

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
СБОРНИК ЗАДАЧ С ТЕОРИЕЙ И ПРИМЕРАМИ
Учебное пособие

Сборник соответствует стандартной программе полного курса, а его первые главы — программам различных сокращенных курсов сопротивления материалов. Каждый раздел предваряется кратким изложением теоретического материала. При этом основные понятия вынесены в приложения. Теоретические части разделов заканчиваются резюме, в которых изложены алгоритмы решения соответствующих классов задач, и типовыми примерами. Задачи для самостоятельного решения сгруппированы по разделам. В заключительной главе представлены задачи повышенной сложности. Необходимый справочный материал приведен в приложении.

Для студентов технических университетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Предисловие</i> | 5 |
| <i>Глава 1. Растяжение и сжатие стержней</i> | 7 |
| § 1.1. Статически определимые задачи | 9 |
| § 1.2. Статически неопределимые задачи | 20 |
| <i>Глава 2. Расчет ферменных систем</i> | 41 |
| § 2.1. Статически определимые задачи | 44 |
| § 2.2. Статически неопределимые задачи | 55 |
| <i>Глава 3. Геометрические характеристики плоских областей</i> | 73 |
| § 3.1. Статические моменты, моменты инерции, центр тяжести | 73 |
| § 3.2. Вычисление главных моментов инерции и положения главных осей | 88 |
| § 3.3. Тонкостенные сечения | 98 |
| <i>Глава 4. Кручение</i> | 106 |
| § 4.1. Статически определимые задачи | 109 |
| § 4.2. Статически неопределимые задачи | 118 |
| <i>Глава 5. Поперечный изгиб</i> | 131 |
| § 5.1. Эпюры внутренних силовых факторов | 132 |
| § 5.2. Нормальные напряжения и перемещения | 145 |
| § 5.3. Касательные напряжения. Центр изгиба | 165 |
| <i>Глава 6. Косой изгиб и внецентренное растяжение-сжатие</i> | 179 |
| § 6.1. Косой изгиб | 179 |
| § 6.2. Внецентренное растяжение-сжатие | 193 |
| <i>Глава 7. Перемещения и внутренние силовые факторы в статически определимых и статически неопределимых стержневых системах</i> | 204 |
| § 7.1. Статически определимые задачи | 205 |
| § 7.2. Расчет цилиндрических пружин | 235 |
| § 7.3. Статически неопределимые задачи | 246 |
| <i>Глава 8. Основы общей теории напряженного и деформированного состояний. Теории прочности</i> | 283 |
| <i>Глава 9. Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии</i> | 304 |
| <i>Глава 10. Расчет оболочек вращения</i> | 327 |
| <i>Глава 11. Продольно-поперечный изгиб и устойчивость стержней</i> | 347 |
| § 11.1. Продольно-поперечный изгиб | 347 |
| § 11.2. Устойчивость стержней | 359 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 11.3. Энергетические методы решения задач устойчивости и продольно-поперечного изгиба | 376 |
| <i>Глава 12. Динамическое нагружение стержневых систем</i> | <i>385</i> |
| § 12.1. Расчет движущихся систем статическими методами | 385 |
| § 12.2. Ударное нагружение стержневых систем | 391 |
| <i>Глава 13. Расчет стержневых систем за пределом упругости</i> | <i>409</i> |
| <i>Глава 14. Расчеты на усталость</i> | <i>427</i> |
| <i>Глава 15. Стержни большой кривизны</i> | <i>441</i> |
| <i>Глава 16. Задачи повышенной сложности</i> | <i>456</i> |
| <i>Приложение</i> | <i>474</i> |
| § П.1. Основные понятия сопротивления материалов | 474 |
| § П.2. Справочные материалы | 490 |
| <i>Ответы</i> | <i>520</i> |
| <i>Библиографический список</i> | <i>540</i> |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов технических университетов. Оно написано на основе многолетнего опыта преподавания дисциплины “Сопротивление материалов” на кафедре “Сопротивление материалов, динамика и прочность машин” Московского государственного авиационного института (технического университета) — “МАИ” и соответствует стандартной программе полного курса, реализуемой, как правило, в течение двух семестров, а его первые главы соответствуют программам различных сокращенных курсов для “немеханических” специальностей.

В главах 1—7 изложены основы сопротивления материалов: расчет прямых стержней при простейших видах напряженно-деформированного состояния и стержневых систем, в том числе ферм и пружин. Главы 9—14 сборника охватывают такие темы, как основы теории напряженного и деформированного состояний, прочность стержневых систем при сложном напряженном состоянии, безмоментные оболочки вращения, продольно-поперечный изгиб и устойчивость стержней, модели динамического нагружения стержневых систем, учет эффектов пластичности и элементы методов расчета на усталость. Кроме того, добавлены не всегда включаемый в стандартные курсы материал, касающийся стержней большой кривизны (глава 15), и задачи повышенной сложности (глава 16). Общие теоретические положения вынесены в первый параграф приложения (§ П.1). Основные гипотезы сопротивления материалов сформулированы в виде аксиом, что позволяет подчеркнуть феноменологический подход к построению фундамента этой науки как раздела механики деформируемого твердого тела. Соответствующие восемь аксиом включены в приложение.

Каждый раздел (глава и параграф), за исключением главы 16, предваряется кратким изложением соответствующего теоретического материала, призванным облегчить процесс решения задач, но ни в коей мере не заменяющим полные учебники. Теоретические части текста заканчиваются резюме, в которых сжато излагаются алгоритмы решения соответствующих классов задач, и примерами решения типовых задач. Усвоение этого материала должно позволить обучающимся успешно решать большинство

приведенных в данном разделе задач. Окончание формулировок аксиом, определений, утверждений и решений примеров отмечается значком “■”.

Задачи для самостоятельного решения сгруппированы по разделам. В некоторых случаях они снабжены дополнительными указаниями. Для облегчения работы преподавателя задачи даны большими типовыми сериями. Используются два типа нумерации рисунков к задачам: либо, для рисунков, иллюстрирующих текст, традиционная (например, “Рис. 1.10”), либо, для серий однотипных задач, такая, при которой номер рисунка является номером соответствующей задачи (например, “1.10”, без слова “Рис.”). Ответы ко всем задачам приведены в конце пособия. Если они являются приближенными, то даются с точностью до трех значащих цифр. При этом эюры в ответы не включаются, а указываются лишь их характерные признаки. Необходимый для решений справочный материал приведен во втором параграфе приложения (§ П.2).

При изложении теоретического материала, выборе справочного материала и составлении задач использованы источники, указанные в библиографическом списке, а также накопленный на кафедре “Сопротивление материалов, динамика и прочность машин” МАИ банк учебно-методических материалов. В этом смысле пособие является плодом коллективного труда не только непосредственных составителей, но и всех сотрудников кафедры, как ныне здравствующих, так и покинувших нас.

Авторы выражают признательность рецензентам за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, позволившие улучшить содержание пособия.

Глава 1

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

Основной объект в этой главе — прямой стержень (см. определение П.3; далее полное название “прямой стержень” часто будем заменять сокращенным — “стержень”). При этом в соответствии с общим соглашением (см. определение П.16) ось Ox прямоугольной декартовой системы координат (ПДСК) $Oxyz$ стандартно направляется вдоль оси стержня.

Определение 1.1. *Одноосным растяжением-сжатием* (просто *растяжением-сжатием*) стержня называется такой вид его деформации, при котором ось остается прямолинейной после деформации и в каждой точке любого поперечного сечения отлочно от нуля только нормальное напряжение

$$\sigma = \sigma_x \neq 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \quad (1.1)$$

которое распределено так, что отличен от нуля только один внутренний силовой фактор — нормальная сила (определение П.16):

$$N \neq 0, \quad Q_y = Q_z = 0, \quad M_x = M_y = M_z = 0. \quad \blacksquare \quad (1.2)$$

В соответствии с определением 1.1 и гипотезой Бернулли (аксиома 8, см. § П.1) перемещения в каждой точке сечения стержня одинаковы и коллинеарны оси стержня:

$$u(x, y, z) = \delta(x) i. \quad (1.3)$$

И поэтому можно говорить о *перемещении* $\delta(x)$ *поперечного сечения*, проходящего через точку $A \in \Gamma$ с координатой x . При этом продольные деформации связаны с перемещениями следующим образом:

$$\varepsilon_x = \varepsilon(x) = \delta'(x). \quad (1.4)$$

Связь напряженного и деформированного состояний в поперечном сечении в соответствии с аксиомой 7 (см. § П.1) задается *законом Гука*:

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha \Delta t), \quad \varepsilon_{ii} = -\nu \varepsilon, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad (1.5)$$

где ε_{ii} — деформация в направлении, перпендикулярном оси; Δt — изменение температуры; E , ν , α — характеристики материала (их

значения для конкретных материалов приведены в § П.2): E — модуль упругости первого рода (модуль Юнга), ν — коэффициент Пуассона, α — линейный коэффициент температурного расширения.

Из (1.4), (1.5) следует, что напряжения распределены равномерно по сечению: $\sigma = \sigma(x)$, а формулы (П.24) приводят к следующей связи продольных усилий и напряжений:

$$N = \sigma F, \quad (1.6)$$

где F — площадь поперечного сечения.

С использованием метода сечений и уравнений равновесия доказывается справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1.1. (Условия растяжения-сжатия.) Для того чтобы стержень находился в состоянии растяжения-сжатия, необходимо и достаточно, чтобы сосредоточенные и распределенные внешние силы (см. § П.1) были коллинеарны его оси, моменты отсутствовали, а температурное поле зависело только от координаты x :

$$P_k = P_k i, \quad q = p i, \quad M_l = 0, \quad m = 0, \quad \Delta t = \Delta t(x). \quad (1.7)$$

При этом силы должны быть приложены в центрах тяжести сечений. ■

Последняя часть утверждения обосновывается в теории изгиба (см. гл. 5).

Отметим также, что в случае растяжения-сжатия реакции в опорах также направлены по оси стержня.

В сечении, наклоненном к оси под углом α (рис. 1.1), имеют место как нормальные σ_α , так и касательные τ_α растяжения:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (1.8)$$

При этом τ_α связаны с деформациями $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ($\beta = \pi/2 - \alpha$) таким образом:

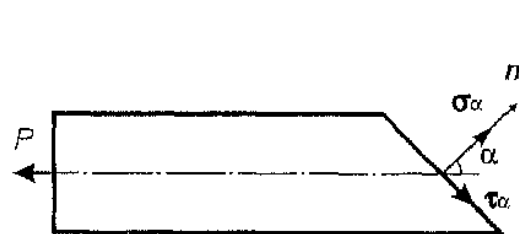


Рис. 1.1

$$\tau_\alpha = 2G\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.9)$$

где G — модуль упругости второго рода (модуль сдвига).

Используя формулы (1.8), при $\alpha = \pi/2$ и определение 1.1, получаем следующий вывод.

Утверждение 1.2. В каждой точке стержня, находящегося в условиях растяжения-сжатия, имеет место одноосное напряженное состояние (см. определение П.12):

$$\sigma = \sigma_x \neq 0, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

т.е. выполняется условие ненадавливаемости (невозмущаемости) продольных волокон. ■

Иногда используется дифференциальное уравнение равновесия стержня при растяжении-сжатии:

$$N'(x) = -p(x), \quad (1.10)$$

которое с учетом (1.4)—(1.6) может быть записано в перемещениях:

$$(EF\delta')' = -p + (\alpha EF\Delta t)'. \quad (1.11)$$

Последнее является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Для него ставятся краевые задачи, а именно добавляются граничные условия, основные из которых следующие:

— закрепленный конец ($x = x_1$):

$$u|_{x=x_1} = 0; \quad (1.12)$$

— на конце стержня $x = x_2$ приложена продольная сила P :

$$N|_{x=x_2} = EF(\delta' - \alpha\Delta t)|_{x=x_2} = P. \quad (1.13)$$

В случае свободного конца в (1.13) нужно положить $P = 0$.

Удельная потенциальная энергия (см. утверждение П.3) при одноосном напряженно-деформированном состоянии (НДС) определяется так:

$$u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon. \quad (1.14)$$

Отсюда при учете (1.6) при растяжении-сжатии стержня длиной l потенциальная энергия вычисляется следующим образом:

$$U = \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dx. \quad (1.15)$$

§ 1.1. Статически определимые задачи

Поскольку при растяжении-сжатии нетривиальным является лишь одно уравнение равновесия (проекция сил на ось), то в соответствии с определением П.17 статическая определимость

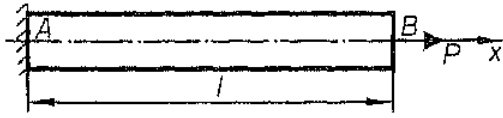


Рис. 1.2

будет иметь место только в том случае, когда один из концов стержня закреплен, а на втором приложена продольная сила — он свободен (рис. 1.2).

При этом наличие температурного поля не приводит к изменению напряженного состояния. Поэтому в таких задачах его не учитывают.

Если внешние нагрузки, геометрические и физические характеристики стержня являются непрерывными функциями координаты x , то НДС может быть найдено как решение соответствующей краевой задачи (1.11)—(1.13).

Пример 1.1. Найти N , σ , ε и δ для стержня, указанного на рис. 1.2, полагая, что $EF = \text{const}$.

Решение. Краевая задача в этом случае имеет вид

$$EF\delta'' = 0, \quad \delta|_{x=0} = 0, \quad EF\delta'|_{x=l} = P.$$

Интегрируя уравнение, получаем $\delta = C_1x + C_2$. Присутствующие здесь константы находятся из граничных условий: $C_1 = P/(EF)$, $C_2 = 0$. Следовательно,

$$\delta(x) = \frac{Px}{EF}. \quad (1.16)$$

Кроме того, из формул (1.4)—(1.6) найдем

$$\varepsilon = \delta' = \frac{P}{EF}, \quad \sigma = \frac{P}{F}, \quad N = P. \quad (1.17)$$

Дополнительно вычислим удлинение Δl стержня, очевидно совпадающее с перемещением δ_B правого сечения:

$$\Delta l = \delta_B = \delta|_{x=l} = \frac{Nl}{EF} = \frac{Pl}{EF}. \quad \blacksquare \quad (1.18)$$

В соответствии с формулами (1.16)—(1.18) используется следующая терминология.

Определение 1.2. Произведение EF называется *жесткостью стержня на растяжение-сжатие*. ■

Однако в общем случае такой подход неудобен, так как приводит к необходимости разбивать стержень на участки с последующей стыковкой соответствующих решений. Поэтому, как правило, используется следующий *алгоритм решения статически определимых (СО) задач*.

1. Разбиваем стержень на участки с границами, соответствующими точкам разрыва внешних нагрузок, в том числе точкам приложения сосредоточенных сил, а также скачкам геометрических или механических характеристик. Концы участков обычно обозначаются прописными буквами (например, $A-B$, $B-C$ и т.д.) или цифрами (например, $1-2$, $2-3$ и т.д.). На каждом из участков, как правило, вводится местная система координат.

2. Из уравнений равновесия в проекции на ось Ox определяем реакцию в опоре. Равнодействующую внешних сил находим по формулам, приведенным в (II.11). Для распределенной нагрузки во многих случаях она может быть определена как площадь соответствующей эпюры (см. табл. 5.1).

Этот пункт может быть опущен, если рассматривать участки, начиная с незакрепленного конца.

3. Последовательно на каждом из участков строим эпюры ("Э"):

а) продольных сил N с помощью метода сечений и уравнений равновесия (равнодействующая внешних сил для отсеченной части стержня G_+ или G_- находится по первой из формул в (II.11));

б) напряжений по вытекающей из (1.6) формуле $\sigma = N/F$ (если $F = \text{const}$, то ΔN и $\Delta \sigma$ можно совмещать, так как они различаются только масштабом);

в) деформаций по вытекающей из (1.5) формуле $\varepsilon = \sigma/E$ (если $E = \text{const}$, то $\Delta \sigma$ и $\Delta \varepsilon$ можно совмещать, так как они различаются только масштабом);

г) перемещений по вытекающей из (1.4) формуле (для примера указан участок $B-C$, следующий за $A-B$; перемещение δ_B сечения B находится при рассмотрении участка $A-B$)

$$\delta(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx + \delta_B. \quad (1.19)$$

На каждой из эпюр указываем их экстремальные значения внутри участков (если они имеются).

При построении эпюр удобно пользоваться следующими выводами, вытекающими из соотношений (1.10), (1.19), свойств интегралов и производных, а также из аксиомы 1 (см. § II.1):

— если p ($\Delta \varepsilon$) — многочлен, то ΔN ($\Delta \delta$) — тоже многочлены, степень которых на единицу больше (например, постоянная погонная нагрузка дает линейную зависимость для продольного усилия, линейная погонная нагрузка — параболическую кривую

для продольного усилия и т.д.; при этом достаточно находить лишь граничные значения продольных усилий и перемещений);

— по знаку p ($\partial \epsilon$) можно судить о возрастании или убывании ∂N ($\partial \delta$);

— необходимым условием экстремума ∂N ($\partial \delta$) является равенство $p = 0$ ($\epsilon = 0$), а достаточным — изменение знака p ($\partial \epsilon$);

— ∂N в точках приложения сосредоточенных сил имеет скачки (разрывы первого рода), равные по величине этим силам;

— $\partial \delta$ непрерывна.

Если по условиям задачи требуется провести расчет на прочность, то в соответствии с и. VI § П.1 в алгоритм добавляются следующие пункты.

4. По заданному коэффициенту запаса прочности и предельным напряжениям $\sigma_{пр}$ либо $\sigma_{пр.р}$ и $\sigma_{пр.с}$ определяем допускаемое напряжение $[\sigma]$ либо $[\sigma]_р$ и $[\sigma]_с$. Этот пункт может отсутствовать, если непосредственно в условии задачи заданы допускаемые напряжения. В противном случае должны быть либо даны максимальные предельные напряжения, либо указан материал и то напряжение, которое принимается в качестве предельного. Таковыми в зависимости от требований к конструкции могут быть *предел пропорциональности* $\sigma_{пц}$, или *предел упругости* σ_y , или *предел текучести* $\sigma_{т}$, или *предел прочности (временное сопротивление)* σ_b , или *условный предел текучести* $\sigma_{0,2}$. Эти величины берутся из полученных опытным путем так называемых “условных диаграмм растяжения-сжатия”, которые приведены на рис. 1.3 и 1.4 для двух различных материалов, соответственно обладающих

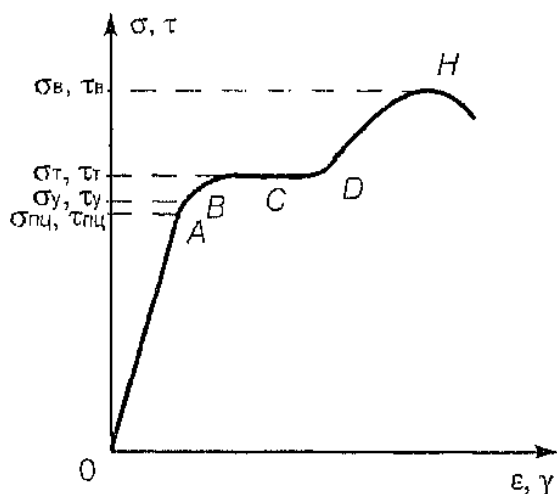


Рис. 1.3

площадкой текучести C—D и без нее. Отметим, что участки диаграмм O—A и O—B соответствуют линейной зависимости между напряжениями и деформациями (закону Гука) и сохранению упругих свойств материала, а величина $\sigma_{0,2}$ на второй диаграмме — остаточным деформациям (деформациям после снятия нагрузки) $\epsilon_{ост} = 0,2\%$.

5. По $\partial \sigma$ (и $\partial \delta$) находим максимальное расчетное на-

пряжение σ_{\max} или $\sigma_{\max p}$, $\sigma_{\max c}$ (и $|\delta|_{\max}$) и из решения неравенств (П.27) вычисляем требуемую площадь сечения. ■

Пример 1.2. Построить эпюры нормальных сил, напряжений и перемещений сечений для ступенчатого стержня, приведенного на рис. 1.5. Модуль упругости положить постоянным.

Решение (нумерация пунктов соответствует представленному выше алгоритму решения СО-задач). 1. Разбиваем стержень на участки (см. рис. 1.5).

2. Заделку в сечении 0 заменяем реакцией R_0 , которую определяем из уравнения равновесия (см. обозначения (П.25)):

$$\sum X = 0: -R_0 + 7P - 3P + P = 0, R_0 = 5P.$$

3. Рассматривая равновесие отсеченных частей стержня на каждом участке, определяем продольное усилие (используется местная система координат, рис. 1.6):

— участок 0—1:

$$\sum X = 0: -5P + N_{01} = 0, N_{01} = 5P;$$

— участок 1—2:

$$\sum X = 0: -5P + 7P + N_{12} = 0, N_{12} = -2P;$$

— участок 2—3:

$$\sum X = 0: -5P + 7P + N_{23} = 0, N_{23} = -2P;$$

— участок 3—4:

$$\sum X = 0: -5P + 7P - 3P + N_{34} = 0, N_{34} = P;$$

ЭН приведена на рис. 1.5.

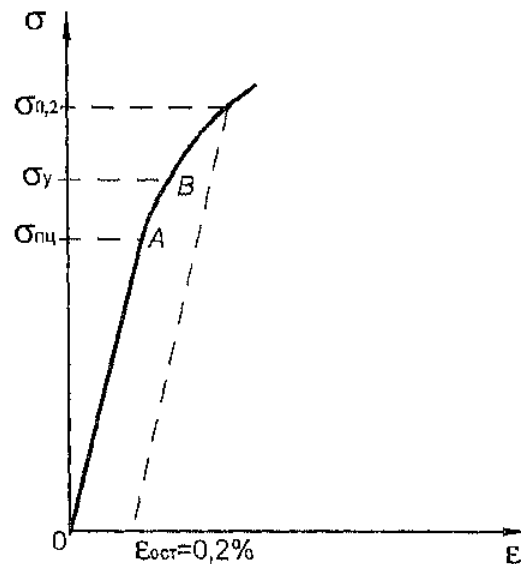


Рис. 1.4

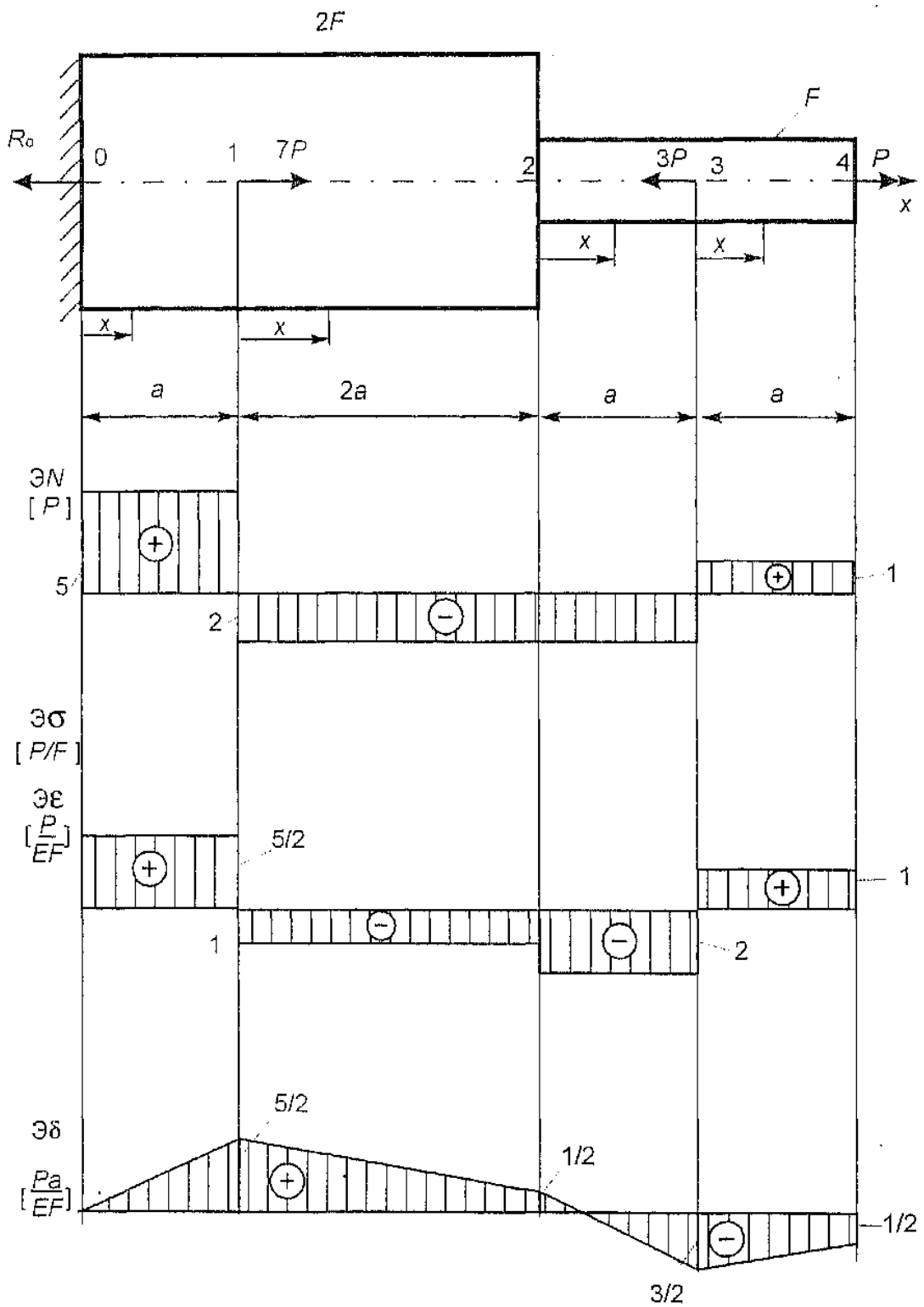


Рис. 1.5

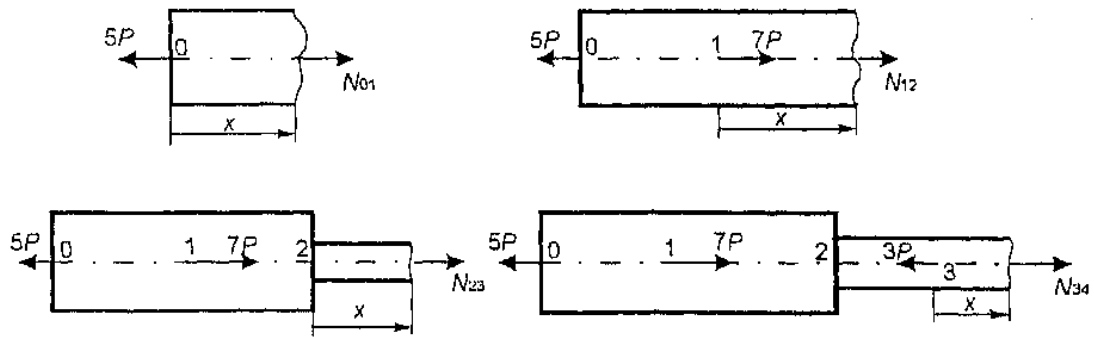


Рис. 1.6

Нормальные напряжения и деформации вычисляем, используя формулы (1.5) и (1.6) (здесь используются такие же индексы, как и для N):

$$\sigma_{01} = \frac{5P}{2F}, \quad \sigma_{12} = -\frac{P}{F}, \quad \sigma_{23} = -\frac{2P}{F}, \quad \sigma_{34} = \frac{P}{F};$$

$$\epsilon_{01} = \frac{5P}{2EF}, \quad \epsilon_{12} = -\frac{P}{EF}, \quad \epsilon_{23} = -\frac{2P}{EF}, \quad \epsilon_{34} = \frac{P}{EF}.$$

Поскольку ϵ_{σ} и ϵ_{ϵ} различаются только масштабом, то на рис. 1.5 они объединены.

Перемещения на каждом из участков находим с помощью (1.19):

— участок 0—1 ($\delta_0 = 0$):

$$\delta_{01} = \delta_0 + \int_0^x \frac{5P}{2EF} dx = \frac{5P}{2EF} x, \quad \delta_1 = \delta_{01}(a) = \frac{5Pa}{2EF};$$

— участок 1—2:

$$\delta_{12} = \delta_1 - \int_0^x \frac{P}{EF} dx = \frac{P}{EF} \left(\frac{5}{2} a - x \right), \quad \delta_2 = \delta_{12}(2a) = \frac{Pa}{2EF};$$

— участок 2—3:

$$\delta_{23} = \delta_2 - \int_0^x \frac{2P}{EF} dx = \frac{P}{EF} \left(\frac{1}{2} a - 2x \right), \quad \delta_3 = \delta_{23}(a) = -\frac{3Pa}{2EF};$$

— участок 3—4:

$$\delta_{34} = \delta_3 + \int_0^x \frac{P}{EF} dx = \frac{P}{EF} \left(-\frac{3}{2} a + x \right), \quad \delta_4 = \delta_{34}(a) = -\frac{Pa}{2EF}.$$

Эд приведена на рис. 1.5. ■

Пример 1.3. Для ступенчатого стержня, представленного на рис. 1.7, построить эпюры N , σ , ε , δ и провести проектировоч-

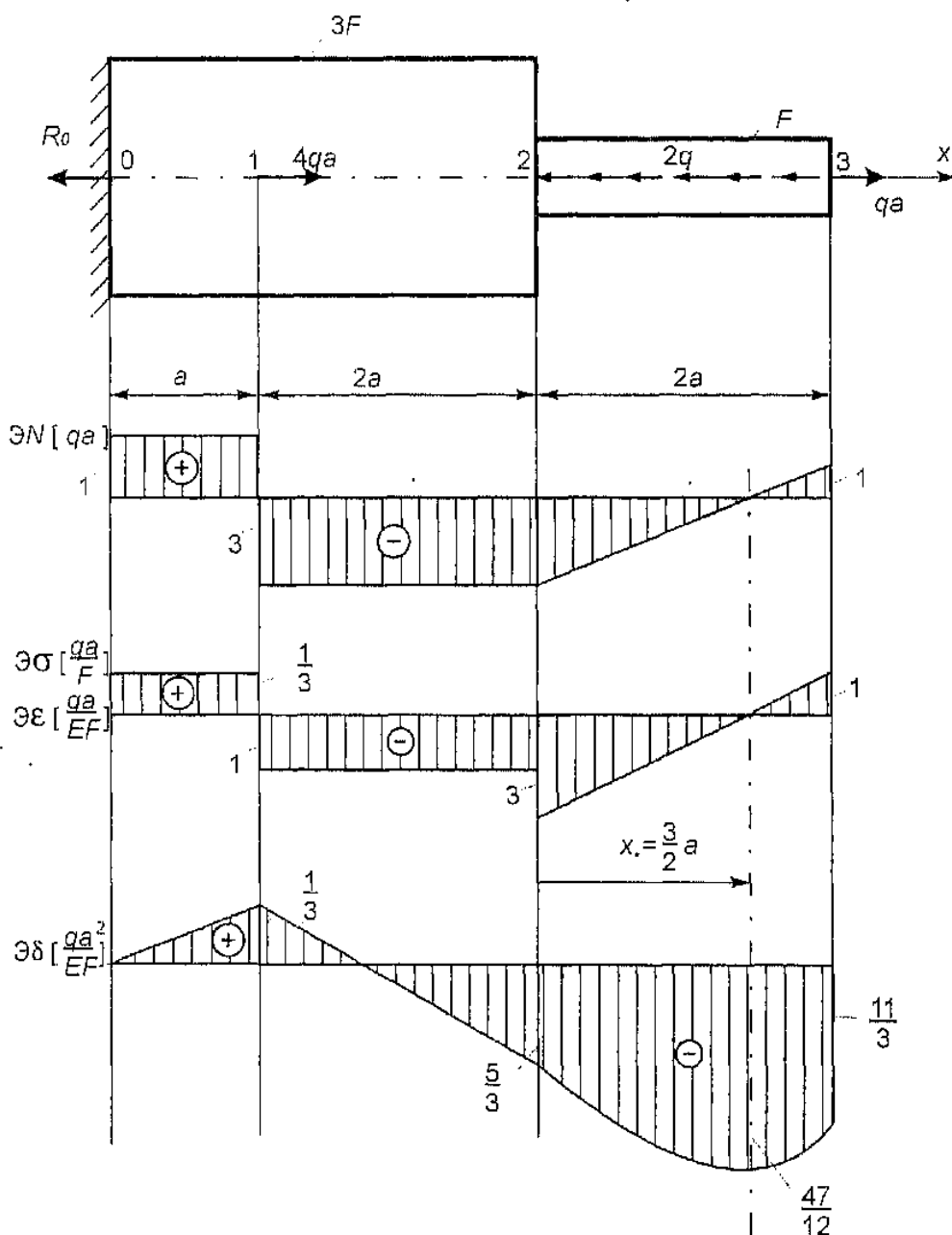


Рис. 1.7

ный расчет на прочность. В расчетах принять: $a = 0,5$ м; $\sigma_{\text{пр.с}} = \sigma_r = 500$ МПа; $[n] = 1,5$; $[\sigma]_p = 0,7[\sigma]_c$; $q = 100$ кН/м; модуль упругости — постоянный по длине.

Решение. 1—3. Разбиение стержня на участки показано на рис. 1.7. Находим реакцию в опоре:

$$\sum X = 0: -R_0 + 4qa - 2q \cdot 2a + qa = 0, \quad R_0 = qa.$$

Аналогично примеру 1.2 определяем нормальные усилия

$$N_{01} = qa, \quad N_{12} = qa - 4qa = -3qa,$$

$$N_{23} = qa - 4qa + 2qx = q(-3a + 2x), \quad N_3 = N_{23}(2a) = qa,$$

а также напряжения и деформации:

$$\sigma_{01} = \frac{qa}{3F}, \quad \sigma_{12} = -\frac{qa}{F}, \quad \sigma_{23} = \frac{q}{F}(-3a + 2x), \quad \sigma_3 = \sigma_{23}(2a) = \frac{qa}{F};$$

$$\varepsilon_{01} = \frac{qa}{3EF}, \quad \varepsilon_{12} = -\frac{qa}{EF}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{q}{EF}(-3a + 2x), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{23}(2a) = \frac{qa}{EF}.$$

Далее по участкам вычисляем перемещения:

— участок 0—1 ($\delta_0 = 0$):

$$\delta_{01} = \delta_0 + \int_0^x \frac{qa}{3EF} dx = \frac{qa}{3EF} x, \quad \delta_1 = \delta_{01}(a) = \frac{qa^2}{3EF};$$

— участок 1—2:

$$\delta_{12} = \delta_1 - \int_0^x \frac{qa}{EF} dx = \frac{q}{EF} \left(\frac{1}{3}a - x \right), \quad \delta_2 = \delta_{12}(2a) = -\frac{5qa}{3EF};$$

— участок 2—3:

$$\delta_{23} = \delta_2 + \int_0^x \frac{q}{EF} (-3a + 2x) dx = \frac{q}{EF} \left(-\frac{5}{3}a^2 - 3ax + x^2 \right),$$

$$\delta_3 = \delta_{23}(2a) = -\frac{11qa^2}{3EF}.$$

На последнем участке необходимо найти экстремальное значение перемещения. В соответствии с п. 3 алгоритма Эб имеет экстремум в точке, соответствующей нулевым деформациям;

$$\varepsilon_{23}(x_*) = 0, \quad x_* = \frac{3}{2} a.$$

Так как при переходе через эту точку деформации меняют знак с минуса на плюс, то имеет место минимум:

$$\delta_{\text{extr}} = \delta_{\text{min}} = \delta_{23}(x_*) = -\frac{47}{12} \frac{qa^2}{EF}.$$

Соответствующие эпюры приведены на рис. 1.7.

4. Используя формулы (П.26), вычисляем допускаемые напряжения:

$$[\sigma]_c = \sigma_T / [n] = 333 \text{ МПа}, \quad [\sigma]_p = 0,7 [\sigma]_c = 233 \text{ МПа}.$$

5. Определяя по эпюре σ максимальные растягивающие и сжимающие напряжения, из условий прочности (П.27) находим:

$$\sigma_{\text{max p}} = \frac{qa}{F} \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{\text{max c}} = \frac{3qa}{F} \leq [\sigma]_c.$$

Отсюда получаем систему неравенств

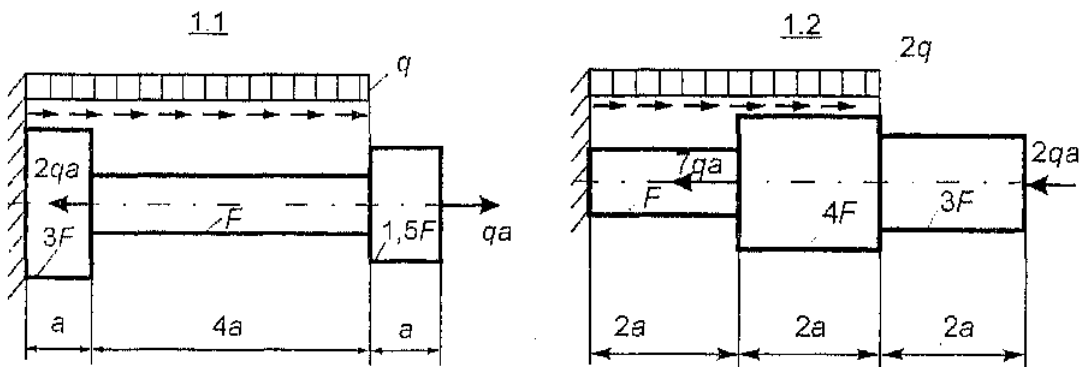
$$F \geq \frac{qa}{[\sigma]_p} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{233 \cdot 10^6} = 0,214 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

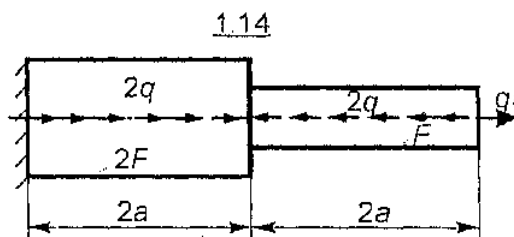
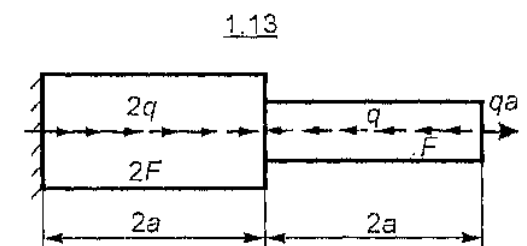
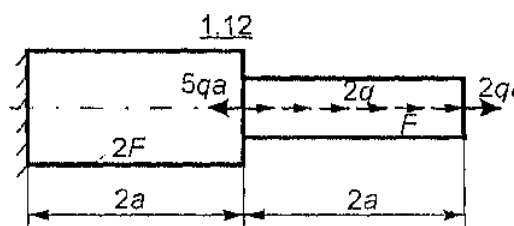
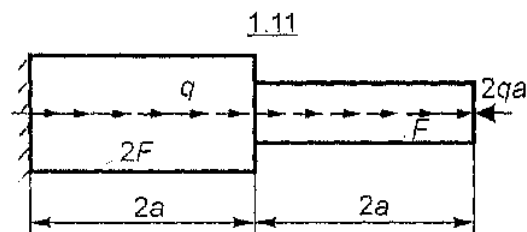
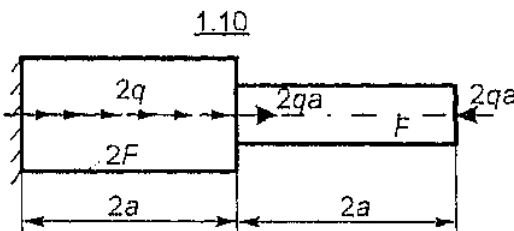
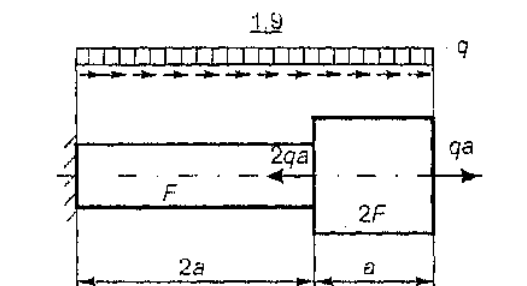
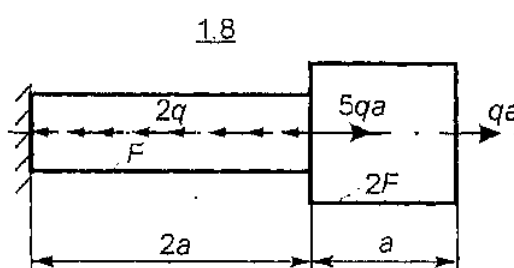
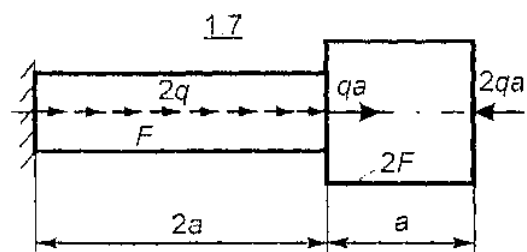
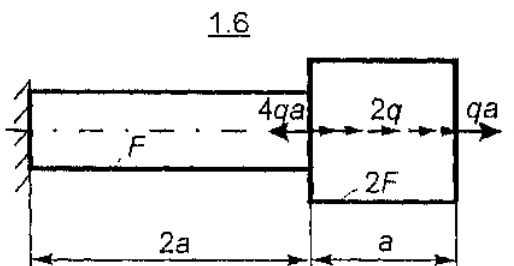
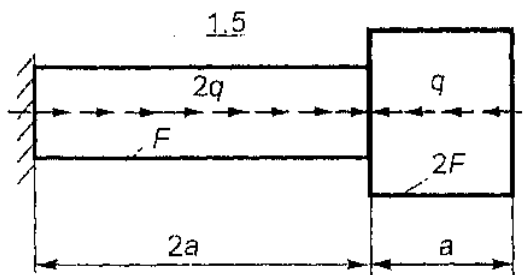
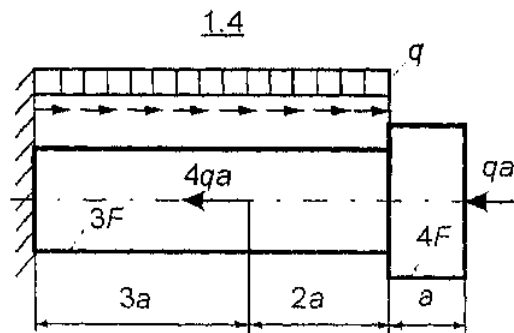
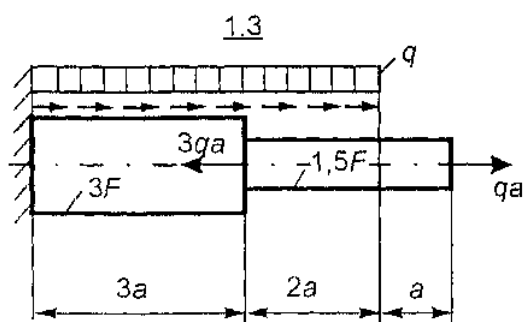
$$F \geq \frac{3qa}{[\sigma]_c} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{333 \cdot 10^6} = 0,450 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

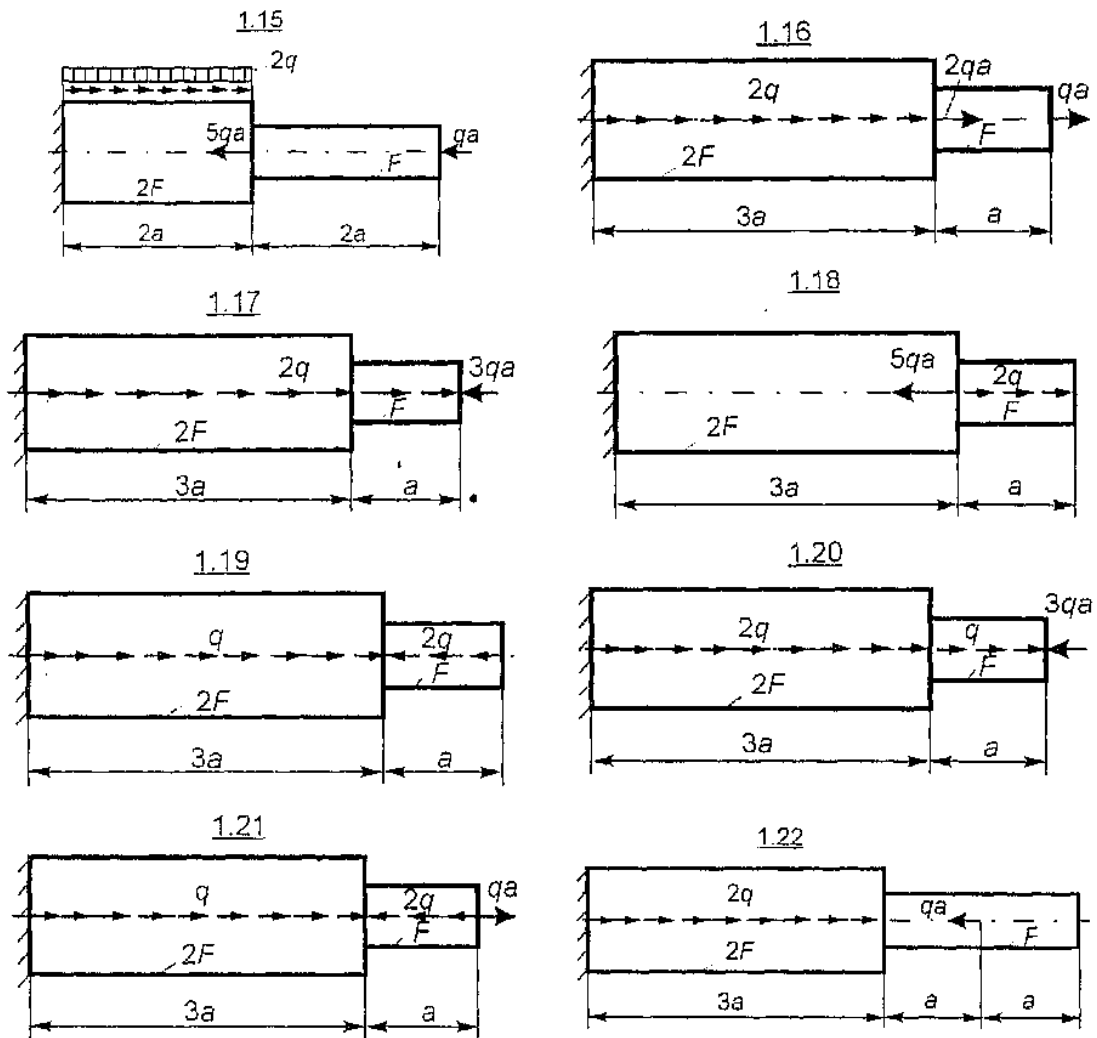
Следовательно, $F \geq 4,5 \text{ см}^2$. Окончательно полагаем $F = 4,5 \text{ см}^2$. ■

Задачи

1.1—1.22. Для стержней, представленных на соответствующих рисунках, построить эпюры N , σ , ε .







§ 1.2. Статически неопределимые задачи

В соответствии с рассуждениями, приведенными в начале предыдущего параграфа, статическая неопределимость при растяжении-сжатии возможна только в одном варианте: имеются две опоры (см., например, рис. 1.8). При этом степень статической неопределимости равна $2 - 1 = 1$.

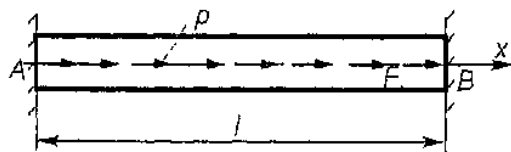


Рис. 1.8

И в этом варианте, так же как и в предыдущем параграфе, если внешние нагрузки, геометрические и физические характеристики стержня являются непрерывными функциями координаты x , то НДС может быть найдено как решение соответствующей краевой задачи (1.11) — (1.13).

Пример 1.4. Найти N , σ , ε и δ для стержня, представленного на рис. 1.8, полагая, что $EF = \text{const}$ и $p = \text{const}$.

Решение. Краевая задача в этом случае имеет вид

$$EF\delta'' = -p, \quad \delta|_{x=0} = \delta|_{x=l} = 0.$$

Интегрируя уравнение, получаем

$$\delta = -\frac{p}{2EF}x^2 + C_1x + C_2.$$

Присутствующие здесь константы находятся из граничных условий: $C_1 = pl/(2EF)$, $C_2 = 0$. Следовательно,

$$\delta(x) = \frac{px}{2EF}(l-x).$$

Кроме того, из формул (1.4)—(1.6) найдем

$$\varepsilon = \delta' = \frac{p}{EF}\left(\frac{l}{2} - x\right), \quad \sigma = \frac{p}{F}\left(\frac{l}{2} - x\right), \quad N = p\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Следовательно, максимальные растягивающие и сжимающие напряжения имеют место соответственно на левом и правом концах и равны между собой:

$$\sigma_{\max p} = \sigma|_{x=0} = \frac{pl}{2F}, \quad \sigma_{\max c} = \sigma|_{x=l} = \frac{pl}{2F}. \quad \blacksquare$$

В общем случае используется *алгоритм решения статически неопределимых (СН) задач*, практически совпадающий с приведенным в предыдущем параграфе и отличающийся только усложнением п. 2.

Для определения неизвестных реакций в опорах к уравнению равновесия добавляется так называемое *уравнение совместности деформаций*, которое является следствием аксиомы 1 и в случае задач типа указанной на рис. 1.8 имеет вид

$$\delta_B = \delta|_{x=l} = 0. \quad (1.20)$$

При этом перемещение δ_B выражается через реакцию в одной из опор (см. алгоритм предыдущего параграфа), и тогда (1.20) — уравнение относительно этой реакции.

Встречаются также другие практически важные задачи, в которых уравнение (1.20) нуждается в модификации.

1. *Задачи с зазором* (рис. 1.9). Здесь на правом (или левом) конце стержня имеется зазор Δ . Решение строится в два этапа:

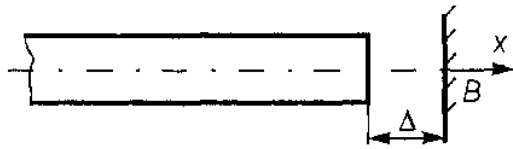


Рис. 1.9

а) рассматривается статически определяемая задача со свободным концом при заданных внешних нагрузках, и вычисляется перемещение этого конца δ_{B0} ;

б) если $\delta_{B0} > \Delta$, то переходят к статически неопределимой задаче с уравнением совместности

$$\delta_B = \delta|_{x=l} = \Delta. \quad (1.21)$$

2. *Задачи с монтажными напряжениями* (рис. 1.9). В этом варианте предполагается, что внешние нагрузки отсутствуют, и зазор Δ выбирается при монтаже конструкции. Решение строится как в стандартной статически неопределимой задаче, но с уравнением совместности (1.21).

Отметим также, что для статически неопределимых задач характерным является учет температурного поля. При этом, как следует из (1.5), полная продольная деформация есть сумма упругой ϵ_y и температурной ϵ_t составляющих:

$$\epsilon = \epsilon_y + \epsilon_t, \quad \epsilon_y = \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_t = \alpha \Delta t. \quad (1.22)$$

В этих задачах в силу принципа суперпозиции (утверждение П.2) отдельно находятся НДС от действия внешней силовой нагрузки (обозначения, например, для напряжений следующие: σ^p) и НДС, возникающее под влиянием температурного поля (σ^t). Действительное НДС есть сумма этих составляющих ($\sigma = \sigma^p + \sigma^t$). Однако, учитывая, что температурные напряжения во многих практически важных задачах существенно меньше напряжений от силовой нагрузки и то, что использование суммарного НДС при проектировочном расчете связано с решением сложных неравенств, этот расчет проводят только по напряжениям σ^p . А температурные напряжения учитываются уже в проверочном расчете. ■

Пример 1.5. Для стержня, представленного на рис. 1.10, построить эпюры N , σ и δ , полагая модуль упругости постоянным.

Решение (нумерация пунктов соответствует алгоритму решения СН-задач). 1—2. Разбиение стержня на участки показано на рис. 1.10.

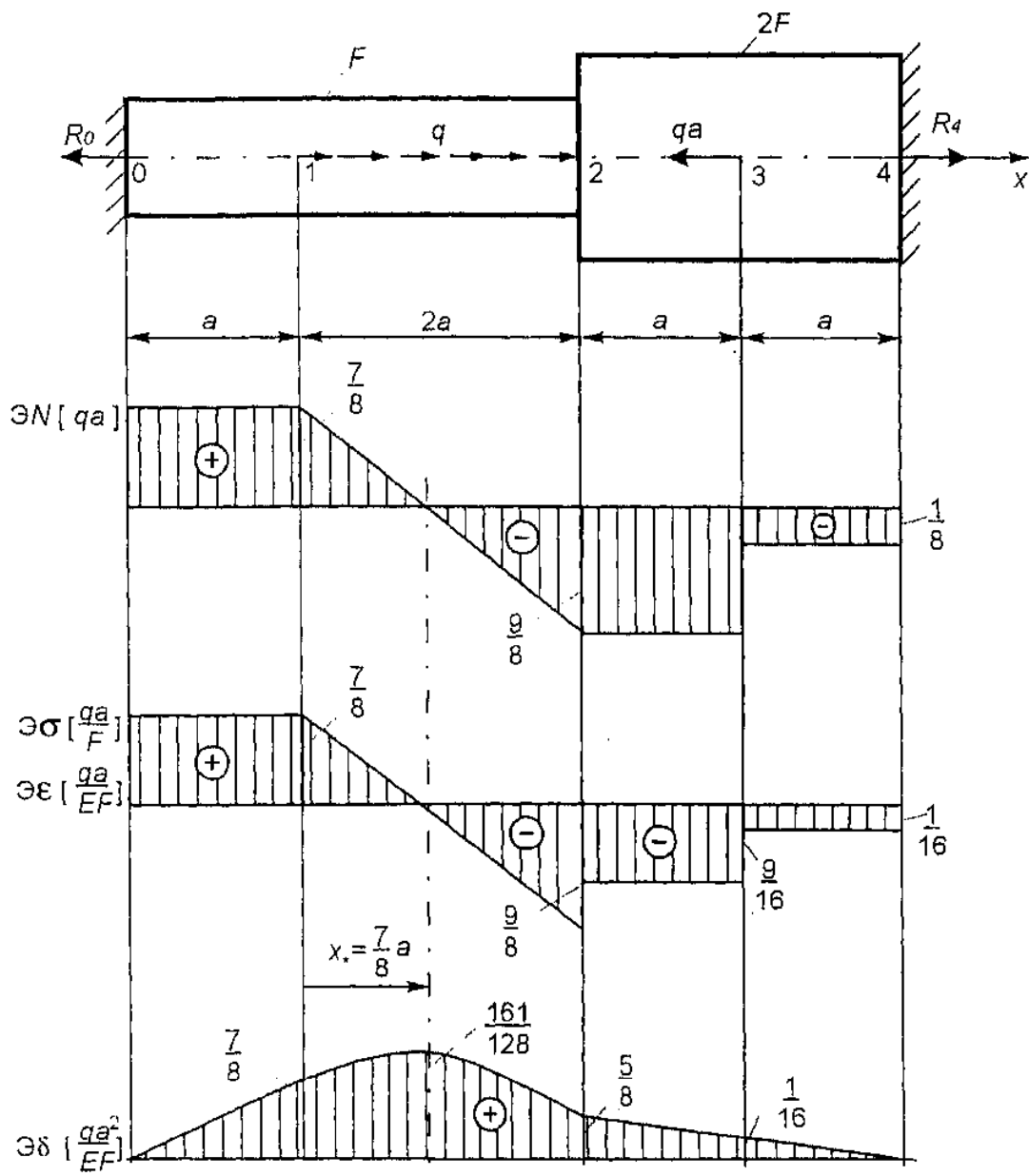


Рис. 1.10

Задача является статически неопределимой, поскольку для определения двух опорных реакций R_0 и R_4 можно составить только одно уравнение равновесия:

$$\sum X = 0: -R_0 + q \cdot 2a - qa + R_4 = 0.$$

Уравнение совместности деформаций в соответствии с (1.20) имеет вид

$$\delta_4 = 0.$$

Для того чтобы выразить его левую часть через R_0 , аналогично статически определимым задачам находим по участкам N , σ , ε и δ :

— участок 0—1 ($\delta_0 = 0$):

$$N_{01} = R_0, \quad \sigma_{01} = \frac{R_0}{F}, \quad \varepsilon_{01} = \frac{R_0}{EF}, \quad \delta_{01} = \int_0^x \varepsilon_{01} dx = \frac{R_0 x}{EF},$$

$$\delta_1 = \delta_{01}(a) = \frac{R_0 a}{EF};$$

— участок 1—2:

$$N_{12} = R_0 - qx, \quad \sigma_{12} = \frac{R_0 - qx}{F}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{R_0 - qx}{EF},$$

$$\delta_{12} = \delta_1 + \int_0^x \varepsilon_{12} dx = \frac{1}{EF} \left[R_0 (a + x) - \frac{1}{2} qx^2 \right],$$

$$\delta_2 = \delta_{12}(2a) = \frac{a}{EF} (3R_0 - 2qa);$$

— участок 2—3:

$$N_{23} = R_0 - q \cdot 2a, \quad \sigma_{23} = \frac{R_0 - 2qa}{2F}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{R_0 - 2qa}{2EF},$$

$$\delta_{23} = \delta_2 + \int_0^x \varepsilon_{23} dx = \frac{1}{EF} \left[R_0 \left(3a + \frac{x}{2} \right) - qa(2a + x) \right],$$

$$\delta_3 = \delta_{23}(a) = \frac{a}{2EF} (7R_0 - 6qa);$$

— участок 3—4:

$$N_{34} = R_0 - q \cdot 2a + qa, \quad \sigma_{34} = \frac{R_0 - qa}{2F}, \quad \varepsilon_{34} = \frac{R_0 - qa}{2EF},$$

$$\delta_{34} = \delta_3 + \int_0^x \varepsilon_{34} dx = \frac{1}{2EF} [R_0 (7a + x) - qa(6a + x)],$$

$$\delta_4 = \delta_{34}(a) = \frac{a}{2EF} (8R_0 - 7qa).$$

Следовательно, уравнение совместности и его решение имеют вид

$$8R_0 - 7qa = 0, \quad R_0 = \frac{7}{8} qa.$$

3. Подставляя найденное значение реакции в полученные выше выражения, по участкам определяем N , σ , ε и δ . Поскольку характер изменения эпюр ясен из этих формул, то достаточно найти значений требуемых величин на концах участков:

— участок 0—1:

$$N_0 = N_1 = \frac{7}{8} qa, \quad \sigma_0 = \sigma_1 = \frac{7}{8} \frac{qa}{F}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \frac{7}{8} \frac{qa}{EF},$$

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_1 = \frac{7}{8} \frac{qa^2}{EF};$$

— участок 1—2:

$$N_1 = \frac{7}{8} qa, \quad N_2 = -\frac{9}{8} qa, \quad \sigma_1 = \frac{7}{8} \frac{qa}{F}, \quad \sigma_2 = -\frac{9}{8} \frac{qa}{F},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{7}{8} \frac{qa}{EF}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{9}{8} \frac{qa}{EF}, \quad \delta_2 = \frac{5}{8} \frac{qa^2}{EF};$$

— участок 2—3:

$$N_2 = N_3 = -\frac{9}{8} qa, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{9}{16} \frac{qa}{F},$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{9}{16} \frac{qa}{EF}, \quad \delta_3 = \frac{1}{16} \frac{qa^2}{EF};$$

— участок 3—4:

$$N_3 = N_4 = -\frac{1}{8} qa, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = -\frac{1}{16} \frac{qa}{F},$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -\frac{1}{16} \frac{qa}{EF}, \quad \delta_4 = 0.$$

Здесь, в силу непрерывности перемещений, для последних трех участков даны их значения только на концах. Отметим также, что уравнение равновесия, построенное в начале решения, можно было и не составлять, поскольку $R_4 = N_4$. Однако его удобно использовать для проверки правильности найденных усилий.

Кроме того, необходимо определить точку экстремума перемещений на участке 1—2:

$$\varepsilon_{12} = \frac{q}{EF} \left(\frac{7}{8} a - x_* \right) = 0, \quad x_* = \frac{7}{8} a.$$

Так как при переходе через эту точку деформации меняют знак с плюса на минус, то имеет место максимум:

$$\delta_{\text{extr}} = \delta_{\text{max}} = \delta_{12}(x_*) = \frac{161}{128} \frac{qa^2}{EF}.$$

Соответствующие эпюры представлены на рис. 1.10. ■

Пример 1.6. У ступенчатого стержня, представленного на рис. 1.11, нагрет на величину Δt средний участок. Построить эпюры N , σ , ε и δ , полагая, что модуль упругости постоянный.

Решение. 1—2. Разбиение стержня на участки указано на рис. 1.11.

Задача является статически неопределимой. Отбрасываем опоры, заменяем их реакциями R_0 , R_3 и составляем уравнение равновесия в проекциях на продольную ось стержня:

$$\sum X = 0: -R_0 + R_3 = 0.$$

Уравнение совместности деформаций в соответствии с (1.20) имеет вид

$$\delta_3 = 0.$$

Далее, аналогично предыдущей задаче, по участкам находим N и σ :

$$N_{01} = N_{12} = N_{23} = R_0, \quad \sigma_{01} = \sigma_{12} = \frac{R_0}{F}, \quad \sigma_{23} = \frac{R_0}{2F}.$$

Затем с использованием формул (1.22) и (1.19) определяем ε и δ :

— участок 0—1 ($\delta_0 = 0$):

$$\varepsilon_{01} = \frac{R_0}{EF}, \quad \delta_{01} = \int_0^x \varepsilon_{01} dx = \frac{R_0 x}{EF}, \quad \delta_1 = \delta_{01}(a) = \frac{R_0 a}{EF};$$

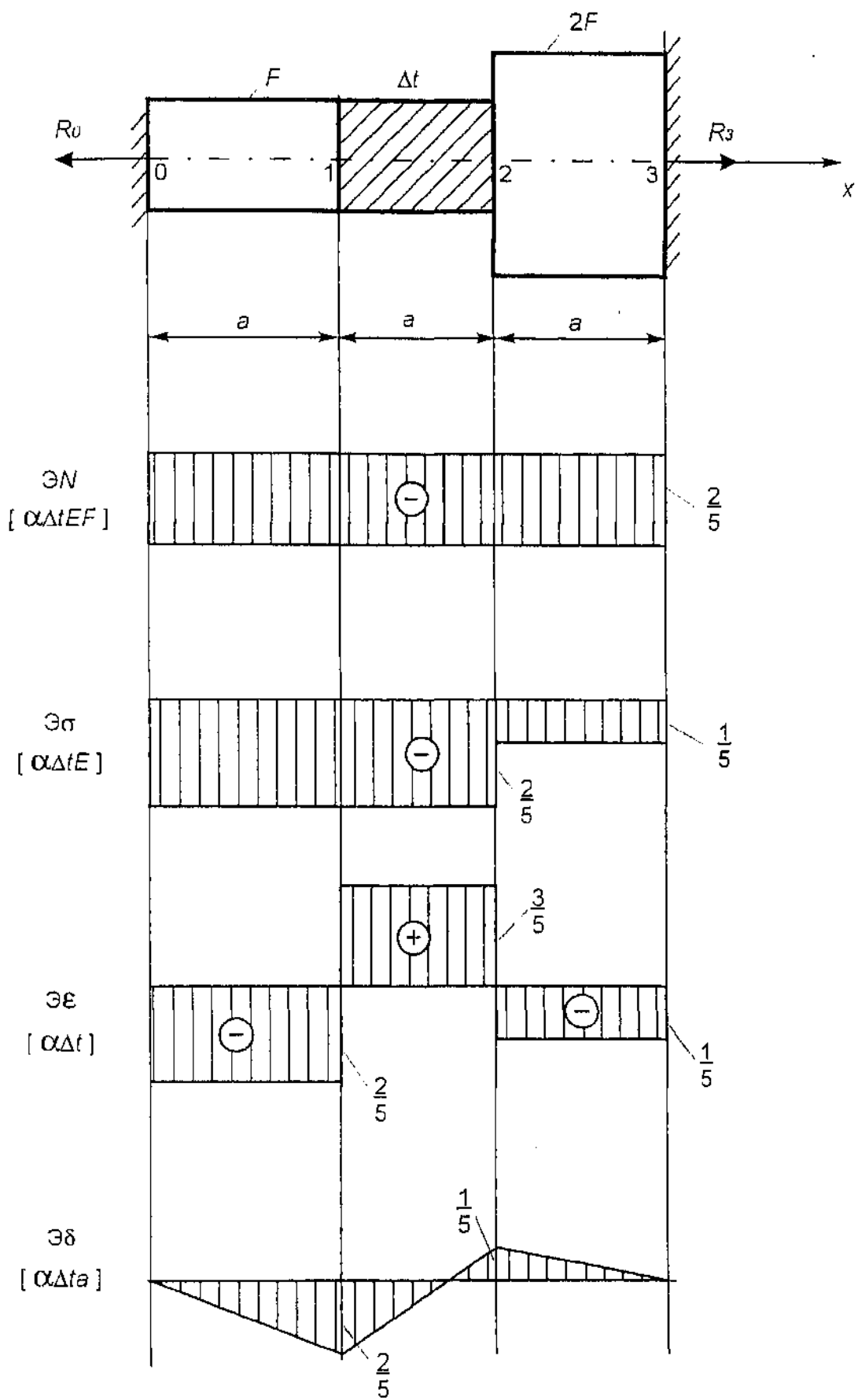


Рис. 1.11

— участок 1—2:

$$\varepsilon_{12} = \frac{R_0}{EF} + \alpha \Delta t, \quad \delta_{01} = \delta_1 + \int_0^x \varepsilon_{12} dx = \frac{R_0 a}{EF} + \left(\frac{R_0}{EF} + \alpha \Delta t \right) x,$$

$$\delta_2 = \delta_{12}(a) = \left(\frac{2R_0}{EF} + \alpha \Delta t \right) a;$$

— участок 2—3:

$$\varepsilon_{23} = \frac{R_0}{2EF}, \quad \delta_{23} = \delta_2 + \int_0^x \varepsilon_{23} dx = \left(\frac{2R_0}{EF} + \alpha \Delta t \right) a + \frac{R_0 x}{2EF},$$

$$\delta_3 = \delta_{23}(a) = \left(\frac{5R_0}{2EF} + \alpha \Delta t \right) a;$$

Следовательно, уравнение совместности и его решение имеют вид

$$\frac{5R_0}{2EF} + \alpha \Delta t = 0, \quad R_0 = -\frac{2}{5} \alpha \Delta t EF.$$

3. Подставив это значение в полученные выше равенства, получаем, что N , σ и ε имеют следующие постоянные значения на каждом из участков:

$$N_{01} = N_{12} = N_{23} = -\frac{2}{5} \alpha \Delta t EF, \quad \sigma_{01} = \sigma_{12} = -\frac{2}{5} \alpha \Delta t E,$$

$$\sigma_{23} = -\frac{1}{5} \alpha \Delta t E; \quad \varepsilon_{01} = -\frac{2}{5} \alpha \Delta t, \quad \varepsilon_{12} = \frac{3}{5} \alpha \Delta t, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{5} \alpha \Delta t,$$

а перемещения δ изменяются линейно. Их значения на концах участков таковы:

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_1 = -\frac{2}{5} \alpha \Delta t a, \quad \delta_2 = \frac{1}{5} \alpha \Delta t a, \quad \delta_3 = 0.$$

Соответствующие эпюры представлены на рис. 1.11. ■

Пример 1.7. Полагая модуль упругости постоянным, для стержня, изображенного на рис. 1.12, провести проекторочный и поверочный расчеты на прочность, а также построить эпюры перемещений δ от действия только силовой нагрузки. В расчетах принять: $q = 50$ кН/м; $\Delta t = 20^\circ\text{C}$; $a = 0,5$ м; $\sigma_{\text{пр.р}} = \sigma_{0,2} = 240$ МПа; $E = 7 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$; $[n] = 1,8$; допускаемые напряжения на сжатие на 30% меньше соответствующих напряжений на растяжение.

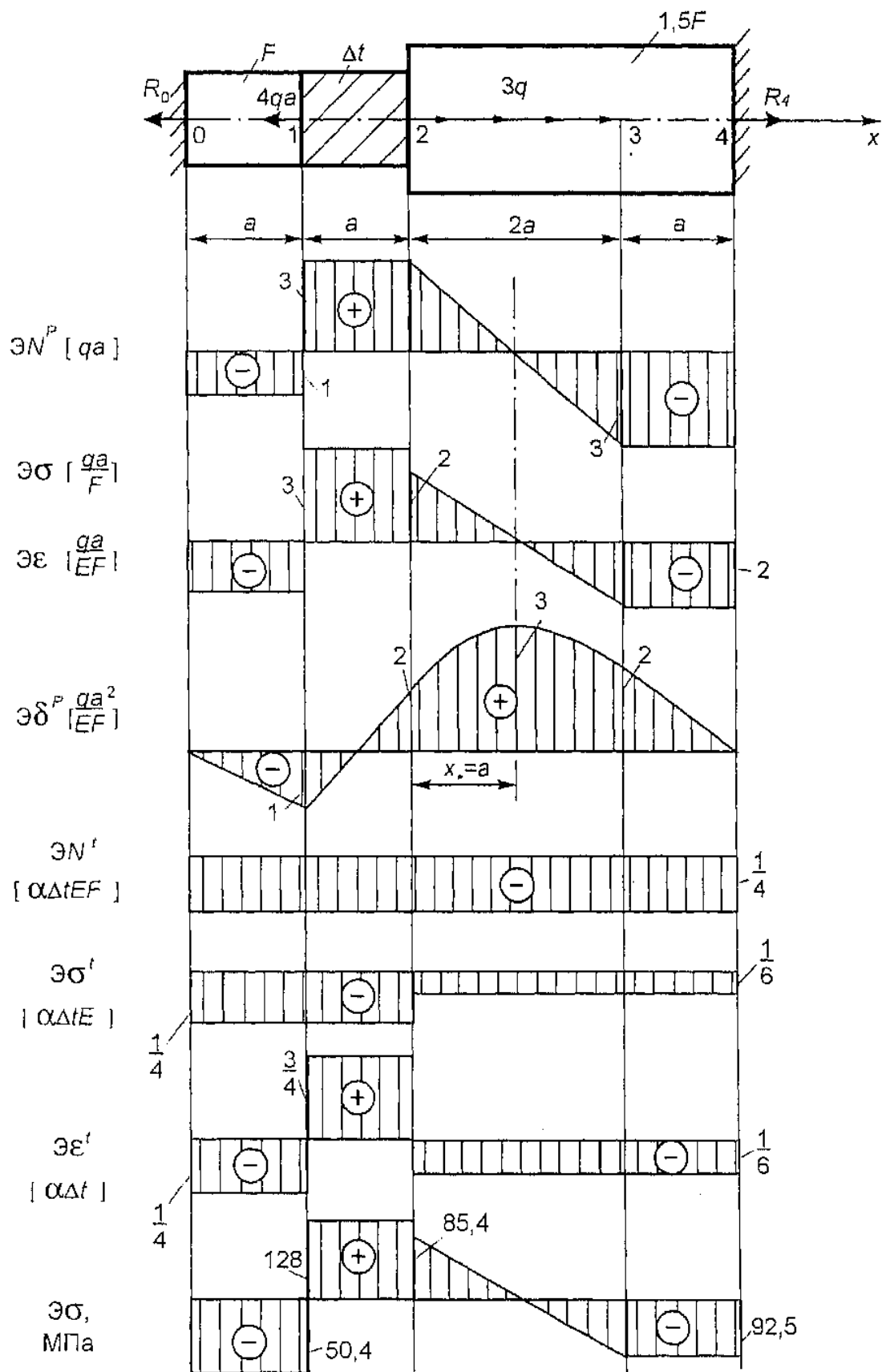


Рис. 1.12

Решение. А. Проектировочный расчет. В соответствии с приведенным выше алгоритмом при проектировочном расчете будем учитывать только силовую нагрузку.

1—2. Нумерация участков приведена на рис. 1.12. Заменяем опоры реакциями R_0 и R_4 и составляем уравнение равновесия:

$$\sum X = 0: -R_0 - 4qa + 3q \cdot 2a + R_4 = 0.$$

Задача является статически неопределимой. Уравнение совместности деформаций в соответствии с (1.20) имеет вид

$$\delta_4 = 0.$$

Далее аналогично примеру 1.5 находим по участкам N , σ , ε и δ :

— участок 0—1 ($\delta_0 = 0$):

$$N_{01} = R_0, \quad \sigma_{01} = \frac{R_0}{F}, \quad \varepsilon_{01} = \frac{R_0}{EF}, \quad \delta_{01} = \int_0^x \varepsilon_{01} dx = \frac{R_0 x}{EF},$$

$$\delta_1 = \delta_{01}(a) = \frac{R_0 a}{EF};$$

— участок 1—2:

$$N_{12} = R_0 + 4qa, \quad \sigma_{12} = \frac{R_0 + 4qa}{F}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{R_0 + 4qa}{EF},$$

$$\delta_{12} = \delta_1 + \int_0^x \varepsilon_{12} dx = \frac{1}{EF} [(R_0 + 4qa)x + R_0 a],$$

$$\delta_2 = \delta_{12}(a) = \frac{2a}{EF} (R_0 + 2qa);$$

— участок 2—3:

$$N_{23} = R_0 + 4qa - 3q \cdot x, \quad \sigma_{23} = \frac{R_0 + 4qa - 3qx}{1,5F},$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{2}{3} \frac{R_0 + 4qa - 3qx}{EF},$$

$$\delta_{23} = \delta_2 + \int_0^x \varepsilon_{23} dx = \frac{1}{EF} \left[R_0 \left(2a + \frac{2}{3} x \right) + q \left(4a^2 + \frac{8}{3} ax - x^2 \right) \right],$$

$$\delta_3 = \delta_{23}(2a) = \frac{2a}{3EF} (5R_0 + 8qa) ;$$

— участок 3—4:

$$N_{34} = R_0 + 4qa - 3q \cdot 2a = R_0 - 2qa, \quad \sigma_{34} = \frac{R_0 - 2qa}{1,5F},$$

$$\varepsilon_{34} = \frac{2}{3} \frac{R_0 - 2qa}{EF},$$

$$\delta_{34} = \delta_3 + \int_0^x \varepsilon_{34} dx = \frac{2}{3EF} [R_0 (5a + x) + 2qa (4a - x)],$$

$$\delta_4 = \delta_{34}(a) = \frac{4a}{EF} (R_0 + qa).$$

Следовательно, уравнение совместности и его решение имеют вид

$$R_0 + qa = 0, \quad R_0 = -qa.$$

3. Подставляя найденное значение реакции в полученные выше выражения, по участкам определяем N , σ , ε и δ . Они имеют на концах участков следующие значения:

— участок 0—1:

$$N_0 = N_1 = -qa, \quad \sigma_0 = \sigma_1 = -\frac{qa}{F}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = -\frac{qa}{EF}, \quad \delta_0 = 0,$$

$$\delta_1 = -\frac{qa^2}{EF};$$

— участок 1—2:

$$N_1 = N_2 = 3qa, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{3qa}{F}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{3qa}{EF}, \quad \delta_2 = \frac{2qa^2}{EF};$$

— участок 2—3:

$$N_2 = 3qa, \quad N_3 = -3qa, \quad \sigma_2 = \frac{2qa}{F}, \quad \sigma_3 = -\frac{2qa}{F}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2qa}{EF},$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{2qa}{EF}, \quad \delta_3 = \frac{2qa^2}{EF};$$

— участок 3—4:

$$N_3 = N_4 = -3qa, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = -\frac{2qa}{F}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -\frac{2qa}{EF}, \quad \delta_4 = 0.$$

Подстановка найденных R_0 и $R_4 = N_4$ приводит к тождеству, что свидетельствует о правильности решения.

Определяем точку экстремума перемещений на участке 2—3:

$$\varepsilon_{23} = \frac{2q}{EF} (a - x_*) = 0, \quad x_* = a.$$

Так как при переходе через эту точку деформации меняют знак с плюса на минус, то имеет место максимум:

$$\delta_{\text{extr}} = \delta_{\text{max}} = \delta_{23}(x_*) = \frac{3qa^2}{EF}.$$

Соответствующие эпюры N^P , σ^P , ε^P и δ^P представлены на рис. 1.12.

4. Используя формулы (П.26), аналогично примеру 1.3 вычисляем допускаемые напряжения:

$$[\sigma]_p = \sigma_{0,2}/[n] = 133 \text{ МПа}, \quad [\sigma]_c = 93,3 \text{ МПа}.$$

5. Определяем по эпюре σ^P максимальные растягивающие и сжимающие напряжения, из условий прочности (П.27) находим

$$\sigma_{\text{max p}} = \frac{3qa}{F} \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{\text{max c}} = \frac{2qa}{F} \leq [\sigma]_c.$$

Отсюда получаем систему неравенств относительно площади сечения:

$$F \geq \frac{3qa}{[\sigma]_p} = \frac{3 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{133 \cdot 10^6} = 0,564 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$F \geq \frac{2qa}{[\sigma]_c} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{93,3 \cdot 10^6} = 0,536 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Следовательно, $F \geq 5,64 \text{ см}^2$. Принимаем

$$F = 5,64 \text{ см}^2.$$

Б. Поверочный расчет. Сначала решим чисто температурную задачу, т.е. будем считать, что силовая нагрузка отсутствует, а участок 1—2 нагрет на $\Delta t^\circ\text{C}$. При этом будем использовать результаты решения силовой задачи.

1—2. В уравнении равновесия необходимо положить $q = 0$. Уравнение совместности деформации такое же, как и в силовой задаче.

Далее аналогично примеру 1.6 находим по участкам N , σ , ε и δ . Для участка 0—1 остаются полученные выше результаты, а для остальных имеем:

— участок 1—2:

$$N_{12} = R_0, \quad \sigma_{12} = \frac{R_0}{F}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{R_0}{EF} + \alpha\Delta t,$$

$$\delta_{12} = \delta_1 + \int_0^x \varepsilon_{12} dx = \frac{R_0}{EF} (a + x) + \alpha\Delta t x, \quad \delta_2 = \delta_{12}(a) = a \left(\frac{2R_0}{EF} + \alpha\Delta t \right);$$

— участок 2—4:

$$N_{24} = R_0, \quad \sigma_{24} = \frac{R_0}{1,5F}, \quad \varepsilon_{24} = \frac{2R_0}{3EF},$$

$$\delta_{24} = \delta_2 + \int_0^x \varepsilon_{24} dx = \frac{R_0}{EF} \left(2a + \frac{2}{3} x \right) + \alpha\Delta t a,$$

$$\delta_4 = \delta_{24}(3a) = a \left(\frac{4R_0}{EF} + \alpha\Delta t \right).$$

Следовательно, уравнение совместности и его решение имеют вид

$$\frac{4R_0}{EF} + \alpha\Delta t = 0, \quad R_0 = -\frac{1}{4} \alpha\Delta t EF.$$

3. Таким образом, на каждом участке N , σ и ε имеют следующие постоянные значения:

$$N_{01} = N_{12} = N_{34} = -\frac{1}{4} \alpha\Delta t EF, \quad \sigma_{01} = \sigma_{12} = -\frac{1}{4} \alpha\Delta t E,$$

$$\sigma_{24} = -\frac{1}{6} \alpha\Delta t E, \quad \varepsilon_{01} = -\frac{1}{4} \alpha\Delta t, \quad \varepsilon_{12} = \frac{3}{4} \alpha\Delta t, \quad \varepsilon_{24} = -\frac{1}{6} \alpha\Delta t.$$

Соответствующие эпюры N^t , σ^t и ε^t представлены на рис. 1.12.

4—5. Используя найденную в проектировочном расчете площадь поперечного сечения и исходные данные примера, строим суммарную эпюру $\sigma = \sigma^p + \sigma^t$. По ней определяем $\sigma_{\max p} = 128$ МПа, $\sigma_{\max c} = 92,5$ МПа и находим действительный запас прочности:

$$n = \min \left(\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{\max p}} ; \frac{0,7\sigma_{0,2}}{\sigma_{\max c}} \right) = \min (1,87; 1,82) = 1,82 .$$

Поскольку $n > [n]$, то на этом расчет заканчивается. ■

Пример 1.8. У стержня, представленного на рис. 1.13, имеется зазор Δ по отношению к правой опоре. Построить эпюры N , σ , ε и δ , полагая, что модуль упругости постоянный.

Решение. Разбиение стержня на участки показано на рис. 1.13.

А. Статически определяемая задача. 1—2. Заменяем левую опору реакцией R_0 , которую определяем из уравнения равновесия (равнодействующую распределенной нагрузки вычисляем как площадь трапеции):

$$\sum X = 0: -R_0 + \frac{q + 3q}{2} 2l - \frac{1}{2} ql = 0, \quad R_0 = \frac{7}{2} ql .$$

3. По участкам находим N , σ , ε и δ (конкретное значение R_0 в промежуточных вычислениях не подставляется, с тем чтобы использовать полученные выражения в дальнейшем, см. п. Б):

— участок 0—1 ($\delta_0 = 0$):

$$N_{01} = R_0, \quad \sigma_{01} = \frac{R_0}{2F}, \quad \varepsilon_{01} = \frac{R_0}{2EF}, \quad \delta_{01} = \int_0^x \varepsilon_{01} dx = \frac{R_0 x}{2EF},$$

$$\delta_1 = \delta_{01}(l) = \frac{R_0 l}{2EF};$$

— участок 1—2 (зависимость распределенной нагрузки q_{12} от местной координаты x находим из геометрических соображений):

$$q_{12} = q + \frac{3q - q}{2l} x, \quad N_{12} = R_0 - \frac{q + q(1 + x/l)}{2} x,$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2F} \left[R_0 - q \left(x + \frac{x^2}{2l} \right) \right], \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{E},$$

$$\delta_{12} = \delta_1 + \int_0^x \varepsilon_{12} dx = \frac{1}{2EF} \left[R_0 (l + x) - \frac{qx^2}{2} \left(q + \frac{x}{3l} \right) \right],$$

$$\delta_2 = \delta_{12} (2l) = \frac{l}{2EF} \left(3R_0 - \frac{10}{3} ql \right);$$

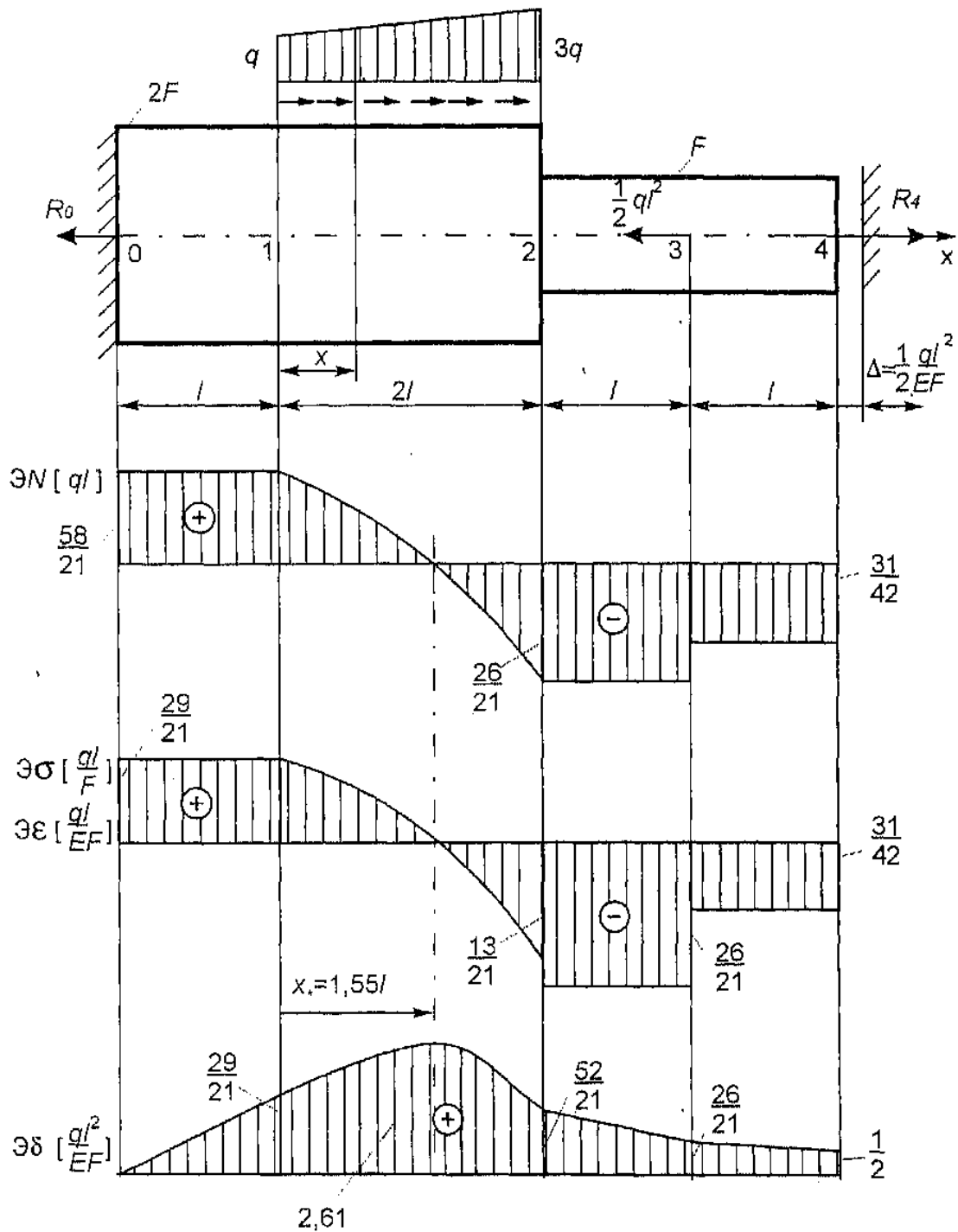


Рис. 1.13

— участок 2—3:

$$N_{23} = R_0 - 4ql, \quad \sigma_{23} = \frac{R_0 - 4ql}{F}, \quad \epsilon_{23} = \frac{R_0 - 4ql}{EF},$$

$$\delta_{23} = \delta_2 + \int_0^x \varepsilon_{23} dx = \frac{1}{EF} \left[R_0 \left(\frac{3}{2} l + x \right) - ql \left(\frac{5}{3} l + 4x \right) \right],$$

$$\delta_3 = \delta_{23}(l) = \frac{l}{EF} \left(\frac{5}{2} R_0 - \frac{17}{3} ql \right);$$

— участок 3—4:

$$N_{34} = R_0 - 4ql + \frac{1}{2} ql, \quad \sigma_{34} = \frac{1}{F} \left(R_0 - \frac{7}{2} ql \right), \quad \varepsilon_{34} = \frac{1}{EF} \left(R_0 - \frac{7}{2} ql \right),$$

$$\delta_{34} = \delta_3 + \int_0^x \varepsilon_{34} dx = \frac{1}{EF} \left[R_0 \left(\frac{5}{2} l + x \right) - ql \left(\frac{17}{3} l + \frac{7}{2} x \right) \right],$$

$$\delta_4 = \delta_{34}(l) = \frac{l}{2EF} \left(7R_0 - \frac{55}{3} ql \right) = \frac{37}{12} \frac{ql^2}{EF}.$$

Так как $\delta_4 > \Delta$, то правый конец стержня упирается в опору, и задача становится статически неопределимой.

Б. Статически неопределимая задача. 1—2. Обычным образом заменяем опоры реакциями R_0 и R_4 (см. рис. 1.13) и составляем уравнение равновесия:

$$\sum X = 0: -R_0 + 4ql - \frac{1}{2} ql + R_4 = 0.$$

Уравнение совместности в этом случае имеет вид (1.21)

$$\delta_4 = \Delta.$$

Подставляя сюда полученное в п. А выражение δ_4 через R_0 , получаем

$$\frac{l}{2EF} \left(7R_0 - \frac{55}{3} ql \right) = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EF}, \quad R_0 = \frac{58}{21} ql.$$

Учитывая теперь найденную реакцию R_0 в соответствующих формулах п. А, строим эпюры N , σ , ε и δ (см. рис. 1.13). При этом точка экстремума перемещений на участке 1—2 определяется из условия

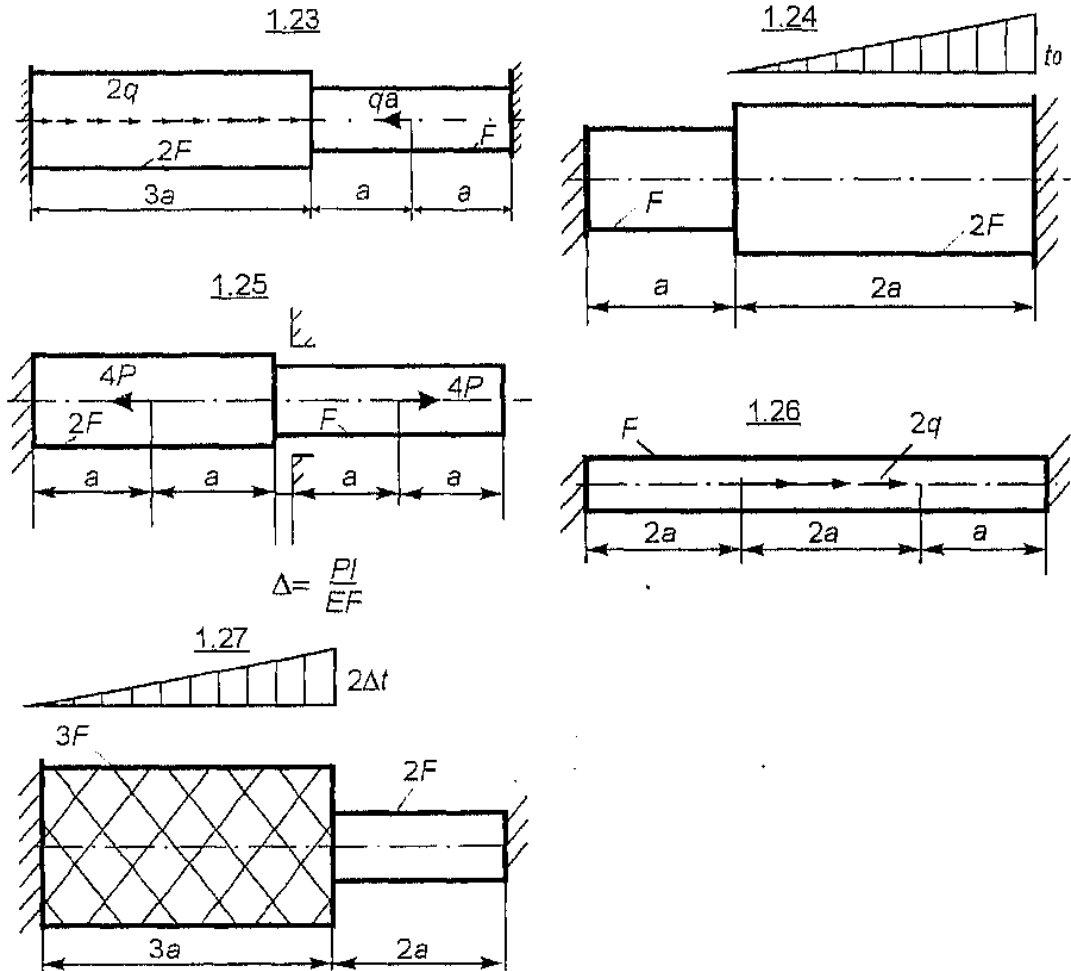
$$\varepsilon_{12} = -\frac{q}{4EF} \left(x_*^2 + 2lx_* - \frac{116}{21} l^2 \right) = 0, \quad x_* = 1,55l.$$

Так как при переходе через эту точку деформации меняют знак с плюса на минус, то имеет место максимум:

$$\delta_{\text{extr}} = \delta_{\text{max}} = \delta_{12}(x_*) = 2,61 \frac{ql^2}{EF} \cdot \blacksquare$$

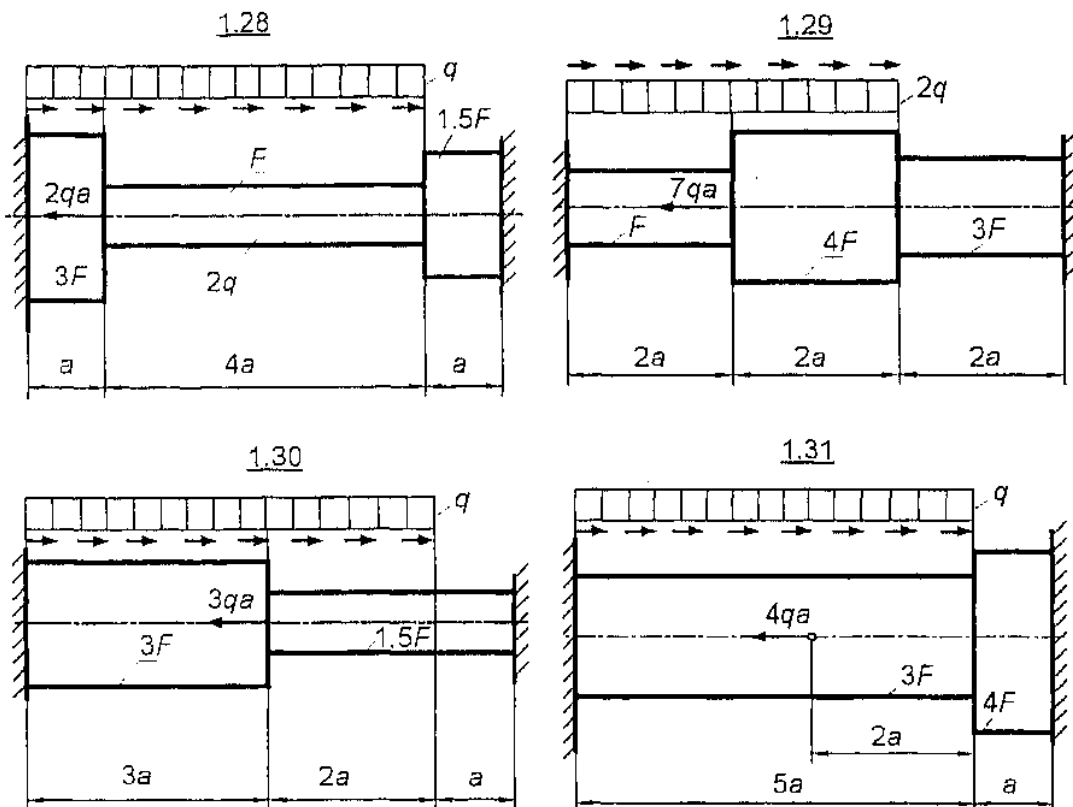
Задачи

1.23—1.27. Для стержней, представленных на соответствующих рисунках, построить эпюры N , σ , ϵ , δ .



1.28—1.31. Для стержней, представленных на соответствующих рисунках, провести проектировочный расчет на прочность. При расчетах воспользоваться данными примера 1.3.

1.32. Для стержня, изображенного на рис. 1.14, провести проектировочный расчет на прочность. В расчетах принять: $P = 50$ кН; $l = 80$ см; $l_1 = 20$ см; $[\sigma] = 75$ МПа.



1.33. Определить, при каком значении размера a все участки стержня, изображенного на рис. 1.15, равнопрочные. В расчетах принять: $\sigma_{т.р} = 2\sigma_{т.с} / 3$.

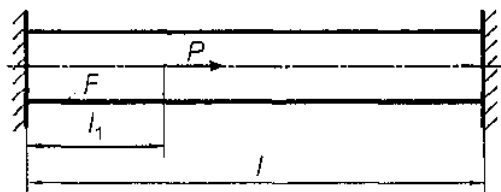


Рис. 1.14

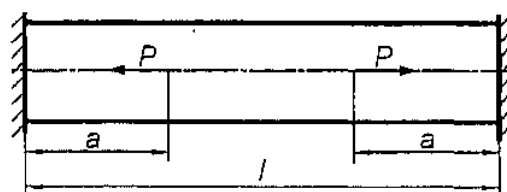


Рис. 1.15

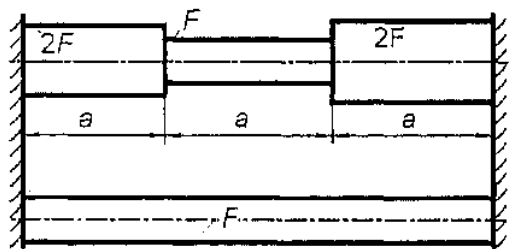


Рис. 1.16

1.34. В каком из стержней, изображенных на рис. 1.16, равномерное нагревание вызывает бóльшие напряжения?

1.35. Для стержня, изображенного на рис. 1.17, определить первоначальный зазор Δ , если после приложения силы P правая реакция равна $P/4$.

1.36. Для стержня, изображенного на рис. 1.18, построить эпюры N , σ и δ , если до приложения нагрузки зазор $\Delta = qa^2 / (4EF)$.

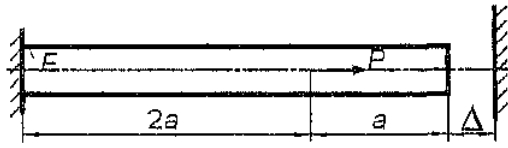


Рис. 1.17

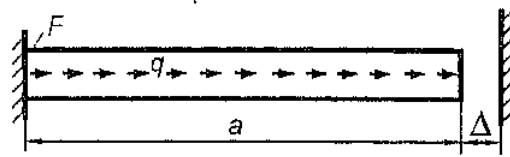


Рис. 1.18

1.37. Для стержня, изображенного на рис. 1.19, при отсутствии силы P существует зазор Δ . Если $P = P_0$, то зазор “закрывается” (конец стержня касается опоры). Построить эпюры N , σ и δ при $P = 2P_0$.

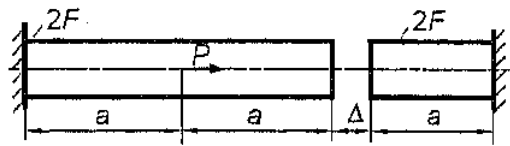


Рис. 1.19

1.38. Стержень, изображенный на рис. 1.20, нагрет по всей длине на $\Delta t^\circ\text{C}$ и нагружен силой P . Определить, при каком значении силы P сечение $A-A$ остается неподвижным.

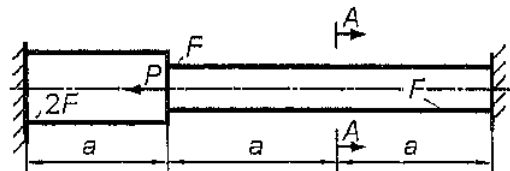


Рис. 1.20

1.39. Для стержня, изображенного на рис. 1.14, найти допустимое значение силы P . В расчетах принять: $l = 1$ м; $l_1 = 0,4$ м; $F = 20$ см²; $[\sigma] = 120$ МПа.

1.40. Для стержня, изображенного на рис. 1.21, определить силу P , создающую в его левой части напряжение 50 МПа, при условии, что зазор “закрывается”. В расчетах принять: $l = 20$ м; $l_1 = l/2$; $F = 25$ см²; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\Delta = 0,2$ мм.

1.41. В предыдущей задаче, положив $P = 200$ кН, определить такое значение l_1 , которое соответствует напряжению 50 МПа в левой части стержня.

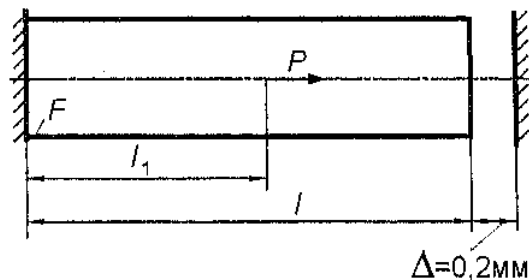


Рис. 1.21

1.42. Стержень длиной $l = 2$ м, имеющий постоянное круглое поперечное сечение диаметром $d = 25$ мм, при приложенных на его концах силах $P = 30$ кН получает удлинение $\Delta l = 1,75$ мм. Определить напряжение в стержне и модуль упругости материала.

1.43. Для стержня, изображенного на рис. 1.22, определить наибольшие (по модулю) напряжение и перемещение. В расчетах принять: $l = 1,2$ м; $F = 2$ см²; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $q = 100$ кН/м; $P = 50$ кН.

1.44. Изображенный на рис. 1.23 стержень нагрет на $t^\circ\text{C}$. Определить наибольшее (по модулю) напряжение. В расчетах принять: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $t = 40^\circ\text{C}$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/ $^\circ\text{C}$.

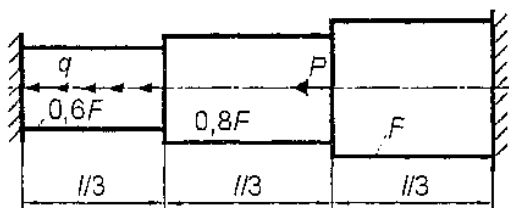


Рис. 1.22



Рис. 1.23

Глава 2 РАСЧЕТ ФЕРМЕННЫХ СИСТЕМ

В этой главе рассматривается один из частных случаев стержневых систем (см. определение П.3).

Прежде всего, отметим, что встречающиеся на практике соединения стержней, как правило, в расчетных схемах сводятся к двум типам узлов:

- шарнирный, рис. 2.1, а;
- абсолютно жесткий, рис. 2.1, б.

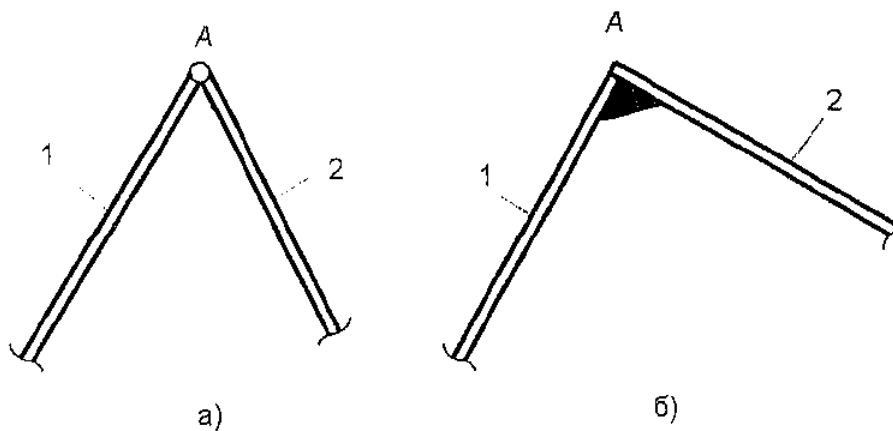


Рис. 2.1

В первом варианте возможен свободный поворот одного стержня относительно другого (результатирующий момент относительно узла от внешней нагрузки, приложенной к каждому из них, равен нулю), а во втором — соединяемые сечения имеют одни и те же линейные и угловые перемещения.

Определение 2.1. Стержневая система называется *фермой* (*шарнирной фермой*), если

- а) ее элементами являются прямые стержни, работающие только на растяжение-сжатие (находятся в состоянии одноосного растяжения-сжатия);
- б) ее узлы и опоры — шарнирные;
- в) она — геометрически неизменяемая.

Иногда некоторые элементы фермы считаются недеформируемыми (тогда их геометрия не важна). В этом случае ферма называется *ферменной системой*. ■

Далее, так же как и в гл. 1, полное название “прямой стержень” часто будем заменять сокращенным — “стержень”.

Утверждение 2.1. Для того чтобы геометрически неизменяемая система шарнирно соединенных между собой и с опорами прямых стержней (и абсолютно твердых тел) была фермой (ферменной системой), необходимо и достаточно, чтобы внешняя нагрузка была следующей:

- сосредоточенные силы приложены в узлах;
- приложенные к стержням сосредоточенные силы и погонная нагрузка направлены по их осям;
- температурное поле постоянно по сечениям стержней.

Для ферменных систем нагрузка на элементы в виде абсолютно твердых тел может быть произвольной. ■

По своей геометрии и внешней нагрузке фермы и ферменные системы классифицируются следующим образом.

Определение 2.2. Ферма (ферменная система) называется *плоской*, если оси всех стержней и внешние сосредоточенные и распределенные силы лежат в одной плоскости, а векторы моментов перпендикулярны этой плоскости (для ферменных систем). Для *плоской ферменной системы* дополнительно полагается, что упомянутая плоскость является плоскостью геометрической и массовой симметрии абсолютно твердых тел.

В противном случае ферма (ферменная система) — *пространственная*. ■

Определение 2.3. Стержневая система (в том числе и ферма) называется *прямосимметричной* (*кососимметричной*), если

а) она имеет ось или плоскость геометрической и жесткостной симметрии;

б) внешняя нагрузка прямо- или кососимметрична относительно этой оси или плоскости. ■

Алгоритм расчета ферм и ферменных систем состоит из двух основных этапов.

1. С помощью метода сечений и уравнений равновесия узлов (равнодействующая сил равна нулю — три и два уравнения соответственно в пространственном и плоском случаях) и недеформируемых элементов (шесть и три уравнения соответственно в пространственном и плоском случаях) определяем усилия в концевых сечениях стержней.

При этом для сокращения числа неизвестных удобно использовать следующее свойство симметричных систем.

Утверждение 2.2. Внутренние усилия в элементах прямосимметричной (кососимметричной) фермы или ферменной системы прямосимметричны (кососимметричны). ■

Кроме того, во многих случаях реакции в опорах можно не включать в число неизвестных.

2. Проводим расчет каждого из стержней по алгоритму, данному в главе 1. Если для данного стержня имеется нагрузка вне узлов и/или его сечение переменное, то обычным образом строим для него необходимые эпюры. В противном случае следует воспользоваться результатами примера 1.1.

3. Для определения перемещений узлов (если это требуется по условию задачи) в этой главе, как правило, используем *геометрический метод*, который заключается в изображении предполагаемого деформированного состояния системы и решении соответствующей геометрической задачи. При этом в соответствии с аксиомой 3 удлинения стержней вычисляем приближенно: полагаем, что они определяются пересечением перпендикуляров, опущенных из положений узлов после приложения нагрузки на недеформированные оси. Этот подход продемонстрирован на рис. 2.2. Здесь пунктирной линией обозначено положение оси стержня 1 в деформированном состоянии, A , A' и A'' — точки, соответствующие исходному, истинному и фиктивному деформированным положениям узла, δ_{1A} — прибли-

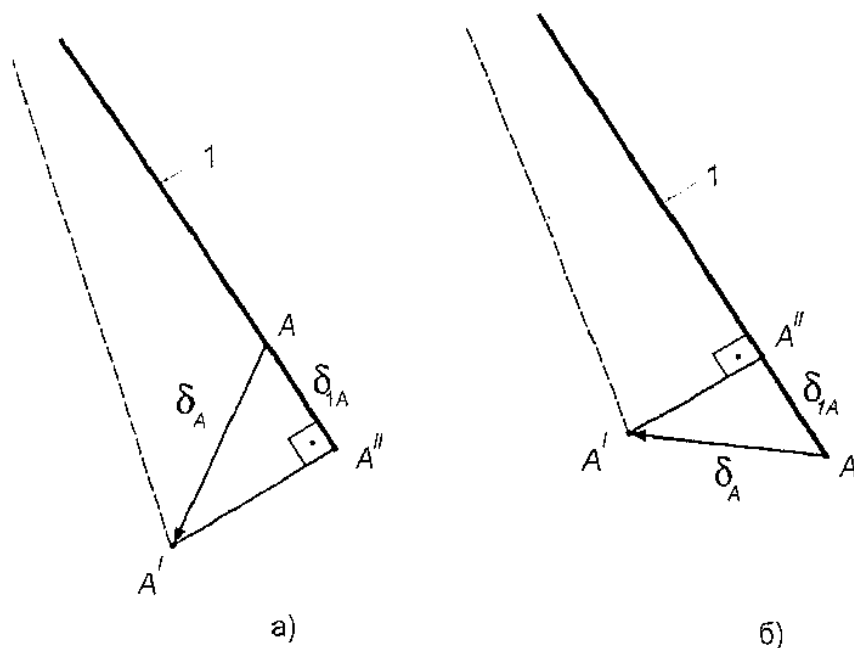


Рис. 2.2

женное значение перемещения сечения A стержня 1 (оно находится при реализации п. 2 алгоритма), а δ_A — вектор перемещения узла. Отметим, что перемещение δ_{1A} должно изображаться на чертеже с учетом направления (удлинение — рис. 2.2, а или укорочение — рис. 2.2, б) и рассматриваться как положительная величина. Можно

также наносить на чертеж это перемещение как соответствующее удлинению, наделяя его при этом соответствующим знаком.

При вычислении перемещений в конкретном стержне ферменной системы может применяться формула (1.19). Однако, как правило, стержень (или его участок) $A-B$ имеет постоянные характеристики и $N = \text{const}$. Тогда удобно использовать следующую вытекающую из (1.19) формулу для удлинения (см. также (1.18)):

$$\Delta l_{AB} = \delta_B - \delta_A = \int_0^l \frac{N}{EF} dx = \frac{Nl}{EF}. \quad \blacksquare \quad (2.1)$$

Более общий подход, позволяющий избежать решения зачастую сложной геометрической задачи, рассмотрен в главе 7.

В тех случаях, когда ищется перемещение, соответствующее направлению и точке приложения внешней силы, иногда удобно использовать закон сохранения энергии (П.21). При этом работа силы P на проекции δ перемещения по направлению действия силы вычисляется так (при деформации сила изменяется линейно от нуля до P):

$$A = \frac{1}{2} P\delta. \quad (2.2)$$

Если ферменная система содержит n стержней, то в соответствии с утверждением П.3 для ее потенциальной энергии справедливо равенство

$$U = \sum_{i=1}^n U_i. \quad (2.3)$$

Здесь U_i — потенциальная энергия i -го стержня, которая определяется формулой (1.15) или ее частным случаем, соответствующим постоянным по длине характеристикам материала и $N = \text{const}$:

$$U = \frac{N^2 l}{2EF}. \quad (2.4)$$

Обобщение равенств (2.2) и (2.3) приведено в § 7.1.

