Delta L] = L / 1000 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,0$ мм

Следовательно, условие жесткости $|\Delta L_{\text{max}}| \leq [\Delta L]$ выполняется как для каждого из участков, так и для всего стержня.

Все полученные результаты расчетов позволяют сделать вывод о том, что условия прочности и жесткости для рассматриваемого стержня соблюдены, его нормальная эксплуатация при действии заданной нагрузки обеспечивается.

Студентам очной формы обучения перед выполнением индивидуальной расчетно-графической работы или студентам заочникам перед выполнением контрольной работы рекомендуется

изучить теоретический материал о расчетах на прочность и жесткость при осевом действии нагрузок и проанализировать приведенные примеры таких расчетов в следующих учебниках:

[1], гл.2, § 2.1, 2.2; гл.3, § 3.1-3.11;

[2], гл. 3, § 3.1-3.3, 3.7;

[3], гл.3, § 13-15, гл.4, § 27, 28, гл.5, § 35, 36;

[4], гл.2, § 2.1 -2.3, 2.8, 2.10.

4. Вопросы для самоконтроля

1. Как определяются внутренние усилия и нормальные напряжения в поперечных сечениях при осевом действии нагрузок?
2. Как сформулировать условия прочности стержня при растяжении и сжатии и как использовать эти условия при назначении размеров поперечного сечения?
3. Что означает выражение «жесткость поперечного сечения» и как сформулировать условие жесткости при растяжении-сжатии стержней?
4. Как используется закон Гука при расчетах на жесткость?
5. Какие три типа задач позволяют решать условия прочности и жесткости?

Расчетно-графическая работа
Расчеты на прочность и жесткость при кручении
при осевом действии нагрузок

Для заданной расчетной схемы ступенчатого бруса (см. приложение №1) требуется:

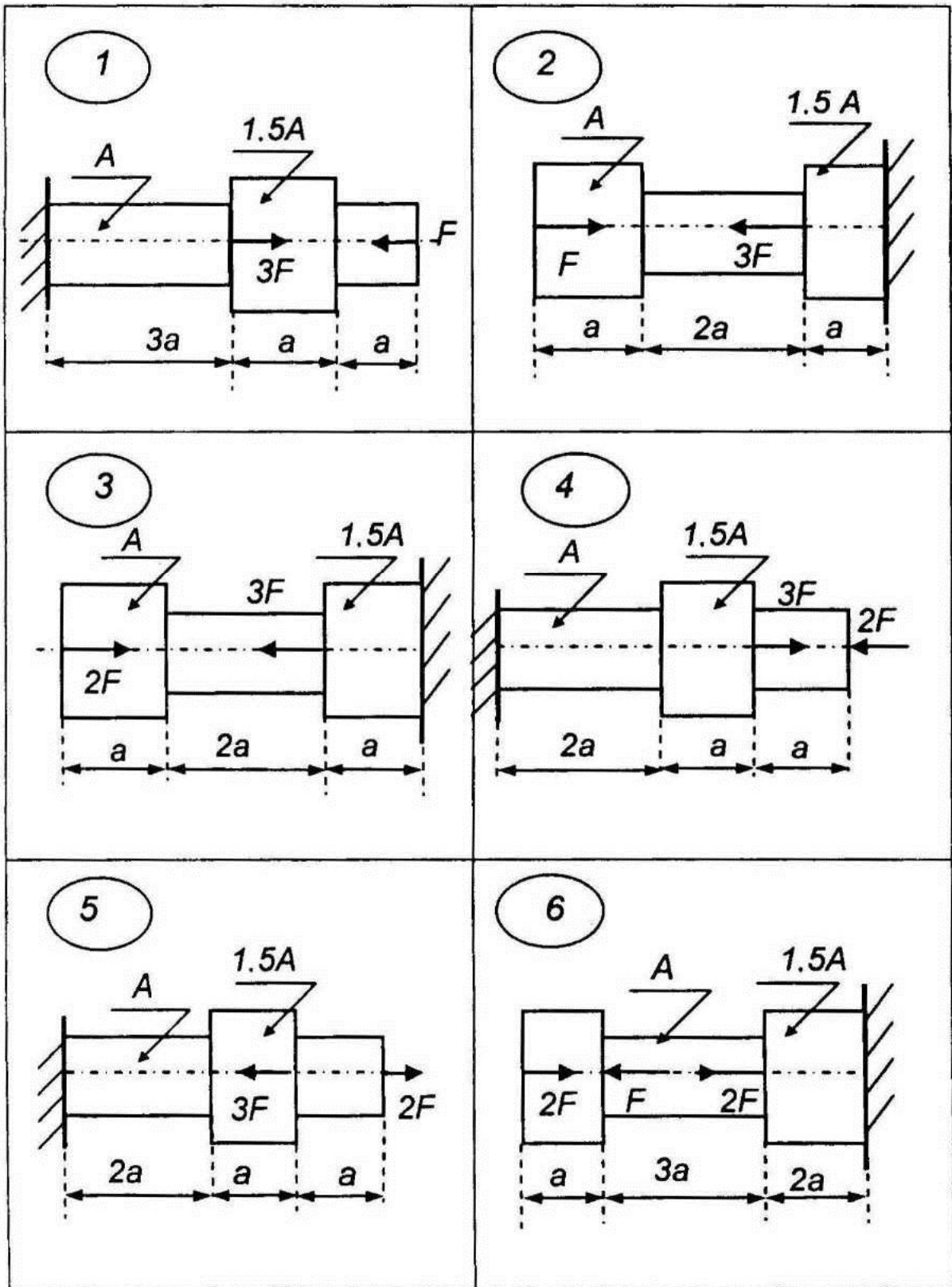
1. Разбить брус на характерные участки в зависимости от схемы приложения нагрузок и изменения размеров поперечного сечения.
2. Составить аналитические выражения для определения внутренних усилий по каждому участку, рассчитать их величину в характерных точках и построить эпюру продольных сил (эп. N , кН).
3. Записать условие прочности для каждого участка бруса. Назначить размеры прямоугольного поперечного сечения из условий прочности. Принять для всех нечетных вариантов расчетных схем соотношение сторон $b:h = 1:2$ и для всех четных вариантов $b:h = 1:1,5$. Построить эпюру нормальных напряжений (эп. σ , кПа или МПа).
4. Для каждого участка бруса составить уравнения для определения продольных деформаций; записать условие жесткости для каждого участка и из этого условия назначить размеры поперечного сечения. Построить эпюру перемещений (эп. λ , мм).
5. Сравнить размеры сечений, полученных из условий прочности и жесткости; окончательно назначить размеры, удовлетворяющие обоим условиям.