§ 2.1. Статически определимые задачи

Согласно определению П.17 и приведенному выше алгоритму расчета ферм и ферменных систем ферма или комбинированная ферменная система является СО, если выполняется равенство $n = r$, где n — общее число уравнений равновесия, а r — коли-

чество искомых усилий в узлах и, быть может, реакций в опорах. Методика решения статически определимых задач изложена выше.

В этом варианте так же, как и для статически определимых стержней, и по тем же причинам температурные поля не рассматриваются.

Пример 2.1. Определить усилия в стержнях системы, изображенной на рис. 2.3. Произвести проектировочный расчет на прочность, считая, что площади F поперечных сечений стержней одинаковы. Полагая, что каждый стержень выполнен из двух равнобоких уголков, подобрать по ГОСТу номер профиля. Вычислить вертикальное перемещение угла A . В расчетах принять: $l = 1$ м; $P = 200$ кН; $[\sigma]_p = 160$ МПа; $[\sigma]_c = 0,8[\sigma]_p$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение (нумерация пунктов соответствует алгоритму расчета ферм и ферменных систем). Нумерация стержней и обозначения узлов приведены на рис. 2.3.

1. Определение реакций и усилий. Вычисляем длины первого и четвертого стержней:

$$l_1 = \sqrt{(2l)^2 + (2l)^2} = 2,83l, \quad l_4 = 2l \cos 30^\circ = 1,73l.$$

Заменяем опоры (см. п. IV § П.1) реакциями R_{Cx} , R_{Cy} и R_D (см. рис. 2.3) и определяем их из уравнений равновесия системы:

$$\sum M_C = 0: R_D l - P \cdot (1,73l + 2l \cos 60^\circ) = 0;$$

$$\sum Y = 0: R_{Cy} - P = 0; \quad \sum X = 0: -R_{Cx} + R_D = 0.$$

Отсюда следует, что

$$R_D = R_{Cx} = 2,73P, \quad R_{Cy} = P.$$

Для вычисления усилий в стержнях используем метод сечений (вырезания узлов). При этом учитываем, что усилие в каждом стержне постоянно по длине (см. пример 1.1).

Удобнее начинать с узла, который соединяет два стержня, так как из уравнений равновесия усилия в этих стержнях определяются сразу. Вырежем, например, узел A (см. рис. 2.3). Уравнения равновесия для него запишем в локальной системе координат Ax_1y_1 , направив ось Ax_1 по второму стержню:

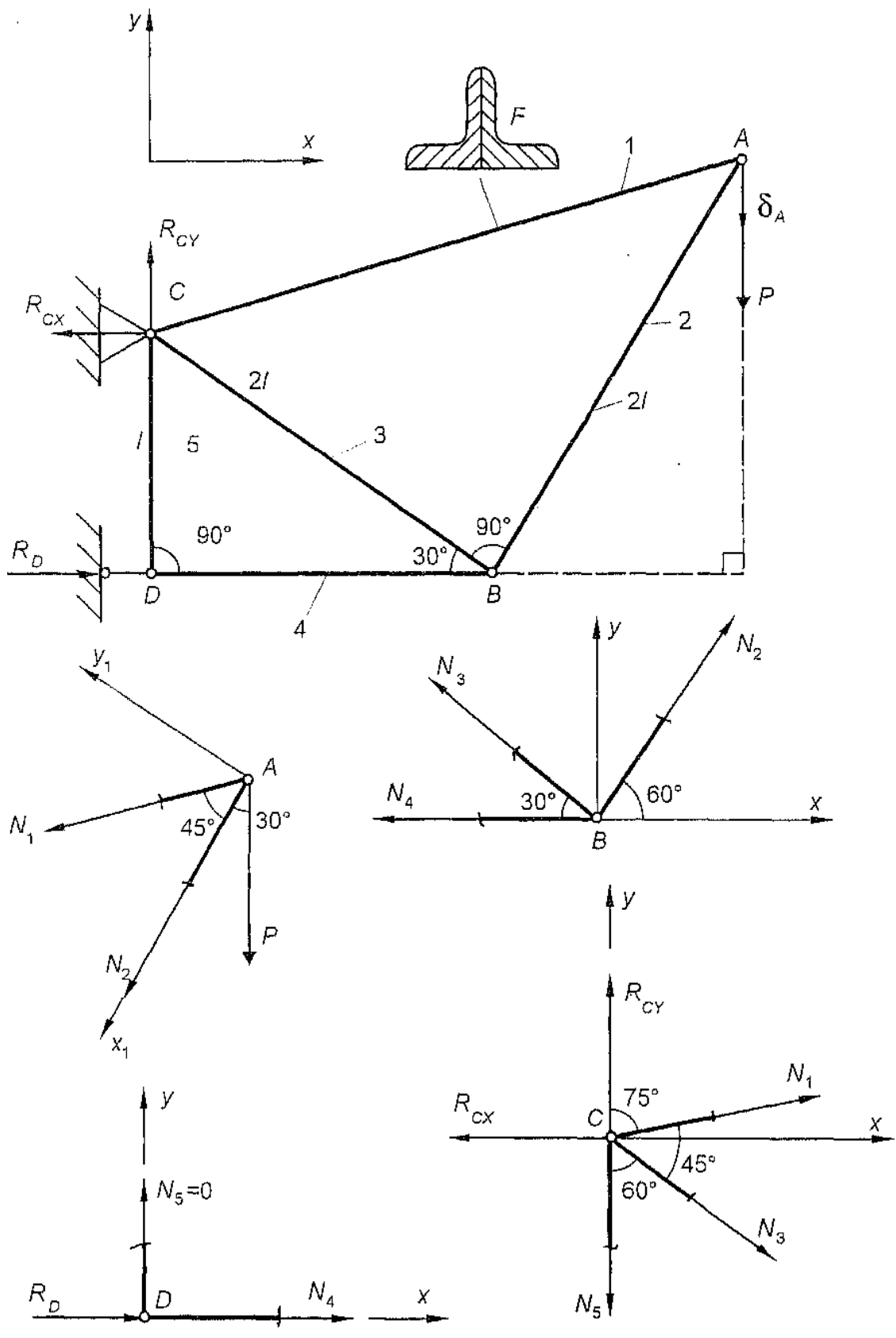


Рис. 2.3

$$\sum Y_1 = 0: N_1 \sin 45^\circ - P \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum X_1 = 0: N_1 \cos 45^\circ + N_2 + P \cos 30^\circ = 0.$$

Отсюда находим:

$$N_1 = 0,707P; \quad N_2 = -1,37P.$$

Аналогично поступаем с узлом D :

$$\sum X = 0: R_D + N_4 = 0; \quad \sum Y = 0: N_5 = 0.$$

Следовательно,

$$N_4 = -2,73P, \quad N_5 = 0.$$

Для узла B достаточно использовать одно уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0: N_3 \sin 30^\circ + N_2 \sin 60^\circ = 0, \quad N_3 = 2,37P.$$

Второе уравнение равновесия для него

$$\sum X = 0: -N_4 - N_3 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ = 0,$$

а также уравнения для узла C

$$\sum X = 0: -R_{Cx} + N_3 \sin 60^\circ + N_1 \sin 75^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0: -R_{Cy} + N_1 \cos 75^\circ - N_3 \cos 60^\circ - N_5 = 0$$

можно использовать для проверки правильности решения. Действительно, подстановка в них найденных усилий приводит к тождествам (с используемой при вычислениях точностью).

Отметим, что для проверки правильности определения усилий можно вырезать любую часть системы и рассмотреть ее равновесие.

2. Проектировочный расчет на прочность. Так как площади поперечных сечений стержней одинаковы, то максимальные растягивающее и сжимающее напряжения определяются усилиями (см. (1.17)):

$$\sigma_{\max p} = \sigma_3 = \frac{N_3}{F} = 2,37 \frac{P}{F}, \quad \sigma_{\max c} = |\sigma_4| = \frac{|N_4|}{F} = 2,73 \frac{P}{F}.$$

Поскольку материал неодинаково работает на растяжение и сжатие ($[\sigma]_c = 0,8 [\sigma]_p = 128 \text{ МПа}$), то используем два условия прочности из (П.27):

$$\sigma_{\max p} = 2,37 \frac{P}{F} \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{\max c} = 2,73 \frac{P}{F} \leq [\sigma]_c.$$

Отсюда приходим к системе неравенств:

$$F \geq \frac{2,37P}{[\sigma]_p} = \frac{2,37 \cdot 200 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,96 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$F \geq \frac{2,73P}{[\sigma]_c} = \frac{2,73 \cdot 200 \cdot 10^3}{128 \cdot 10^6} = 4,27 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Таким образом, $F \geq 42,7 \text{ см}^2$. Учитывая, что $F = 2F_{\angle}$ (F_{\angle} — площадь одного уголка), находим требуемую площадь одного уголка: $F_{\angle} \geq F/2 = 21,3 \text{ см}^2$. По ГОСТу (см. § П.2, табл. П.7) определяем, что необходим уголок № 125 × 125 × 9, $F_{\angle} = 22 \text{ см}^2$.

Итак, $F = 2F_{\angle} = 44 \text{ см}^2$.

3. Определение вертикального перемещения δ_A точки приложения силы (см. рис. 2.3). Здесь в этих целях используем закон сохранения энергии (П.21) с учетом формул (2.2)—(2.4):

$$A = \frac{1}{2} P \delta_A = U = \sum_{i=1}^5 \frac{N_i^2 l_i}{2EF} = \frac{1}{2EF} [(0,707P)^2 2,83l + (-1,37P)^2 2l + (2,37P)^2 2l + (-2,73P)^2 1,73l] = 1,46 \frac{P^2 l}{EF}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{2U}{P} = 29,2 \frac{Pl}{EF} = \frac{29,2 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 44 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 6,64 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 6,64 \text{ мм. } \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 2.2. Абсолютно жесткое тело (АЖТ) закреплено при помощи стержней (рис. 2.4). Определить допускаемую нагрузку из условия прочности. В расчетах принять: $\sigma_{0,2} = 240 \text{ МПа}$;

$[n] = 1,5$; $F = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; материал стержней одинаково работает на растяжение и на сжатие.

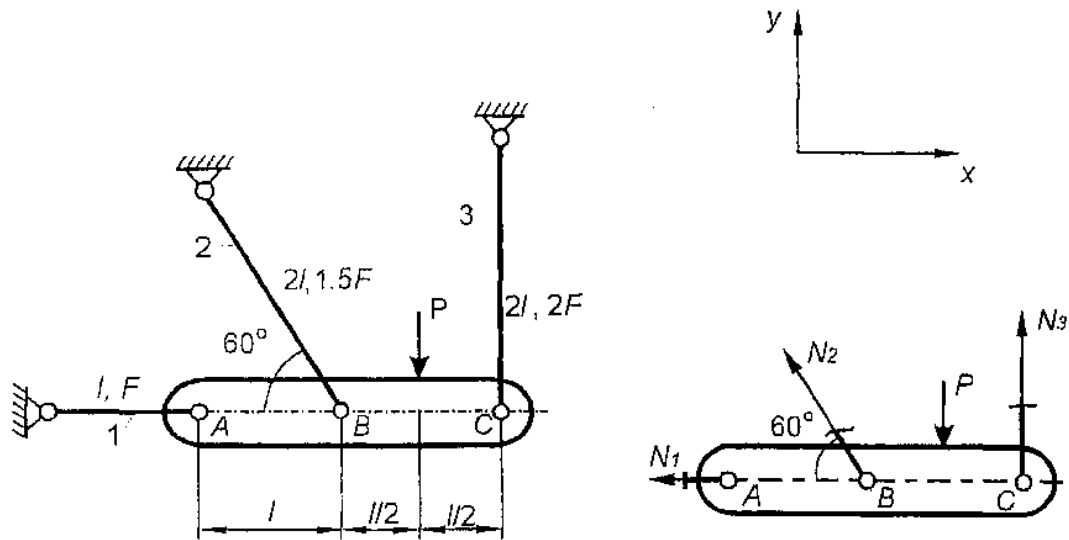


Рис. 2.4

Решение. Нумерация стержней приведена на рис. 2.4.

1. Определение усилий. Разрезая стержни, выделяем АЖТ и рассматриваем его равновесие:

$$\sum M_B = 0: -P \cdot l/2 + N_3 \cdot l = 0;$$

$$\sum Y = 0: N_2 \sin 60^\circ - P + N_3 = 0; \quad \sum X = 0: -N_1 - N_2 \cos 60^\circ = 0.$$

Отсюда имеем:

$$N_3 = P/2, \quad N_2 = 0,577P, \quad N_1 = -0,288P.$$

Все усилия определены из уравнения равновесия, следовательно, задача статически определима.

2. Расчет на прочность. Вычисляем напряжения в стержнях, используя (1.17):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = -0,288 \frac{P}{F}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{1,5F} = 0,384 \frac{P}{F}, \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{2F} = 0,250 \frac{P}{F}.$$

Определяем допускаемые напряжения

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{[n]} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}$$

и из условия прочности (см. (П.27))

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 0,384 \frac{P}{F} \leq [\sigma].$$

находим допускаемую нагрузку:

$$P \leq \frac{[\sigma] F}{0,384} = \frac{1600 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0,384} = 8,33 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Округляя в меньшую сторону, окончательно принимаем $P_{\text{доп}} = 83 \text{ кН}$. ■

Пример 2.3. Абсолютно жесткое тело AC (рис. 2.5), нагруженное равномерно распределенной нагрузкой q , закреплено шарнирно в точке A и стержнем в точке B . Определить площадь поперечного сечения стержня из условия, что перемещение точки C не должно превышать $[\delta]$. В расчетах принять: $q = 10 \text{ кН/м}$; $l = 1 \text{ м}$; $[\delta] = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; материал стержня — сталь ($[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$).

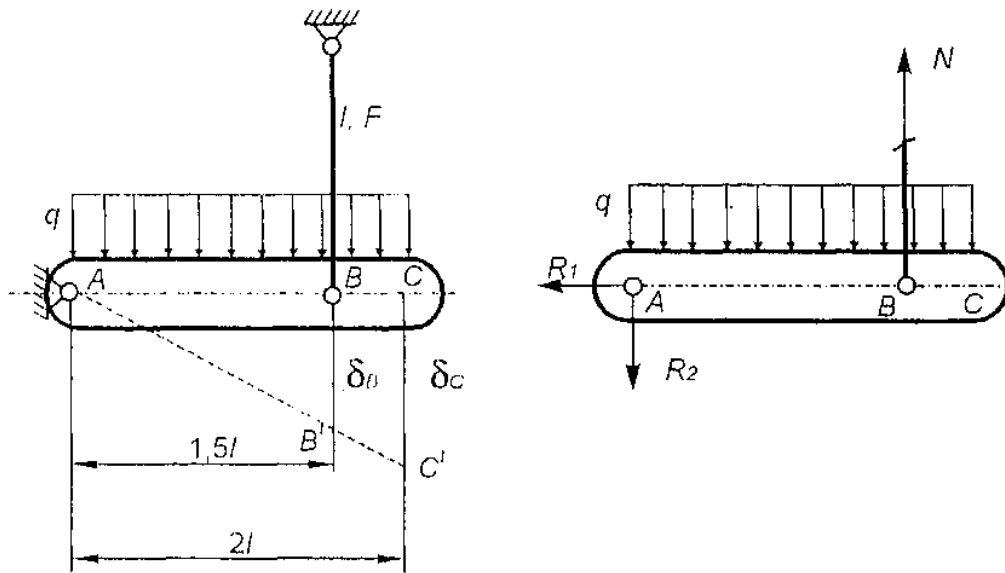


Рис. 2.5

Решение. 1. Определение усилий. Освобождаем АЖТ от связей, отбрасывая опору и разрезая стержень (см. рис. 2.5). Задача статически определима, поскольку для АЖТ можно составить три уравнения равновесия, из которых определяются R_1 , R_2 , N .

Так как требуется найти только усилие N , то ограничимся уравнением моментов:

$$\sum M_A = 0: -q \cdot 2l \cdot l + N \cdot 1,5l = 0, \quad N = 4ql/3.$$

2—3. Расчет на жесткость. Картина деформаций системы показана на рис. 2.5. Тело поворачивается вокруг точки A . При

этом точки B и C перемещаются в положения B' и C' . Соответствующие дуги заменяем отрезками BB' и CC' , перпендикулярными AC (см. п. 3 алгоритма). Из подобия треугольников ABB' и ACC' имеем:

$$\frac{\delta_B}{1,5l} = \frac{\delta_C}{2l},$$

где $\delta_B = |BB'|$ и $\delta_C = |CC'|$ — перемещения точек B и C .

Вычисляя удлинение стержня по формуле (2.1)

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{4}{3} \frac{ql^2}{EF}$$

и учитывая, что $\delta_B = \Delta l$, из указанной выше пропорции получаем:

$$\delta_C = \frac{4}{3} \delta_B = \frac{16}{9} \frac{ql^2}{EF}.$$

Площадь поперечного сечения стержня находим из условий прочности и жесткости (см. п. VI § II.1):

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{4}{3} \frac{ql}{F} \leq [\sigma], \quad \delta_C = \frac{16}{9} \frac{ql^2}{EF} \leq [\delta].$$

Отсюда имеем:

$$F \geq \frac{4}{3} \frac{ql}{[\sigma]} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1}{3 \cdot 160 \cdot 10^6} = 0,833 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

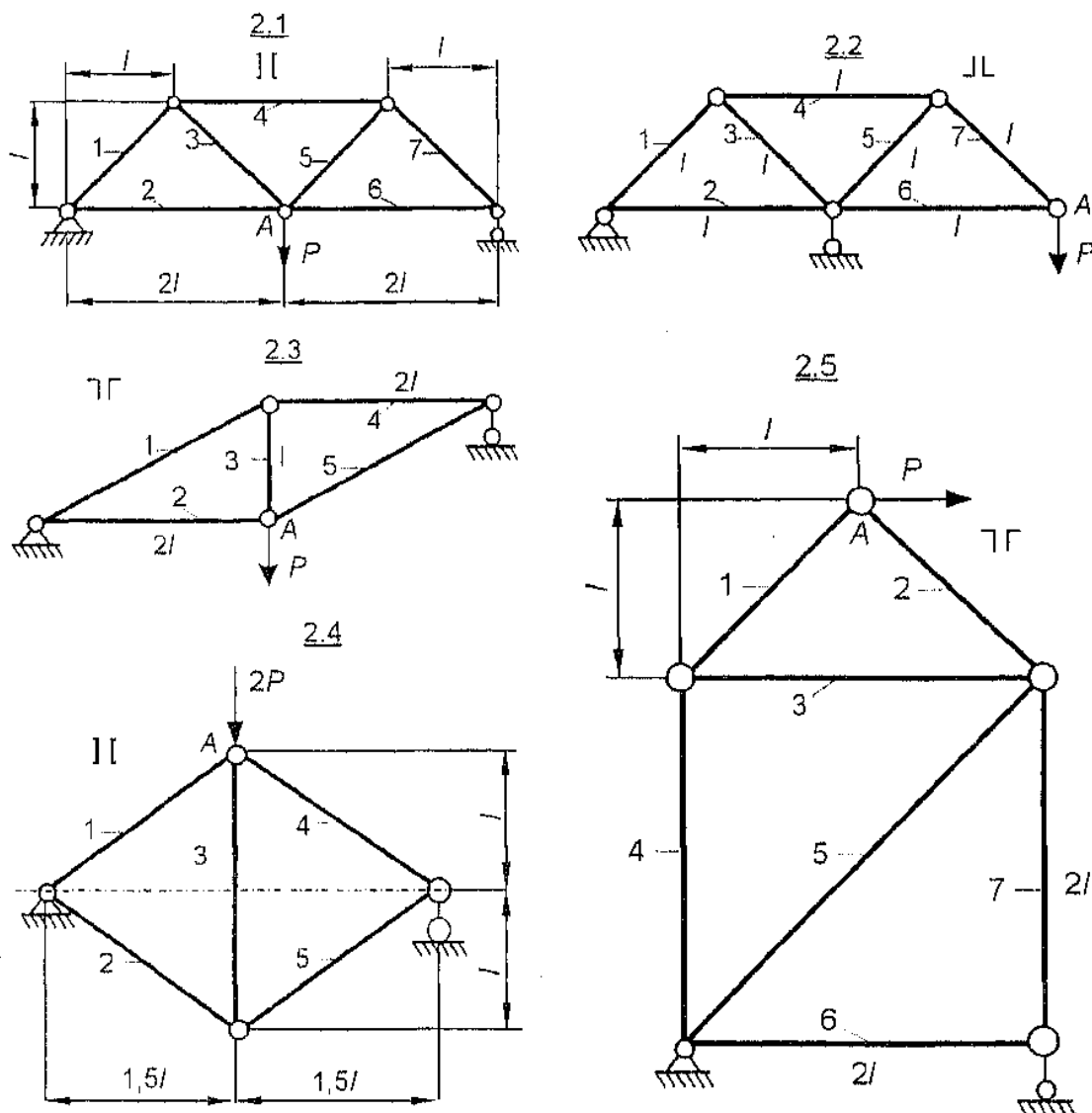
$$F \geq \frac{16}{9} \frac{ql^2}{E [\delta]} = \frac{16 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{9 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}} = 1,78 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Окончательно принимаем $F = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. ■

Задачи

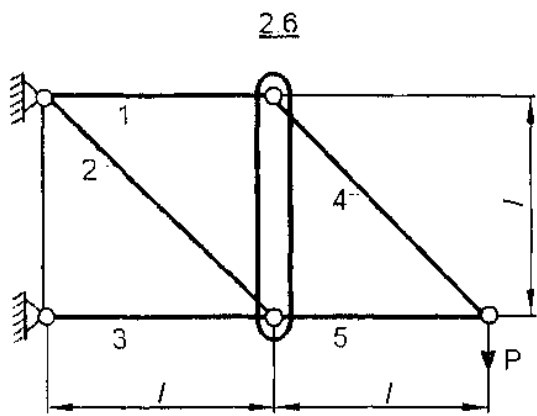
2.1—2.5. Для ферм, представленных на соответствующих рисунках, определить усилия в стержнях, подобрать номер профиля по ГОСТу (сечения всех стержней одинаковы, тип сечения показан схематически на рисунках, и вычислить перемещение узла, в котором приложена сила, по направлению действия

силы. В расчетах принять: $l = 1$ м; $P = 200$ кН; $[\sigma]_p = 160$ МПа; $[\sigma]_c = 0,8 [\sigma]_p$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

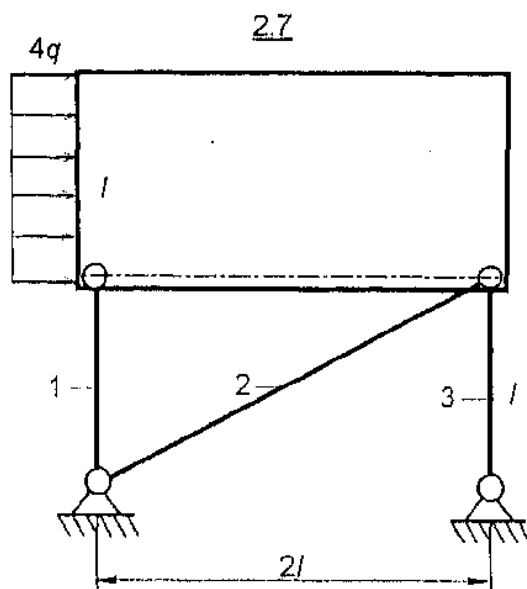


2.6—2.11. Для ферменных систем, указанных на соответствующих рисунках, вычислить усилия в стержнях, напряжения и найти запас прочности. Сечения всех стержней тонкостенные, их типы указаны на схемах (1 — кольцевое, диаметр d ; 2 — прямоугольное, $d \times 1,5d$; 3 — квадратное, $d \times d$), размеры даны по средней линии; толщина δ постоянна.

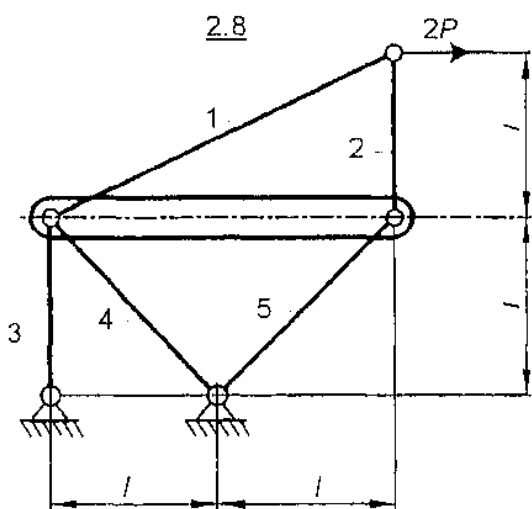
В расчетах принять: $l = 1$ м, $P = 10$ кН, $q = P/l$; все стержни выполнены из одного материала; $\sigma_{пр.р} = \sigma_{0,2} = 300$ МПа; $\sigma_{пр.с} = 0,7 \sigma_{0,2}$; $\delta = d/10$; $d = 5 \cdot 10^{-2}$ м.



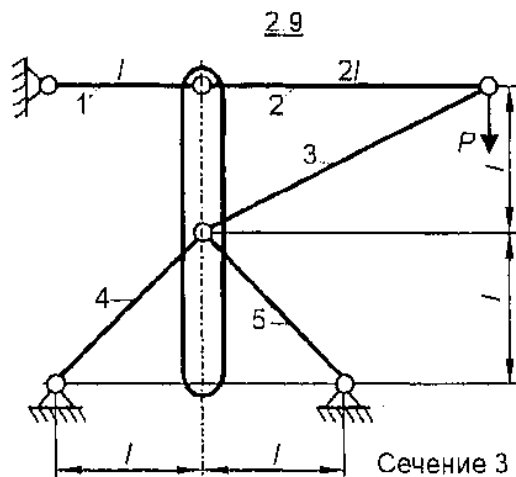
Сечение 1



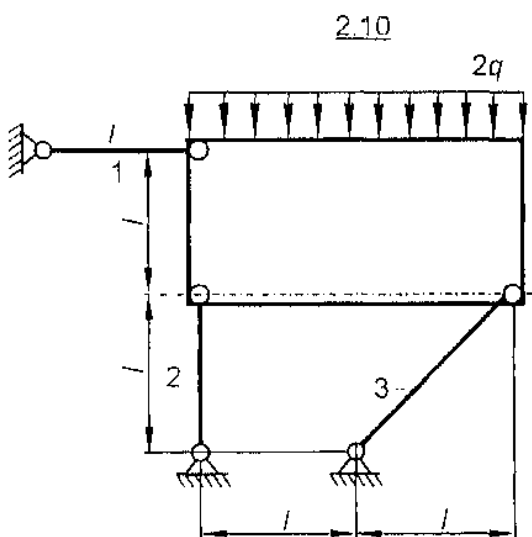
Сечение 2



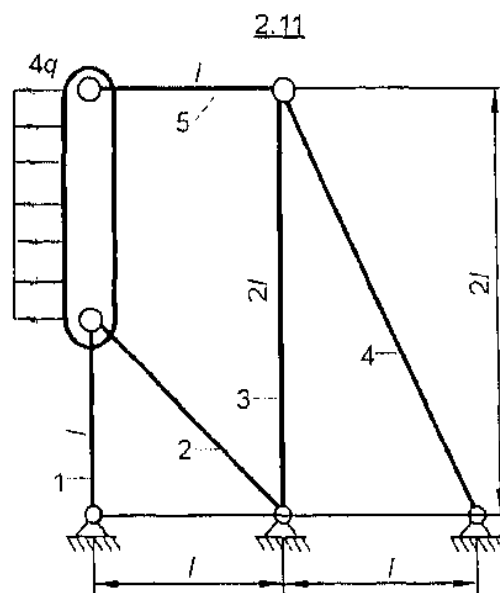
Сечение 2



Сечение 3

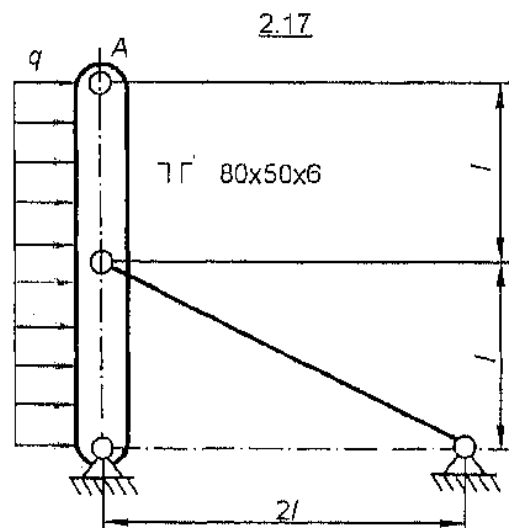
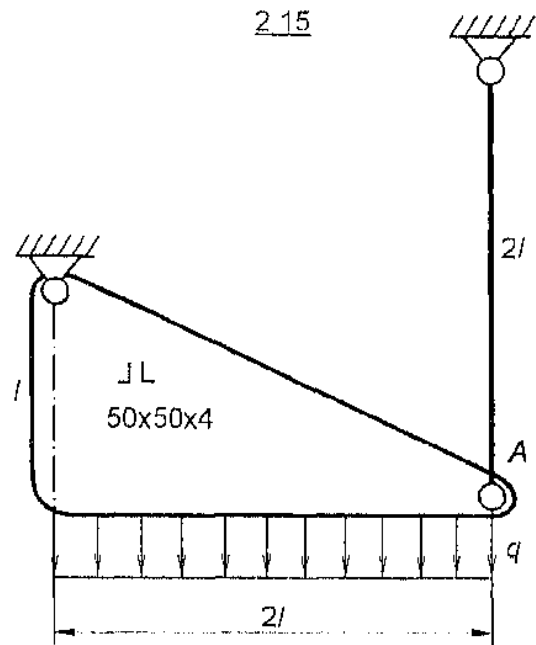
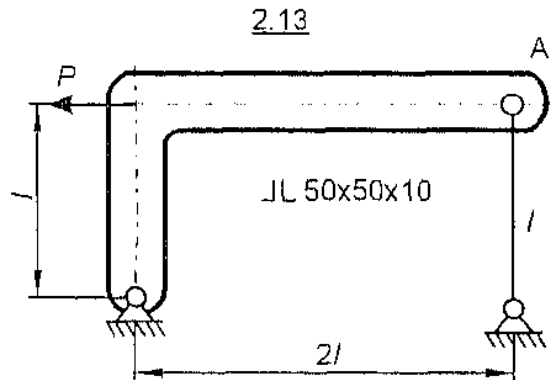
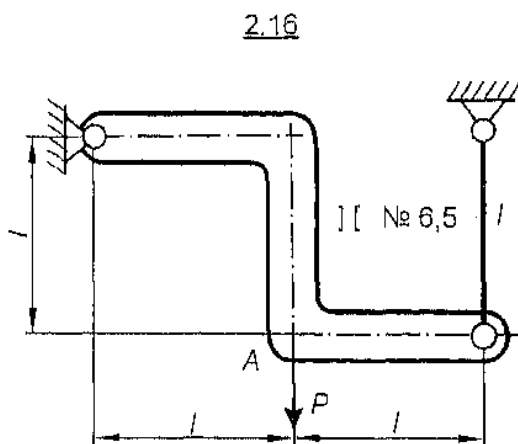
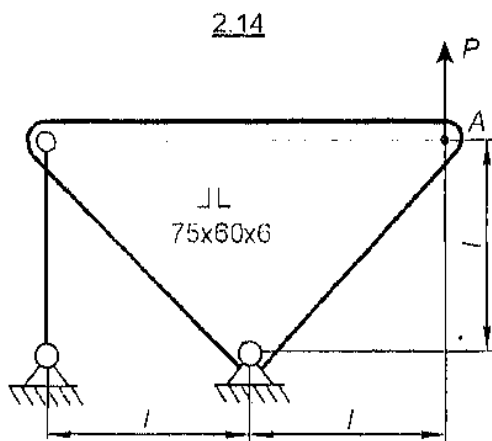
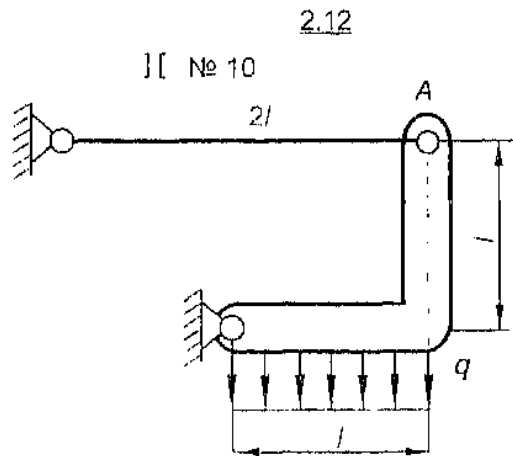


Сечение 1



Сечение 3

2.12—2.17. Для ферменных систем, указанных на соответствующих рисунках, определить усилия в стержнях, вычислить перемещение δ_A точки A и найти допускаемую нагрузку из расчета на прочность и жесткость ($\delta_A \leq [\delta]$). Стержень выполнен из двух стандартных профилей, типы и номера которых указаны на рисунке. В расчетах принять: материал стержня —



сталь ($[\sigma]_p = 160$ МПа; $[\sigma]_c = 0,7 [\sigma]_p$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа); $l = 2$ м,
 $[\delta] \leq 0,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Указание. Площадь поперечного сечения взять из ГОСТа прокатной стали (см. § П.2, табл. П.7—П.11). Допускаемые нагрузки $P_{доп}$ и $q_{доп}$ округлить в меньшую сторону с точностью до двух значащих цифр.

§ 2.2. Статически неопределимые задачи

Ферма или комбинированная ферменная система является СН, если $n < r$ (см. начало § 2.1). При этом число $(r - n)$ — степень статической неопределимости.

Алгоритм решения СН-задач отличается от указанного в § 2.1 так же, как различаются соответствующие методики для стержней (см. § 1.1, 1.2), а именно только усложнением п. 1. *Уравнения совместности деформаций* при этом также являются следствием аксиомы 1 и находятся из условия совпадения перемещений концов стержней, сходящихся в одном узле. Они должны быть независимыми, и их число обязано совпадать со степенью статической неопределимости системы.

При составлении уравнений совместности полезно использовать свойство симметричных систем, указанное в утверждении 2.2, добавляя к нему соответствующую симметрию деформированного состояния.

Для задач с зазором и с учетом монтажных напряжений применяется тот же подход, что и для стержней (см. § 1.2). ■

Отметим, что в СН-задачах для ферм и ферменных систем также существенным является учет температурных полей. При этом, как следует из (1.19) и (1.22), полное удлинение стержня есть сумма упругой Δl^y и температурной Δl^t составляющих:

$$\Delta l = \Delta l^y + \Delta l^t, \quad \Delta l^y = \int_0^l \frac{N}{EF} dx, \quad \Delta l^t = \int_0^l \alpha \Delta t dx. \quad (2.5)$$

При постоянных по длине характеристиках материала и $N = \text{const}$, $\Delta t = \text{const}$ последние два равенства переходят в следующие (первое из них, естественно, совпадает с соответствующей формулой в (2.1)):

$$\Delta l^y = \frac{Nl}{EF}, \quad \Delta l^t = \alpha \Delta t l. \quad (2.6)$$

При проверке решения СН-задач часто удобно пользоваться законом сохранения энергии (П.21) (см. также (2.2)—(2.4)).

Пример 2.4. Для стержневой системы, изображенной на рис. 2.6 (стержни, отмеченные двумя черточками, нагреты на Δt), провести проективный и поверочный расчеты на прочность, а также вычислить перемещение точки приложения силы. Найденную площадь F округлить в большую сторону с точностью до $0,5 \text{ см}^2$.

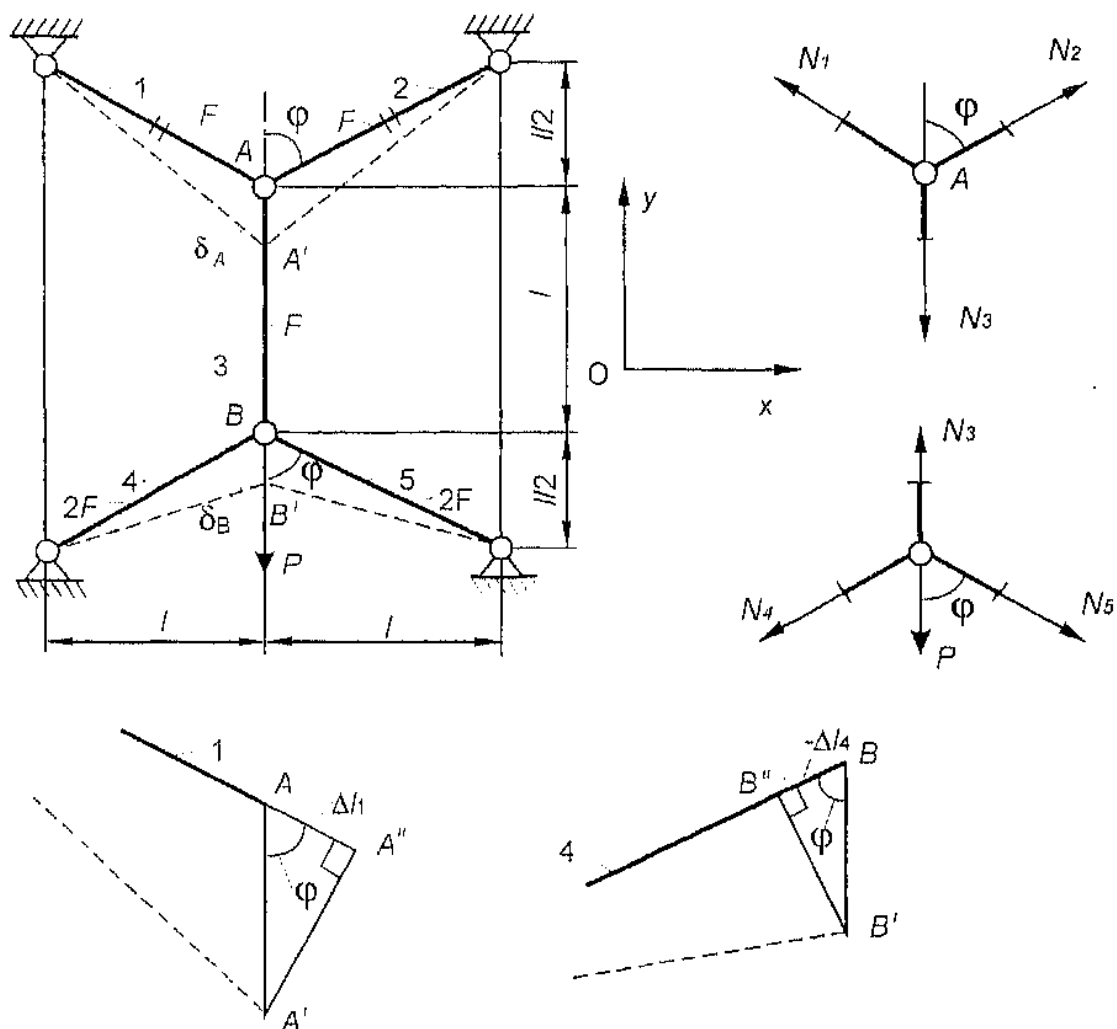


Рис. 2.6

В расчетах принять: $P = 40 \text{ кН}$, $\Delta t = 20^\circ \text{ С}$, $l = 0,5 \text{ м}$; все стержни выполнены из одного материала; $\sigma_{\text{пр.р}} = \sigma_{0,2} = 240 \text{ МПа}$; $E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{С}$; $[n] = 1,5$; предельное напряжение на сжатие на 30% меньше соответствующих напряжений на растяжение.

Решение (нумерация пунктов соответствует алгоритму решения СН-задач). Нумерация стержней и обозначения узлов приведены на рис. 2.6.

А. Проектировочный расчет. В соответствии с указанным выше алгоритмом при проектировочном расчете будем учитывать только силовую нагрузку.

1. Определение усилий. Сначала вычисляем длины стержней l_i и угол φ (см. рис. 2.6):

$$l_1 = l_2 = l_4 = l_5 = \sqrt{l^2 + (l/2)^2} = 1,12l, \quad \sin \varphi = 0,894, \quad \cos \varphi = 0,447.$$

Вырезаем узлы A, B и изображаем схему усилий (см. рис. 2.6). В силу симметрии имеют место равенства (то же самое следует из уравнений равновесия в проекциях на ось Ox):

$$N_1 = N_2, \quad N_4 = N_5.$$

Поэтому достаточно составить уравнения равновесия этих узлов только в проекциях на ось Oy . Они, соответственно, имеют вид:

$$2N_1 \cos \varphi - N_3 = 0, \quad 0,894N_1 - N_3 = 0,$$

$$N_3 - 2N_4 \cos \varphi - P = 0, \quad N_3 - 0,894N_4 - P = 0.$$

Система один раз статически неопределима, так как для нахождения пяти неизвестных усилий можно составить четыре уравнения равновесия.

Для построения уравнения совместности деформаций изображаем предполагаемую схему деформаций. Она представлена на рис. 2.6. Здесь пунктирными линиями изображено деформированное состояние стержней, A' и B' — положения узлов A и B после деформации, $A'A''$ и $B'B''$ перпендикулярны осям стержней 1 и 4 (см. рис. 2.2), $|AA'| = \delta_A$ и $|BB'| = \delta_B$ — перемещения узлов в направлении действия силы P , а $|AA'| = \Delta l_1$ и $(-|BB''|) = \Delta l_4$ — удлинение и укорочение этих стержней. При этом удлинение стержня 3 есть разность перемещений точек B и A (см. (2.1)):

$$\Delta l_3 = \delta_B - \delta_A.$$

Связь перемещений δ_A и δ_B с “удлинениями” стержней 1 и 4 вытекает из рассмотрения прямоугольных треугольников $AA'A''$ и $BB'B''$:

$$\delta_A = \Delta l_1 / \cos \varphi = 2,24\Delta l_1, \quad \delta_B = -\Delta l_4 / \cos \varphi = -2,24\Delta l_4.$$

Таким образом, уравнение совместности деформаций имеет вид

$$\Delta l_3 = -2,24 (\Delta l_4 + \Delta l_1).$$

Выражая удлинения через усилия с помощью формулы (2.1)

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF}, \quad \Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{2EF},$$

приводим его к следующему виду:

$$N_3 = -1,25N_4 - 2,50N_1.$$

Объединяя это уравнение с уравнениями равновесия, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно усилий:

$$0,894N_1 - N_3 = 0,$$

$$N_3 - 0,894N_4 = P,$$

$$2,50N_1 + N_3 + 1,25N_4 = 0,$$

которая имеет следующее решение:

$$N_1 = N_2 = 0,301P, \quad N_3 = 0,269P, \quad N_4 = N_5 = -0,817P.$$

2. Расчет на прочность. С помощью соответствующего равенства в (1.17) вычисляем напряжения σ_i^P в стержнях от действия силовой нагрузки:

$$\sigma_1^P = \sigma_2^P = \frac{N_1}{F} = 0,301 \frac{P}{F}, \quad \sigma_3^P = \frac{N_3}{F} = 0,269 \frac{P}{F},$$

$$\sigma_4^P = \sigma_5^P = \frac{N_4}{2F} = -0,408 \frac{P}{F}.$$

Допускаемые напряжения в соответствии с условием примера и формулами (П.26) следующие:

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{0,2}}{[n]} = 160 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\text{пр.с}} = 0,7\sigma_{0,2} = 168 \text{ МПа},$$

$$[\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{пр.с}}}{[n]} = 112 \text{ МПа}.$$

Поскольку материал неодинаково работает на растяжение и сжатие, то используем два условия прочности из (П.27):

$$\sigma_{\max p} = \sigma_1^P = 0,301 \frac{P}{F} \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{\max c} = |\sigma_4^P| = 0,408 \frac{P}{F} \leq [\sigma]_c.$$

Отсюда приходим к системе неравенств:

$$F \geq \frac{0,301P}{[\sigma]_p} = \frac{0,301 \cdot 40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,752 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$F \geq \frac{0,408P}{[\sigma]_c} = \frac{0,408 \cdot 40 \cdot 10^3}{112 \cdot 10^6} = 1,46 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Следовательно, $F \geq 1,46 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,46 \text{ см}^2$. Округлив, согласно условию задачи, принимаем:

$$F = 1,5 \text{ см}^2.$$

3. Вычисление перемещения точки приложения силы.

$$\begin{aligned} \delta_B^P &= -2,24\Delta l_4 = -2,24 \frac{N_4 l_4}{EF_4} = 1,02 \frac{Pl}{EF} = \\ &= 1,02 \cdot \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{0,7 \cdot 10^{11} \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}} = 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,95 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Дополнительно проверяем решение задачи, сопоставляя работу A силы P и потенциальную энергию упругой деформации U системы (см. (2.2)—(2.4)):

$$A = \frac{1}{2} P \delta_B^P = 0,511 \frac{P^2 l}{EF}, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \frac{N_i^2 l_i}{EF_i} = 0,511 \frac{P^2 l}{EF}.$$

Поскольку закон сохранения (П.21) $A = U$ выполняется, то задача решена верно.

Б. Поверочный расчет. Его проводим с учетом совместного действия силы и температуры.

Сначала решаем чисто температурную задачу, т.е. полагаем, что силовая нагрузка отсутствует, а стержни 1 и 2 нагреты на Δt (см. рис. 2.6). При этом используем те же схемы усилий и деформаций, что и в силовой задаче.

1. Определение усилий. Уравнения равновесия в этом случае следуют из полученных выше при $P = 0$.

Уравнения совместности деформаций здесь строятся так же, как и в п. А. Изменяется лишь формула для удлинения стержня 1. Согласно формулам (2.5) и (2.6) имеем

$$\Delta l_1 = \left(\frac{N_1}{EF} + \alpha \Delta t \right) l_1 = 1,12 \left(\frac{N_1}{EF} + \alpha \Delta t \right) l.$$

Подставляя это выражение, а также полученные выше формулы для Δl_3 и Δl_4 в уравнение совместности деформаций и объединяя результат с уравнениями равновесия, после преобразований получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно усилий:

$$0,894N_1 - N_3 = 0,$$

$$N_3 - 0,894N_4 = 0,$$

$$2,50N_1 + N_3 + 1,25N_4 = -2,5\alpha\Delta tEF,$$

решение которой имеет вид (дополнительно учитываем симметрию)

$$N_3 = -0,481\alpha\Delta tEF, \quad N_1 = N_2 = N_4 = N_5 = -0,538\alpha\Delta tEF.$$

2. Расчет на прочность. С помощью соответствующего равенства в (1.17) вычисляем вызванные нагревом напряжения:

$$\sigma_1^t = \sigma_2^t = \frac{N_1}{F} = -0,538\alpha\Delta tE, \quad \sigma_3^t = \frac{N_3}{F} = -0,481\alpha\Delta tE,$$

$$\sigma_4^t = \sigma_5^t = \frac{N_4}{2F} = -0,269\alpha\Delta tE.$$

Напряжения в стержнях вычисляем с учетом исходных данных и найденной при проектировочном расчете площади F :

$$\sigma_1^P = \sigma_2^P = 80,3 \text{ МПа}, \quad \sigma_3^P = 71,7 \text{ МПа}, \quad \sigma_4^P = \sigma_5^P = -109 \text{ МПа},$$

$$\sigma_1^t = \sigma_2^t = -12,8 \text{ МПа}, \quad \sigma_3^t = -11,4 \text{ МПа}, \quad \sigma_4^t = \sigma_5^t = -6,40 \text{ МПа}.$$

Полные напряжения есть сумма σ_i^P и σ_i^t :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 67,5 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = 60,3 \text{ МПа}, \quad \sigma_4 = \sigma_5 = -115 \text{ МПа}.$$

Следовательно, максимальные напряжения и запас прочности таковы:

$$l_1 = l\sqrt{2} = 1,41l, \quad \varphi = 45^\circ.$$

Далее выделяем АЖТ и изображаем схему усилий (см. рис. 2.7). Поскольку имеется четыре неизвестных (два усилия N_1, N_2 и две реакции R_{Bx}, R_{By}), а число уравнений равновесия равно трем, то степень статической неопределимости $4-3=1$.

Для определения усилий в стержнях достаточно ограничиться уравнением моментов относительно точки В:

$$\sum M_B = 0: \quad N_1 \sin \varphi \cdot l - N_2 l = 0.$$

Уравнения совместности деформаций получаем из анализа предполагаемой схемы деформаций, представленной на рис. 2.7. Здесь пунктирной линией изображена ось АЖТ в деформированном состоянии, A' и C' — положение точек A и C после деформации, отрезок $A'A''$ перпендикулярен оси стержня 1, $|AA'| = \delta_A$ и $|CC'| = \delta_C$ — перемещения узлов, а $|AA'| = \Delta l_1$ и $(-|CC'|) = \Delta l_2$ — удлинение и укорочение соответственно стержней 1 и 2.

Учитывая подобие треугольников $AA'B$ и BCC' и то, что треугольник $AA'A''$ прямоугольный, получаем

$$\delta_A/l = \delta_C/l, \quad \delta_C = -\Delta l_2, \quad \delta_A = \Delta l_1/\sin \varphi,$$

откуда вытекает уравнение совместности деформаций:

$$\Delta l_1 = -0,707\Delta l_2.$$

Выражая удлинения через усилия с помощью формул (2.1), (2.5) и (2.6)

$$\Delta l_1 = \left(\frac{N_1}{2EF} + \alpha \Delta t \right) l_1 = 1,41 \left(\frac{N_1}{2EF} + \alpha \Delta t \right) l, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF},$$

преобразуем его к следующему виду:

$$0,707N_1 + N_2 = -1,41\alpha\Delta t EF.$$

Объединяя это уравнение с уравнением равновесия, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно усилий:

$$0,707N_1 - N_2 = 0,$$

$$0,707N_1 + N_2 = -1,41\alpha\Delta t EF,$$

которая имеет следующее решение:

$$N_1 = -1,17\alpha\Delta tEF, \quad N_2 = -0,830\alpha\Delta tEF.$$

2. Определение напряжений. В соответствии с (1.17) имеем:

$$\sigma_1 = N_1/F_1 = -0,585\alpha\Delta tE = -13,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = N_2/F_2 = -0,830\alpha\Delta tE = -19,7 \text{ МПа}.$$

3. Перемещение точки С определяется соответствующим удлинением:

$$\delta_C = -\Delta l_2 = 0,830\alpha\Delta tl = 0,141 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,141 \text{ мм. } \blacksquare$$

Пример 2.6. Для стержневой системы, изображенной на рис. 2.8, определить усилия в стержнях, выполненных из одного материала.

Решение. Нумерация стержней и обозначения узлов указаны на рис. 2.8. Выделяем АЖТ и изображаем схему усилий (см. рис. 2.8). При этом стержень 2 разрезаем в точке В и усилие в этом сечении обозначаем N_{2B} .

Составляем уравнения равновесия (уравнение в проекциях на ось Ox удовлетворяется тождественно, так как горизонтальные усилия отсутствуют):

$$\sum Y = 0: \quad N_1 + N_{2B} - P - N_3 = 0,$$

$$\sum M_B = 0: \quad -N_1l - Pl - N_3 \cdot 2l = 0.$$

Система один раз статически неопределима, так как для определения трех неизвестных усилий можно составить два уравнения равновесия.

Уравнения совместности деформаций получаем из анализа предполагаемой схемы деформаций, представленной на рис. 2.8. Здесь пунктирной линией изображена ось АЖТ в деформированном состоянии; A' , B' , C' и D' — положения точек A , B , C и D после деформации; $|AA'| = \delta_A$, $|BB'| = \delta_B$ и $|DD'| = \delta_D$ — перемещения узлов, $\delta_A = \Delta l_1$ и $\delta_B = \Delta l_2$ — удлинение стержней 1 и 2, а $(-\delta_D) = \Delta l_3$ — укорочение стержня 3.

Проведем вспомогательную прямую $A'B''D''$, параллельную ABD . Из подобия получившихся треугольников имеем:

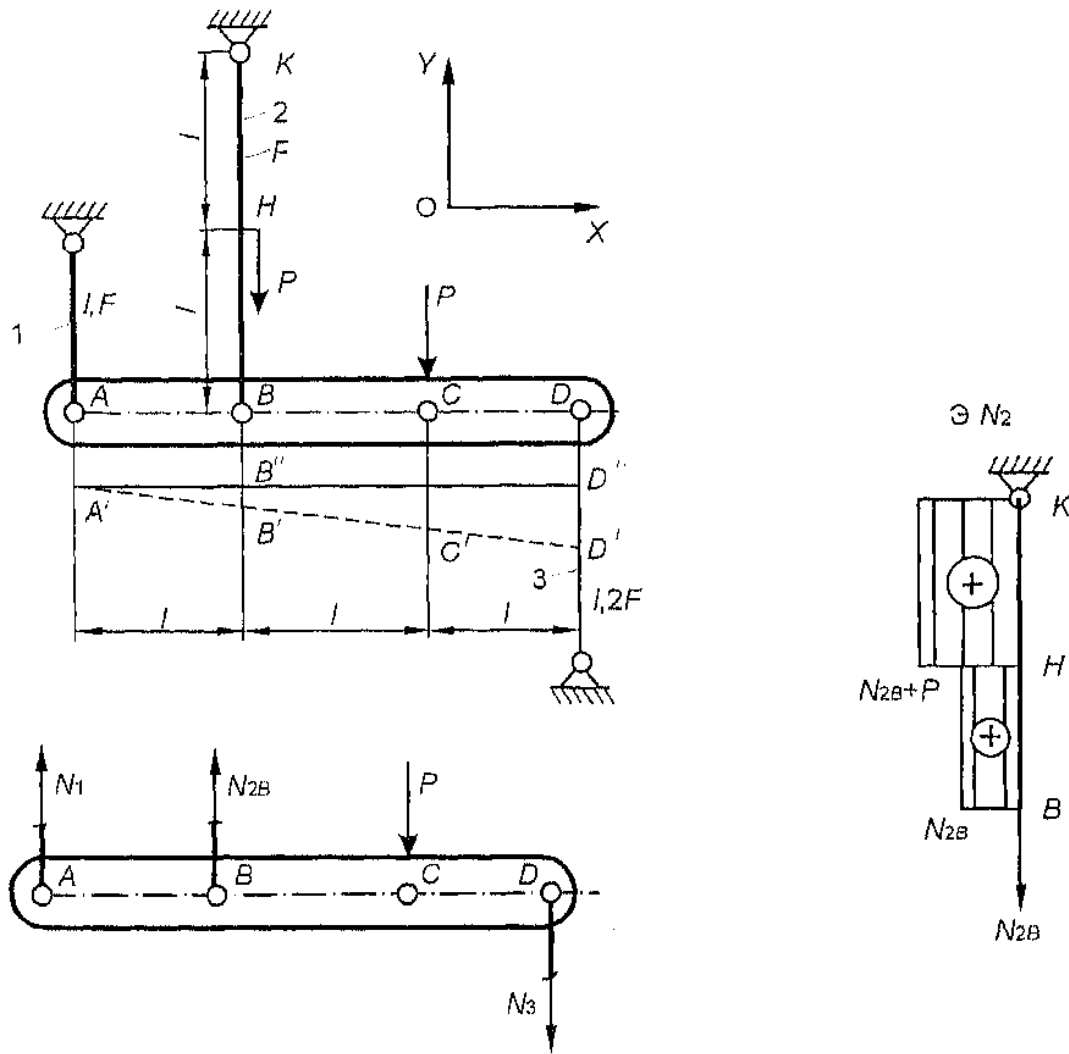


Рис. 2.8

$$\frac{B'B''}{l} = \frac{D'D''}{3l}, \quad B'B'' = \Delta l_2 - \Delta l_1, \quad D'D'' = -\Delta l_3 - \Delta l_1,$$

откуда получаем уравнение совместности деформаций:

$$3\Delta l_2 - 2\Delta l_1 + \Delta l_3 = 0.$$

“Удлинения” стержней 1 и 3 выражаем через усилия с помощью формулы (2.1):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF}, \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{2EF}.$$

Поскольку к стержню 2 приложена нагрузка вне концевых сечений, то для определения его удлинения частично используем общий алгоритм § 1.1. Сначала по участкам определяем продольные усилия:

$$N_{2BH} = N_{2B}, \quad N_{2HK} = N_{2B} + P.$$

Эпюра N_2 приведена на рис. 2.8.

Затем, учитывая, что $\delta_K = 0$ и усилия постоянны на каждом из участков, вычисляем перемещения с использованием (2.1):

$$\begin{aligned} \delta_H = \Delta l_{HK} &= \frac{N_{2B} + P}{EF} l, \quad \delta_B = \Delta l_3 = \delta_H + \Delta l_{BH} = \\ &= \delta_H + \frac{N_{2B}}{EF} l = \frac{2N_{2B} + P}{EF} l. \end{aligned}$$

Подставляя удлинения в уравнение совместности, приводим его к следующему виду:

$$6N_{2B} + 3P - 2N_1 + 0,5N_3 = 0.$$

Объединяя это уравнение с уравнением равновесия, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно усилий:

$$\begin{aligned} N_1 + N_{2B} - N_3 &= P, \\ N_1 + 2N_3 &= -P, \\ -2N_1 + 6N_{2B} + 0,5N_3 &= -3P. \end{aligned}$$

Ее решаем методом Гаусса:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 1 & 0 & 2 & -P \\ -2 & 6 & 0,5 & -3P \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 0 & -1 & 3 & -2P \\ 0 & 8 & -1,5 & -P \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & P \\ 0 & -1 & 3 & -2P \\ 0 & 0 & 22,5 & -17P \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$N_3 = -\frac{17}{22,5} P = -0,756P, \quad N_{2B} = (2 - 3 \cdot 0,756) P = -0,267P,$$

$$N_1 = (1 + 0,267 - 0,756) P = 0,511P.$$

Соответственно для второго стержня имеем:

$$N_{2BH} = -0,267P, \quad N_{2HK} = (-0,267 + 1) P = 0,733P.$$

Решение проверить можно, сопоставив работу внешних сил и потенциальную энергию деформаций. ■

Пример 2.7. Стержневая система, изображенная на рис. 2.9, выполнена с зазором Δ . Вычислить усилия и напряжения в стержнях системы, возникающие в результате сборки, при которой зазор “закрывается”. В расчетах принять: материал всех стержней — сталь ($\sigma_{0,2} = 240$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа); $l = 0,5$ м; $\Delta = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м; $\beta = 60^\circ$.

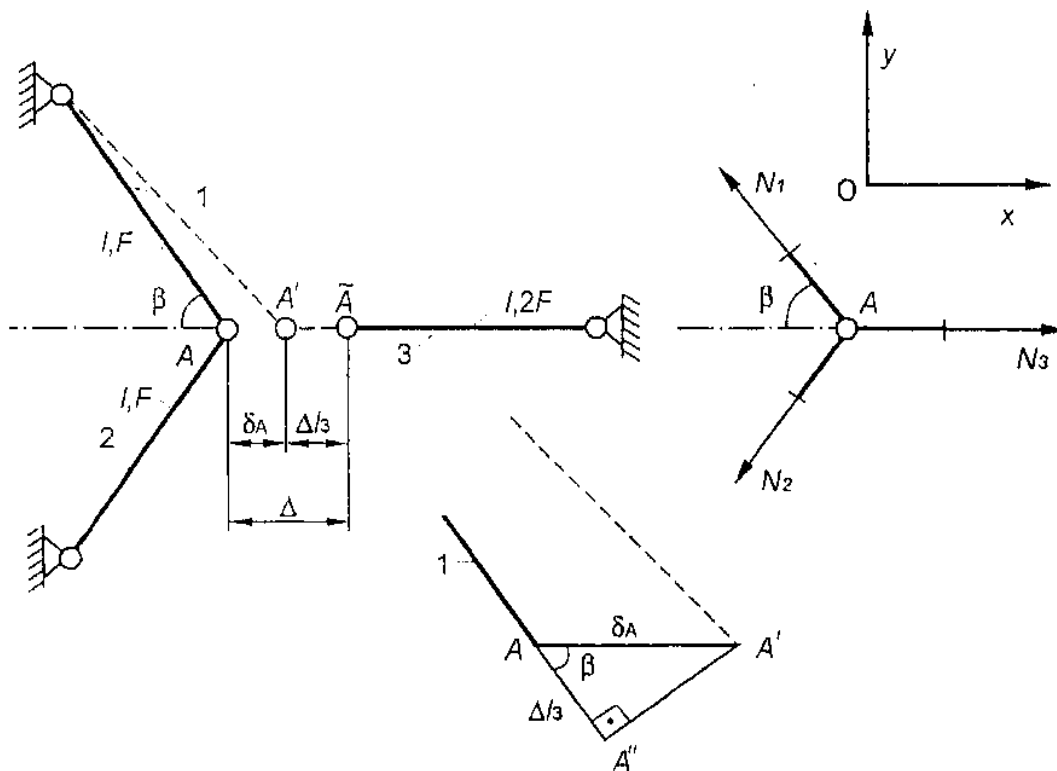


Рис. 2.9

Решение. Этот пример относится к классу задач на монтажные напряжения.

1. Определение усилий. В результате совмещения точки A и \bar{A} образуют один узел A . Выделяем этот узел (см. рис. 2.9) и рассматриваем его равновесие. В силу симметрии

$$N_1 = N_2 .$$

Поэтому нетривиальным является только одно уравнение равновесия:

$$\sum X = 0: -2N_1 \cos \beta + N_3 = 0 .$$

Поскольку для определения трех усилий можно составить только два уравнения равновесия, то задача один раз статически неопределима.

Схема деформаций изображена на рис. 2.9. В результате деформаций объединенный узел A занимает положение A' . Уравнение совместности деформаций имеет вид (см. (1.21))

$$\Delta = \delta_A + \Delta l_3 ,$$

где $\delta_A = |AA'|$ — смещение точки A вдоль оси Ox , $\Delta l_3 = |A'\tilde{A}|$ — удлинение стержня 3.

Из прямоугольного треугольника $AA'A''$ (отрезок $A'A''$ перпендикулярен оси стержня 1, см. рис. 2.9) получаем связь δ_A с удлинением стержня 1:

$$\delta_A = \Delta l_1 / \cos \beta ,$$

что с учетом исходных данных приводит уравнение совместности к следующему виду:

$$\Delta = 2\Delta l_1 + \Delta l_3 .$$

Выражая с помощью (2.1) удлинения стержней через усилия

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF} , \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{2EF} ,$$

преобразуем последнее уравнение так:

$$\Delta = 2 \frac{N_1 l}{EF} + \frac{N_3 l}{2EF} .$$

Объединение этого равенства с уравнением равновесия дает систему уравнений

$$N_1 = N_3 , \quad 2N_1 + \frac{1}{2} N_3 = \frac{EF\Delta}{l} ,$$

которая имеет следующее решение (дополнительно учитываем симметрию):

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{2}{5} \frac{EF\Delta}{l} .$$

2. Определение напряжений в стержнях. В соответствии с (1.17):

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{2}{5} \frac{\Delta E}{l} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{5 \cdot 0,5} = 80 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{5} \frac{\Delta E}{l} = 40 \text{ МПа}.$$

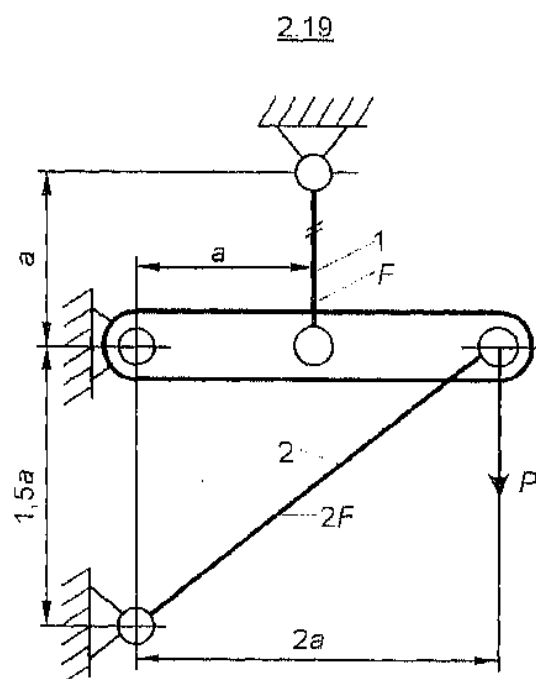
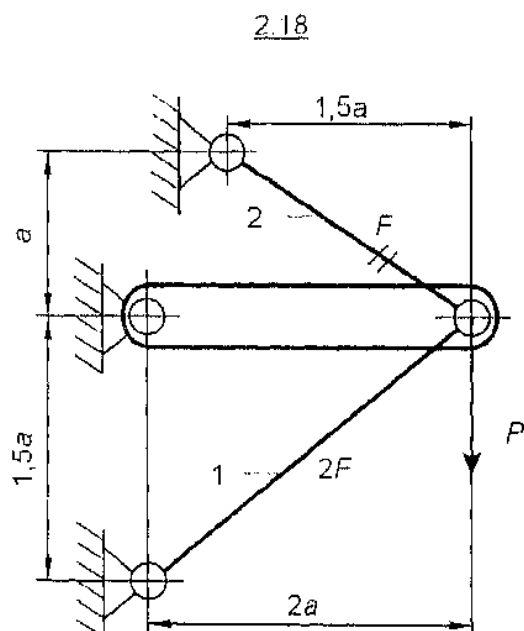
Отметим, что при такой величине зазора максимальные напряжения составляют 33% от $\sigma_{0,2}$. Реальная конструкция проектируется на восприятие внешней нагрузки, при которой может произойти сложение монтажных напряжений с напряжениями от нагрузки и нарушение прочности. Эти соображения следует учитывать при назначении допусков на точность изготовления элементов конструкции. ■

Задачи

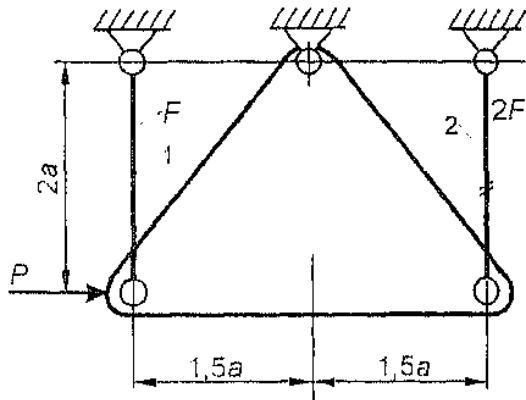
2.18—2.29. Для стержневых систем, изображенных на соответствующих рисунках, решить задачи в формулировке примера 2.4. Исходные данные взять из того же примера, положить $a = l$.

2.30—2.35. Определить запасы прочности стержневых систем, изображенных на соответствующих рисунках. В расчетах принять: материал — сталь 45 ($\sigma_{пр.р} = \sigma_{0,2} = 370$ МПа, $\sigma_{пр.с} = 0,7\sigma_{0,2}$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа); $P = 20$ кН; $a = l = 1$ м; $F = 2$ см².

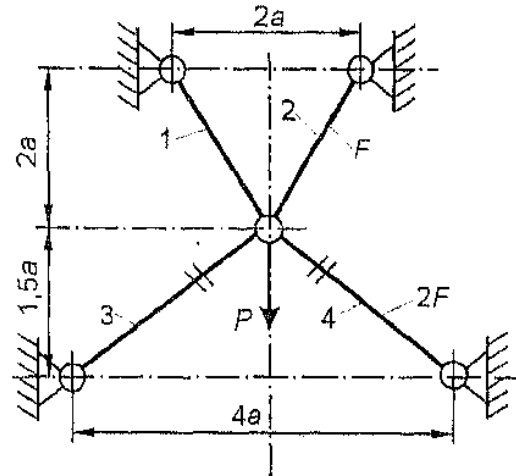
2.36—2.41. В стержневых системах, изображенных на соответствующих рисунках, определить зазор Δ , при котором монтажные напряжения не превышают 5% от $\sigma_{0,2}$. В расчетах принять: материал Д16 ($E = 0,75 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{0,2} = 220$ МПа); $l = 1$ м.



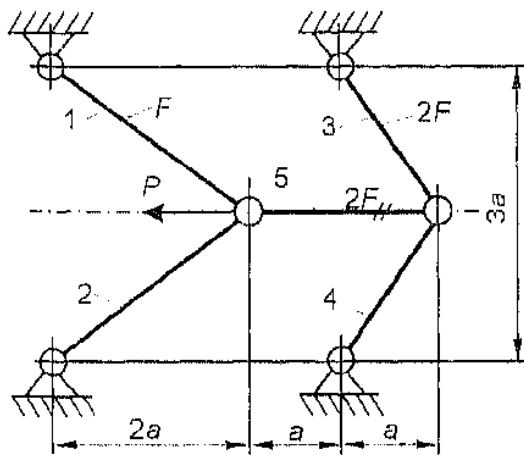
2.20



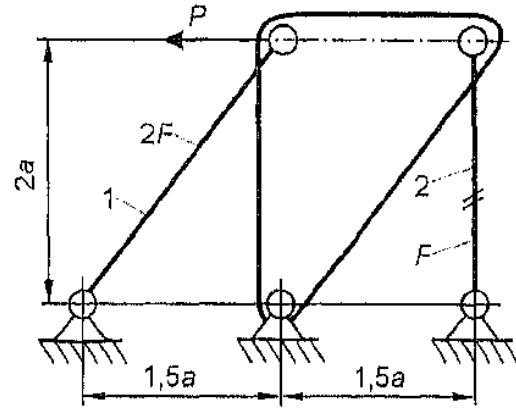
2.21



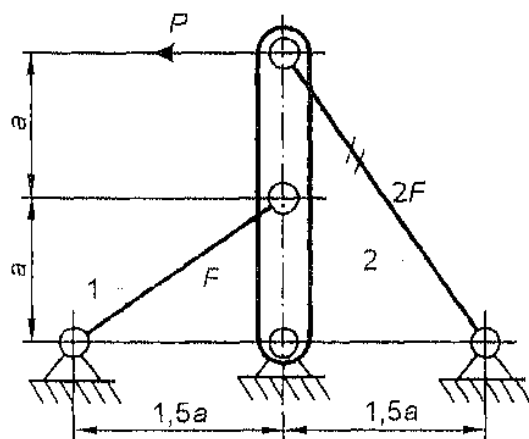
2.22



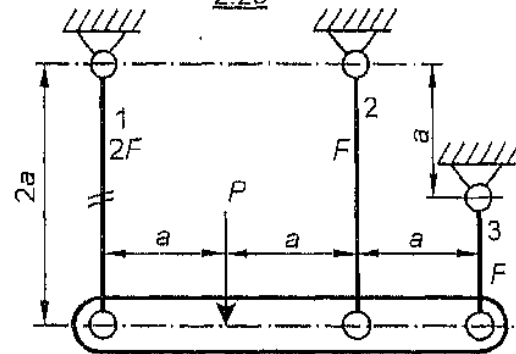
2.23



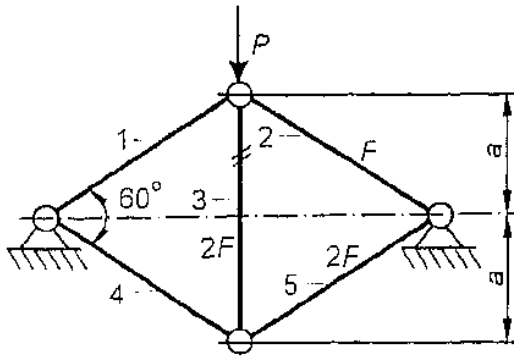
2.24



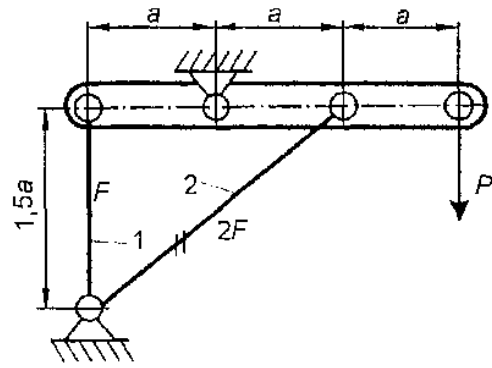
2.25



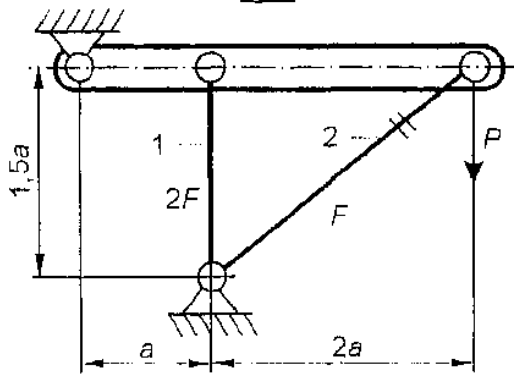
2.26



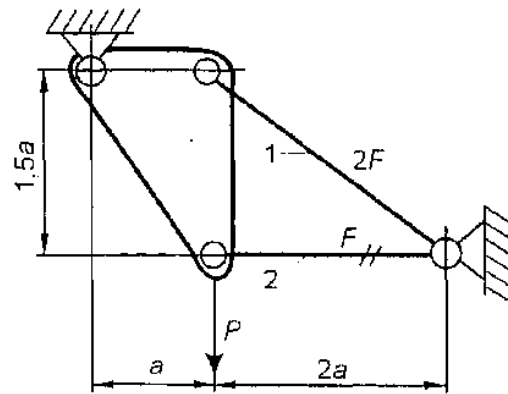
2.27



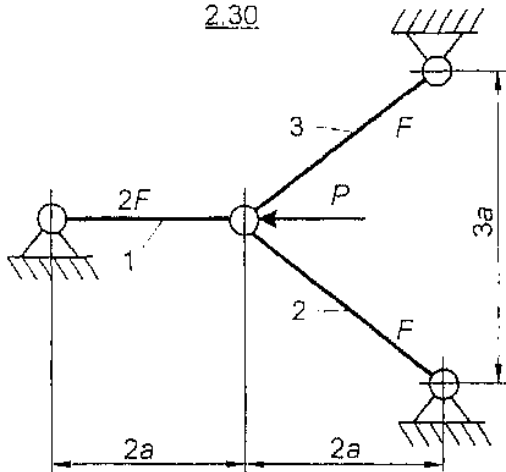
2.28



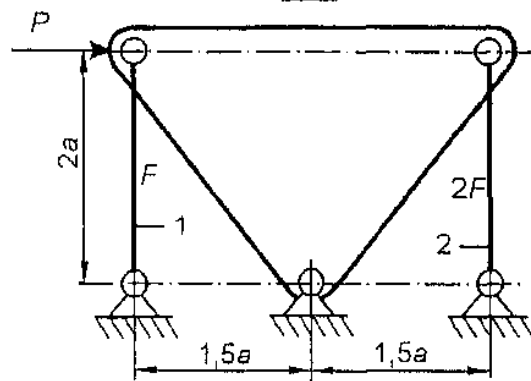
2.29



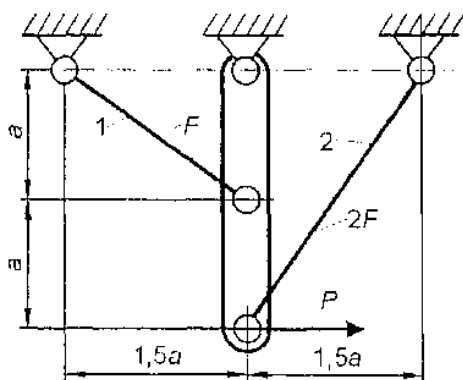
2.30



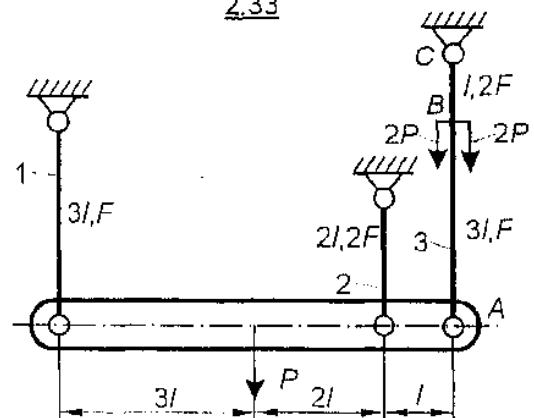
2.31



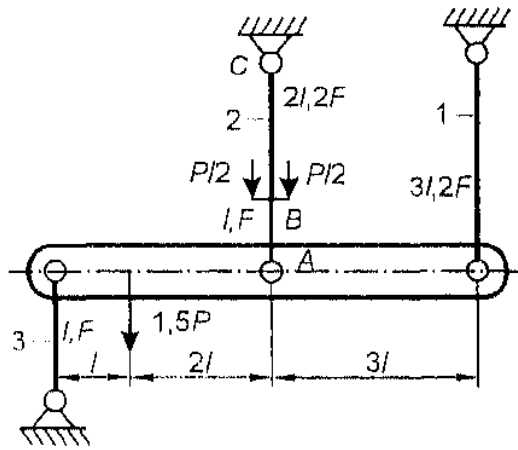
2.32



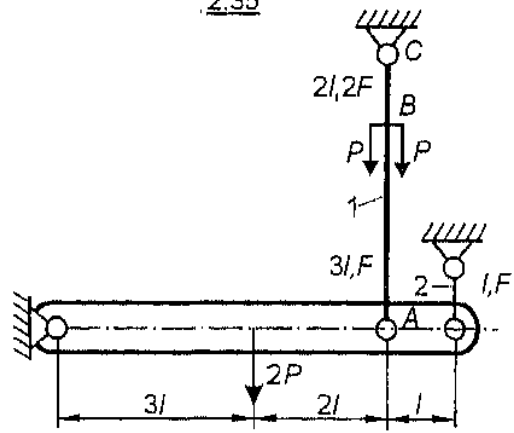
2.33



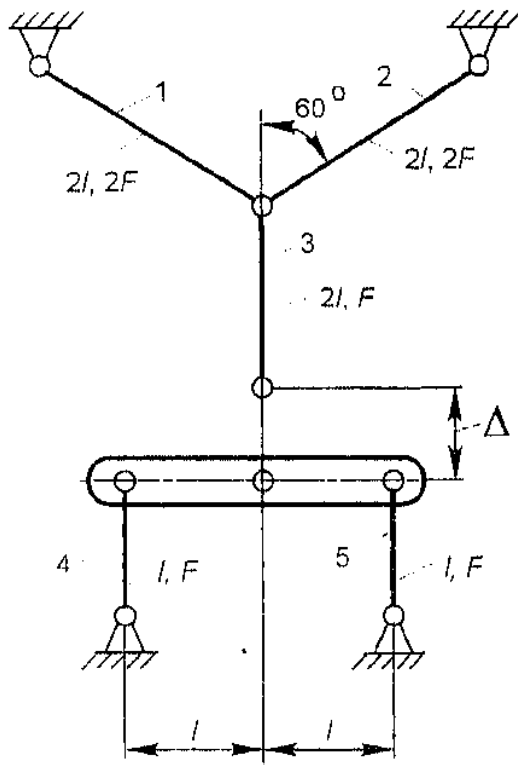
2.34



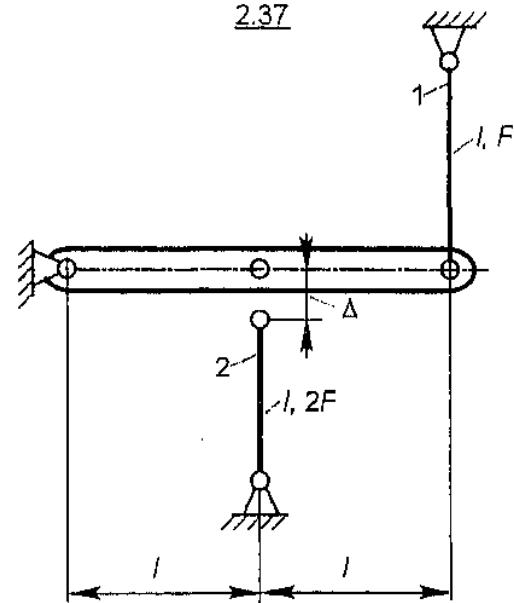
2.35



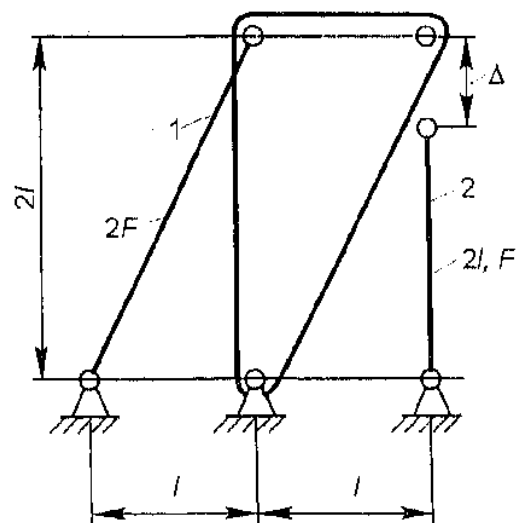
2.36



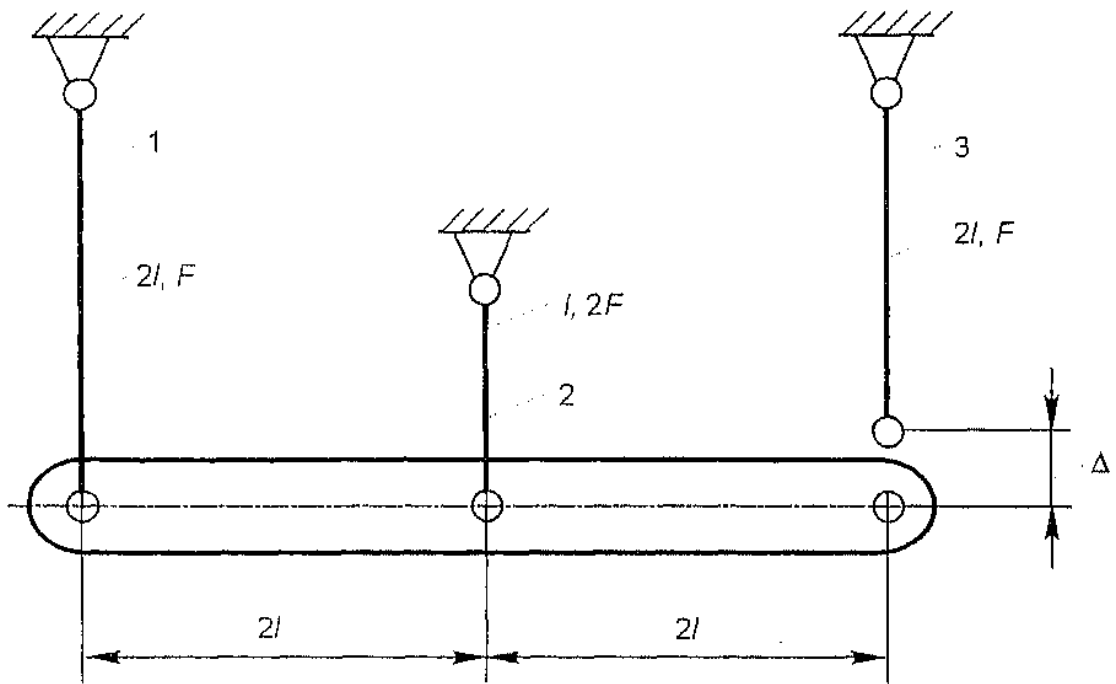
2.37



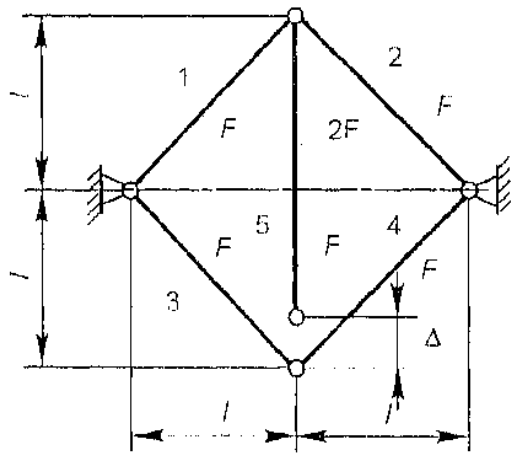
2.38



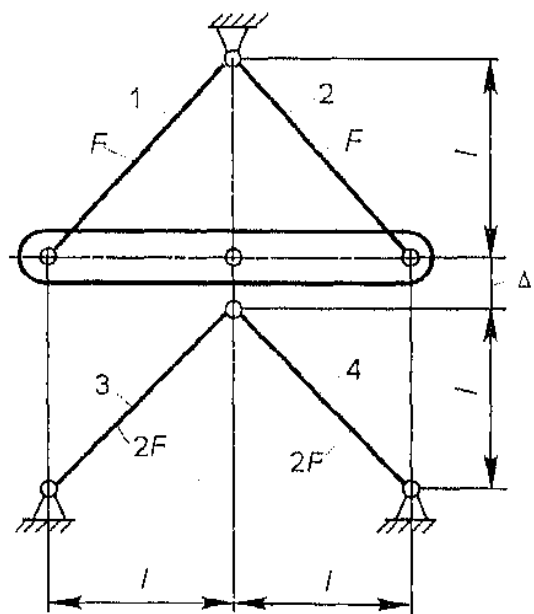
2.39



2.40



2.41



**§ 3.1. Статические моменты,
моменты инерции, центр тяжести**

Далее для сечений стержней как плоских областей понадобятся их геометрические характеристики.

Как известно, *статические моменты* S_y , S_z относительно осей Oy и Oz ПДСК Oyz и площадь F плоской области D (рис. 3.1) определяются следующими формулами:

$$S_y = \iint_D z \, dy \, dz, \quad S_z = \iint_D y \, dy \, dz, \quad F = \iint_D dy \, dz. \quad (3.1)$$

Моменты инерции J_y и J_z относительно тех же осей, *центробежный* J_{yz} и *полярный* J_p моменты вычисляются так:

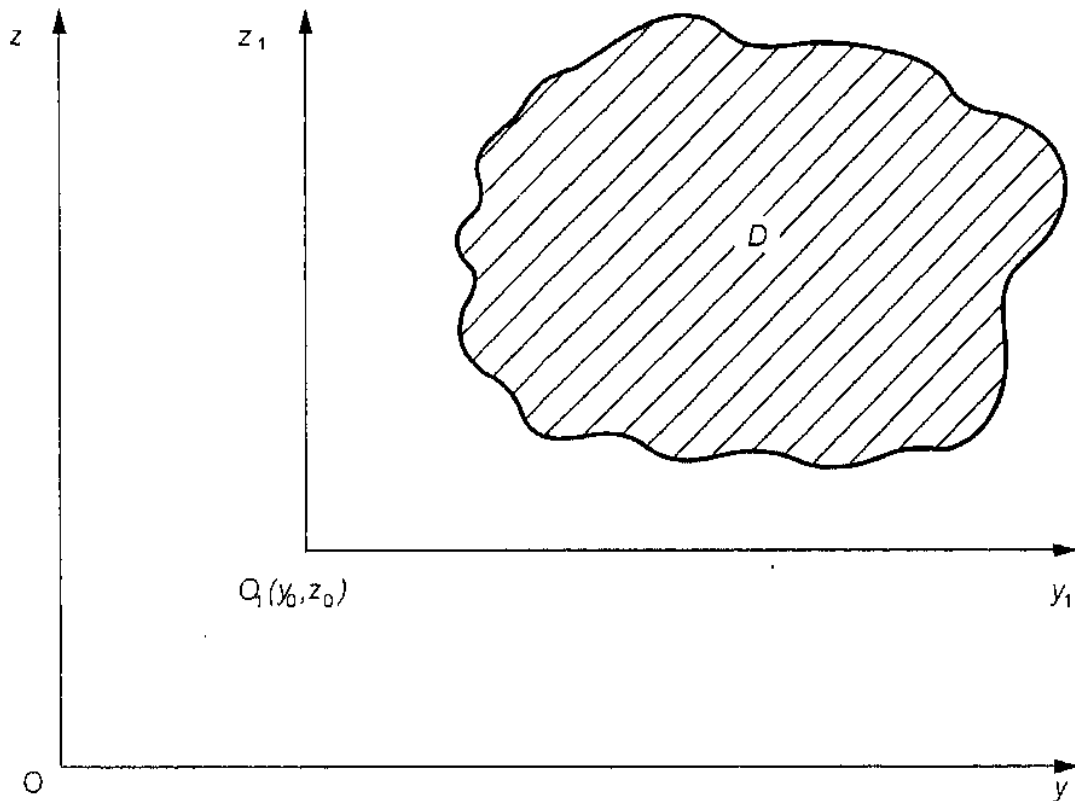


Рис. 3.1

$$J_y = \int \int_D z^2 dy dz, \quad J_z = \int \int_D y^2 dy dz, \quad J_{yz} = \int \int_D yz dy dz, \quad (3.2)$$

$$J_p = J_y + J_z = \int \int_D r^2 dy dz, \quad r^2 = y^2 + z^2.$$

Моменты J_y , J_z и J_{yz} образуют матрицу (тензор) инерции J области:

$$J = \begin{pmatrix} J_y & -J_{yz} \\ -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

По указанным геометрическим характеристикам можно вычислить радиусы инерции области в системе Oyz :

$$i_y = \sqrt{J_y/F}, \quad i_z = \sqrt{J_z/F}, \quad i_p = \sqrt{J_p/F}. \quad (3.4)$$

Утверждение 3.1. При переходе от системы координат $O_1y_1z_1$ к системе Oyz параллельным переносом осей (рис. 3.1) моменты преобразуются по формулам:

$$\begin{aligned} S_y &= z_0 F + S_{y_1}, \quad S_z = y_0 F + S_{z_1}, \\ J_y &= z_0^2 F + 2z_0 S_{y_1} + J_{y_1}, \quad J_z = y_0^2 F + 2y_0 S_{z_1} + J_{z_1}, \\ J_{yz} &= y_0 z_0 F + z_0 S_{z_1} + y_0 S_{y_1} + J_{y_1 z_1}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где y_0 и z_0 — координаты точки O_1 ; S_{y_1} , S_{z_1} , J_{y_1} , J_{z_1} и $J_{y_1 z_1}$ — моменты относительно осей системы координат $O_1y_1z_1$. ■

Определение 3.1. Оси системы координат Sy_1z_1 называются центральными, если $S_{y_1} = S_{z_1} = 0$, а начало этой системы $C(y_c, z_c)$ — центром тяжести области D . ■

Как известно, координаты y_c и z_c центра тяжести находят-ся по формулам:

$$y_c = S_z/F, \quad z_c = S_y/F. \quad (3.6)$$

Утверждение 3.2. Формулы преобразования моментов при параллельном переносе центральных осей системы координат Sy_1z_1 имеют следующий вид:

$$S_y = z_c F, \quad S_z = y_c F, \quad J_y = z_c^2 F + J_{y_1}, \quad J_z = y_c^2 F + J_{z_1},$$

$$J_{yz} = y_c z_c F + J_{y_1 z_1}. \quad \blacksquare \quad (3.7)$$

Определение 3.2. Оси системы координат $O_1 y_1 z_1$ (или $C y_1 z_1$) называются *главными (главными центральными)*, если $J_{z_1 y_1} = 0$, а соответствующие моменты J_{y_1} и J_{z_1} — *главными моментами инерции*. Последние обычно обозначают J_1 , J_2 и располагают в порядке убывания:

$$J_1 \geq J_2. \quad \blacksquare$$

Для главных и главных центральных осей последнее выражение в (3.7) упрощается и имеет вид

$$J_{yz} = y_c z_c F. \quad \blacksquare \quad (3.8)$$

Общий подход к определению главных осей рассмотрен в § 3.2. Однако учет симметрии области D позволяет упростить как эту задачу, так и вопрос об определении положения центра тяжести.

Утверждение 3.3. Если Oz — ось симметрии D , то

$$S_z = 0, \quad J_{yz} = 0, \quad (3.9)$$

$$J_y = 2J'_y, \quad J_z = 2J'_z,$$

где J'_y и J'_z — моменты инерции одной из областей D_1 или D_2 , на которые делится D осью Oz ($D = D_1 \cup D_2$) (рис. 3.2). \blacksquare

Отсюда вытекают следующие важные выводы.

Утверждение 3.4.

1. Если D имеет ось симметрии, то центр тяжести C лежит на ней, а ось симметрии и перпендикулярная ей являются главными.

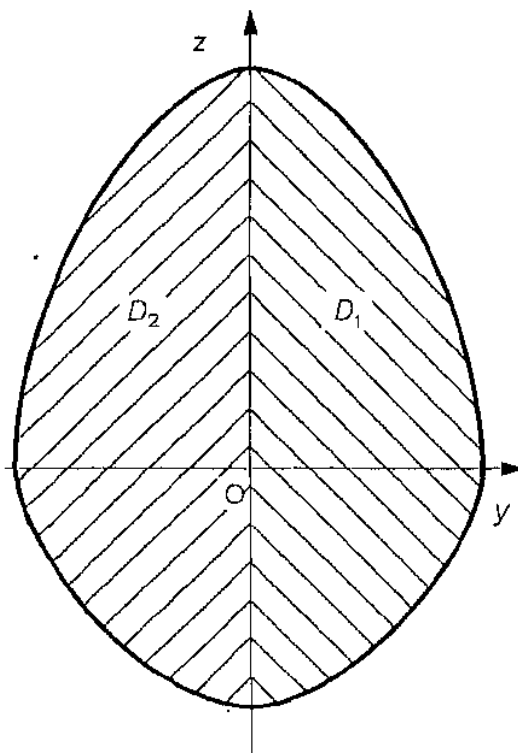


Рис. 3.2

2. Если D имеет две оси симметрии, то C находится на их пересечении.

3. Если D имеет центр симметрии, то он совпадает с центром тяжести C . ■

При практических расчетах часто бывает полезным следующее свойство геометрических характеристик областей.

Утверждение 3.5. Пусть область D разбита на несколько подобластей D_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i, \quad F(D_i \cap D_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

или она дополнена до некоторой области D_0 подобластями D_j ($j = 1, \dots, m$):

$$D = D_0 \cup_{j=1}^m D_j.$$

Тогда для всей области имеют место равенства:

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^m F^{(i)}, \quad S_y = \sum_{i=1}^m S_y^{(i)}, \quad \dots, \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^m J_{yz}^{(i)}; \\ F &= \sum_{j=0}^m F^{(j)}, \quad S_y = \sum_{j=0}^m S_y^{(j)}, \quad \dots, \quad J_{yz} = \sum_{j=0}^m J_{yz}^{(j)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где индексы i и j соответствуют областям D_i и D_j , а площади и моменты дополняющих областей берутся с противоположным знаком. ■

Как правило, используется следующий *алгоритм определения геометрических характеристик сечения*, позволяющий избежать вычисления интегралов в (3.1) и (3.2). Он состоит из двух частей:

I — определение положения центра тяжести, центральных осей и моментов инерции относительно них;

II — нахождение главных центральных осей.

Часть II алгоритма приведена в § 3.2, а часть I заключается в следующем.

1. Выбирается вспомогательная система координат Oyz . Если сечение имеет одну/две оси симметрии, то она/они должна совпадать с одной/двумя осями системы Oyz .

2. Сечение D разбивается на несколько подобластей D_i и/или дополняется до некоторой области D_0 подобластями D_i . Подобласти D_i ($i = 0, 1, \dots, m$) выбираются так, чтобы их геометрические характеристики $S_y^{(i)}, \dots, J_{yz}^{(i)}$ относительно собственных осей $O_i y_i z_i$ (как правило, главных центральных) были известны (см. § П.2, табл. П.3) или их можно было взять из соответствующих ГОСТов (см. § П.2, табл. П.7—П.11).

Отметим, что вспомогательную систему координат удобно выбирать так, чтобы ее оси были главными как можно для большего числа подобластей. Если оси какой-либо системы $O_i y_i z_i$ не параллельны осям вспомогательной системы координат, то проводится поворот собственной системы (см. § 3.2).

3. По формулам в (3.10) вычисляются F, S_y, S_z . При большом числе областей расчеты удобно свести в таблицы (см. пример 3.1).

4. С использованием равенств (3.6) находятся координаты центра тяжести y_c и z_c .

5. По формулам в (3.10) вычисляются J_y, J_z и J_{yz} . ■

Пример 3.1. Найти координаты центра тяжести и моменты инерции относительно центральных осей, параллельных вспомогательным, для области D , указанной на рис. 3.3.

Решение. Один из возможных способов разбиения D на три прямоугольника D_1, D_2, D_3 и выбора вспомогательных осей $O y z$ показан на рис. 3.3. Собственные системы координат для каждой области D_i выбраны в виде главных центральных осей $C_i y_i z_i$ (см. § П.2, табл. П.3) с центрами

$C_i (y_{C_i}, z_{C_i})$. Вычисления сводим в табл. 3.1, где строки с индексами 1—3 соответствуют областям $D_1 — D_3$, а строка с индексом Σ — всей области D . Статические моменты $S_y^{(i)}$ и $S_z^{(i)}$ находим по формулам (3.7):

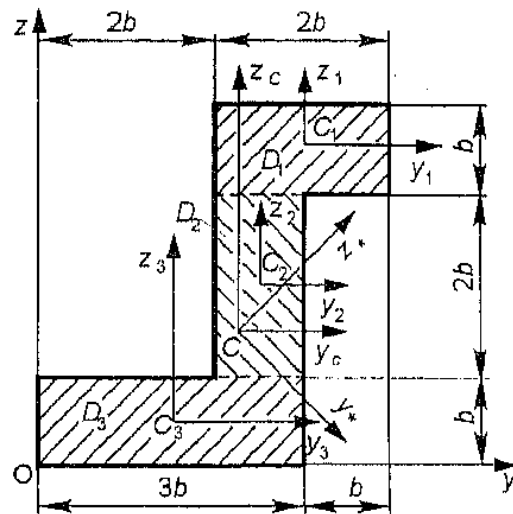


Рис. 3.3

Таблица 3.1

| Индексы строк | $F^{(i)}$ [b ²] | z_{c_i} [b] | y_{c_i} [b] | $S_y^{(i)}$ [b ³] | $S_z^{(i)}$ [b ³] | $J_{y_i}^{(i)}$ [b ⁴] | $z_{c_i} = z_{c_i} - z_c$ [b] |
|------------------|--------------------------------|------------------|------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 2 | 3,5 | 3 | 7 | 6 | 0,167 | 1,71 |
| 2 | 2 | 2 | 2,5 | 4 | 5 | 0,667 | 0,21 |
| 3 | 3 | 0,5 | 1,5 | 1,5 | 4,5 | 0,25 | - 1,29 |
| Σ | 7 | 1,79 | 2,21 | 12,5 | 15,5 | 1,08 | — |

| Индексы строк | $F^{(i)} z_{c_i}^2$ [b ⁴] | $J_{y_i}^{(i)}$ [b ⁴] | $J_{z_i}^{(i)}$ [b ⁴] | $y_{c_i} = y_{c_i} - y_c$ [b] | $F^{(i)} y_{c_i}^2$ [b ⁴] | $J_{z_c}^{(i)}$ [b ⁴] | $J_{x_i y_i}^{(i)}$ [b ⁴] |
|------------------|------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------------|
| | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 1 | 6,85 | 6,02 | 0,667 | 0,79 | 1,25 | 1,92 | 2,70 |
| 2 | 0,0881 | 0,765 | 0,167 | 0,29 | 0,168 | 0,335 | 0,122 |
| 3 | 4,99 | 5,24 | 2,25 | - 0,71 | 1,51 | 3,76 | 2,75 |
| Σ | 10,9 | 12,0 | 3,08 | — | 2,93 | 6,01 | 5,57 |

$$S_y^{(i)} = F^{(i)} z_{c_i}, \quad S_z^{(i)} = F^{(i)} y_{c_i}.$$

Площадь $F^{(\Sigma)}$ и статические моменты $S_y^{(\Sigma)}$, $S_z^{(\Sigma)}$ есть суммы соответствующих колонок. Координаты центра тяжести $y_c^{(\Sigma)}$ и $z_c^{(\Sigma)}$ вычисляем по формулам (3.6). На рис. 3.3 указаны центральные оси $Cy_c z_c$ области D .

Далее находим координаты точек C_i в системе координат $Cy_c z_c$: $y_{c_i} = y_{c_i} - y_c$, $z_{c_i} = z_{c_i} - z_c$ (колонки 7 и 11). Поскольку собственные оси $C_i y_i z_i$ являются главными центральными и параллельны осям системы координат $Cy_c z_c$, то искомые моменты инерции i -х областей вычисляем в соответствии с (3.7) и (3.8) следующим образом:

$$J_{y_c}^{(i)} = J_{y_i}^{(i)} + F^{(i)} z_{c, C_i}^2, \quad J_{z_c}^{(i)} = J_{z_i}^{(i)} + F^{(i)} y_{c, C_i}^2, \quad J_{y_c z_c}^{(i)} = F^{(i)} y_{c, C_i} z_{c, C_i}$$

где $J_{y_i}^{(i)}$ и $J_{z_i}^{(i)}$ — моменты инерции области D_i относительно осей $C_i z_i$ и $C_i y_i$.

Моменты инерции $J_{y_c}^{(\Sigma)} = J_{y_c}$, $J_{z_c}^{(\Sigma)} = J_{z_c}$ и $J_{y_c z_c}^{(\Sigma)} = J_{y_c z_c}$ находим суммированием соответствующих колонок. При этом полезно провести проверку первых двух результатов сложением последних ячеек соответственно колонок 6, 8 и 10, 12. ■

Пример 3.2. Найти координаты центра тяжести и главные моменты инерции области D , указанной на рис. 3.4.

Решение. Область D представляем в виде квадрата D_0 с выброшенными треугольником D_1 и полукругом D_2 . Вспомогательная система координат Oyz и собственные оси $C_i y_i z_i$ (см. § П.2, табл. П.3) показаны на рис. 3.4. Так как область D симметрична относительно оси Oz , то последняя является главной, $y_c = 0$, и достаточно найти координату z_c центра тяжести. С учетом этих упрощений вычисления проводим аналогично примеру 3.1 и сводим

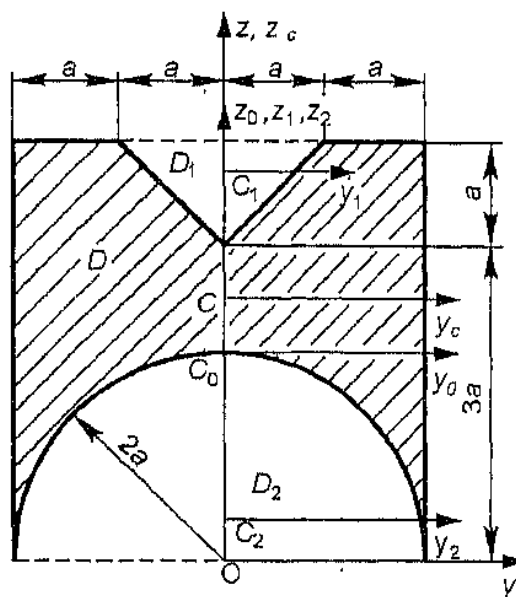


Рис. 3.4

Таблица 3.2

| Индексы строк | $F^{(i)}$ [a ²] | z_{C_i} [a] | $S_{y_i}^{(i)}$ [a ³] | $J_{y_i}^{(i)}$ [a ⁴] | $z_{C_i, C_i} =$ $= z_{C_i} - z_c$ [a] | $F^{(i)} z_{c, C_i}^2$ [a ⁴] | $J_{y_c}^{(i)}$ [a ⁴] | $J_{z_c}^{(i)}$ [a ⁴] |
|------------------|--------------------------------|------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 16 | 2 | 32 | 21,3 | - 0,64 | 6,55 | 27,85 | 21,3 |
| - 1 | 1 | 3,67 | 3,67 | 0,056 | 1,07 | 1,15 | 1,20 | 0,167 |
| - 2 | 6,28 | 0,848 | 5,33 | 1,76 | - 1,79 | 20,12 | 21,88 | 6,28 |
| Σ | 8,72 | 2,64 | 23,0 | 19,5 | — | - 14,72 | 4,78 | 14,9 |

их в табл. 3.2. Индексы строк, соответствующих областям D_1 и D_2 , имеют знак минус, так как при суммировании колонок соответствующие характеристики вычитаются. ■

Задачи

3.1. Найти площадь и координаты центра тяжести криволинейного треугольника, ограниченного кривой $z = ky^n$ ($k > 0$; $n = 0, 1, 2, \dots$) и прямыми $z = 0$, $y = l$.

3.2. Найти моменты инерции параллелограмма с основанием b и высотой h относительно центральных осей, одна из которых параллельна основанию, и относительно основания.

3.3. Найти центр тяжести треугольника с высотой h и основанием b .

3.4. Найти моменты инерции треугольника с высотой h и основанием b относительно центральных осей, одна из которых параллельна основанию, а вторая совпадает с высотой.

В задачах 3.5—3.10 найти главные моменты инерции для следующих областей.

3.5. Прямоугольник с высотой h и основанием b .

3.6. Равнобедренный треугольник с высотой h и основанием b .

3.7. Круговой сектор радиуса R с углом раствора α .

3.8. Круговой сегмент радиуса R с углом раствора α .

3.9. Полукруг радиуса R .

3.10. Круговое полукольцо с внешним R и внутренним r радиусами.

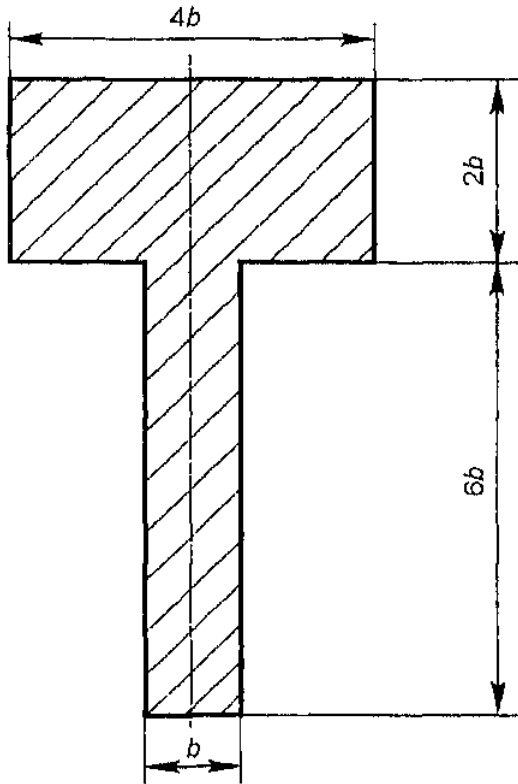
В задачах 3.11, 3.12 дополнительно найти полярный момент инерции.

3.11. Круг радиуса R .

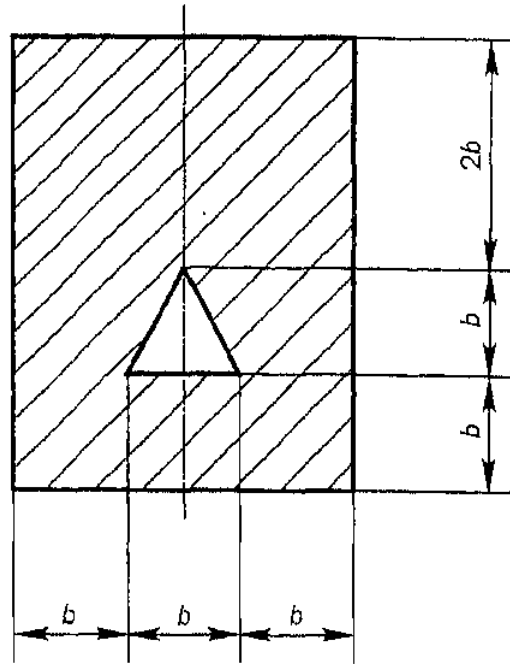
3.12. Круговое кольцо с внешним R и внутренним r радиусами.

3.13—3.40. Для областей, изображенных на соответствующих рисунках, с использованием симметрии найти положение главных центральных осей и главные моменты инерции.