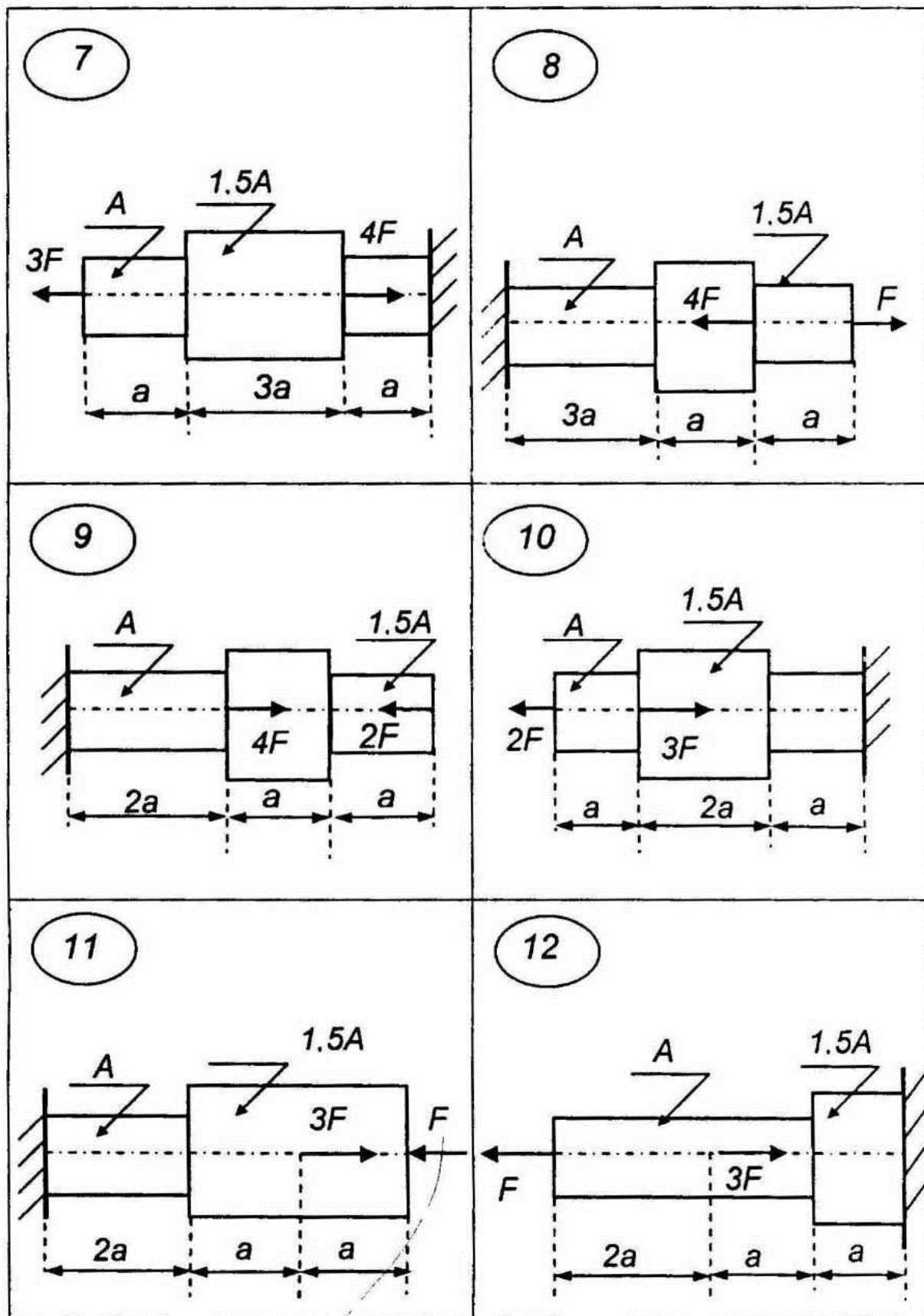
Параметры расчетных схем, необходимые для выполнения своего варианта задания, принять по табл. 1 приложения № 2.

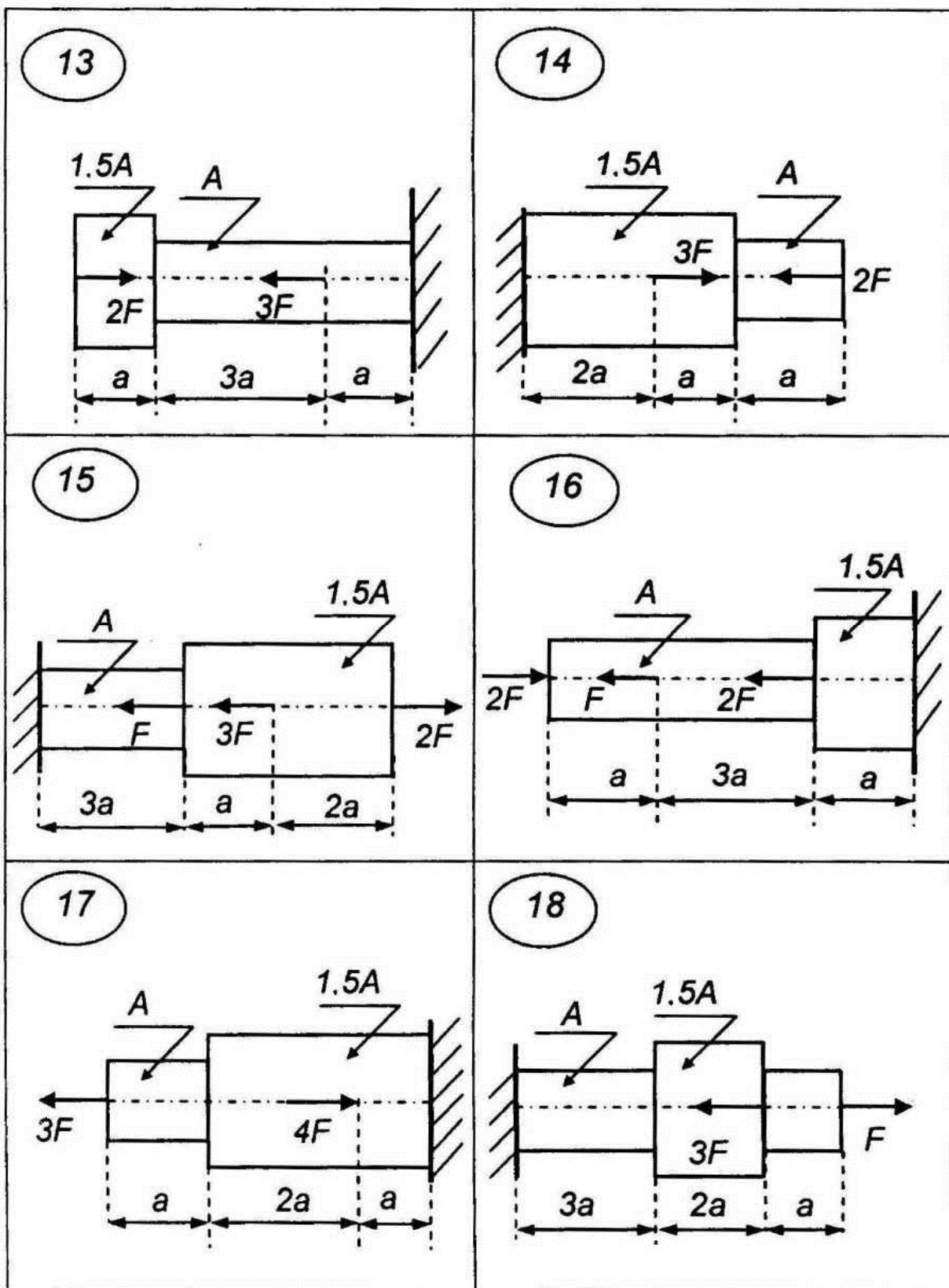
Литература

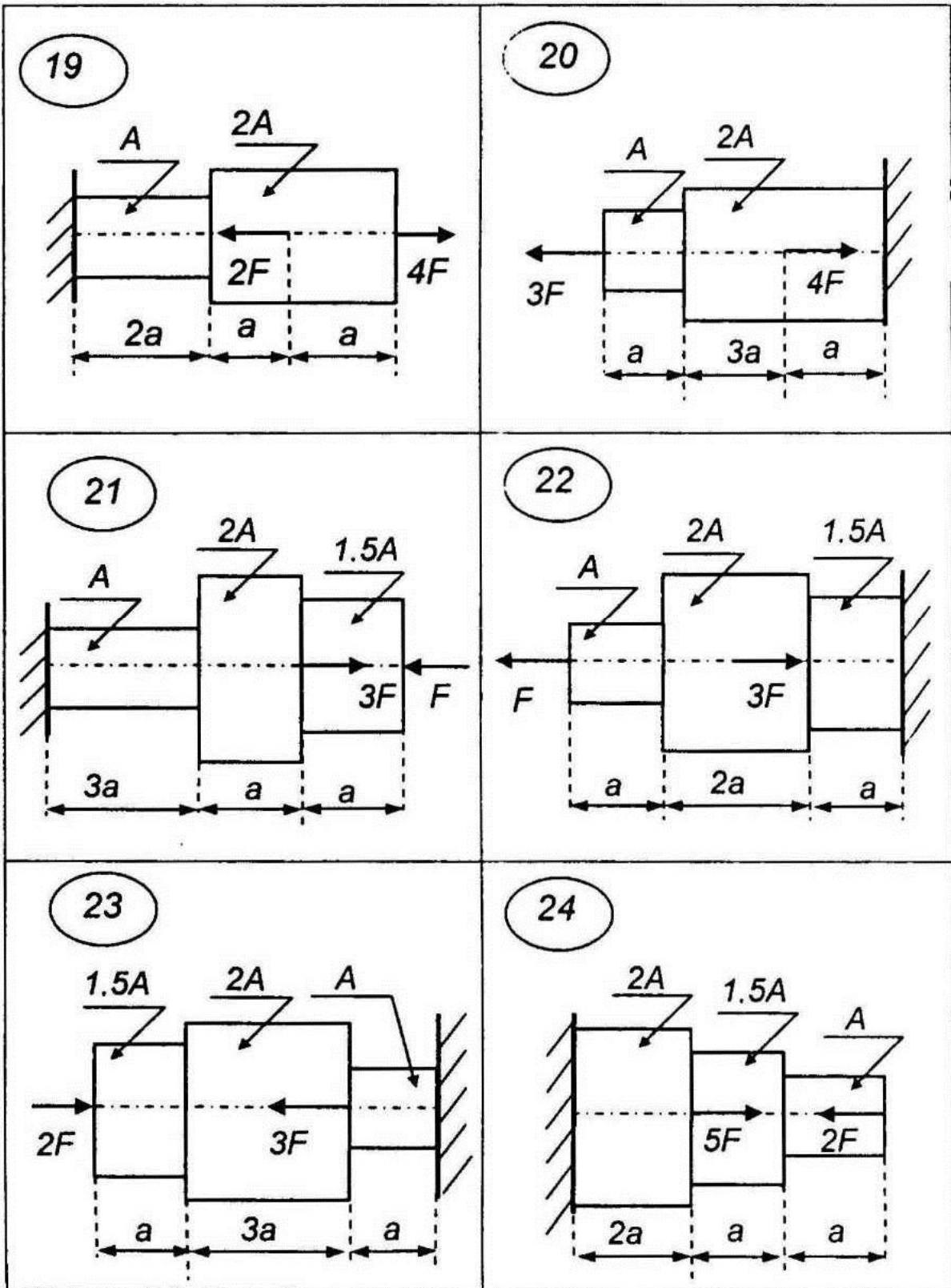
1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 560 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк. 1989, – 624 с.
3. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Учеб. для вузов / под ред. Г.С. Варданяна. – М.: Изд-во АСВ, 1995. – 568 с.
4. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / под ред. Г.С. Писаренко. – Киев: Высш. шк., 1986. – 736 с.