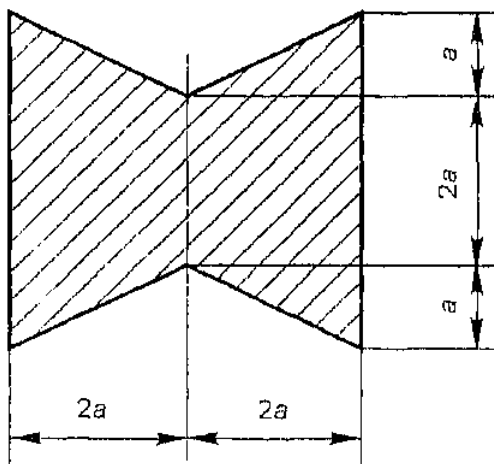
3.13



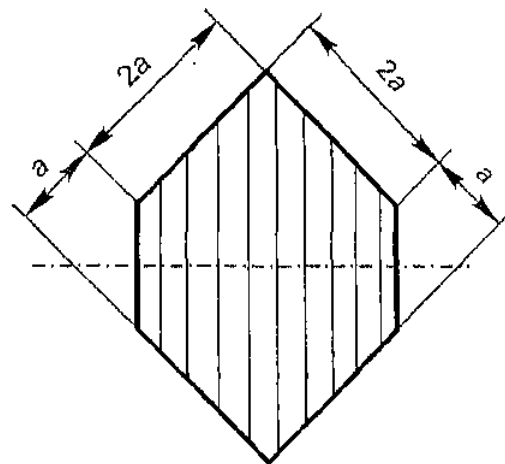
3.14



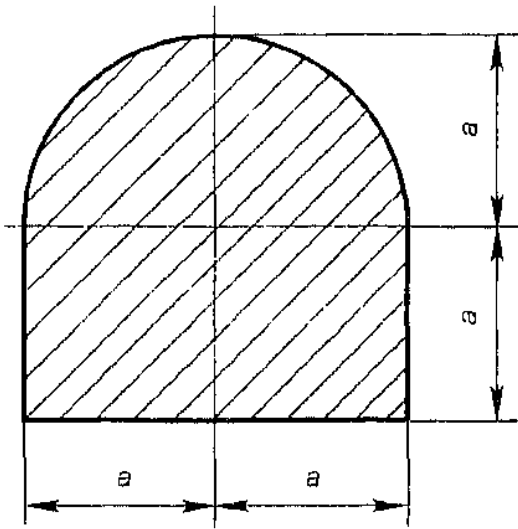
3.15



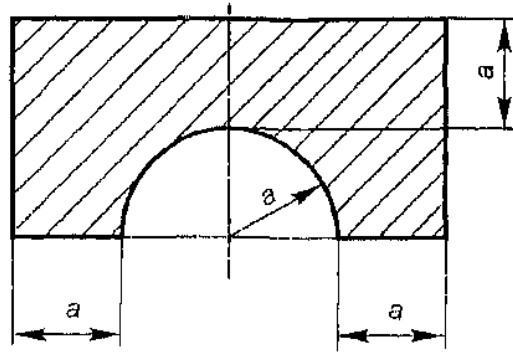
3.16



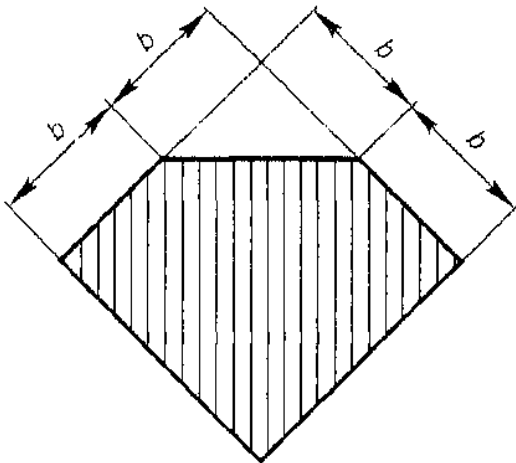
3.17



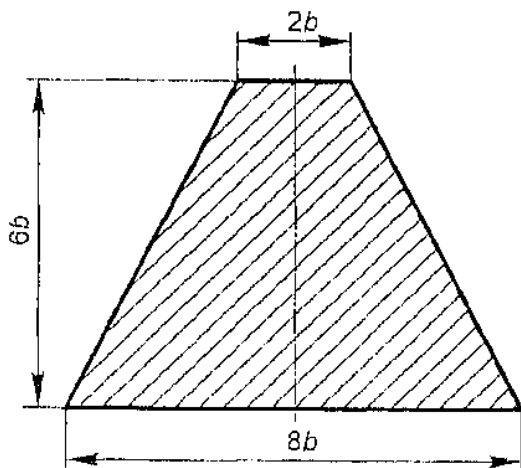
3.18



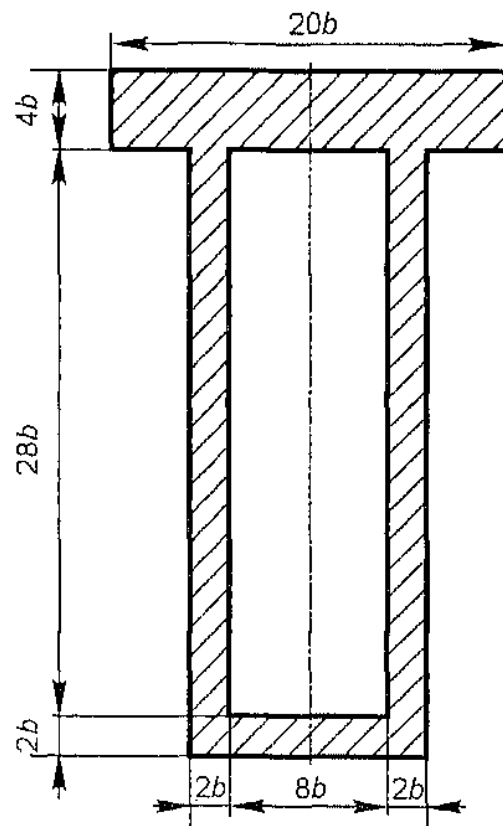
3.19



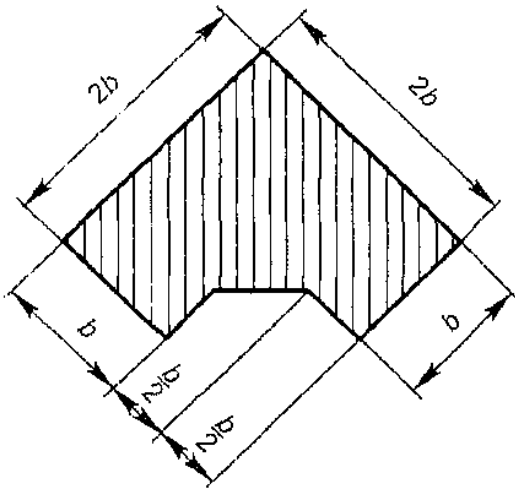
3.20



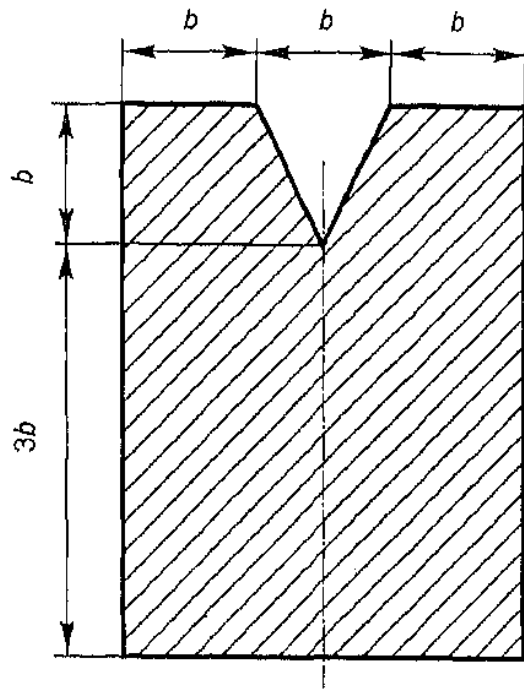
3.21



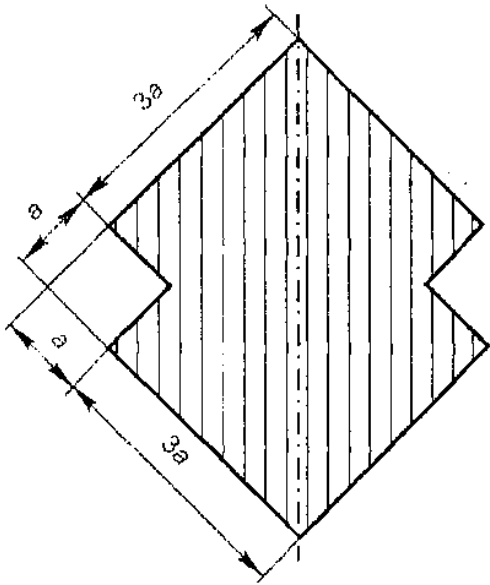
3.22



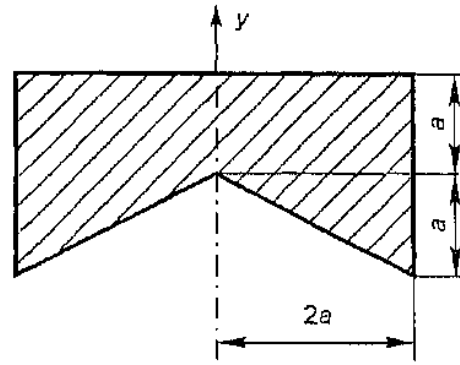
3.23

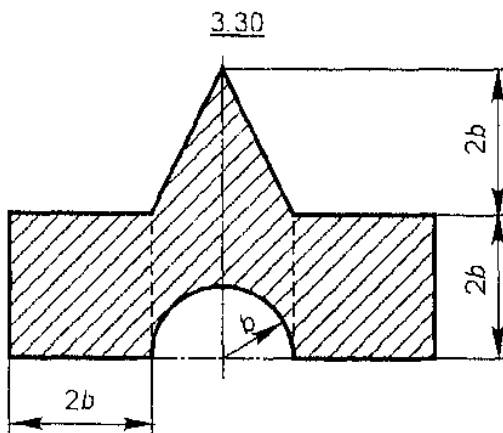
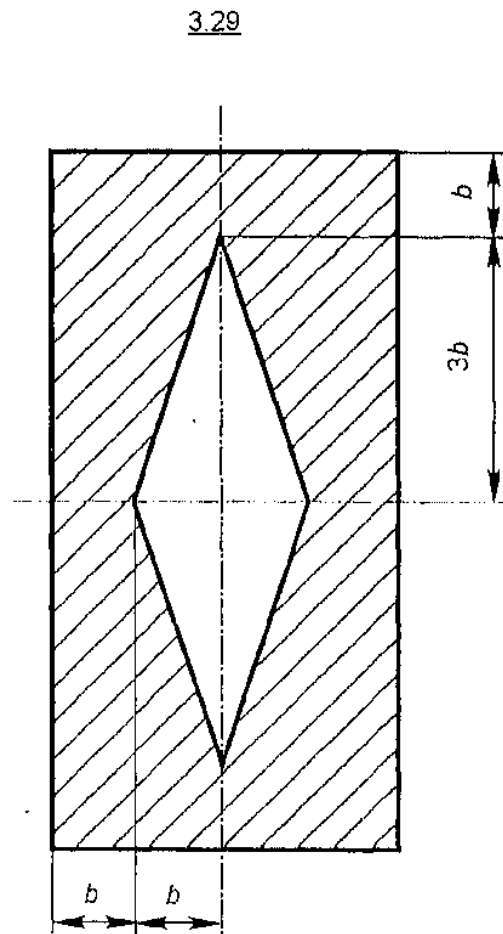
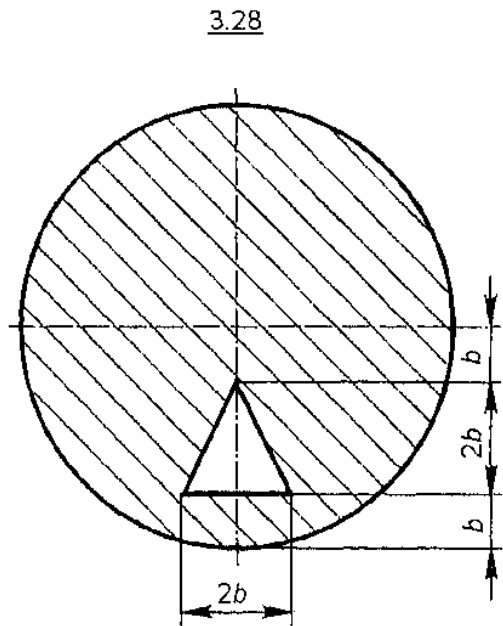
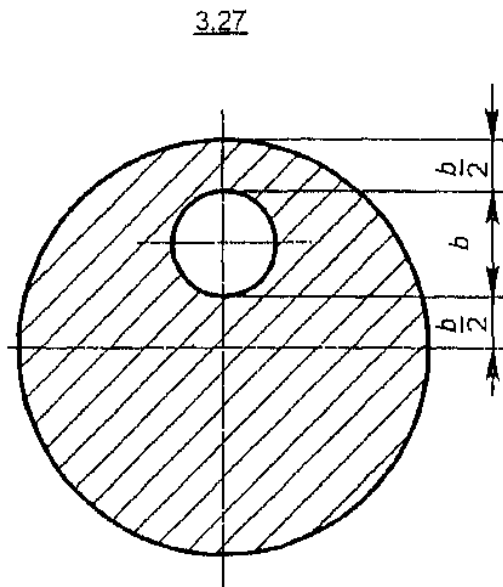
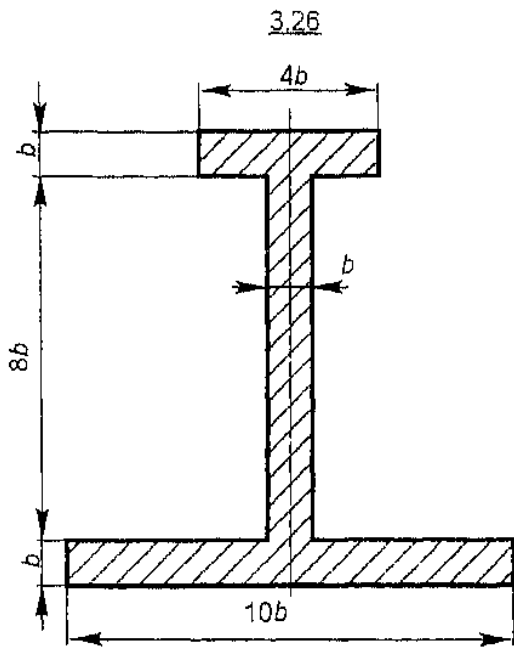


3.24

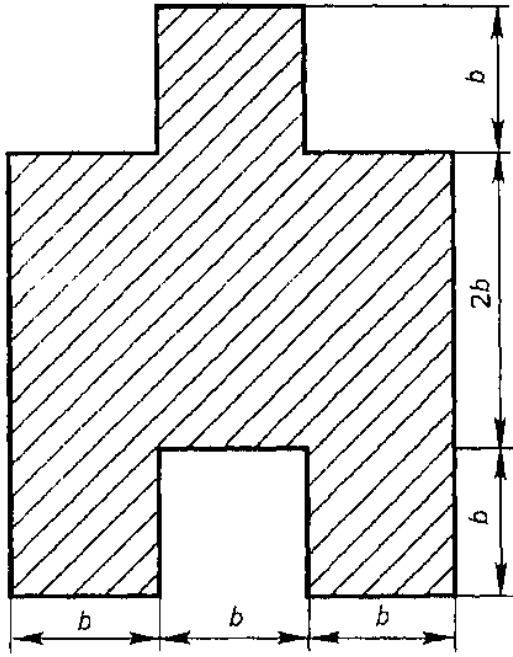


3.25

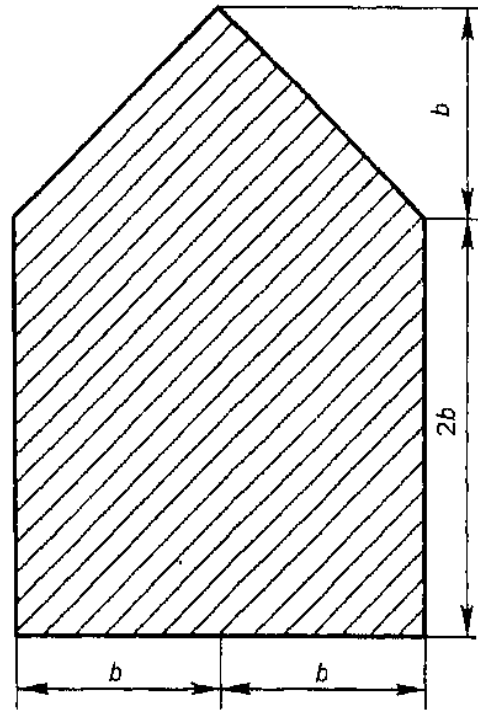




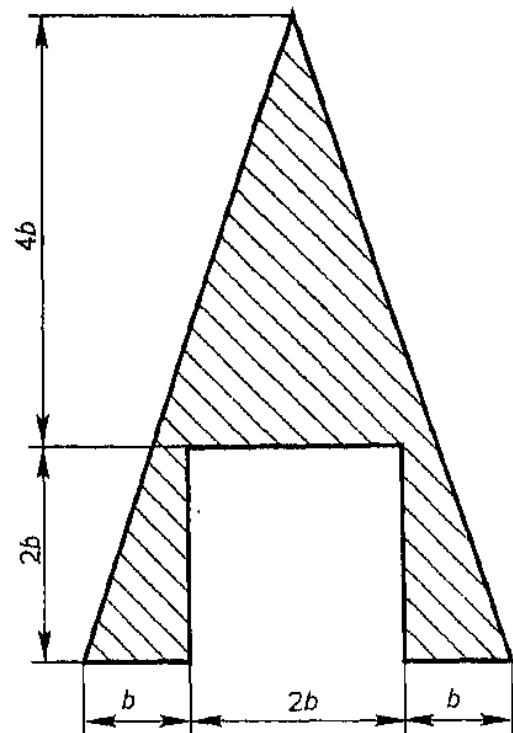
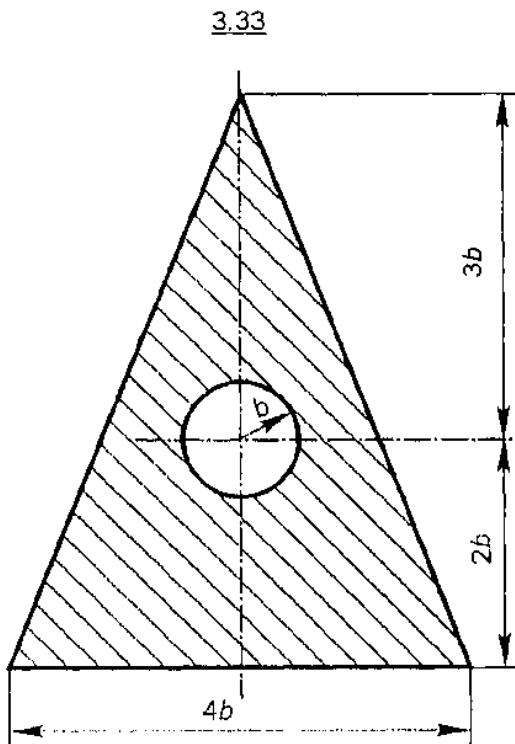
3.31



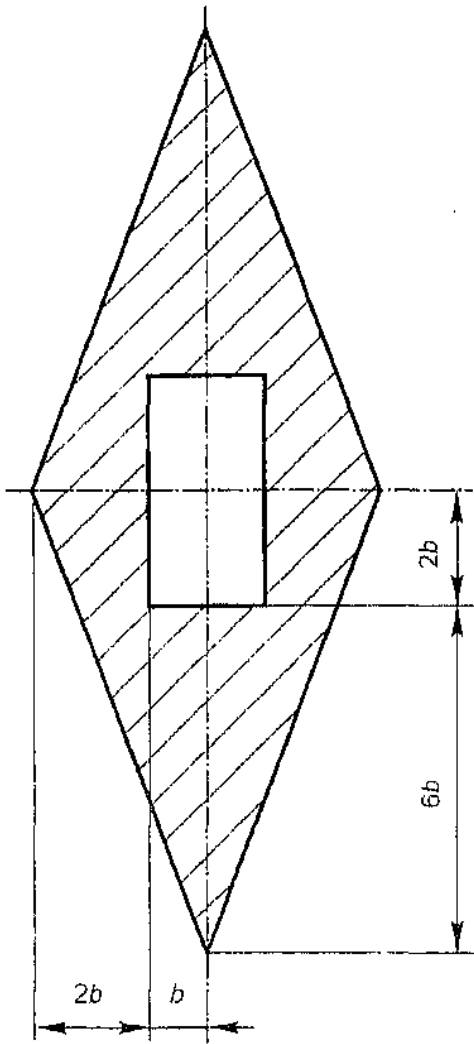
3.32



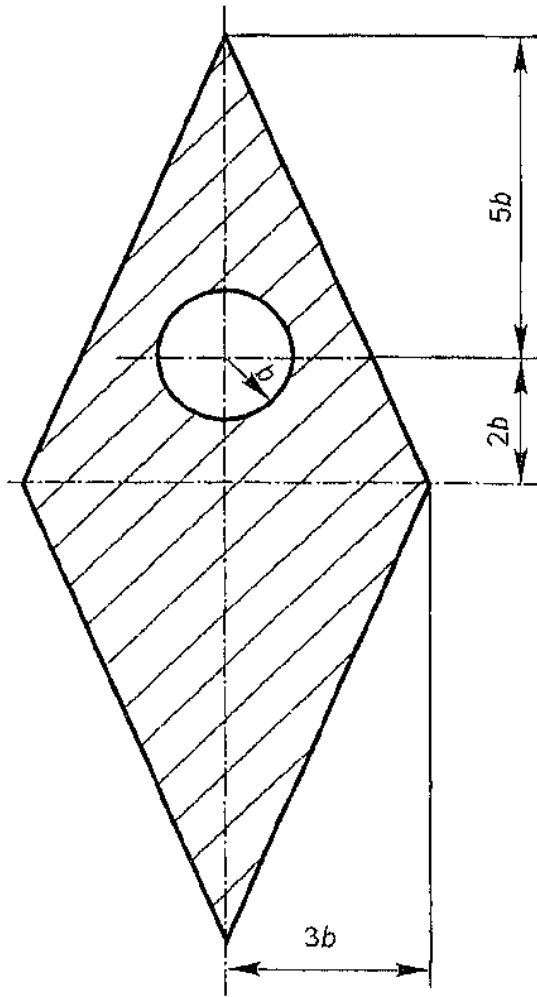
3.34



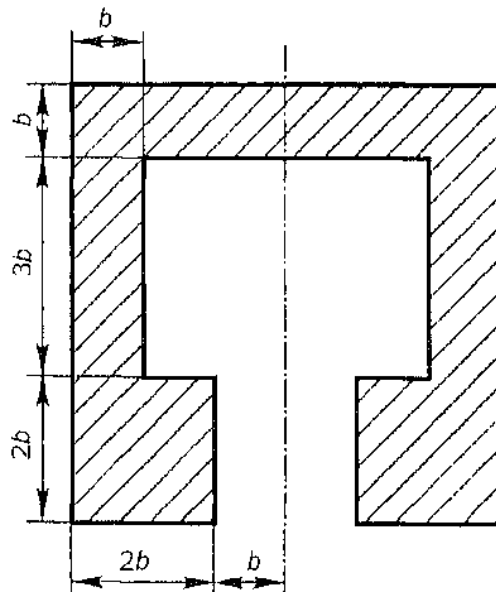
3.35



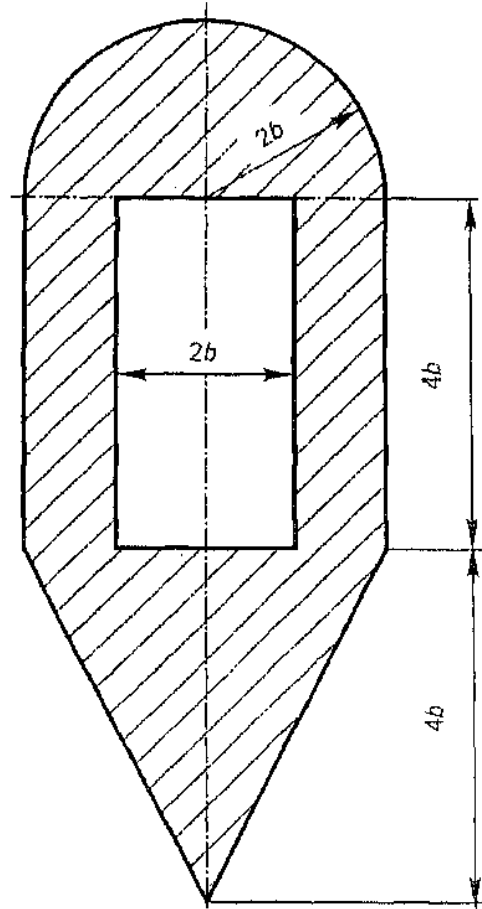
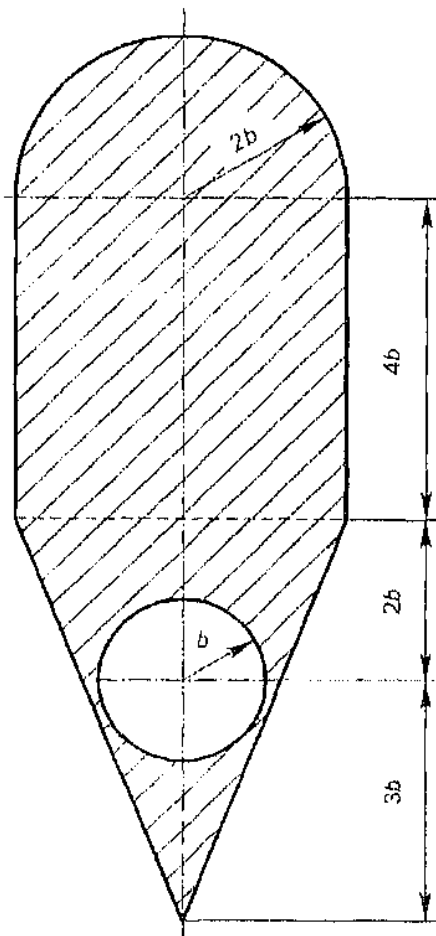
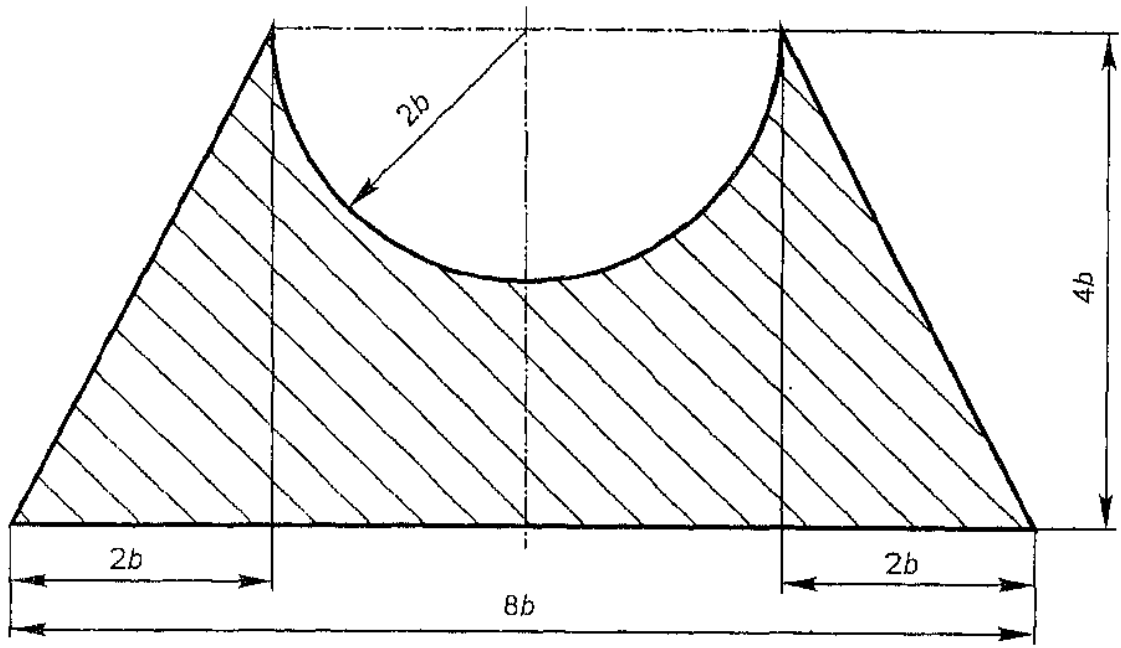
3.36



3.37



3.38



§ 3.2. Вычисление главных моментов инерции и положения главных осей

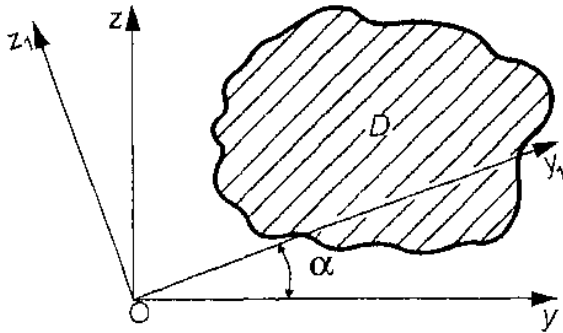


Рис. 3.5

Утверждение 3.6. При переходе от системы координат Oyz к системе Oy_1z_1 поворотом на угол α против часовой стрелки (рис. 3.5) соответствующие моменты инерции области D связаны между собой так:

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= \frac{J_p}{2} + \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha, \\ J_{z_1} &= \frac{J_p}{2} - \frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha + J_{yz} \sin 2\alpha, \\ J_{y_1 z_1} &= \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где J_p — полярный момент инерции. ■

Отсюда и из определения 3.2 получаем следующий результат.

Утверждение 3.7. При $J_y \neq J_z$ угол α_0 ($-\pi/4 < \alpha_0 < \pi/4$), соответствующий главной системе координат Oy_1z_1 , определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{yz}}{J_z - J_y}, \quad (3.12)$$

а главные моменты J_1, J_2 являются экстремальными значениями моментов инерции и вычисляются так:

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= \frac{1}{2} [J_p - \operatorname{sign}(J_z - J_y) \sqrt{D}], \\ J_{z_1} &= \frac{1}{2} [J_p + \operatorname{sign}(J_z - J_y) \sqrt{D}], \quad D = (J_z - J_y)^2 + 4J_{yz}^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

При этом полярный момент J_p является инвариантом относительно выбора системы координат:

$$J_p = J_y + J_z = J_1 + J_2. \quad (3.14)$$

Это утверждение позволяет, во-первых, уточнить п. 2 части I алгоритма определения геометрических характеристик сечения (см. § 3.1). Если оси какой-либо системы $O_i y_i z_i$ не параллельны осям вспомогательной системы координат, то проводится поворот собственной системы так, чтобы оси полученной системы $O_i y'_i z'_i$ были параллельны осям системы Oyz . При этом моменты подобласти D_i в системе координат $O_i y'_i z'_i$ вычисляются по формулам (3.11).

Во-вторых, может быть раскрыта часть II алгоритма: главная центральная система координат и главные моменты инерции вычисляются по результатам части I с помощью формул (3.12)—(3.14). ■

Кроме того, полезны следующие выводы для специального вида областей.

Утверждение 3.8.

1. Если $J_y = J_z = J$ и $J_{yz} = 0$, то главные моменты инерции равны между собой ($J_1 = J_2 = J$), и любая система координат Oyz с тем же центром — главная.

2. Для области D , имеющей более двух осей симметрии, любые центральные оси Cy и Cz являются главными и $J_y = J_z$.

3. Если $J_y = J_z$ и $J_{yz} \neq 0$, то главные оси повернуты относительно исходных на 45° . ■

Отметим, что к областям, подпадающим под п. 2 утверждения, относятся круг и все правильные многоугольники.

Пример 3.3. Для области D (см. рис. 3.3), рассмотренной в примере 3.1, найти главные центральные оси и главные моменты инерции.

Решение. Моменты инерции J_{y_c} , J_{z_c} и $J_{y_c z_c}$ относительно центральных осей $Cy_c z_c$ найдены при решении примера 3.1. Угол α_0 , на который повернуты главные центральные оси $Cy_* z_*$, находим из (3.12):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{y_c z_c}}{J_{z_c} - J_{y_c}} = \frac{2 \cdot 5,57}{6,01 - 12,0} = -1,86.$$

Отсюда $\alpha_0 = -1/2 \arctg 1,86 = -30^\circ 52'$ (см. рис. 3.3).

Главные моменты J_1 и J_2 определяем по формулам (3.13)—
(3.14):

$$J_p = J_{y_c} + J_{z_c} = 12,0b^4 + 6,01b^4 = 18,0b^4,$$

$$D = (J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{y_c z_c}^2 = [(6,01 - 12,0)^2 + 4 \cdot 5,57^2] b^8 = 155b^8,$$

$$J_{y_1} = \frac{1}{2} (J_p + \sqrt{D}) = J_1 = \frac{1}{2} (18,0 + \sqrt{155}) b^4 = 15,2b^4,$$

$$J_{z_1} = \frac{1}{2} (J_p - \sqrt{D}) = J_2 = \frac{1}{2} (18,0 - \sqrt{155}) b^4 = 2,78b^4. \blacksquare$$

Пример 3.4. Найти главные центральные оси и главные моменты инерции для области D , указанной на рис. 3.6, *a*.

Решение. В силу симметрии главные оси можно указать

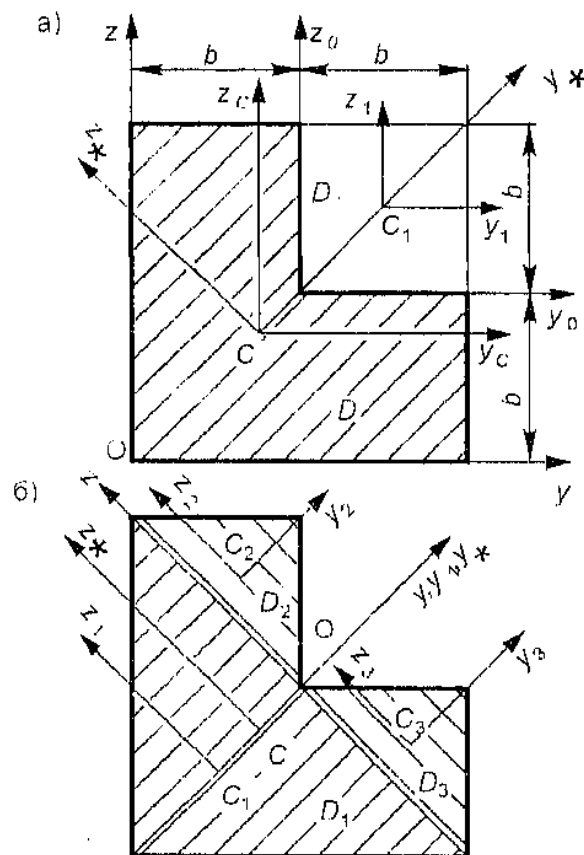


Рис. 3.6

сразу: это Cy_1z_1 (рис. 3.6, *a*). Главные центральные оси найдем двумя способами.

Способ I. Представим область в виде $D = D_0 \setminus D_1$ (см. рис. 3.6, а). Координаты центра тяжести во вспомогательной системе координат Oyz определим так:

$$F^{(0)} = 4b^2, \quad F^{(1)} = b^2, \quad F = F^{(0)} - F^{(1)} = 3b^2,$$

$$S_{yy}^{(0)} = S_z^{(0)} = 4b^2 \cdot b = 4b^3, \quad S_{yy}^{(1)} = S_z^{(1)} = b^2 \cdot \frac{3}{2}b = \frac{3}{2}b^3,$$

$$S_{yy} = S_z = S_{yy}^{(0)} - S_{yy}^{(1)} = 4b^3 - \frac{3}{2}b^3 = \frac{5}{2}b^3, \quad y_c = z_c = \frac{S_z}{F} = \frac{5}{6}b.$$

Моменты инерции в центральной системе координат $Cy_c z_c$:

$$J_y^{(0)} = J_z^{(0)} = \frac{2b \cdot (2b)^3}{12} + 4b^2 \left(b - \frac{5}{6}b \right)^2 = \frac{13}{9}b^4,$$

$$J_{yz}^{(0)} = 4b^2 \left(b - \frac{5}{6}b \right)^2 = \frac{1}{9}b^4,$$

$$J_y^{(1)} = J_z^{(1)} = \frac{b \cdot b^3}{12} + b^2 \left(\frac{3}{2}b - \frac{5}{6}b \right)^2 = \frac{19}{36}b^4,$$

$$J_{yz}^{(1)} = b^2 \left(\frac{3}{2}b - \frac{5}{6}b \right)^2 = \frac{4}{9}b^4,$$

$$J_y = J_z = J_y^{(0)} - J_y^{(1)} = \frac{11}{12}b^4, \quad J_{yz} = J_{yz}^{(0)} - J_{yz}^{(1)} = -\frac{1}{3}b^4.$$

Так как угол поворота α_0 главных центральных осей $Cy_* z_*$ равен $\pi/4$, то по формулам (3.11) находим:

$$J_{\rho} = J_{y_c} + J_{z_c} = \frac{11}{6}b^4,$$

$$J_{y_*} = \frac{J_{\rho}}{2} + \frac{J_{y_c} - J_{z_c}}{2} \cos 2\alpha_0 - J_{y_c z_c} \sin 2\alpha_0 = \left(\frac{11}{12} + \frac{1}{3} \right) b^4 = \frac{5}{4}b^4 = J_1,$$

$$J_{z_*} = \frac{J_{\rho}}{2} + \frac{J_{y_c} - J_{z_c}}{2} \cos 2\alpha_0 + J_{y_c z_c} \sin 2\alpha_0 = \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{3} \right) b^4 = \frac{7}{12}b^4 = J_2.$$

Способ II. Вспомогательные оси Oyz выбираем в виде главных осей. Область D разбиваем на три треугольника D_1, D_2 и

D_3 (см. рис. 3.6, б). В силу симметрии $z_c = 0$. Для второй координаты центра тяжести имеем:

$$F^{(1)} = \frac{1}{2} 2b2b = 2b^2, \quad z_c^{(1)} = -\frac{1}{3} \frac{2b}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3} b,$$

$$S_z^{(1)} = F^{(1)} z_c^{(1)} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} b^3, \quad F^{(2)} = F^{(3)} = \frac{1}{2} bb = \frac{1}{2} b^2,$$

$$z_c^{(2)} = z_c^{(3)} = \frac{1}{3} \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} b, \quad S_z^{(2)} = S_z^{(3)} = F^{(2)} z_c^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{12} b^3,$$

$$F = F^{(1)} + 2F^{(2)} = 2b^2 + 2 \frac{1}{2} b^2 = 3b^2,$$

$$S_z = S_z^{(1)} + 2S_z^{(2)} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 \frac{\sqrt{2}}{12} \right) b^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} b^3, \quad y_c = \frac{S_z}{F} = -\frac{\sqrt{2}}{6} b.$$

Главные моменты инерции (моменты в главной системе координат Sy_*z_* равны:

$$J_{y_*}^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} = \frac{(2b/\sqrt{2})(2b\sqrt{2})^3}{48} = \frac{2}{3} b^4,$$

$$J_{y_*}^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} + F^{(2)} (z_{c_2})^2 = \frac{(b/\sqrt{2})(b\sqrt{2})^3}{48} + \frac{1}{2} b^2 \left(\frac{b}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{7}{24} b^4,$$

$$J_{y_*} = J_1 = J_{y_*}^{(1)} + 2J_{y_*}^{(2)} = b^4 \left(\frac{2}{3} + 2 \frac{7}{24} \right) = \frac{5}{4} b^4,$$

$$J_{z_*}^{(1)} = J_{z_1}^{(1)} + F^{(1)} (y_{c_1} - y_c)^2 =$$

$$= \frac{(2b\sqrt{2})(2b/\sqrt{2})^3}{36} + 2b^2 \left(-\frac{1}{3} \frac{2b}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6} b \right)^2 = \frac{1}{3} b^4,$$

$$J_{z_*}^{(2)} = J_{z_2}^{(2)} = J_{z_2}^{(2)} + F^{(2)} (y_{c_2} - y_c)^2 =$$

$$= \frac{(b\sqrt{2})(b/\sqrt{2})^3}{36} + \frac{1}{2} b^2 \left(\frac{1}{3} \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6} b \right)^2 = \frac{1}{8} b^4,$$

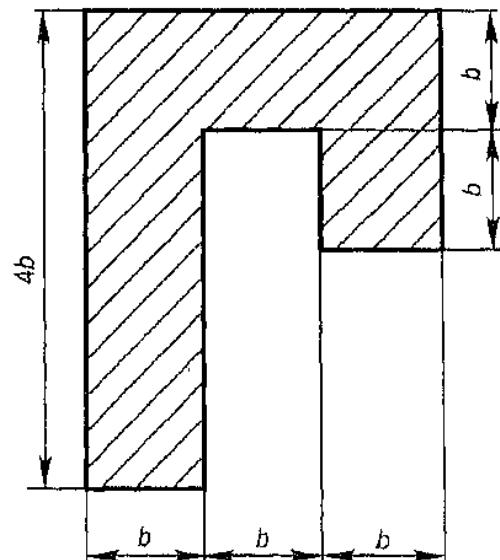
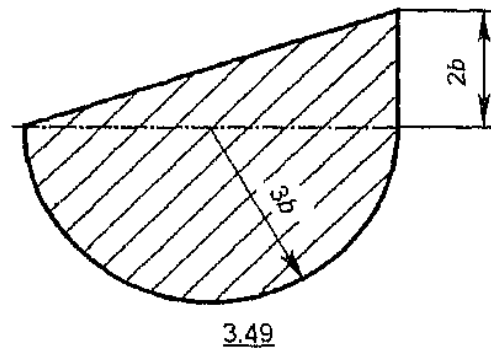
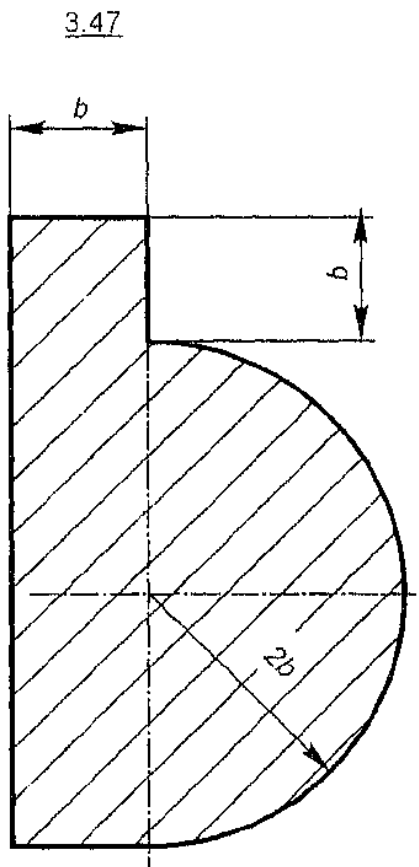
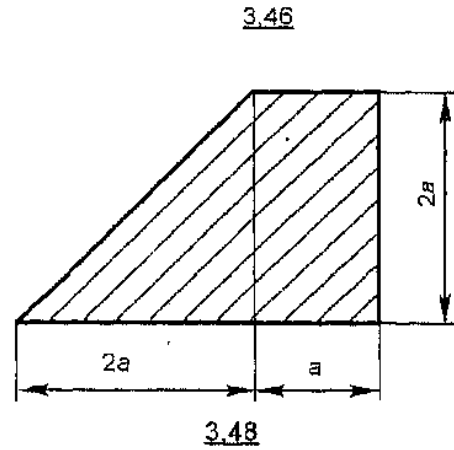
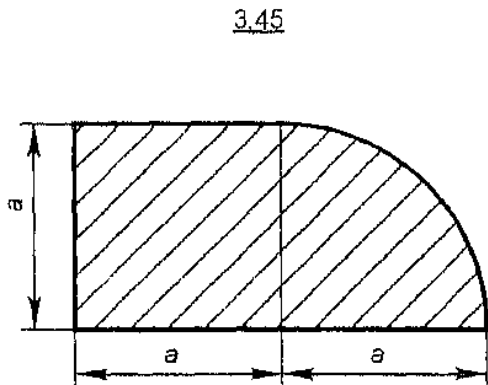
$$J_{z_*} = J_2 = J_{z_*}^{(1)} + 2J_{z_*}^{(2)} = b^4 \left(\frac{1}{3} + 2 \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{12} b^4. \quad \blacksquare$$

Задачи

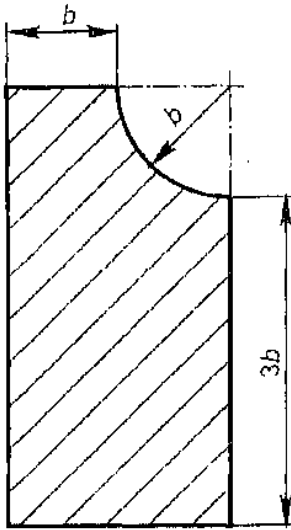
3.41—3.43. Для областей, указанных соответственно в задачах 3.2.—3.4, найти главные оси и главные моменты инерции.

3.44. Найти главные оси с центром в точке O области, изображенной на рис. 3.6, a .

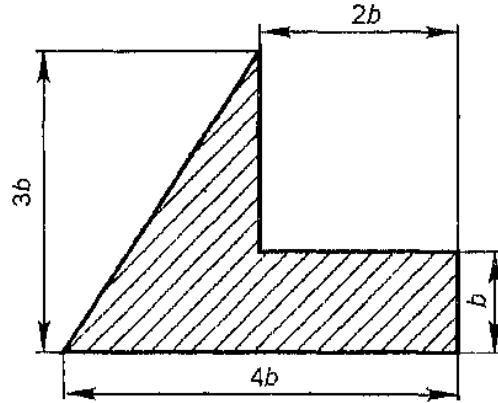
3.45—3.51. Найти главные центральные оси и главные моменты инерции областей, приведенных на соответствующих рисунках.



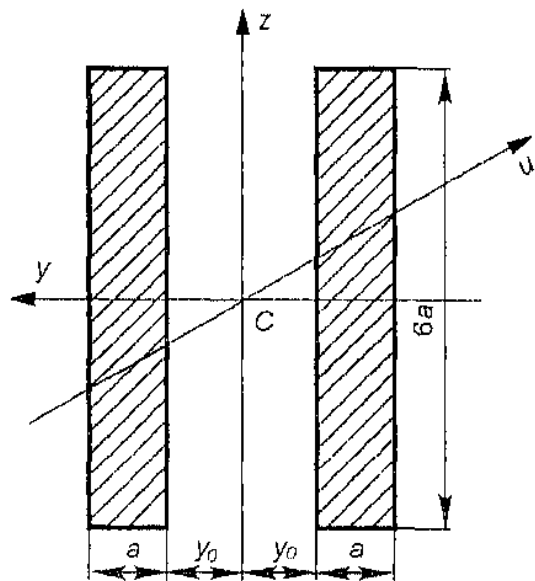
3.50



3.51



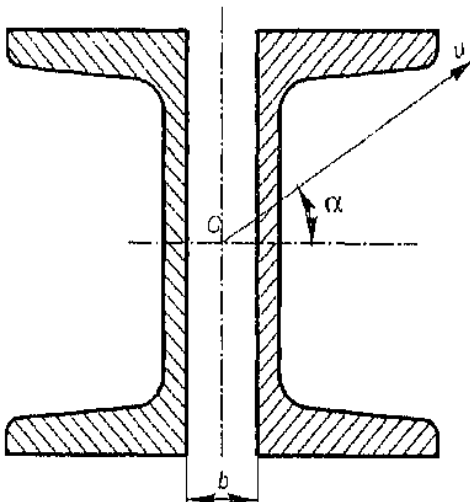
3.52



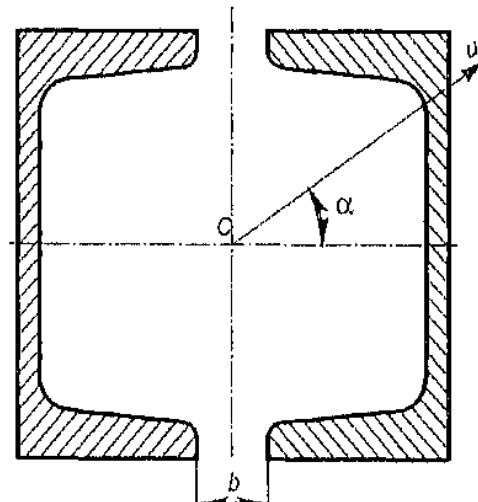
3.52. Для области, составленной из двух прямоугольников (см. соответствующий рисунок), найти значение y_0 , при котором моменты инерции относительно всех осей Cu равны между собой.

3.53, 3.54. Для области, составленной из двух прокатных профилей (см. соответствующие рисунки), определить размер b , при котором момент инерции J_u относительно оси Cu не зависит от ее положения.

3.53



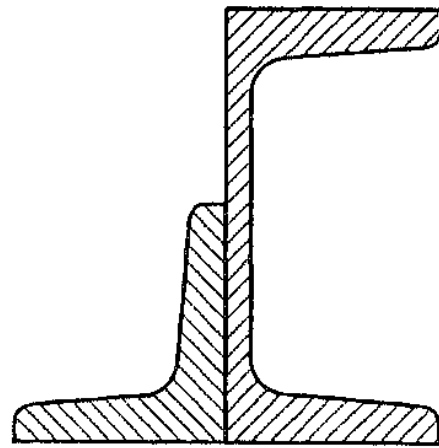
3.54



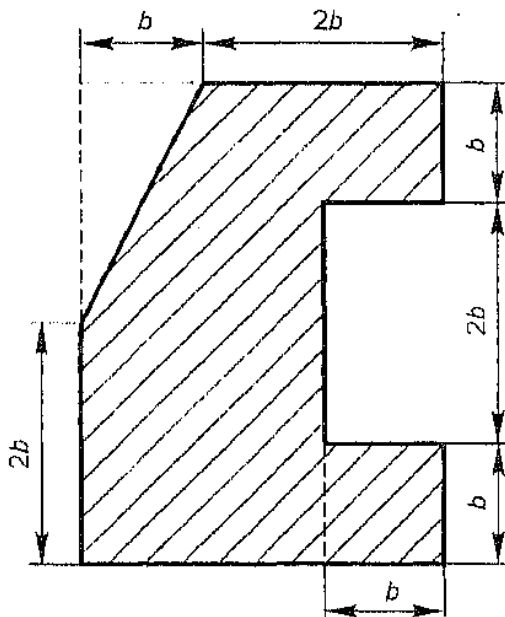
3.55. Для области, составленной из швеллера № 12 с параллельными гранями полок и равнополочного уголка №63 × 63 × 4 (см. соответствующий рисунок и § П.2, табл. П.7, П.10), найти главные центральные оси и главные моменты инерции.

3.56—3.70. Определить положение главных центральных осей для областей, приведенных на соответствующих рисунках.

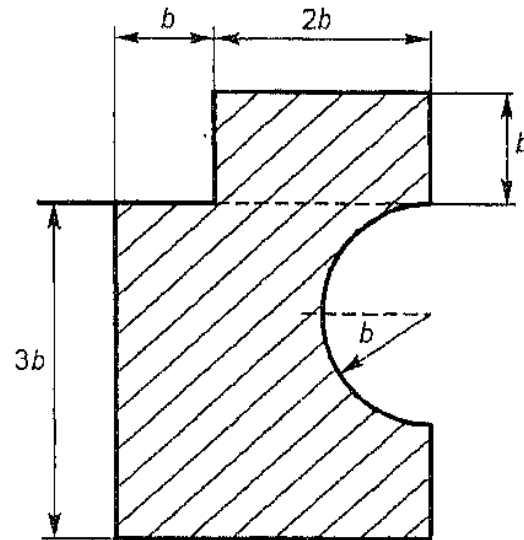
3.55



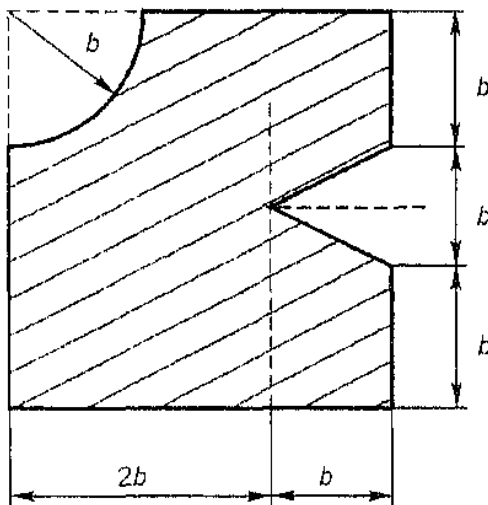
3.56



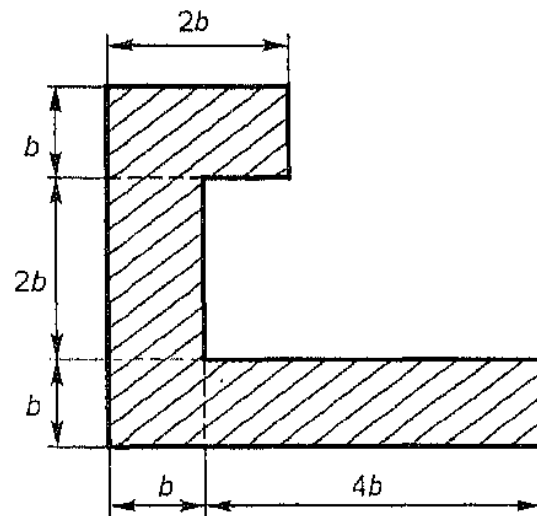
3.57

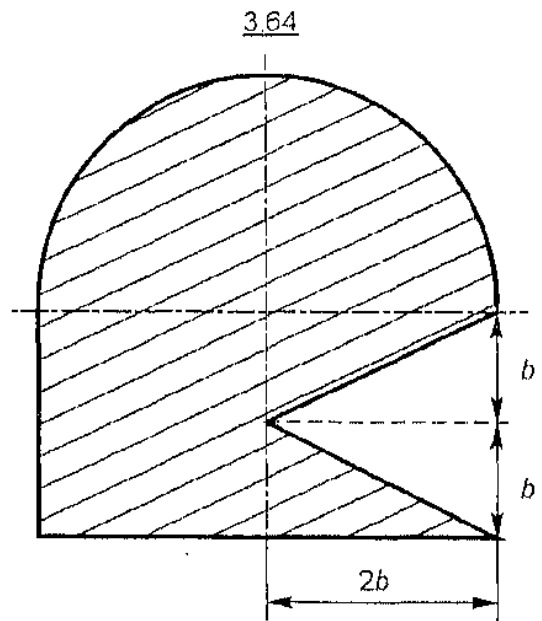
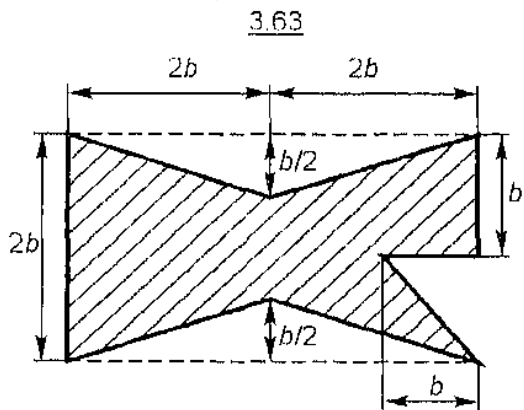
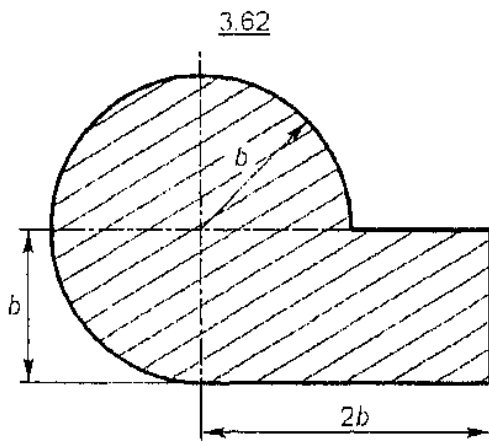
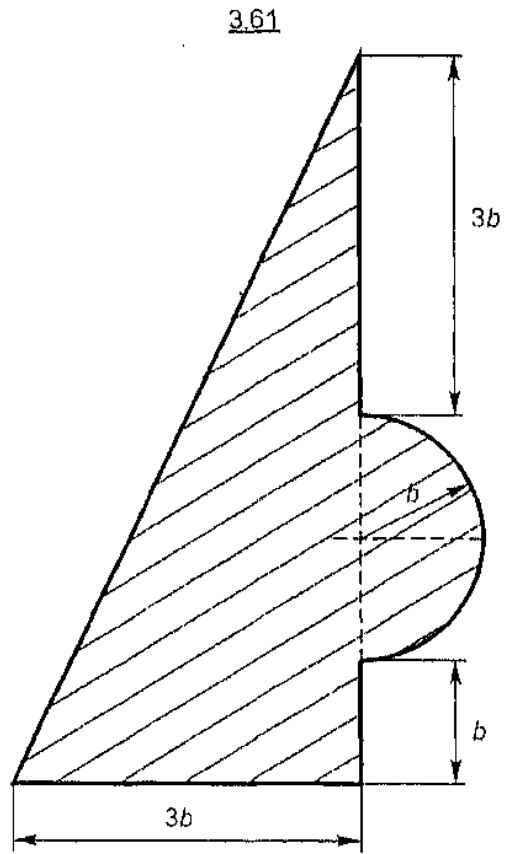
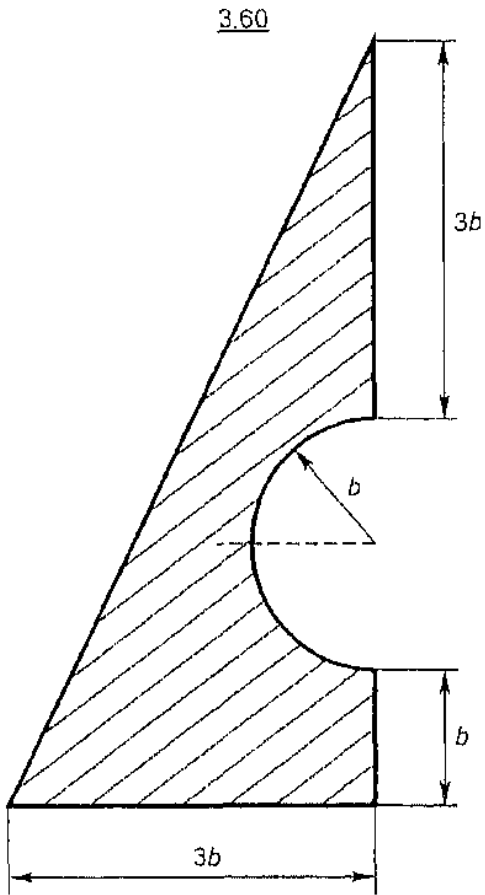


3.58

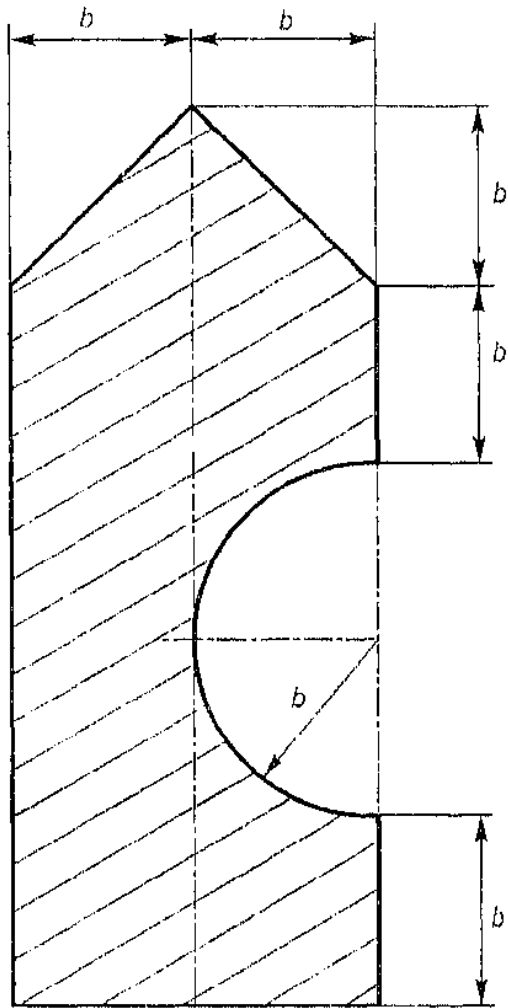


3.59

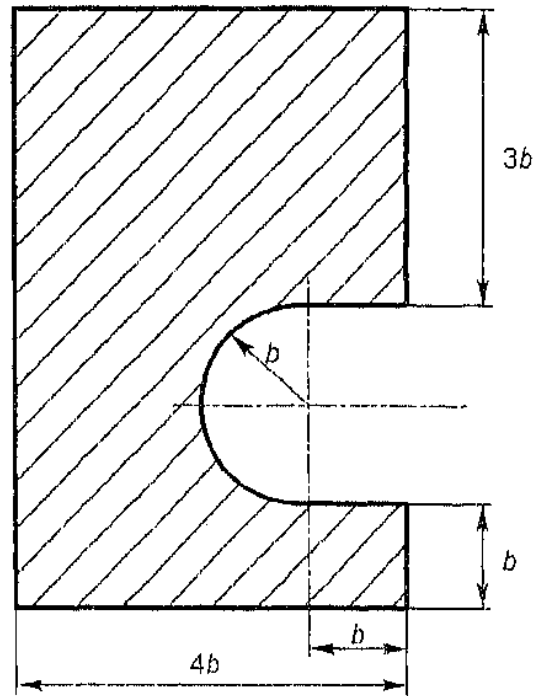




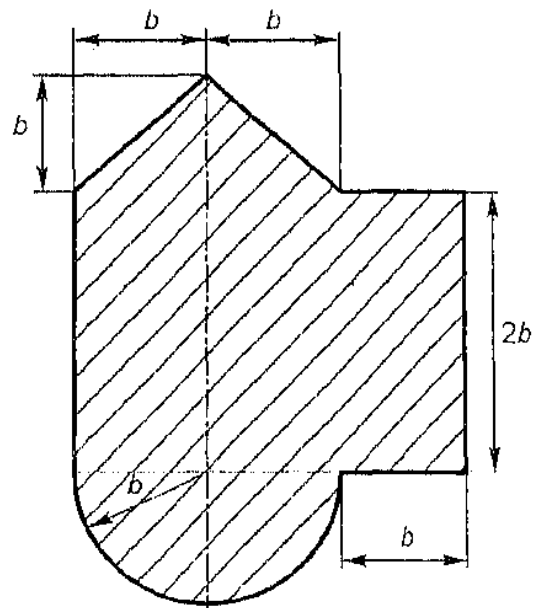
3.65



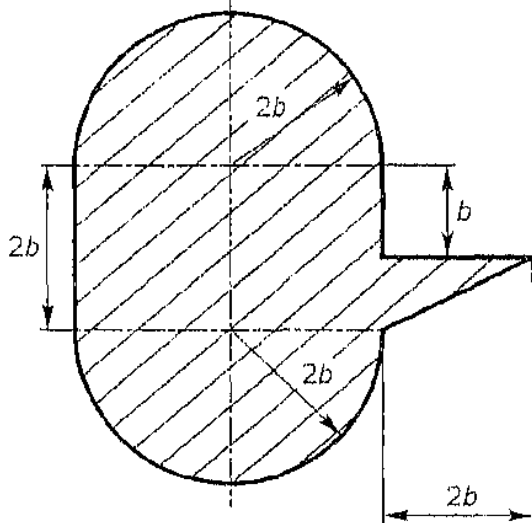
3.66

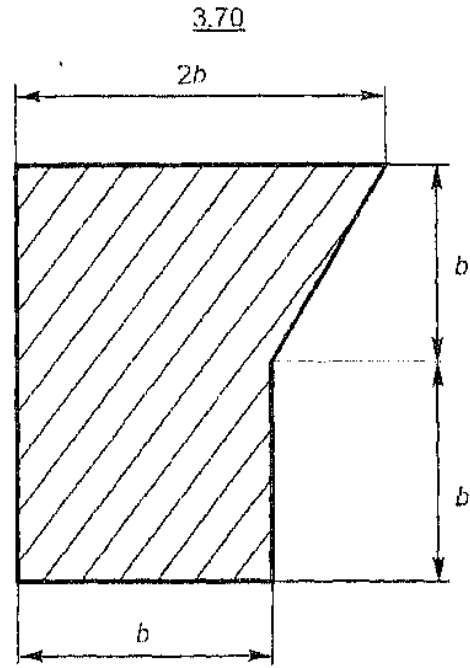
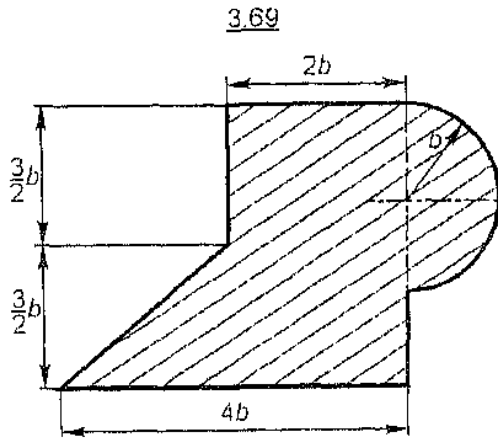


3.68



3.67





§ 3.3. Тонкостенные сечения

Определение 3.3. Пусть плоская область D (сечение) ограничена двумя непересекающимися кривыми Γ_+ и Γ_- , а также двумя кривыми Γ_1 и Γ_2 , каждая из которых имеет с Γ_+ и Γ_- по

одной общей точке (рис. 3.7). При этом граница области имеет вид

$$\partial D = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Кривая Γ лежит между Γ_+ и Γ_- , δ — длина перпендикулярного Γ отрезка с концами на кривых Γ_+ , Γ_- и центром на кривой Γ .

Кривая Γ называется *средней линией*, а δ — *толщиной сечения*.

Обозначим длину средней линии $l = |\Gamma|$. Указанное сечение D называется *тонкостенным*, если $\delta/l \ll 1$ (на практи-

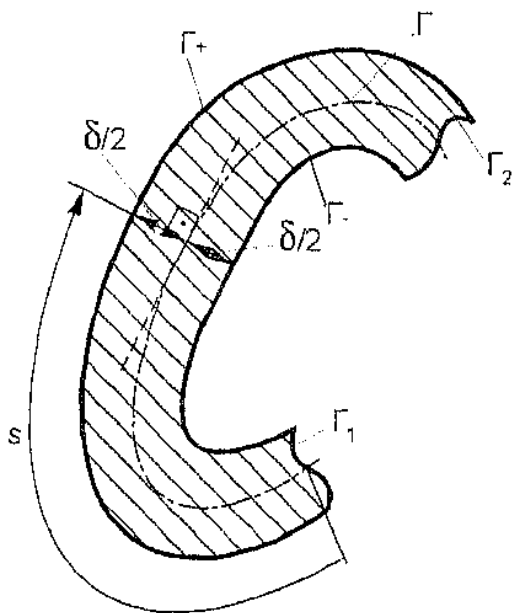


Рис. 3.7

ке $\delta \leq 1/10$). В этом случае вид кривых Γ_1 и Γ_2 не важен.

В общем случае $\delta = \delta(s)$, где s — длина дуги кривой Γ . При $\delta = \text{const}$ имеем сечение *постоянной толщины*. Если средняя линия является замкнутой кривой, то сечение называется *замкнутым тонкостенным*. ■

При вычислении площади, статических моментов и моментов инерции тонкостенных сечений учитывается малость толщины сечения, и его геометрические характеристики могут быть либо найдены как главные члены разложений по степеням δ , либо определены как соответствующие криволинейные интегралы первого рода:

$$S_y = \int_{\Gamma} z\delta(s) ds, \quad S_z = \int_{\Gamma} y\delta(s) ds, \quad F = \int_{\Gamma} \delta(s) ds, \quad (3.15)$$

$$J_y = \int_{\Gamma} z^2\delta(s) ds, \quad J_z = \int_{\Gamma} y^2\delta(s) ds, \quad J_{yz} = \int_{\Gamma} yz\delta(s) ds.$$

Остальные формулы (для координат центра тяжести, положения главных осей и главных моментов), а также алгоритм определения геометрических характеристик составных сечений — такие же, как и в общем случае (см. § 3.1, 3.2). При вычислениях в результатах оставляются величины порядка δ . Отметим также, что в случае сечения постоянной толщины координаты центра тяжести и угол поворота главных осей от толщины не зависят.

Пример 3.5. Найти площадь и главные моменты инерции тонкостенного кольца радиуса R и постоянной толщины δ (см. § П.2, табл. П.3).

Решение. В силу симметрии оси любой ПДСК S_{yz} являются главными центральными. Моменты инерции найдем двумя способами.

Способ I. Для нетонкостенного кольца имеем (см. § П.2, табл. П.3):

$$F = \pi (R_+^2 - R_-^2), \quad J_y = J_z = \frac{\pi}{4} (R_+^4 - R_-^4),$$

$$R_+ = R + \delta/2, \quad R_- = R - \delta/2.$$

Оставляя величины порядка δ , найдем:

$$F = \pi [(R + \delta/2)^2 - (R - \delta/2)^2] = 2\pi R\delta,$$

$$J_y = \frac{\pi}{4} \left[\left(R + \frac{\delta}{2} \right)^4 - \left(R - \frac{\delta}{2} \right)^4 \right] =$$

$$= \left[R^4 + 4R^3 \frac{\delta}{2} - \left(R^4 - 4R^3 \frac{\delta}{2} \right) + o(\delta) \right], \quad \delta \rightarrow 0.$$

Отсюда для J_y получим

$$J_y = \pi R^3 \delta.$$

Способ II. По формулам (3.15) найдем (Γ — окружность радиуса R : $y = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

$$F = \delta \int_{\Gamma} ds = 2\pi R \delta,$$

$$J_y = \delta \int_0^{2\pi} z^2 ds = \delta \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \varphi \sqrt{(-R \sin \varphi)^2 + (R \cos \varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \delta R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \delta R^3 \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \pi R^3 \delta. \quad \blacksquare$$

Пример 3.6. Найти главные центральные оси и главные моменты инерции тонкостенного сечения, указанного на рис. 3.8.

Решение. Представляем сечение в виде трех тонкостенных элементов: 1 и 2 — наклонные прямые элементы, 3 — полукольцо. В силу симметрии вспомогательная система координат Oy_2z_2 является главной для всего сечения. Системы координат $C_i y_i z_i$ — центральные для i -х элементов (см. § П.2, табл. П.3). Вычисления проводим аналогично примерам 3.1 и 3.2. Результаты сводим в табл. 3.3. При этом величина δ_* , входящая в формулы для тонкостенного параллелограмма, и координаты $y_c^{(1)}$ и $y_c^{(2)}$ определяются так:

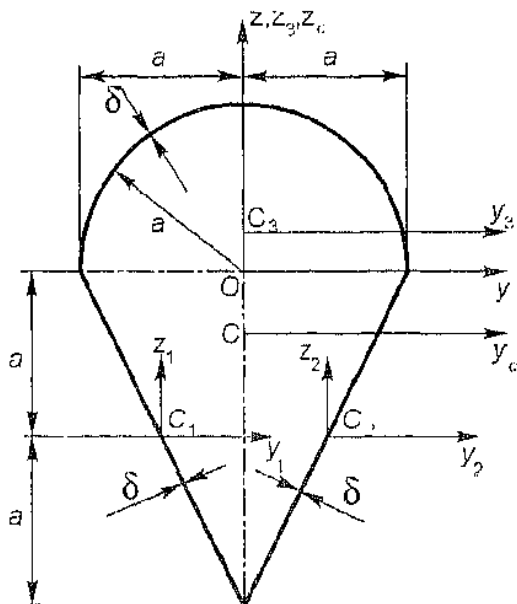


Рис. 3.8

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \delta y_*^1 = \frac{\delta}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} \delta = 1,12\delta,$$

$$\delta z_*^1 = \frac{\delta}{\sin \alpha} = \sqrt{5} \delta \equiv 2,24\delta,$$

$$y_*^{(2)} = -y_*^{(1)} = a \operatorname{tg} \alpha = 0,5a. \quad \blacksquare$$

Таблица 3.3

| Индексы строк | $P^{(i)}$ [δa] | z_{c_i} [a] | y_{c_i} [a] | $S_y^{(i)}$ [δa^2] | $J_{y_i}^{(i)}$ [δa^3] | $z_{c_i} = z_{c_i} - z_c$ [a] |
|------------------|-----------------------------|----------------------|----------------------|---------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2,24 | -1 | -0,5 | -2,24 | 0,745 | -0,675 |
| 2 | 2,24 | -1 | -0,5 | -2,24 | 0,745 | -0,675 |
| 3 | 3,14 | 0,637 | 0 | 2,0 | 0,30 | 0,962 |
| Σ | 7,62 | -0,325 | 0 | -2,48 | 1,79 | — |

| Индексы строк | $P^{(i)} z_{c_i}^2$ [δa^3] | $J_{y_c}^{(i)}$ [δa^3] | $J_{z_i}^{(i)}$ [δa^3] | $y_{c_i} = y_{c_i} - y_c$ [a] | $P^{(i)} y_{c_i}^2$ [δa^3] | $J_{z_c}^{(i)}$ [δa^3] |
|------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|
| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 1,02 | 1,765 | 0,186 | -0,5 | 0,56 | 0,75 |
| 2 | 1,02 | 1,765 | 0,186 | 0,5 | 0,56 | 0,75 |
| 3 | 2,91 | 3,21 | 1,57 | 0 | 0 | 1,57 |
| Σ | 4,95 | 6,74 | 1,94 | — | 1,12 | 3,07 |

Пример 3.7. Найти главные центральные оси и главные моменты инерции тонкостенного сечения, указанного на рис. 3.9.

Решение. Представляем сечение в виде трех тонкостенных прямоугольников: D_1, D_2, D_3 . Выбираем вспомогательные оси Oyz (рис. 3.9). Собственные оси $C_i y_i z_i$ являются главными центральными для i -х элементов (см. § П.2, табл. П.3). Вычисления проводим аналогично примерам 3.1, 3.2 и результаты сводим в табл. 3.4. При этом значениями J_{y_2}, J_{z_1} и J_{z_3} пренебрегаем из-за малости величины δ^3 .

Из (3.12) получаем угол, на который повернуты главные центральные оси $Cy_* z_*$:

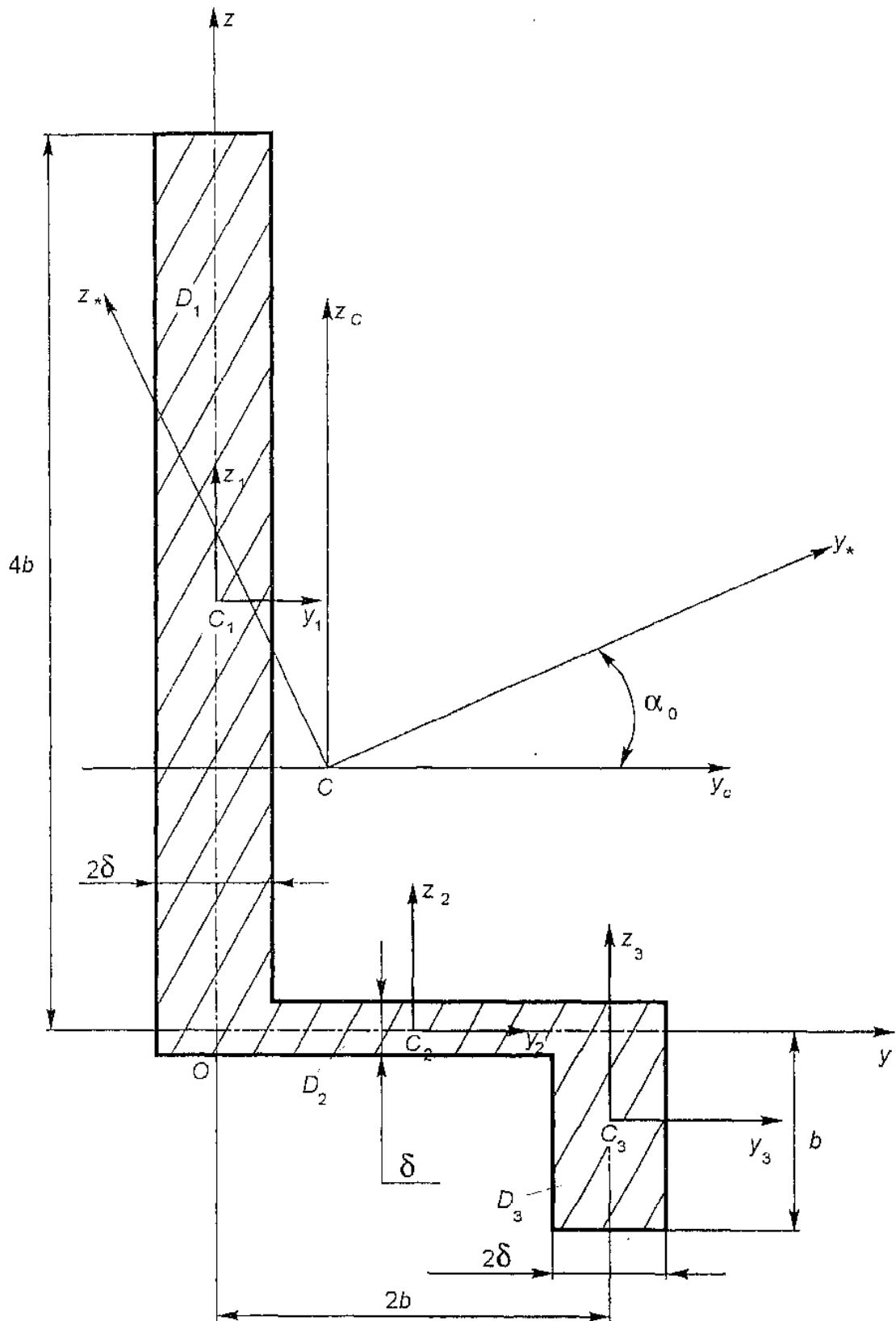


Рис. 3.9

Таблица 3.1

| Индексы строк | $P^{(1)}$ | z_{c_i} | y_{c_i} | $S_y^{(1)}$ | $J_{y_i}^{(1)}$ | $z_{c_i} =$ |
|------------------|--------------|-----------|-----------|----------------|-----------------|-----------------------|
| | $[\delta b]$ | $[b]$ | $[b]$ | $[\delta b^2]$ | $[\delta b^3]$ | $= z_{c_i} - z_c [b]$ |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 8 | 2 | 0 | 16 | 10,7 | 0,75 |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1,25 |
| 3 | 2 | -0,5 | 2 | -1 | 0,167 | -1,75 |
| Σ | 12 | 1,5 | 3 | 15 | 10,9 | -2,25 |

| Индексы строк | $P^{(1)} z_{c_i}^2$ | $J_{y_i}^{(1)}$ | $J_{z_i}^{(1)}$ | $y_{c_i} =$ | $P^{(1)} y_{c_i}^2$ | $J_{z_c}^{(1)}$ | $J_{y_c z_c}^{(1)}$ |
|------------------|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------------|---------------------|-----------------|---------------------|
| | $[\delta b^3]$ | $[\delta b^3]$ | $[\delta b^3]$ | $= y_{c_i} - y_c [b]$ | $[\delta b^3]$ | $[\delta b^3]$ | $[\delta b^3]$ |
| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | 4,5 | 15,2 | 0 | -0,5 | 2 | 2 | -3 |
| 2 | 3,13 | 3,13 | 0,667 | 0,5 | 0,5 | 1,17 | -1,25 |
| 3 | 6,13 | 6,29 | 0 | 1,5 | 4,5 | 4,5 | -5,25 |
| Σ | 13,8 | 24,6 | 0,667 | 1,5 | 7 | 7,67 | -9,5 |

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{y_c z_c}}{J_{z_c} - J_{y_c}} = \frac{2 \cdot (-9,5)}{7,67 - 24,6} = 1,12.$$

Отсюда $\alpha_0 = 1/2 \operatorname{arctg} 1,12 = 24,3'$ (см. рис. 3.9).

Главные моменты J_1 и J_2 определяем по формулам (3.13), (3.14):

$$J_p = J_{y_c} + J_{z_c} = 24,6\delta b^3 + 7,67\delta b^3 = 32,27\delta b^3,$$

$$D = (J_{z_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{y_c z_c}^2 = [(7,67 - 24,6)^2 + 4 \cdot (-9,5)^2] \delta^2 b^6 = 648\delta^2 b^6,$$

$$J_{y_c} = \frac{1}{2} (J_p + \sqrt{D}) = J_1 = \frac{1}{2} (32,27 + \sqrt{648}) \delta b^3 = 28,86\delta b^3,$$

$$J_{z_c} = \frac{1}{2} (J_p - \sqrt{D}) = J_2 = \frac{1}{2} (32,27 - \sqrt{648}) \delta b^3 = 3,4\delta b^3. \blacksquare$$

Задачи

Используя формулы табл. П.2 § П.2 и ограничиваясь в результатах главными членами разложения по степеням δ , найти

геометрические характеристики следующих сечений (см. пример 3.5).

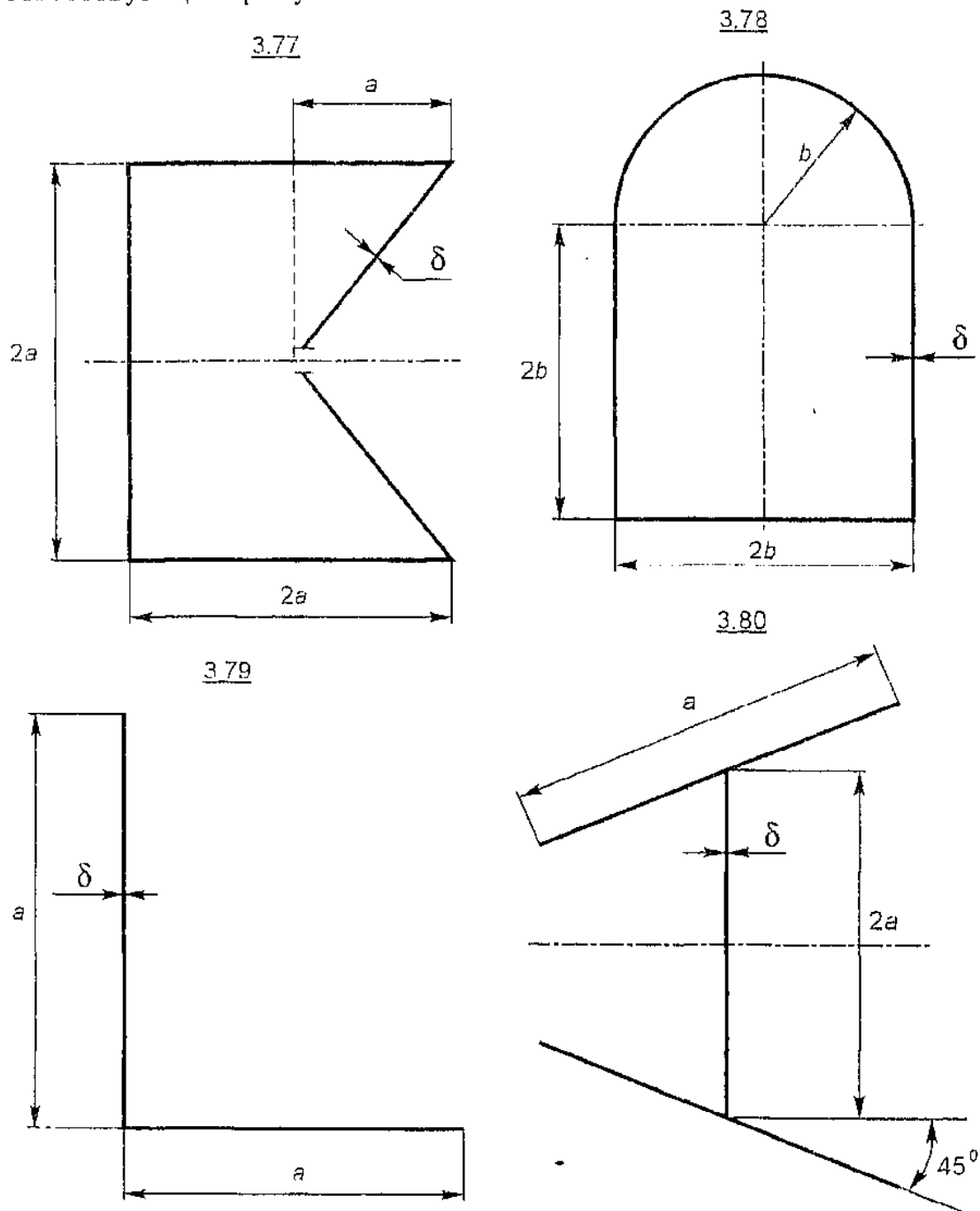
3.71. Тонкостенный параллелограмм с острым углом 45° .

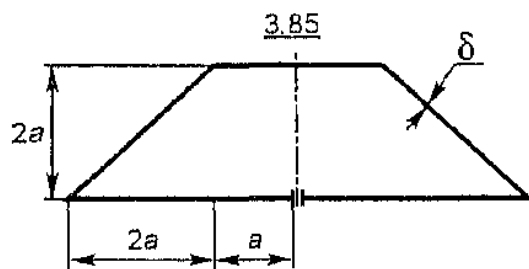
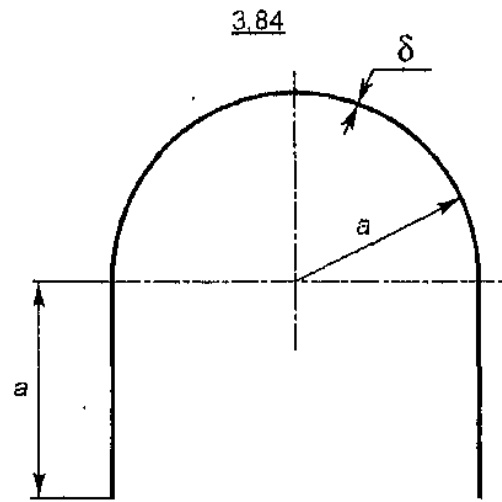
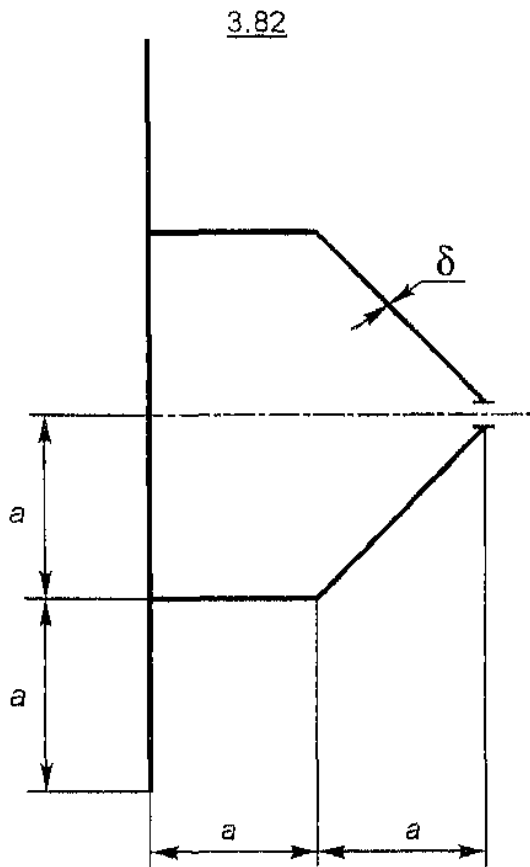
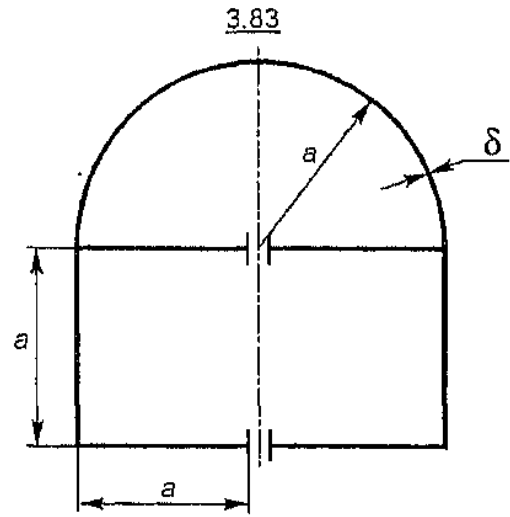
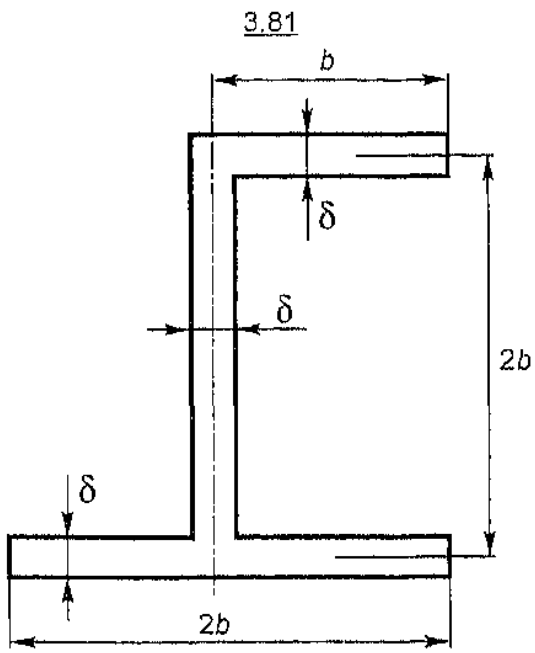
3.72. Тонкостенный прямоугольник.

3.73. Тонкостенное полукольцо.

3.74—3.76. Найти геометрические характеристики сечений, указанных соответственно в задачах 3.71—3.73, непосредственным вычислением интегралов (3.15).

3.77—3.85. Найти главные центральные оси и главные моменты инерции для тонкостенных сечений, приведенных на соответствующих рисунках.





Глава 4 КРУЧЕНИЕ

Основной объект здесь, так же как и в главе 1, — прямой стержень (стержень) с той же стандартной ПДСК *Oxyz*.

Определение 4.1. *Чистым кручением* (просто *кручением*) стержня называется такой вид его деформации, при котором ось остается прямолинейной после деформации и в каждой точке любого поперечного сечения отличны от нуля только касательные напряжения:

$$\sigma_x = 0; \quad \tau_{xy}, \tau_{xz} \neq 0, \quad (4.1)$$

которые распределены так, что отличен от нуля только один внутренний силовой фактор — крутящий момент (определение П.16):

$$N = Q_y = Q_z = 0, \quad M_x \neq 0, \quad M_y = M_z = 0. \quad (4.2)$$

При этом стержень также называют *валом*. ■

С использованием метода сечений и уравнений равновесия доказывается справедливость следующего утверждения.

Утверждение 4.1. (*Условия кручения*.) Для того чтобы стержень находился в состоянии кручения, необходимо и достаточно, чтобы были отличны от нуля только проекции на ось сосредоточенных и распределенных моментов:

$$P_k = 0, \quad q = 0, \quad M_{lx} \neq 0, \quad M_{ly} = M_{lz} = 0, \quad m_x \neq 0, \quad m_y = m_z = 0. \quad \blacksquare(4.3)$$

Отметим, что при такой деформации температурные поля не рассматриваются.

Сложность задачи об определении НДС стержня при кручении существенно связана с формой поперечного сечения. Методами сопротивления материалов она может быть решена для *круговых* и *кольцевых сечений*. Для них в дополнение к аксиоме 8 (см. § П.1) принимается следующая гипотеза.

Аксиома 8.1. При кручении стержней кругового и кольцевого сечений вектор касательных напряжений в поперечном сечении направлен перпендикулярно радиусу и имеет место взаимодействие продольных волокон (ср. с утверждением 1.2):

$$\sigma_y = \sigma_x = \tau_{yz} = 0. \quad \blacksquare \quad (4.4)$$

Отсюда и из определения 4.1 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 4.2. В каждой точке стержня, находящегося в условиях кручения, имеет место чистый сдвиг (см. определение П.12):

$$\tau = \tau_{x\vartheta} \neq 0, \quad \sigma_r = \sigma_\vartheta = \sigma_x = \sigma_{r\vartheta} = \tau_{xr} = 0,$$

где r, ϑ, x — цилиндрическая система координат (рис. 4.1). ■

Закон Гука для чистого сдвига имеет вид (ср. с (1.9))

$$\tau = G\gamma, \quad (4.5)$$

где γ — угол сдвига волокна (см. определение П.5) на координатной площадке (для кручения — радиального волокна). ■

С помощью этого закона и аксиом 8 (см. § П.1) и 8.1 доказывается, что касательные напряжения пропорциональны радиусу

$$\tau = \frac{M_k}{J_k} r, \quad (4.6)$$

и справедливы следующие формулы:

$$\theta = \varphi' = \frac{M_k}{GJ_k}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}. \quad (4.7)$$

Здесь φ — угол поворота относительно оси поперечного сечения (*угол закручивания*), τ_{\max} — максимальное значение касательного напряжения, J_k и W_k — геометрические характеристики сечения. Для кругового и кольцевого сечения две последние величины вычисляются так: $J_k = J_p$, $W_k = J_k/R$, где J_p и R — полярный момент и радиус (внешний радиус) сечения. Формулы для них приведены в табл. П.4.

Используется следующая терминология.

Определение 4.2. Величина θ называется *погонным углом закручивания*, GJ_k — *жесткостью на кручение*, а W_k — *моментом сопротивления кручению*. ■

Для стержней сплошного некругового сечения задача решается более сложными методами теории упругости. При этом остаются справедливыми формулы (4.7). Соответствующие геометри-

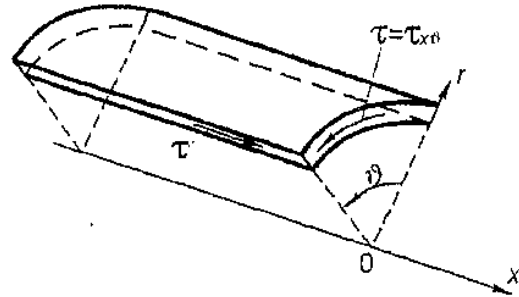


Рис. 4.1

ческие характеристики для некоторых таких сечений приведены в табл. П.4.

Методами сопротивления материалов исследуется также кручение стержней тонкостенных сечений (см. гл. 3). Для них вместо аксиомы 8.1 вводится следующая гипотеза.

Аксиома 8.2.

а). Для незамкнутого тонкостенного сечения геометрические характеристики каждой его составляющей могут быть вычислены по соответствующим формулам для сплошного сечения в виде прямоугольника с коэффициентами, соответствующими его бесконечной длине.

б). Для замкнутого тонкостенного сечения касательные напряжения направлены по касательной к средней линии сечения и распределены равномерно по нормали к ней. ■

При этом по-прежнему остаются справедливыми формулы (4.7). Геометрические характеристики для сечений такого типа указаны в табл. П.4. Там же приведены характеристики для стандартных профилей (см. табл. П.7—П.11), которые являются незамкнутыми тонкостенными стержнями, но величина J_k вычисляется с поправочным коэффициентом.

Иногда используется дифференциальное уравнение равновесия стержня при кручении:

$$M'_k(x) = -m(x), \quad (4.8)$$

которое с учетом (4.6) может быть записано относительно угла поворота:

$$(GJ_k \varphi')' = -m. \quad (4.9)$$

Оно аналогично (1.11) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Основные граничные условия для него имеют следующий вид:

— закрепленный конец ($x = x_1$):

$$\varphi|_{x=x_1} = 0; \quad (4.10)$$

— на конце стержня $x = x_2$ приложен крутящий момент M :

$$M_k|_{x=x_2} = GJ_k \varphi'|_{x=x_2} = M. \quad (4.11)$$

В случае свободного конца в (4.11) нужно положить $M = 0$.

При чистом сдвиге удельная потенциальная энергия (см. утверждение П.3) имеет вид

$$u = \frac{1}{2} \tau \gamma, \quad (4.12)$$

а потенциальная энергия стержня длиной l при кручении вычисляется следующим образом:

$$U = \int_0^l \frac{M_k^2}{2GJ_k} dx. \quad (4.13)$$

§ 4.1. Статически определимые задачи

Поскольку при кручении нетривиальным является лишь одно уравнение равновесия (проекция моментов на ось), то в соответствии с определением П.17 статическая определимость будет иметь место только в том случае, когда один из концов стержня закреплен, а на втором приложен крутящий момент либо он свободен (рис. 4.2).

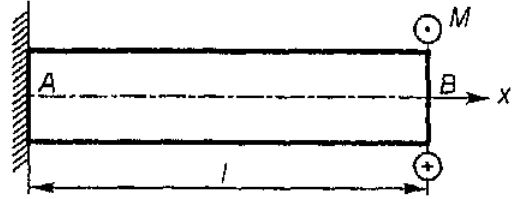


Рис. 4.2

Если внешние нагрузки, геометрические и физические характеристики стержня являются непрерывными функциями координаты x , то НДС может быть найдено как решение соответствующей краевой задачи (4.9)—(4.11).

Пример 4.1. Найти M_k , τ_{\max} , θ и φ для стержня, указанного на рис. 4.2, полагая, что $GJ_k = \text{const}$.

Решение. Краевая задача в этом случае имеет вид

$$GJ_k \varphi'' = 0, \quad \varphi|_{x=0} = 0, \quad GJ_k \varphi'|_{x=l} = M.$$

Очевидно, она совпадает с задачей, приведенной в примере 1.1, в части определения M_k , θ и φ , если сделать следующие замены:

$$M_k \leftrightarrow N, \quad \theta \leftrightarrow \varepsilon, \quad \varphi \leftrightarrow \delta, \quad GJ_k \leftrightarrow EF, \quad M \leftrightarrow P. \quad (4.14)$$

Следовательно, сразу можем записать

$$\varphi(x) = \frac{Mx}{GJ_k}, \quad \theta = \frac{M}{GJ_k}, \quad M_k = M, \quad \Delta\varphi = \varphi_B = \varphi|_{x=l} = \frac{Ml}{GJ_k}, \quad (4.15)$$

где $\Delta\varphi$ — угол закручивания правого торца стержня относительно левого.

Кроме того, из (4.7) имеем $\tau_{\max} = M/W_k$. ■

Вообще аналогия между задачами на растяжение-сжатие и кручение становится полной, если к заменам (4.14) добавить следующие:

$$\tau_{\max} \leftrightarrow \sigma, \quad W_{\kappa} \leftrightarrow F. \quad (4.16)$$

Поэтому общий алгоритм решения статически определенных задач на кручение с учетом замен (4.14), (4.16) совпадает с приведенным в § 1.1. Отметим только, что в эпюре τ_{\max} знак касательных напряжений совпадает со знаком M_{κ} .

При этом угол закручивания участка В—С стержня вычисляется по формуле, аналогичной (1.19):

$$\varphi(x) = \int_0^x \theta(x) dx + \varphi_B. \quad (4.17)$$

В некоторой корректировке нуждается только п. 4 этого алгоритма. Здесь величины $\sigma_{\text{пц}}$, σ_{γ} , σ_{τ} и σ_{ν} заменяются, с сохранением названий, величинами $\tau_{\text{пц}}$, τ_{γ} , τ_{τ} и τ_{ν} . Последние также берутся из полученных опытным путем “диаграмм сдвига”, которые качественно совпадают с диаграммами растяжения-сжатия, что отражено на рис. 1.3, где соответствующие ординаты имеют двойное обозначение.

При проектировочном расчете стержней, работающих на кручение, часто используется одно из условий на их жесткость (см. п. VI § II.1)

$$|\varphi|_{\max} \leq [\varphi], \quad |\theta|_{\max} \leq [\theta], \quad (4.18)$$

которое должно рассматриваться совместно с условием прочности

$$|\tau_{\max}|_{\max} \leq [\tau]. \quad \blacksquare \quad (4.19)$$

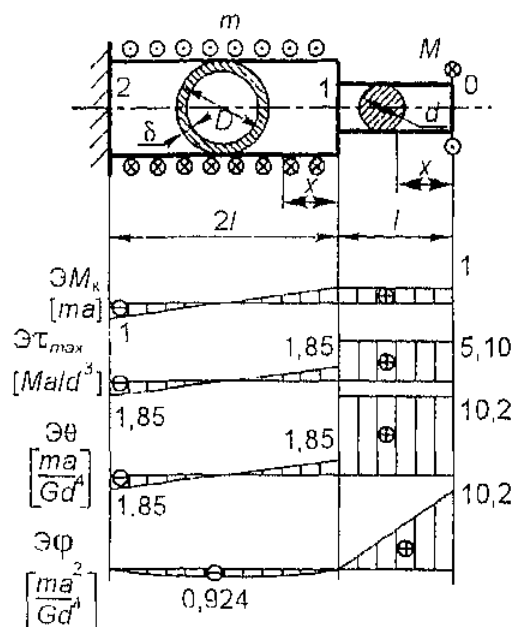


Рис. 4.3

Пример 4.2. Составной цилиндрический стержень, изображенный на рис. 4.3, нагружен распределенным $m = \text{const}$ и сосредоточенным $M = ml$ крутящими моментами. Диаметр малого цилиндра равен d , внешний диаметр большого цилиндра $D = 2d$, а толщина его стенки $\delta = D/20$. Определить размер d и определить максимальный угол закручивания, а также потенциальную энергию деформации. В расчетах при-

нять: $m = 1$ кН; $l = 0,5$ м; $[\tau] = 21$ МПа; $G = 2,7 \cdot 10^4$ МПа; размер d округлить до 0,5 см.

Решение. Нумерация пунктов соответствует алгоритму расчета (см. также § 1.1).

1—3. Нумерация участков соответствует рис. 4.3. Рассматриваем равновесие отсеченных частей, и, начиная со свободного конца, определяем крутящий момент (x — местная координата на каждом участке, отсчитываемая в отрицательном направлении оси Ox):

— участок 0—1:

$$M_{01}(x) = ml;$$

— участок 1—2:

$$M_{12}(x) = ml - \int_0^x m \, dx = m(l - x), \quad M_1 = M_{12}(0) = ml, \\ M_2 = M_{12}(2l) = -ml.$$

\mathcal{M}_k приведена на рис. 4.3.

Далее по участкам вычисляем геометрические характеристики сечений стержня (см. табл. П.4), максимальные касательные напряжения, погонный угол закручивания (см. (4.7)):

— участок 0—1:

$$J_k = \frac{\pi d^4}{32}, \quad W_k = \frac{\pi d^3}{16}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_{01}}{W_k} = 5,10 \frac{ml}{d^3}; \\ \theta_{01} = \frac{ml}{GJ_k} = 10,2 \frac{ml}{d^4};$$

— участок 1—2:

$$c = 1 - \frac{2\delta}{D} = 0,9; \quad J_k = \frac{\pi}{32} D^4 (1 - c^4) = \frac{\pi}{2} d^4 (1 - c^4) = 0,540d^4,$$

$$W_k = \frac{\pi}{16} D^3 (1 - c^4) = \frac{\pi}{2} d^3 (1 - c^4) = 0,540d^3;$$

$$\tau_{\max 12}(x) = \frac{M_{12}}{W_k} = 1,85 \frac{m(l-x)}{d^3},$$

$$\tau_{\max} = \tau_{\max 1} = \tau_{\max 12}(0) = -\tau_{\max 2} = -\tau_{\max 12}(2l) = 1,85 \frac{ml}{d^3};$$

$$\theta_{12}(x) = \frac{m(l-x)}{GJ_k} = 1,85 \frac{m(l-x)}{d^4}, \quad \theta_1 = \theta_{12}(0) = 1,85 \frac{ml}{d^4},$$

$$\theta_2 = \theta_{12}(2l) = -1,85 \frac{ml}{d^4}.$$

Отметим, что поскольку $\delta/D = 1/20$, то при расчете геометрических характеристик можно было воспользоваться соответствующими формулами для замкнутых тонкостенных сечений.

Эпюры τ_{\max} и θ приведены на рис. 4.3. Отсюда находим максимальное значение модуля касательных напряжений:

$$|\tau_{\max}|_{\max} = 5,10 \frac{ml}{d^3}.$$

При определении угла закручивания используем формулу (4.17) (координата x отсчитывается в положительном направлении оси Ox):

— участок 1—2:

$$\varphi_{21}(x) = \int_0^x \frac{m(x-l)}{GJ_k} dx = 1,85mx \frac{x-2l}{2Gd^4}, \quad \varphi_1 = \varphi_{21}(2l) = 0.$$

— участок 0—1:

$$\varphi_{10}(x) = \varphi_1 + 10,2 \int_0^x \frac{ml}{Gd^4} dx = 10,2 \frac{mxl}{Gd^4}, \quad \varphi_0 = \varphi_{10}(l) = 10,2 \frac{ml^2}{Gd^4}.$$

Точку экстремума x_* угла закручивания на участке 1—2 находим из следующего условия:

$$\varphi'_{21}(x_*) = 3,70m \frac{x-l}{2Gd^4} = 0, \quad x_* = l.$$

Так как при переходе через точку x_* $\Delta\theta$ меняет знак с минуса на плюс, то здесь имеет место минимум (см. аналогию (4.14) и алгоритм § 1.1):

$$\varphi_{\text{entr}} = \varphi_{\text{min}} = \varphi_{21}(l) = -0,924ml/(Gd^4).$$

Эф изображена на рис. 4.3.

4 — 5. Необходимый размер сечения определяем из условия прочности (4.19):

$$\tau_{\max, \max} = 5,10 \frac{ml}{d^3} \leq [\tau].$$

Отсюда находим

$$d \geq \sqrt[3]{5,10 \frac{ml}{[\tau]}} = \sqrt[3]{5,10 \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{21 \cdot 10^6}} \leq 0,0495 \text{ м.}$$

Принимаем $d = 0,05 \text{ м} = 5,0 \text{ см.}$

Учитывая полученное значение диаметра, вычисляем максимальный угол закручивания:

$$\varphi_{\max} = \varphi_0 = 10,2 \frac{1 \cdot 10^3 \cdot (0,5)^2}{2,7 \cdot 10^4 \cdot (0,05)^4} = 1,51 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Потенциальная энергия деформации стержня вычисляется по формуле (4.12), суммированием соответствующих интегралов по участкам:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{2l} \frac{m^2 (x-l)^2}{2GJ_k} dx + \int_0^l \frac{(ml)^2}{2GJ_k} dx = \frac{m^2}{2GJ_k} \left[\frac{1}{3} (x-l)^3 \Big|_0^{2l} + l^2 x \Big|_0^l \right] = \\ &= \frac{5m^2 l^3}{6GJ_k} = 4,2 \text{ Дж. } \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 4.3. Из условия равенства углов закручивания на свободных концах для изображенного на рис. 4.4 конического вала найти диаметр эквивалентного ему круглого вала постоянного сечения.

Решение. Назовем конический вал вторым, а эквивалентный ему — первым. Их характеристики будем различать с помощью соответственных нижних индексов.

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 4.4. Диаметр второго вала по длине изменяется линейно: $d_2(x) = d(2 - x/l)$. Геометрические характеристики J_k для первого и второго валов имеют вид (см. табл. П.3):

$$J_{1к} = \frac{\pi d_1^4}{32}, \quad J_{2к}(x) = \frac{\pi d_2^4(x)}{32} = \frac{\pi d^4 (2 - x/l)^4}{32}.$$

Соответствующие углы закручивания их концевых сечений вычисляем, используя формулы (4.7) и (4.17):

$$\varphi_1 = \int_0^l \frac{ml}{GJ_{1к}} dx = \frac{32ml^2}{\pi G d_1^4},$$

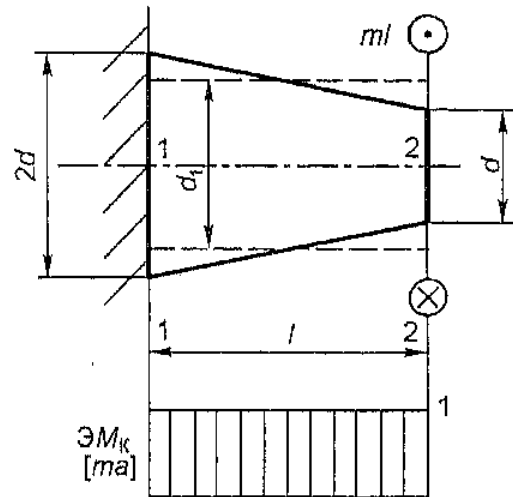


Рис. 4.4

$$\varphi_2 = \int_0^l \frac{ml}{GJ_{2к}(x)} dx = \frac{32ml}{\pi Gd^4} \int_0^l \frac{dx}{(2-x/l)^4} = \frac{7}{24} \frac{32ml^2}{\pi Gd^4}.$$

Приравнивая их, получаем $d_1 = 1,36d$. ■

Задачи

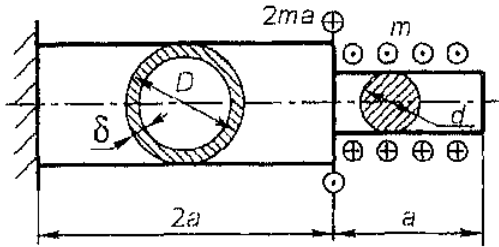


Рис. 4.5

4.1. Составной цилиндрический стержень, закрепленный на одном конце, нагружен сосредоточенным и распределенным крутящими моментами (рис. 4.5). Определить максимальный угол закручивания. В расчетах принять: $d = 0,05$ м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $a = 1$ м;

$D = 2d$; $\delta/d = 0,05$; $m = 10$ кН.

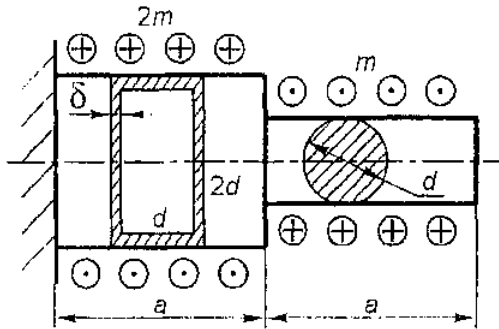


Рис. 4.6

4.2. Составной стержень, закрепленный на одном конце, нагружен распределенным крутящим моментом (рис. 4.6). Определить потенциальную энергию деформации и максимальный угол закручивания. В расчетах принять: $d = 0,04$ м;

$G = 8 \cdot 10^{10}$ Па; $a = 1,5$ м;

$\delta/d = 0,03$; $m = 200$ Н.

4.3. Стальной двутавр № 22 длиной 2 м закреплен на одном конце, а на другом его конце приложен сосредоточенный крутящий момент $M = 1$ кН · м. Определить максимальный угол закручивания.

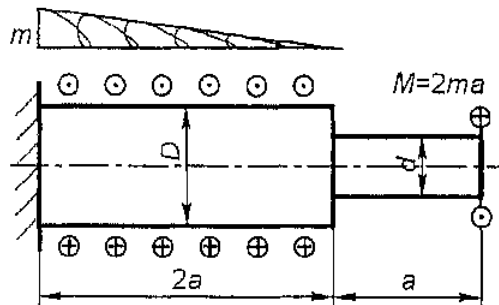


Рис. 4.7

4.4. Составной цилиндрический вал нагружен распределенным и сосредоточенным крутящими моментами, закреплен на одном конце (рис. 4.7). Найти максимальные значения крутящего момента, касательных напряжений и угла закручивания, если $D/d = 2$.

4.5. Конический вал нагружен распределенным крутящим

щим моментом $m = 120$ Н (рис. 4.8). Из условий прочности найти диаметр d и максимальный угол закручивания. В расчетах принять: $a = 0,8$ м; материал — дюралюминий ($G = 2,7 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau] = 50$ МПа).

4.6. Круглый вал с внутренним и внешним диаметрами d и D закреплен на одном конце и нагружен сосредоточенными моментами (рис. 4.9). Определить внешний диаметр. В расчетах принять: $d = 0,75D$; $M_1 = 3$ кН·м; $M_2 = 4$ кН·м; $\tau_T = 140$ МПа; $[n] = 2,5$.

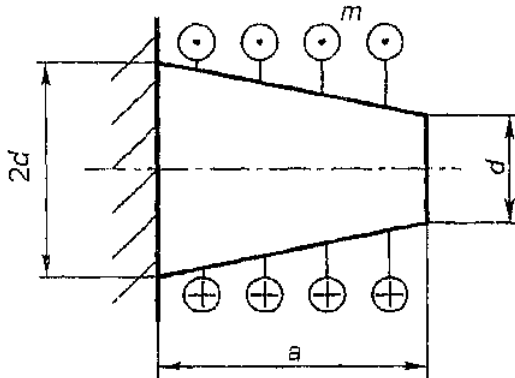


Рис. 4.8

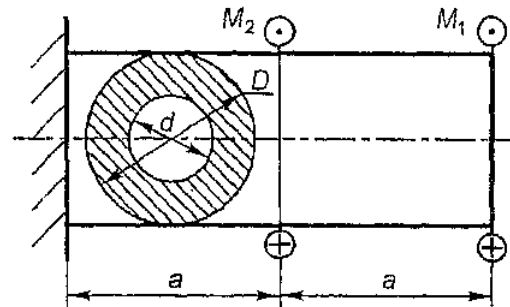


Рис. 4.9

4.7. Определить из расчета на прочность диаметр сплошного цилиндрического вала, передающего мощность $N = 48$ кВт при $\omega = 970$ об/мин. В расчетах принять: $[\tau] = 40$ МПа.

Указание: внешние крутящие моменты на торцах $M = N/\omega$.

4.8. Найти внешний D и внутренний d диаметры полого вала, нагруженного на торцах крутящим моментом $M = 25,6$ кН·м, из условий жесткости. В расчетах принять: материал — сталь ($[\tau] = 40$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа); $d = 0,8D$; $[\theta] = 0,25$ °/м.

4.9. Два вала (полый с отношением диаметров $D/d = 1,25$ и сплошной диаметром D) одинаковой длины изготовлены из одного материала. Найти отношение крутящих моментов, которые могут быть приложены к концам валов при одинаковых допускаемых напряжениях.

4.10. Определить, во сколько раз уменьшится прочность и жесткость на кручение тонкостенной трубы, если ее разрезать вдоль образующей. В расчетах принять: внутренний диаметр $d = 80$ мм, толщина стенки $\delta = 3$ мм.

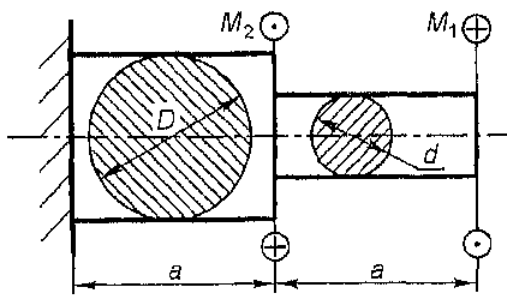


Рис. 4.10

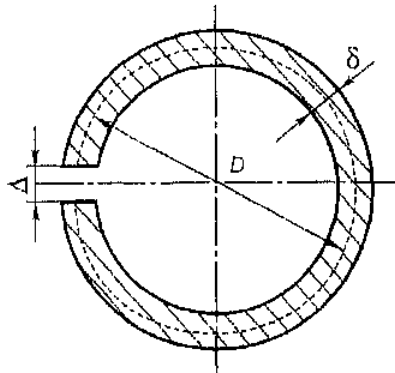


Рис. 4.11

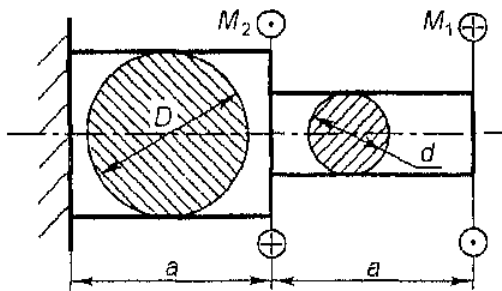


Рис. 4.12

4.11. Ступенчатый цилиндрический вал закреплен на одном конце и нагружен сосредоточенными крутящими моментами (рис. 4.10). Определить диаметры поперечных сечений из условий прочности. В расчетах принять: $D = 1,2d$; $M_1 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_2 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

$$\tau_T = 140 \text{ МПа}; [n] = 2,5.$$

4.12. В стенке тонкостенного чугунного вала, нагруженного крутящим моментом M , сделан прорез Δ параллельно оси вала (рис. 4.11). Найти отношения максимального касательного напряжения и погонного угла закручивания вала с прорезом к соответствующим характеристикам целого вала. В расчетах принять: $D = 96 \text{ мм}$; толщина $\delta = 14 \text{ мм}$; $M = 1,8 \text{ МН} \cdot \text{м}$; $\Delta = 20 \text{ мм}$.

4.13. Проверить прочность и жесткость стального ступенчатого бруса (рис. 4.12). В расчетах принять: $D = 75 \text{ мм}$; $d = 65 \text{ мм}$; $[\tau] = 40 \text{ МПа}$; $M_1 = 1,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_2 = 4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $[\theta] = 0,6 \text{ рад/м}$; $a = 0,5 \text{ м}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

4.14. Полный вал с наружным $D = 75 \text{ мм}$ и внутренним $d = 50 \text{ мм}$ диаметрами имеет длину 1 м . Под действием крутящего момента $M_k = 3,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ его погонный угол закручивания $\theta = 1 \text{ }^\circ/\text{м}$. Определить максимальные касательные напряжения и модуль сдвига.

4.15. К тонкостенной трубе диаметра 125 мм приложены по ее концам пары сил, скручивающие трубу моментом $M = 6,25 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определить толщину стенки трубы, если материал — сталь, $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

4.16. Из условий жесткости определить диаметр сплошного стального цилиндрического вала, нагруженного крутящим моментом M . В расчетах принять: $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $[\tau] = 80 \text{ МПа}$; $\theta = 0,25 \text{ }^\circ/\text{м}$.

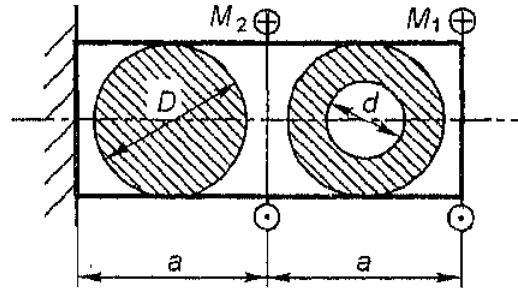


Рис. 4.13

4.17. Проверить прочность и жесткость вала переменного сечения (рис. 4.13). В расчетах принять: $D = 80 \text{ мм}$; $d = 70 \text{ мм}$; материал — сталь, $[\tau] = 40 \text{ МПа}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $M_1 = 1,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_2 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $[\theta] = 0,6 \text{ }^\circ/\text{м}$; $a = 0,5 \text{ м}$.

4.18. Максимальные касательные напряжения в полем вале и вале квадратного поперечного сечения, вписанного в полый вал, одинаковы. Определить отношение диаметров полого вала.

4.19. Прямоугольная полоса имеет толщину $\delta = 20 \text{ мм}$. Определить ее ширину h , если максимальные касательные напряжения в ней такие же, как в круглом вале диаметра $d = 50 \text{ мм}$. Оба стержня нагружены на торцах одинаковыми крутящими моментами.

4.20. Вычислить и сравнить веса трех стержней, имеющих различные поперечные сечения; круглое, квадратное и прямоугольное — с соотношением сторон 3:1. Все стержни скручиваются одинаковым моментом M . В расчетах принять: $M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $[\tau] = 60 \text{ МПа}$.

4.21. Вычислить и сравнить веса трех стержней, изготовленных из одного материала, имеющих одинаковые длины и различные поперечные сечения: круглое, квадратное и прямоугольное с соотношением сторон 3:1. Все стержни скручиваются одинаковым моментом M . Поперечные сечения подобрать из условий жесткости. В расчетах принять: $M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $[\theta] = 0,5 \text{ }^\circ/\text{м}$; $[\tau] = 60 \text{ МПа}$.

4.22. Стальная полоса толщиной δ и длиной a скручивается моментом M . Вычислить ширину полосы из условий жесткости. В расчетах принять: $\delta = 20 \text{ мм}$; $[\tau] = 80 \text{ МПа}$; $M = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $a = 0,8 \text{ м}$; $[\theta] = 1 \text{ }^\circ/\text{м}$.

4.23. Полоса толщиной δ и длиной a скручивается моментом M . Вычислить ширину полосы из условий прочности. В расчетах принять: $\delta = 20 \text{ мм}$; $M = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $a = 0,8 \text{ м}$; материал — сталь; $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

§ 4.2. Статически неопределимые задачи

Аналогично растяжению-сжатию статическая неопределимость при кручении имеет место в случае заделок на обоих концах стержня. При этом степень статической неопределимости равна $2 - 1 = 1$. Однако она может быть и больше единицы, например если рассматривается система вставленных друг в друга стержней (см. пример 4.6) и число стержней больше двух.

И в этом случае, так же как и в предыдущем параграфе, если внешние нагрузки, геометрические и физические характеристики стержня являются непрерывными функциями координаты x , то НДС может быть найдено как решение соответствующей краевой задачи (4.9)—(4.11).

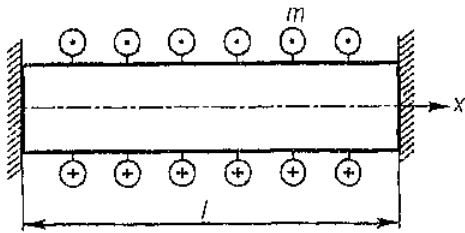


Рис. 4.14

Пример 4.4. Найти M_K , τ_{\max} , θ и φ для стержня, представленного на рис. 4.14, полагая, что $GJ_K = \text{const}$ и $m = \text{const}$.

Решение. Краевая задача в этом случае имеет вид

$$GJ_K \varphi'' = -m, \quad \varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=l} = 0.$$

В силу аналогии (4.14) задач на растяжение-сжатие и кручение, используя результаты примера 1.3, получаем:

$$\varphi(x) = \frac{mx}{2GJ_K} (l - x), \quad \theta = \frac{m}{GJ_K} \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad M_K = m \left(\frac{l}{2} - x \right).$$

Кроме того, из (4.7) находим

$$\tau_{\max} = \frac{m}{W_K} \left(\frac{l}{2} - x \right).$$

Следовательно, максимальные касательные напряжения имеют место соответственно на левом и правом концах стержня и равны между собой:

$$|\tau_{\max}|_{\max} = \tau_{\max}|_{x=0} = -\tau_{\max}|_{x=l} = \frac{ml}{2W_K}. \quad \blacksquare$$

В общем случае используется *алгоритм решения статически неопределимых задач*, практически совпадающий с указанным в предыдущем параграфе и отличающийся только усложнением п. 2. Аналогично растяжению-сжатию для определения неизвестных реакций (моментов) в заделках к уравнению равновесия добавляется *уравнение (уравнения) совместности деформаций*, задающее угол поворота в заделке

$$\varphi_B = \varphi|_{x=l} = 0 \quad (4.20)$$

или определяющее равенство углов поворота абсолютно жестко соединенных торцов вставленных друг в друга стержней. ■

Пример 4.5. Составной цилиндрический брус закреплен с двух концов и нагружен распределенным $m = 200 \text{ Н}$ и сосредоточенными крутящими моментами (рис. 4.15). Определить размеры поперечных сечений, исходя из условия жесткости. В расчетах принять: $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $a = 1 \text{ м}$, $[\varphi] = 0,04 \text{ рад}$; $[\tau] = 200 \text{ МПа}$; размер b округлить до 1 мм.

Решение. 1—2. Нумерация участков указана на рис. 4.15. Заменяем опоры реактивными моментами M_1 и M_4 и записыва-

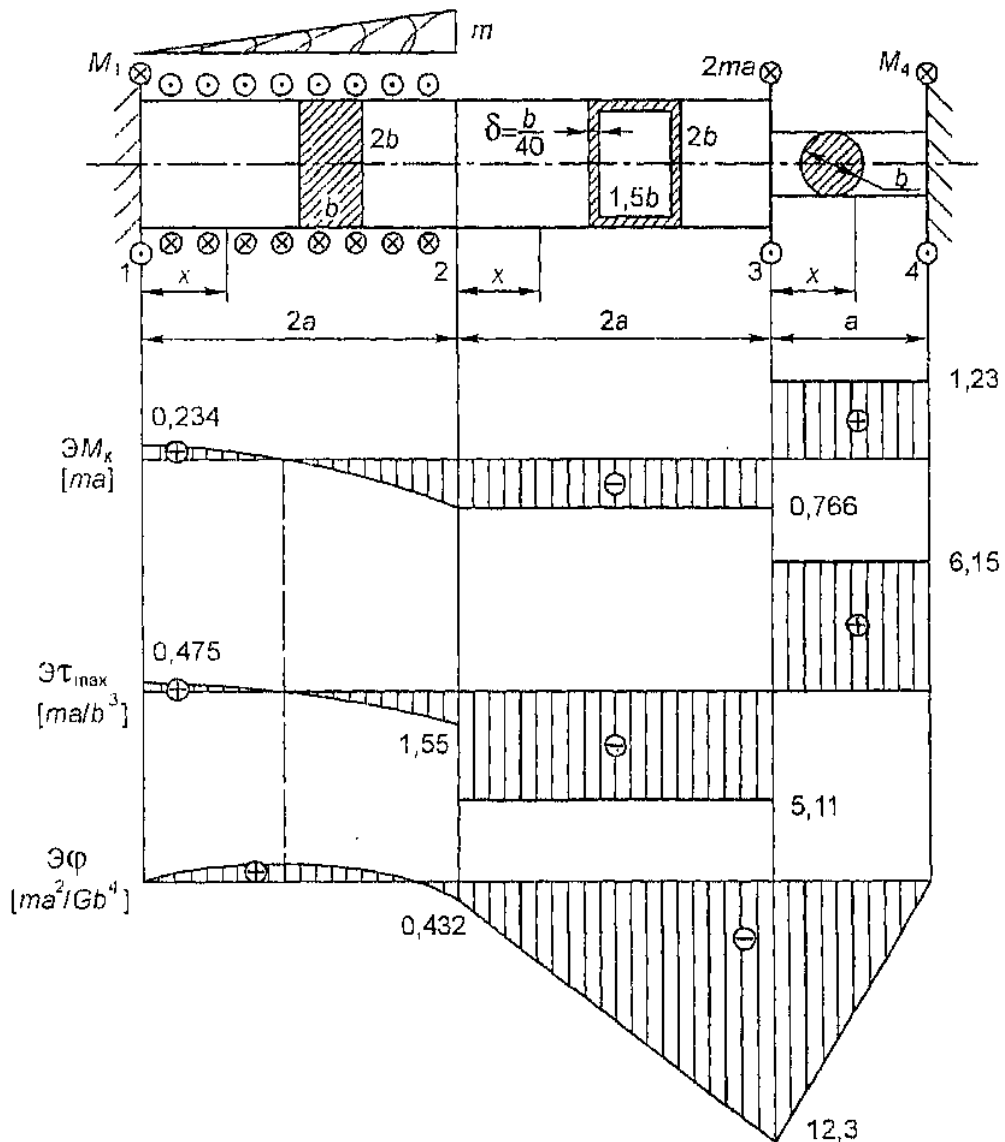


Рис. 4.15

ем уравнение равновесия в проекциях на ось Ox (равнодействующая погонного момента определяется как площадь соответствующей эпюры):

$$\sum M_x = 0: -M_1 + ma - 2ma - M_4 = 0.$$

Задача статически неопределимая. Уравнение совместности деформаций в соответствии с (4.19) имеет вид

$$\varphi_4 = 0.$$

Для выражения его левой части через M_1 и M_4 по участкам сначала находим геометрические характеристики сечений (см. табл. П.4 и П.5):

— участок 1—2:

$$\beta(2) = 0,229; \quad J_{\kappa} = \beta b^3 \cdot 2b = 0,458b^4; \quad \alpha(2) = 0,246;$$

$$W_{\kappa} = \alpha b^2 \cdot 2b = 0,492b^3;$$

— участок 2—3:

$$F_{\kappa} = 1,5b \cdot 2b = 3b^2, \quad \int_{\Gamma} \frac{ds}{\delta} = \frac{2}{\delta} (1,5b + 2b) = 280,$$

$$J_{\kappa} = 4F_{\kappa}^2 / \int_{\Gamma} \frac{ds}{\delta} = \frac{9}{70} b^4, \quad W_{\kappa} = 2F_{\kappa} \delta_{\min} = 2 \cdot 3b^2 \cdot \delta = \frac{3}{20} b^3;$$

— участок 3—4:

$$J_{\kappa} = 0,1b^4, \quad W_{\kappa} = 0,2b^3.$$

Затем находим M_{κ} , θ и φ :

— участок 1—2 ($\varphi_1 = 0$):

$$m(x) = \frac{m}{2a} x, \quad M_{12} = M_1 - \int_0^x m(x) dx = M_1 - \frac{m}{4a} x^2,$$

$$\theta_{12} = \frac{M_{12}}{GJ_{\kappa}} = \frac{2,18}{Gb^4} \left(M_1 - \frac{m}{4a} x^2 \right),$$

$$\varphi_{12} = \int_0^x \theta_{12} dx = \frac{2,18}{Gb^4} \left(M_1 x - \frac{m}{12a} x^3 \right),$$

$$\varphi_2 = \varphi_{12}(2a) = \frac{4,36a}{Gb^4} \left(M_1 - \frac{1}{3} ma \right);$$

— участок 2—3:

$$M_{23} = M_1 - ma, \quad \theta_{23} = \frac{M_{23}}{GJ_{\kappa}} = \frac{7,78}{b^4} (M_1 - ma),$$

$$\varphi_{23} = \varphi_2 + \int_0^x \theta_{23} dx = \frac{1}{Gb^4} [M_1 (4,36a + 7,78x) - ma (1,45a + 7,78x)],$$

$$\varphi_3 = \varphi_{23}(2a) = \frac{a}{Gb^4} (19,9M_1 - 17,0ma);$$

— участок 3—4:

$$M_{34} = M_1 - ma + 2ma = M_1 + ma, \quad \theta_{34} = \frac{M_{34}}{GJ_{\kappa}} = \frac{10}{b^4} (M_1 + ma),$$

$$\varphi_{34} = \varphi_3 + \int_0^x \theta_{34} dx = \frac{1}{Gb^4} [M_1(19,9a + 10x) - ma(17,0a - 10x)],$$

$$\varphi_4 = \varphi_{34}(a) = \frac{a}{Gb^4} (29,9M_1 - 7,0ma).$$

Следовательно, уравнение совместности деформаций и его решение таковы:

$$\frac{a}{Gb^4} (29,9M_1 - 7,0ma) = 0, \quad M_1 = 0,234ma.$$

3. Учитывая найденное значение реакции, из полученных выше выражений определяем M_{κ} и φ , а с помощью соответствующего равенства в (4.7) — τ_{\max} . Поскольку характер изменения эпюр M_{κ} и φ ясен из упомянутых формул, то достаточно найти их значения только на концах участков:

— участок 1—2:

$$M_1 = 0,234ma, \quad M_2 = -0,766ma,$$

$$\tau_{\max 12} = \frac{M_{12}}{W_{\kappa}} = \frac{2,03m}{b^3} \left(0,234a - \frac{x^2}{4a} \right),$$

$$\tau_{\max 1} = \tau_{\max 12}(0) = 0,475 \frac{ma}{b^3}, \quad \tau_{\max 2} = \tau_{\max 12}(2a) = 1,55 \frac{ma}{b^3},$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = -0,432 \frac{ma^2}{b^4};$$

— участок 2—3:

$$M_{23} = -0,766ma, \quad \tau_{\max 23} = \frac{M_{23}}{W_{\kappa}} = -5,11 \frac{ma}{b^3}, \quad \varphi_3 = -12,3 \frac{ma^2}{Gb^4};$$

— участок 3—4:

$$M_{34} = 1,23ma, \quad \tau_{\max 34} = \frac{M_{34}}{W_{\kappa}} = 6,15 \frac{ma}{b^3}, \quad \varphi_4 = 0.$$

Здесь в силу непрерывности углов поворота их значения на последних двух участках даны только на концах. Отметим также, что аналогично задачам на растяжение-сжатие уравнение равновесия, построенное в начале решения, можно было и не составлять (см. пример 1.5). Однако его удобно использовать для проверки правильности найденных усилий.

Кроме того, необходимо определить точку экстремума углов поворота на участке 1—2:

$$\theta_{12} = \frac{2,18m}{Gb^4} \left(0,234a - \frac{x_*^2}{4a} \right) = 0, \quad x_* = 0,967a.$$

Так как при переходе через эту точку погонный угол закручивания (момент) меняет знак с плюса на минус, то имеет место максимум:

$$\varphi_{\text{extr}} = \varphi_{\max} = \varphi_{12}(x_*) = 0,329 \frac{ma^2}{Gb^4}.$$

Соответствующие эпюры представлены на рис. 4.15.

4—5. Определяя по эпюрам максимальные угол поворота и касательное напряжение, из (4.18) и (4.19) получаем:

$$|\varphi|_{\max} = 12,3 \frac{ma^2}{Gb^4} \leq [\varphi], \quad |\tau|_{\max} = 6,15 \frac{ma}{b^3} \leq [\tau],$$

что эквивалентно следующей системе неравенств:

$$b \geq \sqrt[4]{12,3 \frac{ma^2}{G[\varphi]}} = \sqrt[4]{\frac{12,3 \cdot 200 \cdot 1^2}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,04}} = 2,96 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$b \geq \sqrt[3]{6,15 \frac{ma}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{6,15 \cdot 200 \cdot 1}{200 \cdot 10^6}} = 1,83 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Окончательно принимаем $b = 3,0$ см. ■

Пример 4.6. Сплошной цилиндрический вал закрыт тонкостенным цилиндрическим незамкнутым кожухом (рис. 4.16). С одной стороны конструкция закреплена, а на другом конце вал и кожух соединены абсолютно жесткой шайбой. Система нагружена постоянным распределенным и сосредоточенным крутящими моментами. Определить диаметры вала и кожуха. В расчетах принять: материалы вала и кожуха одинаковы, $[\tau] = 100$ МПа; $a = 1,5$ м; $D = 3d$, $\delta/d = 0,1$; $m = 150$ Н; размер d округлить до 1 мм.

Решение. 1—2. Нумерация участков соответствует рис. 4.15. Заменяем опору на левом конце реактивными моментами $M_{1В}$ и $M_{1К}$, приложенными соответственно к валу и кожуху, и записываем уравнение равновесия в проекциях на ось Ox :

$$\sum M_x = 0: -M_{1В} - M_{1К} + ma - 2ma = 0.$$

Задача статически неопределимая. Уравнение совместности деформаций в этом случае заключается в равенстве углов закручивания вала и кожуха на правом конце:

$$\varphi_{зв} = \varphi_{зк}.$$

Находим геометрические характеристики сечений (см. табл. П.4):

— вал:

$$J_k = 0,1d^4; \quad W_k = 0,2d^3;$$

— кожух:

$$J_k = \frac{1}{3} \delta^3 l = \frac{1}{3} \delta^3 \cdot \pi D = 0,314 \cdot 10^{-2} d^4;$$

$$W_k = \frac{1}{3} \delta^2 l = \frac{1}{3} \delta^2 \cdot \pi D = 0,314 \cdot 10^{-2} d^3.$$

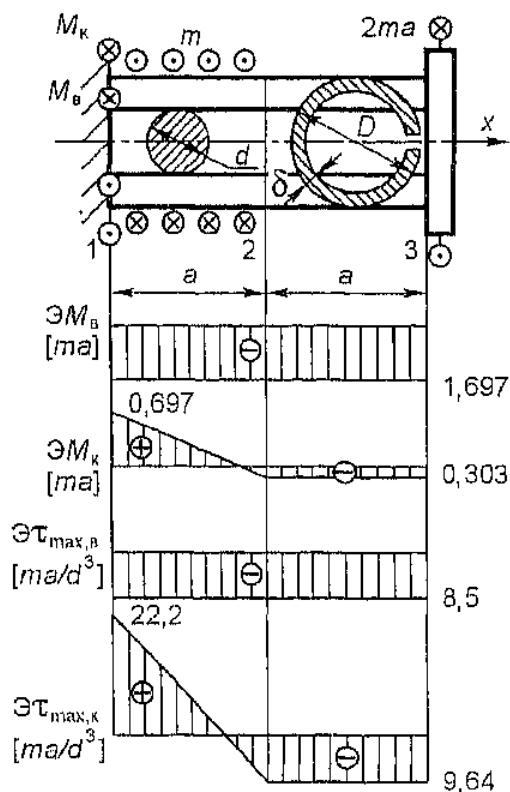


Рис. 4.16

Далее по участкам определяем M_x , θ и φ :

— участок 1—3 (вал, $\varphi_1 = 0$):

$$M_{13} = M_{1B}, \quad \theta_{13} = \frac{M_{13}}{GJ_k} = 10 \frac{M_{1B}}{Gd^4}, \quad \varphi_{13} = \int_0^x \theta_{13} dx = 10 \frac{M_{1B}}{Gd^4} x,$$

$$\varphi_3 = \varphi_{13}(2a) = 20 \frac{M_{1B} a}{Gd^4};$$

— участок 1—2' (кожух, $\varphi_1 = 0$):

$$M_{12} = M_{1K} - mx, \quad \theta_{12} = \frac{M_{12}}{GJ_k} = \frac{318}{Gd^4} (M_{1K} - mx),$$

$$\varphi_{12} = \int_0^x \theta_{12} dx = \frac{318}{Gd^4} \left(M_{1K}x - \frac{1}{2} mx^2 \right),$$

$$\varphi_2 = \varphi_{12}(a) = \frac{318a}{Gd^4} \left(M_{1K} - \frac{ma}{2} \right);$$

— участок 2—3 (кожух):

$$M_{23} = M_{1K} - ma, \quad \theta_{23} = \frac{M_{23}}{GJ_k} = \frac{318}{Gd^4} (M_{1K} - ma),$$

$$\varphi_{23} = \varphi_2 + \int_0^x \theta_{23} dx = \frac{318}{Gd^4} \left[M_{1K}(a+x) - ma \left(\frac{a}{2} + x \right) \right],$$

$$\varphi_3 = \varphi_{23}(a) = \frac{318a}{Gd^4} \left(2M_{1K} - \frac{3}{2} ma \right).$$

Следовательно, уравнение совместности приобретает вид

$$20 \frac{M_{1B} a}{Gd^4} = \frac{318a}{Gd^4} \left(2M_{1K} - \frac{3}{2} ma \right).$$

Объединяя его с уравнением равновесия, приходим к системе линейных алгебраических уравнений:

$$M_{1B} + M_{1K} = -ma,$$

$$20M_{1B} - 636M_{1K} = -477ma,$$

которая имеет следующее решение:

$$M_{1B} = -1,70ma, \quad M_{1K} = 0,697ma.$$

Используя полученные выше результаты и формулу для касательных напряжений из (4.7), получаем:

— участок 1—3 (вал):

$$M_{13} = -1,70ma, \quad \tau_{\max 13} = \frac{|M_{13}|}{W_K} = 8,50 \frac{ma}{d^3};$$

— участок 1—2 (кожух):

$$M_1 = M_{12}(0) = 0,697ma, \quad M_2 = M_{12}(a) = -0,303ma,$$

$$\tau_{\max 12} = \frac{|M_{12}|}{W_K} = 31,8 \frac{m}{d^3} |0,697a - x|,$$

$$\tau_{\max 1} = \tau_{\max 12}(0) = 22,2 \frac{ma}{d^3}, \quad \tau_{\max 2} = \tau_{\max 12}(a) = 9,64 \frac{ma}{d^3};$$

— участок 2—3 (кожух):

$$M_{23} = -0,303ma, \quad \tau_{\max 23} = \frac{|M_{23}|}{W_K} = 9,64 \frac{ma}{d^3}.$$

Эпюры крутящих моментов M_B , M_K и максимальных касательных напряжений $\tau_{\max B}$, $\tau_{\max K}$ для вала и кожуха соответственно приведены на рис. 4.16.

4—5. Определяя по эпюрам максимальное касательное напряжение, из (П.27) получаем

$$|\tau_{\max}|_{\max} = 22,2 \frac{ma}{d^3} \leq [\tau],$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$d \geq \sqrt[3]{22,2 \frac{ma}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{22,2 \cdot 150 \cdot 1,5}{100 \cdot 10^6}} = 3,68 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Окончательно принимаем $d = 3,7$ см. ■

Задачи

4.24. Стальной стержень квадратного сечения и длиной a закреплен с двух сторон. В середине стержня приложен сосредоточенный крутящий момент M . Определить размеры сечения и максимальный угол закручивания. В расчетах принять: $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $a = 3 \text{ м}$; $[\tau] = 12 \text{ МПа}$.

4.25. Стержень круглого поперечного сечения диаметра $d = 60 \text{ мм}$, жестко закрепленный на обоих концах, скручивается моментом M , приложенным посередине стержня. Определить допускаемое значение момента M , если $[\tau] = 60 \text{ МПа}$. Как изменится допускаемое значение момента, если внешний момент будет приложен в сечении, отстоящем от одного из торцов стержня на $1/3$ его длины?

4.26. Стержень круглого поперечного сечения диаметра d , жестко закрепленный обоими концами, нагружен двумя одинаково направленными крутящими моментами M . Последние приложены в сечениях, отстоящих от левой и правой опор стержня на $1/3$ его длины. Вычислить максимальные касательные напряжения. В расчетах принять: $M = 850 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $d = 45 \text{ мм}$.

4.27. Медная трубка с наружным диаметром d вставлена в стальную трубку с таким же внутренним диаметром. Концы трубок жестко скреплены между собой, и к ним приложены крутящие моменты $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Определить максимальные касательные напряжения в трубках и максимальный угол закручивания. В расчетах принять: $d = 75 \text{ мм}$; длина трубок 3 м ; толщина стенок 3 мм ; модули сдвига для меди и стали $G_m = 4 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $G_{ст} = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Указание: взаимодействием трубок по боковым поверхностям пренебречь.

4.28. Составной стержень, закрепленный с двух сторон, нагружен сосредоточенными крутящими моментами (рис. 4.17). Определить допускаемое значение M и максимальный угол закручивания φ . В расчетах принять: $a = 1,5 \text{ м}$; $b = 40 \text{ мм}$;

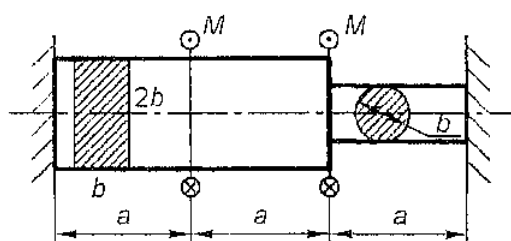


Рис. 4.17

$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $[\tau] = 110 \text{ МПа}$.

4.29. Составной цилиндрический вал и труба прикреплены жестко к концевым дискам (рис. 4.18). Определить максимальные значения τ_{\max} и угла закручивания. В расчетах при-

нять: $a = 1$ м; $d = 0,1$ м; $D = 3/2d$; $M = 500$ Н · м; $\delta = d/8$; материал конструкции — сталь; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

4.30. Стальной цилиндрический вал диаметром $d = 0,04$ м закреплен с двух сторон и нагружен системой распределенных крутящих моментов (рис. 4.19). Определить интенсивность крутящего момента m , если допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 105$ МПа, $a = 1$ м.

4.31. Дюралевый вал круглого переменного сечения нагружен распределенным крутящим моментом $m = 145$ Н и закреплен с двух сторон (рис. 4.20). Определить угол закручивания сечения А—А. В расчетах принять: $a = 0,75$ м; $d = 0,1$ м; $G = 2,7 \cdot 10^4$ МПа.

4.32. Составной стальной вал нагружен распределенным крутящим моментом $m = 245$ Н и закреплен по торцам (рис. 4.21). Определить размеры вала. В расчетах принять: $[\tau] = 95$ МПа; $a = 1,5$ м; $D = 1,4d$.

4.33. Стержень с сечением в виде уголка и длиной $a = 2$ м нагружен равномерно распределенным крутящим моментом интенсивностью $m = 0,22$ кН (рис. 4.22) и

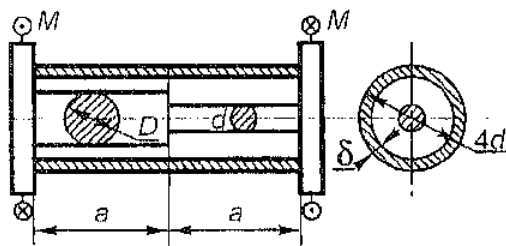


Рис. 4.18

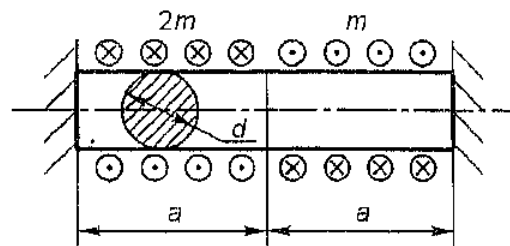


Рис. 4.19

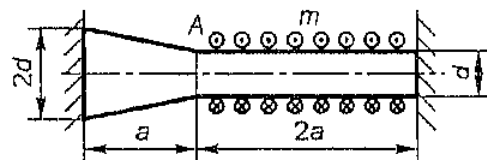


Рис. 4.20

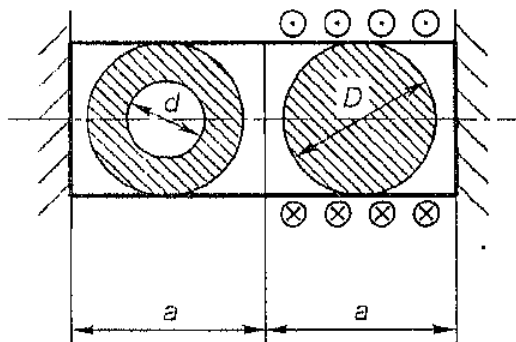


Рис. 4.21

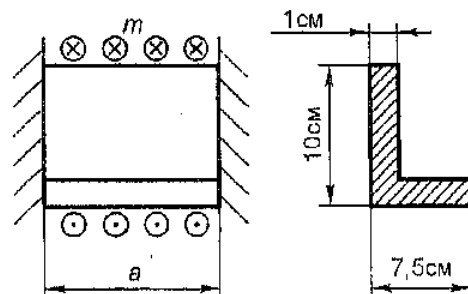


Рис. 4.22

жестко закреплен по торцам. Определить максимальные касательные напряжения в опасном сечении.

4.34. К валу постоянного сечения, закрепленному с двух сторон, приложены два сосредоточенных момента M_1 и M_2 (рис. 4.23). При каком соотношении между ними реактивные моменты в заделках будут одинаковы?

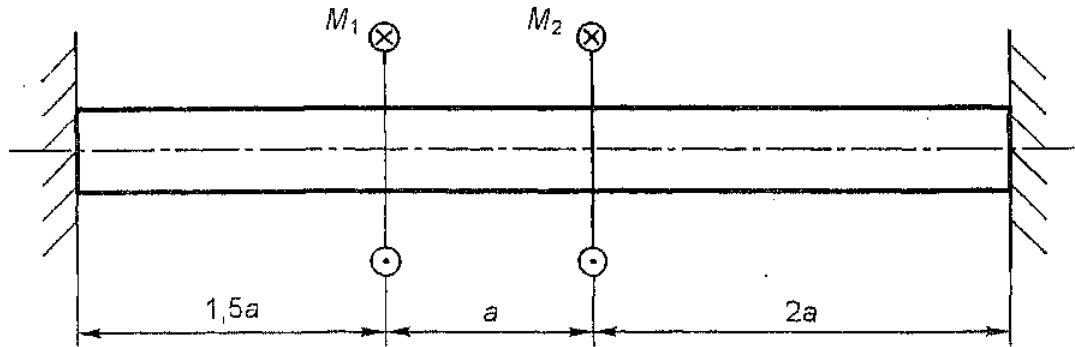


Рис. 4.23

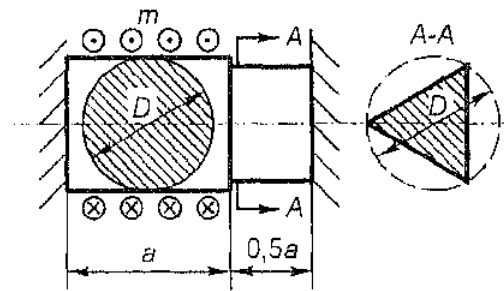


Рис. 4.24

4.35. Для ступенчатого вала, закрепленного с двух сторон (рис. 4.24), определить интенсивность m допускаемого распределенного крутящего момента. В расчетах принять: материал — сталь; $[\tau] = 100$ МПа; $a = 1$ м; $D = 0,1$ м.

4.36. Вычислить касательное напряжение в стенке тонкостенной замкнутой трубы с сечением в форме полуэллипса (рис. 4.25). В расчетах принять: $M_k = 7$ кН·м;

$$\delta_1 = 1,5 \text{ мм}; \delta_2 = 2 \text{ мм};$$

$$a = 0,3 \text{ м}; b = 0,1 \text{ м}.$$

Указание. Для эллипса с полуосями a и b : площадь области, ограниченной им, $F = \pi ab$, длина кривой

$$l = \pi [1,5(a + b) - \sqrt{ab}].$$

4.37. Для ступенчатого

вала, закрепленного с двух концов (рис. 4.26) определить размеры поперечных сечений и максимальный угол закручивания. В

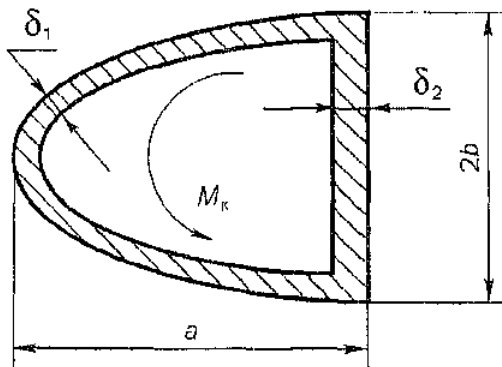


Рис. 4.25

расчетах принять: $a = 300$ мм;
 $M = 100$ МН · м; $[\tau] = 90$ МПа;
 $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа.

4.38. Определить интенсивность m допускаемого распределенного крутящего момента для вала переменного сечения (рис. 4.27). В расчетах принять: $a = 300$ мм; $[\tau] = 80$ МПа; $d = 60$ мм.

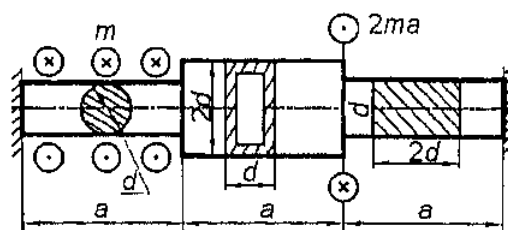


Рис. 4.26

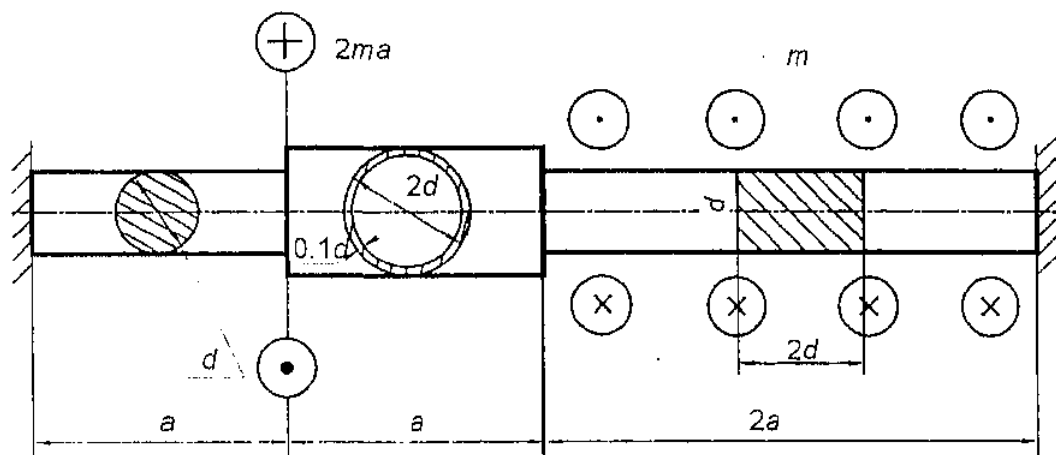


Рис. 4.27

4.39. Одна половина жестко заделанного обоими концами вала имеет квадратное, а другая — круглое поперечное сечение (рис. 4.28). На расстоянии x_0 от левой опоры к валу приложен крутящий момент M . Определить величину x_0 из условия, что реактивные моменты, возникающие в заделках, одинаковы.

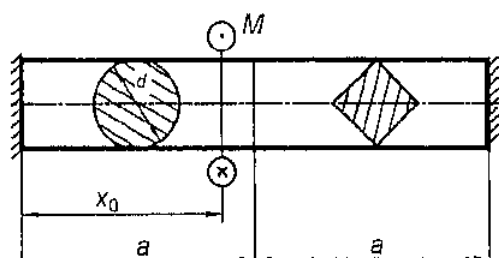


Рис. 4.28

4.40. Ступенчатый вал вставлен в тонкостенный кожух (рис. 4.29). На одном конце они скреплены абсолютно жестким диском, а на другом — заделаны. На кожух и диск действуют крутящие моменты. Определить запас прочности системы. В расчетах принять: $a = 500$ мм; $b = 50$ мм; $m = 1$ кН; вал и кожух изготовлены из одного материала: $\sigma_{\tau} = 210$ МПа.

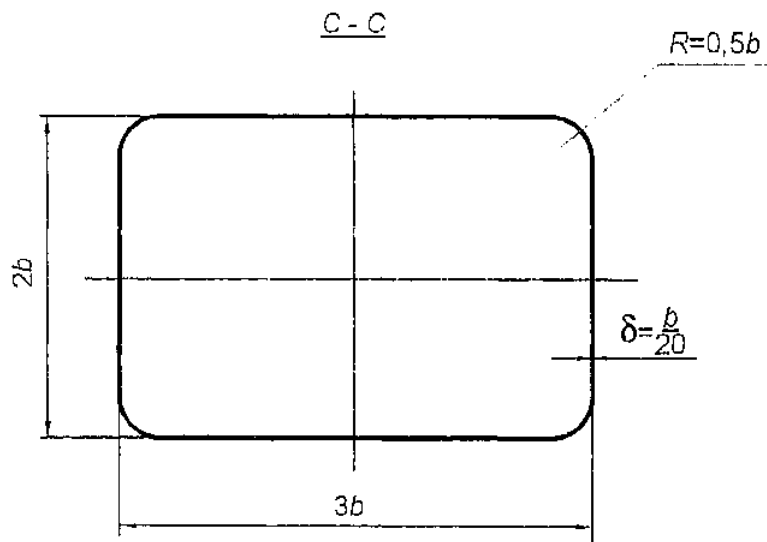
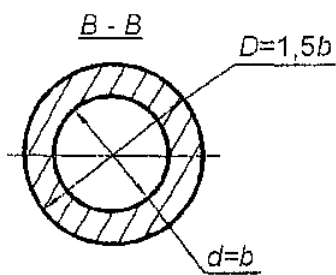
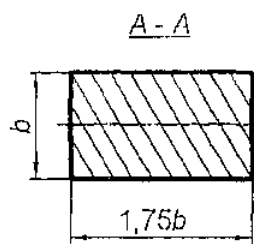
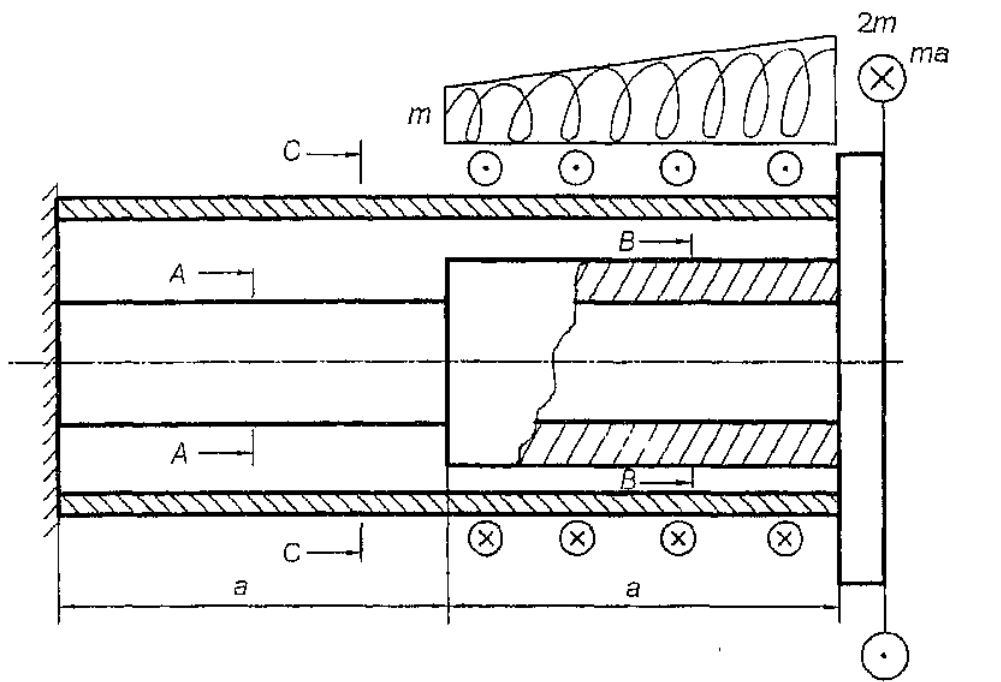


Рис. 4.29

Глава 5 ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Основной объект здесь, так же как и ранее, — прямой стержень (стержень) с той же стандартной ПДСК $Oxuz$.

Определение 5.1. *Изгибом* стержня называется такой вид его деформации, при котором ось изменяет свою кривизну. Деформированная ось стержня называется *упругой линией*. При изгибе стержень также называют *балкой*. ■

В этой главе ограничимся следующим НДС балок, который является частным случаем изгиба (см. § 5.2).

Определение 5.2. *Поперечным изгибом* балки называется такой вид ее деформации, при котором напряжения $\sigma = \sigma_x$, τ_{xy} и τ_{xz} в любом ее поперечном сечении распределены так, что векторы внутренних силовых факторов лежат в плоскости поперечного сечения:

$$R = Q_y j + Q_z k, \quad M = M_y j + M_z k, \quad N = 0, \quad M_k = 0, \quad (5.1)$$

т.е. ненулевыми являются только перерезывающие силы и изгибающие моменты.

Поперечный изгиб называется *чистым изгибом*, если равны нулю перерезывающие силы. ■

С использованием метода сечений и уравнений равновесия доказывается справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5.1. (*Условия поперечного изгиба.*) Для того чтобы балка при силовом нагружении находилась в состоянии поперечного изгиба, необходимо и достаточно, чтобы векторы внешних сосредоточенных и распределенных сил и моментов были коллинеарны плоскости ее поперечного сечения:

$$P_k = P_{ky} j + P_{kz} k, \quad q = q_y j + q_z k, \quad (5.2)$$

$$M_l = M_{ly} j + M_{lz} k, \quad m = m_y j + m_z k.$$

Причем $Q_y \neq 0$ ($Q_z \neq 0$) только в том случае, когда $P_{ky} \neq 0$ или $q_y \neq 0$ ($P_{kz} \neq 0$ или $q_z \neq 0$), а $M_y \neq 0$ ($M_z \neq 0$) только тогда, когда $M_{ly} \neq 0$ или $m_y \neq 0$ ($M_{lz} \neq 0$ или $m_z \neq 0$). А чистый изгиб имеет место только при $P_k = 0$ и $q = 0$. ■

Способ учета температурных полей при изгибе указан в § 5.2.

Определение 5.3. Если при поперечном изгибе существует такая проходящая через недеформированную ось бруса плоскость Π , что $R, q \parallel \Pi$, а $M, m \perp \Pi$, то эта плоскость называется *силовой плоскостью*.

При наличии силовой плоскости поперечный изгиб называется *прямым изгибом*, если упругая линия лежит в этой плоскости. ■

В этой главе ограничимся прямым изгибом статически определимых балок. Будем полагать, что силовые плоскости совпадают с координатными плоскостями Oxy и Oxz . Заметим, что в силу принципа суперпозиции (утверждение П.2) достаточно рассматривать только один из этих вариантов. А именно, будем считать, что силовая плоскость — Oxy (для плоскости Oxz все результаты такие же с точностью до обозначений). При этом прямой изгиб будем называть просто изгибом.

§ 5.1. Эпюры внутренних силовых факторов

Алгоритм расчета СО-балок на изгиб в части пп. 1, 2, За аналогичен соответствующим алгоритмам, приведенным в § 1.1, 4.1.

1. Разбиваем балку на участки.

2. Из уравнения равновесия определяем реакции опор. Для указанного варианта изгиба нетривиальными являются только два уравнения равновесия: равенство нулю проекций внешних сил на ось Oy и моментов на ось Oz . Поэтому для СО-балок опоры должны накладывать только две связи, что эквивалентно наличию двух неизвестных реакций в опорах. Однако есть задачи, в которых балка имеет так называемый “врезанный шарнир”, который добавляет еще одно уравнение — результирующий момент внешних сил и моментов, приложенных к левой или правой по отношению к шарниру частям балки, равен нулю. Основные варианты СО-балок приведены на рис. 5.1: *a* — консольная балка, *б* — двухопорная балка, *в* — балка с врезанным шарниром *C*. Здесь же указаны реакции опор.

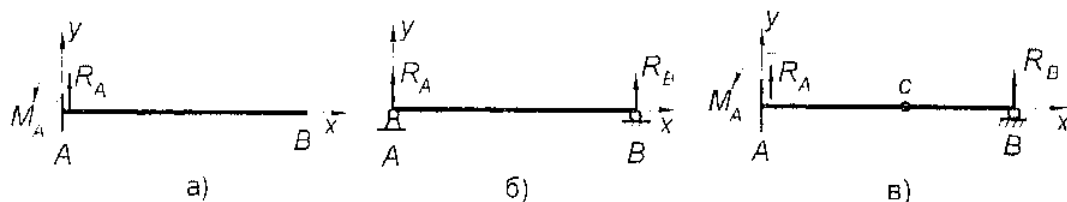


Рис. 5.1

Уравнение моментов, как правило, составляется относительно одной из опор с тем, чтобы система уравнений была проще. Более того, часто вместо уравнения сил с той же целью лучше строить еще одно уравнение моментов, но относительно другой опоры.

При составлении уравнений равновесия равнодействующие внешних сил и моментов находятся по формулам (П.11). Для распределенной нагрузки во многих случаях может быть использован следующий геометрический подход, основанный на свойствах определенных интегралов:

— равнодействующая погонной силы или момента есть площадь соответствующей эпюры;

— момент, создаваемый погонной силой, равен моменту от равнодействующей силы, приложенной в центре тяжести эпюры.

При использовании этого метода необходимо иметь набор геометрических характеристики элементарных эпюр (криволинейных трапеций). В табл. 5.1 они приведены для парабол порядка n (рис. 5.2).

Таблица 5.1

| n | Название | S | $x_{цт.}$ | c |
|----------------------|----------------------|-------------------|--------------------|------------------|
| 0 | Прямоугольник | lh | $\frac{1}{2}l$ | $\frac{1}{2}l$ |
| 1 | Треугольник | $\frac{1}{2}lh$ | $\frac{2}{3}l$ | $\frac{1}{3}l$ |
| 2 | Квадратная парабола | $\frac{1}{3}lh$ | $\frac{3}{4}l$ | $\frac{1}{4}l$ |
| 3 | Кубическая парабола | $\frac{1}{4}lh$ | $\frac{4}{5}l$ | $\frac{1}{5}l$ |
| $n = 0, 1, 2, \dots$ | Парабола порядка n | $\frac{1}{n+1}lh$ | $\frac{n+1}{n+2}l$ | $\frac{1}{n+2}l$ |

3. Последовательно на каждом из участков строим эпюры ("Q") перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_z с помощью метода сечений и уравнений равновесия. ■

Для того чтобы знаки эпюр не были привязаны к системе координат, используется следующее соглашение, которое полностью соответствует знакам Q_y , Q_z , M_z и M_y , выбранным в (П.22) и (П.24).

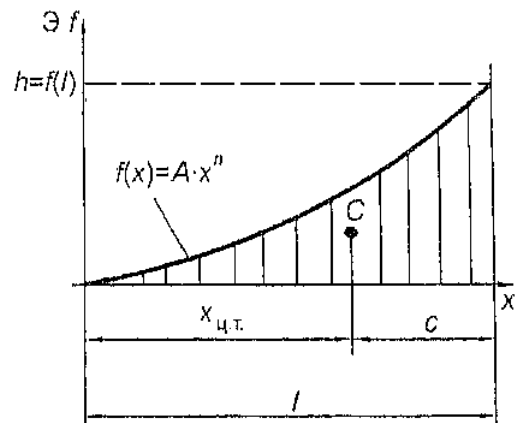


Рис. 5.2

Правило знаков для $\mathcal{E}Q_y$ и $\mathcal{E}M_z$. Рассмотрим часть бруса G_x , содержащую данное сечение (на рис. 5.3 и 5.4 оно отмечено координатой x). В соответствии с третьим законом Ньютона внутренние силовые факторы на торцах части G_x противоположно направлены.

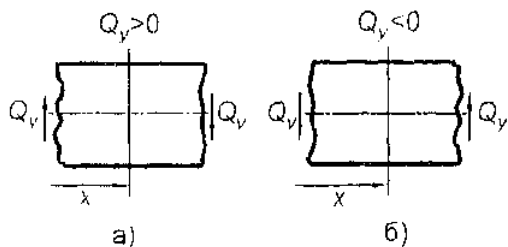


Рис. 5.3

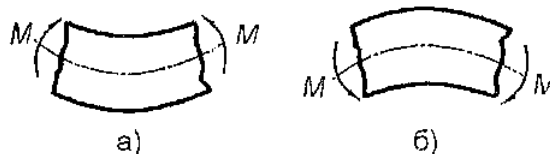


Рис. 5.4

Если пара Q_y ориентирована по ходу (против хода) часовой стрелки, то $Q_y > 0$ ($Q_y < 0$) [рис. 5.3, а (рис. 5.3, б)]. Если в данном сечении упругая линия вогнута (выпукла), то $M_z > 0$ ($M_z < 0$) [рис. 5.4, а (рис. 5.4, б)].

Иначе говоря, для левой части балки $\mathcal{E}Q_y$ направлена в сторону равнодействующей внешней нагрузки, а для правой — в обратную сторону. $\mathcal{E}M_z$ “строится на сжатых волокнах”. Смысл этого термина раскрыт в § 5.2. ■

Перерезывающие силы Q_y , изгибающие моменты M_z и внешние нагрузки связаны между собой следующими дифференциальными зависимостями:

$$Q'_y(x) = q(x), \quad M'_z(x) = Q_y(x) - t(x), \quad q = q_y, \quad t = t_z, \quad (5.3)$$

из которых следует дифференциальное уравнение равновесия стержня при изгибе:

$$M''_z(x) = q(x) - t'(x). \quad (5.4)$$

Заметим, что при использовании уравнения (5.4) распределенный момент всегда можно включить в погонную нагрузку: $\tilde{q}(x) = q(x) - t'(x)$.

При построении эпюр аналогично § 1.1 удобно пользоваться следующими выводами, вытекающими из соотношений (5.3), (5.4) и свойств производных:

— если q — многочлен, то $\mathcal{E}Q_y$ и $\mathcal{E}M_z$ — тоже многочлены, степень которых на единицу и двойку выше (например, посто-

янная погонная нагрузка дает линейную зависимость для перерезывающей силы и параболическую кривую для момента и т.д.;

— по знаку q (∂Q_y) можно судить о возрастании или убывании ∂Q_y (∂M_z);

— необходимым условием экстремума ∂Q_y (∂M_z) является равенство $q = 0$ ($Q_y = 0$), а достаточным — изменение знака q (∂Q_y);

— ∂M_z направлена выпуклостью навстречу направлению (потоку) q ;

— ∂Q_y в точках приложения сосредоточенных сил имеет скачки (разрывы первого рода), равные по абсолютной величине этим силам, а ∂M_z — излом (разрыв производной);

— ∂M_z в точках приложения сосредоточенных моментов имеет скачки, равные по абсолютной величине этим моментам.

Пример 5.1. Для консольной балки, представленной на рис. 5.5, построить эпюры Q_y и M_z .

Решение. 1. Разбиение балки на участки показано на рис. 5.5.

2—3. При построении эпюр для балок с защемленным концом опорные реакции можно не определять, если начинать вычисление внутренних усилий со свободного конца, что и делается в этом примере.

Перерезывающие силы и изгибающие моменты находим с учетом правила знаков по участкам из уравнений равновесия аналогично § 1.1, 4.1 (равнодействующие погонных нагрузок вычисляются геометрическим методом, указанным в алгоритме):

— участок 0—1:

$$Q_{y01} = -qa - qx = -q(a + x), \quad Q_{y0} = Q_{y01}(0) = -qa,$$

$$Q_{y1} = Q_{y01}(a) = -2qa, \quad M_{z01} = -qax - qx \frac{x}{2} = -qx \left(a + \frac{x}{2} \right),$$

$$M_{z0} = M_{z01}(0) = 0, \quad M_{z1} = M_{z01}(a) = -\frac{3}{2} qa^2;$$

— участок 1—2:

$$Q_{y12} = -qa - qa = -2qa,$$

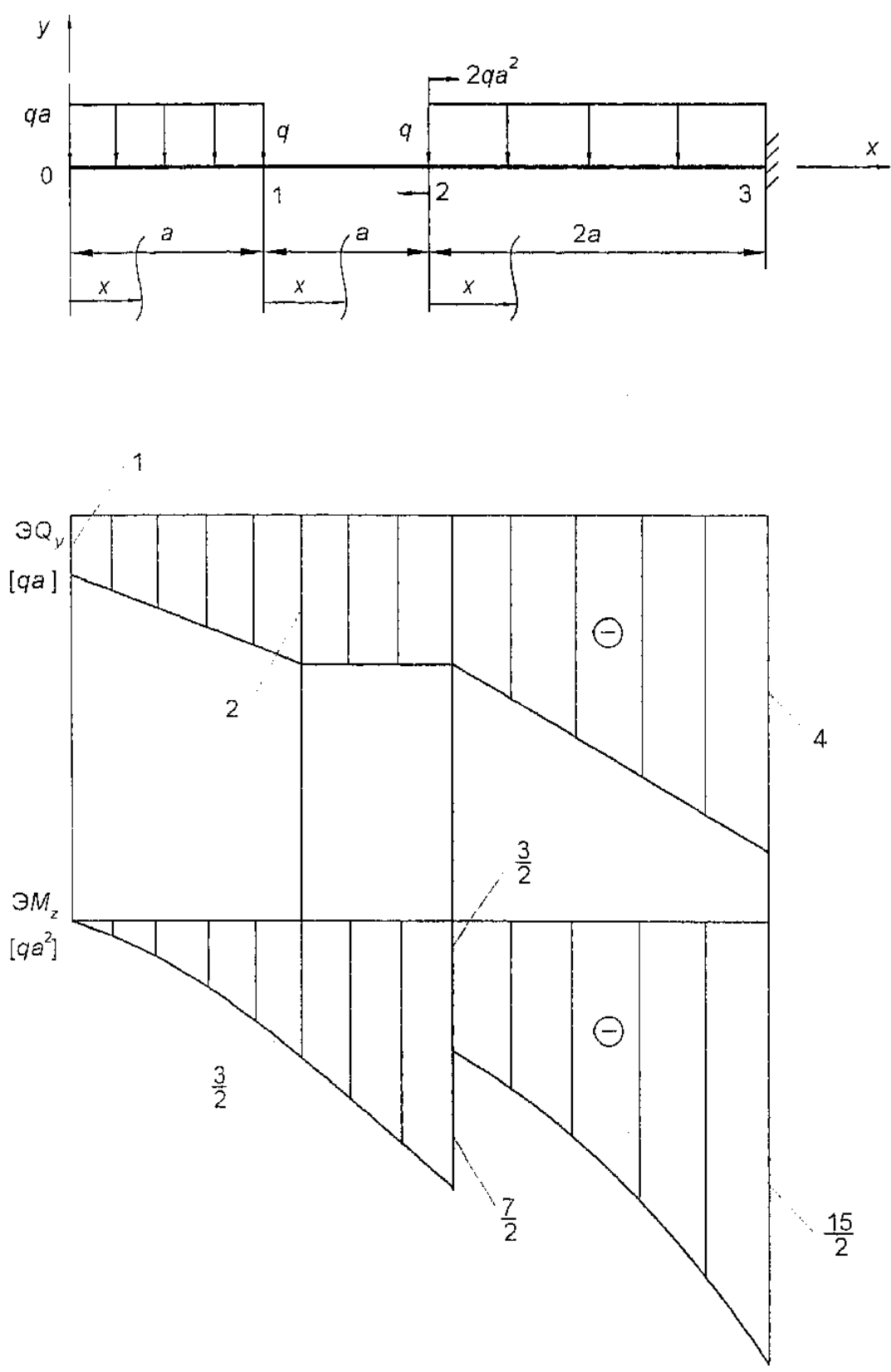


Рис. 5.5

$$M_{z12} = -qa(a+x) - qa\left(\frac{a}{2} + x\right) = -qa\left(\frac{3}{2}a + 2x\right),$$

$$M_{z1} = M_{z12}(0) = -\frac{3}{2}qa^2, \quad M_{z2} = M_{z12}(a) = -\frac{7}{2}qa^2;$$

— участок 2—3:

$$Q_{y23} = -qa - qa - qx = -q(2a + x), \quad Q_{y2} = Q_{y23}(0) = -2qa,$$

$$Q_{y3} = Q_{y23}(2a) = -4qa, \quad M_{z23} = -qa(2a + x) -$$

$$-qa\left(\frac{a}{2} + a + x\right) + 2qa^2 - qx\frac{x}{2} = -q\left(\frac{3}{2}a^2 + 2ax + \frac{1}{2}x^2\right),$$

$$M_{z2} = M_{z23}(0) = -\frac{3}{2}qa^2, \quad M_{z3} = M_{z23}(2a) = -\frac{15}{2}qa^2.$$

Соответствующие эпюры приведены на рис. 5.5. Величина и направление скачков на ∂Q_y строго соответствуют сосредоточенным силам, а на ∂M_z — сосредоточенным моментам. Поскольку везде $Q_y \neq 0$, то экстремумы в ∂M_z отсутствуют.

Пример 5.2. Для двухопорной балки (рис. 5.6) построить ∂Q_y и ∂M_z .

Решение. 1. Разбиение балки на участки показано на рис. 5.6.

2. Отбрасываем опоры, заменяем их реакциями R_1 и R_4 (см. рис. 5.1) и составляем уравнения равновесия (относительно их выбора см. п. 2 алгоритма):

$$\sum M_1 = 0: \quad qa\frac{a}{2} - qa \cdot a - q \cdot 2a \cdot 4a + R_4 \cdot 4a = 0,$$

$$\sum M_4 = 0: \quad qa\left(4a + \frac{a}{2}\right) - R_1 \cdot 4a + qa \cdot 3a = 0.$$

Отсюда находим

$$R_4 = \frac{17}{8}qa, \quad R_1 = \frac{15}{8}qa.$$

3. С учетом найденных реакций по участкам определяем Q_y и M_z :

— участок 0—1:

$$Q_{y01} = -qx, \quad Q_{y0} = Q_{y01}(0) = 0, \quad Q_{y1} = Q_{y01}(a) = -qa,$$

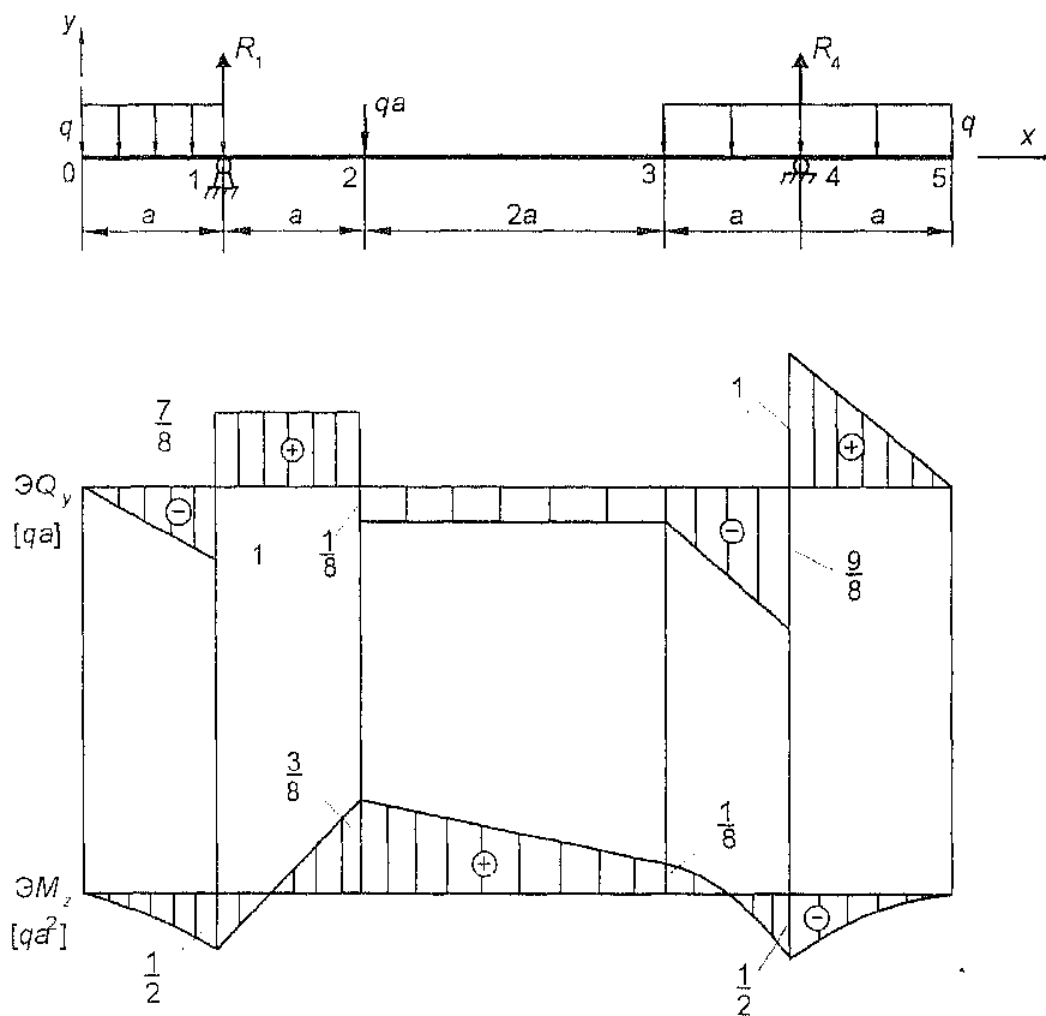


Рис. 5.6

$$M_{z01} = -qx \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} qx^2, \quad M_{z0} = M_{z01}(0) = 0,$$

$$M_{z1} = M_{z01}(a) = -\frac{1}{2} qa^2;$$

— участок 1—2:

$$Q_{y12} = -qa + \frac{15}{8} qa = \frac{7}{8} qa,$$

$$M_{z12} = -qa \left(\frac{a}{2} + x \right) + \frac{15}{8} qa \cdot x = \frac{qa}{2} \left(-a + \frac{7}{4} x \right),$$

$$M_{z1} = M_{z12}(0) = -\frac{1}{2} qa^2, \quad M_{z12} = M_{z12}(a) = \frac{3}{8} qa^2;$$

— участок 2—3:

$$Q_{y23} = -qa + \frac{15}{8}qa - qa = -\frac{1}{8}qa, \quad M_{z23} = -qa \left(\frac{a}{2} + a + x \right) + \\ + \frac{15}{8}qa(a+x) - qa \cdot x = \frac{qa}{8}(3a-x), \quad M_{z2} = M_{z23}(0) = \frac{3}{8}qa^2,$$

$$M_{z3} = M_{z23}(2a) = \frac{1}{8}qa^2;$$

— участок 3—4:

$$Q_{y34} = -qa + \frac{15}{8}qa - qa - qx = -q \left(\frac{1}{8}a + x \right),$$

$$Q_{y3} = Q_{y34}(0) = -\frac{1}{8}qa, \quad Q_{y4} = Q_{y34}(a) = -\frac{9}{8}qa,$$

$$M_{z34} = -qa \left(\frac{a}{2} + 3a + x \right) + \frac{15}{8}qa(3a+x) - qa(2a+x) - qx \frac{x}{2} = \\ = \frac{qa^2}{2} \left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ax - x^2 \right), \quad M_{z3} = M_{z34}(0) = \frac{1}{8}a^2,$$

$$M_{z4} = M_{z34}(a) = -\frac{1}{2}a^2;$$

— участок 4—5:

$$Q_{y45} = -qa + \frac{15}{8}qa - qa - q(a+x) + \frac{17}{8}qa = q(a-x),$$

$$Q_{y4} = Q_{y45}(0) = qa, \quad Q_{y5} = Q_{y45}(a) = 0, \quad M_{z45} = -qa \left(\frac{a}{2} + 4a + x \right) +$$

$$+ \frac{15}{8}qa(4a+x) - qa(3a+x) - qa \left(\frac{a}{2} + x \right) + \frac{17}{8}qa \cdot x - qx \frac{x}{2} =$$

$$= -\frac{qa}{2}(a-x)^2, \quad M_{z4} = M_{z45}(0) = -\frac{1}{2}qa^2, \quad M_{z5} = M_{z45}(a) = 0.$$

При вычислении моментов на последнем участке погонная сила, действующая на участке 3—5, разделена на две нагрузки, соответствующие участкам 3—4 и 4—5. Вычисление Q_y и M_z на левом и правом концах балки можно было бы и не проводить, так как их значения известны (см. (5.17) и (5.24)). Также можно было бы не находить значения внутренних силовых факторов на левых концах участков, начиная со второго, если там

отсутствуют соответствующие сосредоточенные нагрузки. Однако эти операции удобно использовать для проверки.

Соответствующие эпюры приведены на рис. 5.6. Поскольку везде $Q_y \neq 0$, то экстремумы в $\mathcal{E}M_z$ отсутствуют. ■

Пример 5.3. Для трехопорной балки с врезанным шарниром (рис. 5.7) построить $\mathcal{E}Q_y$ и $\mathcal{E}M_z$.

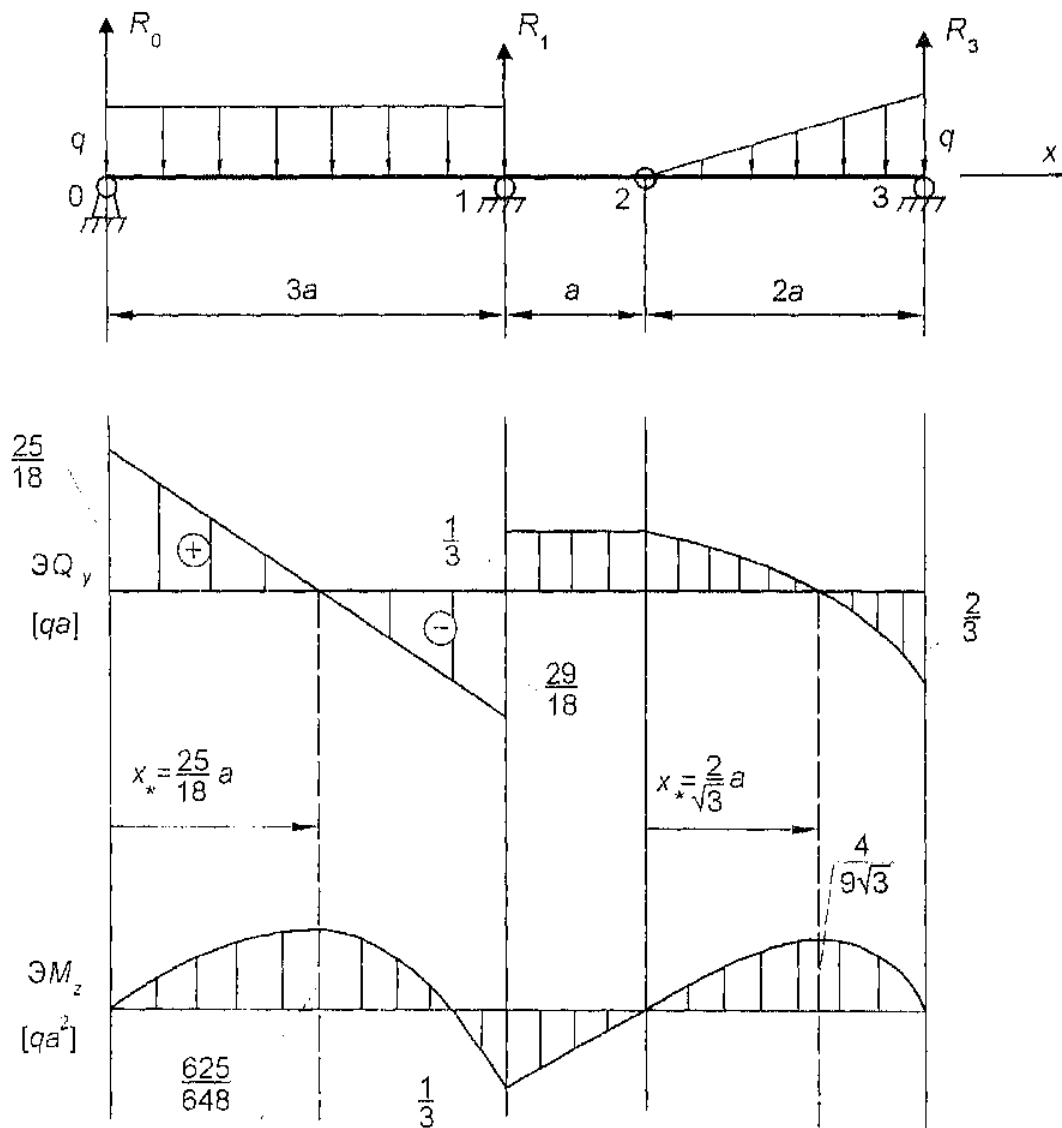


Рис. 5.7

- Решение. 1. Разбиение балки на участки показано на рис. 5.7.
 2. Отбрасываем опоры, заменяем их реакциями R_0 , R_1 и R_3 (см. рис. 5.1) и составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_0 = 0: -3qa \frac{3}{2} a + R_1 \cdot 3a - \frac{1}{2} q \cdot 2a \left(4a + \frac{2}{3} \cdot 2a\right) + R_3 \cdot 6a = 0,$$

$$\sum M_1 = 0: -R_0 \cdot 3a + 3qa \frac{3}{2} a - \frac{1}{2} q \cdot 2a \left(a + \frac{2}{3} \cdot 2a\right) + R_3 \cdot 3a = 0.$$

Дополнительное уравнение получаем, составляя уравнение моментов для правой части балки относительно врезанного шарнира (см. п. 2 алгоритма):

$$\sum M_2^{\text{пр}} = 0: -qa \frac{2}{3} \cdot 2a + R_3 \cdot 2a = 0.$$

Объединяя все три уравнения, приходим к системе уравнений

$$3R_0 - 3R_3 = \frac{13}{6} qa, \quad 3R_1 + 6R_3 = \frac{59}{6} qa, \quad 2R_3 = \frac{4}{3} qa,$$

решение которой находим, начиная с последнего уравнения:

$$R_3 = \frac{2}{3} qa, \quad R_1 = \frac{35}{18} qa, \quad R_0 = \frac{25}{18} qa.$$

3. С учетом найденных реакций по участкам определяем Q_y и M_z :

— участок 0—1:

$$Q_{y01} = \frac{25}{18} qa - qx = q \left(\frac{25}{18} a - x \right), \quad Q_{y0} = Q_{y01}(0) = \frac{25}{18} qa,$$

$$Q_{y1} = Q_{y01}(3a) = -\frac{29}{18} qa,$$

$$M_{z01} = \frac{25}{18} qa \cdot x - qx \frac{x}{2} = -\frac{qx}{2} \left(\frac{25}{9} a - x \right),$$

$$M_{z0} = M_{z01}(0) = 0, \quad M_{z1} = M_{z01}(3a) = -\frac{1}{3} qa^2;$$

— участок 1—2:

$$Q_{y12} = \frac{25}{18} qa - q \cdot 3a + \frac{35}{18} qa = \frac{1}{3} qa,$$

$$M_{z12} = \frac{25}{18} qa (3a + x) - 3qa \left(\frac{3}{2} a + x \right) + \frac{35}{18} qa \cdot x = \frac{qa}{3} (-a + x),$$

$$M_{z1} = M_{z12}(0) = -\frac{1}{3} qa^2, \quad M_{z2} = M_{z12}(a) = 0;$$

— участок 2—3:

$$Q_{y23} = \frac{25}{18} qa - q \cdot 3a + \frac{35}{18} qa - \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2a} x \cdot x = q \left(\frac{1}{3} a - \frac{x^2}{4a} \right),$$

$$Q_{y2} = Q_{y23}(0) = \frac{1}{3} qa, \quad Q_{y3} = Q_{y23}(2a) = -\frac{2}{3} qa,$$

$$M_{z23} = \frac{25}{18} qa (4a + x) - 3qa \left(\frac{3a}{2} + a + x \right) + \frac{35}{18} qa (a + x) - \\ - \frac{1}{2} \frac{q}{2a} x \cdot x \frac{1}{3} x = \frac{qx}{3} \left(a - \frac{x^2}{4a} \right),$$

$$M_{z2} = M_{z23}(0) = 0, \quad M_{z3} = M_{z23}(2a) = -\frac{2}{3} qa^2.$$

∂Q_y приведена на рис. 5.7. Для построения ∂M_z (см. тот же рисунок) необходимо дополнительно найти ее экстремумы:

— участок 0—1 (x_* — точка максимума, так как при переходе через нее ∂Q_y меняет знак с плюса на минус):

$$Q_{y01} = q \left(\frac{25}{18} a - x_* \right) = 0, \quad x_* = \frac{25}{18} a,$$

$$M_{z \text{ extr}} = M_{z \text{ max}} = M_{z01}(x_*) = -\frac{q}{2} \cdot \frac{25}{18} a \left(\frac{25}{9} a - \frac{25}{18} a \right) = \frac{625}{648} qa^2;$$

— участок 2—3 (x_* — точка максимума по той же причине):

$$Q_{y23} = q \left(\frac{1}{3} a - \frac{x_*^2}{4a} \right) = 0, \quad x_* = \frac{2}{\sqrt{3}} a,$$

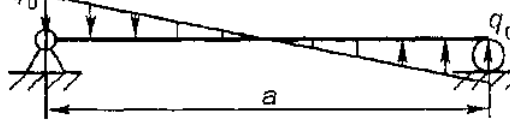
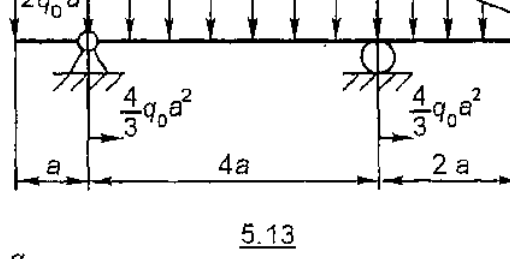
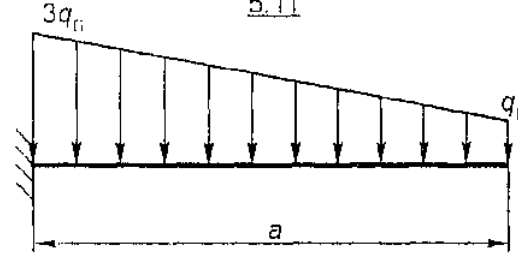
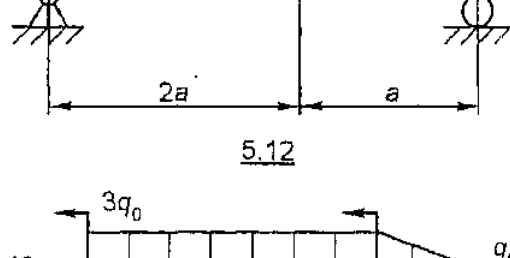
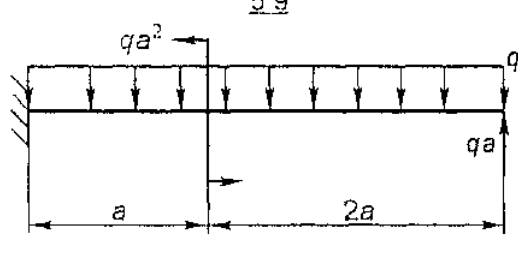
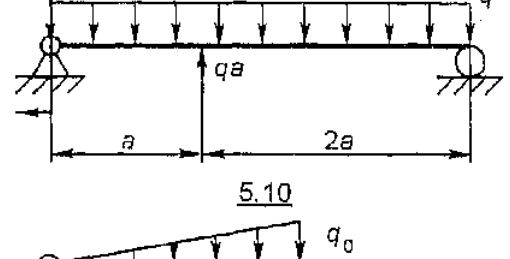
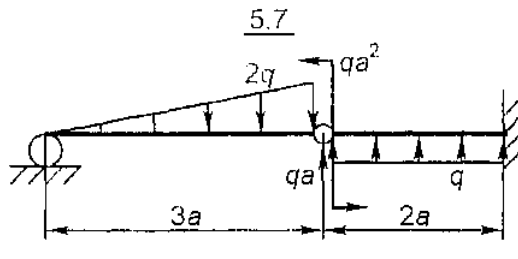
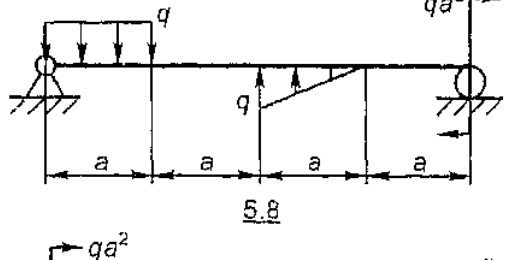
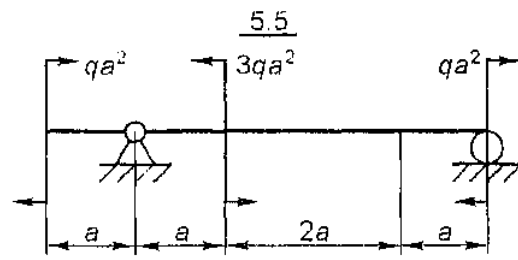
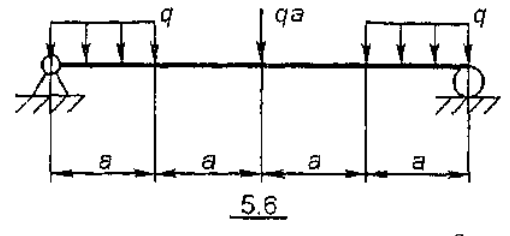
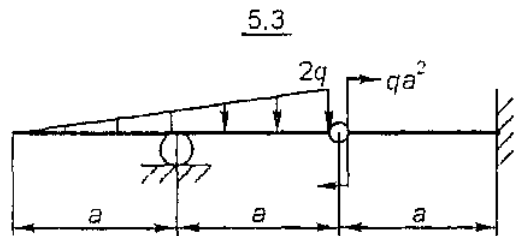
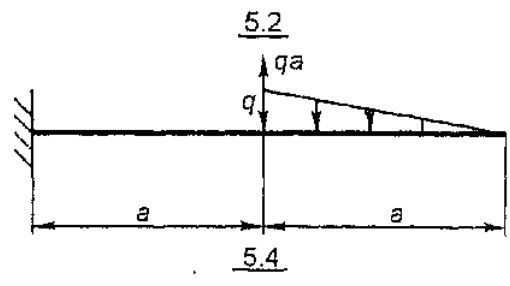
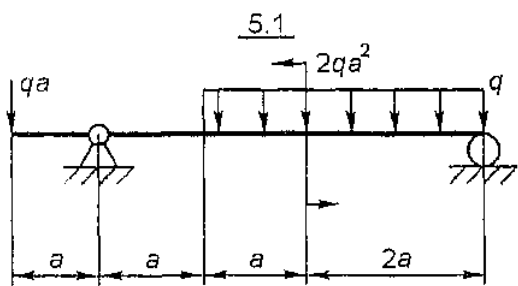
$$M_{z \text{ extr}} = M_{z \text{ max}} = M_{z23}(x_*) = \\ = \frac{q}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} a \left[a - \frac{1}{4a} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a \right)^2 \right] = \frac{4}{9\sqrt{3}} qa^2. \blacksquare$$

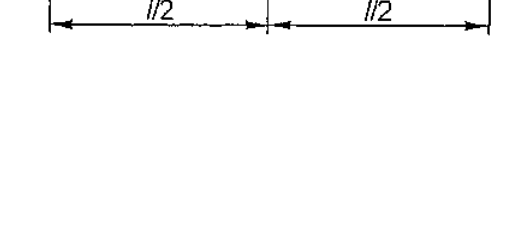
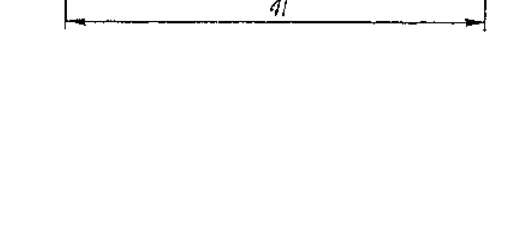
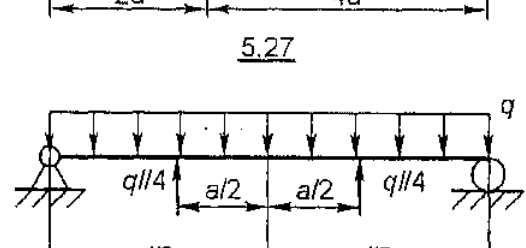
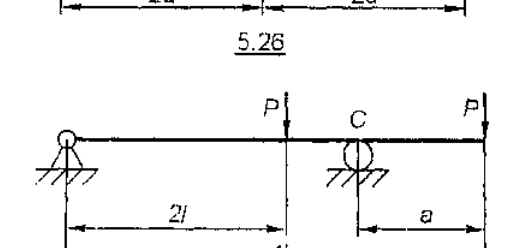
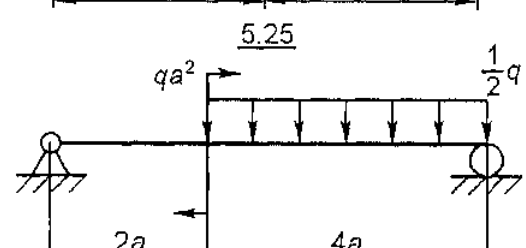
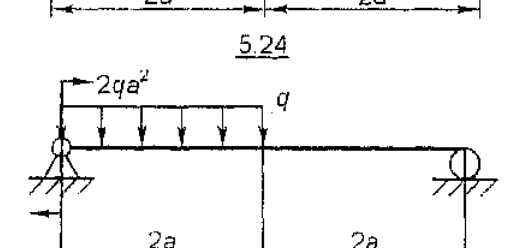
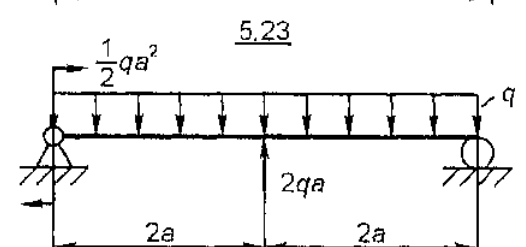
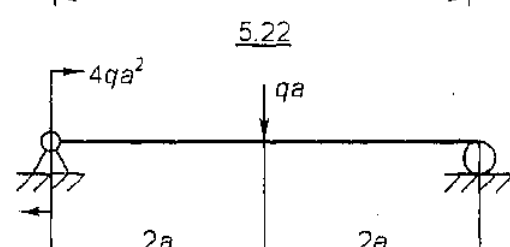
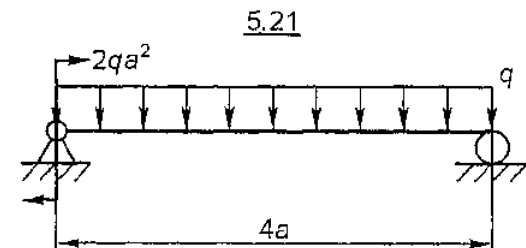
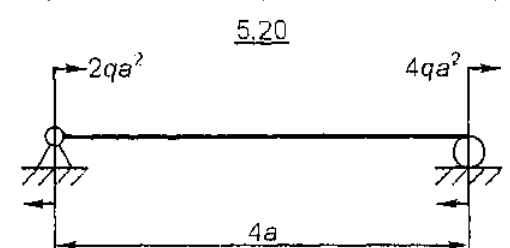
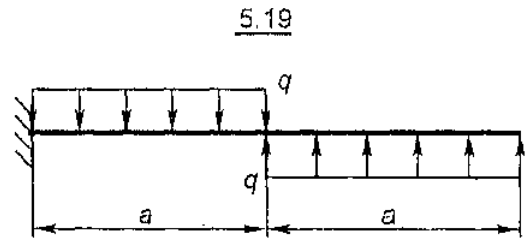
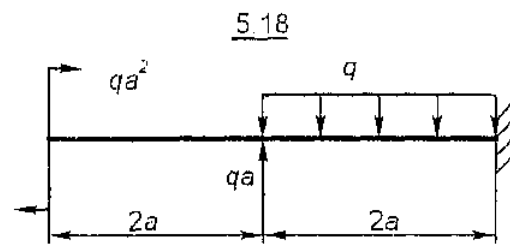
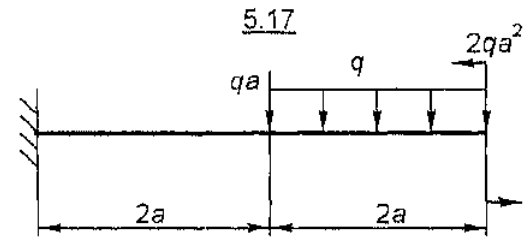
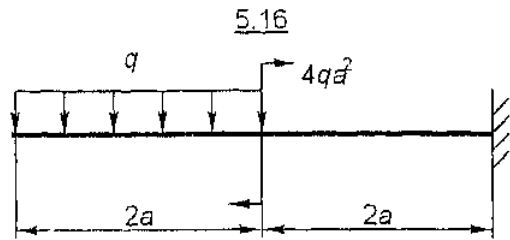
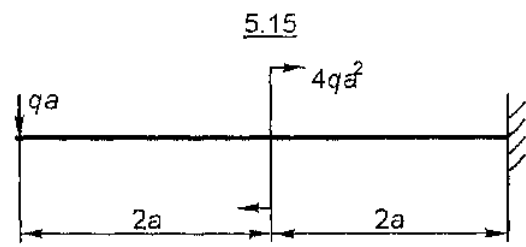
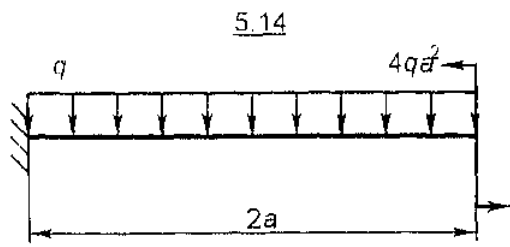
Задачи

5.1—5.13. Для балок, изображенных на соответствующих рисунках, построить эпюры Q_y и M_z .

5.14—5.25. Для указанных на соответствующих рисунках балок вычислить наибольшие по абсолютной величине значения Q_y и M_z . В расчетах принять: $q = 20$ кН/м, $a = 1$ м.

5.26—5.27. Для балок, изображенных на соответствующих рисунках, найти расстояние a , при котором экстремальные значения изгибающих моментов будут одинаковы.





§ 5.2. Нормальные напряжения и перемещения

При чистом изгибе для определения напряжений к гипотезе Бернулли добавляется следующее предположение (см. также утверждение 1.2).

Аксиома 8.3. При чистом изгибе продольные волокна балки находятся в состоянии одноосного растяжения-сжатия, т.е. в любой точке

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0. \quad \blacksquare \quad (5.5)$$

Из аксиомы (см. § П.1) 8.3 и закона Гука (1.5) вытекает связь продольных деформаций $\varepsilon = \varepsilon_x$, нормальных напряжений $\sigma = \sigma_x$ и радиуса кривизны ρ упругой линии:

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho}, \quad \sigma = -\frac{y}{\rho} E, \quad (5.6)$$

где начало системы координат Oyz в сечении выбрано на недеформированных продольных волокнах ($\varepsilon = 0$).

Дополнительный учет выражения для изгибающего момента M_z в (П.20) приводит к уравнению деформаций при изгибе:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (5.7)$$

Определение 5.4. Совокупность недеформированных продольных волокон балки называется *нейтральным слоем*, а прямая n , лежащая в пересечении нейтрального слоя и плоскости поперечного сечения, — *нейтральной линией*.

Произведение EJ_z называется *жесткостью на изгиб*. ■

Из формул (5.6), (П.20), аксиомы 8.3 и условий чистого изгиба (определение 5.2) вытекает следующий результат.

Утверждение 5.2. Для того чтобы в условиях утверждения 5.1 имел место чистый изгиб балки в плоскости Oxy , необходимо и достаточно, чтобы система координат Oyz была главной, а ее ось Oz проходила через центр тяжести S поперечного сечения (центр тяжести лежал в нейтральном слое):

$$S_z = 0, \quad J_{yz} = 0. \quad \blacksquare \quad (5.8)$$

Для определенности далее будем полагать, что Oyz совпадает с Syz , т.е. является главной и центральной.

Формулы (5.6) и (5.7) приводят к следующей связи нормального напряжения и изгибающего момента:

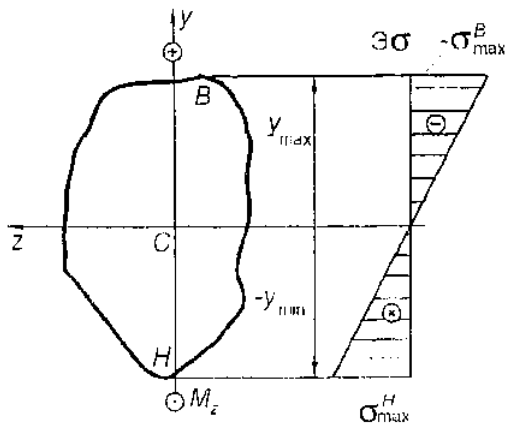


Рис. 5.8

$$\sigma = -\frac{M_z y}{J_z}. \quad (5.9)$$

Эпюра нормальных напряжений по высоте сечения, очевидно, линейная. Она приведена на рис. 5.8. Нейтральная линия n совпадает с осью Cz , а максимальные растягивающие или сжимающие (в зависимости от знака момента) напряжения имеют место в наиболее удаленных от оси точках B и H :

$$\sigma_{\max}^B = \frac{|M_z|}{W_{z+}}, \quad \sigma_{\max}^H = \frac{|M_z|}{W_{z-}}, \quad W_{z+} = \frac{J_z}{y_{\max}}, \quad W_{z-} = \frac{J_z}{-y_{\min}}. \quad (5.10)$$

Для симметричных сечений эти формулы упрощаются:

$$\sigma_{\max p} = \sigma_{\max c} = \frac{|M_z|}{W_z}, \quad W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}. \quad (5.11)$$

Как следует из (5.9)—(5.11), для того чтобы напряжения были меньше, сечение необходимо располагать так, чтобы $J_z = J_{\max}$.

Определение 5.5. Величина W_z называется *моментом сопротивления при изгибе*. ■

Формулы его вычисления для некоторых сечений приведены в § П.2 (табл. П.6).

В силу принципа суперпозиции напряжения от температурного поля t могут быть найдены отдельно. К изгибу сводится только частный случай распределения температуры, а именно независимость от координаты z и линейная зависимость от y :

$$t = t_0(x) + k(x)y. \quad (5.12)$$

При этом действие температуры приводит к фиктивным изгибающим моментам

$$M_z^t = -\alpha k(x) E J_z. \quad (5.13)$$

При поперечном изгибе аксиомы 8 и 8.3 не справедливы. Как показывают опыты, в этом случае сечения после деформа-

ции не остаются плоскими (имеет место так называемая “депланация сечений”), и касательное напряжение $\tau_{xy} \neq 0$.

Однако во многих случаях касательные напряжения значительно меньше нормальных. Поэтому пп. 4 и 5, продолжающие указанный в § 5.1 алгоритм расчета СО-балок на изгиб, практически совпадают с соответствующими пунктами § 1.1, отличаясь тем, что $\sigma_{\max p}$ и $\sigma_{\max c}$ выбираются с учетом формул (5.10) или (5.11).

При этом для симметричных относительно оси Cz сечений расчетным является то сечение, в котором $|M_z| = |M_z|_{\max}$. Если для несимметричных сечений момент не меняет знак, то расчетное сечение выбирается так же. Если же момент меняет знак, то расчетными являются два сечения, в которых $M_z = M_z_{\max}$ и $M_z = M_z_{\min}$. ■

Пример 5.4. Провести проектировочный расчет на прочность изображенной на рис. 5.7 балки для сечений, указанных на рис. 5.9, а-в, а также для швеллера ГОСТ 8240-72. Сравнить веса балок с этими сечениями.

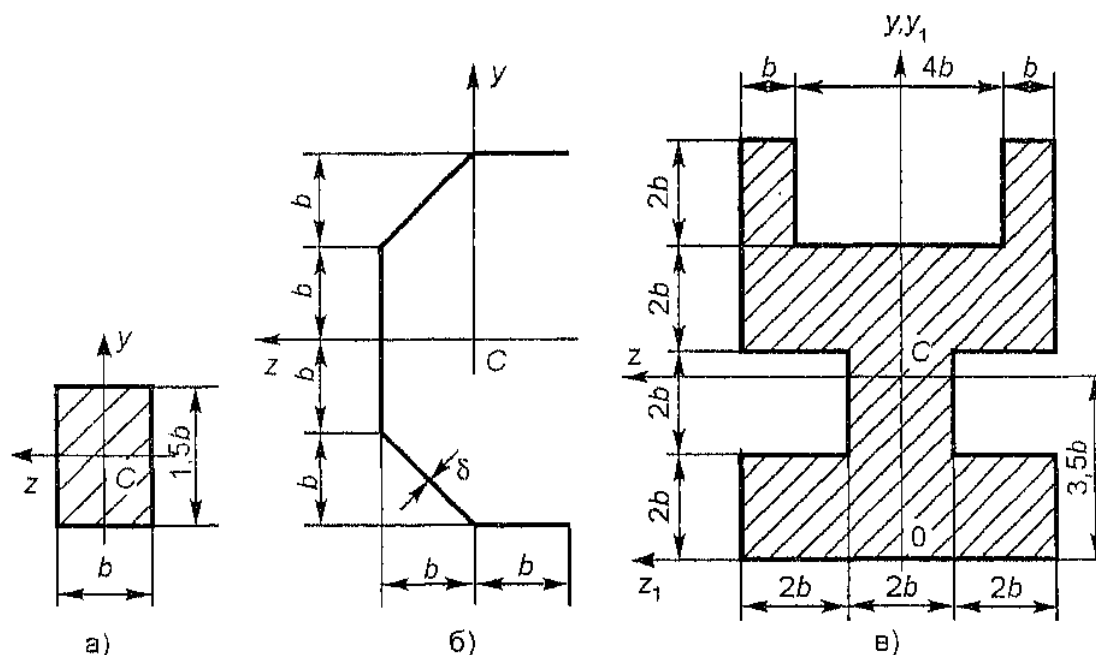


Рис. 5.9

В расчетах принять: $q = 18$ кН/м, $a = 20$ см, $b/\delta = 10$, $[\sigma]_p = 100$ МПа, $[\sigma]_c = 70$ МПа. Толщину δ округлить до 0,1 мм, а размер b — до 1 мм.

Решение. Пункты 1—3 алгоритма реализованы в примере 5.3. Соответствующая эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 5.7.

4—5. Из этой эпюры находим максимальные положительный и отрицательный моменты:

$$M_{z \max} = \frac{625}{648} qa^2 = 0,965qa^2 = 0,965 \cdot 18 \cdot 10^3 \cdot (0,2)^2 = \\ = 0,695 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z \min} = -0,333qa^2 = -0,333 \cdot 18 \cdot 10^3 \cdot (0,2)^2 = -0,240 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Далее определяем геометрические характеристики сечений а—в (см. гл. 3, табл. П.6 и формулы (5.10), (5.11):

— прямоугольник (оси симметрии Cy и Cz — главные центральные)

$$J_z = \frac{b \cdot (1,5b)^3}{12} = \frac{9}{32} b^4, \quad W_z = \frac{J_z}{0,75b} = \frac{3}{8} b^3;$$

— тонкостенное сечение (ось симметрии Cz — главная центральная; вычислять координату центра тяжести по оси Cy нет необходимости)

$$J_z = 2 \left[\frac{b\delta^3}{12} + b\delta(2b)^2 + \frac{\delta\sqrt{2} \cdot b^3}{12} + b\delta\sqrt{2} \left(\frac{3}{2} b \right)^2 \right] + \frac{\delta(2b)^3}{12} = \\ = 15,3b^3\delta = 1,53b^4,$$

$$W_z = \frac{J_z}{2b} = 0,765b^3;$$

— фигурное сечение (рис. 5.9, в) (ось симметрии Cy — главная центральная; сечение несимметрично относительно оси Cz , $C(y_c, 0)$; Oy_1z_1 — вспомогательная система координат)

$$F_\Phi = 6b \cdot 8b - 2 \cdot (2b)^2 - 4b \cdot 2b = 32b^2,$$

$$S_{z_1} = 48b^2 \cdot 4b - 2 \cdot (4b^2 \cdot 3b) - 8b^2 \cdot 7b = 112b^3, \quad y_c = \frac{112b^3}{32b^2} = 3,5b;$$

$$J_{z_1} = \frac{6b \cdot (8b)^3}{3} - 2 \left[\frac{2b \cdot (2b)^3}{12} + 4b^2 \cdot (3b)^2 \right] -$$

$$-\left[\frac{4b \cdot (2b)^3}{12} + 8b^2 \cdot (7b)^2 \right] = 554b^4,$$

$$J_z = J_{z_1} - Fy_c^2 = 554b^4 - 32b^2 \cdot (3,5b)^2 = 162b^4,$$

$$W_{z^+} = \frac{162b^4}{8b - 3,5b} = 36,0b^3, \quad W_{z^-} = \frac{162b^4}{3,5b} = 46,3b^3.$$

Поскольку допускаемое напряжение на сжатие меньше допускаемого напряжения на растяжение, то в соответствии с алгоритмом расчета СО-балок на изгиб равенства (5.11) с учетом (П.27) для симметричных сечений приводят к следующему неравенству:

$$\sigma_{\max c} = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq [\sigma]_c.$$

Отсюда получаем:

— прямоугольник

$$\frac{M_{z \max}}{3b^3/8} \leq [\sigma]_c, \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{8 \cdot M_{z \max}}{3 [\sigma]_c}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 0,695 \cdot 10^3}{3 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,0298 \text{ м};$$

— тонкостенное сечение

$$\frac{M_{z \max}}{0,765b^3} \leq [\sigma]_c, \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{M_{z \max}}{0,765 [\sigma]_c}} = \sqrt[3]{\frac{0,695 \cdot 10^3}{0,765 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,0235 \text{ м};$$

— швеллер

$$\frac{M_{z \max}}{W_z} \leq [\sigma]_c, \quad W_z \geq \frac{M_{z \max}}{[\sigma]_c} = \frac{0,695 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^6} = 9,93 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 9,93 \text{ см}^3.$$

Окончательно полагаем:

— прямоугольник:

$$b = 30 \text{ мм}, \quad F_{\text{II}} = 1,5b^2 = 13,5 \text{ см}^2;$$

— тонкостенное сечение:

$$\delta = 2,4 \text{ мм}; \quad b = 24 \text{ мм}, \quad F_{\text{T}} = 2\delta(b + b\sqrt{2} + b) = 6,82\delta b = 0,393 \text{ см}^2;$$

— швеллер № 6,5 (см. табл. П.10):

$$W_z = W_x = 15,0 \text{ см}^3, \quad F_{\text{III}} = 7,51 \text{ см}^2.$$

Для фигурного сечения в силу его несимметричности в соответствии с алгоритмом и (5.10), (П.27) необходимо решать систему четырех неравенств (при положительном изгибающем моменте верхние волокна сжаты):

$$\sigma_{\max c} = \frac{M_{z \max}}{W_{z+}} = \frac{0,965qa^2}{36,0b^3} = 0,0268 \frac{qa^2}{b^3} \leq [\sigma]_c,$$

$$\sigma_{\max p} = \frac{M_{z \max}}{W_{z-}} = \frac{0,965qa^2}{46,3b^3} = 0,0208 \frac{qa^2}{b^3} \leq [\sigma]_p,$$

$$\sigma_{\max c} = \frac{M_{z \min}}{W_{z-}} = \frac{0,333qa^2}{46,3b^3} = 0,00719 \frac{qa^2}{b^3} \leq [\sigma]_c,$$

$$\sigma_{\max p} = \frac{M_{z \min}}{W_{z+}} = \frac{0,333qa^2}{36,0b^3} = 0,00925 \frac{qa^2}{b^3} \leq [\sigma]_p.$$

Очевидно, последние два неравенства можно отбросить. Учитывая дополнительно, что допускаемое напряжение на сжатие меньше соответствующего напряжения на растяжение, приходим к эквивалентной системе, состоящей из одного первого неравенства. Разрешая его относительно b , получаем:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{0,0268 qa^2}{[\sigma]_c}} = \sqrt[3]{\frac{0,0268 \cdot 18 \cdot 10^3 \cdot (0,2)^2}{70 \cdot 10^6}} = 0,00651 \text{ м.}$$

Окончательно полагаем:

$$b = 7 \text{ мм, } F_{\phi} = 32b^2 = 15,7 \text{ см}^2.$$

Очевидно, отношение весов балок с различными сечениями определяется отношением их площадей:

$$\begin{aligned} F_{\Pi} : F_{\phi} : F_{\text{III}} : F_{\text{T}} &= 13,5 : 15,7 : 7,51 : 0,393 = \\ &= 34,4 : 39,3 : 19,1 : 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Определение вертикальных перемещений (*прогибов, упругой линии*) $\delta = y(x)$ и углов поворота $\theta(x)$ сечений при изгибе сводится к интегрированию вытекающих из (5.7) и известной формулы для кривизны плоской кривой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (5.14)$$

квазилинейных уравнения

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{M_z}{EJ_z} \quad (5.15)$$

или системы уравнений

$$y' = \operatorname{tg} \theta, \quad \theta' = \frac{M_z}{EJ_z \cos \theta}. \quad (5.16)$$

Основные типы граничных условий с учетом (5.3), (5.15) и (5.16) для них следующие:

— на конце $x = x_1$ отсутствует опора и приложены сила P и момент M (их знаки выбираются в соответствии с правилом знаков, указанным в § 5.1; если конец свободный, то $P = 0$ и $M = 0$):

$$M_z \Big|_{x=x_1} = \frac{y'' EJ_z}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \Big|_{x=x_1} = \theta' EJ_z \cos \theta \Big|_{x=x_1} = M, \quad (5.17)$$

$$Q_y \Big|_{x=x_1} = \left\{ \frac{y'' EJ_z}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \right\}' \Big|_{x=x_1} = (\theta' EJ_z \cos \theta)' \Big|_{x=x_1} = P;$$

— заделка на конце $x = x_2$:

$$y \Big|_{x=x_2} = 0, \quad \theta \Big|_{x=x_2} = \operatorname{arctg} y' \Big|_{x=x_2} = 0; \quad (5.18)$$

— неподвижный или подвижный шарниры на конце $x = x_3$ с приложенным на нем моментом M :

$$y \Big|_{x=x_3} = 0, \quad M_z \Big|_{x=x_3} = \frac{y'' EJ_z}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \Big|_{x=x_3} = \theta' EJ_z \cos \theta \Big|_{x=x_3} = M. \quad (5.19)$$

В соответствии с принципом начальных размеров (аксиома 3, см. § П.1), как правило, полагают $|\theta| \ll 1$, что приводит к *линеаризации соотношений* (5.14)—(5.19). А именно, уравнение (5.15) и система (5.16) приобретают вид

$$y'' = \frac{M_z}{EJ_z}; \quad (5.20)$$

$$y' = \theta, \quad \theta' = \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (5.21)$$

Они с учетом соотношений (5.3) и (5.4) сводятся к двум эквивалентным уравнениям:

$$(y''EJ_z)' = Q_y; \quad (5.22)$$

$$(y''EJ_z)'' = q. \quad (5.23)$$

Естественно, квазилинейное уравнение (5.15) и система (5.16) могут быть приведены к аналогичному виду.