Расчетные схемы ступенчатых брусьев









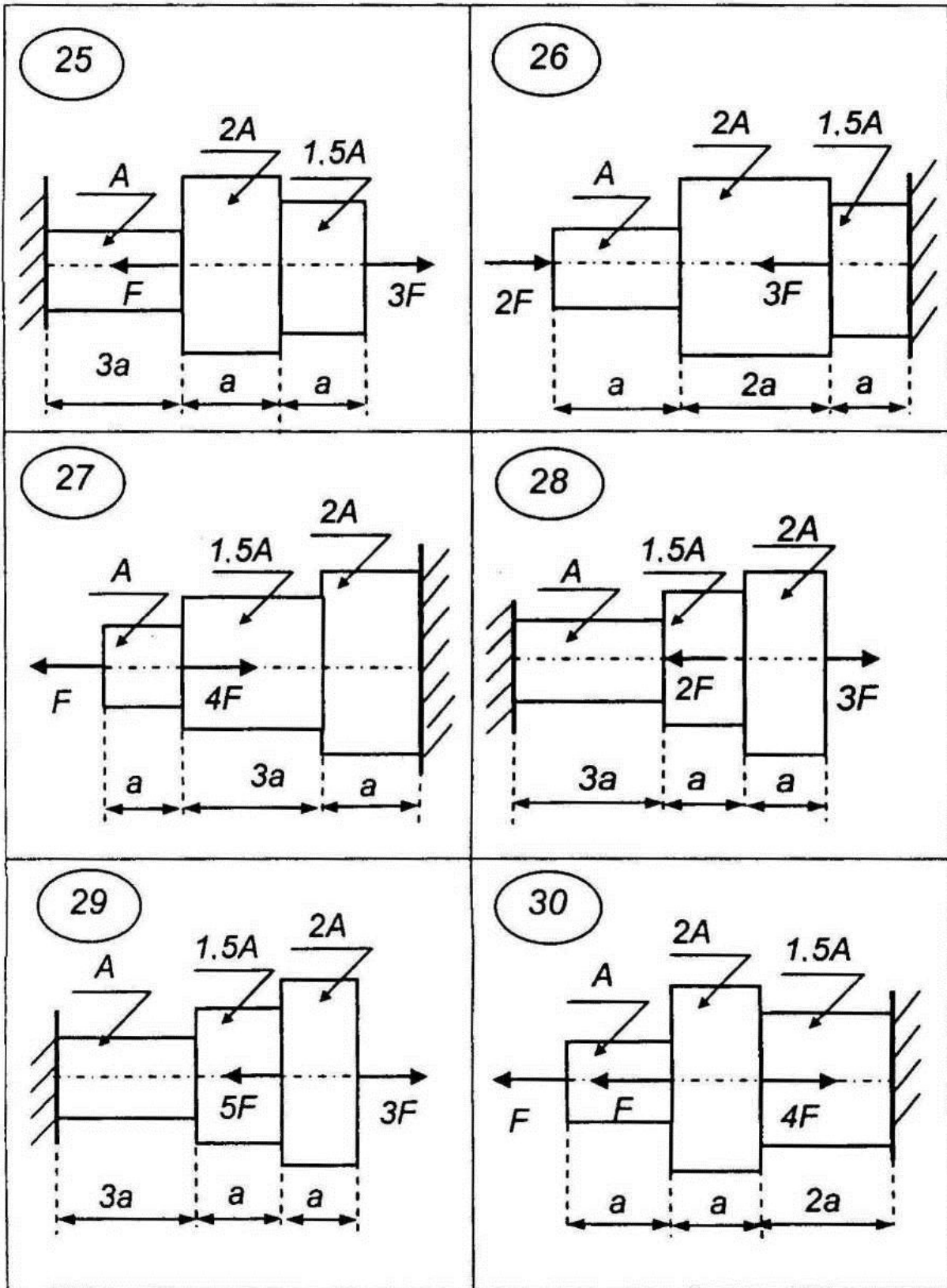


Таблица 1

Варианты исходных данных

№ вар.	a, м	F, кН	E, ГПа	R _p , МПа	R _{сж} , МПа	Δa
1	0,20	200	160	150	120	a/500
2	0,25	190	170	160	125	a/600
3	0,30	180	180	170	130	a/700
4	0,35	170	190	180	135	a/800
5	0,40	160	200	190	140	a/900
6	0,45	150	210	200	145	a/1000
7	0,50	140	150	140	110	a/800
8	0,55	130	140	130	100	a/700
9	0,60	120	130	120	90	a/600
10	0,65	110	120	100	80	a/500
11	0,60	130	150	130	90	a/600
12	0,55	140	160	150	100	a/800
13	0,45	150	170	170	110	a/900
14	0,40	160	180	190	120	a/1000
15	0,35	170	190	210	140	a/700

Содержание

Введение.....	3
1. Напряжения и деформации при растяжении и сжатии стержней.....	4
2. Пример расчета (проектная задача).....	8
3. Пример расчета (проверочная задача).....	11
4. Вопросы для самоконтроля.....	14
Расчетно-графическая работа «Расчеты на прочность и жесткость при осевом действии нагрузок».....	15
Литература.....	16
Приложение № 1.....	17
Приложение № 2	22