Линеаризованные граничные условия при этом имеют вид:

— на конце $x = x_1$ отсутствует опора и приложены сила P и момент M :

$$M_z \Big|_{x=x_1} = y''EJ_z \Big|_{x=x_1} = \theta'EJ_z \Big|_{x=x_1} = M, \quad (5.24)$$

$$Q_y \Big|_{x=x_1} = (y''EJ_z)' \Big|_{x=x_1} = (\theta'EJ_z)' \Big|_{x=x_1} = P;$$

— заделка на конце $x = x_2$:

$$y \Big|_{x=x_2} = 0, \quad \theta \Big|_{x=x_2} = y' \Big|_{x=x_2} = 0; \quad (5.25)$$

— неподвижный или подвижный шарниры на конце $x = x_3$ с приложенным на нем моментом M :

$$y \Big|_{x=x_3} = 0, \quad M_z \Big|_{x=x_3} = y''EJ_z \Big|_{x=x_3} = \theta'EJ_z \Big|_{x=x_3} = M. \quad (5.26)$$

Таким образом, прогибы (упругая линия) балки могут быть найдены как решение краевых задач для уравнения (5.20) (системы (5.21)) или уравнения (5.23). При этом в соответствии с порядком уравнения в первом случае необходимы два граничных условия, а во втором — четыре. Использование уравнения (5.20) (системы (5.21)), с одной стороны, имеет преимущество в виде более низкого порядка, а с другой стороны, требует предварительного построения эпюры M_z .

При решении краевых задач с разрывными характеристиками и/или сосредоточенными нагрузками интегрирование проводится по участкам. Краевые условия в точках $x = x_*$ их стыковки в соответствии с аксиомой 1 есть уравнения неразрывности балки (равенство левых и правых пределов для перемещений и углов поворота; в скобках указаны дополнительные условия, необходимые при использовании уравнения (5.23)):

$$y|_{x=x_*-0} = y|_{x=x_*+0}, \quad \theta|_{x=x_*-0} = \theta|_{x=x_*+0}; \quad (5.27)$$

$$M_z|_{x=x_*-0} = M_z|_{x=x_*+0} + M_*, \quad Q_y|_{x=x_*-0} = Q_y|_{x=x_*+0} + Q_*,$$

где M_* и Q_* — внешние сосредоточенные момент и сила в сечении $x = x_*$.

Этот подход, как правило, приводит к необходимости решать системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка. Частично эта сложность устраняется при использовании *метода начальных параметров*. Его суть состоит в том, что применяется единая для всего бруса система координат Ox с началом на левом конце и учитывается простая структура уравнений системы (5.21), позволяющая найти их общее решение непосредственным интегрированием:

$$\theta(x) = \theta_0 + I_M(x), \quad y(x) = y_0 + \theta_0 x + I_\theta(x), \quad \theta_0 = \theta(0), \quad y_0 = y(0), \quad (5.28)$$

$$I_M(x) = \int_0^x \frac{M_z}{EJ_z} dx, \quad I_\theta(x) = \int_0^x I_M(x) dx.$$

Определение 5.6. Величины θ_0 и y_0 называются *начальными параметрами*. ■

В случае заделки на левом конце они являются начальными условиями: $\theta_0 = 0$ и $y_0 = 0$ (см. (5.25)). При других вариантах опор они определяются из граничных условий на правом и, может быть, на левом концах. Даже в случае наличия разрывных характеристик балки и сосредоточенных сил и моментов эпюра моментов и вся подынтегральная функция в первом интеграле в (5.28) может иметь только разрывы первого рода. Следовательно, как вытекает из соответствующих свойств интеграла, $\theta(x)$ и, тем более, $y(x)$ — непрерывные функции, и условия (5.27) стыковки участков выполняются автоматически. Таким образом, в этом методе число неизвестных постоянных не зависит от числа участков и равно двум.

Относительное неудобство заключается в том, что необходимо иметь зависимость $M_z(x)$ в единой системе координат, тогда как при построении эпюр обычно используются местные системы координат (см. примеры 5.1—5.3). Для того чтобы обойти эту сложность, для i -го участка ($x \in [x_{i-1}, x_i]$, ($i = 1, \dots, n$)) представим каждый интеграл в (5.28) в виде суммы интегралов по

участкам и на каждом из участков перейдем к местной координате $\xi_j = x - x_{j-1}$ (если $i-1=0$, то сумма также равна нулю):

$$\theta(x) = \theta(x_{i-1} + \xi_i) = \theta_{i-1, i}(\xi_i) = \theta_0 + \tilde{\theta}_{i-1, i}(\xi_i),$$

$$\tilde{\theta}_{i-1, i}(\xi_i) = \sum_{j=1}^{i-1} I_{M_j}(l_j) + I_{M_i}(\xi_i), \quad (5.29)$$

$$y(x) = y(x_{i-1} + \xi_i) = y_{i-1, i}(\xi_i) = y_0 + \theta_0(x_{i-1} + \xi_i) + \sum_{j=1}^{i-1} I_{\theta_j}(l_j) + I_{\theta_i}(\xi_i),$$

$$I_{M_i}(\xi_i) = \int_0^{\xi_i} \frac{M_z}{EJ_z} d\xi_j, \quad I_{\theta_j}(\xi_j) = \int_0^{\xi_j} \tilde{\theta}_{j-1, j}(\xi_j) d\xi_j,$$

где $l_j = x_j - x_{j-1}$ — длина j -го участка. ■

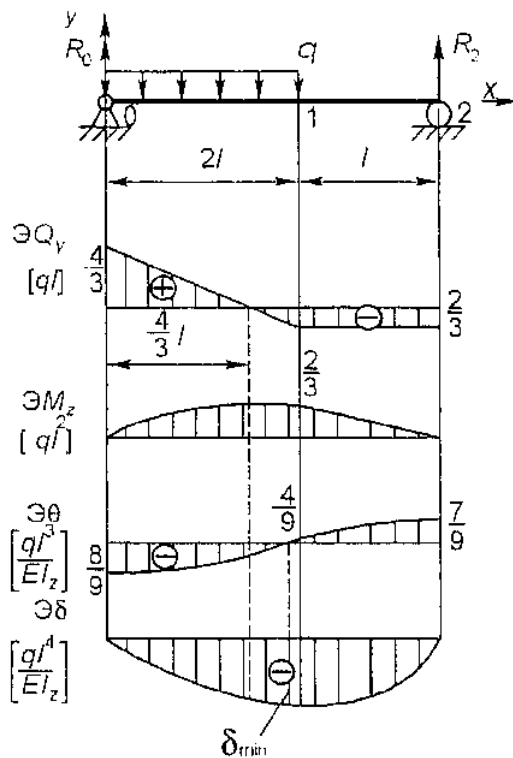


Рис. 5.10

Подход к решению задач об изгибе, основанный на решении краевых задач, так же как при растяжении-сжатии и кручении, может быть применен и к СН-балкам. Однако в общем случае он, очевидно, является громоздким, поскольку здесь необходимо использовать уравнение (5.23) четвертого порядка или методы раскрытия статической неопределенности, изложенные в гл. 7. Однако там же приведены более простые способы определения перемещений.

Пример 5.5. Найти уравнение упругой линии балки, изображенной на рис. 5.10, полагая, что $EJ_z = \text{const}$.

Решение. Разбиваем балку на два участка (рис. 5.10).

Способ I — решение краевой задачи по участкам с последующей стыковкой. Будем использовать уравнение (5.20), поскольку число констант интегрирования для уравнения (5.23) в два раза больше.

Определяем реакции R_0 и R_1 в опорах:

$$\sum M_1 = 0: -R_0 \cdot 3l + q \cdot 2l \cdot 2l = 0, \quad R_0 = \frac{4}{3} ql;$$

$$\sum M_0 = 0: R_1 \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot l = 0, \quad R_1 = \frac{2}{3} ql.$$

По участкам находим Q_y и M_z (x — местная координата):

— участок 0—1:

$$Q_{y01}(x) = \frac{4}{3} ql - qx = q \left(\frac{4}{3} l - x \right),$$

$$Q_{y0} = Q_{y01}(0) = \frac{4}{3} ql, \quad Q_{y1} = Q_{y01}(2l) = -\frac{2}{3} ql, \quad Q_{y01} \left(\frac{4}{3} l \right) = 0,$$

$$M_{z01}(x) = \frac{4}{3} ql \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = qx \left(\frac{4}{3} l - \frac{1}{2} x \right),$$

$$M_{z0} = M_{z01}(0) = 0, \quad M_{z1} = M_{z01}(2l) = \frac{2}{3} ql^2;$$

— участок 1—2:

$$Q_{y12}(x) = -\frac{2}{3} ql, \quad M_{z12}(x) = \frac{4}{3} ql(2l+x) - q \cdot 2l(l+x) = \frac{2}{3} ql(l-x),$$

$$M_{z1} = M_{z12}(0) = \frac{2}{3} ql^2, \quad M_{z2} = M_{z12}(l) = 0.$$

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 5.10.

Далее на каждом участке записываем дифференциальное уравнение (5.20) и находим его общее решение:

— участок 0—1 (A_1 , B_1 — константы интегрирования):

$$EJ_z y''_{01} = qx \left(\frac{4}{3} l - \frac{1}{2} x \right),$$

$$EJ_z y'_{01} = EJ_z \theta_{01} = \frac{1}{3} qx^2 \left(2l - \frac{1}{2} x \right) + A_1,$$

$$EJ_z y_{01} = \frac{1}{3} qx^3 \left(\frac{2}{3} l - \frac{1}{8} x \right) + A_1 x + B_1 ;$$

— участок 1—2 (A_2, B_2 — константы интегрирования):

$$EJ_z y''_{12} = \frac{2}{3} ql(l-x),$$

$$EJ_z y'_{12} = EJ_z \theta_{12} = \frac{1}{3} qlx(2l-x) + A_2 ,$$

$$EJ_z y_{12} = \frac{1}{3} qlx^2 \left(l - \frac{1}{3} x \right) + A_2 x + B_2 .$$

Для определения произвольных постоянных A_1, A_2, B_1, B_2 используем граничные условия (см. (5.26))

$$y_{01}(0) = 0, \quad y_{12}(l) = 0$$

и условия сопряжения на границе участков (см. (5.27))

$$y_{01}(2l) = y_{12}(0), \quad \theta_{01}(2l) = \theta_{12}(0).$$

Подставляя в них найденные выражения для прогибов и углов поворота, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$B_1 = 0, \quad \frac{1}{ql^4} (3A_2 l + B_2) = -\frac{2}{9}, \quad \frac{1}{ql^4} (2A_1 l + B_1 - B_2) = -\frac{10}{9},$$

$$\frac{1}{ql^3} (A_1 - A_2) = -\frac{4}{3}.$$

Систему из последних трех уравнений решаем методом Гаусса (искомый вектор $(A_1 l, A_2 l, B_2)^T / (ql^4)$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \left| -\frac{2}{9} ql^4 \right. \\ 2 & 0 & -1 & \left| -\frac{10}{9} ql^4 \right. \\ 1 & -1 & 0 & \left| -\frac{4}{3} ql^3 \right. \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \left| -\frac{4}{3} \right. \\ 0 & 1 & 1 & \left| -\frac{2}{9} \right. \\ 0 & 2 & -1 & \left| \frac{14}{9} \right. \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \left| -\frac{4}{3} \right. \\ 0 & 1 & 1 & \left| -\frac{2}{9} \right. \\ 0 & 0 & -3 & \left| 2 \right. \end{pmatrix},$$

откуда находим

$$B_2 = -\frac{2}{3} ql^4, \quad A_2 = ql^3 \left(-\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{9} ql^3,$$

$$A_1 = ql^3 \left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{9} \right) = -\frac{8}{9} ql^3.$$

Окончательно с учетом этих значений получаем:
 --- участок 0—1:

$$EJ_z \theta_{01} = \frac{q}{3} \left(-\frac{8}{3} l^3 + 2lx^2 - \frac{1}{2} x^3 \right),$$

$$EJ_z y_{01} = \frac{qx}{3} \left(-\frac{8}{3} l^3 + \frac{2}{3} lx^2 - \frac{1}{8} x^3 \right),$$

$$\theta_0 = \theta_{01}(0) = -\frac{8}{9} \frac{ql^3}{EJ_z}, \quad \theta_1 = \theta_{01}(2l) = \frac{4}{9} \frac{ql^3}{EJ_z}, \quad \theta_{01} \left(\frac{4}{3} l \right) < 0,$$

$$y_0 = y_{01}(0) = 0, \quad y_1 = y_{01}(2l) = -\frac{2}{3} \frac{ql^4}{EJ_z};$$

--- участок 1—2:

$$EJ_z \theta_{12} = \frac{ql}{3} \left(\frac{4}{3} l^2 + 2lx - x^2 \right),$$

$$EJ_z y_{12} = \frac{ql}{3} \left(-2l^3 + \frac{4}{3} l^2 x + lx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right),$$

$$\theta_1 = \theta_{12}(0) = \frac{4}{9} \frac{ql^3}{EJ_z}, \quad \theta_2 = \theta_{12}(l) = \frac{7}{9} \frac{ql^3}{EJ_z},$$

$$y_1 = y_{12}(0) = -\frac{2}{3} \frac{ql^4}{EJ_z}, \quad y_2 = y_{12}(l) = 0.$$

Здесь значения прогибов на границах участков и углов поворота в сечении, где стыкуются участки, найдены для проверки правильности решения.

Эпюры углов поворота и прогибов приведены на рис. 5.10. Они построены с учетом дифференциальных зависимостей (5.21) и (5.3). Точка экстремума перемещений $x = x_*$ может быть найдена как решение кубического уравнения $\theta_{01}(x) = 0$.

Способ II — метод начальных параметров. Используя ранее найденные изгибающие моменты, по участкам вычисляем интег-

ралы $I_{M_j}(\xi_j)$, $I_{\theta_j}(\xi_j)$ ($j = 1, 2$) в (5.29) (первые из них фактически найдены при решении первым способом), а также углы поворота и прогибы (x — местные координаты):

-- участок 0—1 ($i = 1$, $x_0 = 0$, $x_1 = l_1 = 2l$):

$$I_{M1}(x) = \bar{\theta}_{01}(x) = \int_0^x \frac{M_{z01}}{EJ_z} dx = \frac{qx^2}{3EJ_z} \left(2l - \frac{1}{2} x \right),$$

$$\theta_{01}(x) = \theta_0 + \tilde{\theta}_{01}(x),$$

$$I_{\theta1}(x) = \int_0^x \tilde{\theta}_{01}(x) dx = \frac{qx^2}{3EJ_z} \int_0^x x^2 \left(2l - \frac{1}{2} x \right) dx = \frac{qx^3}{3EJ_z} \left(\frac{2}{3} l - \frac{1}{8} x \right),$$

$$y_{01}(x) = y_0 + x\theta_0 + I_{\theta1}(x);$$

-- участок 1—2 ($i = 2$, $x_1 = 2l$, $x_2 = 3l$, $l_2 = l$):

$$I_{M2}(x) = \int_0^x \frac{M_{z12}}{EJ_z} dx = \frac{2}{3} qlx \left(l - \frac{1}{2} x \right),$$

$$\bar{\theta}_{12}(x) = I_{M1}(l_1) + I_{M2}(x) = \frac{ql}{3EJ_z} (4l^2 + 2lx - x^2),$$

$$\theta_{12}(x) = \theta_0 + \tilde{\theta}_{12}(x),$$

$$\begin{aligned} I_{\theta2}(x) &= \int_0^x \tilde{\theta}_{12}(x) dx = \frac{ql}{3EJ_z} \int_0^x (4l^2 + 2lx - x^2) dx = \\ &= \frac{qlx}{3EJ_z} \left(4l^2 + lx - \frac{1}{3} x^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{12}(x) &= y_0 + (2l + x) \theta_0 + I_{\theta1}(l_1) + I_{\theta2}(x) = \\ &= y_0 + (2l + x) \theta_0 + \frac{ql}{3EJ_z} \left(\frac{10}{3} l^3 + 4l^2 x + lx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right). \end{aligned}$$

Начальные параметры определяем из указанных выше граничных условий. Из первого из них следует, что

$$y_0 = 0,$$

а второе приводит к уравнению

$$y_{12}(l) = (2l + l) \theta_0 + \frac{ql^4}{3EJ_z} \left(\frac{10}{3} + 4 + 1 - \frac{1}{3} \right) = 3l\theta_0 + \frac{8}{3} \frac{ql^4}{EJ_z} = 0,$$

которое имеет следующее решение:

$$\theta_0 = -\frac{8}{9} \frac{ql^3}{EJ_z}.$$

Подставляя найденные значения начальных параметров в выражения для углов поворота и прогибов, получаем тот же результат, что был получен при решении первым способом.

Пример 5.6. Найти углы поворота сечений и прогибы балки с учетом нагрева (рис. 5.11), полагая, что $\alpha = \text{const}$.

Решение. В соответствии с исходными данными определяем коэффициент k в (5.12) и фиктивный изгибающий момент (5.13):

$$k = (t_1 - t_2)/b = 2\Delta t/b = \text{const}, \quad M_z = -\alpha k E J_z.$$

Деформированное состояние балки описывается уравнением (5.20) с начальными условиями (5.25):

$$y'' = -\alpha k, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \theta(0) = 0.$$

Последовательно интегрируя уравнение, находим (C_1 и C_2 — константы интегрирования)

$$y' = \theta = -\alpha kx + C_1, \quad y = -\frac{1}{2} \alpha kx^2 + C_1x + C_2.$$

Отсюда, учитывая начальные условия, получаем:

$$\theta(0) = C_1 = 0, \quad y(0) = C_2 = 0.$$

Следовательно, углы поворота и прогибы $\delta = y$ определяются так:

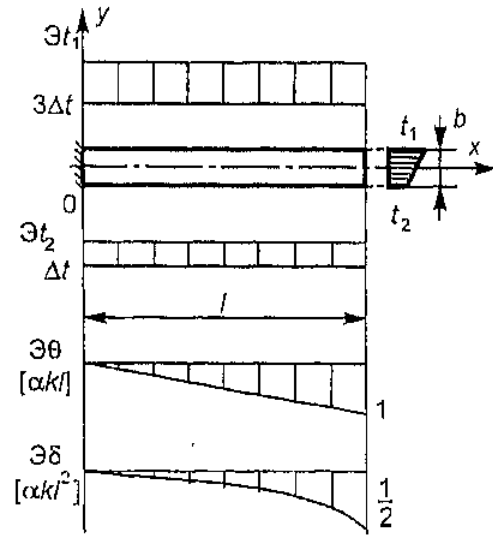


Рис. 5.11

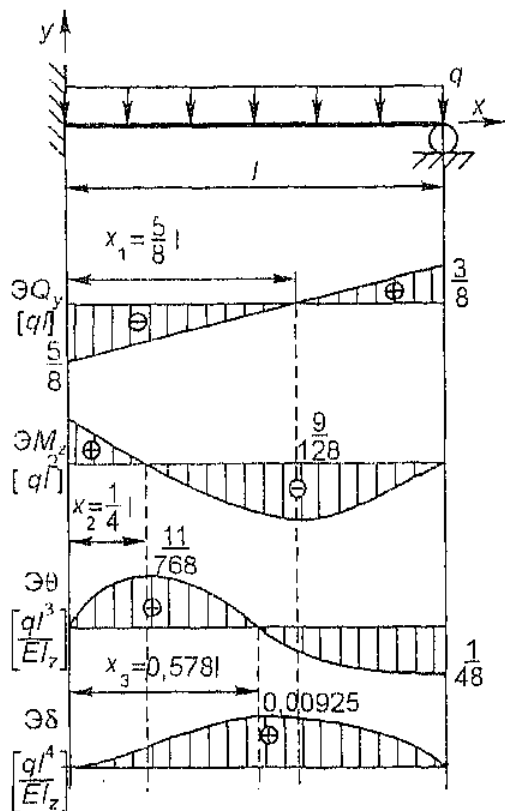


Рис. 5.12

$$\theta = -\alpha kx, \quad y = -\frac{1}{2} \alpha kx^2.$$

Их эпюры приведены на рис. 5.11.

Обратим внимание на то, что деформированное состояние балки в данном случае не зависит от ее жесткости на изгиб. ■

Пример 5.7. Для балки, изображенной на рис. 5.12, построить эпюры Q_y , M_z , θ и δ , полагая $EJ_z = \text{const}$.

Решение. Балка является статически неопределимой. Поставленную задачу можно решить методами, указанными в гл. 7. Здесь будем искать решение соответствующей краевой задачи, которая следует из (5.23), (5.25) и (5.26):

$$EJ_z y^{IV} = q, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \theta(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y''(l) = 0.$$

Последовательно интегрируя уравнение, с учетом (5.22) получаем (C_1, C_2, C_3 и C_4 — константы интегрирования):

$$Q_y = EJ_z y''' = EJ_z \left(\frac{q}{EJ_z} x + C_1 \right),$$

$$M_z = EJ_z y'' = EJ_z \left(\frac{q}{2EJ_z} x^2 + C_1 x + C_2 \right),$$

$$y' = \theta = \frac{q}{6EJ_z} x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$y = \frac{q}{24EJ_z} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

Из первых двух граничных условий следует, что

$$C_3 = C_4 = 0,$$

а два последних приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{6}{l^2} y(l) = \frac{ql^2}{4EJ_z} + lC_1 + 3C_2 = 0, \quad y''(l) = \frac{ql^2}{2EJ_z} + lC_1 + C_2 = 0.$$

Ее решение имеет вид

$$C_1 = -\frac{5ql}{8EJ_z}, \quad C_2 = \frac{ql^2}{4EJ_z}.$$

Учитывая значения найденных констант, окончательно получаем:

$$Q_y = q \left(x - \frac{5l}{8} \right), \quad M_z = \frac{q}{8} (4x^2 - 5xl + l^2),$$

$$\theta = \frac{qx}{48EJ_z} (8x^2 - 15xl + 6l^2), \quad y = \frac{qx^2}{48EJ_z} (2x^2 - 5xl + 3l^2).$$

Для построения эпюр находим значения силовых и кинематических факторов (часть из них вычисляется для проверки) в характерных точках:

$$Q_y(0) = -\frac{5}{8} ql, \quad Q_y(l) = \frac{3}{8} ql,$$

$$Q_y(x_1) = 0, \quad x_1 = \frac{5}{8} l;$$

$$M_z(0) = -\frac{1}{8} ql^2, \quad M_z(l) = 0, \quad M_z(x_1) = M_{z \min} = -\frac{9}{128} ql^2,$$

$$M_z(x_2) = 0, \quad x_2 = \frac{1}{4} l;$$

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(l) = -\frac{1}{48} \frac{ql^3}{EJ_z}, \quad \theta(x_2) = \theta_{\max} = \frac{11}{768} \frac{ql^3}{EJ_z},$$

$$\theta(x_3) = 0, \quad x_3 = 0,578l;$$

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y(x_3) = y_{\max} = 0,00925 \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

Соответствующие эпюры приведены на рис. 5.12. ■

Задачи

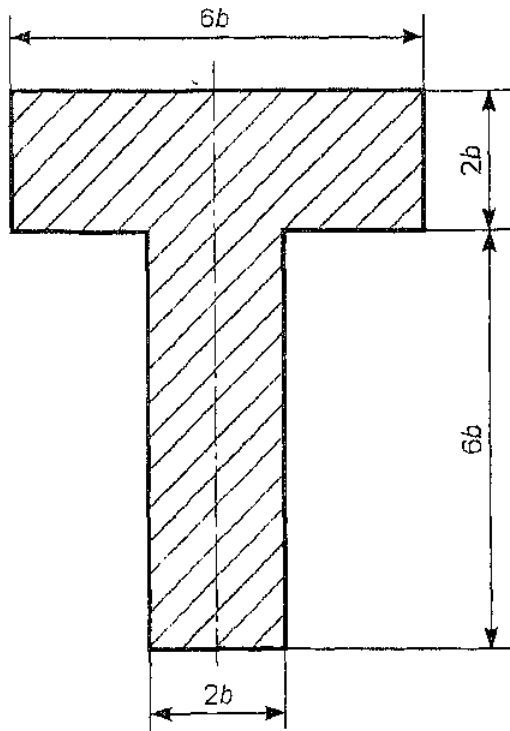


Рис. 5.13

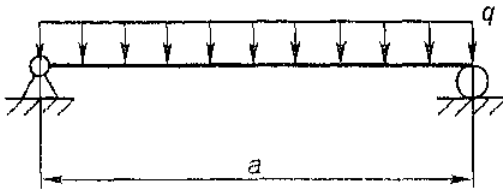


Рис. 5.14

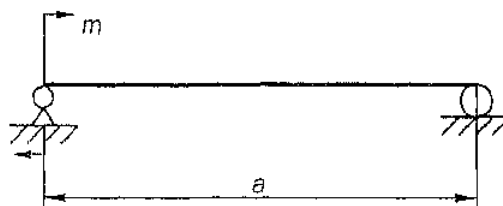


Рис. 5.16

5.28. Для балки, указанной в задаче 5.7, подобрать сечения двух типов: прямоугольник с соотношением ширины и высоты 1:1,5 и двутавр ГОСТ 8239-72. В расчетах принять: $q = 40$ кН/м, $a = 60$ см, $[\sigma] = 120$ МПа.

5.29. Для балки, указанной в задаче 5.7, определить размеры сечения, изображенного на рис. 5.13. В расчетах принять: $q = 40$ кН/м, $a = 60$ см, $[\sigma]_p = 40$ МПа, $[\sigma]_c = 120$ МПа.

5.30. Определить наибольший прогиб и углы поворота опорных сечений балки, изображенной на рис. 5.14.

5.31. Определить прогиб и угол поворота на свободном конце консольной балки, изображенной на рис. 5.15.

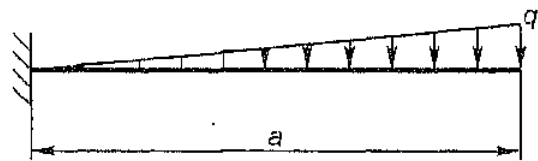
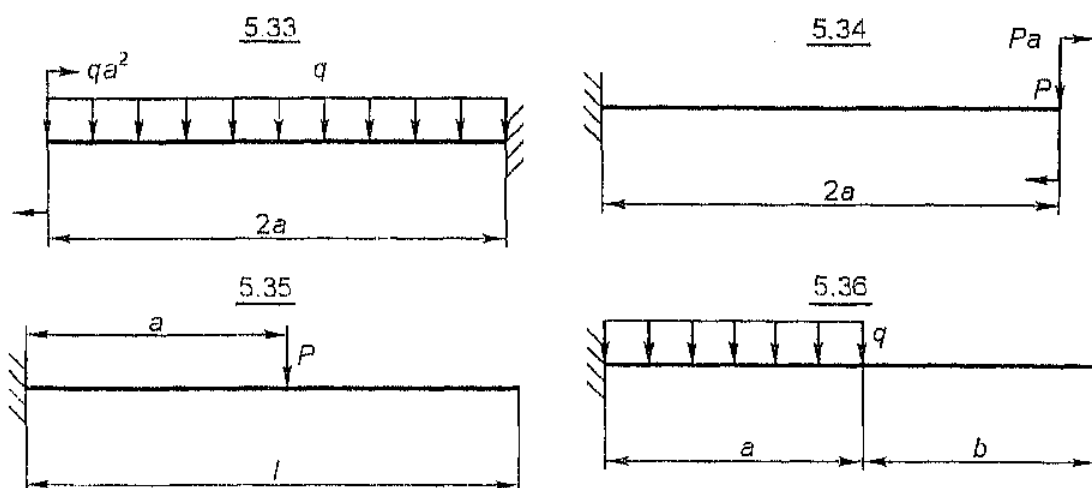


Рис. 5.15

5.32. Для балки, изображенной на рис. 5.16, найти уравнение упругой линии.

5.33—5.36. Для консольных балок, приведенных на соответствующих рисунках, с помощью решения краевых задач определить значения угла поворота и прогиба на свободном конце.

5.37—5.39. Определить углы поворота θ_A и θ_B опорных сечений и прогибы середины пролета стальных балок ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа), приведенных на соответствующих рисунках. В расчетах принять:



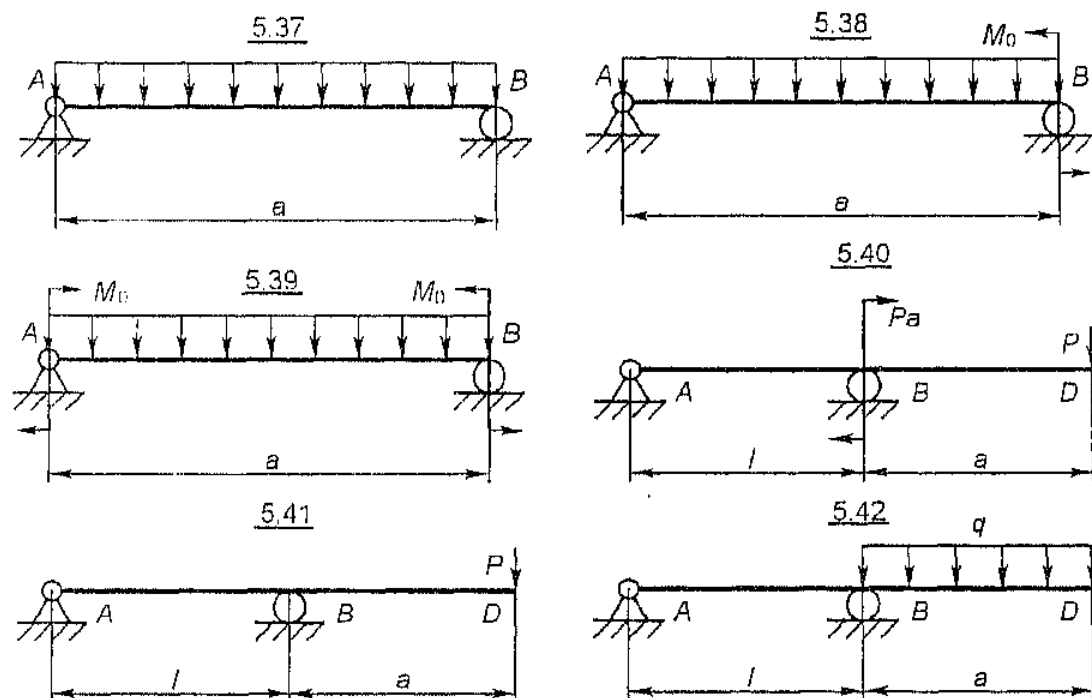
— для 5.37: $a = 2$ м, $q = 30$ кН/м, сечение — двутавр № 27 ГОСТ 8239-72;

— для 5.38: $a = 6$ м, $q = 20$ кН/м, $M_0 = 80$ кН·м, сечение — двутавр № 36 ГОСТ 8239-72;

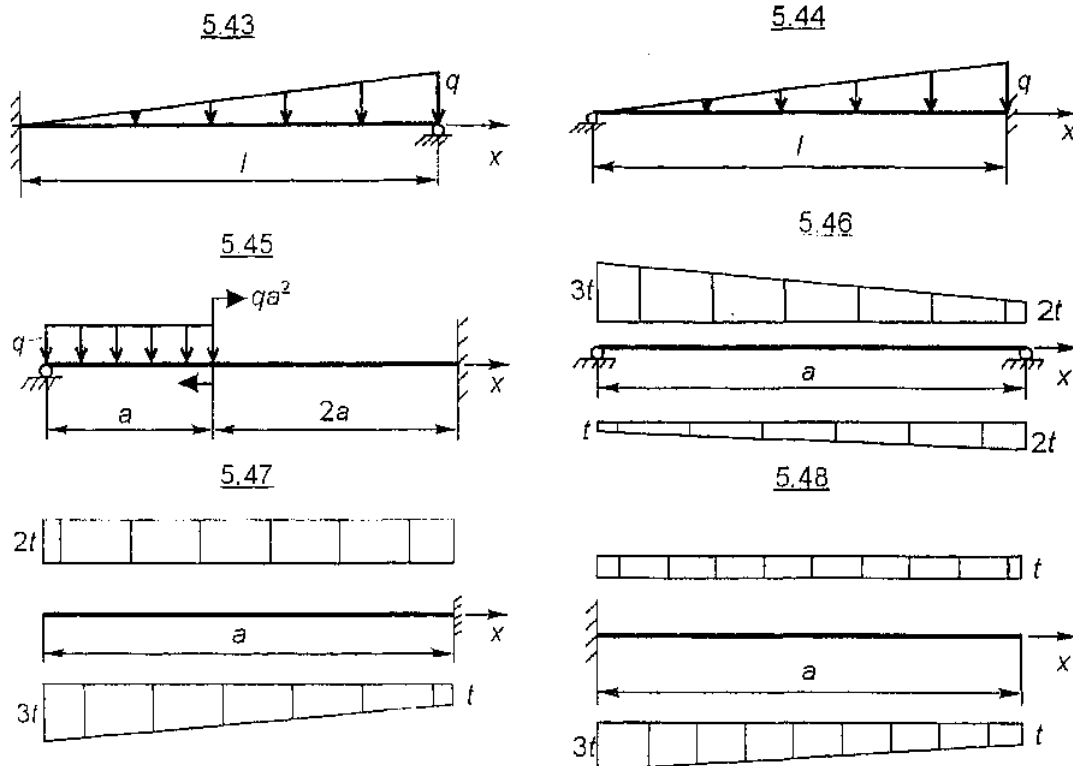
— для 5.39: $a = 4$ м, $q = 20$ кН/м, $M_0 = 40$ кН·м, сечение — двутавр № 30 ГОСТ 8239-72.

5.40—5.42. Для двухопорных балок, изображенных на соответствующих рисунках, определить углы поворота θ_A и θ_B опорных сечений и прогиб δ_D свободного конца.

5.43—5.45. Найти форму упругой линии приведенных на соответствующих рисунках балок постоянной жесткости.



5.46—5.48. Найти форму упругой линии испытывающих температурное воздействие балок, приведенных на соответствующих рисунках. Положить, что жесткости на изгиб и коэффициент температурного расширения постоянны по длине, а высота сечения равна h .



5.49. Шарнирно опертая балка длиной l нагружена в середине пролета силой P . Подобрать номер двутавра ГОСТ 8239-72 поперечного сечения балки. В расчетах принять: $l = 2$ м, $P = 15$ кН, $[\sigma] = 160$ МПа.

5.50. Двутавровая балка № 16 ГОСТ 8239-72 длиной 1,5 м заделана одним концом и нагружена силой $P = 10$ кН на другом конце. Определить максимальные нормальные и касательные напряжения в опасном сечении.

5.51. Определить нормальные напряжения в поперечном сечении балки на расстоянии 3 см от нейтральной оси, если сечение — прямоугольник ширины $b = 5$ см и высоты $h = 12$ см, а

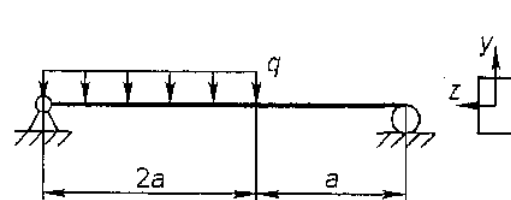


Рис. 5.17

$Q = 1$ кН и $M = 1$ кН·м.

5.52. Для двухопорной балки, изображенной на рис. 5.17, подобрать номер швеллера ГОСТ 8240-72. В расчетах принять: $q = 5$ кН/м, $a = 1$ м, $[\sigma] = 160$ МПа.

5.53. Для двухопорной балки, изображенной на рис. 5.18, подобрать прямоугольное сечение с соотношением ширины и высоты $b/h = 2/3$. В расчетах принять: $M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $a = 1 \text{ м}$, $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.

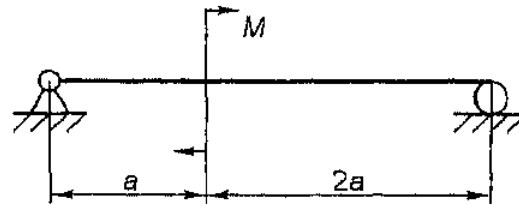


Рис. 5.18

5.54. На балку, изображенную на рис. 5.19, действуют сила $P = 60 \text{ кН}$ и момент $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Подобрать двутавровое сечение ГОСТ 8239-72. В расчетах принять $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$.

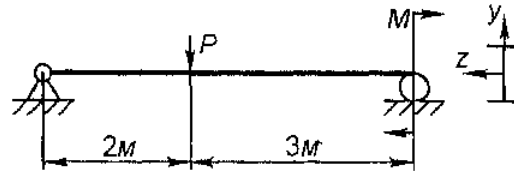


Рис. 5.19

5.55. К балке, изображенной на рис. 5.20, приложены силы $P_1 = 25 \text{ кН}$, $P_2 = 12 \text{ кН}$ и равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 6 \text{ кН/м}$. Подобрать сечение балки, составленное из двух швеллеров ГОСТ 8240-72. В расчетах принять $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$.

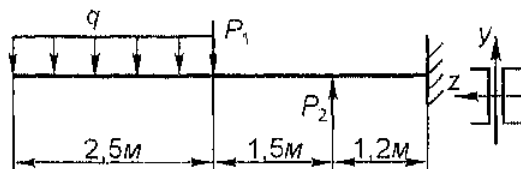


Рис. 5.20

5.56. Для консольной балки, изображенной на рис. 5.21, из условий прочности найти связь между размерами сечения a и b . В расчетах принять: $[\sigma]_c = 3 [\sigma]_p$.

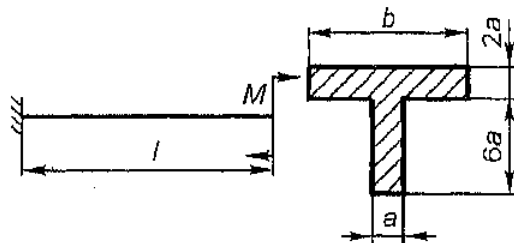


Рис. 5.21

§ 5.3. Касательные напряжения. Центр изгиба

При поперечном изгибе балок для определения касательных напряжений вводятся дополнительные гипотезы. Причем для каждого типа сечения они свои. Далее везде Oz — главная центральная ось.

Аксиома 8.4. При поперечном изгибе в плоскости Oxy балок сплошного сечения касательные напряжения сонаправлены с

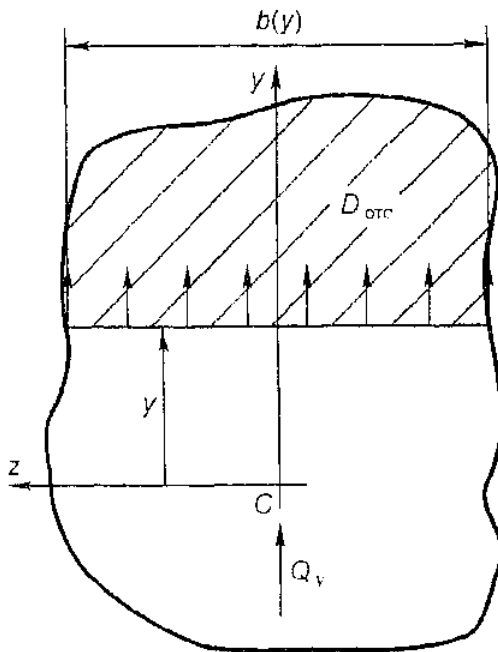


Рис. 5.22

вектором $Q_y j$ (перпендикулярны нейтральному слою, $\tau = \tau_{xy} j$ и распределены по хорде равномерно (рис. 5.22). ■

Отсюда для балок постоянного сплошного сечения следует формула Журавского:

$$\tau = \tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{b J_z}, \quad (5.30)$$

где $S_z^{\text{отс}} = S_z^{\text{отс}}(y)$ — статический момент относительно оси Oz отсеченной части $D^{\text{отс}}$ области D ($D^{\text{отс}}$ — область, ограниченная снизу прямой $l: y = \text{const}$, см. рис. 5.22), $b = b(y)$ — длина хорды (отрезка $l \cap D$).

Эта формула для некоторых сечений дает большую погрешность. Соответствующие точные результаты получаются методами теории упругости.

Отметим, что перерезывающая сила является равнодействующей для касательных напряжений:

$$Q_y = \iint_D \tau_{xy} dx dy. \quad (5.31)$$

Эпюры касательных напряжений и их максимумы для некоторых типов сплошных сечений указаны в § П.2 (табл. П.6).

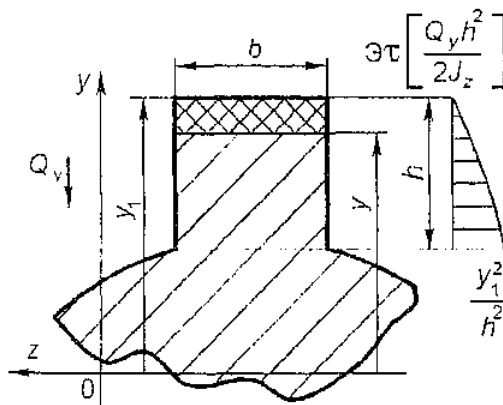


Рис. 5.23

Пример 5.8. Найти распределение касательных напряжений в изображенном на рис. 5.23 прямоугольнике, являющемся элементом сплошного сечения (боковые стороны свободные).

Решение. Для отсеченной части, представленной на рис. 5.23, с использованием результатов гл. 3 имеем:

$$S_z^{\text{отс}} = b \cdot (y_1 - y) \cdot \left(y + \frac{y_1 - y}{2} \right) = \frac{b}{2} (y_1^2 - y^2), \quad S_z^{\text{отс}}(y_1) = 0,$$

$$S_z^{\text{отс}}(y_1 - h) = \frac{bh}{2} (2y_1 - h).$$

Касательные напряжения определяются формулой (5.30):

$$\tau = \frac{Q_y}{2J_z} (y_1^2 - y^2), \quad \tau(y_1) = 0, \quad \tau(y_1 - h) = \frac{Q_y h}{2J_z} (2y_1 - h).$$

Очевидно, если $0 \notin [y_1, y_1 - h]$, то касательные напряжения на этом элементе не имеют экстремума, а в противном случае они достигают максимума в точке $y = 0$:

$$\tau_{\text{max}} = \tau(0) = \frac{Q_y y_1^2}{2J_z}.$$

Вариант Эт, соответствующий первому случаю, приведен на рис. 5.23.

В частном случае сечения в виде прямоугольника отсюда следует результат, приведенный в табл. П.6 § П.2. ■

Пример 5.9. Найти распределение касательных напряжений от перерезывающей силы Q_y и их максимум для сечения, изображенного на рис. 5.9, в.

Решение. Это сечение вместе со своими главными центральными осями, положение которых определено в примере 5.4, изображено на рис. 5.24.

Используя формулу (5.30), а также результаты примера 5.8 и гл. 3, по участкам, соответствующим постоянной ширине сечения, последовательно, начиная с верхнего участка, находим $S_z^{\text{отс}}$ и τ :

— участок 1 ($2,5b \leq y \leq 4,5b = y_1$):

$$S_z^{\text{отс}} = \frac{2b}{2} = [(4,5b)^2 - y^2] = b(20,2b^2 - y^2),$$

$$S_z^{\text{отс}}(4,5b) = 0, \quad S_z^{\text{отс}}(2,5b) = S_{z1} = 14b^3,$$

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{2bJ_z} = \frac{Q_y}{2J_z} (20,2b^2 - y^2), \quad \tau(4,5b) = 0, \quad \tau(2,5b) = 7 \frac{Q_y b^2}{J_z};$$

— участок 2 ($0,5b \leq y \leq 2,5b = y_1$):

$$S_z^{\text{отс}} = S_{z1} + \frac{6b}{2} [(2,5b)^2 - y^2] = 3b (10,9b^2 - y^2),$$

$$S_z^{\text{отс}}(2,5b) = S_{z1}, \quad S_z^{\text{отс}}(0,5b) = S_{z2} = 32b^3,$$

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{6bJ_z} = \frac{Q_y}{2J_z} (10,9b^2 - y^2), \quad \tau(2,5b) = 2,33 \frac{Q_y b^2}{J_z},$$

$$\tau(0,5b) = 5,33 \frac{Q_y b^2}{J_z};$$

— участок 3 ($-1,5b \leq y \leq 0,5b = y_1$):

$$S_z^{\text{отс}} = S_{z2} + \frac{2b}{2} [(0,5b)^2 - y^2] = b (32,2b^2 - y^2),$$

$$S_z^{\text{отс}}(0,5b) = S_{z2}, \quad S_z^{\text{отс}}(-1,5b) = S_{z3} = 30b^3,$$

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{2bJ_z} = \frac{Q_y}{2J_z} (32,2b^2 - y^2), \quad \tau(0,5b) = 16 \frac{Q_y b^2}{J_z},$$

$$\tau(-1,5b) = 15 \frac{Q_y b^2}{J_z}, \quad \tau_{\text{max}} = \tau(0) = 16,1 \frac{Q_y b^2}{J_z};$$

— участок 4 ($-3,5b \leq y \leq -1,5b = y_1$):

$$S_z^{\text{отс}} = S_{z3} + \frac{6b}{2} [(1,5b)^2 - y^2] = 3b (12,2b^2 - y^2),$$

$$S_z^{\text{отс}}(-1,5b) = S_{z3}, \quad S_z^{\text{отс}}(-3,5b) = 0,$$

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{6bJ_z} = \frac{Q_y}{2J_z} (12,2b^2 - y^2), \quad \tau(-1,5b) = 5 \frac{Q_y b^2}{J_z}, \quad \tau(-3,5b) = 0.$$

Здесь значения $S_z^{\text{отс}}(-3,5b)$ и $\tau(-3,5b)$ вычислялись для проверки, поскольку заранее известно, что они равны нулю.

Соответствующая Эт приведена на рис. 5.24. ■

Аксиома 8.5. При поперечном изгибе в плоскости Oxy балок тонкостенного сечения касательные напряжения направлены по

касательной к средней линии и равномерно распределены по толщине (рис. 5.25).

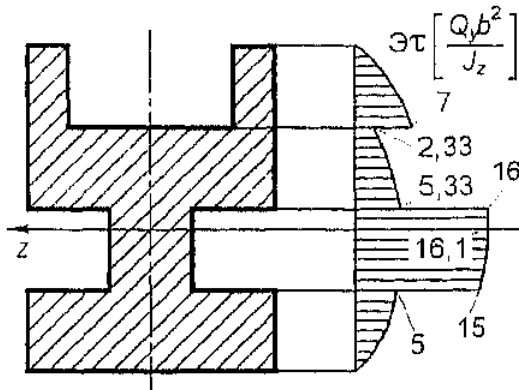


Рис. 5.24

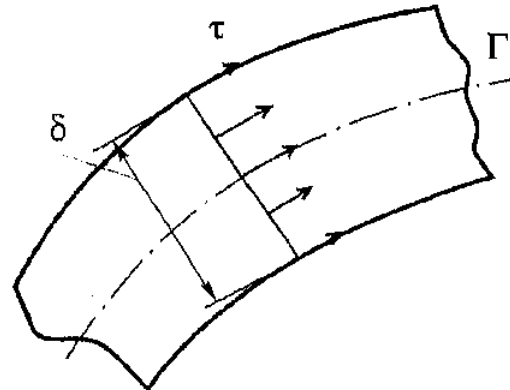


Рис. 5.25

Отсюда для балок постоянного незамкнутого тонкостенного сечения вытекает следующая формула:

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{\delta J_z}, \quad (5.32)$$

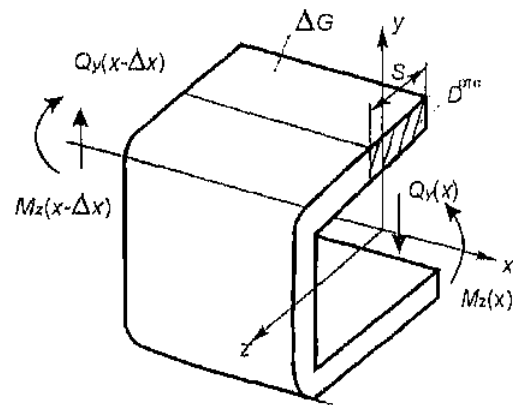
где $S_z^{\text{отс}} = S_z^{\text{отс}}(s)$ статический момент относительно оси Oz отсеченной части $D^{\text{отс}}$ области D (область $D^{\text{отс}}$ отсекается от края сечения, рис. 5.26), s — длина дуги средней линии отсеченной части.

В этом варианте перерезывающая сила также есть равнодействующая касательных напряжений (τ — вектор касательных напряжений):

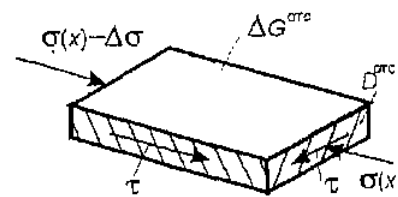
$$Q_{y,j} = \int_{\Gamma} \tau \delta ds. \quad (5.33)$$

При построении Эт для тонкостенных сечений применяется следующее правило.

1. Сечение с координатой x рассматривается со стороны положительного направления оси Ox . По правилу знаков (см. § 5.1)



а)



б)

Рис. 5.26

для элемента ΔG бруса с торцами, имеющими координаты $x - \Delta x$ и x , перерезывающая сила $Q_y(x)$ направлена вниз (рис. 5.26, а).

2. Из уравнения равновесия соответствующей $D^{\text{отс}}$ отсеченной части $\Delta G^{\text{отс}}$ элемента ΔG и закона парности касательных (см. (П.14)) напряжений находим их направление в сечении (рис. 5.26, б, здесь для примера рассмотрена отсеченная часть элемента, имеющего свободным правый край и расположенного выше нейтрального слоя). При этом полагаем, что $\Delta \sigma > 0$.

Иногда поперечную силу направляют вверх. Тогда необходимо соответствующим образом изменить знаки всех остальных величин.

3. Эт строим слева от направления потока касательных напряжений. При этом составное сечение разбиваем на участки, концы которых обозначаем цифрами или прописными буквами. Построение эпюры начинаем с концов сечения, учитывая аддитивность величины $S_z^{\text{отс}}$. ■

При построении Эт полезны следующие выводы для симметричных сечений, вытекающие из формул (5.30) и (5.32).

Утверждение 5.3.

1. Если сечение имеет ось симметрии, параллельную оси Oy , то

а) Эт кососимметрична;

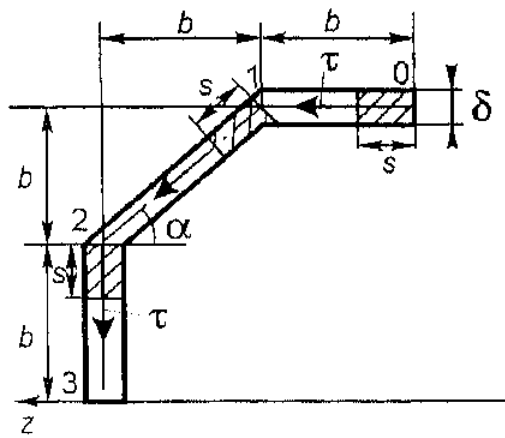
б) в точках пересечения оси симметрии и средней линии $\tau = 0$.

2. Если осью симметрии является Oz , то Эт имеет прямую симметрию. ■

Изучение распределения касательных напряжений в балках замкнутого тонкостенного поперечного сечения является предметом строительной механики. Однако если такое сечение имеет ось симметрии, параллельную оси Oy , то согласно утверждению 5.3 в точке пересечения оси со средней линией касательные напряжения равны нулю, и можно считать, что сечение разомкнуто в этой точке.

Пример 5.10. Для тонкостенного сечения, представленного на рис. 5.9, б, определить распределение касательных напряжений от перерезывающей силы Q_y и их максимальное значение.

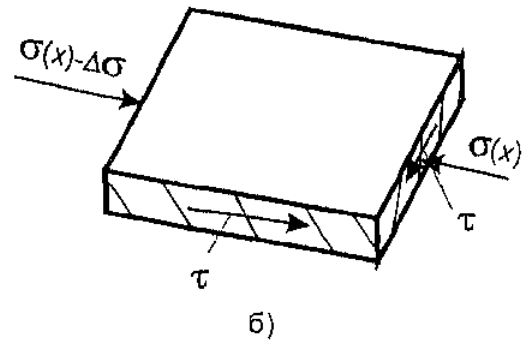
Решение. Поскольку сечение симметрично относительно оси Oz , то в силу утверждения 5.3 Эт имеет прямую симметрию. Поэтому достаточно рассмотреть лишь верхнюю половину сечения. Ее разбиение на участки указано на рис. 5.27, а. Здесь же



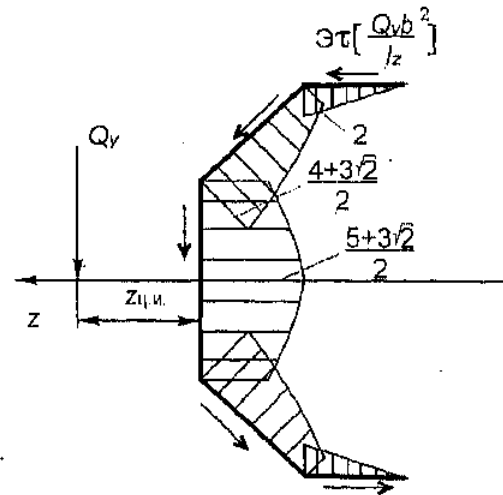
a)

изображено направление потоков касательных напряжений, определенное с помощью указанного выше правила (рис. 5.27, б).

Используя формулу (5.32) и результаты гл. 3, последовательно по участкам находим $S_z^{отс}$ и τ (отсеченные части на рис. 5.27, а заштрихованы; s — текущая координата):
— участок 0—1:



б)



в)

Рис. 5.27

$$S_{z01}^{отс} = \delta \cdot s \cdot 2b = 2b\delta s, \quad S_{z0} = S_{z01}^{отс}(0) = 0, \quad S_{z1} = S_{z01}^{отс}(b) = 2b^2\delta,$$

$$\tau_{01} = 2 \frac{Q_y b}{J_z} s, \quad \tau_0 = \tau_{01}(0) = 0, \quad \tau_1 = \tau_{01}(b) = 2 \frac{Q_y b^2}{J_z};$$

— участок 1—2 ($\alpha = \pi/4$):

$$S_{z12}^{отс} = S_{z1} + \delta s \left(2b - \frac{s}{2} \sin \alpha \right) = \delta \left[2b^2 + s \left(2b - \frac{s}{2\sqrt{2}} \right) \right],$$

$$S_{z2} = S_{z12}^{отс}(b\sqrt{2}) = \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) b^2 \delta,$$

$$\tau_{12} = \frac{Q_y}{J_z} \left[2b^2 + s \left(2b - \frac{s}{2\sqrt{2}} \right) \right], \quad \tau_2 = \tau_{12}(b\sqrt{2}) = \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \frac{Q_y b^2}{J_z};$$

-- участок 2—3:

$$S_{z23}^{\text{отс}} = S_{z2} + \delta s \left(b - \frac{s}{2} \right) = \delta \left[\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) b^2 + s \left(b - \frac{s}{2} \right) \right],$$

$$S_{z3} = S_{z23}^{\text{отс}}(b) = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2} b^2 \delta,$$

$$\tau_{z3} = \frac{Q_y}{J_z} \left[\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) b^2 + s \left(b - \frac{s}{2} \right) \right], \quad \tau_3 = \tau_{z3}(b) = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2} \frac{Q_y b^2}{J_z}.$$

Здесь ввиду непрерывности функций $S_z^{\text{отс}}(s)$ и $\tau(s)$ их значения на участках 1—2 и 2—3 вычислялись только на концах участков.

На участке 1—2 необходимо исследовать касательные напряжения (статические моменты) на экстремум:

$$(S_{z12}^{\text{отс}})' = \delta \left(2b - \frac{s}{\sqrt{2}} \right) = 0, \quad s = 2b\sqrt{2} \notin (0, b\sqrt{2}).$$

Следовательно, экстремумов нет.

Эт приведена на рис. 5.27, а. Из нее вытекает, что

$$\tau_{\max} = \tau_3 = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2} \frac{Q_y b^2}{J_z}. \quad \blacksquare$$

При поперечном изгибе крутящий момент в общем случае не равен нулю, так как отличны от нуля касательные напряжения (см. (П.24)). Представим его следующим образом:

$$M_K = M_K^{Q_z} + M_K^{Q_y}. \quad (5.34)$$

Здесь $M_K^{Q_y}$ и $M_K^{Q_z}$ — составляющие крутящего момента от касательных напряжений, соответствующих Q_y и Q_z . Они согласно (П.24) вычисляются так:

— сплошное сечение:

$$M_K^{Q_y} = \int \int_D z \tau_{xy} dy dz, \quad M_K^{Q_z} = \int \int_D y \tau_{xz} dy dz; \quad (5.35)$$

тонкостенное сечение:

$$M_K^{Q_y} = \int_l z[\tau, k] ds, \quad M_K^{Q_z} = \int_l y[\tau, j] ds. \quad (5.36)$$

Определение 5.7. Точка A называется *центром изгиба* сечения, если крутящий момент относительно нее (результатирующий момент относительно точки A касательных напряжений) равен нулю (рис. 5.28):

$$M_{кА} = 0. \blacksquare \quad (5.37)$$

Утверждение 5.4. Точка $A(y_{ц.и.}, z_{ц.и.})$ — центр изгиба только в том случае, если крутящий момент M_k уравновешивается перерезывающими силами, приложенными в центре изгиба, т.е. выполняются равенства:

$$\begin{aligned} M_{кy}^Q &= Q_y z_{ц.и.}, \\ M_{кz}^Q &= Q_z y_{ц.и.}. \blacksquare \end{aligned} \quad (5.38)$$

Отметим, что координаты центра изгиба являются геометрическими характеристиками сечения, так как $M_{кy}^Q$ и $M_{кz}^Q$ пропорциональны Q_y и Q_z .

Для сплошных сечений центры изгиба и тяжести мало различаются. Поэтому задача об определении положения центра изгиба рассматривается в сопротивлении материалов только для тонкостенных сечений. При ее решении полезно следующее утверждение.

Утверждение 5.5. Если сечение имеет ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси.

Потенциальная энергия при изгибе в плоскости Oxy балки длиной l выражается через внутренние силовые факторы следующим образом:

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2}{2EJ_z} dx + \int_0^l \frac{Q_y^2}{2GF} k_y dx. \quad (5.39)$$

Коэффициент k_y в этой формуле вычисляется так:

— сплошное сечение:

$$k_y = \frac{F}{J_z^2} \iint_D \left(\frac{S_z^{отс}}{b} \right)^2 dy dz; \quad (5.40)$$

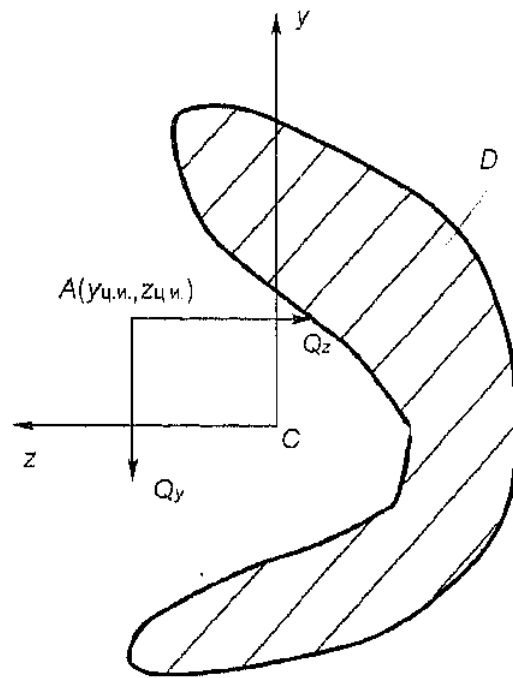


Рис. 5.28

— тонкостенное сечение:

$$k_y = \frac{F}{J_z^2} \int_{\Gamma} \frac{(S_z^{\text{отс}})^2}{\delta} ds. \quad (5.41)$$

Пример 5.11. Для тонкостенного сечения, изображенного на рис. 5.27, определить положение центра изгиба.

Решение. Первым этапом решения задач об определении центра изгиба является построение эпюры касательных напряжений. Для данного сечения этот вопрос решен в примере 5.10 (см. рис. 5.27, в).

Поскольку Oz — ось симметрии сечения, то в силу утверждения 5.5 центр изгиба A имеет координаты $(0; z_{\text{ц.и.}})$. Вторая координата находится из первого равенства в (5.38), левая часть которого вычисляется следующим образом:

$$M_{K''}^Q = 2 (T_{01} \cdot 2b + T_{12} \cdot h_{12}) = 2b (2T_{01} + T_{12}/\sqrt{2}).$$

Здесь T_{01} и T_{12} — равнодействующие касательных напряжений на участках 0—1 и 1—2 (выражения для касательных напряжений берем из примера 5.10):

$$T_{01} = \int_0^b \tau_{01} \delta ds = 2 \frac{Q_y \delta b}{J_z} \int_0^b s ds = \frac{Q_y \delta b^3}{J_z},$$

$$T_{12} = \int_0^{b\sqrt{2}} \tau_{12} \delta ds = \frac{Q_y \delta}{J_z} \int_0^{b\sqrt{2}} \left[2b^2 + s \left(2b - \frac{s}{2\sqrt{2}} \right) \right] ds = \frac{Q_y \delta b^3}{J_z} \left(\frac{5}{3} + 2\sqrt{2} \right),$$

а h_{12} — плечо силы T_{12} .

Следовательно,

$$M_{K''}^Q = 2 \frac{Q_y \delta b^4}{J_z} \left[2 + \left(\frac{5}{3} + 2\sqrt{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = Q_y z_{\text{ц.и.}},$$

откуда находим вторую координату центра изгиба:

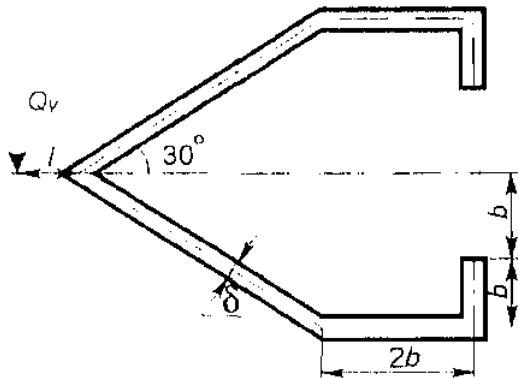
$$z_{\text{ц.и.}} = \frac{\delta b^4}{J_z} \left(8 + \frac{5\sqrt{2}}{3} \right). \blacksquare$$

Задачи

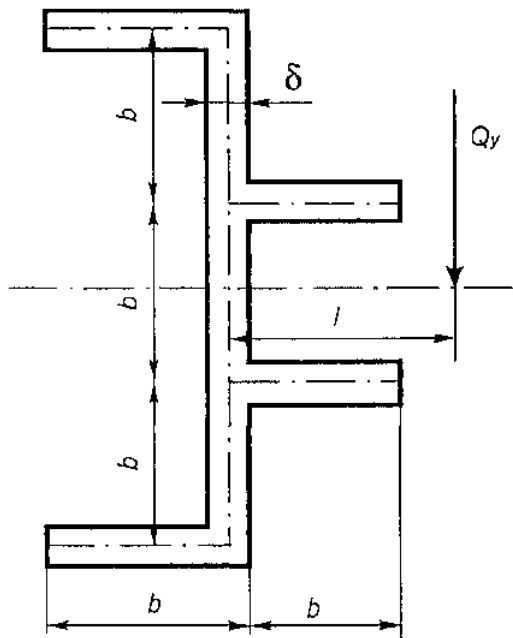
5.57—5.67. Для сечений, изображенных на соответствующих рисунках, построить эпюру τ от действия Q_y и найти положение центра изгиба.

5.68—5.78. Для сечений, изображенных на соответствующих рисунках, построить эпюру τ от действия горизонтальной перерезывающей силы.

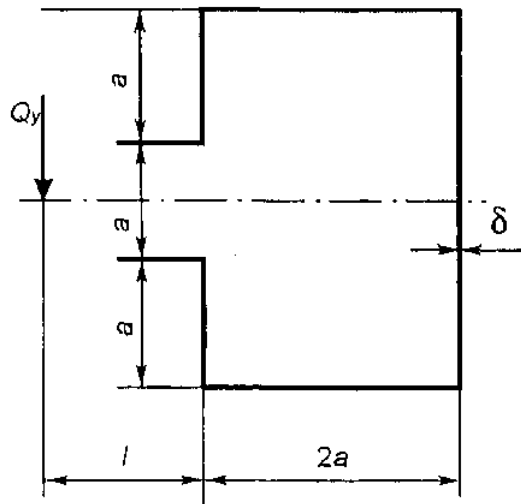
5.57; 5.68



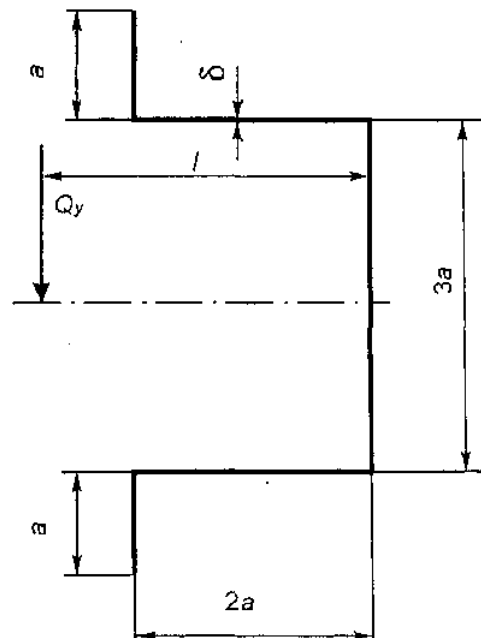
5.58; 5.69



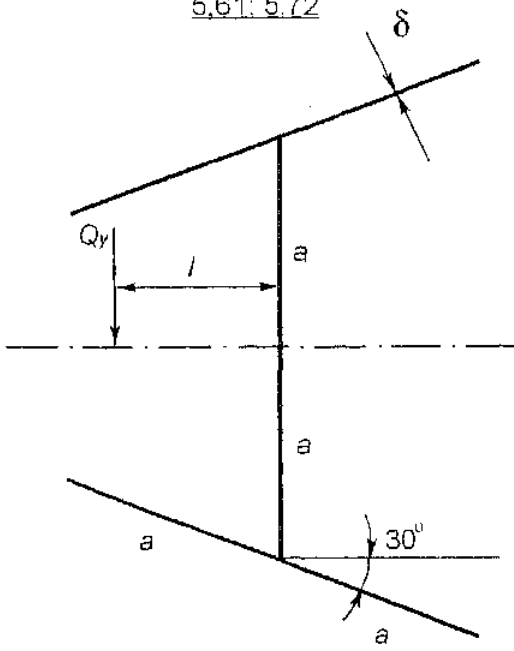
5.59; 5.70



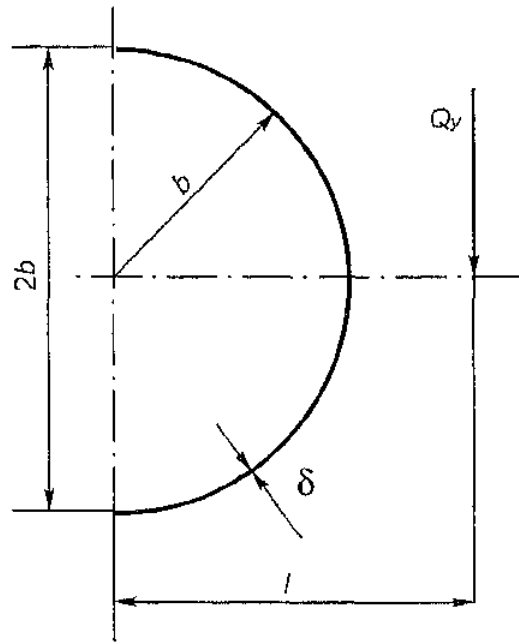
5.60; 5.71



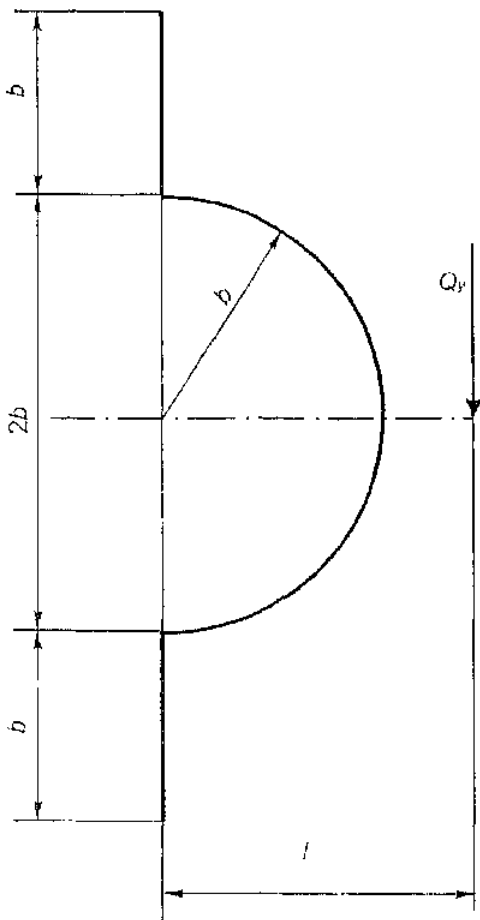
5.61; 5.72



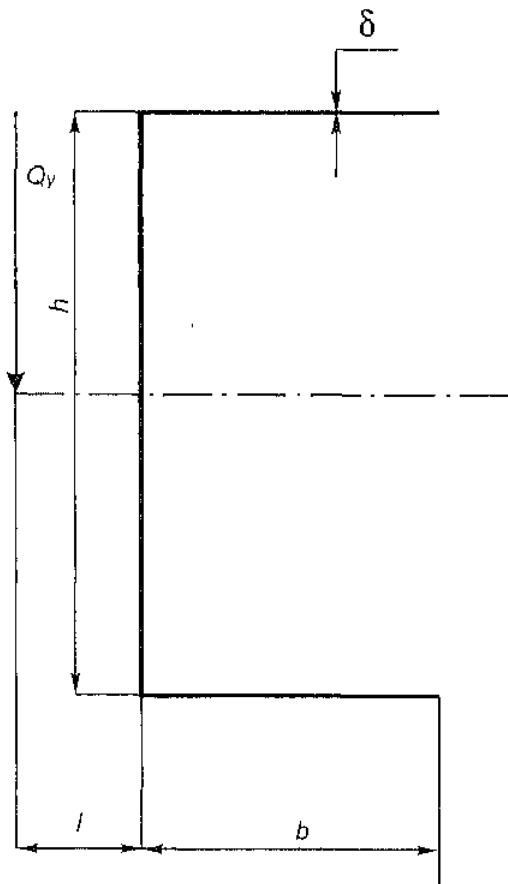
5.62; 5.73



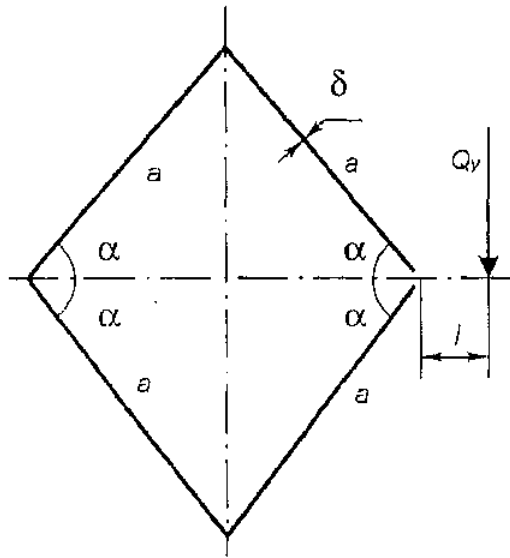
5.63; 5.74



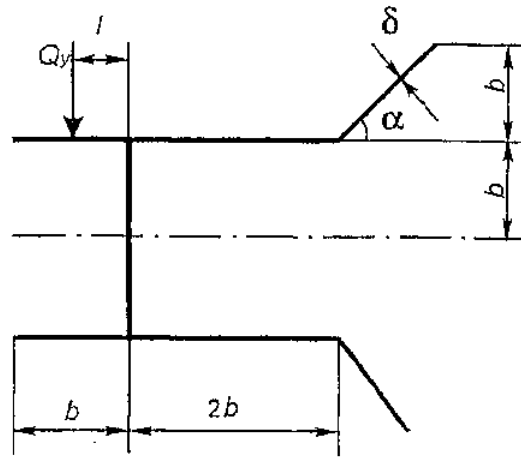
5.64; 5.75



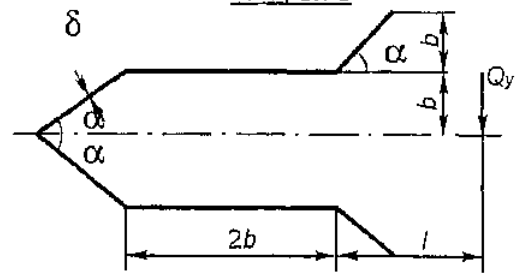
5.65; 5.76



5.66; 5.77



5.67; 5.78



5.79. Для изображенного на рис. 5.29 несимметричного тонкостенного двутавра, подвергающегося изгибу в вертикальной плоскости, построить эпюру τ и определить положение центра изгиба. В расчетах принять: $h = 36$ см, $b_1 = 45$ см, $b_2 = 30$ см, $\delta = 1$ см, $t = 2$ см, $Q = 350$ кН.

5.80—5.82. Для сплошных сечений, изображенных на соответствующих рисунках, построить эпюру τ от действия вертикальной перерезывающей силы.

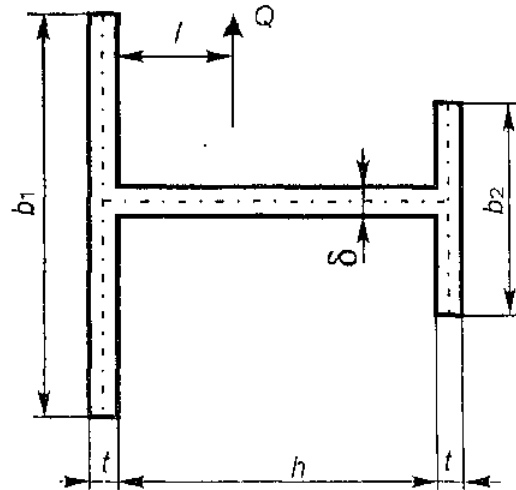
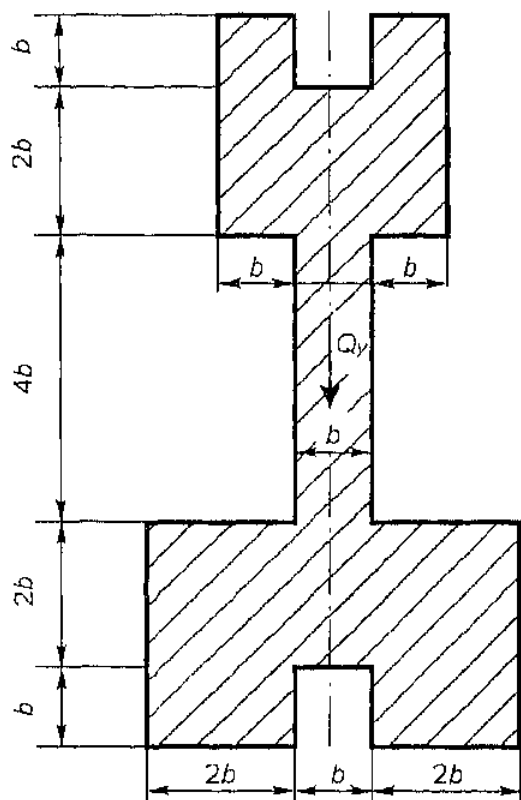
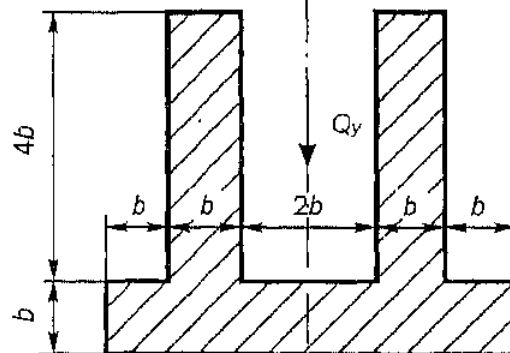


Рис. 5.29

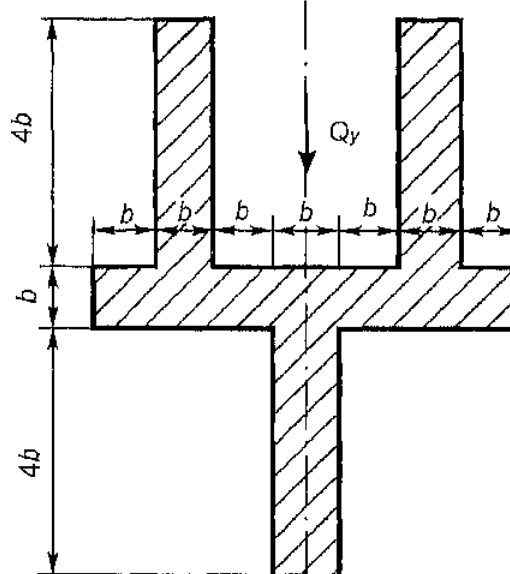
5.80



5.81



5.82



Глава 6

КОСОЙ ИЗГИБ И ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

В этой главе рассматриваются два варианта сочетания простейших видов деформации стержня. При этом везде полагается, что Syz — главная центральная система координат поперечного сечения.

§ 6.1. Косой изгиб

Определение 6.1. Пусть $J_y \neq J_z$. Тогда *косым изгибом* балки называется такой поперечный изгиб, при котором отличны от нуля оба изгибающих момента:

$$M_y \neq 0, \quad M_z \neq 0. \quad \blacksquare \quad (6.1)$$

Если прямой изгиб является частным случаем поперечного, то косой изгиб — комбинация прямых изгибов в плоскостях Oxy и Oxz — и есть общий вариант поперечного изгиба. Название этого вида деформации связано с тем, что в общем случае деформированная ось бруса является пространственной кривой. Вариант равенства $J_y = J_z$ в определении исключается, так как в этом случае любая центральная система координат является главной (см. утверждение 3.8). И следовательно, одну из осей всегда можно совместить с вектором изгибающего момента $M_x = -M_y j + M_z k$. В результате приходим к прямому поперечному изгибу (см. гл. 5).

В соответствии с принципом суперпозиции (см. утверждение П.2) напряжения при косом изгибе находятся как сумма напряжений от соответствующих прямых изгибов. В частности, для нормальных напряжений в соответствии с формулой в (5.6) имеем

$$\sigma = \sigma^{M_z} + \sigma^{M_y} = -\frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z, \quad (6.2)$$

где σ^{M_z} и σ^{M_y} — напряжения, вызванные моментами M_z и M_y .

Из формулы (6.2) и определения 5.4 вытекают следующие выводы.

Утверждение 6.1.

1. Нейтральная линия является проходящей через центр тяжести прямой (рис. 6.1)

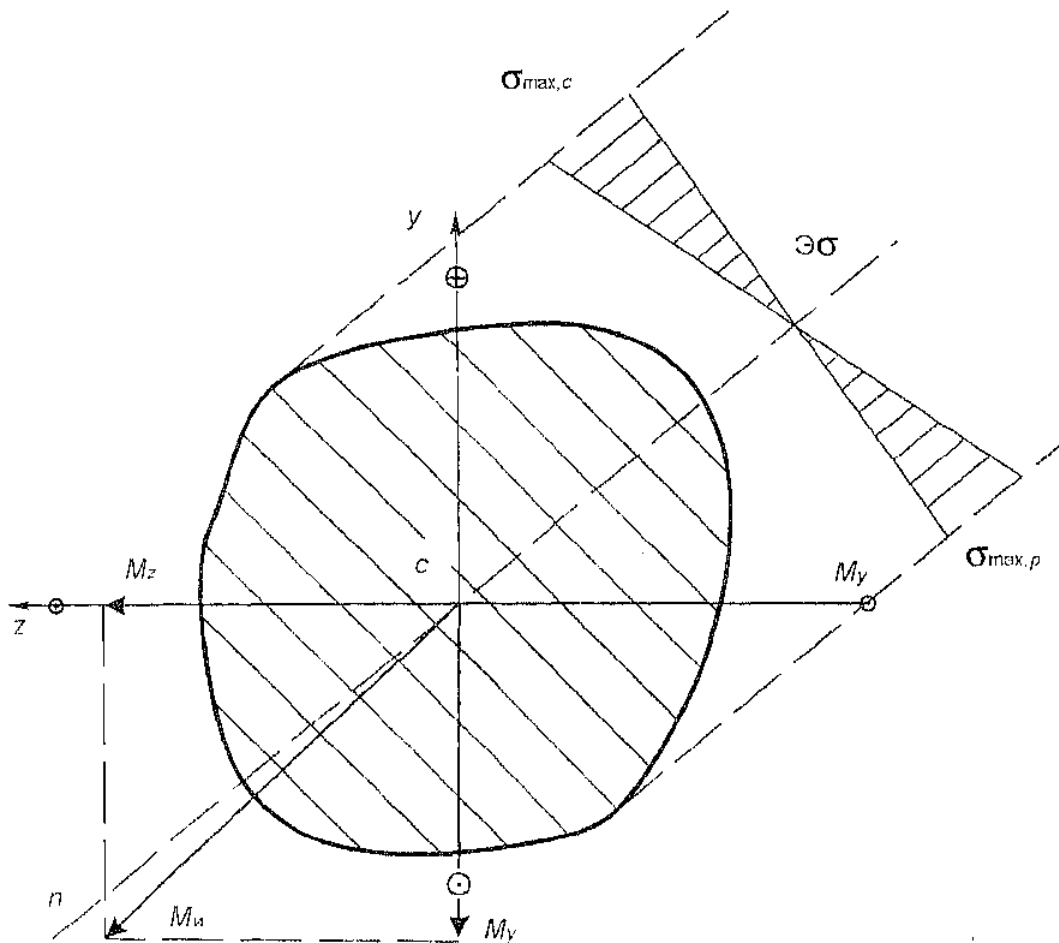


Рис. 6.1

$$n: \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z = 0. \quad (6.3)$$

Причем она коллинеарна вектору M_n только при условии равенства моментов инерции: $J_y = J_z$ (это соответствует прямому поперечному изгибу).

2. На прямых, параллельных нейтральной линии, напряжения постоянны.

3. Нормальные напряжения принимают максимальное и минимальное значения в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии. ■

Второй пункт этого утверждения позволяет строить Эσ на прямой, перпендикулярной нейтральной линии (см. рис. 6.1), а третий — выбирать $\sigma_{\max p}$ и $\sigma_{\max c}$ так же, как это делается при прямом изгибе (см. § 5.2).

Касательные напряжения вычисляются аналогично (6.2). Однако здесь должны суммироваться соответствующие векторы:

$$\tau = \tau^{M_z} + \tau^{M_y}. \quad (6.4)$$

Также в векторном смысле должны складываться прогибы δ_z и δ_y , вызванные моментами M_z и M_y :

$$\delta = \delta_y j + \delta_z k. \quad (6.5)$$

Оказывается, что при выполнении некоторых условий упругая линия балки и при косом изгибе может быть плоской.

Утверждение 6.2. Если угловой коэффициент уравнения нейтральной линии $z = k_y y$ не зависит от продольной координаты:

$$k_n = -\frac{J_y M_z}{J_z M_y} = \text{const}, \quad (6.6)$$

то упругая линия является плоской. ■

Пример 6.1. Построить эпюру нормальных напряжений и определить максимальные растягивающее и сжимающее напряжения для сечения, изображенного на рис. 6.2.

Решение. Находим геометрические характеристики сечения. Сначала определяем положение главных центральных осей. Для этого используем вспомогательную систему координат Oy_1z_1 (см. рис. 6.2).

Поскольку Oy_1 — ось симметрии, то она и является главной центральной осью (см. утверждение 3.4), и центр тяжести C имеет координаты $(y_C, 0)$. Рассматривая сечение как внешний квадрат с выброшенным треугольником ADK , определяем координату y_C с помощью формул в (3.6):

$$F_K = (2b)^2 = 4b^2, \quad F_{K1} = b^2, \quad F_T = \frac{1}{2} F_{K1} = \frac{b^2}{2}, \quad F = F_K - F_T = \frac{7}{2} b^2,$$

$$S_{z_1} = F_K \cdot 0 - F_T \frac{4}{3} \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{2b^3}{3\sqrt{2}}, \quad y_C = \frac{S_{z_1}}{F} = -\frac{2\sqrt{2}}{21} b,$$

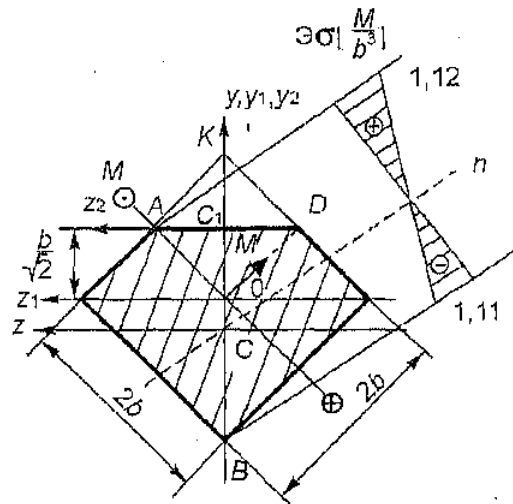


Рис. 6.2

где F_k , F_{k1} и F_T — площади внешнего квадрата, квадрата $AODK$ и треугольника ADK .

Система координат Syz — главная центральная. Переходим к вычислению моментов инерции относительно ее осей. При этом используем указанные выше разбиение сечения и индексы, соответствующие его частям.

Прежде всего, отметим, что для квадратов любые центральные оси являются главными и моменты инерции относительно них равны между собой (см. утверждение 3.8). Следовательно (см. табл. П.3),

$$J_{y_k} = J_{z_k} = J_k = \frac{2b \cdot (2b)^3}{12} = \frac{4}{3} b^4,$$

$$J_{y_2 k1} = J_{z_2 k1} = J_{k1} = \frac{b \cdot b^3}{12} = \frac{1}{12} b^4.$$

Тогда главные моменты инерции сечения удобнее всего вычислить следующим образом:

$$J_{y_T} = \frac{1}{2} J_{k1} = \frac{1}{24} b^4, \quad J_y = J_k - J_{y_T} = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{24} \right) b^4 = \frac{31}{24} b^4;$$

$$J_z = J_k + F_k y_C^2 - \left[\frac{b\sqrt{2} (b/\sqrt{2})^3}{36} + F_T \left(\frac{4}{3} \frac{b}{\sqrt{2}} - y_C \right)^2 \right] = \frac{409}{504} b^4.$$

Определяя проекции изгибающего момента на оси координат

$$M_z = -M \cdot \sin 45^\circ = -\frac{M}{\sqrt{2}}, \quad M_y = -M \cdot \cos 45^\circ = -\frac{M}{\sqrt{2}},$$

найдем уравнение нейтральной линии (см. (6.3)):

$$n: z = -\frac{M_z J_y}{M_y J_z} y = -\frac{409}{504} \cdot \frac{24}{31} y = -\frac{409}{651} y.$$

Наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения имеют место соответственно в точках A и B с координатами (см. рис. 6.2)

$$z_A = \frac{b}{\sqrt{2}}, \quad y_A = \frac{b}{\sqrt{2}} - y_C = \frac{25}{42} b\sqrt{2}; \quad z_B = 0, \quad y_B = -\frac{b}{\sqrt{2}} - y_C = -\frac{17}{42} b\sqrt{2}$$

и с учетом формулы (6.2) определяются следующим образом:

$$\sigma_A = \frac{M}{\sqrt{2}} \left(\frac{\frac{25}{42} b\sqrt{2}}{\frac{409}{504} b^4} + \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{31}{24} b^4} \right) = 1,12 \frac{M}{b^3},$$

$$\sigma_B = -\frac{M}{\sqrt{2}} \frac{\frac{19}{21} b\sqrt{2}}{\frac{409}{504} b^4} = -1,11 \frac{M}{b^3}.$$

Эпюра нормальных напряжений для данного сечения приведена на рис. 6.2. ■

Задачи

6.1. Для сечения, изображенного на рис. 6.3, найти положение нейтральной линии, построить эпюру нормальных напряжений и определить координаты z_0 , y_0 опасной точки в главных центральных осях, считая $\sigma_{пр.р} = \sigma_{пр.с}$.

6.2. Для сечения, изображенного на рис. 6.4, построить эпюру нормальных напряжений и определить нормальное напряжение, действующее в опасной точке сечения. В расчетах принять: $M = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 2 \text{ см}$.

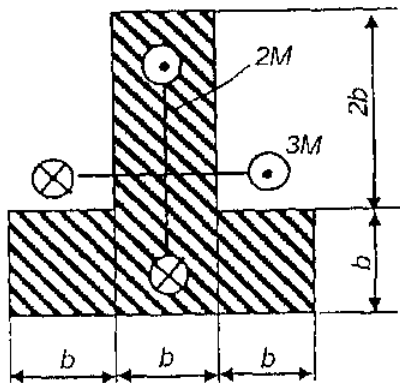


Рис. 6.3

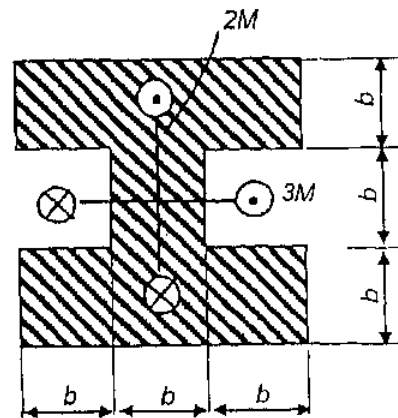


Рис. 6.4

6.3. Для сечения, изображенного на рис. 6.5, построить эпюру нормальных напряжений и определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. В расчетах принять: $M = 0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 1,5 \text{ см}$.

6.4. Для сечения, изображенного на рис. 6.6, построить эпюру нормальных напряжений и определить отношение наибольших растягивающих и сжимающих напряжений.

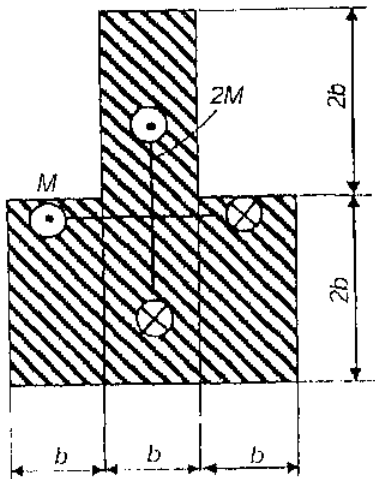


Рис. 6.5

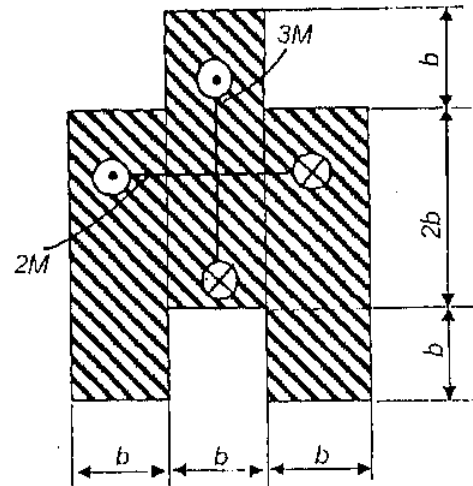


Рис. 6.6

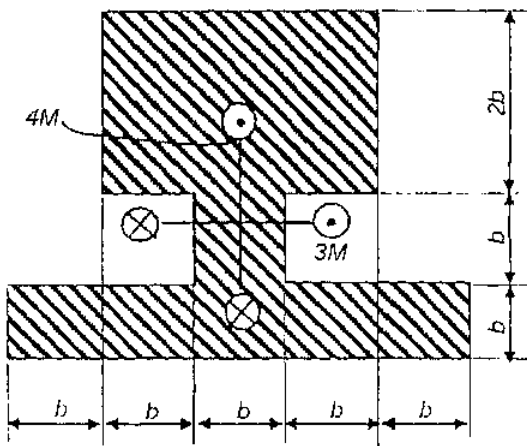


Рис. 6.7

$M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 1 \text{ см}$, $\sigma_{\text{в}} = 180 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{в.р}} = 200 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{в.с}}$ на 25% больше, чем $\sigma_{\text{в.р}}$.

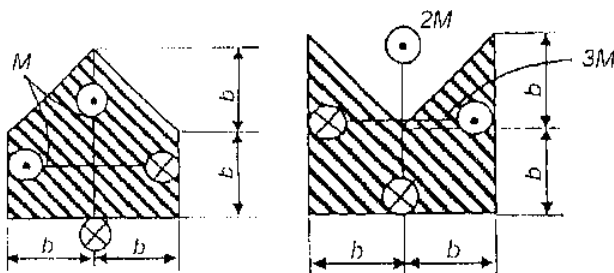


Рис. 6.8

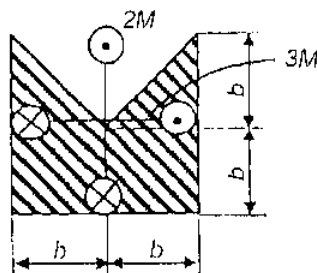


Рис. 6.9

6.5. Для сечения, изображенного на рис. 6.7, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 2 \text{ см}$, $\sigma_{\text{в}} = 180 \text{ МПа}$.

6.6. Для сечения, изображенного на рис. 6.8, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять:

6.7. Для сечения, изображенного на рис. 6.9, построить эпюру нормальных напряжений, выполнить проекровочный расчет на прочность и определить размер b , округлив его с точностью до 5 мм. В расчетах принять: $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

6.8. Для сечения, изображенного на рис. 6.10, найти положение нейтральной линии и вычислить угол между нейтральной линией и плоскостью момента.

6.9. Для сечения, изображенного на рис. 6.11, найти положение нейтральной линии и определить координаты опасной точки в главных центральных осях, считая $\sigma_{пр.р} = \sigma_{пр.с}$.

6.10. Для сечения, изображенного на рис. 6.12, найти положение нейтральной линии, построить эпюру нормальных напряжений и определить наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение. В расчетах принять: $M = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 1 \text{ см}$.

6.11. Для сечения, изображенного на рис. 6.13, построить эпюру нормальных напряжений и определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. В расчетах принять: $M = 0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 1 \text{ см}$.

6.12. Для сечения, изображенного на рис. 6.14, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 2 \text{ см}$, $\sigma_{т} = 160 \text{ МПа}$.

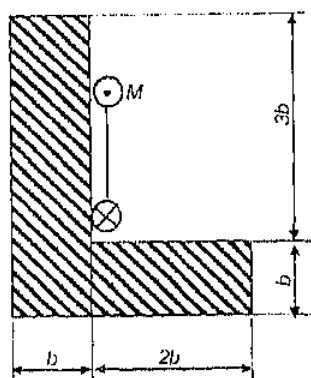


Рис. 6.10

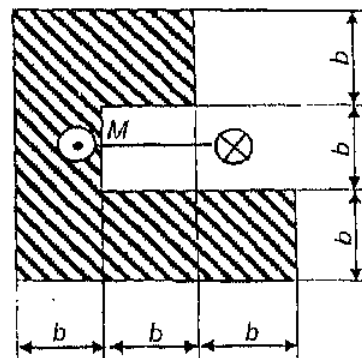


Рис. 6.11

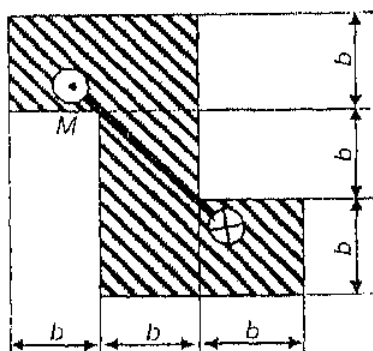


Рис. 6.12

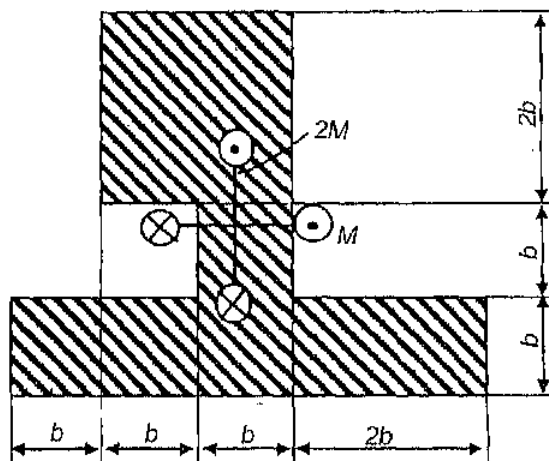


Рис. 6.13

6.13. Для сечения, изображенного на рис. 6.15, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $M = 0,16 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и действует параллельно стороне треугольника, $b = 2 \text{ см}$, $\sigma_{в.р} = 250 \text{ МПа}$; $\sigma_{в.с}$ на 10% меньше, чем $\sigma_{в.р}$.

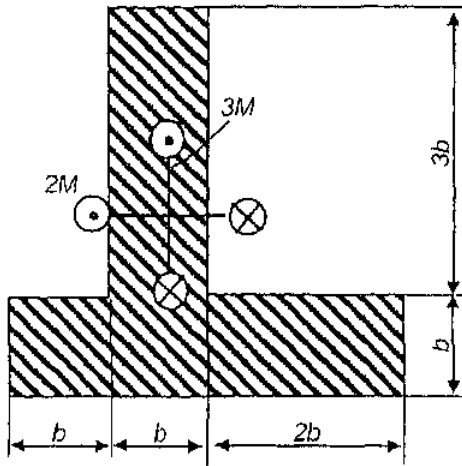


Рис. 6.14

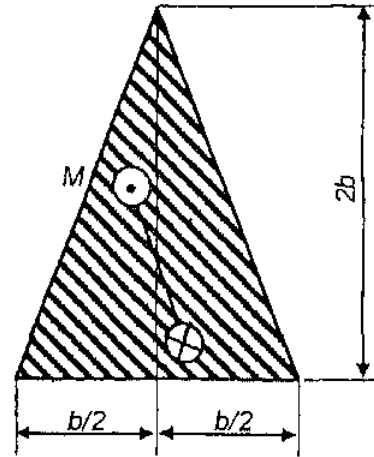


Рис. 6.15

6.14. Для сечения, изображенного на рис. 6.16, построить эпюру нормальных напряжений и определить допускаемый момент M , округлив его с точностью до $0,01 \text{ кН} \cdot \text{м}$. В расчетах принять: $b = 2 \text{ см}$, $\sigma_T = 260 \text{ МПа}$, $n = 1,5$.

6.15. Для сечения, изображенного на рис. 6.17, построить эпюру нормальных напряжений, выполнить проективный расчет на прочность и определить размер b , округлив его с точностью до $0,1 \text{ см}$. В расчетах принять: $M = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$, $n = 1,5$.

6.16. Для сечения, изображенного на рис. 6.18, найти положение нейтральной линии и определить координаты опасных точек в главных центральных осях, считая $\sigma_{пр.р} = \sigma_{пр.с}$.

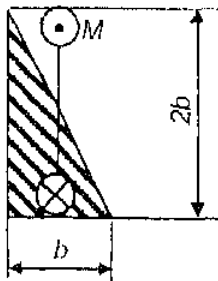


Рис. 6.16

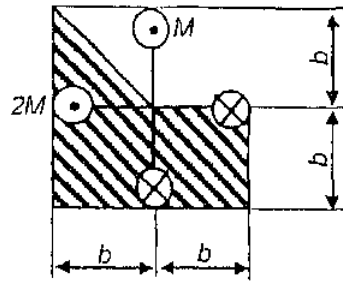


Рис. 6.17

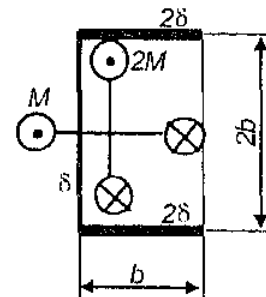


Рис. 6.18

6.17. Для сечения, изображенного на рис. 6.19, построить эпюру нормальных напряжений и определить напряжение, действующее в опасной точке. В расчетах принять: $M = 0,16 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 2 \text{ см}$, $\delta = 2 \text{ мм}$.

6.18. Для сечения, изображенного на рис. 6.20, построить эпюру нормальных напряжений, определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. В расчетах принять:

$$M = 0,16 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$b = 2 \text{ см}, \delta = 2 \text{ мм}.$$

6.19. Для сечения, изображенного на рис. 6.21, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $M = 0,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 2 \text{ см}$, $\delta = 0,1b$, $\sigma_T = 150 \text{ МПа}$.

6.20. Для сечения, изображенного на рис. 6.22, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $M = 0,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 3 \text{ см}$, $\delta = 0,1b$, $\sigma_{в.р} = 130 \text{ МПа}$; $\sigma_{в.с}$ на 20% меньше, чем $\sigma_{в.р}$.

6.21. Для сечения, изображенного на рис. 6.23, построить эпюру нормальных напряжений и определить размер b , округлив его с точностью до 0,1 см. В расчетах принять: $M = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $\delta = 0,1b$, $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

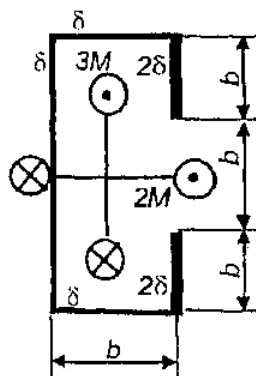


Рис. 6.19

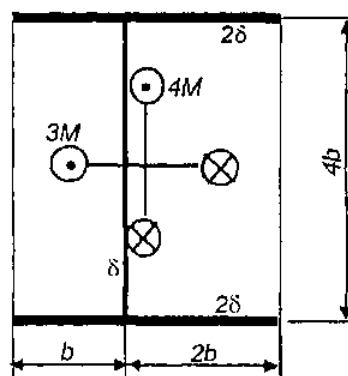


Рис. 6.20

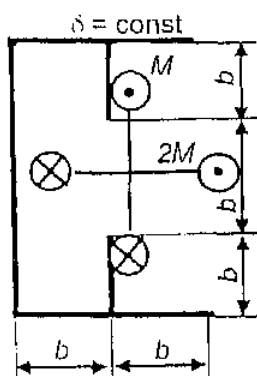


Рис. 6.21

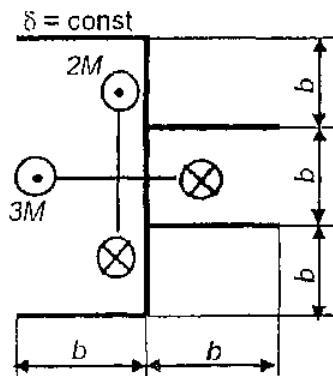


Рис. 6.22

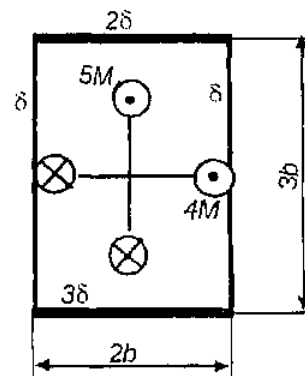


Рис. 6.23

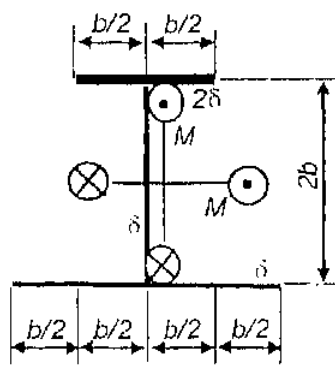


Рис. 6.24

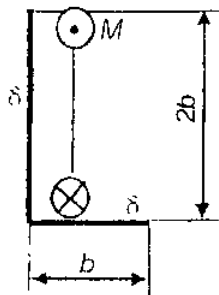


Рис. 6.25

6.26. Для сечения, изображенного на рис. 6.28, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $M = 0,12 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 20 \text{ мм}$, $\delta = 2 \text{ мм}$, $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$.

6.27. Для сечения, изображенного на рис. 6.29, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент за-

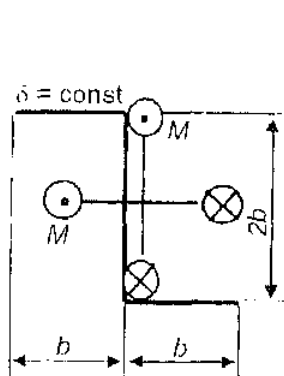


Рис. 6.26

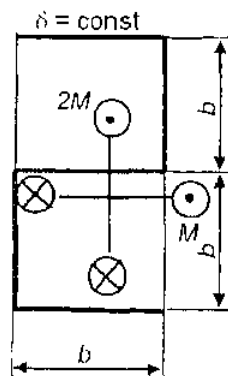


Рис. 6.27

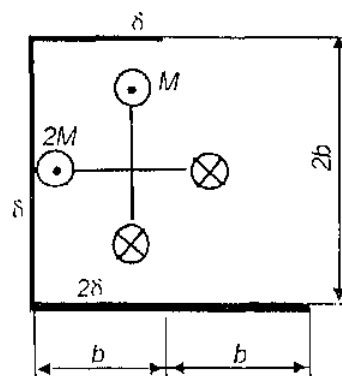


Рис. 6.28

6.22. Для сечения, изображенного на рис. 6.24, построить эпюру нормальных напряжений и определить допустимый момент M . В расчетах принять: $b = 1,5 \text{ см}$, $\delta = 0,15 \text{ см}$, $\sigma_{в.р} = 240 \text{ МПа}$; $\sigma_{в.с}$ на 20% меньше, чем $\sigma_{в.р}$, $n = 1,5$.

6.23. Для сечения, изображенного на рис. 6.25, найти положение нейтральной линии и определить координаты опасных точек в главных центральных осях, считая $\sigma_{пр.р} = \sigma_{пр.с}$.

6.24. Для сечения, изображенного на рис. 6.26, построить эпюру нормальных напряжений, определить напряжения, действующие в опасных точках. В расчетах принять: $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $b = 20 \text{ мм}$, $\delta = 2 \text{ мм}$.

6.25. Для сечения, изображенного на рис. 6.27, построить эпюру нормальных напряжений, определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. В расчетах принять: $M = 120 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $b = 20 \text{ мм}$, $\delta = 2 \text{ мм}$.

паса прочности. В расчетах принять: $M = 160 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $b = 20 \text{ мм}$, $\delta = 2 \text{ мм}$, $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$.

6.28. Для сечения, изображенного на рис. 6.30, построить эпюру нормальных напряжений, выполнить проекровочный расчет на прочность и определить размер δ , округлив его с точностью до 0,1 мм. В расчетах принять: $M = 120 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $b = 10\delta$, $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

6.29. Для сечения, изображенного на рис. 6.31, построить эпюру нормальных напряжений, выполнить проекровочный расчет на прочность и определить размер b , округлив его с точностью до 0,5 см. В расчетах принять: $M = 120 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $b = 10\delta$, $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$, $n = 1,2$.

6.30. Для сечения, представляющего собой равнобокий уголок 50x50x4 ГОСТ 8509-86, схематично изображенного на рис. 6.32, построить эпюру нормальных напряжений и определить нормальное напряжение, действующее в опасной точке. В расчетах принять: $M = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

6.31. Для сечения, составленного из равнобоких уголков 50x50x4 ГОСТ 8509-86, схематично изображенного на рис. 6.33,

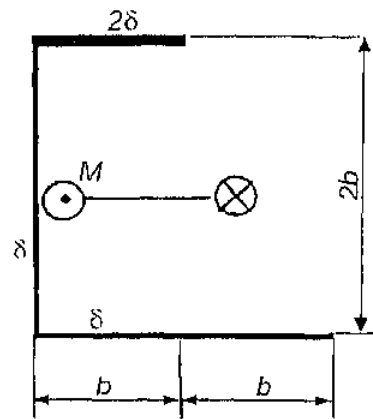


Рис. 6.29

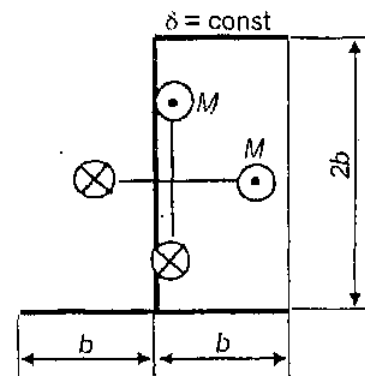


Рис. 6.30

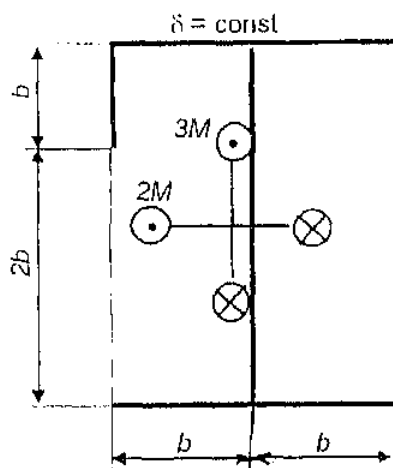


Рис. 6.31

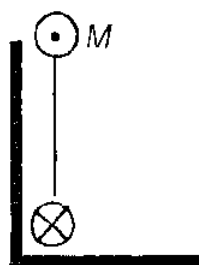


Рис. 6.32

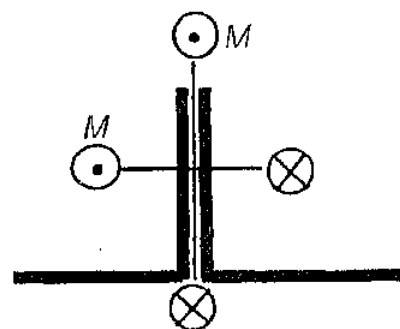


Рис. 6.33

построить эпюру нормальных напряжений, определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. В расчетах принять, $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

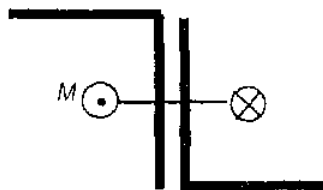


Рис. 6.34

6.32. Для сечения, составленного из равнобоких уголков 50x50x4 ГОСТ 8509-86, схематично изображенного на рис. 6.34, построить эпюру нормальных напряжений и найти запас прочности. В расчетах принять: $M = 0,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$.

6.33. Для сечения, представляющего собой неравнобокий уголок 80x50x5 ГОСТ 8510-86, схематично изображенного на рис. 6.35, построить эпюру нормальных напряжений и определить нормальное напряжение, действующее в опасной точке. В расчетах принять: $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

6.34. Для сечения, составленного из неравнобоких уголков 80x50x5 ГОСТ 8510-86, схематично изображенного на рис. 6.36, построить эпюру нормальных напряжений, определить наибольшие растягивающее и сжимающее напряжения. В расчетах принять: $M = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

6.35. Для сечения, составленного из неравнобоких уголков 80x50x5 ГОСТ 8510-86, схематично изображенного на рис. 6.37, построить эпюру нормальных напряжений и найти запас прочности. В расчетах принять: $M = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$.

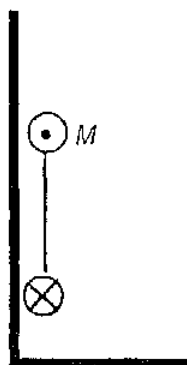


Рис. 6.35

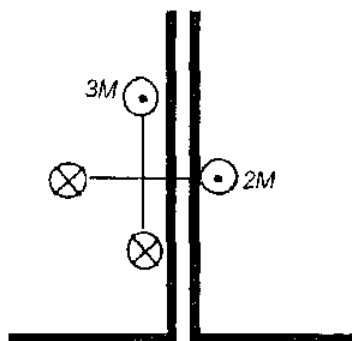


Рис. 6.36

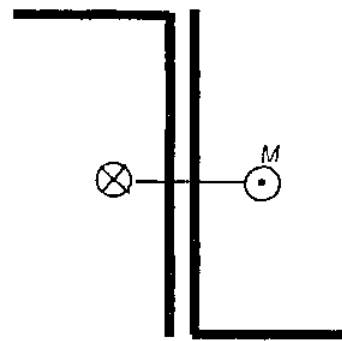


Рис. 6.37

В задачах 6.36—6.45 для балок, изображенных на указанных рисунках, определить наибольшие нормальные напряжения. В расчетах принять: $\sigma_{\text{пр.р}} = \sigma_{\text{пр.с}}$; сечение — прямоугольник (рис. 6.38) с соотношением сторон $h : b = 2 : 1$.

6.36. $P = 20 \text{ Н}$, $l = 1 \text{ м}$, $b = 1 \text{ см}$ (рис. 6.38).

6.37. $P = 200 \text{ Н}$, $l = 1 \text{ м}$, $b = 2 \text{ см}$, $M = Pl$ (рис. 6.39).

6.38. $P = 500 \text{ Н}$, $l = 1 \text{ м}$, $b = 2,5 \text{ см}$; $M = Pl$ (рис. 6.40).

6.39. $P = 1 \text{ кН}$, $l = 1 \text{ м}$, $b = 3 \text{ см}$, $M = Pl$ (рис. 6.41).

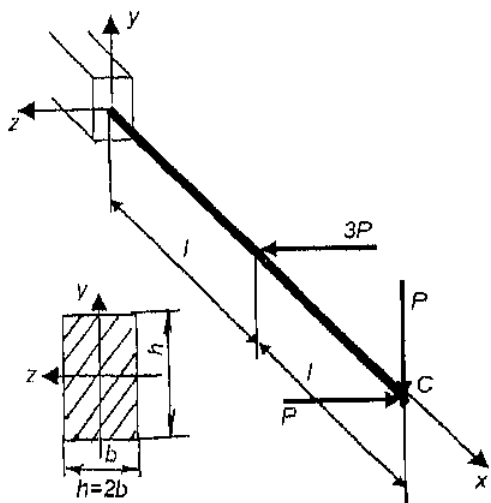


Рис. 6.38

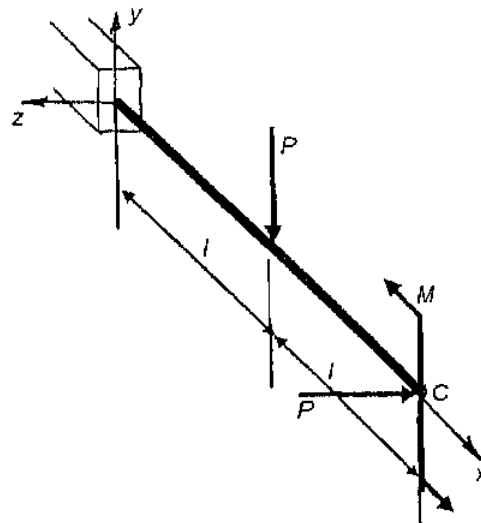


Рис. 6.39

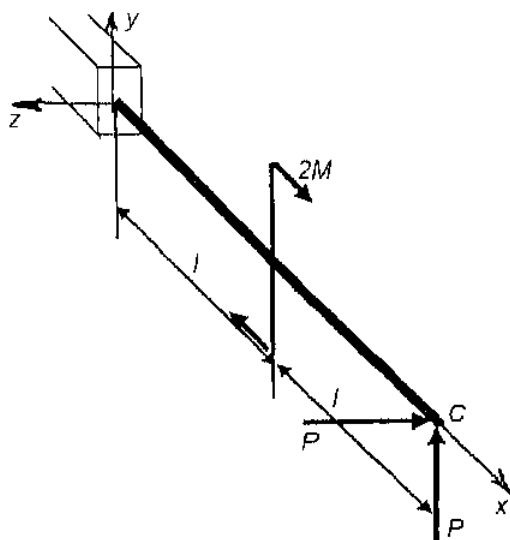


Рис. 6.40

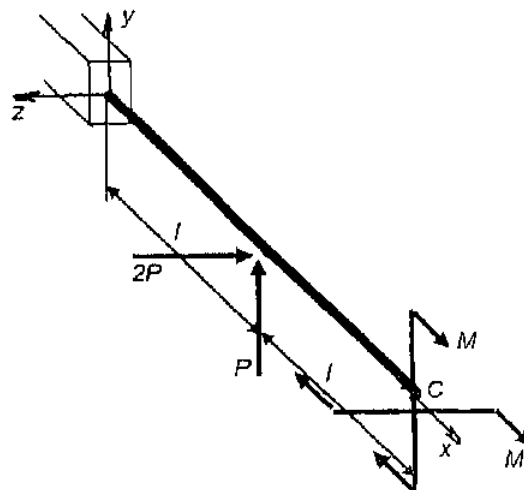


Рис. 6.41

6.40. $P = 2$ кН, $l = 1$ м, $b = 3$ см, $q = P/l$ (рис. 6.42).

6.41. $P = 300$ Н, $l = 1$ м, $b = 1,5$ см (рис. 6.43).

6.42. $P = 800$ Н, $l = 1$ м, $b = 2$ см, $M = Pl$ (рис. 6.44).

6.43. $P = 1$ кН, $l = 1$ м, $b = 2$ см (рис. 6.45).

6.44. $P = 750$ Н, $l = 1$ м, $b = 3$ см, $M = Pl$ (рис. 6.46).

6.45. $P = 1$ кН, $l = 1$ м, $b = 2,5$ см; $M = Pl$, $q = P/l$ (рис. 6.47).

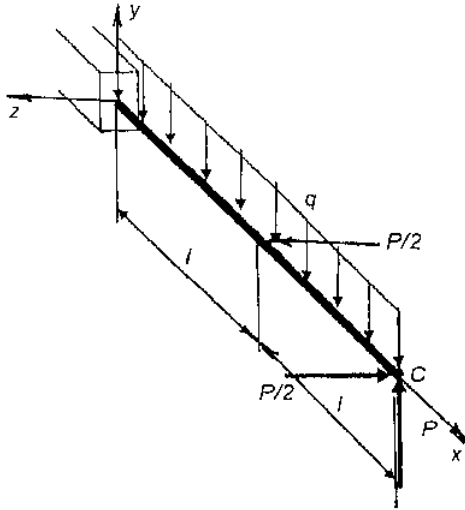


Рис. 6.42

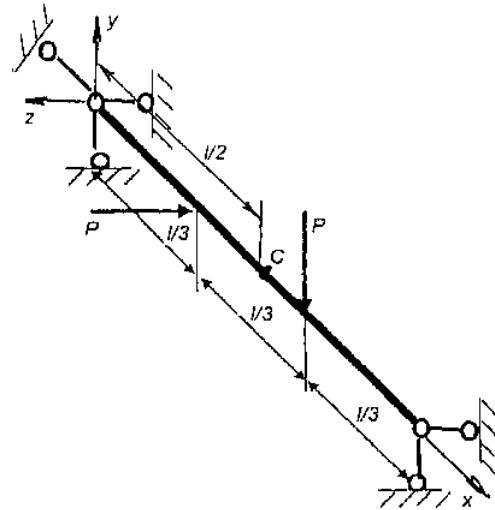


Рис. 6.43

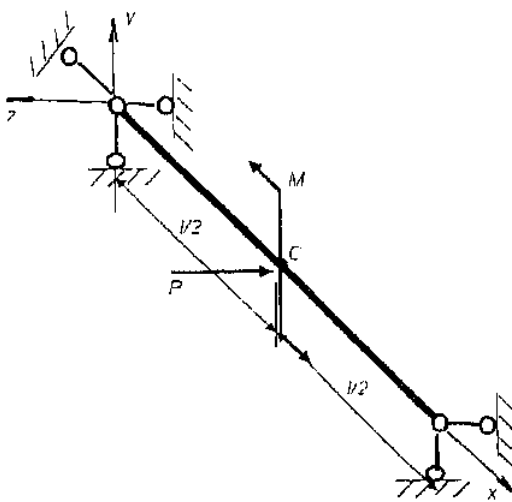


Рис. 6.44

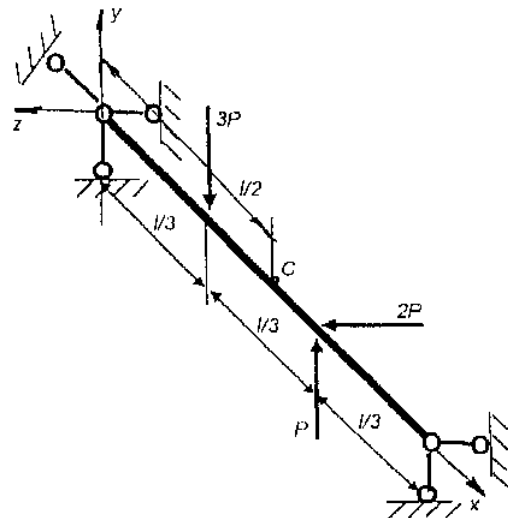


Рис. 6.45

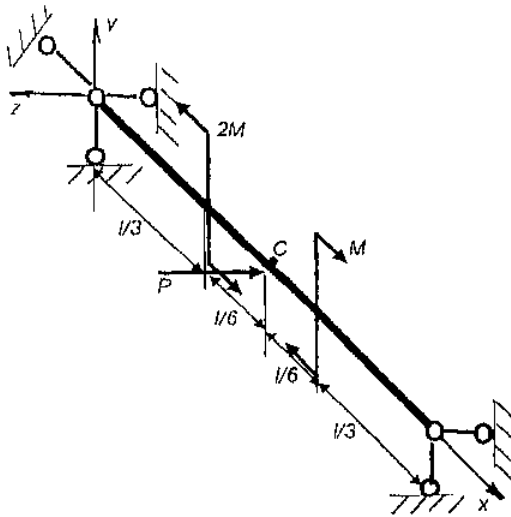


Рис. 6.46

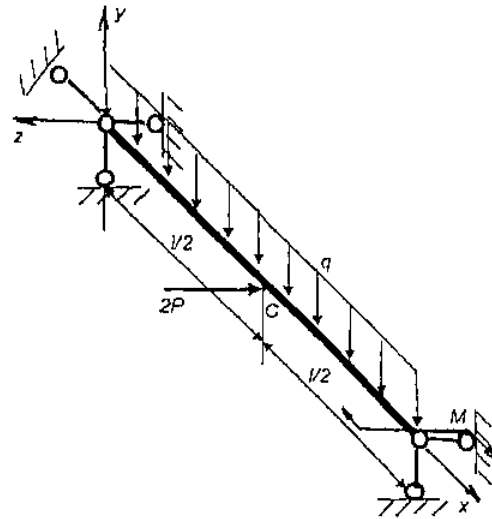


Рис. 6.47

§ 6.2. Внецентренное растяжение-сжатие

Второй вариант сочетания простейших видов деформаций стержня — комбинация изгиба и растяжения-сжатия, т.е. в этом случае, кроме изгибающих моментов (условие (6.1)), отлична от нуля еще и нормальная сила:

$$M_y \neq 0, \quad M_z \neq 0, \quad N \neq 0.$$

Одним из способов реализации такого напряженного состояния является нагружение балки, указанное на рис. 6.48, а.

Определение 6.2. *Внецентренным растяжением-сжатием* прямого стержня называется его деформация, вызванная внешними силами, линии действия которых параллельны оси стержня, а их точки приложения $A(y_p, z_p)$ — *полюсы* — не совпадают с центром тяжести C сечения (см. рис. 6.48, б).

Внецентренное растяжение-сжатие есть совокупность косоугольного изгиба и растяжения-сжатия. Действительно, рассматривая в силу принципа суперпозиции (см. утверждение П.2) только одну внешнюю силу P , получим, что в поперечном сечении стержня имеют место следующие отличные от нуля внутренние силовые факторы:

$$M_y = -Pz_p, \quad M_z = -Py_p, \quad N = P. \quad (6.7)$$

Нормальные напряжения, в соответствии с принципом суперпозиции и формулами (1.5), (6.2), определяются следующим образом:

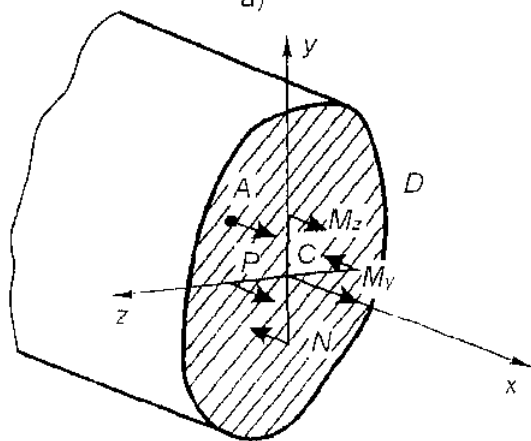
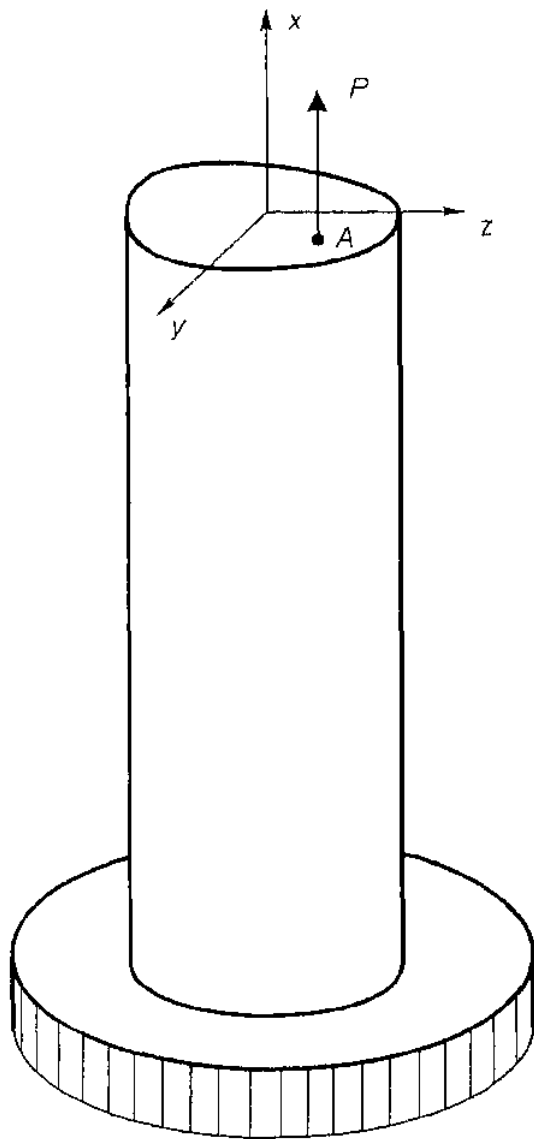


Рис. 6.48

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^N + \sigma^{M_z} + \sigma^{M_y} = \\ &= \frac{N}{F} - \frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z = \\ &= \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z \right), \quad (6.8) \end{aligned}$$

где σ^N — напряжения, вызванные нормальной силой N .

Утверждение 6.3.

1. Нейтральная линия является не проходящей через тяжести прямой

$$n: \frac{N}{F} - \frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z = 0. \quad (6.9)$$

Причем она коллинеарна вектору M_{Σ} только при условии равенства моментов инерции: $J_y = J_z$ (это соответствует комбинации прямого поперечного изгиба и растяжения-сжатия).

2. На прямых, параллельных нейтральной линии, напряжения постоянны.

3. Нормальные напряжения принимают максимальное и минимальное значения в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии. ■

Построение ЭС и выбор $\sigma_{\max p}$, $\sigma_{\max c}$ проводятся так же, как и при косом изгибе (см. § 6.1).

Уравнение нейтральной линии также может быть записано в виде

$$n: 1 + \frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z = 0, \quad (6.10)$$

где i_y и i_z — радиусы инерции сечения (см. (3.4)).

В некоторых случаях (например, для балок, плохо работающих на растягивающие напряжения) важным является следующее понятие.

Определение 6.3. Множество D_p называется *ядром сечения D* , если любая точка $A \in D_p$ является полюсом с нейтральной линией, либо лежащей вне D , либо имеющей общие точки только с ее границей ∂D . ■

Очевидно, если полюс принадлежит ядру, то нормальные напряжения в сечении имеют один и тот же знак.

При решении задач на отыскание ядра сечения находится его граница ∂D_p , как множество полюсов, которым соответствуют нейтральные линии, пересекающие границы ∂D сечения только в одной точке либо касающиеся ее. При этом центр тяжести сечения обязательно является внутренней точкой ядра, поскольку, как следует из уравнений (6.10) или (6.11), при стремлении к нему полюса нейтральная линия переходит в бесконечность. На рис. 6.49 в качестве примера указаны две граничные точки ядра $B_1, B_2 \in \partial D_p$ с нейтральными линиями n_1, n_2 .

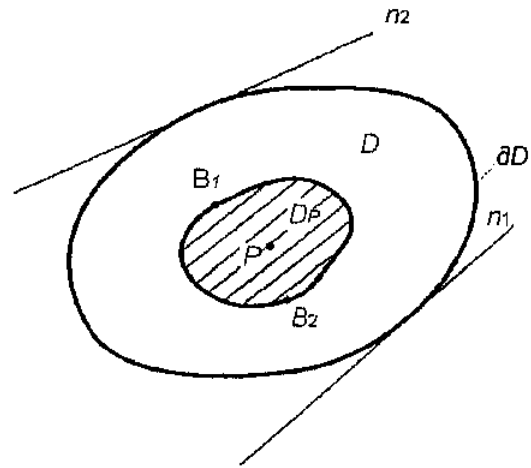


Рис. 6.49

Пример 6.2. Определить положение нейтральной линии, построить эпюру нормальных напряжений и найти напряжение, действующее в точке приложения силы для сечения, изображенного на рис. 6.50.

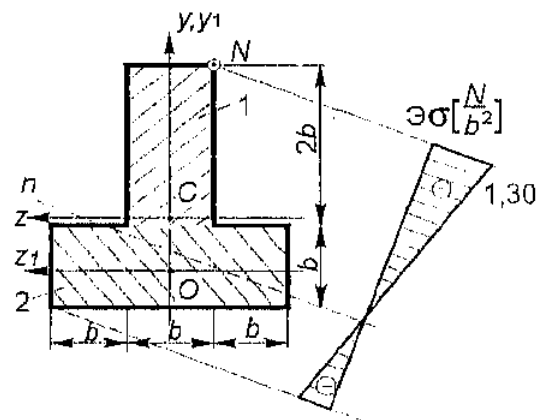


Рис. 6.50

Решение. Находим геометрические характеристики сече-

ния. Его разбиение на два прямоугольника и их нумерация указаны на рисунке.

Сначала определяем положение главных центральных осей. Для этого используем вспомогательную систему координат Oy_1z_1 (см. рис. 6.50, Oz_1 — средняя линия второго прямоугольника, которая является его главной центральной осью). Поскольку Oy_1 — ось симметрии, то она и является главной центральной осью (см. утверждение 3.4), и центр тяжести C имеет координаты $(y_C, 0)$. Его вторую координату определяем с помощью формул в (3.6):

$$F_1 = 2b^2, \quad F_2 = 3b^2, \quad F = F_1 + F_2 = 5b^2,$$

$$S_{z_1} = F_1 \left(b + \frac{b}{2} \right) + F_2 \cdot 0 = 3b^3, \quad y_C = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{3}{5} b.$$

Система координат Cyz — главная центральная. Находим главные моменты инерции и квадраты радиусов инерции (см. табл. П.3):

$$J_y = \frac{2b \cdot b^3}{12} + \frac{b \cdot (3b)^3}{12} = \frac{29}{12} b^4, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{29}{60} b^2,$$

$$J_z = \left[\frac{b \cdot (2b)^2}{12} + F_1 \left(\frac{3}{2} b - y_C \right)^2 \right] +$$

$$+ \left[\frac{3b \cdot b^3}{12} + F_2 \left(0 - \frac{3}{5} b \right)^2 \right] = \frac{217}{60} b^4,$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{217}{300} b^2.$$

Определяем координаты точки приложения силы:

$$y_P = \frac{5}{2} b - y_C = \frac{19}{10} b, \quad z_P = -\frac{1}{2} b.$$

Уравнение нейтральной линии имеет вид (см. (6.10)):

$$n: 1 + \frac{\frac{19}{10} b}{\frac{217}{300} b^2} y + \frac{-\frac{1}{2} b}{\frac{29}{60} b^2} z = 0,$$

что эквивалентно следующему равенству:

$$n: z = \frac{551}{217} y + \frac{29}{30} b.$$

Нормальное напряжение в точке приложения силы определяем по формуле (6.8):

$$\sigma(y_p, z_p) = \frac{N}{5b^2} \left(1 + \frac{\left(\frac{19}{10}b\right)^2}{\frac{217}{300}b^2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}b\right)^2}{\frac{29}{60}b^2} \right) = \frac{9191}{6293} \cdot \frac{P}{b^2} = 1,30 \frac{P}{b^2}.$$

Эпюра нормальных напряжений для данного сечения в случае растягивающего усилия P приведена на рис. 6.50. ■

Пример 6.3. Определить ядро сечения, изображенного на рис. 6.51.

Решение. Находим геометрические характеристики сечения, разбивая его на квадрат и треугольник (см. рис. 6.51).

Сначала определяем положение главных центральных осей. Для этого используем вспомогательную систему координат Oy_1z_1 (Oz_1 — средняя линия прямоугольника). Поскольку Oy_1 — ось симметрии всего сечения, то она — главная центральная, и центр тяжести C имеет координаты $(y_C, 0)$. Его первую координату определяем с помощью формул в (3.6):

$$F_K = 4b^2, \quad F_T = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot b = b^2, \quad F = F_K + F_T = 5b^2,$$

$$S_{z_1} = F_K \cdot 0 + F_T \left(b + \frac{1}{3}b \right) = \frac{4}{3}b^3, \quad y_C = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{4}{15}b.$$

Здесь F_K и F_T — площади квадрата и треугольника.

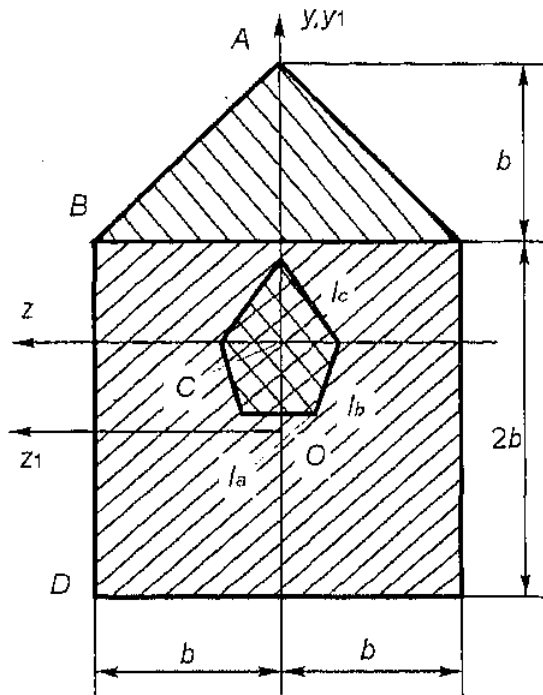


Рис. 6.51

Система координат Syz — главная центральная. Вычисляем главные моменты инерции J_y , J_z (в первом случае учитываем симметрию сечения и разбиваем треугольник на два) и квадраты радиусов инерции (см. табл. П.3):

$$J_y = \frac{2b \cdot (2b)^3}{12} + 2 \frac{b \cdot b^3}{12} = \frac{3}{2} b^4, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{3}{10} b^2,$$

$$J_z = \left[\frac{2b \cdot b^3}{36} + F_{\text{т}} \left(\frac{4}{3} b - y_C \right)^2 \right] +$$

$$+ \left[\frac{2b \cdot (2b)^3}{12} + F_{\text{п}} \left(0 - y_C \right)^2 \right] = \frac{253}{90} b^4,$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{253}{450} b^2.$$

Записываем уравнение нейтральной линии (см. (6.10)):

$$n: 1 + \frac{y \cdot y_P}{\frac{253}{450} b^2} + \frac{z \cdot z_P}{\frac{3}{10} b^2} = 0.$$

В соответствии с определением 6.3 для полюсов, лежащих на границе ∂D_P ядра, в данном случае соответствующие нейтральные линии должны проходить через угловые точки сечения. Так как сечение симметрично относительно оси Sy , то достаточно рассмотреть точки A, B и D , лежащие слева от нее. Они имеют следующие координаты:

$$y_A = \frac{26}{15} b, \quad z_A = 0; \quad y_B = \frac{11}{15} b, \quad z_B = b; \quad y_D = -\frac{19}{15} b, \quad z_D = b.$$

Подставляя их в качестве координат y, z в уравнение нейтральной линии, получаем уравнения прямых, задающих правую часть границы ядра (здесь y_P и z_P — текущие координаты):

$$l_A: 1 + \frac{\frac{26}{15} b \cdot y_P}{\frac{253}{450} b^2} = 0, \quad l_B: 1 + \frac{\frac{11}{15} b \cdot y_P}{\frac{253}{450} b^2} + \frac{b \cdot z_P}{\frac{3}{10} b^2} = 0,$$

$$l_D: 1 - \frac{\frac{19}{15} b \cdot y_P}{\frac{253}{450} b^2} + \frac{b \cdot z_P}{\frac{3}{10} b^2} = 0.$$

После соответствующих преобразований получаем:

$$l_A: y_P = -\frac{253}{780} b, \quad l_B: z_P = -\frac{99}{253} y_P - \frac{3}{10} b,$$

$$l_D: z_P = \frac{171}{253} y_P - \frac{3}{10} b.$$

Эти прямые ограничивают правую часть ядра сечения, а его левая часть симметрична правой относительно оси Sy . Целиком ядро изображено на рис. 6.51. ■

Задачи

6.46. Для сечения, изображенного на рис. 6.52, найти нейтральную линию, построить эпюру нормальных напряжений, определить наибольшее нормальное напряжение и координаты опасной точки в главных центральных осях. В расчетах принять: $P = 20$ кН, $b = 2$ см.

6.47. Для сечения, изображенного на рис. 6.53, построить эпюру нормальных напряжений, определить наибольшее и наименьшее нормальные напряжения. В расчетах принять: $P = 25$ кН, $b = 2$ см.

6.48. Для сечения, изображенного на рис. 6.54, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $P = 50$ кН, $b = 2$ см, $\sigma_T = 160$ МПа.

6.49. Для сечения, изображенного на рис. 6.55, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $P = 40$ кН, $b = 2$ см, $\sigma_T = 200$ МПа.

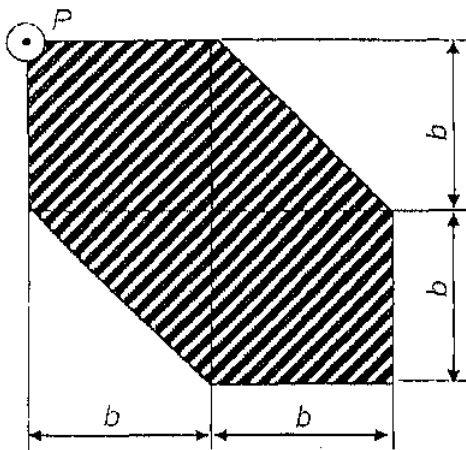


Рис. 6.52

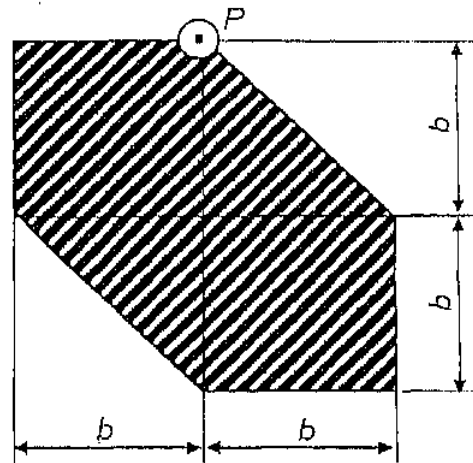


Рис. 6.53

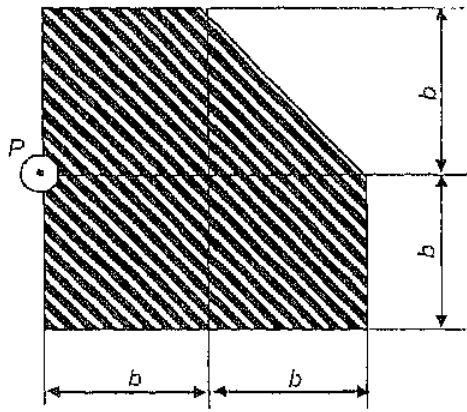


Рис. 6.54

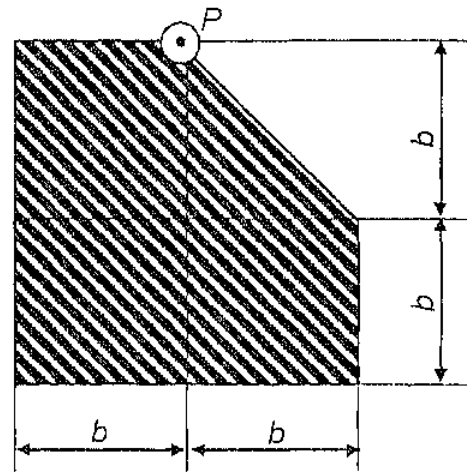


Рис. 6.55

6.50. Для сечения, изображенного на рис. 6.56, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $P = 40$ кН, $b = 2$ см, $\sigma_{\text{т}} = 160$ МПа.

6.51. Для сечения, изображенного на рис. 6.57, построить эпюру нормальных напряжений, определить наибольшее и наименьшее нормальные напряжения. В расчетах принять: $P = 150$ кН, $b = 3$ см.

6.52. Для сечения, изображенного на рис. 6.58, построить эпюру нормальных напряжений и определить наибольшие нормальные напряжения на внешнем и внутреннем контурах. В расчетах принять: $P = 50$ кН, $b = 2$ см.

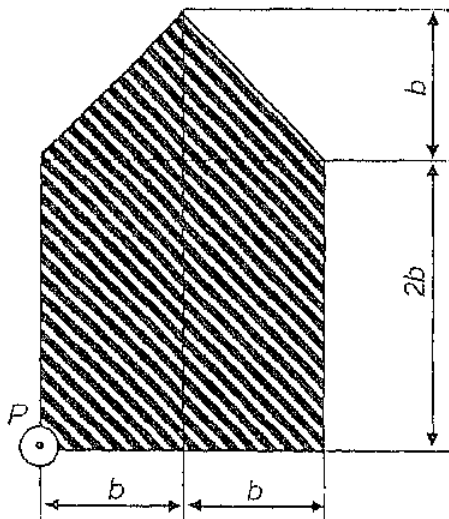


Рис. 6.56

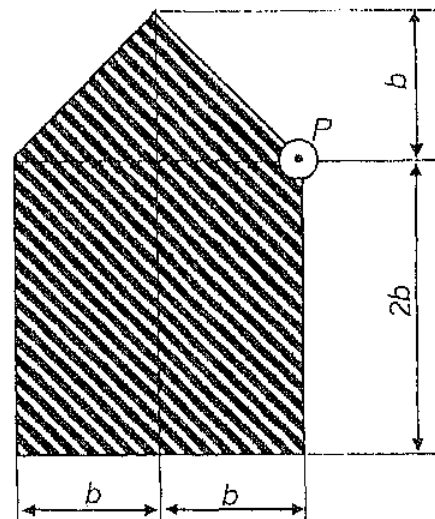


Рис. 6.57

6.53. Для сечения, изображенного на рис. 6.59, построить эпюру нормальных напряжений и определить нормальные напряжения в вершинах треугольника. В расчетах принять: $P = 15$ кН, $b = 3$ см.

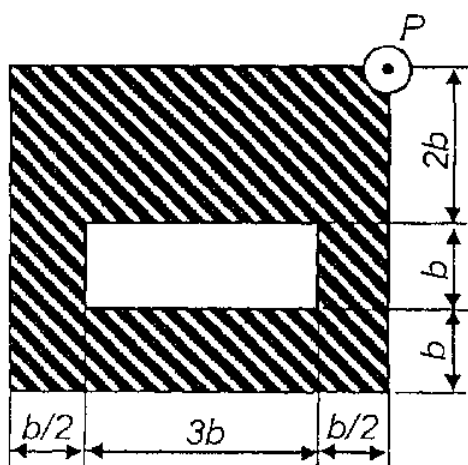


Рис. 6.58

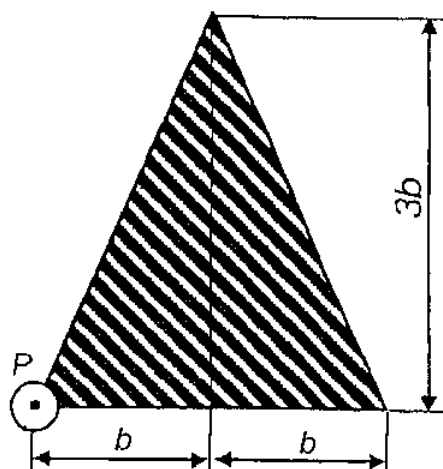


Рис. 6.59

6.54. Для сечения, изображенного на рис. 6.60, построить эпюру нормальных напряжений и определить нормальное напряжение в опасной точке. В расчетах принять: $P = 10$ кН, $b = 2$ см.

6.55. Для сечения, изображенного на рис. 6.61, построить эпюру нормальных напряжений, определить наибольшее и наименьшее нормальные напряжения. В расчетах принять: $P = 10$ кН, $b = 2$ см.

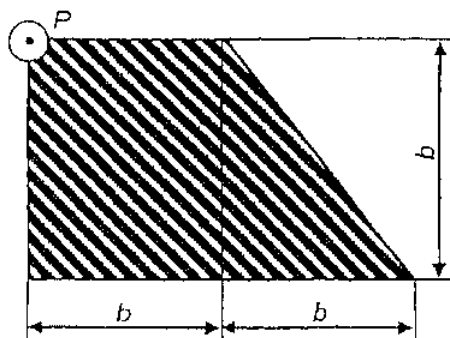


Рис. 6.60

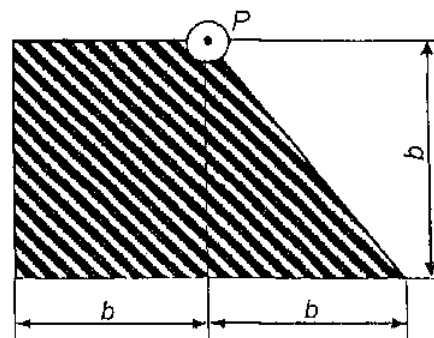


Рис. 6.61

6.56. Для сечения, изображенного на рис. 6.62, построить эпюру нормальных напряжений и определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $P = 80$ кН, $b = 2$ см, $\sigma_T = 200$ МПа.

6.57. Для сечения, изображенного на рис. 6.63, построить эпюру нормальных напряжений, определить наибольшее нормальное напряжение на внутреннем контуре. В расчетах принять: $P = 150$ кН, $b = 3$ см.

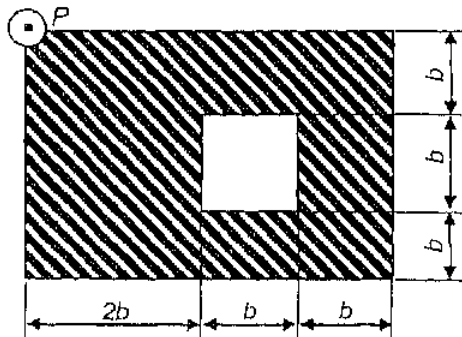


Рис. 6.62

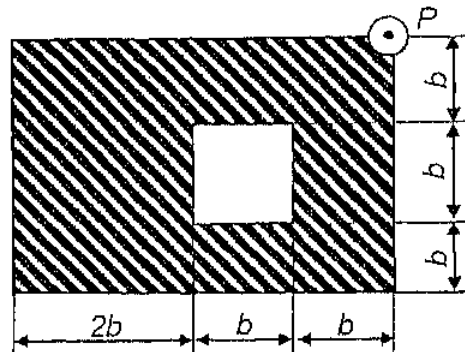


Рис. 6.63

6.58. Для сечения, изображенного на рис. 6.64, построить эпюру нормальных напряжений и определить нормальные напряжения в острых углах. В расчетах принять: $P = 150$ кН, $b = 3$ см.

6.59. Для сечения, изображенного на рис. 6.65, построить эпюру нормальных напряжений и определить наибольшее нормальное напряжение. В расчетах принять: $P = 50$ кН, $b = 2$ см.

Указание: использовать принцип суперпозиции или привести систему сил к точке.

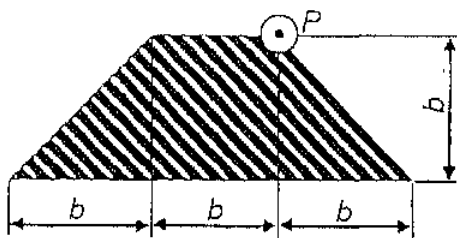


Рис. 6.64

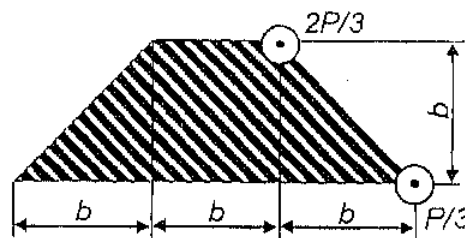


Рис. 6.65

6.60. Для сечения, изображенного на рис. 6.52, определить его ядро и найти наименьшее расстояние r от центра тяжести сечения до границы ядра.

6.61. Для сечения, изображенного на рис. 6.54, определить его ядро и найти наименьшее расстояние r от центра тяжести сечения до границы ядра.

6.62. Для сечения, изображенного на рис. 6.56, определить его ядро и найти наименьшее расстояние r от центра тяжести сечения до границы ядра.

6.63. Для сечения, изображенного на рис. 6.58, определить его ядро и найти наименьшее расстояние r от центра тяжести сечения до границы ядра.

6.64. Для сечения, изображенного на рис. 6.60, определить его ядро и найти наименьшее расстояние r от центра тяжести сечения до границы ядра.

6.65. Для сечения, изображенного на рис. 6.62, определить его ядро и найти наименьшее расстояние r от центра тяжести сечения до границы ядра.

6.66. Для сечения, изображенного на рис. 6.54, определить его ядро и найти наименьшее расстояние r от центра тяжести сечения до границы ядра.

Глава 7

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

В этой главе рассматривается второй частный случай стержневых систем (определение П.3; ср. с гл. 2).

Определение 7.1. Стержневая система называется *рамой*, если все ее элементы — прямые стержни или стержни малой кривизны.

Если среди элементов рамы есть прямые стержни, соединенные со всей рамой шарнирами и работающие только на растяжение-сжатие (ферменные элементы), то она называется *комбинированной системой*. ■

Иногда аналогично фермам рассматриваются рамы, в которых некоторые элементы считаются недеформируемыми (тогда их геометрия не важна).

Узлы рамы могут быть как шарнирными, так и абсолютно жесткими (см. гл. 2). Шарнирный узел, соединяющий два

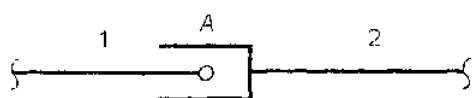


Рис. 7.1

стержня, оси которых находятся на одной прямой, может рассматриваться как врезанный в единый стержень шарнир (см. § 5.1).

Кроме того, в рамах могут иметь место еще и *врезанные скользящие шарниры (катки, рис. 7.1)*. В этом случае к возможности свободного поворота одного стержня относительно другого добавляется их свободное относительное продольное перемещение.

Очевидно, что ферма — частный случай рамы.

Классификация рам по геометрии и внешней нагрузке, с одной стороны, аналогична классификации ферменных систем, а с другой — более сложна.

Определение 7.2. Рама называется *плоской*, если:

- а) оси всех ее элементов расположены в одной плоскости;
- б) одна из главных осей всех поперечных сечений элементов, работающих на изгиб, лежит в той же плоскости;
- в) внешние сосредоточенные и распределенные силы лежат в той же плоскости, а векторы моментов перпендикулярны этой плоскости.

Рама называется *плоскопространственной*, если она является плоской в части пп. “а” и “б”, внешние сосредоточенные и

распределенные силы перпендикулярны упомянутой плоскости, а векторы моментов лежат в этой плоскости.

Для плоских и плоско-пространственных рам, содержащих недеформируемые элементы, как и для ферм, дополнительно полагается, что указанная плоскость является плоскостью геометрической и массовой симметрии абсолютно твердых тел.

В противном случае рама — *пространственная*. ■

Утверждение 7.1. В плоских и плоско-пространственных рамах отличны от нуля только три внутренних силовых фактора, которые имеют ориентацию, соответствующую внешней нагрузке. ■

С симметрией рам (см. определение 2.3) связан характер эпюр внутренних силовых факторов в их элементах.

Определение 7.3. Внутренние силовые факторы в поперечном сечении стержня (см. рис. П. 6) подразделяются на две группы:

— *симметричные* — M_y, M_z, N ;

— *кососимметричные* — Q_y, Q_z, M_x . ■

Утверждение 7.2. В симметричных (кососимметричных) рамах эпюры симметричных внутренних силовых факторов симметричные (кососимметричные), а эпюры кососимметричных внутренних силовых факторов кососимметричные (симметричные). ■

В соответствии с определением П.17 рамы, как и ферменные системы, подразделяются на статически определимые и статически неопределимые. Если выполняется равенство $n = r$, где n — общее число уравнений равновесия (включая дополнительные уравнения для врезанных шарниров), а r — количество искомым внутренних силовых факторов и, быть может, реакций в опорах, то рама является СО. В противном случае ($n < r$) рама СН со степенью статической неопределимости $r - n$.

§ 7.1. Статически определимые задачи

Алгоритм расчета рам в части первых двух пунктов во многом аналогичен соответствующему алгоритму для ферм (см. гл. 2) и состоит в следующем:

1. Разбиваем, если это необходимо, раму на участки. Из уравнений равновесия для всей рамы определяем реакции опор (в некоторых случаях это действие может быть опущено).

Далее с помощью метода сечений и уравнений равновесия для отсеченных частей и, быть может, недеформируемых элементов (число уравнений определяется утверждением 7.1), а также дополнительных уравнений, соответствующих врезанным шарнирам (если таковые имеются), определяем внутренние си-

ловые факторы в элементах рамы и строим их эпюры. При этом часто удобно на каждом участке вводить местную систему координат с началом на одном из его концов. Эпюры наносим прямо на оси соответствующих стержней (при сложной картине они строятся отдельно для различных внутренних силовых факторов). Зная характер эпюр, как правило, можно ограничиться нахождением внутренних силовых факторов только на концах участков.

При построении эпюр полезно учитывать их свойства в случае рам, обладающих симметрией (см. утверждение 7.2).

2. Определяем напряжения в стержнях по алгоритмам, данным в гл. 4 и 5. При отсутствии крутящих моментов возможен проектировочный расчет по алгоритму расчета балок на изгиб. В противном случае даже для проектировочного расчета необходим более сложный подход, указанный в гл. 9.

3. Вычисление перемещений для рам с помощью нахождения упругой линии и углов поворота сечений (см. гл. 5 и 4), равно как для сложных ферменных систем геометрическим методом (см. гл. 2), формально возможно, однако практически приводит к очень громоздким вычислениям. Поэтому для таких стержневых систем задача ставится так: найти перемещения и/или углы поворота в точках. Если к таким точкам отнести все узлы, то, в принципе, перемещения и углы поворота во внутренних сечениях стержней могут быть найдены по алгоритмам, приведенным в гл. 4 и 5. Однако такая необходимость возникает крайне редко. ■

Метод вычисления перемещений в точках стержневых систем основывается на следующем теоретическом материале.

В соответствии с принципом суперпозиции (утверждение П.2) и формулами (1.15), (4.13) и (5.37) потенциальная энергия стержня имеет вид

$$\begin{aligned}
 U = \int_{\Gamma} \frac{N^2}{2EF} ds + \int_{\Gamma} \frac{M_z^2}{2EJ_z} ds + \int_{\Gamma} \frac{Q_y^2}{2GF} k_y ds + \int_{\Gamma} \frac{M_y^2}{2EJ_y} ds + \\
 + \int_{\Gamma} \frac{Q_z^2}{2GF} k_z ds + \int_{\Gamma} \frac{M_k^2}{2GJ_k} ds.
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Здесь использован криволинейный интеграл по оси стержня Γ с тем, чтобы эта формула была справедлива и для криволинейных элементов рам.

Кратко это равенство можно записать так:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \int_{\Gamma} \frac{Q_j^2}{c_j} ds;$$

$$Q_1 = N, \quad Q_2 = M_z, \quad Q_3 = Q_y, \quad Q_4 = M_y, \quad Q_5 = Q_z, \quad Q_6 = M_x; \quad (7.2)$$

$$c_1 = EF, \quad c_2 = EJ_z, \quad c_3 = GF/k_y, \quad c_4 = EJ_y, \quad c_5 = GF/k_z, \quad c_6 = GJ_x.$$

Определение 7.4. Величины Q_j и c_j называются *обобщенными внутренними силовыми факторами* и *обобщенными жесткостями*, а кинематические характеристики (θ_y и θ_z — углы поворота поперечного сечения относительно осей Oy и Oz)

$$\delta_1 = \delta_x, \quad \delta_2 = \theta_z, \quad \delta_3 = \delta_y, \quad \delta_4 = \theta_y, \quad \delta_5 = \delta_z, \quad \delta_6 = \varphi \quad (7.3)$$

— *обобщенными перемещениями* бруса, соответствующими Q_1, \dots, Q_6 . ■

Для стержневой системы, включающей в себя n брусьев с осями Γ_i , потенциальная энергия есть сумма энергий U_i каждого из них:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i, \quad U_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \int_{\Gamma_i} \frac{Q_{ij}^2}{c_{ij}} ds. \quad (7.4)$$

Формулы типа (7.2), (7.4) обобщаются на произвольное упругое тело G , для которого справедливы закон Гука (аксиома 7, см. § П.1), принципы начальных размеров (аксиома 3, см. § П.1), отвердевания (аксиома 5, см. § П.1) и принцип суперпозиции (утверждение П.2). Обозначим через P_k ($k = 1, 2, \dots, m$) скалярную систему обобщенных внешних сил (включая моменты, см. также (П.8)), а через δ_k — соответствующую им (по направлению и точке приложения) систему обобщенных перемещений (рис. 7.2). Тогда *работа внешних сил* (без реакций неподвижных опор) записывается так:

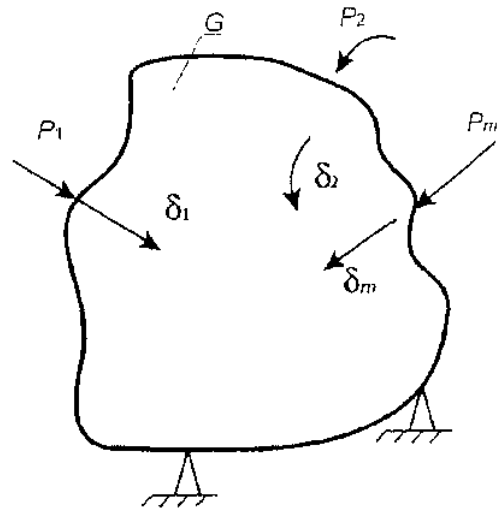


Рис. 7.2

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m P_k \delta_k. \quad (7.5)$$

В силу закона Гука имеют место равенства

$$\delta_k = \sum_{l=1}^m \delta_{kl} P_l \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (7.6)$$

которые в матричном виде могут быть записаны следующим образом:

$$\delta = DP, \quad \delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)^T, \quad P = (P_1, \dots, P_m)^T, \quad D = (\delta_{kl})_{m \times m}. \quad (7.7)$$

Из (7.5)—(7.7) для работы внешних сил следует равенство

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \delta_{kl} P_k P_l = \frac{1}{2} P^T DP. \quad (7.8)$$

Использование закона сохранения энергии для состояния равновесия тела G

$$A = U \quad (7.9)$$

и свойств идеально упругих систем приводит к выводу, что матрица является положительно определенной ($\det D > 0$), что позволяет обратить закон Гука:

$$P_k = \sum_{l=1}^m c_{kl} \delta_l \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad P = C\delta, \quad C = D^{-1} = (c_{kl})_{m \times m}, \quad (7.10)$$

а также из (7.5) получить еще одно представление работы внешних сил:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m c_{kl} \delta_k \delta_l = \frac{1}{2} \delta^T C \delta. \quad (7.11)$$

Утверждение 7.3. (*Механический смысл элементов матриц D и C .*) Величины δ_{kl} и c_{kl} являются характеристиками упругого тела (не зависят от внешней нагрузки) и имеют следующий смысл: δ_{kl} — перемещение по направлению действия силы P_k , вызванное действием только единичной силы $P_l = 1$, а c_{kl} —

обобщенная сила P_k , которая должна быть приложена к телу для того, чтобы по направлению действия силы P_l имело место единичное перемещение $\delta_l = 1$. ■

В связи с этим используется следующая терминология.

Определение 7.5. δ_{kl} и D называются *коэффициентами и матрицей податливости*, а c_{kl} и C — *коэффициентами и матрицей жесткости* упругого тела. ■

Утверждение 7.4. Матрицы D и C — симметрические:

$$\delta_{kl} = \delta_{lk}, \quad c_{kl} = c_{lk}, \quad (7.12)$$

а потенциальная энергия упругого тела есть квадратичная форма внешних сил и обобщенных перемещений:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \delta_{kl} P_k P_l = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{D} \mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m c_{kl} \delta_k \delta_l = \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{C} \delta. \quad \blacksquare \quad (7.13)$$

Равенства (7.13) вытекают из (7.8), (7.9) и (7.11), а первая часть утверждения — из следующей теоремы.

Утверждение 7.5. (*Теорема взаимности, теорема Бетти.*) Пусть P'_k и δ'_k , P''_k и δ''_k — системы обобщенных сил и соответствующих им перемещений для двух состояний равновесия упругого тела. Тогда

$$A_{12} = A_{21}, \quad A_{12} = \sum_{k=1}^m P'_k \delta''_k, \quad A_{21} = \sum_{k=1}^m P''_k \delta'_k, \quad (7.14)$$

где A_{12} (A_{21}) — работа первой (второй) системы сил на перемещениях второго (первого) состояния. ■

Следствиями равенств в (7.13) являются следующие теоремы.

Утверждение 7.6. (*Теорема Лагранжа.*) Если в состоянии равновесия упругого тела системе обобщенных внешних сил P_k соответствуют обобщенные перемещения δ_k , то

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_k} = P_k. \quad \blacksquare \quad (7.15)$$

Утверждение 7.7. (*Теорема Кастильяно.*) Если в состоянии равновесия упругого тела системе обобщенных внешних сил P_k соответствуют обобщенные перемещения δ_k , то

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \delta_k. \quad \blacksquare \quad (7.16)$$

Последняя теорема может быть непосредственно использована для вычисления перемещений в точках стержневых систем.

Однако очевиден недостаток этого приема: перемещения могут определяться только в точке приложения обобщенной силы P_k и только по направлению ее действия. Этот недостаток ликвидируется следующим утверждением, вытекающим из теоремы Кастильяно и формулы (7.4).

Утверждение 7.8. Обобщенное перемещение δ стержневой системы в заданной точке и по заданному направлению вычисляется следующим образом:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^6 \int_{\Gamma_i} \frac{Q_{ij} Q_{ij}^1}{c_{ij}} ds, \quad (7.17)$$

где Q_{ij} и Q_{ij}^1 — внутренние силовые факторы в i -м элементе стержневой системы при нагружении ее действительной системой сил P_k и единичной обобщенной силой, соответствующей перемещению δ . \blacksquare

В развернутом виде равенство (7.17) записывается так:

$$\begin{aligned} \delta = & \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \frac{N_i N_i^1}{E_i F_i} ds + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \frac{M_{iz} M_{iz}^1}{E_i J_{iz}} ds + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \frac{Q_{iy} Q_{iy}^1}{G_i F_i} k_{iy} ds + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \frac{M_{iy} M_{iy}^1}{E_i J_{iy}} ds + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \frac{Q_{iz} Q_{iz}^1}{G_i F_i} k_{iz} ds + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \frac{M_{ik} M_{ik}^1}{G_i J_{ik}} ds. \quad (7.18) \end{aligned}$$

Определение 7.6. Входящие в (7.17) и (7.18) интегралы называются *интегралами Мора*. \blacksquare

Таким образом, *алгоритм вычисления перемещений и углов поворота* в какой-либо точке стержневой системы (п. 3 общего алгоритма) состоит в построении $\mathcal{E}Q_{ij}$, $\mathcal{E}Q_{ij}^1$ и вычислении интегралов Мора. Отметим, что при определении относительных перемещений сечений в них должны быть приложены противоположно направленные обобщенные единичные силы.

Для рам, как правило, основной вклад в перемещения дают моменты. Поэтому при отличии последних от нуля хотя бы в

одном элементе стержневой системы в интегралах Мора нормальные и перерезывающие силы не учитываются. Естественно, для ферм в (7.18) остаются только слагаемые, содержащие нормальные силы. В комбинированных системах перерезывающие силы также не учитываются, а интегралы Мора, содержащие нормальные силы, вычисляются только по ферменным элементам.

При постоянных жесткостях стержней вычисление интегралов удобно проводить геометрически, используя следующее утверждение.

Утверждение 7.9. (Правило Верещагина.) Если $g(x)$ — линейная функция, то при $b > a$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = S_f g(x_{\text{цт}}), \quad (7.19)$$

где S_f — площадь с учетом знака $\mathcal{E}f$ (криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $f(x)$), $g(x_{\text{цт}})$ — значение $\mathcal{E}g$ (значение функции $g(x)$) в центре тяжести $x_{\text{цт}}$ $\mathcal{E}f$ (рис. 7.3). ■

При практическом применении этого правила используется набор геометрических характеристик элементарных эпюр, указанных в табл. 5.1. В более сложных случаях, как правило, эпюра может быть “расщеплена”, т.е. представлена в виде алгебраической суммы элементарных эпюр. При этом искомый интеграл есть соответствующая сумма интегралов, которые могут быть подсчитаны геометрически.

Пример 7.1. Для рамы, изображенной на рис. 7.4, а, построить эпюры внутренних силовых факторов.

Решение. Обозначаем узлы: характерные сечения и точки буквами (см. рис. 7.4, а). Для определения реакций опор составляем уравнения равновесия рамы:

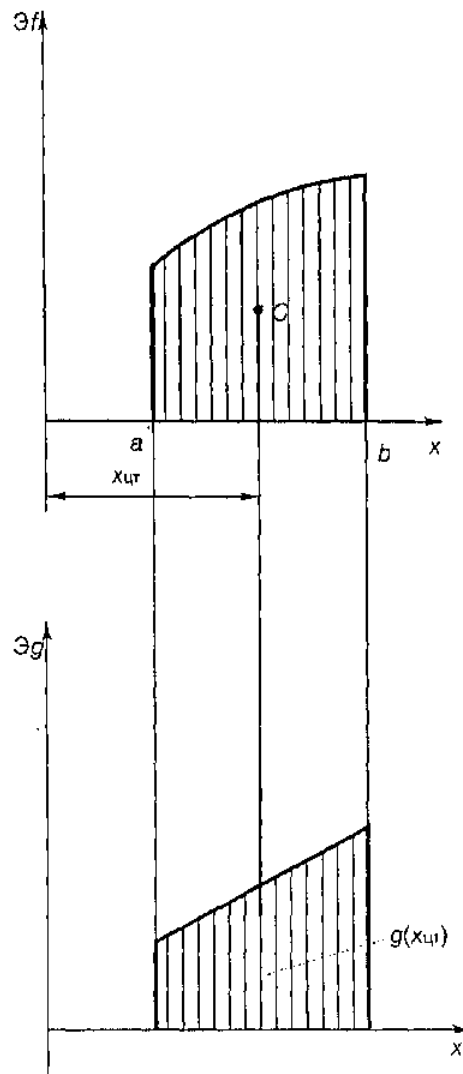


Рис. 7.3

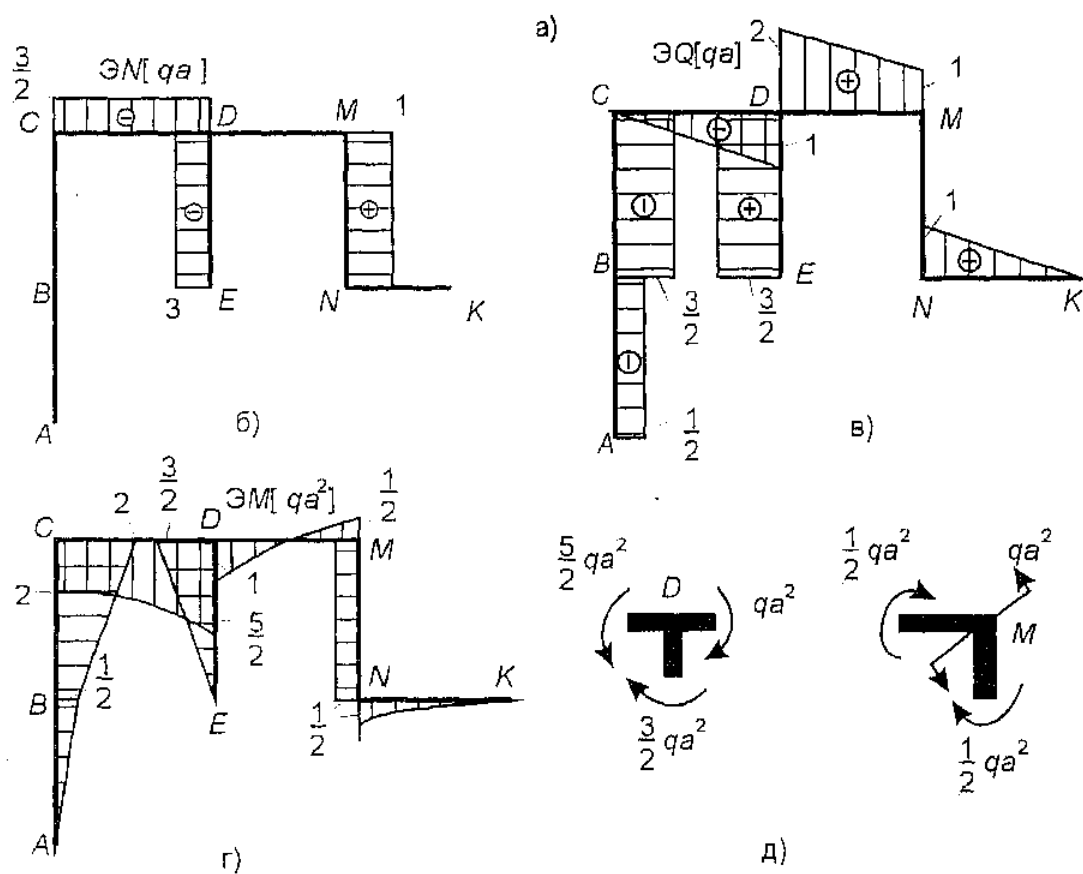
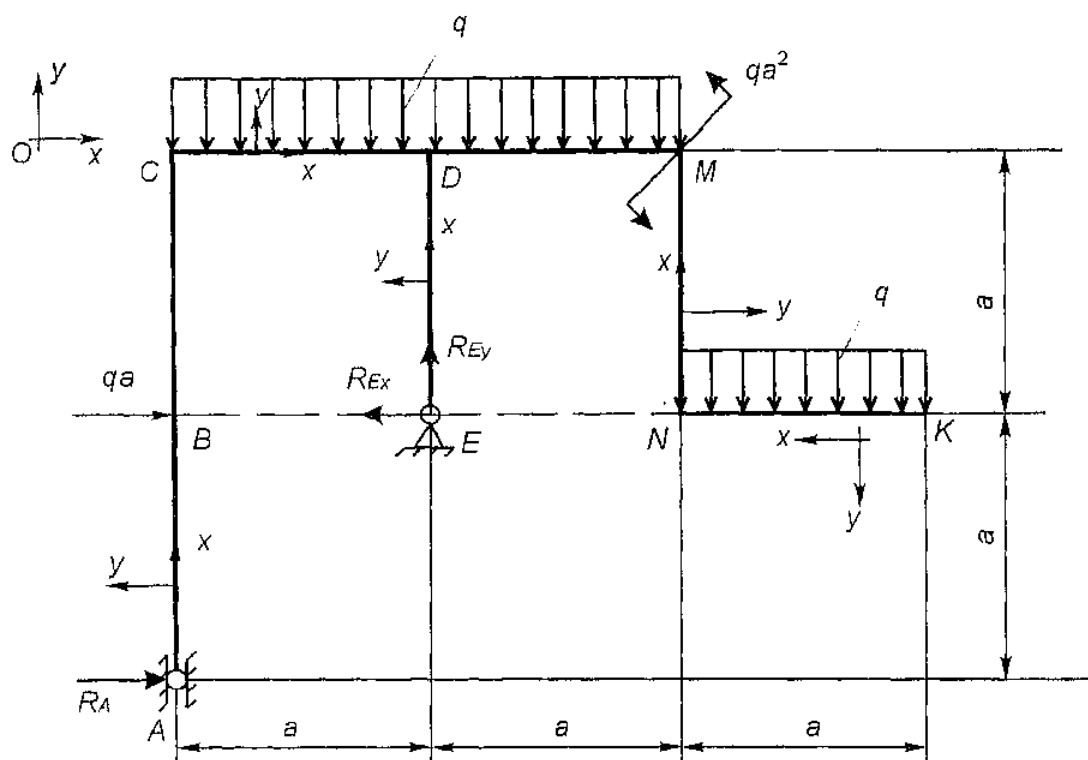


Рис. 7.4

$$\sum M_E = 0: R_A \cdot a + qa^2 - qa \left(a + \frac{a}{2} \right) = 0;$$

$$\sum M_T = 0: R_{Ex} \cdot a - qa \cdot a + qa^2 - qa \frac{3}{2} a = 0;$$

$$\sum Y = 0: -2qa - qa + R_{Ey} = 0.$$

Отсюда находим:

$$R_A = \frac{1}{2} qa, \quad R_{Ex} = \frac{3}{2} qa, \quad R_{Ey} = 3qa.$$

Отметим, что уравнения равновесия составлены так, чтобы в каждое из них входила только одна реакция.

Поскольку все реакции найдены и рама не содержит замкнутых контуров, то она статически определимая. На каждом участке вводим местную систему координат (см. рис. 7.4, а). Значения внутренних силовых факторов на первом участке для примера вычисляем так же, как для балок (см. пример 5.1), а на остальных в соответствии с алгоритмом — только на концах участков (знаки соответствуют выбранным координатам; индексы в обозначениях перерезывающих сил и моментов опущены):

— участок $A-B$ (\mathcal{EM} — линейная):

$$N_{AB} = 0; \quad Q_{AB} = -\frac{1}{2} qa; \quad M_{AB} = -\frac{1}{2} qa \cdot x, \quad M_A = M_{AB}(0) = 0,$$

$$M_B = M_{AB}(a) = -\frac{1}{2} qa^2;$$

— участок $B-C$ (\mathcal{EM} — линейная):

$$N_{BC} = 0; \quad Q_{BC} = -\frac{1}{2} qa - qa = -\frac{3}{2} qa;$$

$$M_B = -\frac{1}{2} qa^2, \quad M_C = -\frac{1}{2} qa \cdot 2a - qa \cdot a = -2qa^2;$$

— участок $C-D$ (\mathcal{EQ} — линейная, \mathcal{EM} — парабола):

$$N_{CD} = -\frac{1}{2} qa - qa = -\frac{3}{2} qa, \quad Q_C = 0, \quad Q_D = -qa,$$

$$M_C = -2qa^2, \quad M_D = -2qa^2 - qa \frac{1}{2} a = -\frac{5}{2} qa^2;$$

— участок $E-D$ ($\mathcal{E}M$ — линейная):

$$N_{ED} = -3qa, \quad Q_{ED} = \frac{3}{2}qa, \quad M_E = 0; \quad M_D = \frac{3}{2}qa^2;$$

— участок $D-M$ ($\mathcal{E}Q$ — линейная, $\mathcal{E}M$ — парабола):

$$N_{DM} = 0, \quad Q_D = 2qa; \quad Q_M = qa, \quad M_D = -qa^2, \quad M_M = \frac{1}{2}qa^2;$$

— участок $M-N$:

$$N_{MN} = qa, \quad Q_{MN} = 0, \quad M_{MN} = -\frac{1}{2}qa^2;$$

— участок $N-K$ ($\mathcal{E}Q$ — линейная, $\mathcal{E}M$ — парабола):

$$N_{NK} = 0, \quad Q_N = qa, \quad Q_K = 0, \quad M_N = -\frac{1}{2}qa^2; \quad M_K = 0.$$

Эпюры N , Q и M представлены на рис. 7.4, б, в, г. Частично правильность решения можно проверить, рассматривая равновесие узлов D и M . (Для моментов это указано на рис. 7.4, д.)

Отметим, что усилие N вычислялось в методических целях. Как правило, эпюра N не строится (см. алгоритм). ■

Пример 7.2. Для рамы, изображенной на рис. 7.5, а, построить эпюры Q и M .

Решение. Обозначаем узлы и характерные сечения буквами (см. рис. 7.5, а). Для определения реакций опор используем три уравнения равновесия рамы и условие равенства нулю моментов относительно врезанного шарнира для правой части рамы DEM :

$$\sum M_A = 0: \quad R_{My} \cdot 2a + R_{Mx} \cdot a - qa^2 - 2qa \cdot a = 0,$$

$$\sum X = 0: \quad -R_{Ax} + 2qa - R_{Mx} = 0,$$

$$\sum Y = 0: \quad -R_{Ay} + R_{My} = 0,$$

$$\sum M_D^{\text{пр}} = 0: \quad -R_{Mx} \cdot a + R_{My} \cdot a - qa^2 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$R_{My} = R_{Ay} = \frac{4}{3}qa, \quad R_{Mx} = \frac{1}{3}qa, \quad R_{Ax} = \frac{5}{3}qa.$$

Поскольку все реакции найдены, то задача статически определимая. Целесообразно убедиться в правильности определения

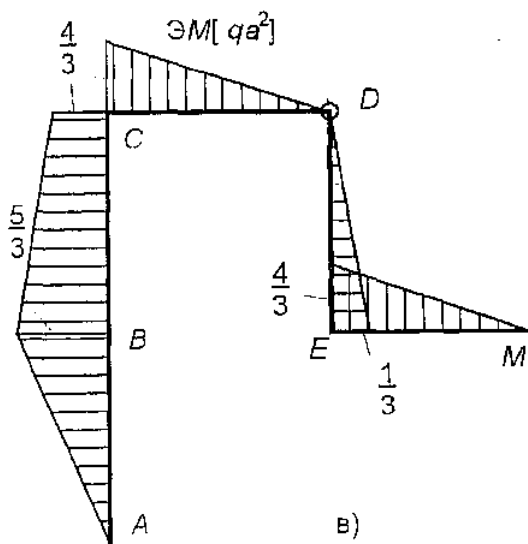
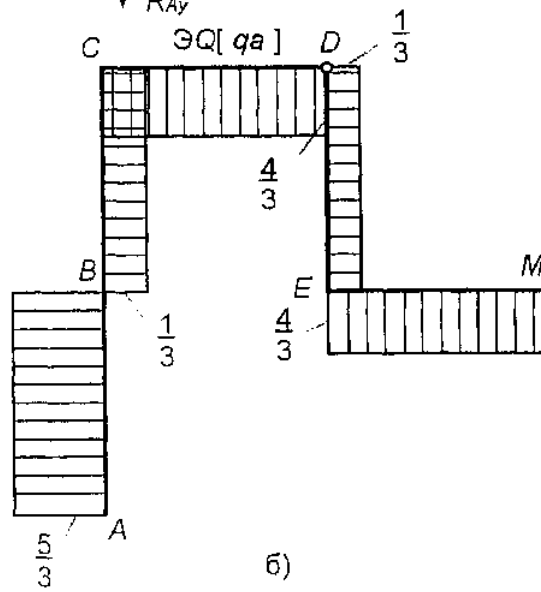
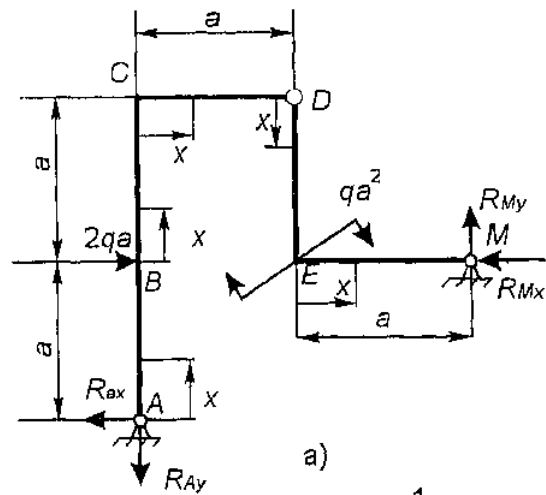


Рис. 7.5

реакций. Для этого можно использовать уравнение моментов относительно любой точки рамы, например точки D :

$$\sum M_D = 0: \quad \frac{4}{3} qa \cdot a - \frac{1}{3} qa \cdot a - qa^2 + 2qa \cdot a - \frac{5}{3} qa \cdot 2a + \\ + \frac{4}{3} qa \cdot a = 0.$$

Значения внутренних силовых факторов аналогично предыдущему примеру вычисляем только на концах участков (знаки соответствуют выбранным координатам; оси Oy на рис. 7.5, a не изображены, поскольку подразумевается, что системы координат Oxy всегда правые):

— участок $A-B$ ($ЭМ$ — линейная):

$$Q_{AB} = \frac{5}{3} qa, \quad M_A = 0, \quad M_B = \frac{5}{3} qa \cdot a = \frac{5}{3} qa^2;$$

— участок $B-C$ ($ЭМ$ — линейная):

$$Q_{BC} = \frac{5}{3} qa - 2qa = -\frac{1}{3} qa, \quad M_B = \frac{5}{3} qa^2,$$

$$M_C = \frac{5}{3} qa \cdot 2a - 2qa \cdot a = \frac{4}{3} qa^2;$$

— участок $C-D$ ($ЭМ$ — линейная):

$$Q_{CD} = -\frac{4}{3} qa, \quad M_C = \frac{4}{3} qa^2, \quad M_D = 0;$$

— участок $D-E$ (здесь проще рассматривать действие внешних сил из правой части рамы; $ЭМ$ — линейная):

$$Q_{DE} = \frac{1}{3} qa, \quad M_D = 0, \quad M_E = \frac{4}{3} qa \cdot a - qa^2 = \frac{1}{3} qa^2;$$

— участок $E-M$ (здесь также рассматриваются внешние силы из правой части рамы; $ЭМ$ — линейная):

$$Q_{EM} = -\frac{4}{3} qa, \quad M_E = \frac{4}{3} qa \cdot a = \frac{4}{3} qa^2, \quad M_M = 0.$$

Эпюры Q и M изображены на рис. 7.5, б, в. ■

Пример 7.3. Построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов, а также провести проектировочный расчет на прочность изображенной на рис. 7.6, а рамы, имеющей постоянное кольцевое сечение с отношением диаметра к толщине

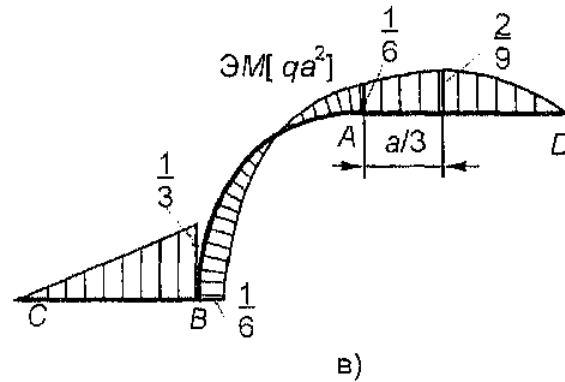
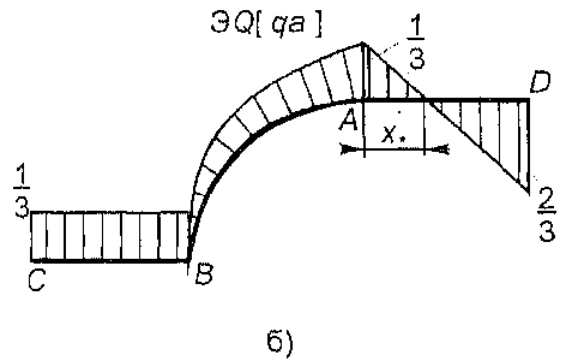
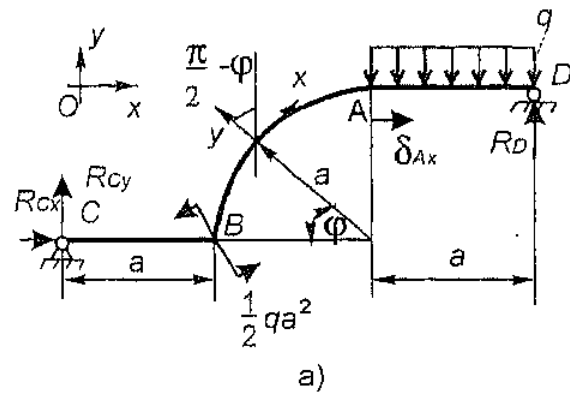


Рис. 7.6

$d/\delta = 20$. В расчетах принять: $q = 10$ кН/м; $a = 0,6$ м;

$[\sigma] = 140$ МПа; $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Обозначим узлы и характерные сечения рамы буквами (см. рис. 7.6, а).

1. Определение внутренних силовых факторов. Для вычисления опорных реакций составляем уравнения равновесия всей рамы:

$$\sum M_C = 0: \frac{1}{2} qa^2 - qa \left(2a + \frac{1}{2} a \right) + R_D \cdot 3a = 0,$$

$$\sum Y = 0: R_{Cy} - qa + R_D = 0, \quad \sum X = 0: R_{Cx} = 0.$$

Отсюда находим:

$$R_D = \frac{2}{3} qa, \quad R_{Cy} = \frac{1}{3} qa, \quad R_{Cx} = 0.$$

Для проверки можно определить момент внешних сил и реакций относительно точки B :

$$\sum M_B = 0: \frac{1}{3} qa \cdot a - \frac{1}{2} qa^2 + qa \left(a + \frac{1}{2} a \right) - \frac{2}{3} qa \cdot 2a = 0.$$

Внутренние силовые факторы на прямолинейных участках вычисляем так же, как и в предыдущих примерах, а на криволинейной части рамы находим их функциональную зависимость от угла φ (см. рис. 7.6, а):

— участок $C-B$ ($\mathcal{E}M$ — линейная):

$$Q_{CB} = \frac{1}{3} qa, \quad M_C = 0, \quad M_B = \frac{1}{3} qa \cdot a = \frac{1}{3} qa^2;$$

— участок $B-A$ (местная система координат указана на рис. 7.6, а):

$$Q_{BA}(\varphi) = \frac{1}{3} qa \cdot \sin \varphi, \quad Q_B(0) = 0, \quad Q_A = Q_{BA} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{3} qa,$$

$$M_{BA}(\varphi) = \frac{1}{3} qa (2a - a \cos \varphi) - \frac{1}{2} qa^2 = \frac{1}{3} qa^2 \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi \right),$$

$$M_B = M_{BA}(0) = -\frac{1}{6} qa^2, \quad M_A = M_{BA} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{6} qa^2;$$

— участок $A-D$ ($\mathcal{E}Q$ — линейная, $\mathcal{E}M$ — парабола):

$$Q_A = \frac{1}{3} qa, \quad Q_D = \frac{1}{3} qa - qa = -\frac{2}{3} qa, \quad M_A = \frac{1}{6} qa^2, \quad M_D = 0.$$

$\mathcal{E}Q$ приведена на рис. 7.6, б. Поскольку на участке $A-D$ перерезывающая сила меняет знак, то перед построением $\mathcal{E}M$ необходимо провести исследование на экстремум:

$$Q(x_*) = 0, \quad \frac{x_*}{a - x_*} = \frac{qa/3}{2qa/3}, \quad x_* = \frac{1}{3} a,$$

$$M_{\text{extr}} = M_{\text{max}} = \frac{1}{3} qa (2a + x_*) - qa^2 - qx_* \frac{x_*}{2} = \frac{2}{9} qa^2.$$

$\mathcal{E}M$ приведена на рис. 7.6, в.

2. Расчет на прочность. Расчетное сечение — правый конец участка $C-B$:

$$M_{\max} = M_B = \frac{1}{3} qa^2.$$

Учитывая, что для данного сечения $W = \pi R^2 \delta = 0,314R^3$ (см. табл. П.3), записываем условие прочности (см. § 5.2):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{qa^2/3}{0,314R^3} = 1,06 \frac{qa^2}{R^3} \leq [\sigma],$$

откуда следует, что

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{1,06qa^2}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1,06 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,6^2}{140 \cdot 10^6}} = 0,0300 \text{ м} = 30,0 \text{ мм.}$$

Принимаем $R = 30$ мм, $\delta = 3$ мм. ■

Пример 7.4. Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы, изображенной на рис. 7.7, *a*.

Решение. Рама — пространственная. Она статически определимая, так как заделка накладывает шесть связей и реакции в опоре могут быть найдены из шести уравнений равновесия. Однако для определения внутренних силовых факторов вычислять их нет необходимости, так как метод сечений можно применять, отсекая части от свободных краев рамы аналогично тому, как это делается в консольной балке.

Обозначение узлов рамы приведено на рис. 7.7, *a*. Здесь же на каждом участке указаны местные системы координат. Отметим, что все они правые. Ось Ox , как обычно, является продольной. Положение осей Oy и Oz для построения эпюр, в общем, может быть произвольным, однако для дальнейших расчетов (определение напряжений и перемещений) они должны быть главными центральными осями текущих поперечных сечений.

Эпюры внутренних силовых факторов строим по участкам, используя те же приемы, что для плоских рам:

— участок $M-C$ ($\mathcal{E}M_z$ — линейная):

$$N = 0, \quad Q_y = -qa, \quad Q_z = 0, \quad M_{zM} = 0, \quad M_{zC} = -qa \cdot a = -qa^2,$$

$$M_y = 0, \quad M_x = 0;$$

— участок $E-D$:

$$N = 0, \quad Q_y = 0, \quad Q_z = 0, \quad M_z = 0, \quad M_y = 0, \quad M_x = -2qa^2;$$

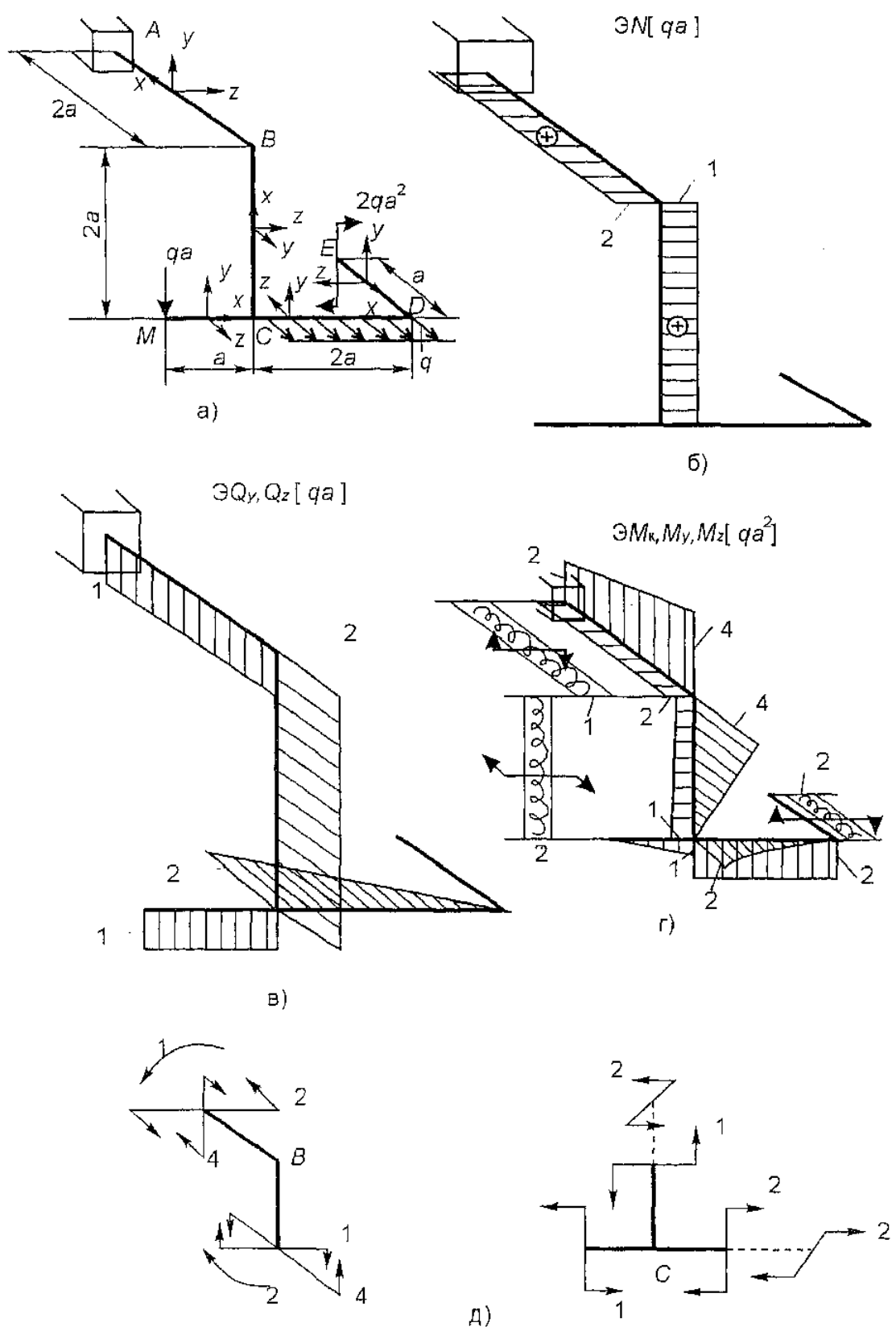


Рис. 7.7

— участок $D-C$ (∂Q_z — линейная, ∂M_y — парабола)

$$N = 0, \quad Q_y = 0, \quad Q_{zD} = 0, \quad Q_{zC} = -2qa,$$

$$M_{yD} = 0, \quad M_{yC} = -2qa \cdot a = -2qa^2, \quad M_z = -2qa^2, \quad M_x = 0;$$

— участок $C-B$ (∂M_z — линейная):

$$N = qa, \quad Q_y = 2qa, \quad Q_z = 0, \quad M_y = -2qa^2 + qa \cdot a = -qa^2,$$

$$M_{zC} = 0, \quad M_{zB} = 2qa \cdot 2a = 4qa^2, \quad M_x = 2qa^2;$$

— участок $B-A$ (∂M_z — линейная):

$$N = 2qa, \quad Q_y = -qa, \quad Q_z = 0, \quad M_y = -2qa \cdot a = -2qa^2,$$

$$M_{zB} = 2qa \cdot 2a = 4qa^2, \quad M_{zA} = 4qa^2 - qa \cdot 2a = 2qa^2,$$

$$M_x = 2qa^2 - qa \cdot a = qa^2.$$

Соответствующие эпюры приведены на рис. 7.7, б–г. В сложных случаях эпюры различных моментов и перерезывающих сил изображаются отдельно.

В заключение следует проверить равновесие узлов рамы (рис. 7.7, д; здесь указаны только моменты).

Пример 7.5. Определить вертикальное δ_y и горизонтальное δ_x перемещения точки A для фермы, показанной на рис. 7.8. Длины и жесткости стержней одинаковы и равны соответственно l и EF .

Решение. Нумерация стержней показана на рис. 7.8. Как будет ясно из дальнейшего, в данном случае реакции в опорах можно не определять.

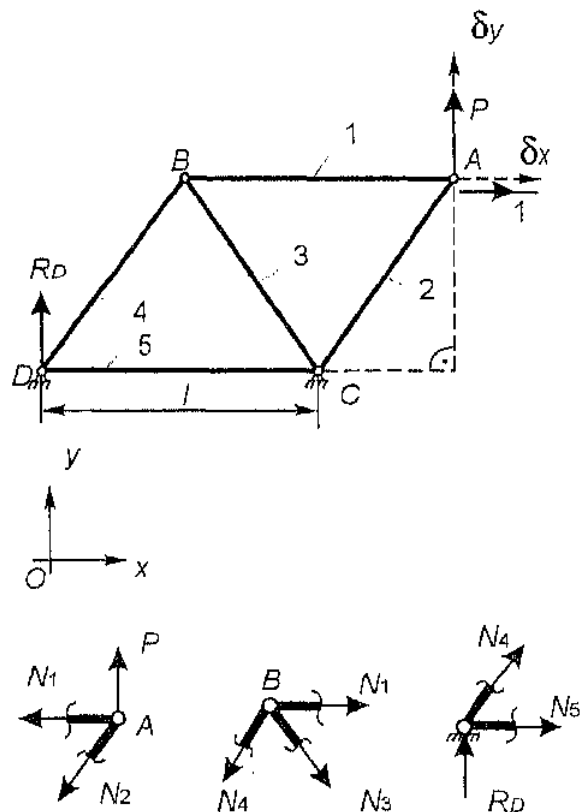


Рис. 7.8

Вычисляем усилия в стержнях, используя метод сечений (см. § 2.1; все треугольники равносторонние):

— узел A :

$$\sum X = 0: -N_1 - N_2 \cdot \cos 60^\circ = -N_1 - N_2/2 = 0,$$

$$\sum Y = 0: P - N_2 \cdot \cos 30^\circ = P - N_2 \sqrt{3}/2 = 0;$$

— узел B :

$$\sum X = 0: N_1 + (N_3 - N_4) \cdot \cos 60^\circ = N_1 + (N_3 - N_4)/2 = 0,$$

$$\sum Y = 0: -(N_3 + N_4) \cdot \cos 30^\circ = 0;$$

— узел D :

$$\sum X = 0: N_4 \cdot \cos 60^\circ + N_5 = N_4/2 + N_5 = 0.$$

Отсюда находим:

$$N_1 = N_4 = -\frac{P}{\sqrt{3}}, \quad N_2 = \frac{2P}{\sqrt{3}}, \quad N_3 = \frac{P}{\sqrt{3}}, \quad N_5 = \frac{P}{2\sqrt{3}}.$$

Для определения δ_y удобнее воспользоваться теоремой Кастильяно (утверждение 7.6). С этой целью вычислим потенциальную энергию фермы (см. (7.1), (7.4), а также (2.4)):

$$U = \frac{l}{2EF} \sum_{i=1}^5 N_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2EF} \left[\left(-\frac{P}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2P}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{P}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{P}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{P}{2\sqrt{3}}\right)^2 \right] = \frac{29}{24} \frac{P^2 l}{EF}.$$

Следовательно, искомое перемещение имеет вид

$$\delta_y = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{29}{12} \frac{Pl}{EF}.$$

Для определения горизонтального перемещения воспользуемся интегралами Мора (7.18). Полагая $P = 0$, прикладываем в точке A в соответствующем направлении единичную силу (рис. 7.8) и аналогично исходной задаче находим усилия N_i^1 для этой системы:

$$N_1^1 = N_4^1 = -N_3^1 = 1, \quad N_2^1 = 0, \quad N_5^1 = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta_x &= \sum_{i=1}^5 \int_0^l \frac{N_i N_i^1}{EF} dx = \frac{l}{EF} \sum_{i=1}^5 N_i N_i^1 = \\ &= \frac{l}{EF} \left[-\frac{P}{\sqrt{3}} \cdot 1 + \frac{2P}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{P}{\sqrt{3}} \cdot (-1) + \left(-\frac{P}{\sqrt{3}}\right) \cdot 1 + \frac{P}{2\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = \\ &= -\frac{5}{4\sqrt{3}} \frac{Pl}{EF}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 7.6. Определить прогиб в сечении C и угол поворота сечения D изображенной на рис. 7.9 балки жесткостью EJ_z .

Решение. Обозначение опор и характерных сечений балки указано на рис. 7.9. Определяем реакции опор (см. пример 5.1):

$$\sum M_A = 0: -qa \cdot a - 2qa(a+a) + R_B \cdot 3a - qa^2 = 0, \quad R_B = 2qa;$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 3a + qa \cdot 2a + 2qa \cdot a - qa^2 = 0, \quad R_A = qa.$$

Вычисляем значения изгибающих моментов на концах участков:

$$M_{zA} = 0, \quad M_{zD} = qa^2, \quad M_{zB} = M_{zC} = -qa^2$$

и строим эпюру M_z (см. рис. 7.9).

Аналогично строим эпюры изгибающих моментов $M_z^{1\delta}$ и $M_z^{1\theta}$ для двух единичных систем “1 δ ” и “1 θ ” (балка, нагруженная только соответствующей единичной нагрузкой; см. утверждение 7.7 и рис. 7.9).

Искомое перемещение и угол поворота находим с помощью интегралов Мора (7.18), используя правило Верещагина (7.19) и табл. 5.1. Вычисления проводим по участкам:

— участок $A-D$ (“умножаем” треугольник $\mathcal{E}M_z$ на треугольнички $\mathcal{E}M_z^{1\delta}$ и $\mathcal{E}M_z^{1\theta}$):

$$\int_0^a \frac{M_z M_z^{1\delta}}{EJ_z} dx = -\frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} qa^2 \cdot a \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{3} = -\frac{qa^4}{9EJ_z},$$

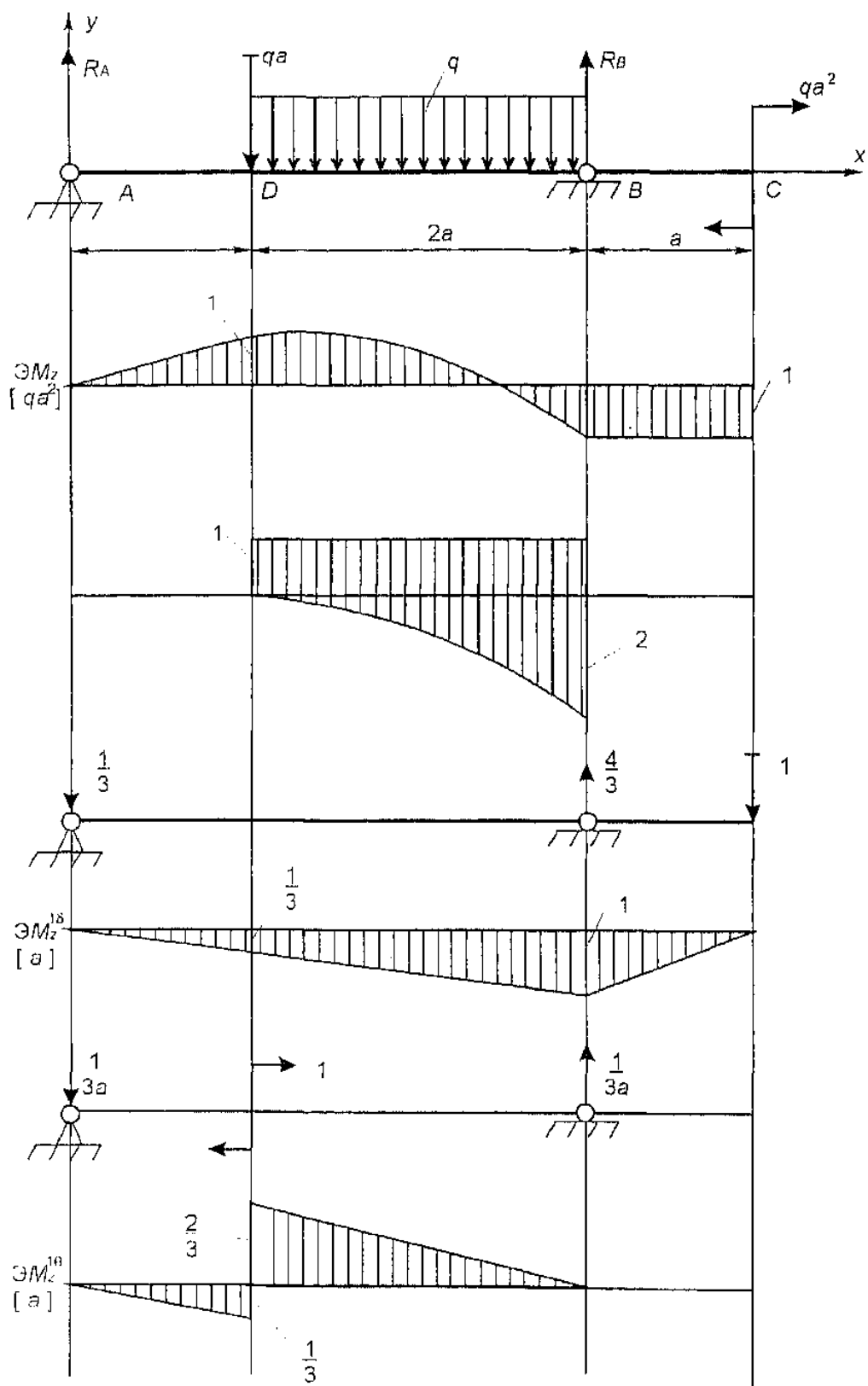


Рис. 7.9

$$\int_0^a \frac{M_z M_z^{1\theta}}{EJ_z} dx = -\frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} qa^2 \cdot a \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{qa^3}{9EJ_z};$$

— участок $D-B$ (расщепляем $\overline{EM_z}$ на прямоугольник — эпюру от действия реакции R_A и силы в сечении D — и параболу — эпюру от действия распределенной нагрузки; “умножаем” трапецию и треугольник $EM_z^{1\delta}$ и $EM_z^{1\theta}$ на прямоугольник $\overline{EM_z}$, а также параболу $\overline{EM_z}$ на трапецию и треугольник $EM_{z1}^{1\delta}$ и $EM_{z1}^{1\theta}$:

$$\int_0^{2a} \frac{M_z M_z^{1\delta}}{EJ_z} dx = \frac{1}{EJ_z} \left\{ -\frac{a/3 + a}{2} \cdot 2a \cdot qa^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 2qa^2 \cdot 2a \right) \left[\frac{1}{3} a + \frac{3}{4} \left(a - \frac{1}{3} a \right) \right] \right\} = -\frac{2qa^4}{9EJ_z},$$

$$\int_0^{2a} \frac{M_z M_z^{1\theta}}{EJ_z} dx = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot qa^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot 2qa^2 \cdot 2a \right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{4qa^3}{9EJ_z};$$

— участок $B-C$ (“умножаем” треугольник $EM_z^{1\delta}$ на прямоугольник $\overline{EM_z}$:

$$\int_0^a \frac{M_z M_z^{1\delta}}{EJ_z} dx = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} a \cdot a \right) \cdot qa^2 = \frac{qa^4}{2EJ_z}, \quad \int_0^a \frac{M_z M_{z1}^{\theta}}{EJ_z} dx = 0.$$

Суммируя эти результаты, окончательно найдем прогиб δ_C в сечении C и угол поворота θ_D сечения D :

$$\delta_C = \int_0^{4a} \frac{M_z M_z^{1\delta}}{EJ_z} dx = \frac{qa^4}{EJ_z} \left(-\frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6} \frac{qa^4}{EJ_z},$$

$$\theta_D = \int_0^{4a} \frac{M_z M_z^{1\theta}}{EJ_z} dx = \frac{qa^3}{EJ_z} \left(-\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 0 \right) = \frac{1}{3} \frac{qa^3}{EJ_z}. \quad \blacksquare$$

Пример 7.7. Найти горизонтальное перемещение δ_{Ax} сечения A изображенной на рис. 7.6, a рамы, полагая жесткости брусьев на всех участках одинаковыми.

Решение. Для вычисления перемещения используем интегралы Мора (7.18). ЭМ для этой рамы построена в примере 7.3 (см. рис. 7.6, в).

Рассматриваем также раму под действием единичной силы, приложенной в сечении А и сонаправленной с δ_{Ax} . Аналогично примеру 7.3 строим соответствующую эпюру изгибающих моментов M^1 (рис. 7.10, а). При этом на участке В—А (местная система координат указана на рис. 7.6, а) для момента имеем следующее выражение:

$$M^1(\varphi) = -\frac{1}{3} \cdot (2a - a \cos \varphi) + 1 \cdot a \sin \varphi = a \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \varphi + \sin \varphi \right).$$

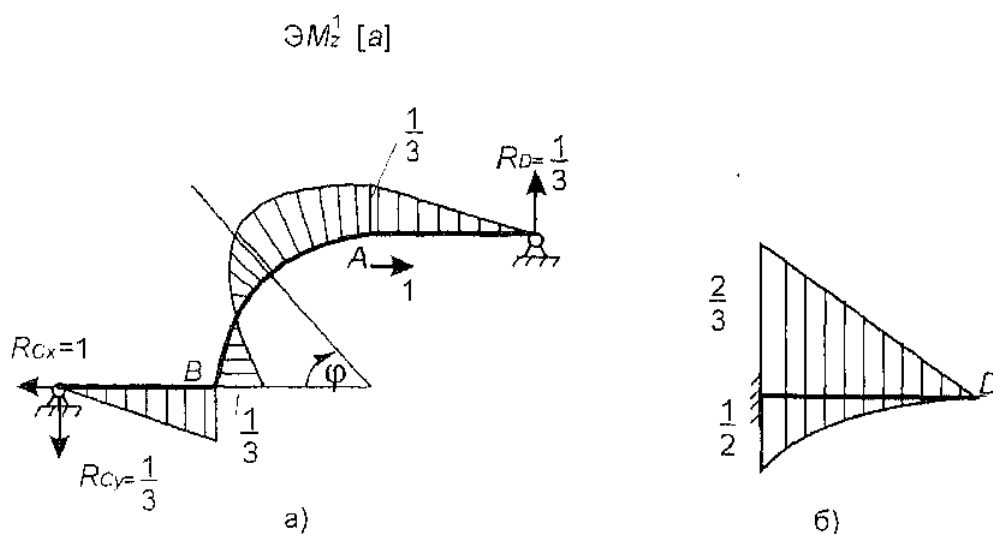


Рис. 7.10

Интегралы Мора на прямолинейных участках вычисляем, используя правило Верещагина и учитывая расслоение эпюры M на участке А—D (рис. 7.10, б), а на участке В—А — с помощью непосредственного интегрирования:

$$\begin{aligned} \delta_{Ax} = & \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} qa^2 \cdot a \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} a + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} qa^2 \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi \right) \times \right. \\ & \times a \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \varphi + \sin \varphi \right) a d\varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} qa^2 \cdot a \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} a - \\ & \left. - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} a \right] = 0,0113 \frac{qa^4}{EJ_z}. \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 7.8. Определить перемещение δ_c сечения C по нормали к плоскости ABC изображенной на рис. 7.7, a рамы.

Решение. Для вычисления перемещения используем интегралы Мора (7.18). Эпюры изгибающих и крутящего моментов для этой рамы построена в примере 7.4 (см. рис. 7.7, z).

Прикладываем к раме в направлении искомого перемещения единичную силу и аналогично примеру 7.4 строим эпюры моментов M_k^1, M_y^1, M_z^1 (рис. 7.11). Искомое перемещение найдем, перемножая соответствующие эпюры на участках $A-B$ и $B-C$:

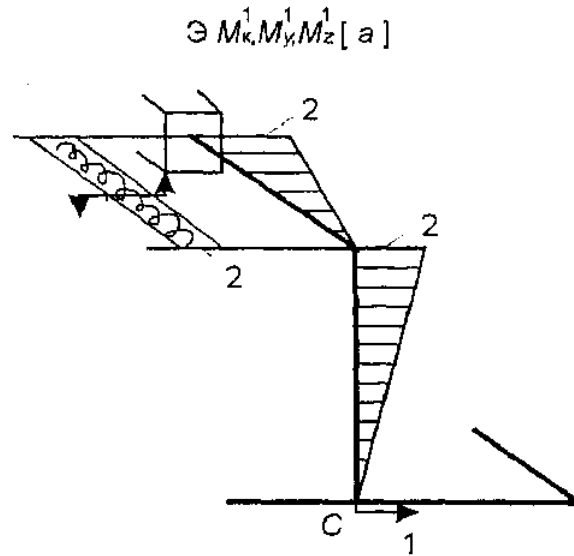


Рис. 7.11

$$\begin{aligned} \delta_c &= - \frac{1}{(EJ_y)_{AB}} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2qa^2 \right) - \frac{1}{(GJ_k)_{AB}} (qa^2 \cdot 2a \cdot 2a) - \\ &\quad - \frac{1}{(EJ_y)_{BC}} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot qa^2 \right) = \\ &= - 2qa^4 \left[\frac{2}{(EJ_y)_{AB}} + \frac{2}{(GJ_k)_{AB}} + \frac{1}{(EJ_y)_{BC}} \right]. \blacksquare \end{aligned}$$

Задачи

7.1—7.25. Построить эпюры внутренних силовых факторов для рам, приведенных на соответствующих рисунках.

7.26—7.31. Используя теорему Кастильяно, найти перемещение сечения A балок и ферм или угол поворота сечения B балок, приведенных на соответствующих рисунках. Площади поперечных сечений F и изгибные жесткости EJ_z считать постоянными.

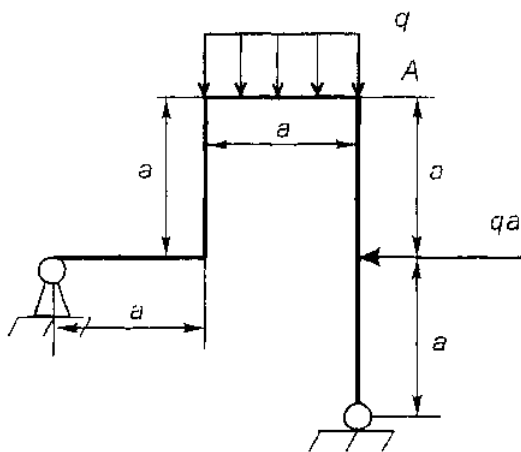
7.32—7.49. Используя интегралы Мора, найти перемещение сечения A или угол поворота сечения B балок и ферменных систем, приведенных на соответствующих рисунках. Изгибные жесткости EJ_z считать постоянными.

7.50—7.64. Определить перемещение сечения A или угол поворота сечения B рам, указанных в задачах 7.1—7.15.

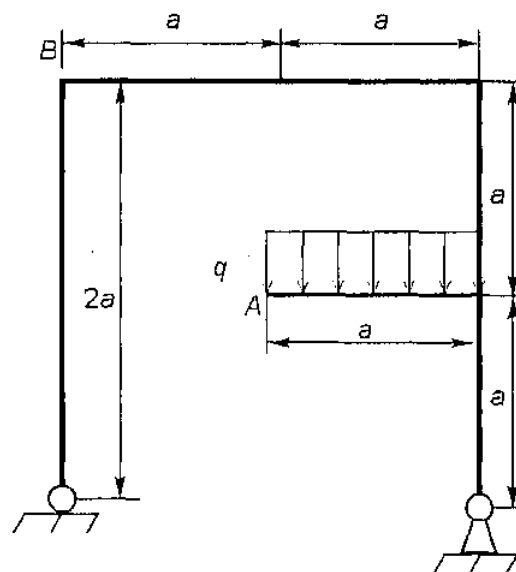
7.65—7.74. Для рам, указанных в задачах 7.16—7.25, определить перемещение сечения E в направлении, перпендикулярном плоскости CDE .

7.75—7.84. Для балок, указанных соответственно на рис. 6.38—6.47, определить прогиб в точке C .

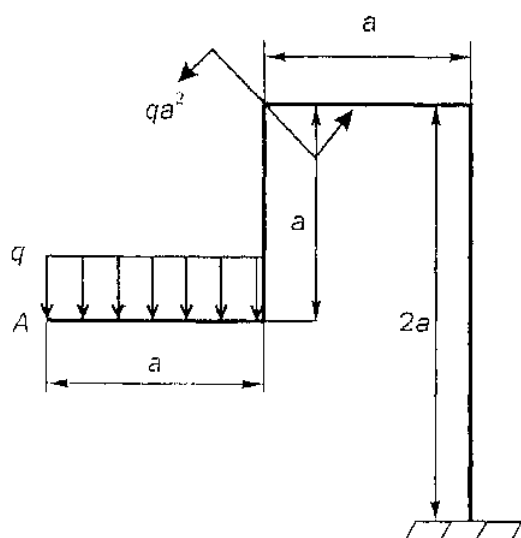
7.1



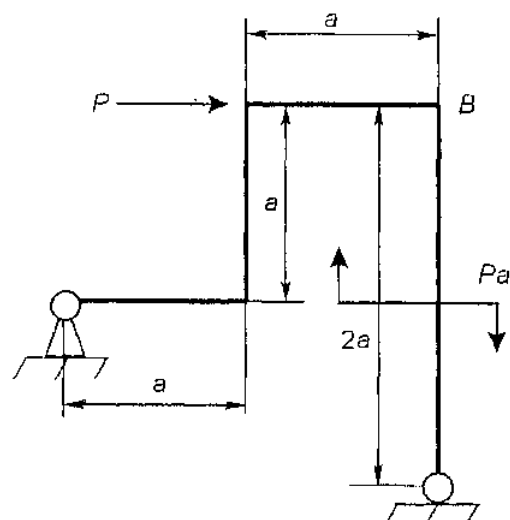
7.2



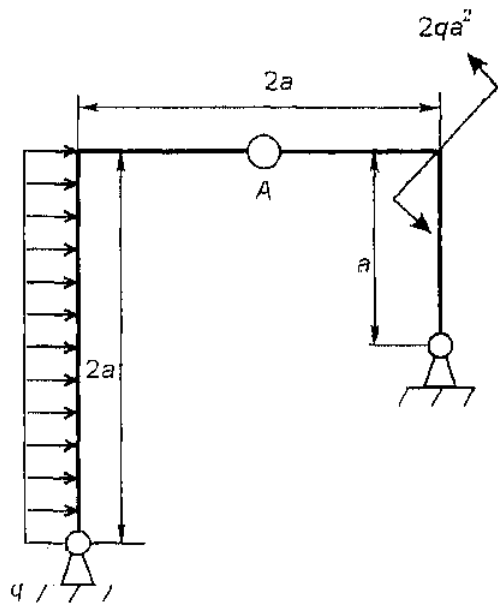
7.3



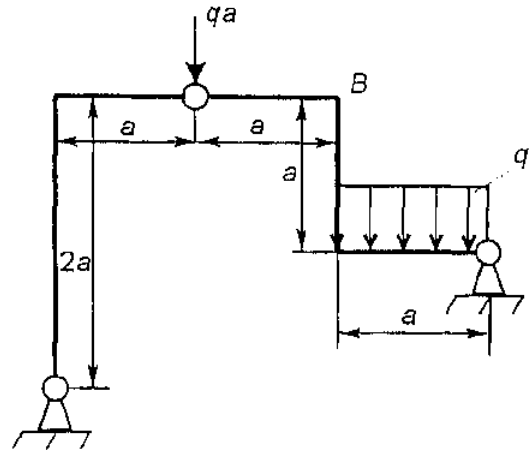
7.4



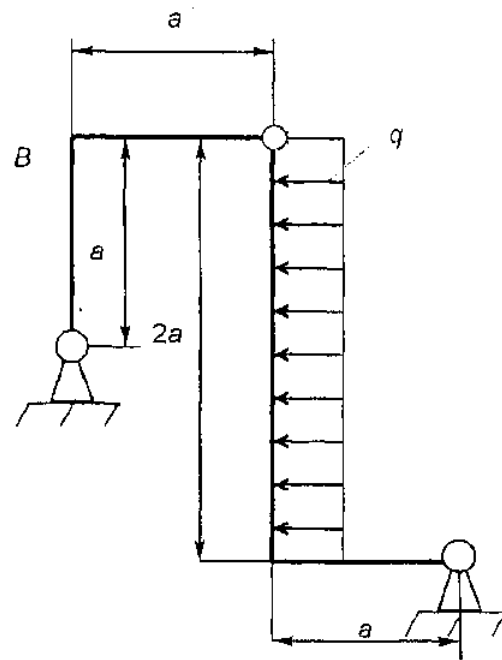
7.5



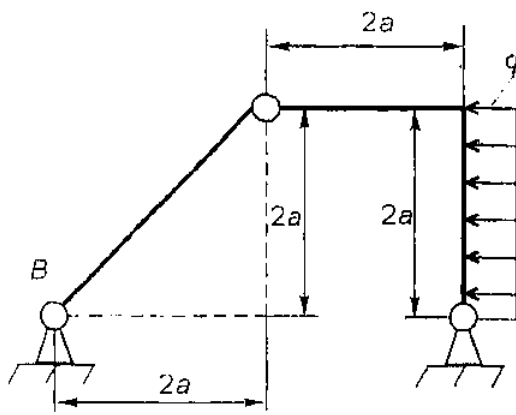
7.6



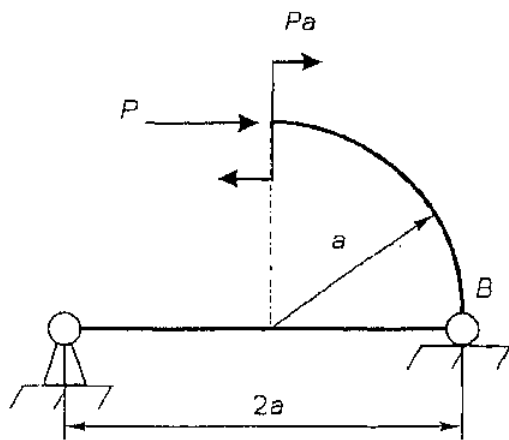
7.8



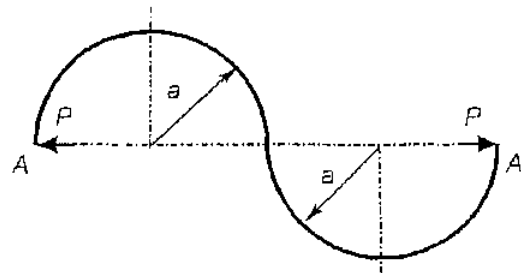
7.7



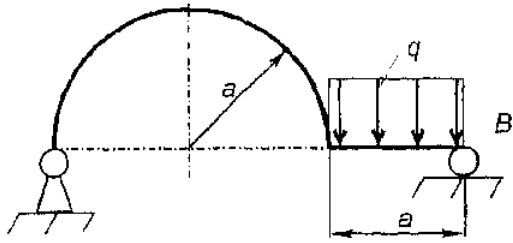
7.9



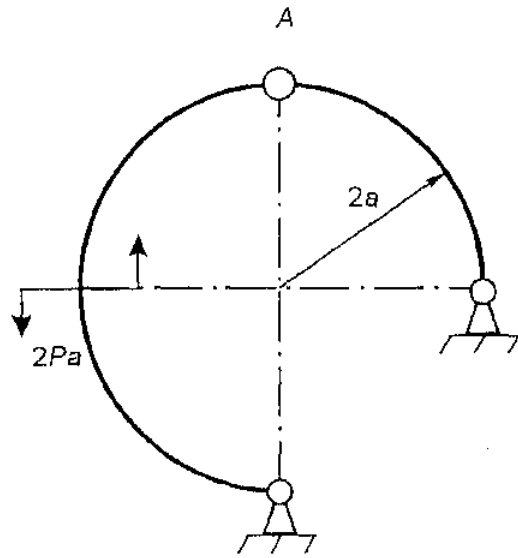
7.10



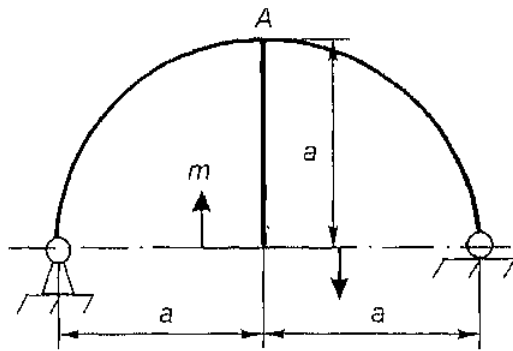
7.11



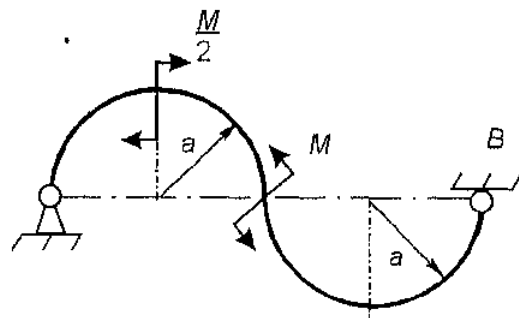
7.12



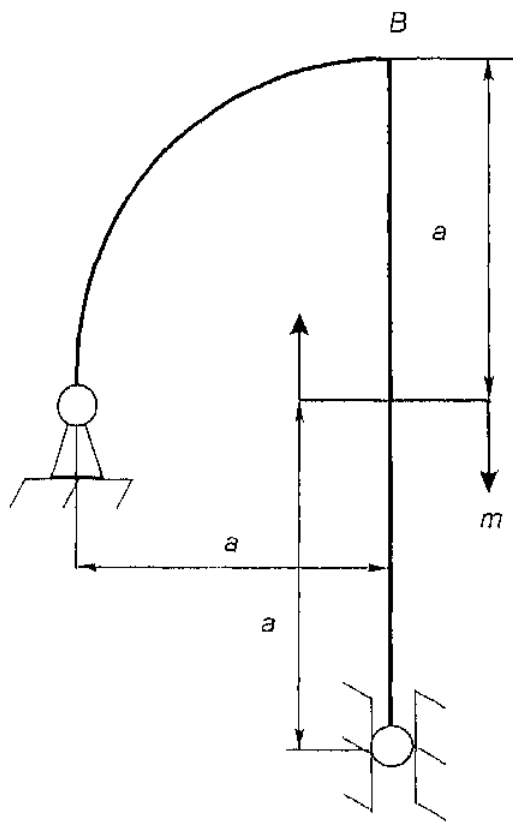
7.13



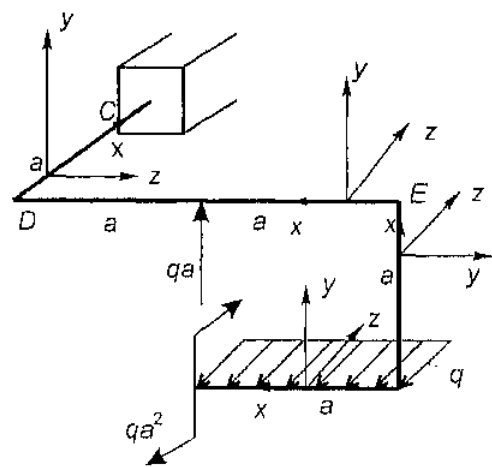
7.14



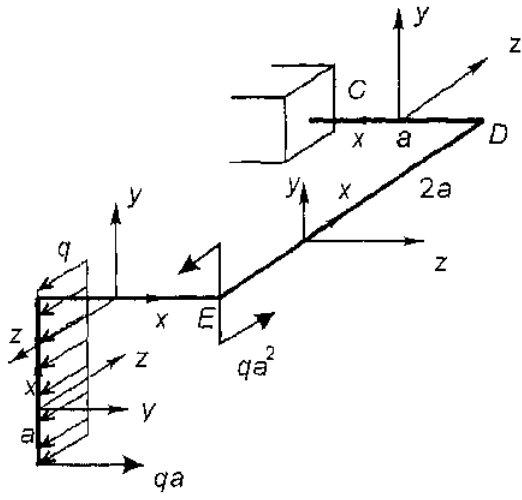
7.15



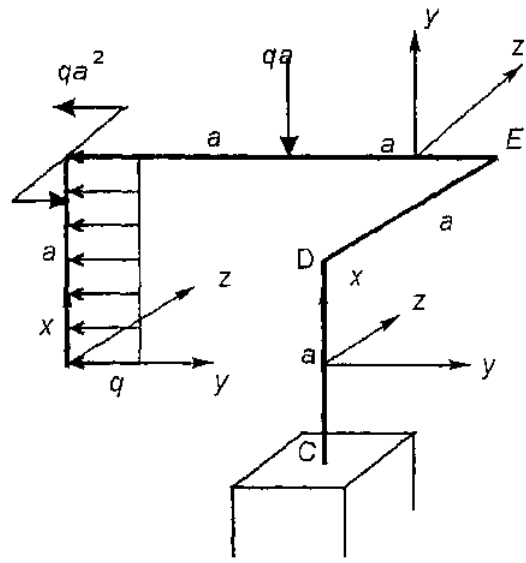
7.16



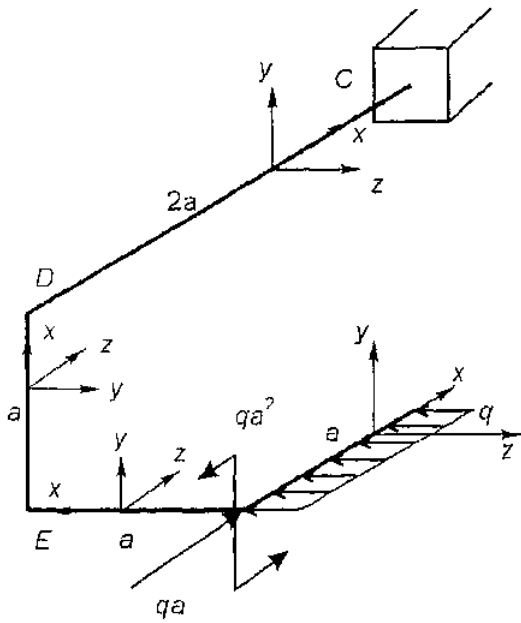
7.17



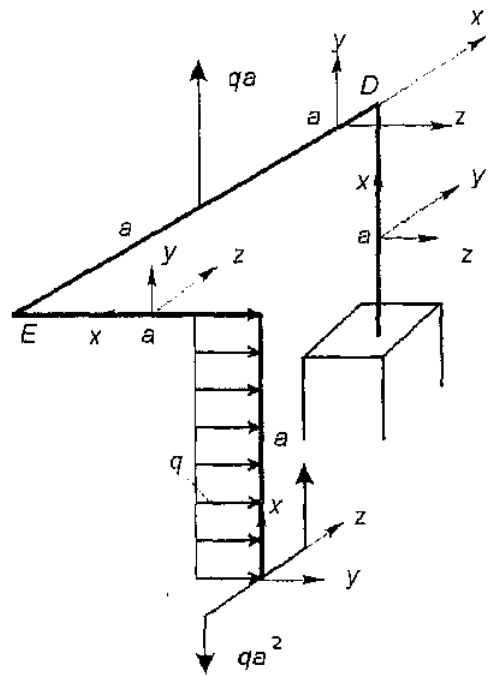
7.18



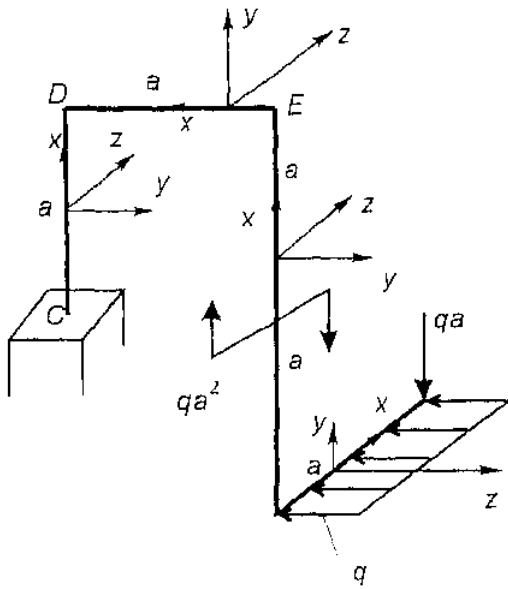
7.19



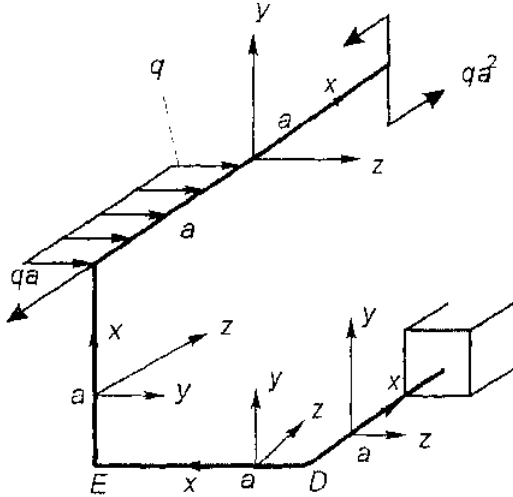
7.20



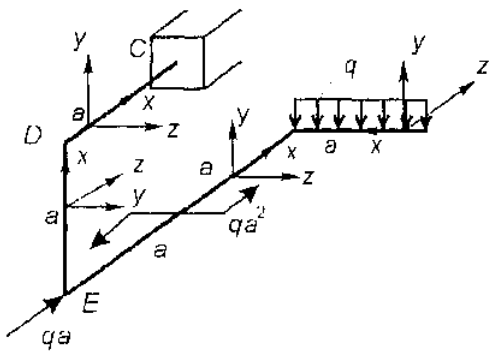
7.21



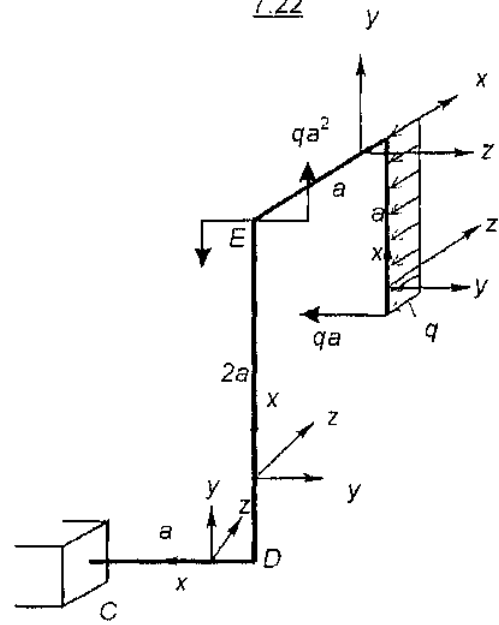
7.23



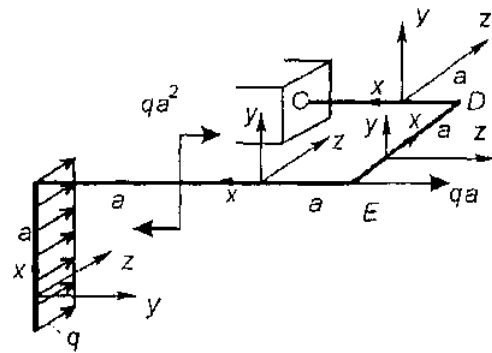
7.25



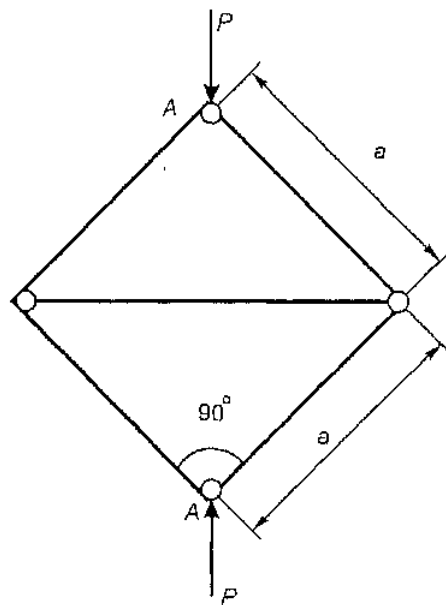
7.22



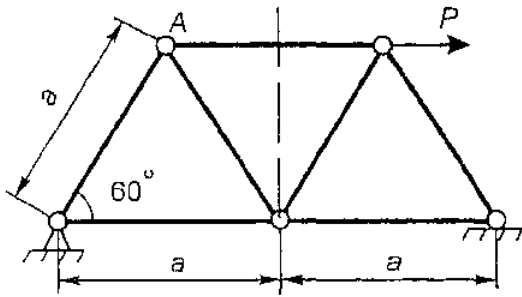
7.24



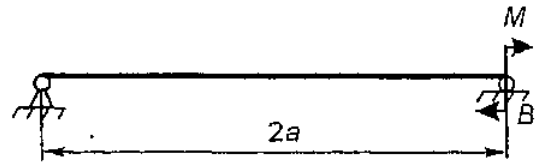
7.26



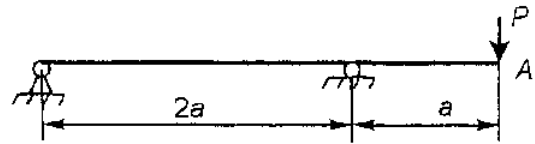
7.27



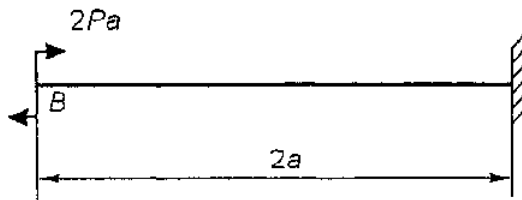
7.28



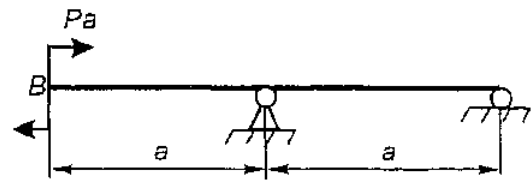
7.29



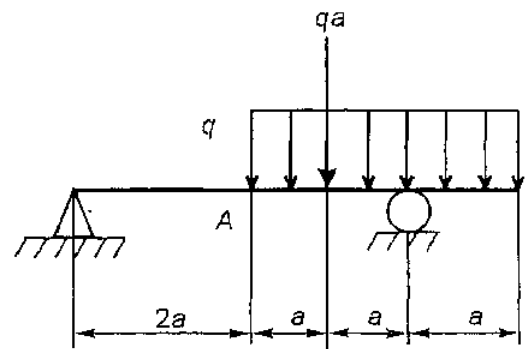
7.30



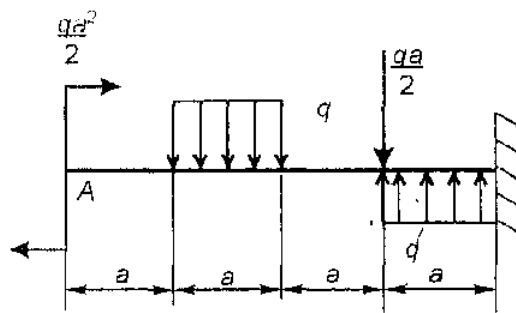
7.31



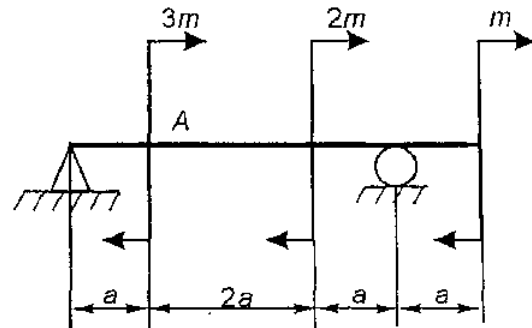
7.33



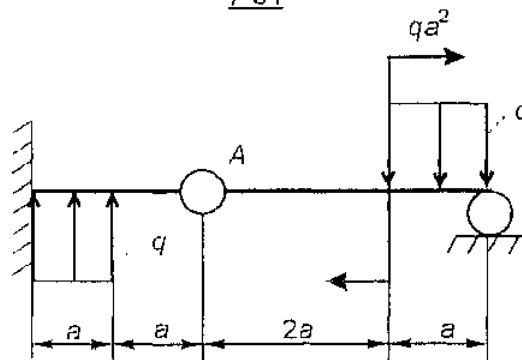
7.32



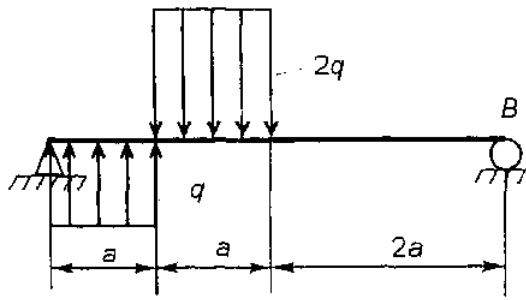
7.35



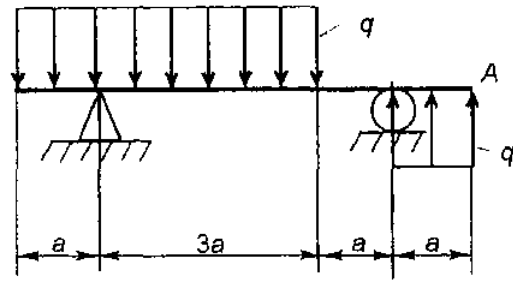
7.34



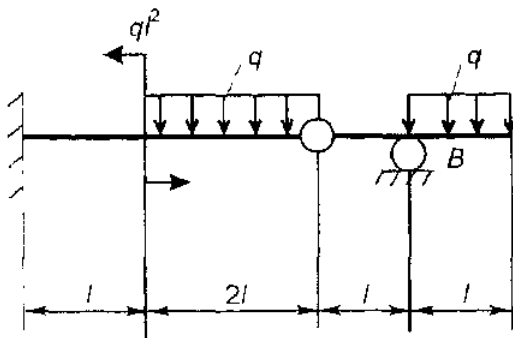
7.36



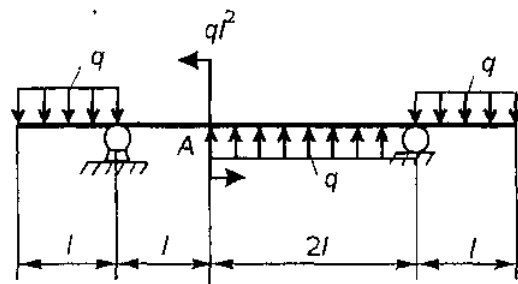
7.37



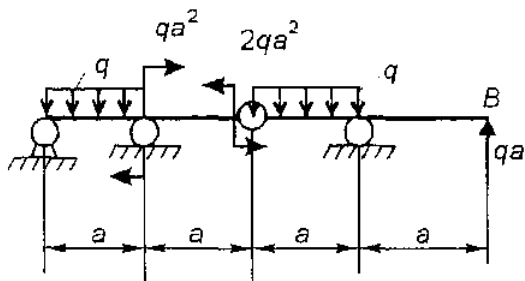
7.38



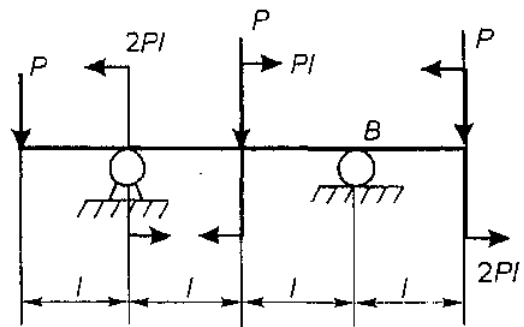
7.39



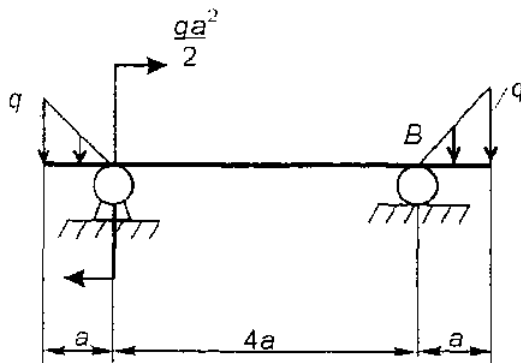
7.40



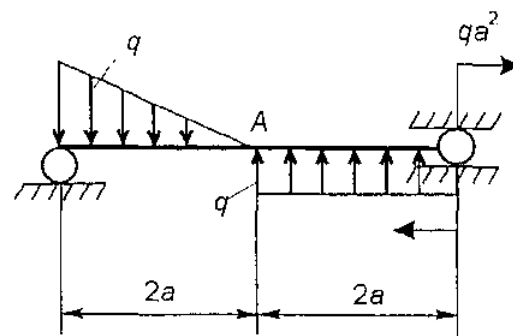
7.41

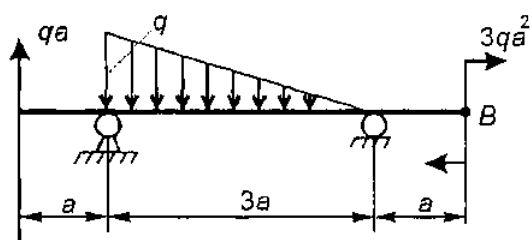
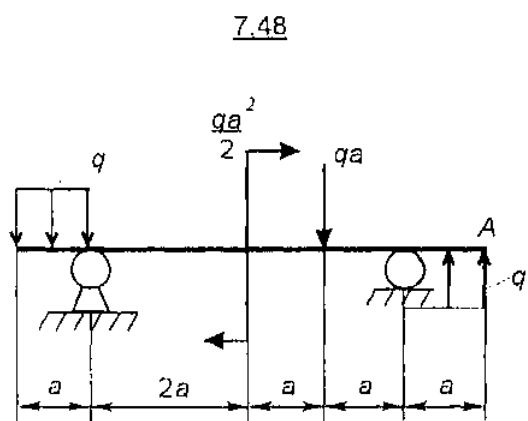
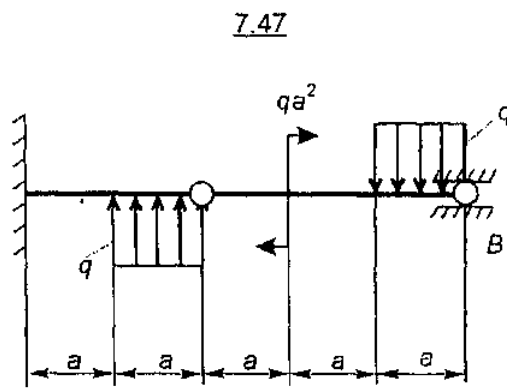
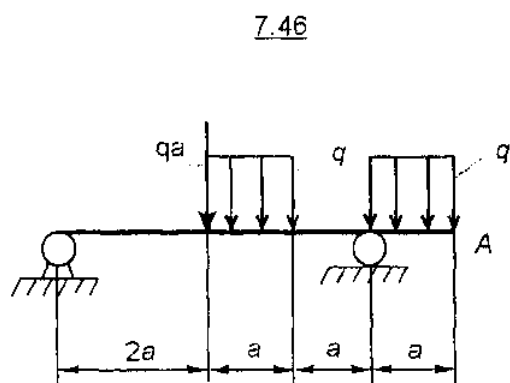
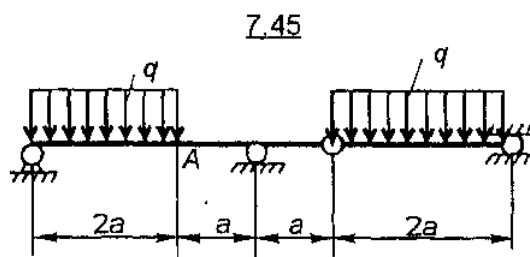
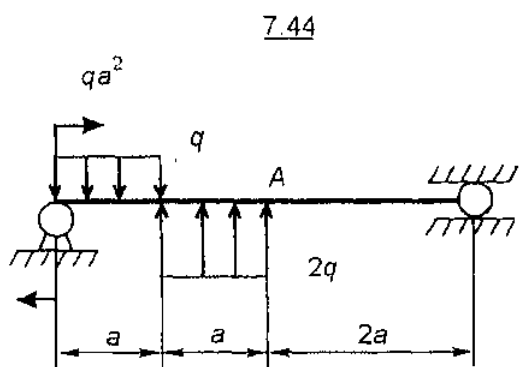


7.42



7.43





§ 7.2. Расчет цилиндрических пружин

Практически важным примером СО-брусьев являются пружины.

Определение 7.7. Криволинейный брус с постоянным поперечным сечением и осью Γ в виде винтовой линии (рис. 7.12) называется *цилиндрической пружиной*, а ось винтовой линии — *осью пружины*.

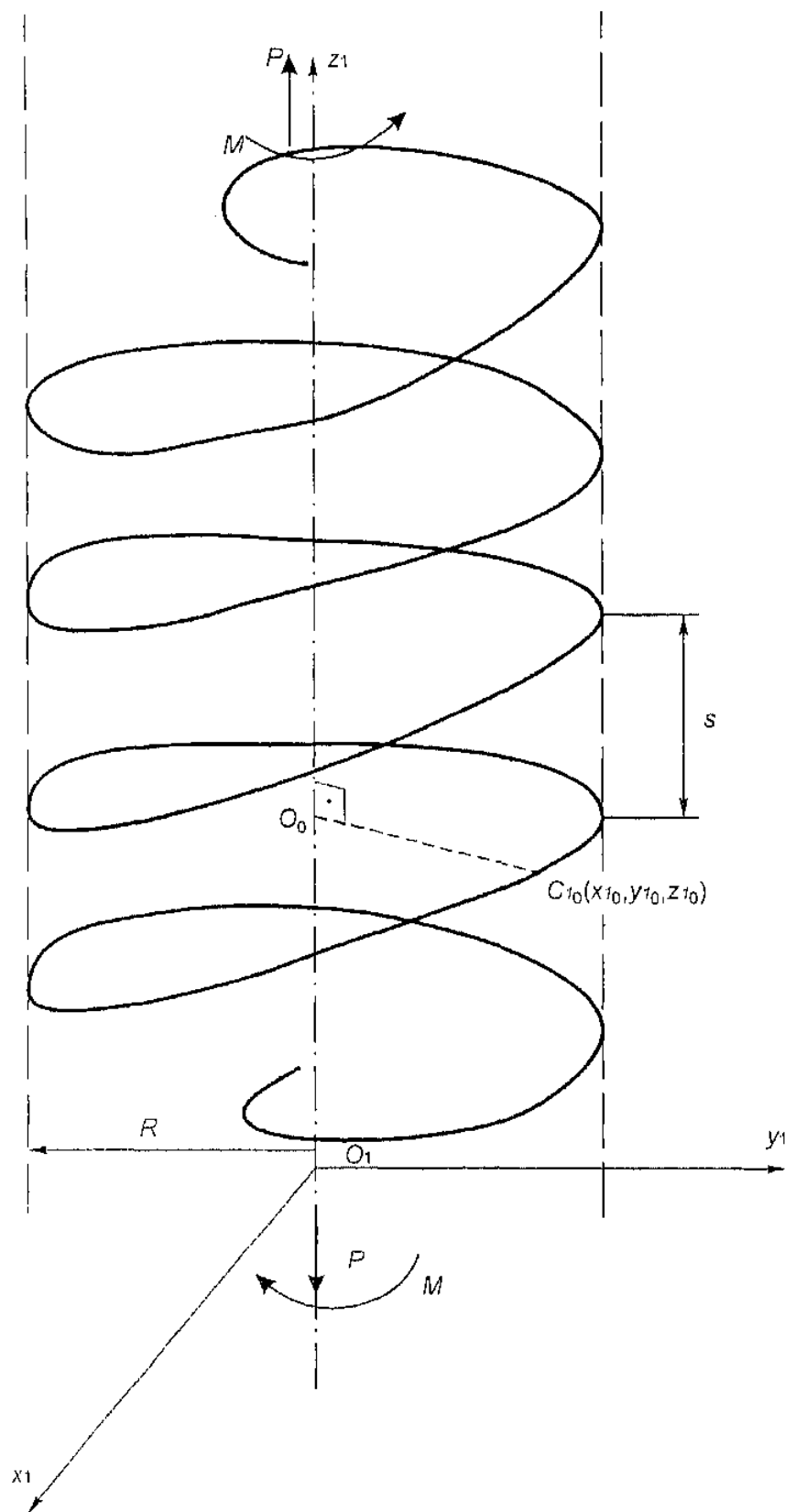


Рис. 7.12

Если пружина нагружена на концах растягивающей, сжимающей силой P или крутящим моментом M , то она называется *пружиной растяжения, сжатия или кручения*. ■

Если винтовая линия имеет радиус R и шаг s , то в ПДСК $O_1x_1y_1z_1$ (ось O_1z_1 совпадает с осью пружины) ее параметрическое представление имеет вид

$$x_1 = R \cos t, \quad y_1 = R \sin t, \quad z_1 = \frac{s}{2\pi} t \quad (0 \leq t \leq t_k). \quad (7.20)$$

В некоторой точке $C_0(x_{10}, y_{10}, z_{10}) \in \Gamma$ проведем поперечное сечение пружины. Оси системы координат C_0xyz в сечении выберем следующим образом: C_0x направим по касательной к Γ , C_0y — вдоль прямой C_0O_0 , пересекающей ось пружины и перпендикулярной ей, а C_0z — перпендикулярно плоскости C_0xy (рис. 7.12, 7.13 и 7.14). Тогда единичные базисные векторы i, j и k системы C_0xyz имеют в ПДСК $O_1x_1y_1z_1$ (e_1, e_2, e_3 — ее орты) следующие координаты:

$$i = \left(-\frac{y_{10}}{qR}, \frac{x_{10}}{qR}, \sin \alpha \right), \quad j = -\frac{1}{R} (x_{10}, y_{10}, 0), \quad (7.21)$$

$$k = [i, j] = \left(\frac{y_{10}}{R} \sin \alpha, -\frac{x_{10}}{R} \sin \alpha, \cos \alpha \right),$$

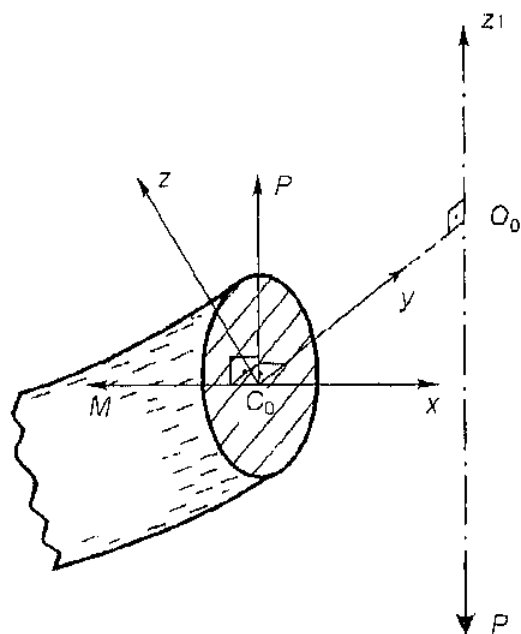


Рис. 7.13

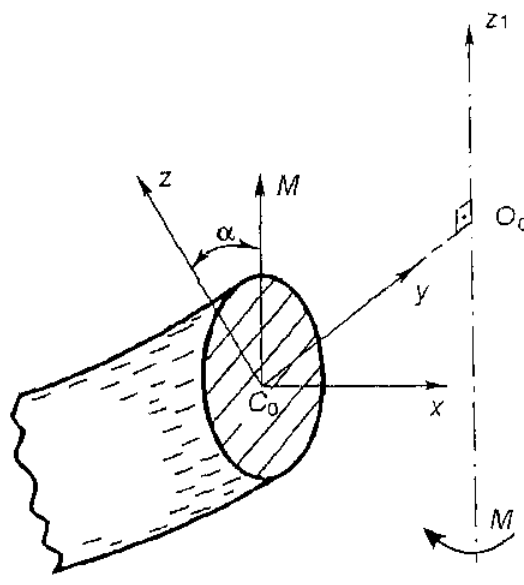


Рис. 7.14

$$\cos \alpha = \frac{1}{q}, \quad \sin \alpha = \frac{s}{2\pi Rq}, \quad q = \sqrt{1 + \frac{s^2}{4\pi^2 R^2}},$$

$$x_{10} = R \cos t_0, \quad y_{10} = R \sin t_0.$$

Отсюда вытекает, что система координат C_0xyz есть ПДСК.

Из условий равновесия отсеченной нижней части пружины растяжения ($P > 0$) или сжатия ($P < 0$) получаем, что векторы внутренних результирующих силы и момента в сечении (см. (П.8) и (П.22)) имеют следующий вид (см. рис. 7.13):

$$R = -R_e = (0, 0, P), \tag{7.22}$$

$$M = -M_e = PR [j, e_3] = P(-y_{10}, x_{10}, 0).$$

Из (7.22) и (П.22) вытекают формулы для внутренних силовых факторов:

$$N = P \sin \alpha, \quad Q_y = 0, \quad Q_z = P \cos \alpha, \quad M_k = PR \cos \alpha, \tag{7.23}$$

$$M_y = 0, \quad M_z = -PR \sin \alpha.$$

Аналогично для пружины кручения имеем (см. рис. 7.14):

$$R = -R_e = 0, \quad M = -M_e = M(0, 0, 1), \tag{7.24}$$

$$N = Q_y = Q_z = 0, \quad M_k = M \sin \alpha, \quad M_y = 0, \quad M_z = M \cos \alpha.$$

Отметим, что, как следует из (7.23) и (7.24), силовые факторы во всех сечениях пружины одинаковы. Форма концов пружин, связанная с конструктивными особенностями, в силу аксиомы 6 (см. § П.1) не учитывается.

Обычно кривизной пружины пренебрегают (см. определение 7.1). Тогда на основании формул (7.23) и (7.24) можно провести поверочный расчет пружины на прочность по алгоритму, указанному в § 7.1.

Кроме того, с помощью формул (7.1) и (7.23) (см. также (1.9)) может быть вычислена потенциальная энергия U , а с использованием теоремы Кастильяно (утверждение 7.6) или интегралов Мора (7.18) найдено удлинение (укорочение) δ или относительный угол закручивания φ пружины (оси C_0yz полагаются главными):

-- пружины растяжения или сжатия:

$$U = \frac{1}{2} kP^2, \quad \delta = kP, \quad c = 1/k,$$

$$k = \frac{l}{EF} \left[\left(1 + \frac{R^2}{i_z^2} \right) \sin^2 \alpha + 2(1 + \nu) \left(k_z + \frac{R^2}{i_K^2} \right) \cos^2 \alpha \right] \approx \quad (7.25)$$

$$= \frac{lR^2}{EF} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{i_z^2} + 2(1 + \nu) \frac{\cos^2 \alpha}{i_K^2} \right], \quad i_K^2 = \frac{J_K}{F}, \quad l = \frac{2\pi Rn}{\cos \alpha} = \frac{\pi Dn}{\cos \alpha};$$

— пружины кручения:

$$U = \frac{1}{2} kM^2, \quad \varphi = kM, \quad c = 1/k, \quad (7.26)$$

$$k = \frac{l}{EF} \left[\frac{\cos^2 \alpha}{i_z^2} + 2(1 + \nu) \frac{\sin^2 \alpha}{i_K^2} \right].$$

Здесь c и k — жесткости и податливости пружин, l и n — длина и число витков, D — диаметр пружины, а приближенное равенство соответствует малости радиуса инерции i_z и величины i_K i_z , $i_K \ll R$.

Как правило, пружины имеют *малый шаг*:

$$s \ll R. \quad (7.27)$$

Тогда, как следует из (7.21), $\sin \alpha \approx 0$ и $\cos \alpha \approx 1$. При этом в сечении пружины отличны от нуля только следующие условия:

— пружины растяжения или сжатия:

$$Q_z = P, \quad M_K = PR; \quad (7.28)$$

— пружины кручения:

$$M_z = M. \quad (7.29)$$

В проектировочных расчетах также пренебрегают перерезывающей силой. Тогда в соответствии с (4.7) и (5.10) расчетные значения напряжений определяются так:

— пружины растяжения или сжатия:

$$\tau_{\max} = \frac{PR}{W_K} = \frac{PD}{2W_K}; \quad (7.30)$$

— пружины кручения:

$$\sigma_{\max} = \max(\sigma_{\max}^B, \sigma_{\max}^H), \quad \sigma_{\max}^B = \frac{M}{W_z^B}, \quad \sigma_{\max}^H = \frac{M}{W_z^H}. \quad (7.31)$$

В этом случае формулы для жесткостей пружин в (7.25) и (7.26) существенно упрощаются:

$$k = \frac{R^2 l}{GJ_k} = \frac{D^2 l}{4GJ_k}, \quad l = 2\pi Rn = \pi Dn; \quad (7.32)$$

$$k = \frac{l}{EJ_z}. \quad (7.33)$$

Пример 7.9. Найти максимальные касательные напряжения τ_{\max} и перемещение δ конца цилиндрической пружины малого шага, свитой из проволоки круглого сечения. В расчетах принять: $P = 500$ Н; диаметр проволоки $d = 2$ см; $R = 10$ см; $n = 8$; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Из табл. П.4 находим геометрические характеристики сечения пружины:

$$J_k = J_p = \pi d^4 / 32, \quad W_k = W_p = \pi d^3 / 16.$$

Подставляя их в формулы (7.30) и (7.25) и учитывая (7.32), получаем

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}, \quad \delta = \frac{64R^3 n}{Gd^4} P.$$

Вычисления по этим формулам приводят к следующим результатам:

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 0,1}{\pi \cdot 0,02^3} = 31,8 \text{ МПа},$$

$$\delta = \frac{64 \cdot 0,1^3 \cdot 8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,02^4} \cdot 5 \cdot 10^2 = 0,02 \text{ м} = 2 \text{ см. } \blacksquare$$

Пример 7.10. Определить допускаемую растягивающую силу P и соответствующую этой силе потенциальную энергию цилиндрической пружины малого шага с квадратным сечением со стороной a . В расчетах принять: $a = 6$ мм; $R = 40$ мм; $n = 8$; $[\tau] = 40$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Из табл. П.4 и П.5 находим геометрические характеристики сечения пружины:

$$J_k = \beta a^4 = 1,83 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4, \quad W_k = \alpha a^3 = 4,49 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3.$$

Допускаемую силу находим из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{PR}{W_k} \leq [\tau].$$

Отсюда приходим к неравенству

$$P \leq \frac{[\tau] W_k}{R} = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot 4,49 \cdot 10^{-8}}{0,04} = 449 \text{ Н.}$$

Следовательно, $P = 449 \text{ Н.}$

Потенциальную энергию пружины находим с использованием формул (7.25) и (7.32):

$$U = \frac{\pi R^3 n}{2GJ_k} P^2 = \frac{\pi \cdot 0,04^3 \cdot 8}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,83 \cdot 10^{-10}} \cdot 449^2 = 27,6 \text{ Дж. } \blacksquare$$

Пример 7.11. Две цилиндрические пружины, свитые из круглых проволок одинакового материала и имеющие одинаковую длину, вставлены одна в другую концентрически, а их торцы соединены жесткими пластинами, к которым приложены сжимающие осевые силы P . У наружной пружины средний диаметр витка D_1 , диаметр поперечного сечения d_1 , число витков n_1 , а у внутренней — D_2 , d_2 , n_2 соответственно. Определить перемещение (осадку) δ концов пружины. В расчетах принять: $P = 4,3 \text{ кН}$; $D_1 = 2D_2 = 0,16 \text{ м}$; $d_1 = 16 \text{ мм}$; $d_2 = 12 \text{ мм}$; $n_1 = 8$; $n_2 = 12$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Решение. Отбросим одну из пластин и обозначим силы, действующие на внешнюю и внутреннюю пружины, P_1 и P_2 . Из уравнения равновесия оставшейся системы в проекциях на ось пружин имеем:

$$P_1 + P_2 = P.$$

Задача является статически неопределимой. Дополнительное уравнение составляем из условия совместности деформаций, которое заключается в равенстве перемещений концов пружин:

$$\delta_1 = \delta_2.$$

Отсюда с использованием результатов примера 7.1 получаем равенство ($D_1 = 2R_1$, $D_2 = 2R_2$)

$$\frac{64P_1R_1^3n_1}{Gd_1^4} P_1 = \frac{64P_2R_2^3n_2}{Gd_2^4} P_2,$$

которое с учетом исходных данных приводится к следующему уравнению:

$$27P_1 = 16P_2.$$

Решая его совместно с уравнением равновесия, находим

$$P_1 = \frac{16}{43} P = 1600 \text{ Н}, \quad P_2 = \frac{27}{43} P = 2700 \text{ Н}.$$

Тогда искомое перемещение вычисляется так:

$$\delta = \delta_1 = \frac{8 \cdot 0,16^3 \cdot 8 \cdot 16}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,016^4 \cdot 43} \cdot 4,3 \cdot 10^3 = 0,064 \text{ м} \approx 64 \text{ мм. } \blacksquare$$

Пример 7.12. Витая цилиндрическая пружина малого шага с диаметром проволоки d нагружена крутящим моментом M . Определить максимальные нормальные напряжения, жесткость пружины на кручение, угол закручивания и потенциальную энергию деформации. В расчетах принять: $d = 12$ мм; $n = 10$; $M = 10$ Н·м; $D = 160$ мм; $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Предварительно находим геометрические характеристики сечения проволоки (см. табл. П.3 и П.6):

$$J_z = \frac{\pi d^4}{64} = 1,02 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4; \quad W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 0,169 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Используя (7.31), (7.33) и (7.26), вычисляем максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{10}{0,169 \cdot 10^{-6}} = 59,1 \text{ МПа},$$

жесткость пружины на кручение

$$c = \frac{EJ_z}{\pi Dn} = \frac{2,2 \cdot 10^{11} \cdot 1,02 \cdot 10^{-9}}{\pi \cdot 0,16 \cdot 10} = 44,8 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

угол закручивания

$$\varphi = \frac{M}{c} = \frac{10}{44,8} = 0,223 \text{ рад}$$

и потенциальную энергию пружины при закручивании

$$U = \frac{M^2}{2c} = \frac{10^2}{2 \cdot 0,223} = 1,15 \text{ Дж. } \blacksquare$$

Задачи

7.85. Найти максимальные касательные напряжения τ_{\max} и перемещение δ конца свитой из проволоки круглого сечения цилиндрической пружины малого шага, закрепленной на одном конце и растянутой силой P . В расчетах принять: $P = 4,5$ кН, $D = 0,4$ м, диаметр проволоки $d = 37$ мм, $n = 10$; $G = 7,05 \cdot 10^4$ МПа.

7.86. Для цилиндрической пружины, свитой из круглой проволоки, найти диаметр проволоки d и число витков. В расчетах принять: максимальная сжимающая сила $P = 1$ кН, максимальная осадка $\delta = 30$ мм, $R = 20$ мм; $[\tau] = 480$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

При этих же условиях подобрать сечение пружины, свитой из проволоки квадратного сечения. Сравнить веса обеих пружин.

7.87. Стальная цилиндрическая винтовая пружина круглого сечения диаметром d сжата осевой силой P . Определить максимальное касательное напряжение, осадку и потенциальную энергию деформации пружины. В расчетах принять: $d = 20$ мм; $P = 1$ кН; $D = 0,16$ м; $n = 8$.

7.88. Цилиндрическая винтовая пружина круглого сечения диаметром d растянута силой P . Определить максимальные касательные напряжения в витках пружины. В расчетах принять: $P = 500$ Н; $d = 18$ мм; $D = 0,125$ м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Какое число витков должна иметь пружина для того, чтобы ее осадка была $\delta = 6$ мм?

7.89. Две цилиндрические пружины сжимаются одинаковой силой P (первая пружина круглого сечения, вторая — квадратного со стороной a). Определить отношения их максимальных касательных напряжений $\tau_{\max 1} / \tau_{\max 2}$ и осадок δ_1 / δ_2 . В расчетах принять: $D_1 = D_2$; $n_1 = n_2$; $G_1 = G_2$; $\pi d^2 = 4a^2$.

7.90. Проверить прочность стальной цилиндрической пружины растяжения. В расчетах принять: $P = 400$ Н; $D = 8d = 40$ мм; $[\tau] = 500$ МПа.

7.91. Определить допускаемую осевую растягивающую силу для цилиндрической пружины, изготовленной из стальной проволоки диаметром d . В расчетах принять: $d = 6$ мм; $n = 10$; наружный диаметр витка пружины $D_{\text{н}} = 66$ мм; $[\tau] = 240$ МПа.

7.92. В условиях предыдущей задачи определить жесткость пружины c .

7.93. Определить допускаемую растягивающую нагрузку для цилиндрической пружины, изготовленной из проволоки круглого сечения диаметром d . В расчетах принять: $d = 6$ мм; $n = 20$; $R = 75$ мм; $[\tau] = 90$ МПа. Чему будет равно удлинение пружины при действии допускаемой нагрузки?

7.94. Витки цилиндрической пружины, изготовленной из стальной проволоки круглого сечения, имеют средний диаметр $D = 0,2$ м. При осадке пружины $\delta = 50$ мм она должна поглотить 500 Дж энергии, причем максимальные касательные напряжения не должны превышать 175 МПа. Определить диаметр d проволоки и число витков пружины.

7.95. Определить жесткость пружины c цилиндрической пружины, изготовленной из стальной проволоки диаметром d . В расчетах принять: $d = 6$ мм; $n = 5$; наружный диаметр витка пружины $D_{\text{в}} = 33$ мм.

7.96. Определить допускаемую сжимающую силу P для цилиндрической пружины, изготовленной из стальной проволоки квадратного сечения. В расчетах принять: сторона квадрата $a = 10$ мм; $n = 12$; $R = 50$ мм; $[\tau] = 280$ МПа.

7.97. Внутри стальной цилиндрической винтовой пружины круглого сечения диаметром d_1 помещена вторая пружина, круглого сечения диаметром d_2 . Их торцы соединены жесткими пластинами, к которым приложены сжимающие силы P . Средний диаметр наружной пружины D_1 , а внутренней — D_2 , число витков n у пружин одинаковое. Определить нагрузку на каждую пружину, наибольшие касательные напряжения и осадку пружин. В расчетах принять: $d_1 = 30$ мм; $d_2 = 20$ мм;

$D_1 = 160$ мм; $D_2 = 100$ мм; $n = 10$; $P = 20$ кН.

7.98. Две пружины, свитые из проволоки одинакового диаметра d и имеющие одинаковое число витков n , вставлены одна в другую. Система пружин сжимается силой $P = 400$ Н. Высота наружной пружины в свободном состоянии на 60 мм больше, чем внутренней. Найти усилия, осадки, максимальные напряжения и потенциальные энергии каждой пружины. В расчетах принять: $d = 3$ мм; $n = 10$; $P = 400$ Н; средние радиусы витков $R_1 = 50$ мм; $R_2 = 30$ мм; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

7.99. Две пружины с одинаковым средним радиусом витков R изготовлены из стальной проволоки круглого сечения диаметром d . Пружины вставлены между двумя неподвижными плоскостями. Между ними расположена жесткая плита (рис. 7.15),

через которую передается осевая нагрузка P . Определить, как распределяется нагрузка между пружинами, максимальные касательные напряжения и перемещение плиты. В расчетах принять: $d = 20$ мм; число витков пружин $n_1 = 10$; $n_2 = 5$; $P = 4,5$ кН; $R = 100$ мм.

7.100. Жесткий рычаг с шарнирно закрепленным концом поддерживается пружиной, изготовленной из круглой проволоки диаметра d , и нагружен силой P (рис. 7.16). Определить диаметр проволоки и средний диаметр витка пружины при заданном смещении $\delta_K = 20$ мм точки K . В расчетах принять: $D/d = 6$; $P = 400$ Н; $[\tau] = 400$ МПа; $a = 50$ см; $a_1 = 40$ см; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

7.101. Определить максимальные касательные напряжения и потенциальную энергию деформации в стальных пружинах, изображенных на рис. 7.17. В расчетах принять: $D_1/D = 1,5$;

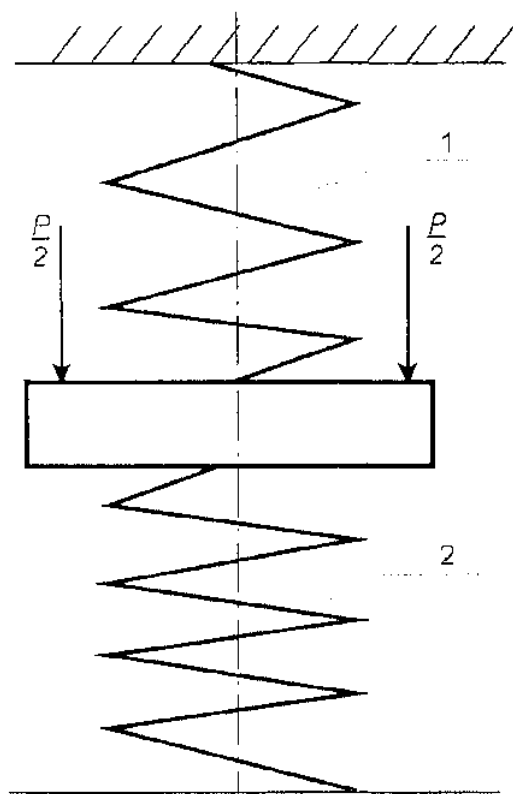


Рис. 7.15

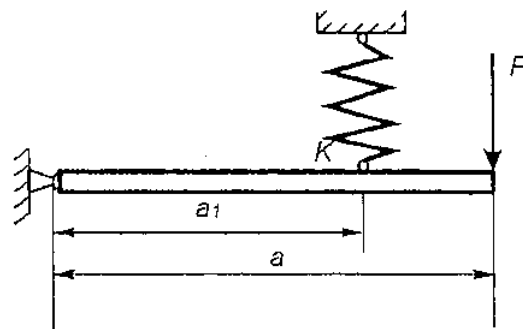


Рис. 7.16

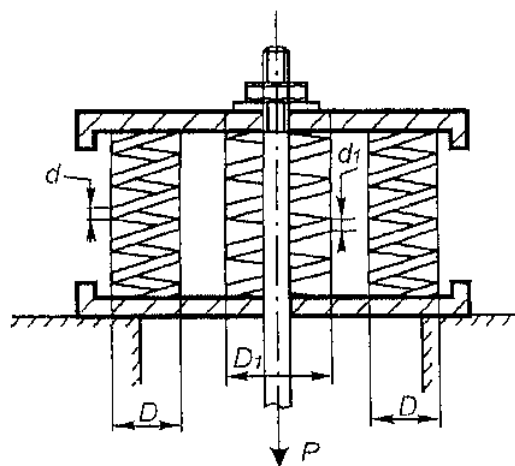


Рис. 7.17

$d_1/d = 1,5$; $P = 5$ кН; число витков пружин $n = 8$; $d = 6$ мм;
 $D = 0,1$ м.

7.102. Цилиндрическая винтовая пружина малого шага свита из круглой проволоки диаметром d и закручивается моментом M . Определить допускаемый крутящий момент. В расчетах принять: $d = 12$ мм; $[\sigma] = 240$ МПа.

7.103. Цилиндрическая пружина малого шага свита из круглой проволоки диаметром d и закручивается моментом M . Определить жесткость пружины на кручение и ее потенциальную энергию. В расчетах принять: $d = 20$ мм; $n = 15$; $D = 0,2$ м; $E = 2,2 \cdot 10^6$ МПа; $M = 20$ Н·м.

7.104. Определить допускаемый момент M , закручивающий свитую из круглой проволоки диаметром d цилиндрическую пружины малого шага. В расчетах принять: $d = 18$ мм; $n = 20$; $R = 0,15$ м; $E = 2,0 \cdot 10^5$ МПа; допускаемый угол закручивания $[\varphi] = 0,2$ рад.

7.105. Для винтовой цилиндрической пружины малого шага, нагруженной крутящим моментом M , определить диаметр круглой проволоки d . В расчетах принять: $M = 40$ Н·м; $[\sigma] = 200$ МПа.

7.106. Винтовая цилиндрическая пружина малого шага, изготовленная из круглой проволоки диаметром d , закручивается крутящим моментом M . Определить максимальные нормальные напряжения, угол закручивания и запас прочности $n_{пр}$. В расчетах принять: $d = 20$ мм; $n = 15$; $D = 0,2$ м; $\sigma_T = 260$ МПа; $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа; $M = 200$ Н·м.

§ 7.3. Статически неопределимые задачи

Алгоритм расчета статически неопределимых стержневых систем, в общем, аналогичен приведенному в § 7.1 алгоритму. Однако первый пункт должен быть дополнен раскрытием статической неопределимости, а третий — уточнением методики вычисления перемещений как для рам, так и для ферм.

Для сложных ферменных систем указанный в § 2.2 геометрический подход к составлению уравнений совместности деформаций становится практически нереализуемым. В то же время общим для обоих вариантов стержневых систем и лишенным недостатков геометрического подхода является приведенный ниже способ раскрытия статической неопределимости — метод сил. ■

Прежде всего, напомним, что степень СН равна разности $s = r - n$, где r — число неизвестных усилий и реакций опор, n — количество уравнений равновесия и, может быть, уравнений моментов относительно врезанных шарниров (см. определение П.17). При этом r совпадает с числом *связей* (ограничений, исключающих те или иные перемещения), накладываемых на систему, а s определяет количество *лишних связей*.

Связи для стержневых систем подразделяются следующим образом.

1. *Внешние связи* (опоры, см. п. IV § П.1): заделка, шарнир, каток.

2. *Внутренние связи* (ограничивают относительные перемещения сечений): жесткое соединение сечений; шарнир, соединяющий i элементов (рис. 7.18); врезанный скользящий шарнир (каток).

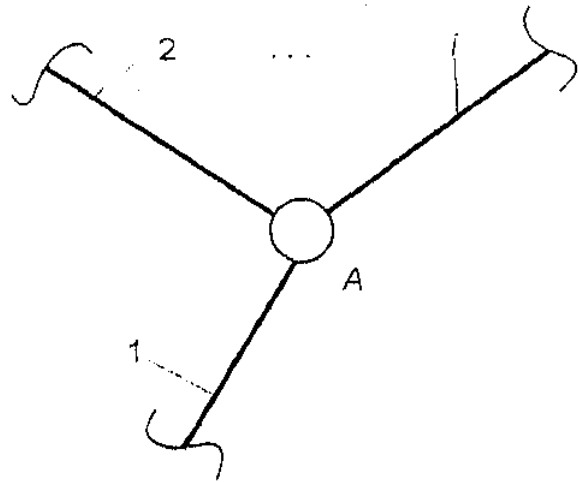


Рис. 7.18

Отметим, что наличие в стержневой системе замкнутого контура дает для плоских и плоско-пространственных систем три, а для пространственных — шесть лишних связей.

Определение 7.8. Кинематически неизменяемая стержневая система, полученная из исходной статически неопределимой системы отбрасыванием необходимого числа лишних связей и заменой их неизвестными обобщенными усилиями X_k ($k = 1, 2, \dots, s$) (см. определение 7.4), называется *эквивалентной системой* (если лишние связи внутренние, то прикладывается противоположно направленная пара усилий).

Освобожденная от внешних нагрузок и неизвестных усилий эквивалентная система называется *основной*. ■

Отбрасывание как внешних, так и внутренних связей в данном сечении может быть полным или частичным. Например, заделка может заменяться свободным краем, шарниром или катком, а жесткое внутреннее соединение — разрезом, врезанным шарниром или катком. Эти варианты для плоского случая продемонстрированы на рис. 7.19.

Как эквивалентная, так и основная система, очевидно, может быть выбрана не единственным образом. Однако справедливо следующее утверждение.

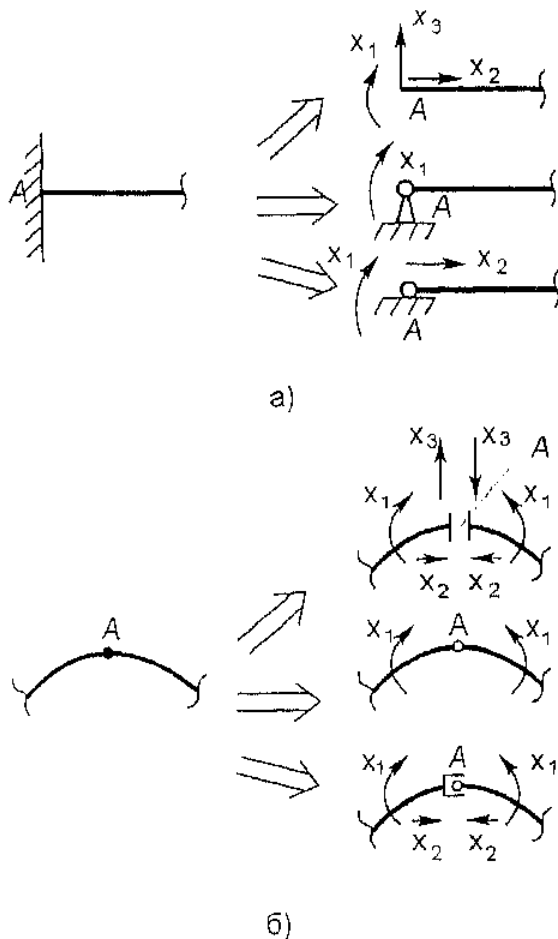


Рис. 7.19

Утверждение 7.10. Число лишних связей для данной стержневой системы не зависит от выбора основной системы, и равно степени СН исходной системы: $s = r - n$. ■

Для определения неизвестных обобщенных усилий X_k ($k = 1, 2, \dots, s$) используются уравнения совместности деформаций, которые гарантируют идентичность исходной и эквивалентной систем. С использованием формул (7.6) или (7.7) они могут быть записаны в скалярном или матричном виде:

$$\sum_{l=1}^s \delta_{kl} X_l + \delta_{kP} = \Delta_k \quad (k = 1, 2, \dots, s); \quad (7.34)$$

$$DX + \delta_P = \Delta, \quad (7.35)$$

$$\delta_P = (\delta_{1P}, \dots, \delta_{sP})^T, \quad X = (X_1, \dots, X_s)^T, \quad \Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_s)^T.$$

Здесь δ_{kP} и δ_{kl} — обобщенные перемещения в направлении усилия X_k в основной системе под действием внешней нагрузки и l -й единичной системе (основной системе с нагрузкой $X_l = 1$); Δ_k — заданные обобщенные перемещения (для внутренних связей — относительные перемещения) в сечении и по направлению, соответствующим усилию X_k ; D — матрица податливости основной системы для системы сил X_k ($k = 1, 2, \dots, s$). Отметим, что, как правило, $\Delta_k = 0$.

Таким образом, метод сил состоит в следующем.

А. Определяем лишние связи, степень СН s и выбираем эквивалентную и соответствующую ей основную системы. Для сим-

метричных систем (см. определение 7.4) принимают *рациональные* (соответствующие минимальному числу неизвестных) *системы*. С этой целью используется следующее положение, вытекающее из утверждения 7.2.

Утверждение 7.11. Если в симметричной (кососимметричной) стержневой системе отбросить связи, расположенные на оси или в плоскости симметрии, то отличными от нуля будут только симметричные (кососимметричные) неизвестные. ■

Б. Строим эпюры внутренних силовых факторов для основной системы под действием внешней нагрузки $\mathcal{E}Q_j^p$ и для s единичных систем $\mathcal{E}Q_j^k$. При этом, так же как и для СО-рам, полезно использовать свойства внутренних силовых факторов для симметричных рам (см. утверждение 7.2).

В. С помощью интегралов Мора (7.18) вычисляем элементы матрицы D и столбца δ_p и решаем систему линейных алгебраических уравнений (7.35), которая называется *каноническими уравнениями метода сил*. Ее решение существует и единственно, так как $\det D > 0$. Если порядок матрицы D больше двух, то рекомендуется использовать известный алгоритм Гаусса.

Г. Строим эпюры внутренних силовых факторов Q_j для исходной системы как линейные комбинации $\mathcal{E}Q_j^p$ и $\mathcal{E}Q_j^k$:

$$Q_j = Q_j^p + \sum_{k=1}^s X_k Q_j^k. \quad (7.36)$$

Если по условию задачи требуется определить реакции в опорах, то их вычисляем по аналогичным формулам.

Д. Проводим проверку правильности раскрытия статической неопределимости. Она может быть частичной или полной. При частичной проверке определяем обобщенные перемещения, соответствующие неизвестным силовым факторам. Они должны быть равны Δ_k (или 0). Полная проверка заключается в построении другой эквивалентной системы и вычислении перемещений, соответствующих новым неизвестным, по эпюрам, построенным в п. Г. Они также должны быть равны заданным в исходной стержневой системе. ■

Перемещения в статически неопределимой стержневой системе (см. п. 3 алгоритма § 7.1 и замечание относительно его модификации для СН-систем, приведенное в начале этого параграфа) в силу идентичности исходной и эквивалентной систем вычисляются с помощью интегралов Мора при использовании еди-

ничных эпюр для эквивалентной системы (повторное раскрытие статической неопределимости не требуется).

Пример 7.13. Для изображенной на рис. 7.20, а рамы постоянного поперечного сечения построить эпюру изгибающих моментов и вычислить горизонтальное перемещение узла С.

Решение. (Номера пунктов соответствуют алгоритму расчета рам (см. § 7.1).) 1. Построение эпюр внутренних силовых факторов.

А. Поскольку опоры D , K и A накладывают соответственно две, две и одну связь ($r = 5$) и число уравнений равновесия $n = 3$ (рама плоская), то рама два раза статически неопределима: $5 - 3 = 2$. Отбросив две лишние связи и заменив их неизвестными усилиями X_1 и X_2 , получаем эквивалентную и основную системы (рис. 7.20, б, в).

Б. Для основной системы с внешней нагрузкой определяем опорные реакции и строим эпюру изгибающих моментов M^P (рис. 7.20, г). Далее рассматриваем первую и вторую единичные системы и, вычисляя реакции, строим эпюры M^1 (рис. 7.20, д) и M^2 (рис. 7.20, е).

В. Канонические уравнения метода сил в данном случае имеют вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0.$$

Вычисляем коэффициенты этой системы, перемножая эпюры с использованием правила Верещагина:

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{2} M \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} \frac{Ml^2}{EJ_z};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) \cdot 2 = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ_z};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{5}{3} l = \frac{5}{6} \frac{l^3}{EJ_z};$$

$$\delta_{2P} = \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{2} M \cdot l \cdot \frac{5}{3} l = \frac{5}{6} \frac{Ml^2}{EJ_z};$$

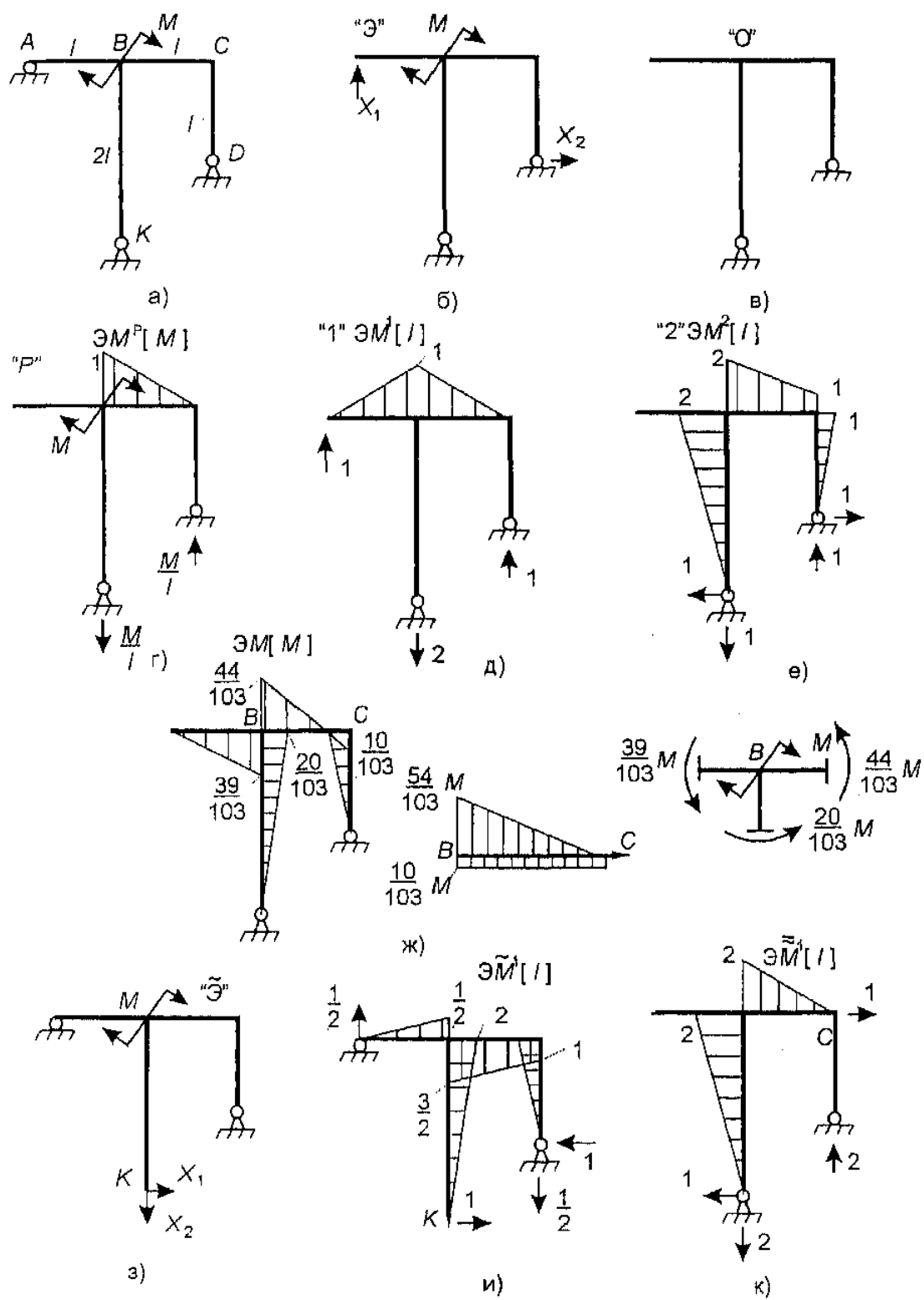


Рис. 7.20

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l + \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{5}{3} l + \right. \\ \left. + l \cdot l \cdot \frac{3}{2} l + \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right] = \frac{16}{3} \frac{l^3}{EJ_z}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в систему канонических уравнений, получаем

$$\frac{1}{3} \frac{Ml^2}{EJ_z} + \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ_z} X_1 + \frac{5}{6} \frac{l^3}{EJ_z} X_2 = 0;$$

$$\frac{5}{6} \frac{Ml^2}{EJ_z} + \frac{5}{6} \frac{l^3}{EJ_z} X_1 + \frac{16}{3} \frac{l^3}{EJ_z} X_2 = 0.$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$X_1 = -\frac{39}{103} \frac{M}{l}; \quad X_2 = -\frac{10}{103} \frac{M}{l}.$$

Г. Суммарные изгибающие моменты находим как линейные комбинации (7.36) построенных ранее эпюр. Соответствующая эпюра представлена на рис. 7.20, ж.

Д. Для проверки рассматриваем равновесие узла В (рис. 7.20, ж):

$$\sum M_B = 0: \quad \frac{39}{103} M - M + \frac{44}{103} M + \frac{20}{103} M = 0.$$

Кроме того, выбираем другую эквивалентную систему (рис. 7.20, з), строим единичные эпюры, соответствующие перемещениям узла К по направлениям отброшенных лишних связей, и вычисляем эти перемещения. Для примера найдем Δ_1 , перемножая ЭМ на эпюру \bar{M}^1 с использованием расчленения ЭМ на участке В—С (рис. 7.20, и, 7.20, ж):

$$\Delta_1 = \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{39}{103} M \cdot l \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{103} M \cdot 2l \frac{2}{3} \cdot 2l - \frac{1}{2} \cdot \frac{54}{103} M \times \right. \\ \left. \times l \left(l + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \right) + \frac{10}{103} M \cdot l \left(l + \frac{1}{4} l \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{103} M \cdot l \frac{2}{3} l \right] = 0.$$

На этом раскрытие статической неопределимости заканчивается.

3. Вычисление перемещения точки С. Для этого рассматриваем единичную систему, полученную из эквивалентной снятием всех нагрузок и приложением в точке С в горизонтальном направлении единичной силы, строим соответствующую \tilde{M}^1 (рис. 7.20, κ) и умножаем эту эпюру на ЭМ с учетом указанного выше расслоения:

$$\begin{aligned} \delta_C^{\text{гор}} &= \frac{1}{EJ_z} \left[-\frac{1}{2} \frac{20}{103} M \cdot 2l \frac{2}{3} 2l + \frac{1}{2} \cdot \frac{54}{103} M \cdot l \frac{2}{3} 2l - \frac{10}{103} M \cdot l \cdot l \right] = \\ &= -\frac{2}{309} \frac{Ml^2}{EJ_z}. \end{aligned}$$

Знак минус показывает, что перемещение $\delta_C^{\text{гор}}$ происходит в сторону, противоположную единичной силе. ■

Пример 7.14. Для изображенной на рис. 7.21, а рамы постоянного поперечного сечения (см. рис. 7.21, κ) произвести проективный расчет на прочность и вычислить вертикальное перемещение сечения А.

В расчетах принять: $P = qa$; $q = 10$ кН/м; $a = 0,6$ м; $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 140$ МПа; $b/\delta = 10$.

Решение. 1. Построение эпюр внутренних силовых факторов.

А. Опоры В и С накладывают по три связи ($r = 6$). Поскольку рама плоская, то для нее можно составить три уравнения равновесия. Дополнительно имеется условие равенства нулю момента относительно шарнира А. Следовательно, $n = 4$, и рама два раза статически неопределима: $6 - 4 = 2$. Рациональную эквивалентную систему получаем, разрезая раму по шарниру и заменяя действие отброшенных внутренних связей усилиями X_1, X_2 (рис. 7.21, б). Соответствующая основная система изображена на рис. 7.21, в.

Б. Для каждой из частей рамы (см. рис. 7.21, а) строим ЭМ^р, ЭМ¹ и ЭМ² для основной системы под действием внешней нагрузки и единичных систем (рис. 7.21, г, д, е).

В. Система канонических уравнений метода сил в этом случае имеет такой же вид, как и в предыдущем примере. Перемножая эпюры, вычисляем ее коэффициенты:

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{1}{2} \cdot Pa^2 \frac{5}{3} a - Pa^2 \cdot a \right) = -\frac{11}{6} \frac{Pa^3}{EJ_z};$$

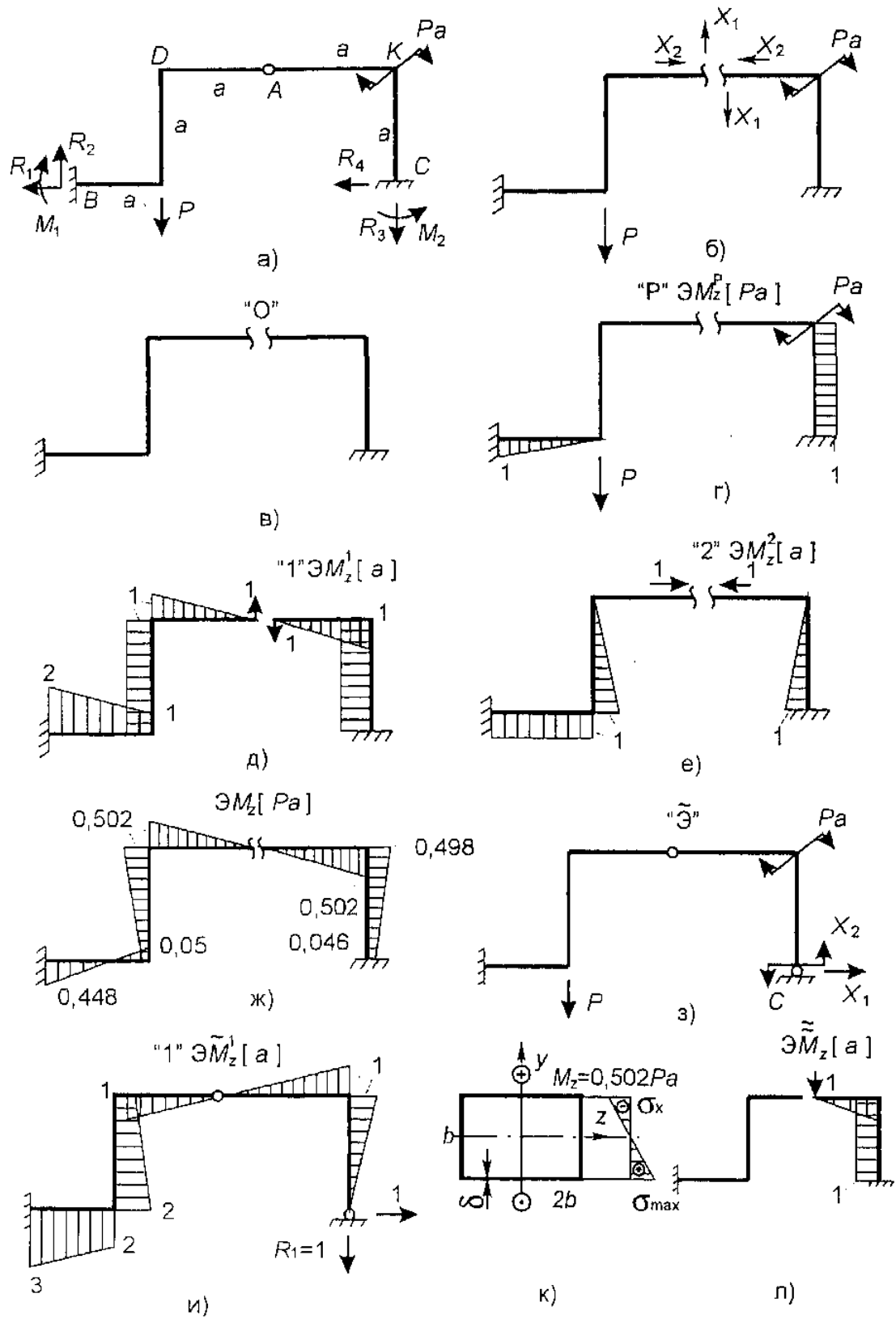


Рис. 7.21

$$\delta_{2P} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} Pa^2 \cdot a - Pa^2 \frac{1}{2} a \right) = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left[2 \left(\frac{1}{2} a^2 \frac{2}{3} a + a^2 \cdot a \right) + a^2 \frac{3}{2} a + \frac{1}{2} a^2 \frac{5}{3} a \right] = 5 \frac{a^3}{EJ_z};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_z} \left[2 \left(\frac{1}{2} a^2 \frac{2}{3} a \right) + a^2 \cdot a \right] = \frac{5}{3} \frac{a^3}{EJ_z};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_z} \left(-a^2 \frac{1}{2} a + a^2 \frac{1}{2} a - \frac{3}{2} a^2 \cdot a \right) = -\frac{3}{2} \frac{a^3}{EJ_z}.$$

Учитывая найденные коэффициенты и сокращая на $a^3/(EJ_z)$, получаем систему уравнений:

$$5X_1 - \frac{3}{2} X_2 = \frac{11}{6} P;$$

$$-\frac{3}{2} X_1 + \frac{5}{3} X_2 = 0,$$

решение которой имеет следующий вид:

$$X_1 = 0,502P; \quad X_2 = 0,452P.$$

Г. Суммарные изгибающие моменты находим как линейные комбинации (7.36) построенных ранее эпюр. Соответствующая эпюра представлена на рис. 7.21, ж.

Д. Для проверки выбираем другую эквивалентную систему (рис. 7.21, з), строим единичные эпюры, соответствующие обобщенным перемещениям узла С по направлениям отброшенных лишних связей, и вычисляем эти перемещения. Для примера найдем Δ_1 , перемножая \bar{M}_z на эпюру \bar{M}_z^1 (рис. 7.21, и):

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{1}{2} a^2 \left(0,046 + \frac{2}{3} (0,498 - 0,046) \right) Pa - \right. \\ & - 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,502 Pa - 0,05Pa^2 \cdot 1,5a - \\ & - \frac{1}{2} (0,502 - 0,05) Pa^2 \cdot \frac{4}{3} a - 0,05Pa^2 \cdot 2,5a + \\ & \left. + \frac{1}{2} (0,448 + 0,05) Pa^2 \cdot \frac{8}{3} a \right] = 0,167 \cdot 10^{-2} \frac{Pa^2}{EJ_z} = 0. \end{aligned}$$

Наличие приближенного равенства здесь вызвано ошибками округления.

2. Расчет на прочность. Найдем геометрические характеристики сечения (см. рис. 7.21, и):

$$J_z = 2 \left[\delta \cdot 2 \cdot b \left(\frac{1}{2} b \right)^2 + \frac{\delta b^3}{12} \right] = 1,17\delta b^3 = 0,117b^4,$$

$$W_z = J_z / y_{\max} = J_z / (0,5b) = 0,234b^3.$$

В соответствии с $\mathcal{E}M_z$ опасные сечения D и K (рис. 7.21, к).
Условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} = \frac{0,502Pa}{0,234b^3} = 2,15 \frac{qa^2}{b^3} \leq [\sigma]$$

приводит к неравенству

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2,15qa^2}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{2,15 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,6^2}{140 \cdot 10^6}} = 3,81 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Размеры сечения выбираем с небольшим запасом: $b = 40$ мм, $\delta = 4$ мм.

3. Вычисление вертикального перемещения сечения A . Для этого рассматриваем единичную систему, полученную из эквивалентной снятием всех нагрузок и приложением в точке A в вертикальном направлении единичной силы (она может быть приложена к любой из частей рамы), строим соответствующую $\tilde{\mathcal{E}M}_z^1$ (рис. 7.21, л) и умножаем ее на $\mathcal{E}M_z$:

$$\begin{aligned} \delta_A^{\text{верт}} &= \frac{1}{EJ_z} \left[\frac{1}{2} a^2 \frac{2}{3} \cdot 0,502Pa - \frac{1}{2} (0,498 - 0,046) Pa^2 \cdot a \right] = \\ &= -0,105 \frac{qa^4}{EJ_z} = -0,897 \frac{qa^4}{Eb^4}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом значений параметров находим

$$\delta_A^{\text{верт}} = -\frac{0,897 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,6^4}{0,7 \cdot 10^{11} \cdot 4^4 \cdot 10^{-3}} = -6,49 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -6,49 \text{ мм,}$$

т.е. точка A перемещается вверх. ■

Пример 7.15. Раскрыть статическую неопределимость рамы, изображенной на рис. 7.22, а, и определить относительное горизонтальное смещение сечений A и B , считая, что $EJ_z = \text{const}$.

Решение (номера пунктов соответствуют алгоритму расчета рам (см. § 7.1)). 1. Построение эпюр внутренних силовых факторов.

А. Рама один раз статически неопределима, так как в замкнутый контур врезано два шарнира: $r = 3$, $n = 2$, $r - n = 3 - 2 = 1$. Для перехода к эквивалентной системе нужно удалить одну лишнюю связь. Это можно сделать, заменяя один врезанный шарнир катковым соединением либо врезая третий шарнир. Выберем последнее и врежем шарнир в сечении B . Соответствующие эквивалентная и основная системы изображены на рис. 7.22, б, в. В этом случае неизвестным X_1 является внутренний момент в сечении B .

Б. Основная система с приложенной к ней внешней нагрузкой изображена на рис. 7.22, г. Для построения эпюры моментов разрезаем раму по шарниру C . Неизвестные внутренние усилия N_C и Q_C в этом сечении находим из условий равенства нулю моментов относительно шарниров A и B для частей рамы $A-C$ и $B-C$:

$$\sum M_A^{AC} = 0: Q_C \cdot a + N_C \cdot a = 0;$$

$$\sum M_B^{BC} = 0: -Q_C \cdot a + N_C \cdot a = 0,$$

откуда следует, что

$$Q_C = N_C = 0.$$

Далее от разреза строим $\mathcal{E}M^P$. На участках $A-C$ и $B-C$ $M^P \equiv 0$, а на участке $A-D-C$ (угол φ указан на рис. 7.22, г)

$$M^P(\varphi) = -Pa \cdot \sin \varphi.$$

$\mathcal{E}M^P$ приведена на том же рисунке.

Для единичной системы (рис. 7.22, д) проводим разрез в сечении A и вычисляем внутренние силовые факторы N_A и Q_A :

$$\sum M_B^{ADB} = 0: N_A \cdot 2a - 1 = 0, \quad N_A = 1/(2a);$$

$$\sum M_C^{AC} = 0: N_A \cdot a - Q_A \cdot a = 0, \quad N_A = Q_A = 1/(2a).$$

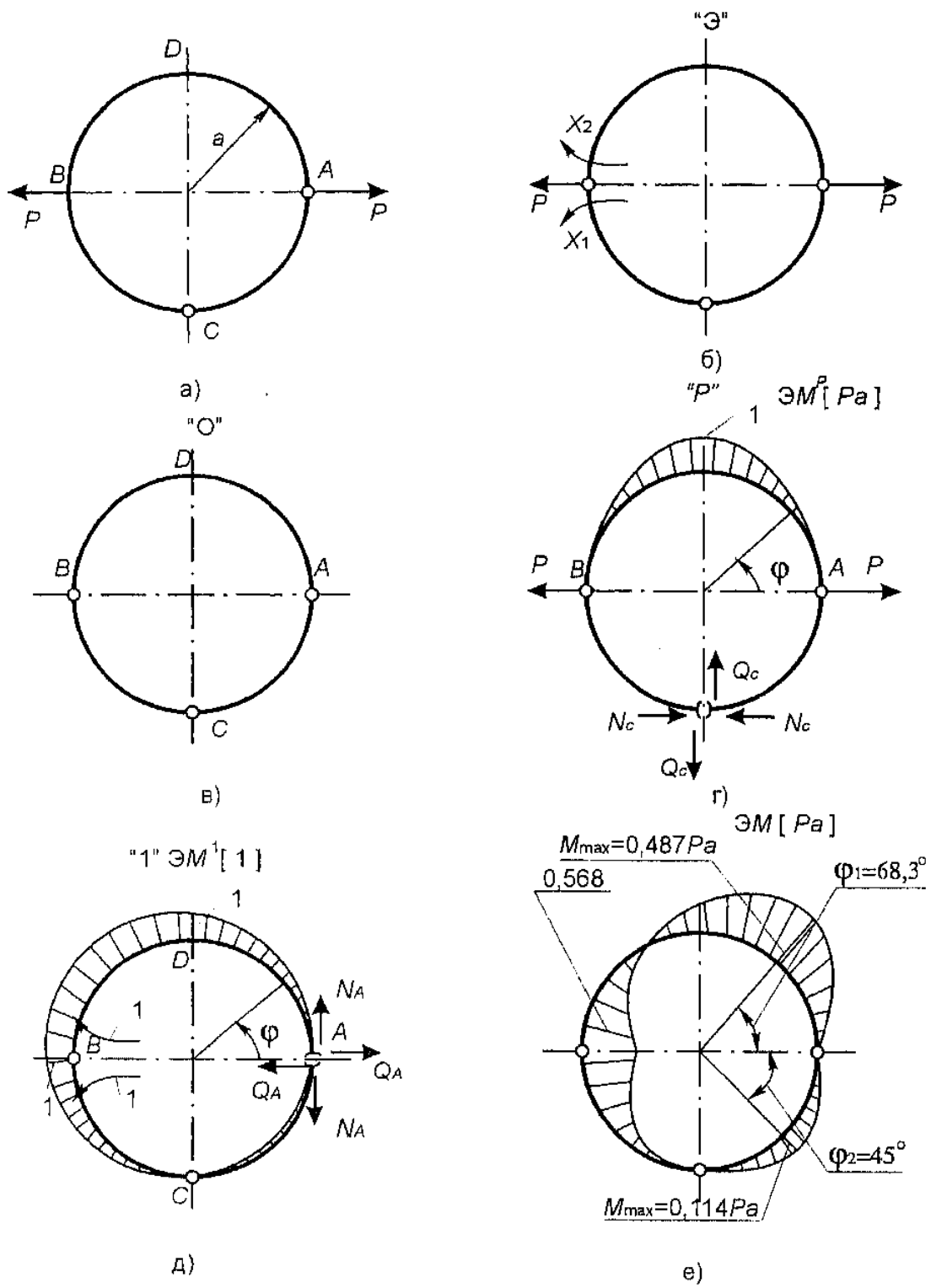


Рис. 7.22

Находим изгибающий момент

$$M^1(\varphi) = -\frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) = -\frac{1}{2} (1 + \sin \varphi - \cos \varphi)$$

и строим эпюру $\mathcal{E}M^1$ (см. рис. 7.22, ∂).

В. Каноническое уравнение в данном случае одно:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

Вычисляем его коэффициенты:

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\pi} (-Pa \sin \varphi) \left[-\frac{1}{2} (1 + \sin \varphi - \cos \varphi) \right] a d\varphi = 1,79 \frac{Pa^3}{EJ_z};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} (1 + \sin \varphi - \cos \varphi) \right]^2 a d\varphi = \frac{\pi a^2}{EJ_z}$$

и находим X_1 :

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -0,568Pa.$$

Г. Суммарные изгибающие моменты находим по участкам как линейные комбинации (7.36) построенных ранее эпюр:

-- участок $A-D-B$:

$$M(\varphi) = Pa [-0,716 \sin \varphi + 0,284 (1 - \cos \varphi)];$$

-- участок $A-C-B$:

$$M(\varphi) = 0,284Pa (1 + \sin \varphi - \cos \varphi).$$

Соответствующая эпюра представлена на рис. 7.22, e . Экстремальные значения моментов здесь найдены аналитически.

3. Вычисление относительного горизонтального смещения точек A и B . Для этого рассматриваем единичную систему, полученную из эквивалентной снятием всех нагрузок и приложением в точках A и B двух взаимно противоположных единичных сил, направленных так же, как и силы P . Очевидно, изгибающие моменты для этой системы могут быть найдены так: $\tilde{M}^1 = M^P |_{P=1}$.

Перемножая $\mathcal{E}M^P$ и $\mathcal{E}\tilde{M}^1$, находим искомое смещение:

$$\delta_{AB} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^{\pi} [0,716Pa \sin \varphi - 0,284Pa (1 - \cos \varphi)] a \sin \varphi a d\varphi =$$

$$= 0,550 \frac{Pa^3}{EJ_z} . \blacksquare$$

Пример 7.16. Раскрыть статическую неопределимость изображенной на рис. 7.23, а рамы, полагая, что $EJ_z = \text{const}$.

Решение. А. Число внешних связей совпадает с числом уравнений равновесия. Поэтому опорные реакции находим сразу:

$$\sum M_A = 0: -M + R_1 \cdot 2l = 0, \quad R_1 = \frac{M}{2l};$$

$$\sum X = 0: R_3 = 0;$$

$$\sum Y = 0: R_2 - \frac{M}{2l} = 0, \quad R_2 = \frac{M}{2l}.$$

Их включаем в число внешних сил.

Но поскольку имеется замкнутый контур с одним врезанным шарниром, то рама дважды статически неопределима: $r = 3$, $n = 1$, $r - n = 3 - 1 = 2$. Удобно выбрать эквивалентную систему, разрезая раму по шарниру и заменяя лишние связи усилиями X_1 , X_2 (рис. 7.23, б). Соответствующая основная система указана на рис. 7.23, в.

Б. Основная система под действием внешней нагрузки, единичные системы и соответствующие им эпюры моментов изображены на рис. 7.23, г, д, е.

В. Перемножая эпюры, вычисляем коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{1P} = \frac{10}{3} \frac{Ml^2}{EJ_z}, \quad \delta_{11} = \frac{28}{3} \frac{l^3}{EJ_z}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 3 \frac{l^3}{EJ_z},$$

$$\delta_{22} = \frac{8}{3} \frac{l^3}{EJ_z}, \quad \delta_{2P} = \frac{3}{2} \frac{Ml^2}{EJ_z}.$$

Система канонических уравнений метода сил после подстановки коэффициентов приобретает следующий вид:

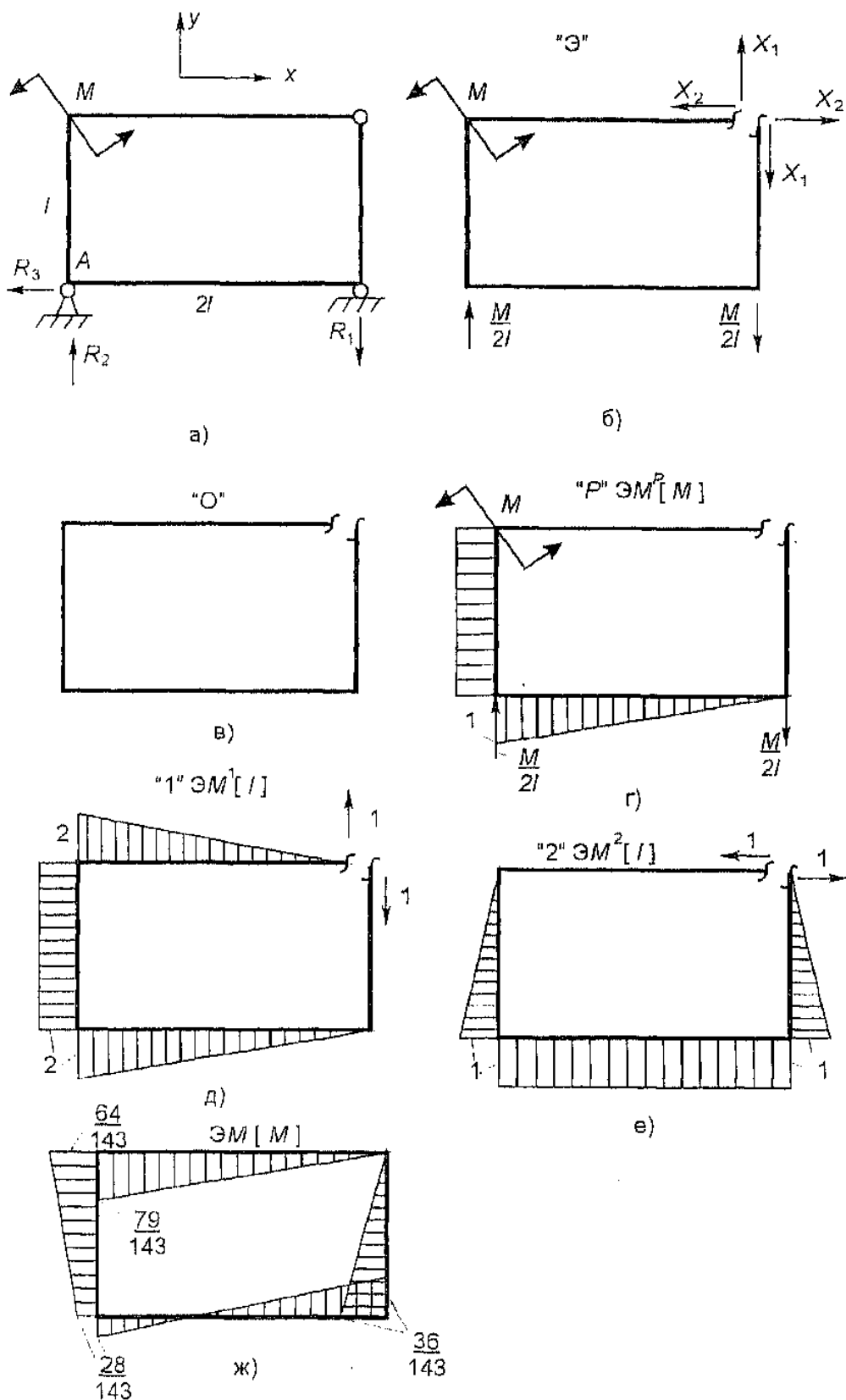


Рис. 7.23

$$\frac{28}{3} \frac{l^3}{EJ_z} X_1 + 3 \frac{l^3}{EJ_z} X_2 + \frac{10}{3} \frac{Ml^2}{EJ_z} = 0;$$

$$3 \frac{l^3}{EJ_z} X_1 + \frac{8}{3} \frac{l^3}{EJ_z} X_2 + \frac{3}{2} \frac{Ml^2}{EJ_z} = 0.$$

Ее решение таково:

$$X_1 = -\frac{79}{286} \frac{M}{l}, \quad X_2 = -\frac{36}{143} \frac{M}{l}.$$

Г. ЭМ представлен на рис. 7.23, ж. ■

Пример 7.17. Раскрыть статическую неопределимость рамы, изображенной на рис. 7.24, а, полагая, что $EJ_z = \text{const}$.

Решение. А. Число внешних связей равно шести. В замкнутый контур врезано два шарнира. Поэтому рама четыре раза статически неопределима: $r = 6 + 3 = 9$, $n = 3 + 2 = 5$, $r - n = 9 - 5 = 4$. Однако она имеет вертикальную и горизонтальную оси симметрии. Относительно вертикальной оси раму можно рассматривать как прямо симметричную, а относительно горизонтальной — как обратно симметричную. Поэтому рациональной является эквивалентная система, полученная из исходной с помощью двух разрезов в шарнирах (см. рис. 7.24, б), поскольку вследствие прямой симметрии в верхнем сечении в шарнире действует только нормальная сила X_1 , а вследствие симметрии относительно горизонтальной оси в нижнем шарнире также действует сила X_1 , направленная обратно симметричным образом. Остальные внутренние силовые факторы в этих сечениях равны нулю. Соответствующая основная система приведена на рис. 7.24, в.

Б. Основная система под внешней нагрузкой, единичная система и соответствующие им эпюры моментов изображены на рис. 7.24, г, д. Здесь и далее в силу симметрии показана только левая половина рамы; эпюры для правой части прямо симметричны относительно вертикальной оси.

В. Каноническое уравнение метода сил в этом случае имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

Его коэффициенты определяются так:

$$\frac{1}{2} \delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 + 2a \cdot a \cdot 2a \right) = \frac{14}{3} \frac{a^3}{EJ_z};$$

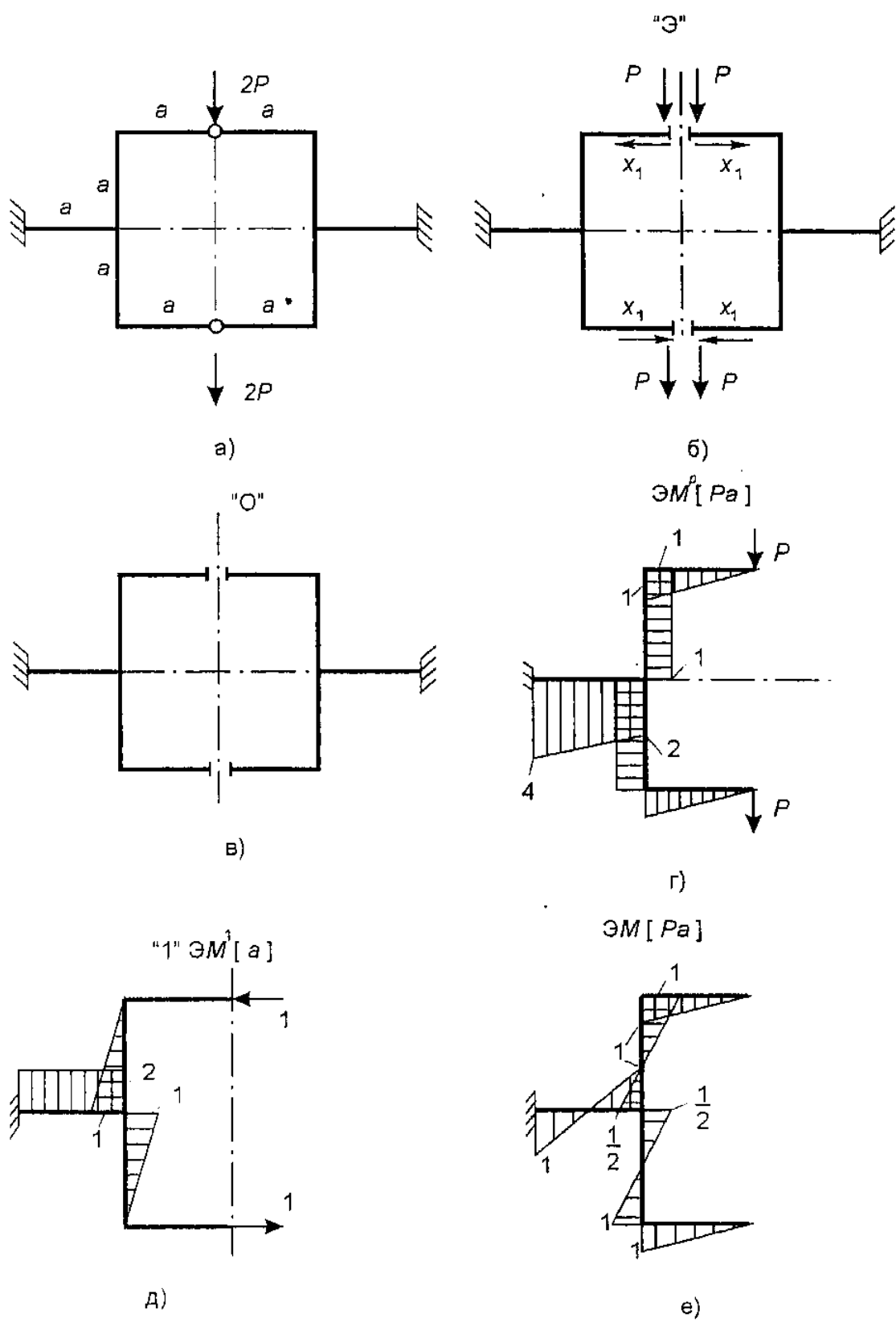


Рис. 7.24

$$\frac{1}{2} \delta_{1P} = \frac{1}{EJ_z} \left(-\frac{1}{2} a \cdot a \cdot Pa \cdot 2 - \frac{1}{2} (2Pa + 4a) a \cdot 2a \right) = -7 \frac{Pa^3}{EJ_z}.$$

Следовательно,

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{3}{2} P.$$

Г. ЭМ представлена на рис. 7.24, е.

Пример 7.18. Для балки постоянной жесткости, изображенной на рис. 7.25, а, построить эпюры внутренних силовых факторов.

Решение. А. Так как имеется $r = 3 + 1 + 1 = 5$ внешних связей, то балка два раза статически неопределимая: $n = 3$, $r - n = 5 - 3 = 2$.

Для построения эквивалентной системы необходимо удалить две лишние связи. Можно удалить катковые опоры. Однако при расчете многопролетных балок удобнее удалять внутренние связи с помощью врезания шарниров над опорами. Балка при этом как бы распадается на отдельные двухопорные балки. Соответствующая эквивалентная система показана на рис. 7.25, б. При этом правую консоль отсекаем над опорой, заменяя ее действие на левую часть перерезывающей силой и изгибающим моментом в этом сечении. Основная система изображена на рис. 7.25, в.

Б. Строим эпюры моментов для основной системы под действием внешней нагрузки и единичных систем (см. рис. 7.25, г, д, е). При этом каждый пролет рассматривается отдельно, и предварительно определяются реакции R_i^P и R_i^1 , R_i^2 (их значения указаны на рисунках).

В. Вычисляем коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{1P} = \frac{ql^3}{EJ_z} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \frac{ql^3}{EJ_z}; \quad \delta_{11} = \frac{l}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \frac{l}{EJ_z};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \frac{l}{EJ_z};$$

$$\delta_{2P} = \frac{ql^3}{EJ_z} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right) = 0;$$

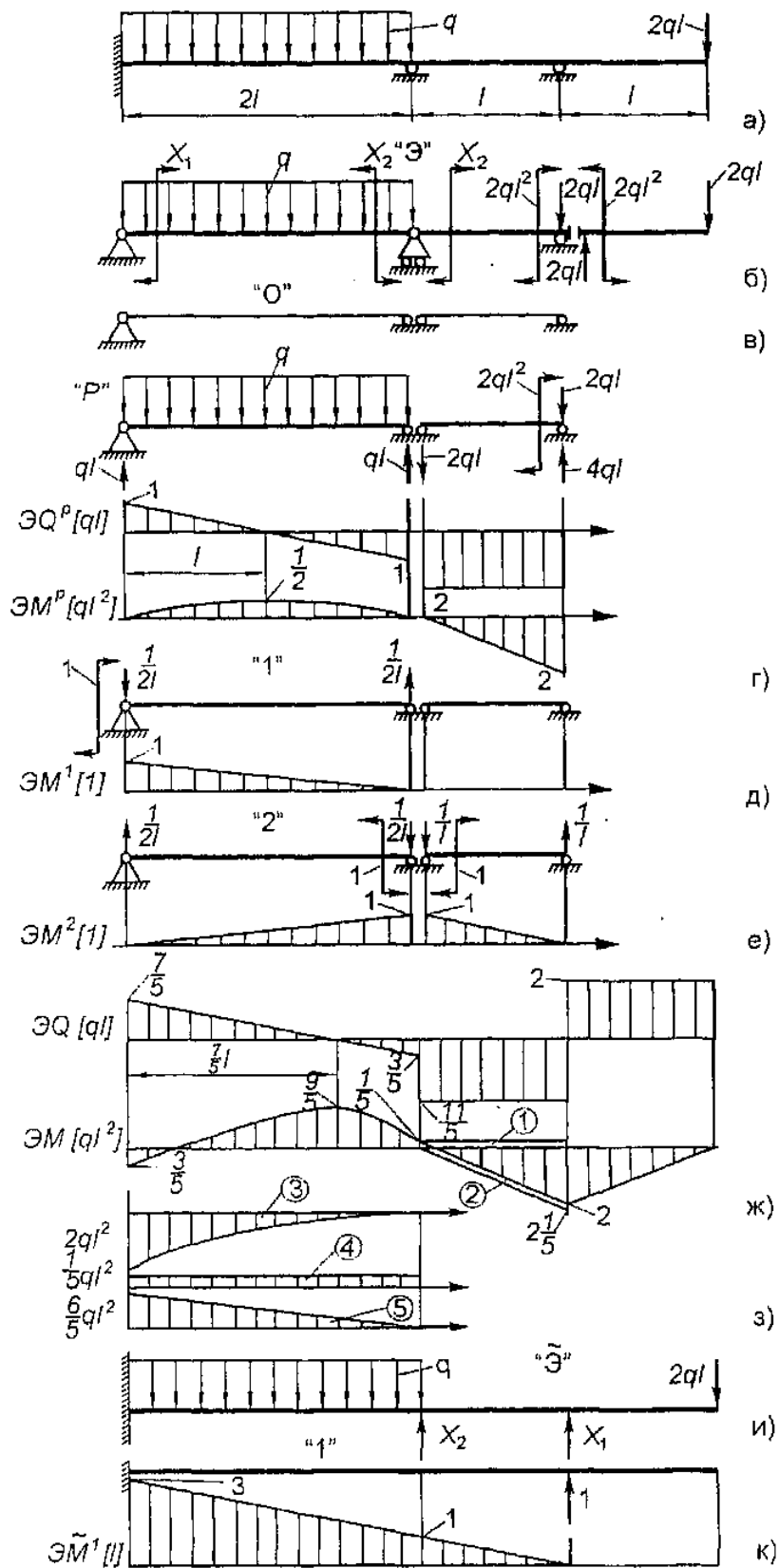


Рис. 7.25

$$\delta_{22} = \frac{l}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{l}{EJ_z}.$$

Система канонических уравнений, после сокращения на $l/(EJ_z)$, принимает вид

$$\frac{2}{3} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \frac{1}{3} ql^2 = 0;$$

$$\frac{1}{3} X_1 + X_2 = 0.$$

Она имеет следующее решение:

$$X_1 = -\frac{3}{5} ql^2, \quad X_2 = \frac{1}{5} ql^2.$$

Г. Суммарные ЭО и ЭМ здесь удобнее строить отдельно для каждого пролета, предварительно вычисляя суммарные реакции в опорах по формулам, аналогичным равенствам (7.36):

$$R_i = R_i^p + X_1 R_i^1 + X_2 R_i^2.$$

Эти эпюры приведены на рис. 7.25, ж. Экстремальное значение момента найдено с помощью алгоритма, указанного в гл. 5.

Д. Для проверки выбираем другую эквивалентную систему, отбрасывая катковые опоры (см. рис. 7.25, и), и вычисляем прогибы в этих сечениях. Например, найдем прогиб под правым катком. Соответствующая единичная система и эпюры моментов приведены на рис. 7.25, к. Перемножая ЭМ и \tilde{M}^1 , получаем (используется расслоение эпюры ЭМ, указанное на рис. 7.25, з):

$$\Delta_1 = \frac{ql^4}{EJ_z} \left(\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \cdot 2 \right) + \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right).$$

Следовательно, эпюры построены правильно. ■

Пример 7.19. Определить усилие в стержнях фермы (рис. 7.26, а) и вычислить вертикальное перемещение узла В.

Решение (номера пунктов соответствуют алгоритму расчета, приведенному в § 7.1.) Предварительно найдем длины стержней и тригонометрические функции углов (нумерация стержней дана на рис. 7.26, а):

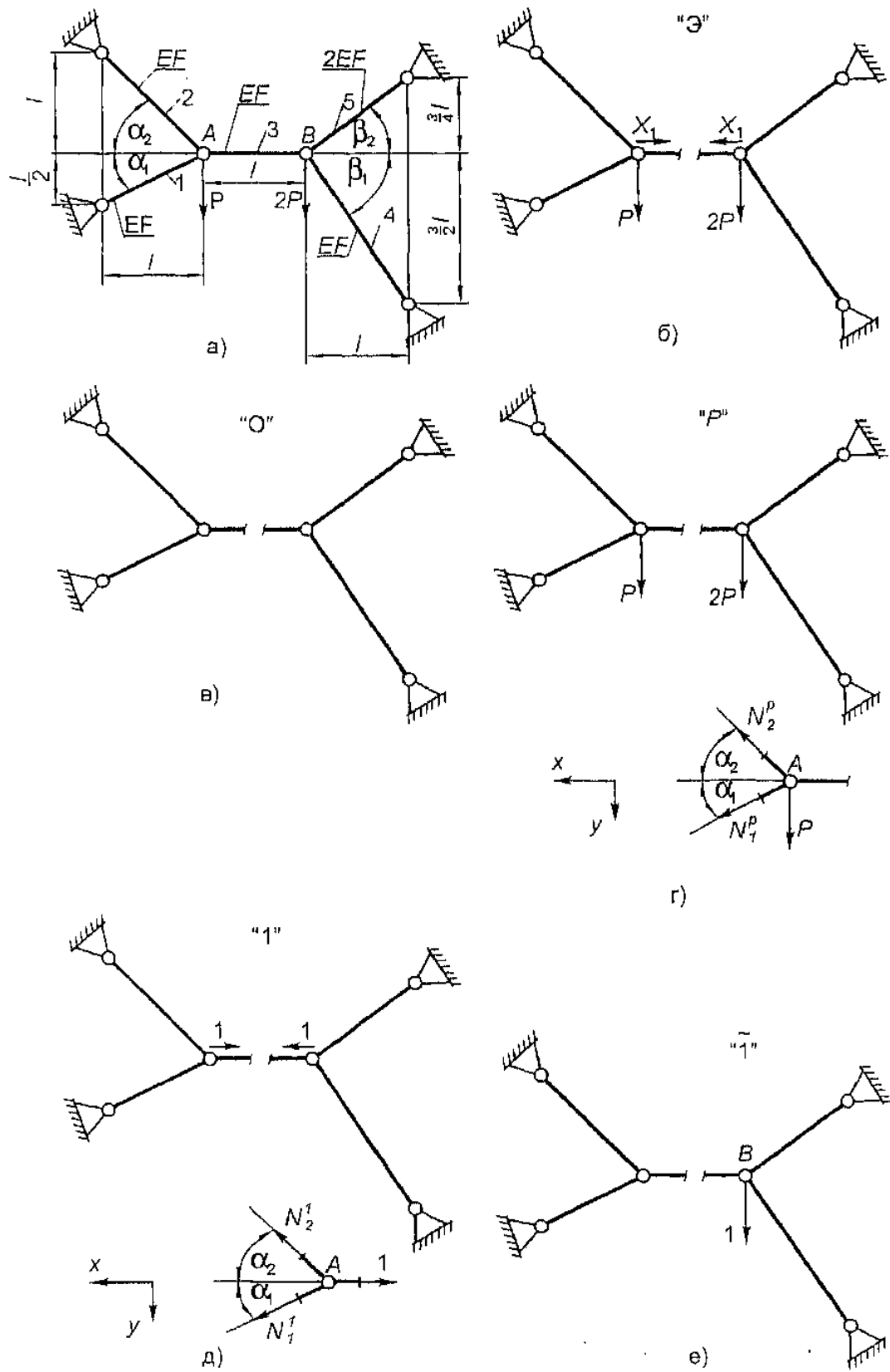


Рис. 7.26

$$l_1 = 1,12l, \quad l_2 = 1,41l, \quad l_3 = l, \quad l_4 = 1,80l, \quad l_5 = 1,25l;$$

$$\sin \alpha_1 = 0,447, \quad \sin \alpha_2 = 0,707, \quad \cos \alpha_1 = 0,899, \quad \cos \alpha_2 = 0,707,$$

$$\sin \beta_1 = 0,832, \quad \sin \beta_2 = 0,6, \quad \cos \beta_1 = 0,555, \quad \cos \beta_2 = 0,800.$$

1. Определение усилий. А. На два узла A и B наложено пять связей (стержней), т.е. имеется пять неизвестных нормальных сил. Следовательно, $r = 5$. Для вырезанных узлов A и B можно составить четыре уравнения равновесия: $n = 4$. Таким образом, система один раз статически неопределима ($5 - 4 = 1$). Эквивалентную и основную системы получаем, разрезая стержень 3 (рис. 7.26, б, в).

Б. Вырезая узлы A , B и составляя уравнения равновесия, находим усилия N_i^P (i — номер стержня) в основной системе под действием внешней нагрузки (рис. 7.26, в). При этом учитываем, что $N_3^P = 0$, так как стержень разрезан. Для примера рассмотрим узел A :

$$\sum X = 0: \quad N_1^P \cos \alpha_1 + N_2^P \cos \alpha_2 = 0;$$

$$\sum Y = 0: \quad N_1^P \sin \alpha_1 + P - N_2^P \sin \alpha_2 = 0.$$

Решая полученную систему, находим

$$N_1^P = -0,745P; \quad N_2^P = 0,943P.$$

Для узла B аналогично получаем:

$$N_4^P = -1,60P; \quad N_5^P = 1,11P.$$

Далее рассматриваем единичную систему (рис. 7.26, в). Для нее находим:

$$N_1^1 = 0,745; \quad N_2^1 = 0,471; \quad N_3^1 = 1; \quad N_4^1 = 0,6; \quad N_5^1 = 0,833.$$

В. Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

Поскольку нормальные силы постоянны по длине каждого стержня, то интегралы Мора (7.18) в данном случае приводят к

следующим формулам для коэффициентов уравнения (см. также гл. 1):

$$\delta_{1P} = \sum_{i=1}^5 \frac{N_i^P N_i^1}{EF_i} l_i, \quad \delta_{11} = \sum_{i=1}^5 \frac{(N_i^1)^2}{EF_i} l_i.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \delta_{1P} &= -0,745 \frac{P}{EF} \cdot 0,745 \cdot 1,12l + 0,943 \frac{P}{EF} \cdot 0,471 \cdot 1,41l - \\ &- 1,60 \frac{P}{EF} \cdot 0,6 \cdot 1,80l + 1,11 \frac{P}{2EF} \cdot 0,833 \cdot 1,25l = -1,147 \frac{Pl}{EF}, \\ \delta_{11} &= \frac{(0,745)^2}{EF} \cdot 1,21l + \frac{(0,471)^2}{EF} \cdot 1,41l + \frac{1^2}{EF} \cdot l + \\ &+ \frac{(0,6)^2}{EF} \cdot 1,80l + \frac{(0,833)^2}{2EF} \cdot 1,25l = 3,02 \frac{l}{EF}. \end{aligned}$$

Решение уравнения таково:

$$X_1 = -\delta_{1P} / \delta_{11} = 0,380P.$$

Г. Усилия в стержнях исходной системы находим, используя принцип суперпозиции (7.36):

$$N_1 = -0,462P, \quad N_2 = 1,12P, \quad N_3 = 0,380P,$$

$$N_4 = -1,37P, \quad N_5 = 1,43P.$$

Д. Полученные результаты проверяем, вычисляя взаимное перемещение сечений по разрезу:

$$\Delta = \sum_{i=1}^5 \frac{N_i N_i^1}{EF_i} l_i = 0.$$

3. Определение вертикального перемещения узла В. Для этого к основной системе в узле В прикладываем вертикально единичную силу (рис. 7.26, е). Определяем соответствующие усилия \tilde{N}_i^1 , вырезая узел В:

$$\tilde{N}_4^1 = -0,801; \quad \tilde{N}_5^1 = 0,556; \quad \tilde{N}_1^1 = \tilde{N}_2^1 = \tilde{N}_3^1 = 0.$$

Вертикальное перемещение узла B определяется аналогично коэффициентам канонического уравнения:

$$\delta_B^{\text{верт}} = \sum_{i=1}^5 \frac{N_i \tilde{N}_i^1}{EF_i} l_i = -1,37 \frac{P}{EF} \cdot (-0,80l) \cdot 1,80l + \\ + 1,43 \frac{P}{2EF} \cdot 0,556 \cdot 1,25l = 2,48 \frac{Pl}{EF}.$$

Отметим, что при большом числе стержней вычисления удобно проводить в табличной форме. ■

Пример 7.20. Построить эпюру изгибающих моментов в раме и эпюру осевой силы в тяге комбинированной системы, изображенной на рис. 7.27, *а*. Вычислить также взаимное перемещение точек приложения сил. В расчете принять $J_z/(Fl^2) = 1/4$.

Решение. 1. Определение внутренних силовых факторов.

А. Рассматриваемая комбинированная система один раз статически неопределима, так как замкнутый контур содержит два шарнира.

Удобно выбрать эквивалентную и основную системы, разрезая тягу (рис. 7.27, *б*, *в*). При этом удаляется одна связь, так как тяга работает только на растяжение-сжатие. В этом легко убедиться, разрезая тягу по одному из шарниров и рассматривая ее равновесие (уравнения моментов) относительно другого шарнира.

Б. Основная система под действием внешней нагрузки, единичная система и соответствующие эпюры изгибающих моментов в раме и осевой силы в тяге представлены на рис. 7.27, *г*, *д*.

В. Записываем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

Его коэффициенты вычисляем по формулам (см. (7.18) и предыдущий пример):

$$\delta_{1P} = \sum_{n=1}^3 \int_0^{l_n} \frac{M^P(x) M^1(x)}{EJ_z} dx + \frac{N^P N^1}{EF} \cdot 2l; \\ \delta_{11} = \sum_{n=1}^3 \int_0^{l_n} \frac{[M^1(x)]^2}{EJ_z} dx + \frac{(N^1)^2}{EF} \cdot 2l.$$

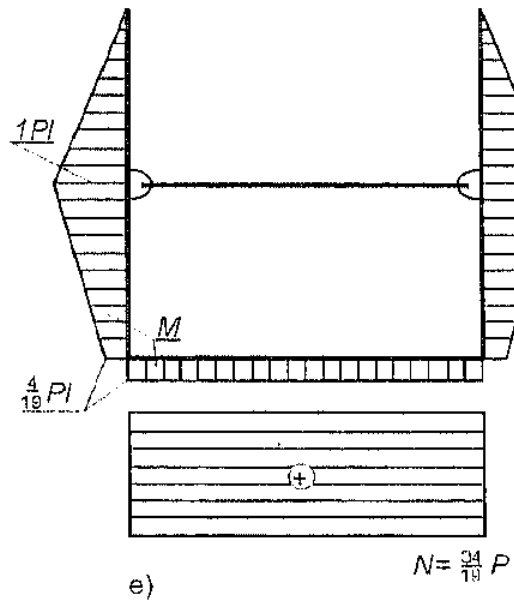
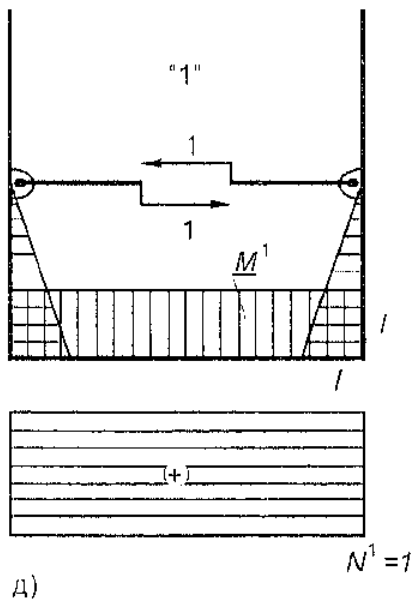
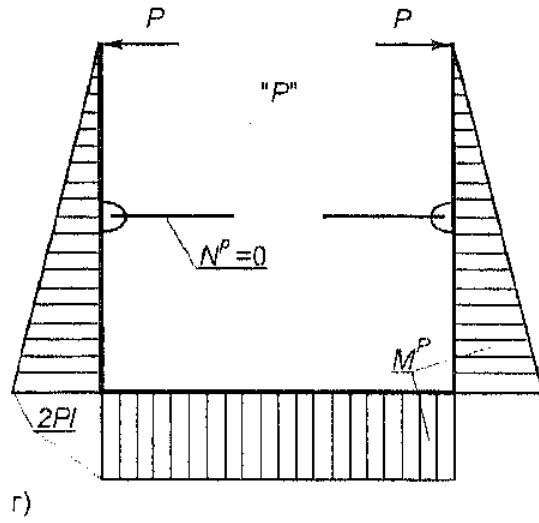
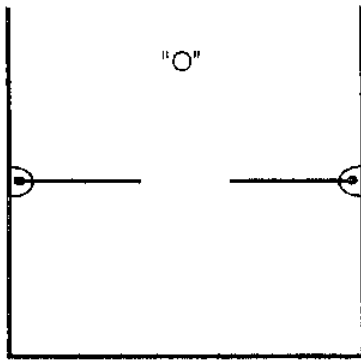
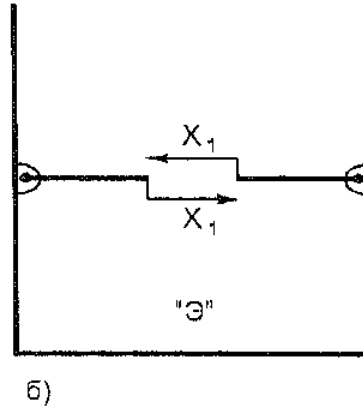
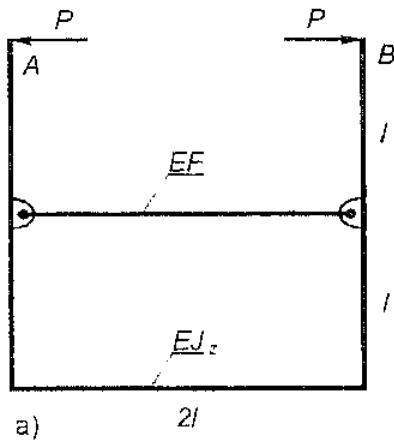


Рис. 7.27

Используя для интегралов правило Верещагина, получаем

$$\delta_{1P} = -\frac{Pl^3}{EJ_z} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + 1 \cdot 2 \cdot 2 \right) = -\frac{17}{3} \frac{Pl^3}{EJ_z};$$

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{EJ_z} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 2 \cdot 1 \right) + \frac{1 \cdot 1 \cdot 2l}{EF} = \frac{19l^3}{6EJ_z}.$$

Итак, уравнение имеет следующее решение:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{34}{19} P.$$

Г. Эпюры M и N для исходной системы приведены на рис. 7.27, *e*.

3. Определение взаимного перемещения точек A и B . К основной системе в этих точках прикладываем две взаимно противоположные единичные силы. Очевидно, для этой единичной системы $\tilde{M}^1 = M^P|_{P=1}$. Поскольку для этой системы $\tilde{N}^1 = N^P|_{P=1}$, то перемножаем только \tilde{M}^1 и \tilde{M} . В результате находим

$$\delta_{AB} = \frac{Pl^3}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{4}{19} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{19} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{4}{19} \cdot 2 \cdot 2 \right) = \frac{182}{57} \frac{Pl^3}{EJ_z}. \blacksquare$$

Пример 7.21 (номера пунктов соответствуют алгоритму расчета рам (см. § 7.1)). Для рамы, изображенной на рис. 7.28, *a*, построить эпюры изгибающих и крутящих моментов, полагая, что поперечное сечение всех элементов рамы — круг диаметра d и $G = 0,4E$.

Решение. А. Рама является плоско-пространственной (см. определение 7.3). Она содержит два замкнутых контура и, следовательно, шесть раз статически неопределима.

Эквивалентную и основную системы выбираем с учетом того, что рама имеет две плоскости прямой симметрии (рис. 7.28, *б, в*). В разрезах возникают только прямо симметричные факторы — изгибающие моменты X_1 . Они одинаковы в обоих разрезах и симметрично направлены, так как разрез сделан по сечениям, симметричным относительно второй плоскости прямой симметрии.

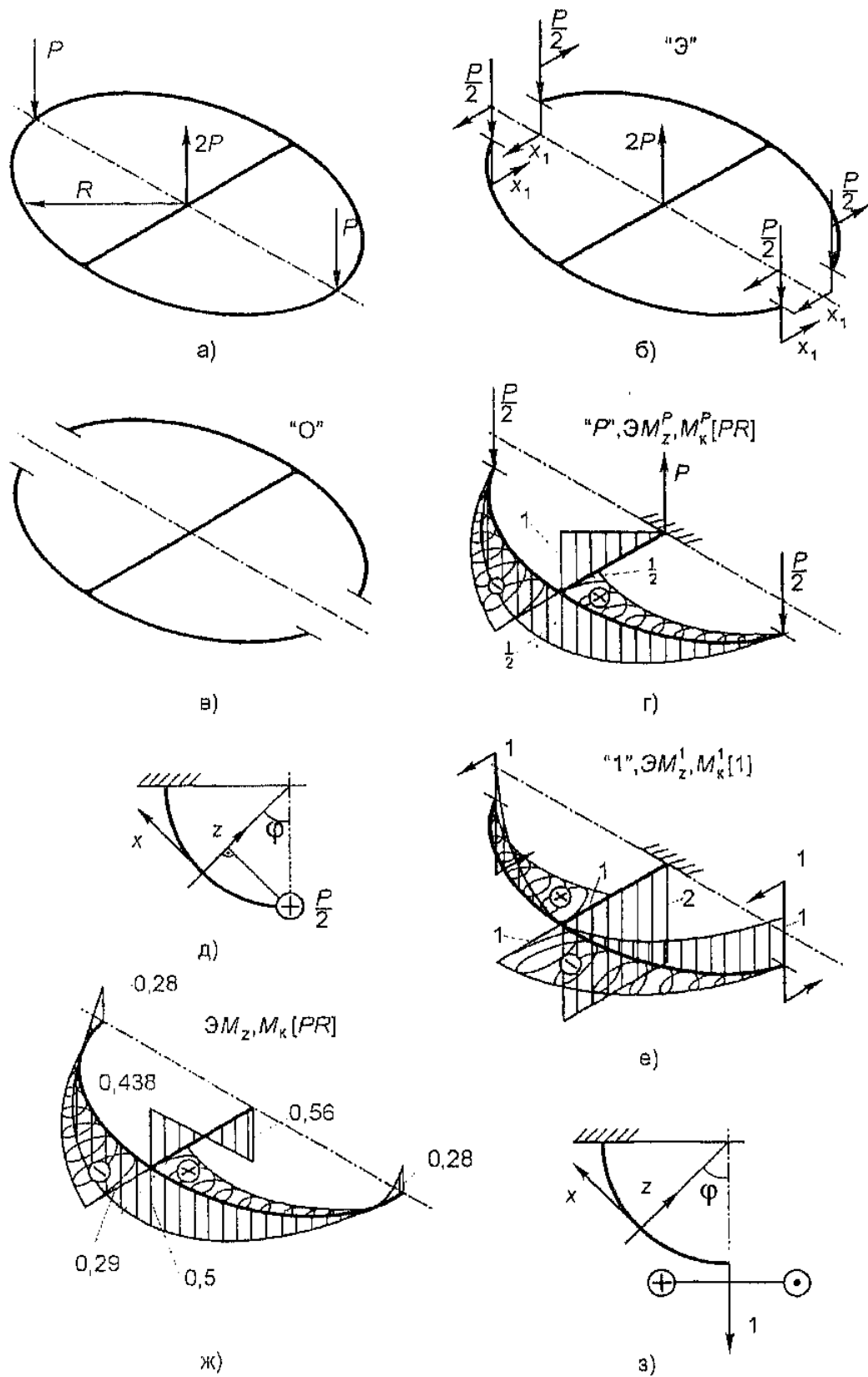


Рис. 7.28

Б. Основная система под действием внешней нагрузки представлена на рис. 7.28, з (показана половина рамы). Изгибающие и крутящие моменты для нее имеют вид (рис. 7.28, д)

$$M_z^P(\varphi) = -\frac{P}{2} \cdot R \sin \varphi, \quad M_K^P = -\frac{P}{2} \cdot R (1 - \cos \varphi).$$

$\mathcal{E}M_z^P$ и $\mathcal{E}M_K^P$ приведены на рис. 7.28, з.

Единичная система изображена на рис. 7.28, е. Для нее имеем (рис. 7.28, з)

$$M_z^1(\varphi) = 1 \cdot \cos \varphi, \quad M_K^1(\varphi) = 1 \cdot \sin \varphi.$$

$\mathcal{E}M_z^1$ и $\mathcal{E}M_K^1$ приведены на рис. 7.28, е.

В. Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1P} = 0.$$

Коэффициенты канонического уравнения вычисляем с помощью интегралов Мора (7.18):

$$\delta_{1P} = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \left(\frac{M_z^P(\varphi)M_z^1(\varphi)}{EJ_z} + \frac{M_K^P(\varphi)M_K^1(\varphi)}{GJ_K} \right) ds;$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \left(\frac{(M_z^1(\varphi))^2}{EJ_z} + \frac{(M_K^1(\varphi))^2}{GJ_K} \right) ds,$$

где n — число участков рамы.

При вычислении интегралов учитываем, что

$$\frac{1}{GJ_K} = \frac{1,25}{EJ_z},$$

так как по условию $G = 0,4E$, и для круга $J_K = 2J_z$.

Тогда получаем (на прямолинейном участке используется правило Верещагина):

$$\frac{1}{2} \delta_{1P} = -\frac{2}{EJ_z} \int_0^{\pi/2} \frac{PR}{2} \sin \varphi \cdot 1 \cdot \cos \varphi \cdot R d\varphi - \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{2} PR \cdot R \cdot 2 -$$

$$- 2 \cdot \frac{1,25}{EJ_z} \int_0^{\pi/2} \frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) \cdot 1 \cdot \sin \varphi \cdot R d\varphi = - \frac{17}{8} \frac{PR^2}{EJ_z};$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_{11} &= \frac{2}{EJ_z} \int_0^{\pi/2} (1 \cdot \cos \varphi)^2 R d\varphi + \frac{1}{EJ_z} \cdot 2 \cdot R \cdot 2 + \\ &+ 2 \cdot \frac{1,25}{EJ_z} \int_0^{\pi/2} (1 \cdot \sin \varphi)^2 R d\varphi = 7,53 \frac{R}{EJ_z}. \end{aligned}$$

Следовательно, решение уравнения имеет вид

$$X_1 = - \delta_{1P} / \delta_{11} = 0,282PR.$$

Г. \mathcal{M}_z и \mathcal{M}_x для исходной рамы приведены на рис. 7.28, ж.

Задачи

7.107—7.114. Определить реакции в опорах А рам постоянного поперечного сечения, изображенных на соответствующих рисунках. Вычислить также перемещение сечения, в котором приложена внешняя нагрузка, по направлению нагрузки.

7.115—7.122. Для замкнутых рам постоянной жесткости, изображенных на соответствующих рисунках, построить эпюры Q_y и M_z .

7.123—7.130. Для рам постоянной жесткости, изображенных на соответствующих рисунках, определить указанное на рисунках перемещение.

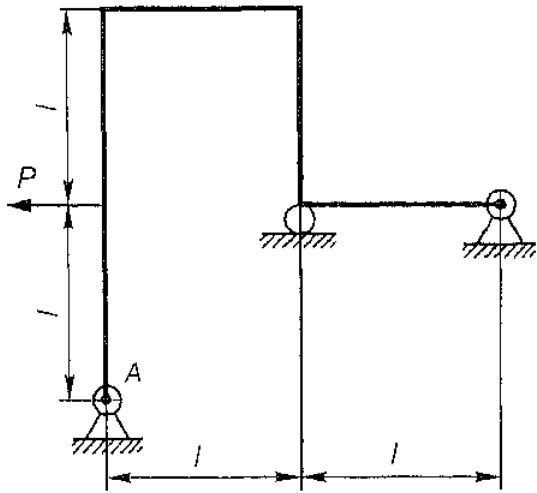
7.131—7.136. Для балок постоянной жесткости, изображенных на соответствующих рисунках, определить реакции в опорах и построить эпюры Q_y и M_z .

7.137—7.148. Методом сил определить усилия в стрелневых системах, указанных в задачах 2.18—2.29, при силовом нагружении.

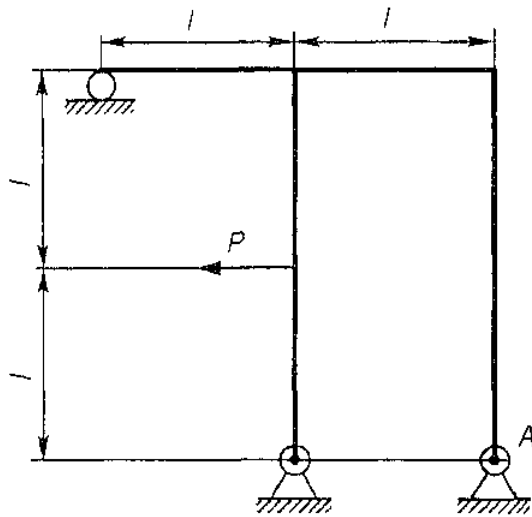
7.149—7.154. Для комбинированных систем, изображенных на соответствующих рисунках, определить усилия в тягах и реакции в опоре А или внутренние силовые факторы в сечении А.

7.155—7.160. Для плоско-пространственных рам, изображенных на соответствующих рисунках, определить внутренние силовые факторы в сечении А. В расчетах принять: поперечное сечение рамы — круг диаметра d ; $G = 0,4E$.

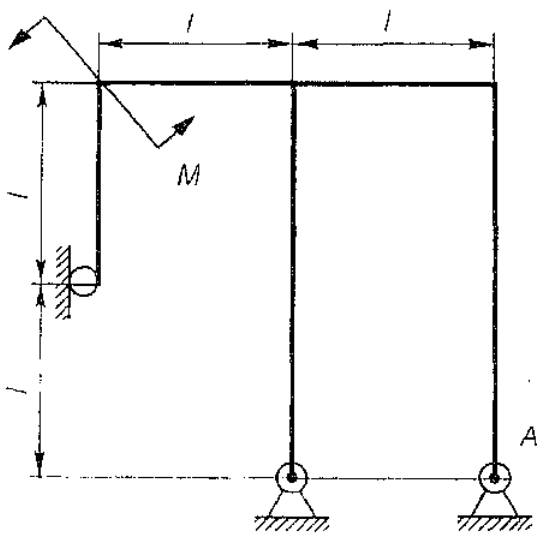
7.107



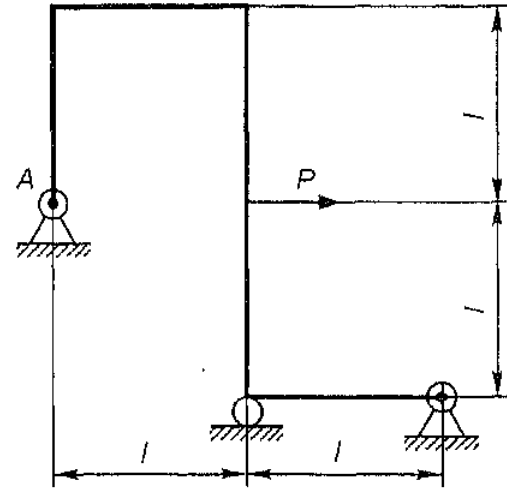
7.109



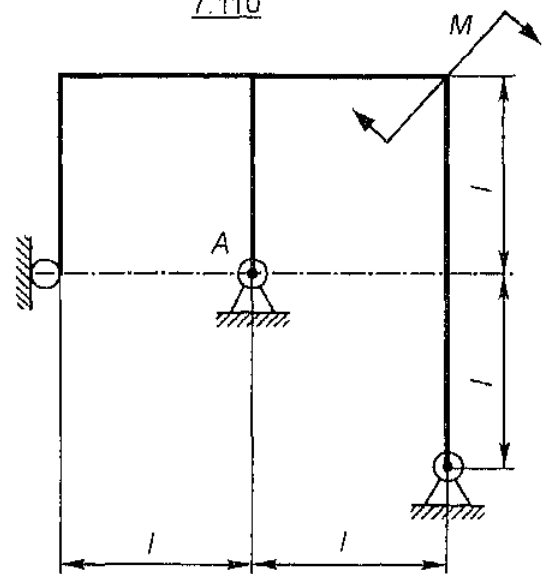
7.111



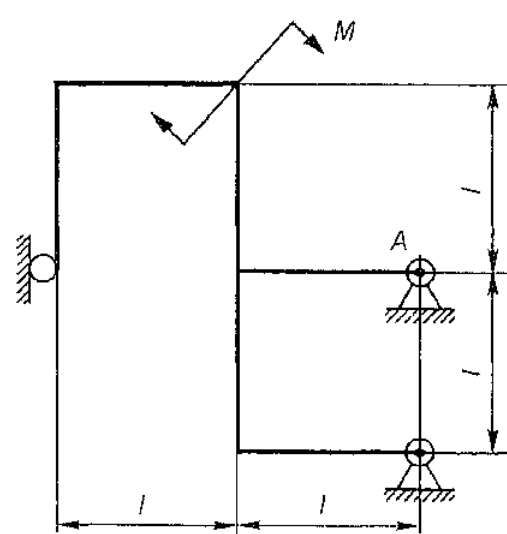
7.108



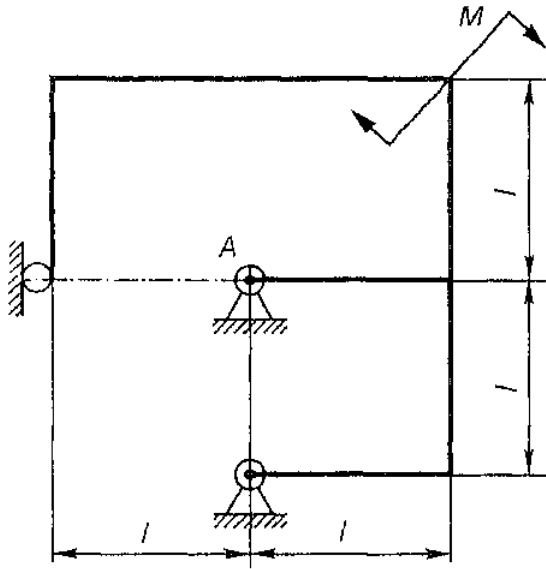
7.110



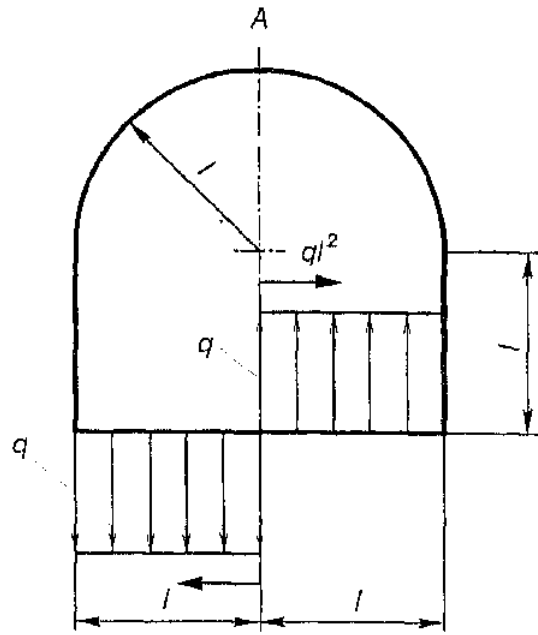
7.112



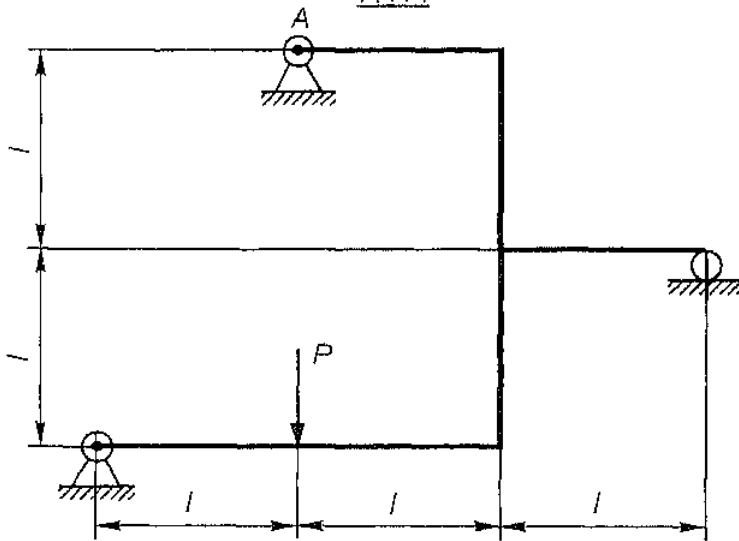
7.113



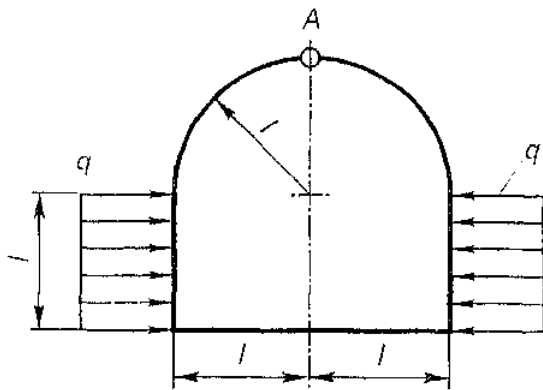
7.115



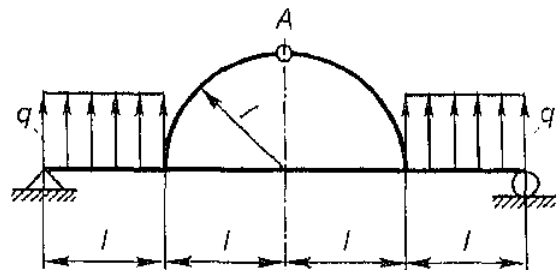
7.114



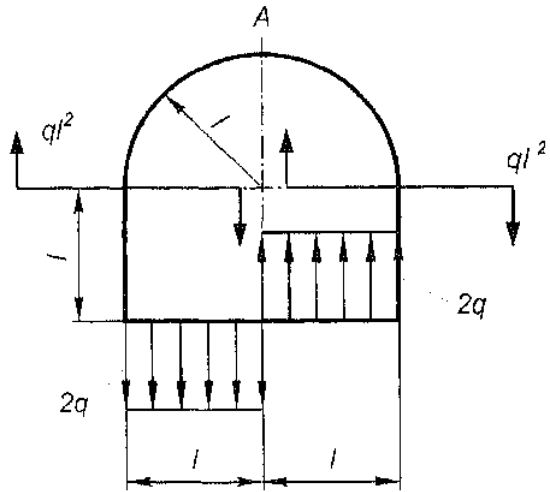
7.118



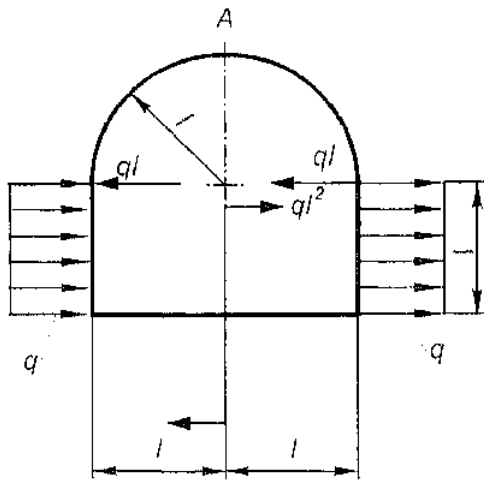
7.119



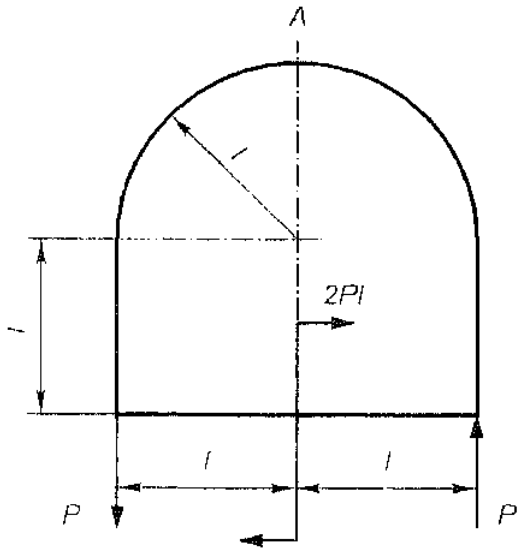
7.116



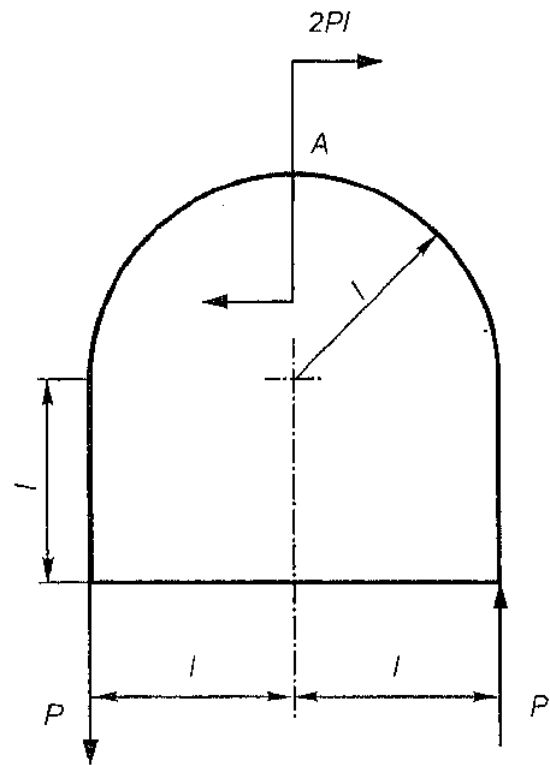
7.120



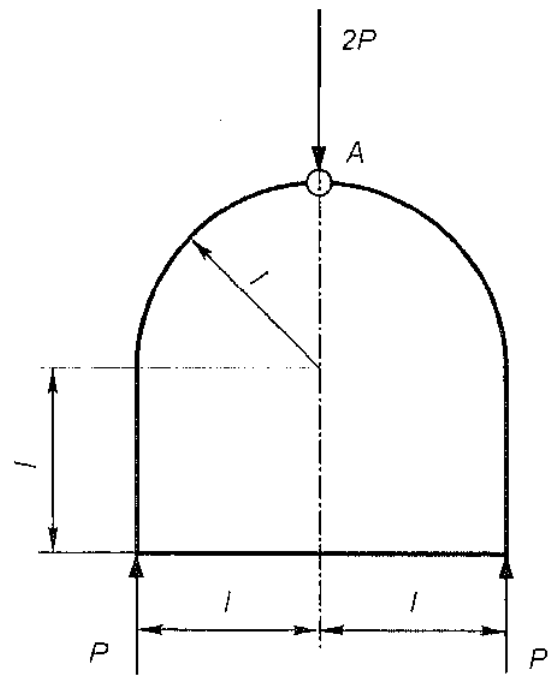
7.122



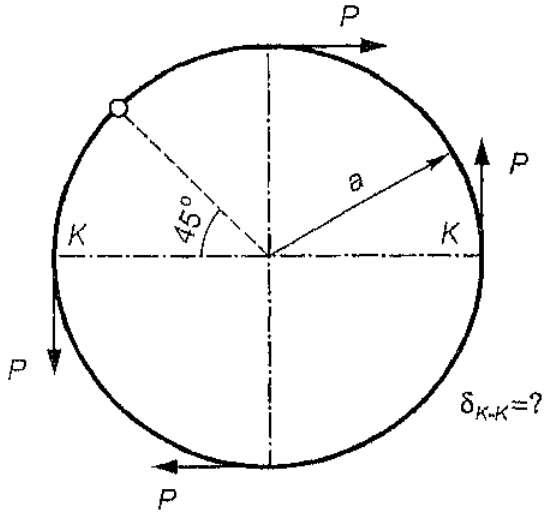
7.117



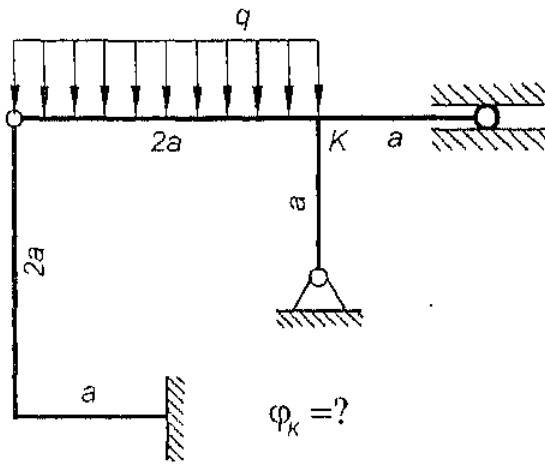
7.121



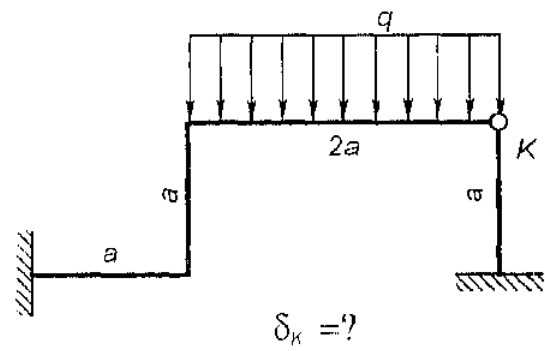
7.123



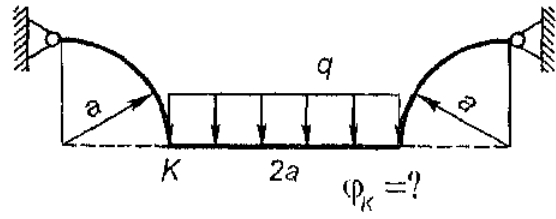
7.126



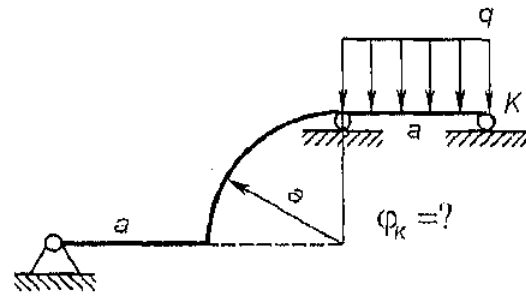
7.128



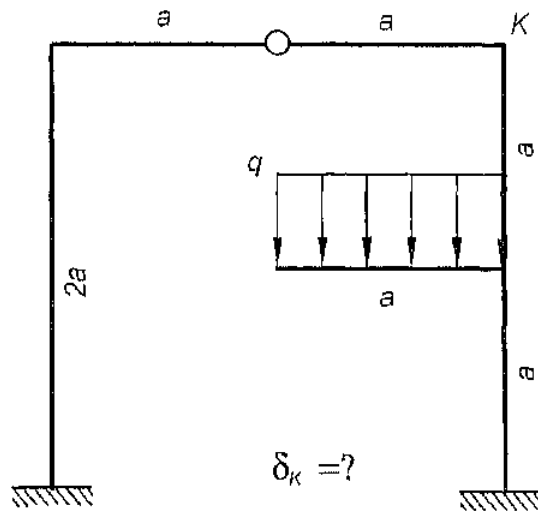
7.124



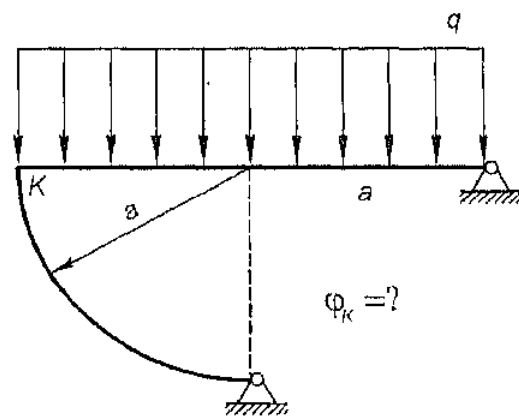
7.125



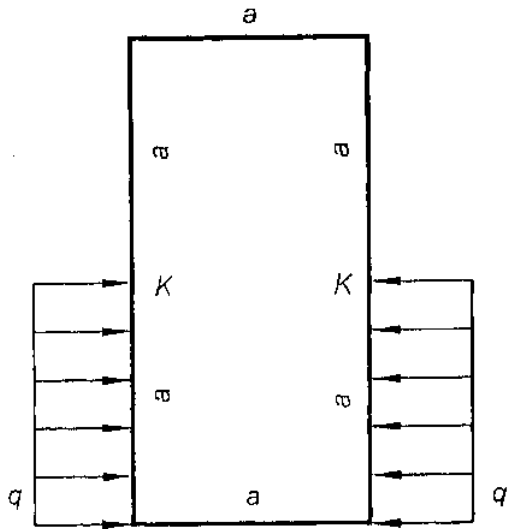
7.127



7.130

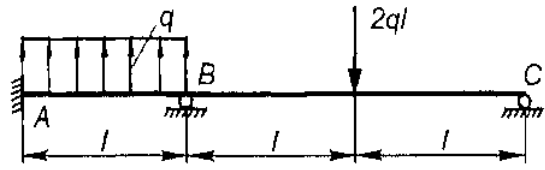


7.129

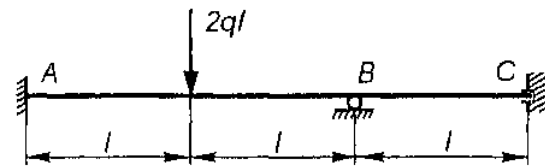


$\delta_{K-K} = ?$

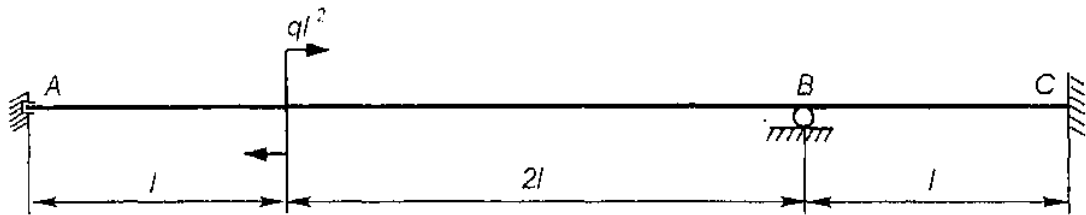
7.131



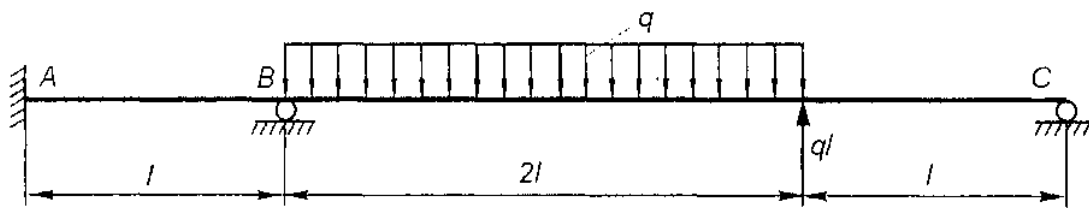
7.135



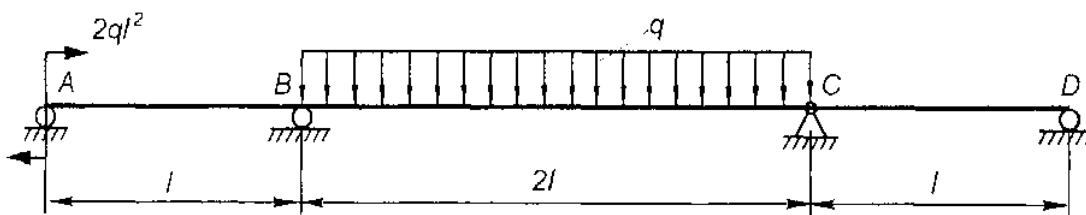
7.132



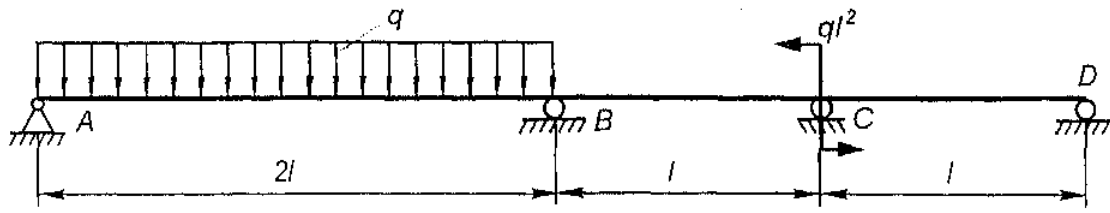
7.133



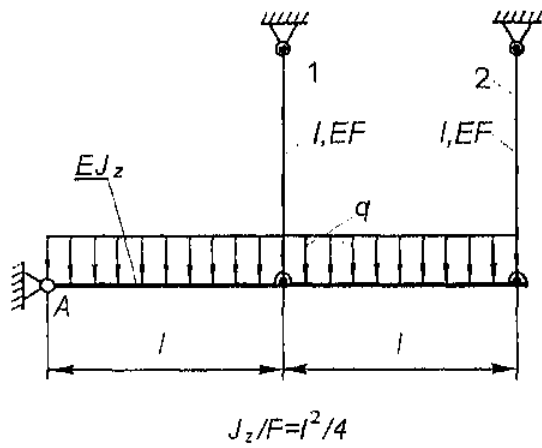
7.134



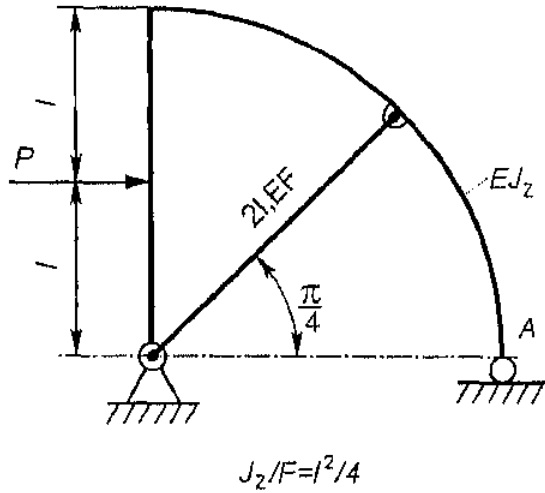
7.136



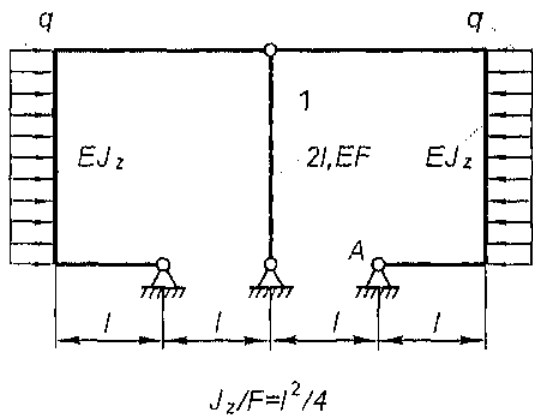
7.149



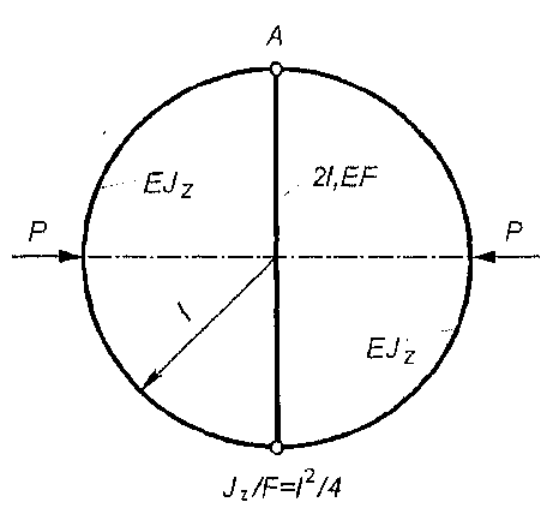
7.150



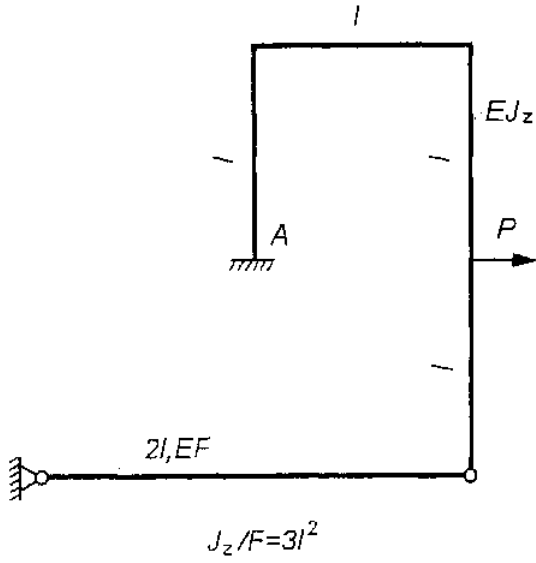
7.151



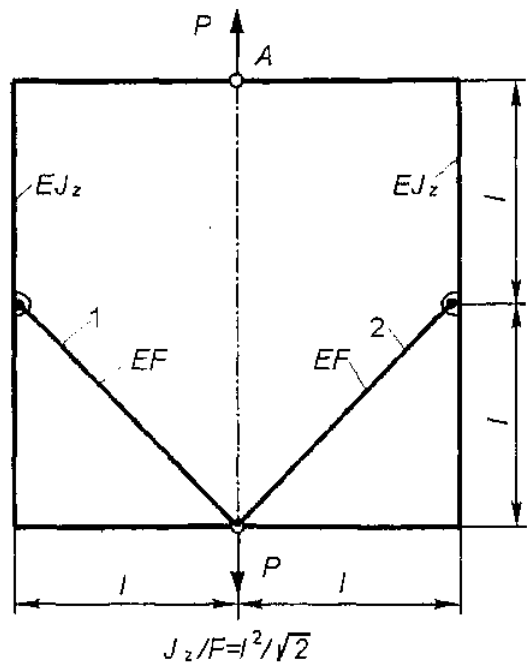
7.152



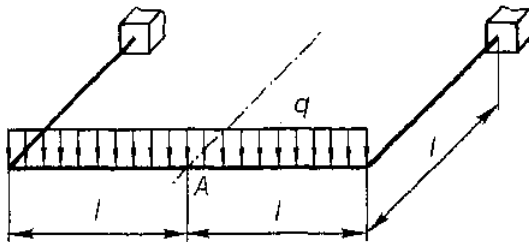
7.153



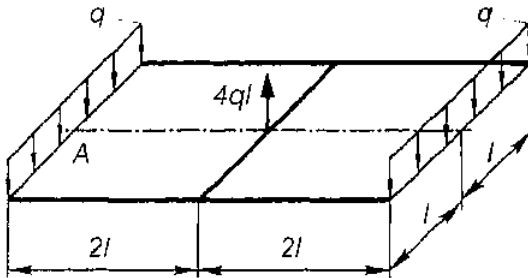
7.154



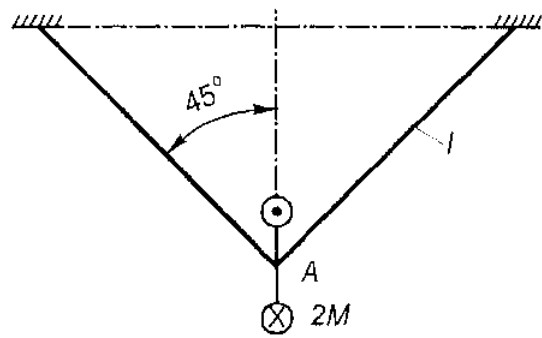
7.155



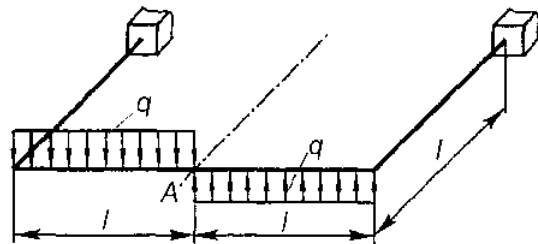
7.157



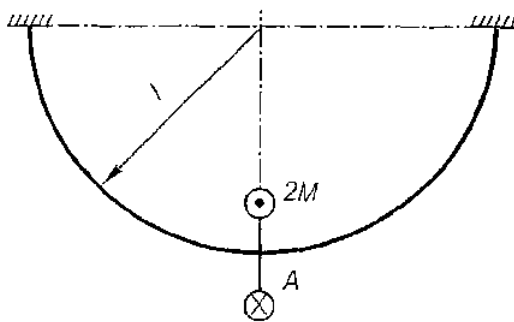
7.156



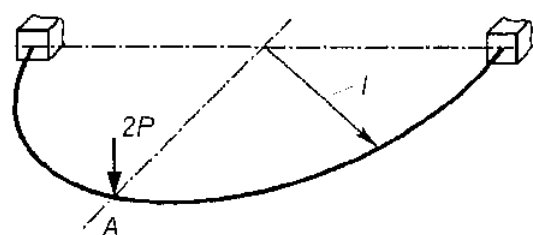
7.159



7.158



7.160



Глава 8
ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Напряженное состояние

Каждой точке деформируемого тела в ПДСК $Oxyz$ можно сопоставить совокупность напряжений (П.15) (рис. 8.1).

Определение 8.1. Матрицей (тензором) напряжений называется матрица вида

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad \blacksquare \quad (8.1)$$

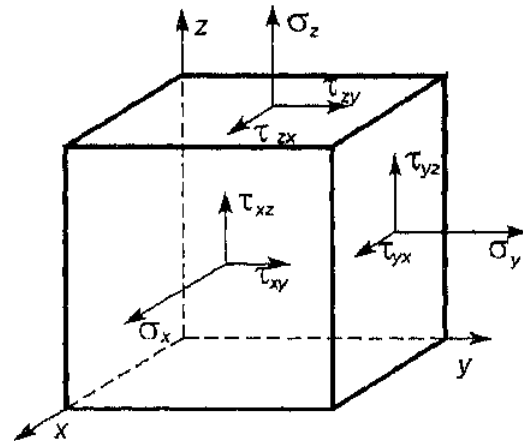


Рис. 8.1

Согласно утверждению П.1 эта матрица является симметрической и имеет шесть независимых компонент (напряжений). Оказывается, что этих шести величин достаточно для задания напряженного состояния в точке (см. определение П.10).

Утверждение 8.1. В ПДСК координаты вектора напряжений $p_v = (X, Y, Z)$ на любой площадке с нормальным вектором $v = (l, m, n)$ связаны с напряжениями (8.1) так:

$$\begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (8.2)$$

Эти равенства удобно записывать в матричной форме:

$$P = S\xi, \quad P = (X, Y, Z)^T, \quad \xi = (l, m, n)^T. \quad (8.3)$$

Из утверждения 8.1 и определения П.11 вытекают следующие представления нормального напряжения и модуля вектора касательных напряжений на площадке с нормалью v :

$$\begin{aligned}
\sigma_v &= \text{пр}_v p_v = (p_v, v) = \xi^T P = \xi^T S \xi = \\
&= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{xz} ln + 2\tau_{yz} mn, \quad (8.4) \\
\tau_v^2 &= p_v^2 - \sigma_v^2, \quad p_v^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.
\end{aligned}$$

Среди всевозможных площадок в данной точке выделяют площадки специального вида.

Определение 8.2. Площадки, на которых $\tau_v = 0$, называются *главными площадками*, соответствующие им направления — *главными направлениями (главными осями)*, а нормальные напряжения на них — *главными напряжениями*. ■

Отсюда с учетом формул (8.3) приходим к следующему выводу.

Утверждение 8.2. Главные напряжения и направления есть решение следующей задачи на собственные значения для матрицы напряжений:

$$(S - \sigma E) \xi = 0. \quad \blacksquare \quad (8.5)$$

Система однородных линейных алгебраических уравнений (8.5), очевидно, может быть записана в скалярном виде:

$$\begin{aligned}
(\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0, \\
\tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n &= 0, \quad (8.6) \\
\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0.
\end{aligned}$$

С учетом симметрии матрицы напряжений и известных результатов линейной алгебры получаем утверждение.

Утверждение 8.3. Главные напряжения σ_h — действительные числа. Они являются экстремальными значениями нормальных напряжений и определяются как решения характеристического уравнения

$$|S - \sigma E| = -\sigma^3 + I_{1\sigma}\sigma^2 - I_{2\sigma}\sigma + I_{3\sigma} = 0, \quad (8.7)$$

$$I_{1\sigma} = \text{Sp } S = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad I_{2\sigma} = \text{Sp } \tilde{S}, \quad I_{3\sigma} = |S|,$$

где $I_{k\sigma}$ — инварианты матрицы напряжений, $\tilde{S} = (S_{ij})$ — присоединенная матрица (матрица, составленная из алгебраических дополнений S_{ij} матрицы S).

Главные направления $v_k = (v_{k1}, v_{k2}, v_{k3})$ ортогональны и имеют координаты — компоненты собственных векторов ξ_k :

$$(S - \sigma_k E) \xi_k = 0. \quad \blacksquare \quad (8.8)$$

Обычно главные напряжения нумеруют в порядке убывания:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (8.9)$$

После решения задачи на собственные значения проводят нормировку собственных векторов ($|v_k| = 1$). Если имеются кратные собственные значения (два или три главных напряжения равны между собой), то используется процесс ортогонализации.

В главных осях (в ПДСК с базисом v_1, v_2, v_3) матрица напряжений и ее инварианты имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad I_{1\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (8.10)$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3, \quad I_{3\sigma} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$

а формулы (8.4) переходят в следующие:

$$\sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2, \quad p_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2, \quad \tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2. \quad (8.11)$$

Введенные понятия позволяют сформулировать инвариантный признак размерности напряженного состояния (см. определение П.12).

Утверждение 8.4. Напряженное состояние является:

а) пространственным (*трехосным*) тогда и только тогда, когда все главные напряжения отличны от нуля;

б) плоским (*двухосным*) тогда и только тогда, когда отличны от нуля два главных напряжения;

в) одноосным тогда и только тогда, когда отлично от нуля одно главное напряжение. \blacksquare

Наряду с главными напряжениями, представляют интерес и экстремальные значения касательных напряжений.

Утверждение 8.5. Модуль вектора касательных напряжений принимает максимальные значения

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (8.12)$$

на площадках с нормальными векторами, имеющими в главных осях соответственно координаты

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right). \quad (8.13)$$

На этих площадках нормальные напряжения σ_v и модуль вектора напряжений p_v вычисляются так:

$$\sigma_{13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \quad (8.14)$$

$$p_{v,13}^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{2}, \quad p_{v,23}^2 = \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}, \quad p_{v,12}^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}. \quad \blacksquare$$

Определение 8.3. Напряжения τ_{13} , τ_{23} и τ_{12} , определяемые равенствами (8.12), называются *главными касательными напряжениями*. \blacksquare

Кроме этого, используются следующие понятия.

Определение 8.4. Площадки с нормальными векторами, имеющими в главных осях координаты $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ (равно наклоненные к главным осям), и соответствующие им напряжения называются *октаэдрическими*. \blacksquare

Утверждение 8.6. Для нормального напряжения и модулей векторов напряжений и касательных напряжений на октаэдрических площадках справедливы равенства:

$$\sigma_v = \sigma_0 = \frac{1}{3} I_{1\sigma}, \quad p_v^2 = p_0^2 = \frac{1}{3} (I_{1\sigma}^2 - 2I_{2\sigma}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3};$$

$$\tau_v^2 = \tau_0^2 = \frac{2}{9} (I_{1\sigma}^2 - 3I_{2\sigma}) = \frac{4}{9} (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2) =$$

$$= \frac{2}{3} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) + \frac{1}{9} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2]. \quad \blacksquare \quad (8.15)$$

В соответствии с принципом суперпозиции (утверждение П.2) произвольное напряженное состояние с матрицей S может быть представлено в виде совокупности двух состояний:

$$S = B + D, \quad B = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

Определение 8.5. Нормальное напряжение σ_0 на октаэдрической площадке называется *средним (гидростатическим) напряжением*, B — *шаровой матрицей (шаровым тензором)*, а D — *матрицей-девиатором (тензором-девиатором)*.

Напряженное состояние, соответствующее шаровой матрице, называется *всесторонним растяжением-сжатием*. ■

Первые инварианты I_{1B} и I_{1D} шаровой матрицы и матрицы-девиатора, очевидно, определяются так:

$$I_{1B} = I_{1\sigma}, \quad I_{1D} = 0. \quad (8.17)$$

Деформированное состояние

Аналогично напряжениям каждой точке деформируемого тела в ПДСК $Oxyz$ можно сопоставить совокупность деформаций (П.3).

Определение 8.6. *Матрицей (тензором) деформаций* называется матрица вида

$$K = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad \blacksquare \quad (8.18)$$

В силу равенства (П.2) эта матрица является симметрической и имеет шесть независимых компонент (деформаций).

Определение 8.7. *Главными деформациями и направлениями (главными осями) матрицы деформаций* называются ее собственные значения и векторы, т.е. решения следующей задачи на собственные значения:

$$(K - \varepsilon E) \xi = 0. \quad \blacksquare \quad (8.19)$$

Утверждение 8.7. Главные деформации ε_k — действительные числа, главные направления ортогональны.

В главных осях матрицы деформаций сдвиговые деформации отсутствуют: $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$. ■

Определение 8.8. Пусть точка $A \in \Delta G_0$ — подобласти тела G в начальный момент времени t_0 (см. определение П.5) и при $t > t_0$ A переходит в $A' \in \Delta G$, где ΔG — образ ΔG_0 . Коэффициентом изменения объема (относительным изменением объема) в точке A называется (обозначения даны в определении П.7)

$$\theta = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ A \in \Delta G}} \frac{\Delta V - \Delta V_0}{\Delta V_0}, \quad (8.20)$$

где ΔV_0 и ΔV — объемы областей ΔG_0 и ΔG . ■

Утверждение 8.8. Коэффициент изменения объема равен первому инварианту матрицы деформаций:

$$\theta = I_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad \blacksquare \quad (8.21)$$

Связь напряженного и деформированного состояний

Принцип суперпозиции и законы Гука для одноосного напряженного состояния (1.5) и для чистого сдвига (4.5) с учетом равенств (П.3) приводят к следующему утверждению.

Утверждение 8.9. (Обобщенный закон Гука.) Пространственные напряженное и деформированное состояния связаны между собой соотношениями

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)], \quad (8.22)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)], \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G},$$

которые могут быть разрешены относительно напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x - \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)], \quad \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)], \quad \tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz}, \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)], \quad \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Причем для инвариантов матриц деформаций и напряжений имеет место равенство:

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} I_{1\sigma}. \quad \blacksquare \quad (8.24)$$

Отсюда и из определения 8.8, а также из равенств (8.16), (8.17) вытекает следующий результат.

Утверждение 8.10. При всестороннем растяжении-сжатии происходит только изменение объема ($\theta = 3(1-2\nu)p/E$, $\sigma_0 = p$) с сохранением формы ($\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ см. определение П.5).

В случае напряженного состояния с матрицей напряжения в виде матрицы-девиатора изменяется только форма с сохранением объема ($\theta = 0$). ■

Кроме того, закон Гука позволяет прийти к такому выводу.

Утверждение 8.11. Для изотропных материалов главные оси матриц напряжений и деформаций совпадают. ■

Отсюда с учетом (8.22) вытекает следующая связь главных деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_k - \nu I_{1\sigma}] . \quad (8.25)$$

Потенциальная энергия

Принцип суперпозиции, закон Гука и формулы (1.14) и (4.12) для удельной потенциальной энергии в случаях одноосного напряженного состояния и чистого сдвига приводят к следующему утверждению.

Утверждение 8.12. Удельная потенциальная энергия в произвольной ПДСК $Oxyz$ есть билинейная или квадратичная форма от напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\tau_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\tau_{xz} \varepsilon_{xz} + 2\tau_{yz} \varepsilon_{yz}) = \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) , \end{aligned} \quad (8.26)$$

а с главными напряжениями и деформациями она связана следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)] = \\ &= \frac{1}{2E} [I_{1\sigma}^2 - 2(1 + \nu) I_{2\sigma}] . \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (8.27)$$

Утверждение 8.13. Удельная потенциальная энергия может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$u = u_0 + u_\phi . \quad (8.28)$$

Здесь u_0 и u_ϕ — энергии, соответствующие матрицам напряжений B и D в (8.16):

$$u_0 = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_0^2,$$

$$\begin{aligned} u_\Phi &= \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = \\ &= \frac{3(1+\nu)}{2E} \tau_0^2. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (8.29)$$

На основании утверждения 8.10 вводится следующая терминология.

Определение 8.9. u_0 и u_Φ называются *удельными потенциальными энергиями изменений объема и формы*. ■

Геометрическая иллюстрация напряженно-деформированного состояния

Определение 8.10. Поверхности, задаваемые в главных осях $OXYZ$ уравнениями (при $\sigma_k = 0$ или $\varepsilon_k = 0$ соответствующее слабое опускается)

$$\frac{X^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z^2}{\sigma_3^2} = 1; \quad (8.30)$$

$$\frac{X^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{Y^2}{\varepsilon_2^2} + \frac{Z^2}{\varepsilon_3^2} = 1, \quad (8.31)$$

называются *эллипсоидами напряжений и деформаций*. ■

Это название условное: если одно (или два) из главных напряжений (деформаций) равно (равны) нулю, то эллипсоид вырождается в цилиндр (плоскость). При всестороннем растяжении-сжатии эллипсоид переходит в сферу, чем и объясняется название соответствующей матрицы напряжений (см. определение 8.5).

В сопротивлении материалов наиболее часто используется другой вариант геометрической иллюстрации напряженного состояния. Для этого рассматривается не взаимно однозначное отображение

$$S: l^2 + m^2 + n^2 = 1 \rightarrow D \subset R_{\sigma\tau}^2, \quad \sigma = \sigma_v, \quad \tau = |\tau_v|, \quad (8.32)$$

которое неявно задается системой уравнений, вытекающей из (8.11):

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2, \\ \sigma^2 + \tau^2 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2, \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1.\end{aligned}\tag{8.33}$$

Утверждение 8.14. Множество D на плоскости $\sigma - \tau$ — область, ограниченная окружностями (см. (8.12) и (8.14))

$$\begin{aligned}\Gamma_1: (\sigma - \sigma_{23})^2 + \tau^2 &= \tau_{23}^2, & \Gamma_2: (\sigma - \sigma_{13})^2 + \tau^2 &= \tau_{13}^2, \\ \Gamma_3: (\sigma - \sigma_{12})^2 + \tau^2 &= \tau_{12}^2.\end{aligned}\quad \blacksquare\tag{8.34}$$

Определение 8.11. Область D называется *диаграммой Мора* (кругами Мора).

В силу симметрии диаграмма Мора изображается только в верхней полуплоскости. Один из ее возможных вариантов приведен на рис. 8.2.

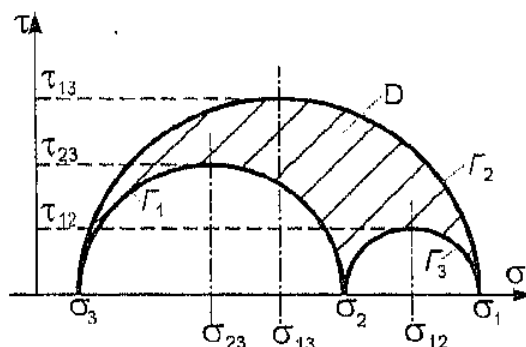


Рис. 8.2

Пример 8.1. Для одноосного напряженного состояния невырожденной является только одна окружность на диаграмме Мора (рис. 8.3): $a - \sigma_3 = \sigma < 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $b - \sigma_1 = \sigma > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. ■

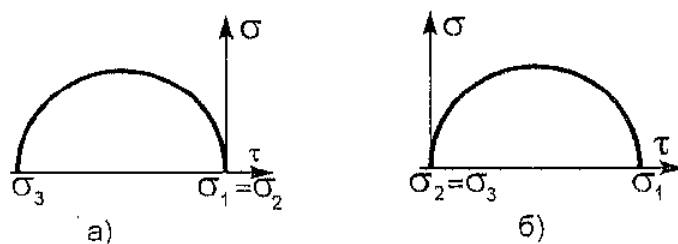


Рис. 8.3

Пример 8.2. Найти главные напряжения, направления и построить диаграмму Мора для плоского напряженного состояния: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ (см. определение П.12).

Решение. В этом случае матрица напряжений имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

Ей соответствует следующая задача на собственные значения (8.6):

$$(\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m = 0, \quad \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m = 0, \quad \sigma n = 0. \quad (8.36)$$

Решая характеристическое уравнение

$$-\sigma (\sigma^2 + I_{1\sigma} \sigma - I_{2\sigma}) = 0, \quad I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y, \quad (8.37)$$

$$I_{2\sigma} = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2, \quad I_{3\sigma} = 0,$$

найдем, что одно из главных напряжений равно нулю ($\sigma_k = 0$), а два других определяются так:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (8.38)$$

Нулевое главное напряжение соответствует главному направлению, совпадающему с осью Oz : $v_k = (0, 0, 1)$, двум другим соответствуют векторы $v_k = (\cos \alpha_k, \sin \alpha_k, 0)$, коллинеарные координатной плоскости Oxy и имеющие координаты, являющиеся решением уравнения

$$(\sigma_x - \sigma_k) \cos \alpha_k + \tau_{xy} \sin \alpha_k = 0,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{\sigma_k - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \quad (8.39)$$

Три возможные диаграммы Мора приведены на рис. 8.4: $a - \sigma_1 = 0$; $b - \sigma_2 = 0$; $c - \sigma_3 = 0$.

Обычно в случае плоского напряженного состояния изображают только круг, соответствующий площадкам, параллельным оси Oz . Пример, соответствующий $\sigma_3 = 0$, приведен на рис. 8.5. При этом можно построить диаграмму и определить главные напряжения геометрически без их вычисления по формуле (8.37). Действительно, точки $A_1(\sigma_x, \tau_{xy})$ и $A_2(\sigma_y, \tau_{xy})$ соответствуют

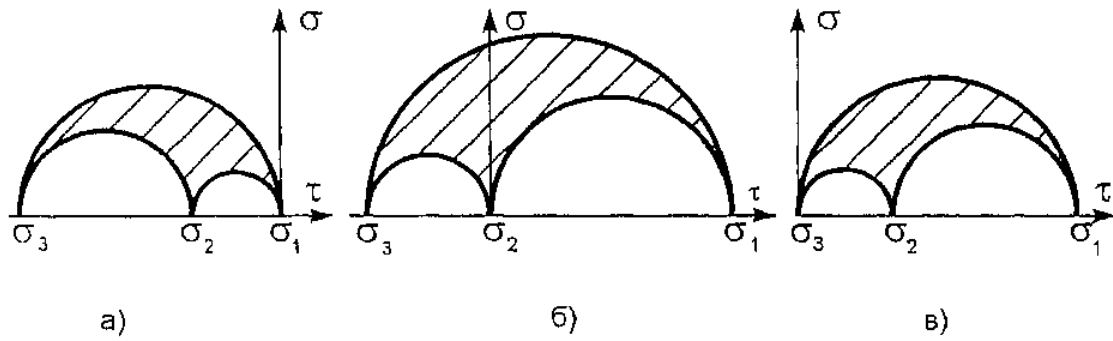


Рис. 8.4

координатным площадкам и лежат на окружности (на самом деле точка A_2 лежит на нижней половине окружности на втором конце диаметра, проходящего через точку A_1 , но в силу принятого выше соглашения изображаем ее так, как указано на рисунке). Хорда A_1A_2 параллельна оси абсцисс. Следовательно, центр окружности $O_3(\sigma_{12}, 0)$ лежит в пересечении перпендикуляра AO_3 , опущенного из середины отрезка A_1A_2 на ось абсцисс. Очевидно, радиус окружности $O_3A_1 = \tau_{12}$. Главные напряжения σ_1 и σ_2 есть точки пересечения окружности с осью абсцисс. ■

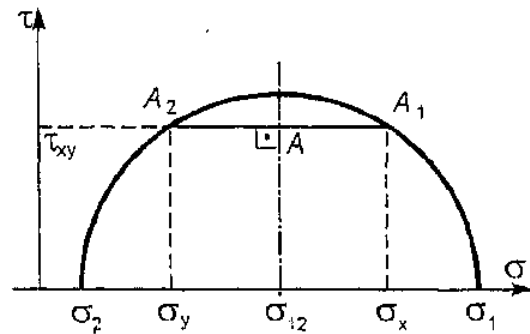


Рис. 8.5

Пример 8.3. Найти главные напряжения и максимальные касательные напряжения в точке поперечного сечения стержня в общем случае нагружения.

Решение. В этом общем случае нагружения бруса в каждой точке поперечного сечения имеет место частный случай плоского напряженного состояния (см. утверждения 1.2 и 4.2, а также аксиомы 8.3—8.5 (см. § 5,2 и 5.3). А именно, направляя ось Oy по линии действия вектора касательных напряжений (см. также (6.4)), получим:

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_x = \tau_{xy}j = \tau^{M_z} + \tau^{M_y} + \tau^{M_k}, \quad \tau = \tau_{xy}. \quad (8.40)$$

Тогда из (8.38), (8.12) и (8.39) найдем:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \geq 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq 0,$$

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{\sigma_3}{\tau}. \quad \blacksquare \quad (8.41)$$

Пример 8.4. Для тензора напряжений (измеряемого в мегапаскалях)

$$\sigma_x = 20, \quad \sigma_y = 20, \quad \sigma_z = 120, \quad \tau_{xy} = 40, \quad \tau_{xz} = 60, \quad \tau_{yz} = 60$$

найти:

а) вектор напряжений на площадке с нормалью $\nu = (1/3, 0, 2/3)$;

б) главные напряжения и главные площадки;

в) максимальное и главные касательные напряжения, а также координаты нормальных векторов соответствующих им площадок в исходной системе координат;

г) координаты нормального вектора октаэдрической площадки в исходной системе координат и соответствующие напряжения;

д) удельные потенциальные энергии изменения объема и формоизменения, а также полную потенциальную энергию.

В расчетах принять: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$.

Решение. а). Матрица напряжений в данном случае имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 20 & 60 \\ 60 & 60 & 120 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора напряжений на заданной площадке находим, используя (8.3):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 20 & 60 \\ 60 & 60 & 120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40,7 \\ 50,3 \\ 100 \end{pmatrix},$$

т.е. $\rho^y = (40,7; 50,3; 100)$.

б). Записываем характеристическое уравнение (8.7):

$$\begin{vmatrix} 20 - \sigma & 40 & 60 \\ 40 & 20 - \sigma & 60 \\ 60 & 60 & 120 - \sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3 + 160\sigma^2 + 72000\sigma = \\ = -\sigma(\sigma^2 - 160\sigma - 72000) = 0.$$

Его корни следующие: $\sigma_k = 0,180, -20$. Отсюда получаем главные напряжения (см. (8.9)):

$$\sigma_1 = 180, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -20.$$

Для проверки находим след матрицы и сумму главных напряжений (они должны быть равны первому инварианту тензора напряжений, см. (8.7) и (8.10)):

$$I_{1\sigma} = 20 + 20 + 120 = 180 + 0 - 20.$$

Определяем частные нетривиальные решения однородных систем уравнений (8.8) (ниже выписаны матрицы систем; решение проводится методом Гаусса):

$$- \sigma = \sigma_1 :$$

$$(S - \sigma_1 E) = \begin{pmatrix} -160 & 40 & 60 \\ 40 & -160 & 60 \\ 60 & 60 & -60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & -10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi_1 = (1, 1, 2)^T;$$

$$- \sigma = \sigma_2 :$$

$$(S - \sigma_2 E) = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 40 & 20 & 60 \\ 60 & 60 & 120 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi_2 = (0, 1, -1)^T;$$

$$- \sigma = \sigma_3 :$$

$$(S - \sigma_3 E) = \begin{pmatrix} 40 & 40 & 60 \\ 40 & 40 & 60 \\ 60 & 60 & 140 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi_3 = (1, -1, 0)^T.$$

Проводя теперь нормировку, получаем единичные нормальные векторы v_k главных площадок:

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right), \quad v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

в). Максимальные касательные напряжения вычисляем, используя (8.12) и полученные выше результаты:

$$\tau_{13} = \frac{180 + 20}{2} = 100, \quad \tau_{23} = \frac{0 + 20}{2} = 10, \quad \tau_{12} = \frac{180 - 0}{2} = 90,$$

$$\tau_{\max} = \max(\tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{12}) = 100.$$

Формируя матрицу перехода от исходного базиса к базису v_1, v_2, v_3

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

вычисляем координатные столбцы $\xi_{13}, \xi_{23}, \xi_{12}$ в исходном базисе нормальных векторов v_{13}, v_{23}, v_{12} соответствующих площадок (координаты этих векторов в базисе v_1, v_2, v_3 указаны в (8.13)):

$$\xi_{13} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi_{23} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\xi_{12} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$v_{13} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}, 2), \quad v_{23} = \pm \frac{1}{2} (1, 0, -1),$$

$$v_{12} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} (1, 1 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}).$$

г). Координатный столбец ξ_0 нормального вектора v_0 к октаэдрической площадке и сам вектор находим аналогично предыдущему пункту, учитывая определение 8.4:

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v_0 = \frac{1}{3\sqrt{2}} (1 + \sqrt{3}, 1, 2 - \sqrt{3}).$$

Поскольку главные напряжения уже найдены, для определения напряжений на октаэдрической площадке удобнее воспользоваться их выражениями в (8.15) через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и главные касательные напряжения:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} I_{1\sigma} = 53,3; \quad \tau_0 = \frac{2}{3} \sqrt{100^2 + 10^2 + 90^2} = 89,9;$$

$$p_0 = \frac{\sqrt{180^2 + 0^2 + (-20)^2}}{\sqrt{3}} = 105.$$

д). Для вычисления удельных потенциальных энергий изменения объема и формоизменения используем их связь с напряжениями на октаэдрической площадке (см. (8.29)):

$$u_0 = \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot 0,3)}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11}} (53,3 \cdot 10^6)^2 = 8,12 \text{ кДж/м}^3;$$

$$u_\phi = \frac{3 \cdot (1 + 0,3)}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11}} (89,9 \cdot 10^6)^2 = 75,0 \text{ кДж/м}^3.$$

Полную удельную потенциальную энергию находим по формуле (8.28):

$$u = 8,12 + 75,0 = 83,1 \text{ кДж/м}^3.$$

Пример 8.5. Применительно к тензору напряжений (измеряемому в мегапаскалях; остальные напряжения равны нулю)

$$\sigma_x = -200, \quad \tau_{xy} = 120, \quad \sigma_y = 100$$

выполнить первые два задания предыдущего примера, полагая $v = (1/3, -2/3, 0)$.

Решение. В этом случае имеет место плоское напряженное состояние (НС). Поэтому в записях векторов и матриц нулевые члены опускаем (см. пример 8.2).

а). Аналогично предыдущему примеру находим матрицу напряжений

$$S = \begin{pmatrix} -200 & 120 \\ 120 & 100 \end{pmatrix},$$

координаты вектора напряжений на заданной площадке

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -200 & 120 \\ 120 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 147 \\ 26,7 \end{pmatrix}$$

и сам вектор напряжений $P_v = -(147; 26,7)$.

б). При определении главных напряжений и площадок воспользуемся готовыми результатами, полученными в примере 8.2 (см. (8.38)):

$$\sigma_h = \frac{-200 + 100}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-200 - 100)^2 + 4 \cdot 120^2} = -50 \pm 30 \sqrt{41}.$$

Следовательно, $\sigma_1 = 142$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -242$.

Углы между осью Ox и главными площадками находим с помощью (8.39):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{142 - (-200)}{120} = 2,85; \quad \alpha_1 = 70,7^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{-242 - (-200)}{120} = -0,350; \quad \alpha_3 = -19,3^\circ. \blacksquare$$

Пример 8.6. Найти деформации и коэффициент изменения объема для напряженного состояния, указанного в примере 8.4, полагая $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$.

Решение. Предварительно вычисляем модуль сдвига, используя (1.9):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2 \cdot (1+0,3)} = 0,808 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

Деформации находим по формулам (8.22):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [20 - 0,3 \cdot (20 + 120)] = -0,105 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [120 - 0,3 \cdot (20 + 20)] = 0,514 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{40}{2 \cdot 0,808 \cdot 10^5} = 0,248 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \frac{60}{2 \cdot 0,808 \cdot 10^5} = 0,371 \cdot 10^{-3}.$$

Коэффициент объемного расширения может быть вычислен либо по формуле (8.21), либо с использованием (8.24). Остановимся на первом варианте:

$$\theta = 2 \cdot (-0,105 \cdot 10^{-3}) + 0,514 \cdot 10^{-3} = 0,304 \cdot 10^{-3}. \blacksquare$$

Теории прочности

Поскольку свойства материалов известны только для простейших напряженно-деформированных состояний (НДС) (см. гл. 1, 4 и табл. П.2), то используются так называемые теории прочности.

Определение 8.12. *Теорией прочности (теорией предельных состояний)* называется аксиоматическое задание критерия эквивалентности пространственного и одноосного напряженных состояний с нормальным напряжением

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_{\text{экр}}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad (8.42)$$

где σ_1, σ_2 и σ_3 — главные напряжения данного напряженного состояния. ■

Очевидно, однозначной зависимости (8.42) не может существовать. По ее заданию и различаются теории прочности. Наиболее распространенными из них являются следующие.

I. Теория наибольших нормальных напряжений (теория Галилея). Эквивалентные напряжения находятся из условия равенства

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1. \quad (8.43)$$

Первая теория может применяться для хрупких материалов при $\sigma_3 \geq 0$. ■

II. Теория наибольших линейных деформаций (теория Мариотта—Сен-Венана). Эквивалентные напряжения находятся из условия равенства

$$\varepsilon_{\text{экр}} = \varepsilon_1, \quad (8.44)$$

где ε_1 и $\varepsilon_{\text{экр}}$ — главная деформация исходного напряженного состояния (НС) и линейная деформация в эквивалентном одноосном состоянии.

Из обобщенного закона Гука (8.22) в главных осях и того же закона (1.5) для одноосного НС следует равенство:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (8.45)$$

Вторая теория может применяться для хрупких материалов при $\sigma_3 < 0$. ■

III. Теория наибольших касательных напряжений (теория Кулона—Треска—Сен-Венана). Эквивалентные напряжения определяются равенством

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{экр}} \max, \quad (8.46)$$

где τ_{\max} и $\tau_{\text{экр}} \max$ — максимальные касательные напряжения в исходном и эквивалентном НС.

Отсюда с учетом равенств (8.12) и (1.8) получаем следующий критерий эквивалентности:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (8.47)$$

Третья теория применяется для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие при любых напряженных состояниях. ■

IV. Теория энергии формоизменения (теория Мизеса—Генки—Хубера). Предельным состоянием материала считается начало перехода к пластическим деформациям, которые определяются только потенциальной энергией формоизменения (см. определение 8.9). Это предположение приводит к следующему условию эквивалентности:

$$u_{\phi} = u_{\text{экр}} \phi. \quad (8.48)$$

Применяя формулы в (8.28) в главных осях для энергии формоизменения исходного и эквивалентного одноосного ($\sigma_1 \text{ экр} = \sigma_{\text{экр}}, \sigma_2 \text{ экр} = \sigma_3 \text{ экр} = 0$) НС, получим:

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (8.49)$$

Так же, как и третья, четвертая теория используется для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие при любых напряженных состояниях.

V. Теория Мора. Полагается, что пространственное НС описывается только внешними кругами Мора и на плоскости $\sigma - \tau$ существует единственная кривая Γ — огибающая всевозможных предельных кругов, т.е. кругов, полученных пропорциональным увеличением всех компонент до достижения предельного состояния (см. п. VI § П.1). Данное НС считается предельным, если его внешний круг касается Γ . Как правило, кривая Γ аппроксимируется прямой, касающейся предельных кругов для двух одноосных состояний (см. пример 8.1): сжатие и растяжение. В результате получается следующий критерий:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - k\sigma_3, \quad k = \frac{\sigma_{\text{пр.р}}}{\sigma_{\text{пр.с}}}. \quad (8.50)$$

Эта теория применяется как для хрупких, так и для пластичных материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие при любых напряженных состояниях. ■

Наиболее часто на практике применяются последние три теории.

Пример 8.7. Для напряженного состояния, указанного в примере 8.4, найти эквивалентные напряжения по всем пяти теориям прочности, полагая $\nu = 0,3$ и k в (8.50) равным 0,7.

Решение. Учитывая вычисленные в примере 8.4 главные напряжения, из (8.43), (8.45), (8.47), (8.49) и (8.50) получаем (напряжения измеряются в мегапаскалях):

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{I}} = 180; \quad \sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = 180 - 0,3 \cdot (0 - 20) = 186;$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = 180 - (-20) = 200;$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(180 - 0)^2 + (180 + 20)^2 + (0 + 20)^2} = 191;$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{V}} = 180 - 0,7 \cdot (-20) = 194. \blacksquare$$

Задачи

В задачах 8.1—8.13 для заданных тензоров напряжений (измеряются в мегапаскалях; неуказанные напряжения равны нулю) найти;

— вектор напряжений $p_v = (X, Y, Z)$ на площадке с нормалью $v = (l, m, n)$;

— главные напряжения и нормальные векторы v_k главных площадок;

— максимальное τ_{max} и главные касательные напряжения, а также координаты нормальных векторов v_{13} , v_{23} , v_{12} соответствующих им площадок в исходной системе координат;

— координаты нормальных векторов v_0 октаэдрических площадок в исходной системе координат и соответствующие напряжения;

— удельные потенциальные энергии изменений объема и формы, а также полную потенциальную энергию.

В расчетах принять: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$.

8.1. $\sigma_x = 60$, $\tau_{xy} = -20$, $\tau_{xz} = 20$, $\sigma_y = 50$, $\sigma_z = 70$,

$v = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$.

8.2. $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 3$, $v = (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$.

8.3. $\sigma_x = -40$, $\tau_{xy} = 20$, $\sigma_y = 60$, $\sigma_z = 20$,

$v = (-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$.

- 8.4. $\sigma_x = 10, \tau_{xy} = 2, \sigma_y = 8, \nu = (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$.
- 8.5. $\sigma_x = 120, \tau_{xy} = 40, \sigma_y = 80, \sigma_z = 100, \nu = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$,
- 8.6. $\sigma_x = 110, \tau_{xy} = 80, \tau_{xz} = 20, \sigma_y = 50, \tau_{yz} = -100, \sigma_z = 20,$
 $\nu = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$.
- 8.7. $\sigma_x = 70, \tau_{xy} = 10, \tau_{xz} = 10, \sigma_y = 70, \tau_{yz} = 10, \sigma_z = 70,$
 $\nu = (0, -1/2, \sqrt{3}/2)$.
- 8.8. $\sigma_x = 10, \tau_{xy} = -30, \tau_{xz} = -10, \sigma_y = 10, \tau_{yz} = 10, \sigma_z = 50,$
 $\nu = (0, 1/2, -\sqrt{3}/2)$.
- 8.9. $\sigma_x = 80, \tau_{xy} = 40, \tau_{xz} = -10, \sigma_y = -70, \tau_{yz} = 40, \sigma_z = 80,$
 $\nu = (1/2, 0, \sqrt{3}/2)$.
- 8.10. $\sigma_x = 30, \tau_{xy} = 60, \sigma_y = -30, \nu = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$.
- 8.11. $\sigma_x = 100, \tau_{xy} = 25, \sigma_y = 50, \nu = (\sqrt{3}/2, -1/2, 0)$.
- 8.12. $\sigma_x = 22,5, \tau_{xy} = 65, \sigma_y = 52,5, \nu = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)$.
- 8.13. $\sigma_x = 100, \tau_{xy} = 50, \sigma_y = 200, \nu = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0)$.

8.14—8.26. Найти деформации и коэффициент изменения объема для напряженных состояний, указанных соответственно в задачах 8.1—8.13, полагая $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$.

В задачах 8.27—8.40 для заданных напряженных состояний (напряжения выражены в мегапаскалях; неуказанные напряжения равны нулю) найти эквивалентные напряжения по всем пяти теориям прочности, полагая $\nu = 0,3$ и k в (8.50) равным 0,7.

- 8.27. $\sigma_x = -10, \tau_{xy} = -20, \tau_{xz} = 20, \sigma_y = -10, \tau_{yz} = 20, \sigma_z = 30$.
- 8.28. $\sigma_x = 50, \tau_{yz} = 50$.
- 8.29. $\sigma_x = 10, \tau_{xy} = 100, \tau_{xz} = 30, \sigma_y = 10, \tau_{yz} = 20, \sigma_z = 10$.
- 8.30. $\sigma_x = 40, \tau_{xy} = 20, \tau_{xz} = -60, \sigma_y = 10, \tau_{yz} = -30, \sigma_z = 90$.
- 8.31. $\sigma_x = 30, \tau_{xy} = -20, \tau_{xz} = 60, \sigma_y = 60, \tau_{yz} = 30, \sigma_z = -20$.
- 8.32. $\sigma_x = 200, \tau_{xy} = 200, \sigma_y = 400, \sigma_z = -100$.
- 8.33. $\sigma_x = 300, \tau_{xy} = 200, \sigma_y = -100, \sigma_z = 200$.
- 8.34. $\sigma_x = 10, \tau_{xy} = 40, \sigma_y = 10, \tau_{yz} = 20, \sigma_z = 40$.
- 8.35. $\sigma_x = 10, \tau_{xy} = 20, \tau_{xz} = 20, \sigma_y = -30, \tau_{yz} = -60, \sigma_z = -40$.
- 8.36. $\sigma_x = 20, \tau_{xy} = 80, \tau_{xz} = 40, \sigma_y = 90, \sigma_z = 190$.
- 8.37. $\sigma_x = 50, \tau_{xy} = -20, \sigma_y = 80$.
- 8.38. $\sigma_x = 120, \tau_{xy} = -90, \sigma_y = 67,5$.
- 8.39. $\sigma_x = \tau_{xy} = \sigma_y = 100$.

8.40. $\sigma_x = 25$, $\tau_{xy} = 60$, $\sigma_y = 144$.

8.41. В точке тела имеет место НС одноосного растяжения с напряжениями σ_x . Используя теорию прочности III, определить касательные напряжения τ_{xy} , которые необходимо дополнительно приложить для того, чтобы коэффициент запаса прочности в полученном плоском НС был в два раза меньше исходного.

8.42. В точке тела имеет место плоское НС с главными напряжениями $\sigma_1 = 2\sigma_2$. Вычислить допускаемые значения этих напряжений по теории прочности IV, если $[\sigma]_p = 120$ МПа. Определить, как изменится коэффициент запаса прочности, если дополнительно приложить третье главное напряжение $\sigma_3 = \sigma_2$.

8.43. Даны напряжения в поперечном сечении стержня $\sigma_x = \sigma = 120$ МПа, $\tau_{xy} = \tau = 80$ МПа. Вычислить главные напряжения и провести проверку на прочность по теории прочности V, полагая $[\sigma]_p = 160$ МПа, $[\sigma]_c = 320$ МПа.

8.44. Стальной прямоугольный брусок сечения 100×50 мм без зазора вставлен между двумя параллельными недеформируемыми стенками и по торцам нагружен равномерным давлением σ . По теории прочности IV вычислить допускаемое давление. В расчетах принять: $[\sigma] = 160$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$.

8.45. Известны два главных напряжения: $\sigma_1 = 65$ МПа, $\sigma_2 = 15$ МПа. Каково должно быть наибольшее сжимающее третье главное напряжение σ_3 для того, чтобы коэффициент запаса прочности равнялся 2. Расчеты провести для двух теорий прочности: III и IV, положив $\sigma_{др} = 240$ МПа.

8.46. Имеется два варианта пространственных НС, заданных главными напряжениями: а) $\sigma_1 = 80$ МПа, $\sigma_2 = 60$ МПа, $\sigma_3 = 20$ МПа; б) $\sigma_1 = 80$ МПа, $\sigma_2 = 60$ МПа, $\sigma_3 = 40$ МПа. Для какого из них эквивалентные по теории прочности IV напряжения будут больше?

8.47. Известны два главных напряжения $\sigma_2 = \sigma_3 = -100$ МПа для пластичного материала. Чему должно быть равно третье главное сжимающее напряжение σ для того, чтобы эквивалентное по теории прочности IV напряжение было равно нулю?

8.48. Даны главные напряжения: $\sigma_1 = 20$ МПа; $\sigma_2 = 10$ МПа; $\sigma_3 = -5$ МПа. Определить эквивалентные напряжения по теориям прочности III и IV.

Глава 9
РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ
ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В соответствии с принципом суперпозиции (утверждение П.2) может быть введено следующее понятие.

Определение 9.1. НДС стержня называется *сложным*, если в его поперечном сечении отличны от нуля как нормальные, так и касательные напряжения. ■

Как правило, сложное НДС вызвано сочетанием простейших видов деформации: растяжения-сжатия, кручения и изгиба. Кроме того, о нем необходимо говорить при учете касательных напряжений от перерезывающей силы при изгибе. При сложном НДС, очевидно, могут быть отличны от нуля все внутренние силовые факторы.

При расчетах на прочность стержней, находящихся в сложном напряженном состоянии, σ_{\max} (см. п. VI § П.1) не может быть выбрано так просто, как при растяжении-сжатии, кручении или изгибе (см. гл. 1, 4 и 5, 6). Поэтому используются теории прочности, указанные в гл. 8.

Для стержня из (8.43), (8.45), (8.47), (8.49) и (8.50) с учетом результатов примера 8.3 вытекают следующие формулы для эквивалентных напряжений (римские цифры в верхних индексах соответствуют номеру теории):

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{I}} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (9.1)$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (9.2)$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (9.3)$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}; \quad (9.4)$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{V}} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (9.5)$$

Алгоритм расчета стержней и стержневых систем при сложном НДС, в общем, аналогичен соответствующим алгоритмам для простейших НДС и заключается в следующем.

1. Строим эпюры всех внутренних силовых факторов (см. § 7.1, 7.3) и выбираем опасное сечение.

2. Проводим проектировочный расчет на прочность. В выбранном сечении находим распределение напряжений только от изгибающих и крутящих моментов (строим соответствующие эпюры) и выбираем точку, в которой по заданной теории прочности $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{экв max}}$ (см. гл. 8). С помощью неравенства (П.27) подбираем размеры сечения.

3. В поверочном расчете дополнительно учитываем напряжения от нормальной и перерезывающих сил. Сначала оцениваем вклад каждого из них в напряженное состояние. Если их максимумы составляют менее 5% от допускаемого напряжения, то принимаем размеры, определенные в проектировочном расчете. В противном случае находим $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{экв max}}$ с учетом всех силовых факторов. Если условия проверки (см. п. VI § П.1) выполняются, то на этом расчет заканчивается. Если же это не так, то увеличиваем размер сечения и заново определяем $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{экв max}}$ и повторяем проверку. Последнее действие может проводиться неоднократно. Однако очевидно, что число таких итераций конечно.

Отметим, что в общем случае выбор опасного сечения и расчетной точки связан с решением очень сложной задачи на наибольшие значения для функции трех переменных $\sigma_{\text{экв max}} = f(s, y, z)$, где s — продольная координата вдоль осей брусев. Поэтому обычно ограничиваются рассмотрением нескольких “подозрительных” сечений и точек.

Пример 9.1. По теориям прочности II, III и IV определить диаметр d круглого поперечного сечения рамы, изображенной на рис. 9.1, а. В расчетах принять: $l = 0,3$ м, $P = 150$ Н, $[\sigma] = 160$ МПа, $\nu = 0,3$.

Решение. 1. Рама статически определяемая. Строим (см. § 7.1) эпюры изгибающих M_z , M_y и крутящих M_k мо-

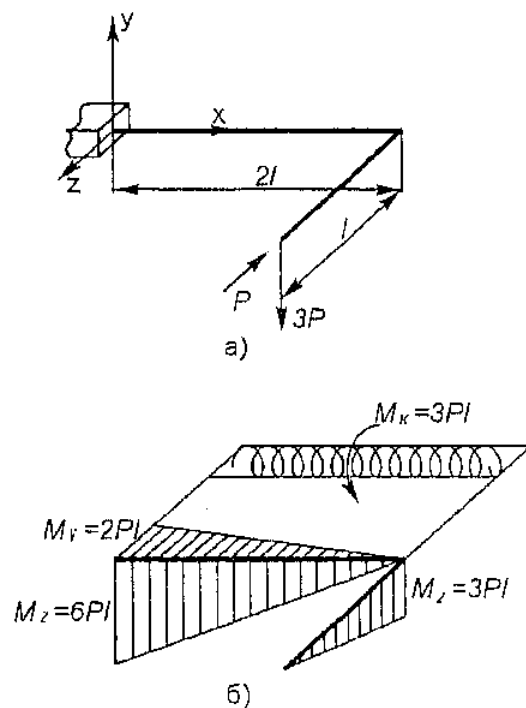


Рис. 9.1

ментов в раме (рис. 9.1, б). Опасное сечение расположено в заделке, где

$$M_z = 6Pl, \quad M_y = 2Pl, \quad M_k = 3Pl.$$

2. Проводим проектировочный расчет. Для круговых и кольцевых (в том числе и тонкостенных) сечений любые центральные оси Syz являются главными, и $J_y = J_z = J$, $W_y = W_z = W = W_k/2$ (табл. П.3, П.4 и П.6). Поэтому при проектировочном расчете для них удобно использовать эквивалентный изгибающий момент $M_{\text{экр}}$, выражения для которого по пяти теориям прочности вытекают из следствия 6.1, равенства для τ_{max} в (4.7) и формул (8.43), (8.45), (8.47), (8.49) и (8.50):

$$M_{\text{экр}}^I = \frac{1}{2} \sqrt{M_z^2 + M_y^2} + \frac{1}{2} \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}, \quad (9.6)$$

$$M_{\text{экр}}^{II} = \frac{1-\nu}{2} \sqrt{M_z^2 + M_y^2} + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}, \quad (9.7)$$

$$M_{\text{экр}}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}, \quad (9.8)$$

$$M_{\text{экр}}^{IV} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75M_k^2}, \quad (9.9)$$

$$M_{\text{экр}}^V = \frac{1-k}{2} \sqrt{M_z^2 + M_y^2} + \frac{1+k}{2} \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}. \quad (9.10)$$

При этом используется условие прочности

$$\sigma_{\text{экр max}} = \frac{M_{\text{экр}}}{W} \leq [\sigma]. \quad (9.11)$$

Для рассматриваемого примера получаем:

$$M_{\text{экр}}^{II} = \left(\frac{1-0,3}{2} \sqrt{6^2 + 2^2} + \frac{1+0,3}{2} \cdot 7 \right) Pl = 6,76Pl;$$

$$M_{\text{экр}}^{III} = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} Pl = 7Pl;$$

$$M_{\text{экр}}^{IV} = \sqrt{6^2 + 2^2 + 0,75 \cdot 3^2} Pl = 6,83Pl.$$

Учитывая, что $W = \pi d^3/32$, из (9.11) получаем

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{ЭКВ}}}{\pi [\sigma]}}$$

Следовательно, диаметры поперечного сечения по теориям прочности II, III и IV определяются так:

$$Pl = 150 \cdot 0,3 = 45 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad d^{\text{II}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6,76 \cdot 45}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0268 \text{ м};$$

$$d^{\text{III}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7 \cdot 45}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0272 \text{ м}; \quad d^{\text{IV}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6,83 \cdot 45}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0269 \text{ м}.$$

Принимаем $d^{\text{II}} = 2,68 \text{ см}$, $d^{\text{III}} = 2,72 \text{ см}$, $d^{\text{IV}} = 2,69 \text{ см}$. ■

Пример 9.2. Элементы рамы, изображенной на рис. 9.1, а, имеют поперечные сечения в виде прямоугольника со сторонами $2b$ и b , причем вертикальная плоскость рамы является плоскостью наибольшей жесткости сечения. На основании теории прочности III определить размер b поперечного сечения. В расчетах принять: $l = 0,3 \text{ м}$, $P = 150 \text{ Н}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение. 1. Опасное сечение рамы и значения изгибающих M_z , M_y и крутящего момента M_k определены в примере 9.1.

2. Находим моменты инерции поперечного сечения элементов рамы (см. табл. П.3): $J_z = 2b^4/3$, $J_y = b^4/6$, и с учетом знаков изгибающих моментов ($M_z = -6Pl$, $M_y = -2Pl$) уравнение нейтральной линии (см. (6.2) и (6.3)):

$$n: \quad \sigma = -\frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z = \frac{Pl}{b^4} (9y + 12z) = 0; \quad n: \quad y = -\frac{4}{3} z.$$

Эпюры нормальных σ и касательных τ от крутящего момента (см. табл. П.4, П.5) напряжений в опасном сечении рамы представлены на рис. 9.2. Из их совместного рассмотрения заключаем, что расчет сечения на прочность следует производить по трем опасным точкам: A ($\tau_A = \tau_{\text{max}}$), D ($\sigma_D = \sigma_{\text{max}}$) и B ($\tau_B = \gamma \tau_{\text{max}}$, $\gamma = 0,795$). Учитывая, что $W_k = 2\alpha b^3$ ($\alpha = 0,246$), получаем:

— точка A ($y = 0$, $z = b/2$):

$$\sigma_A = \left(9 \cdot 0 + 12 \cdot \frac{b}{2} \right) \frac{Pl}{b^4} = \frac{6Pl}{b^3},$$

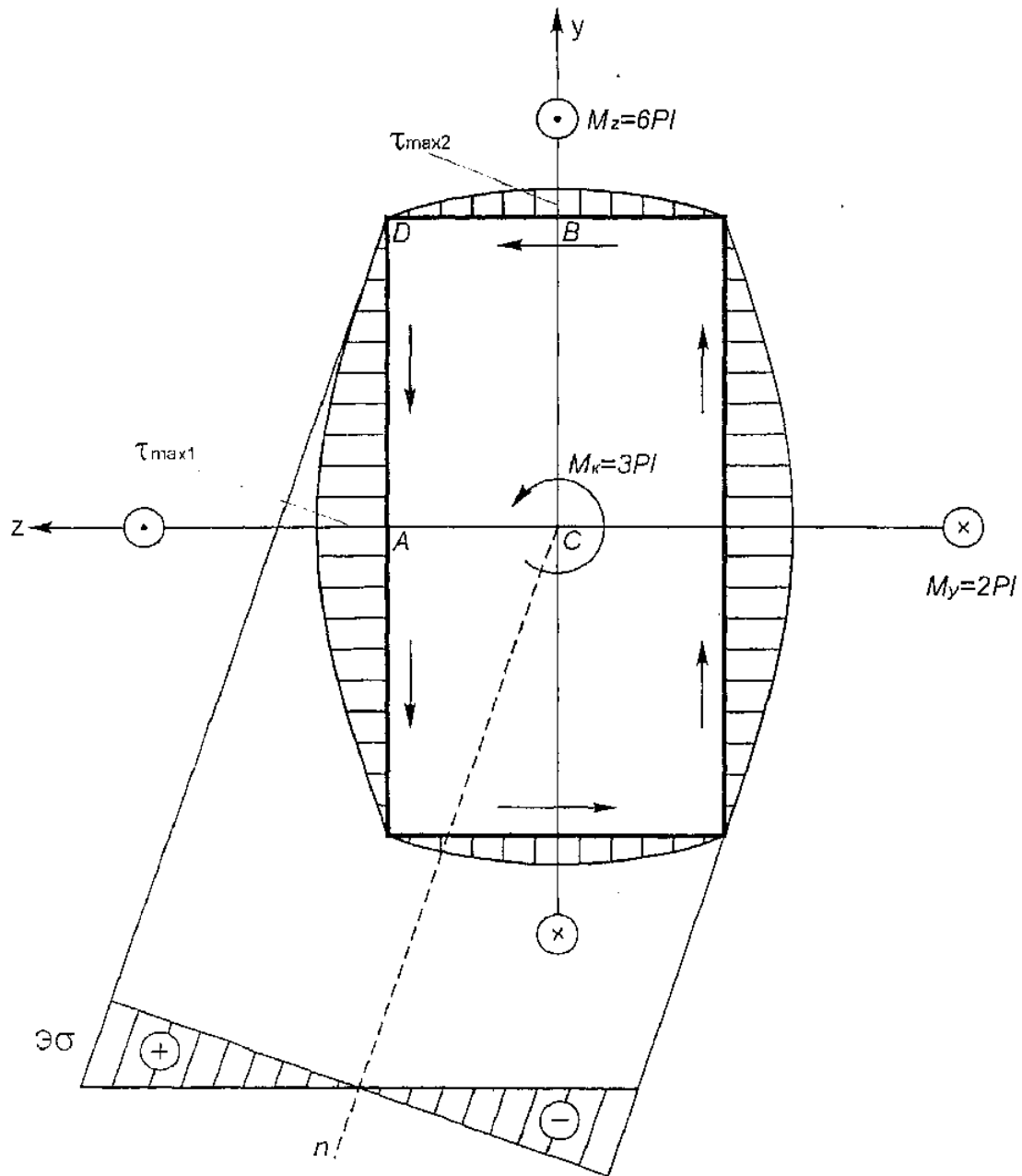


Рис. 9.2

$$\tau_A = \frac{M_K}{W_K} = \frac{3Pl}{0,492b^3} = 6,10 \frac{Pl}{b^3}, \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^A = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = 13,6 \frac{Pl}{b^3};$$

— точка D ($y = b, z = b/2$):

$$\tau_D = 0, \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^D = \sigma^D = \left(9 \cdot b + 12 \cdot \frac{b}{2} \right) \frac{Pl}{b^4} = 15 \frac{Pl}{b^3};$$

— точка B ($y = b, z = 0$):

$$\sigma_B = (9 \cdot b + 12 \cdot 0) \frac{Pl}{b^4} = \frac{9Pl}{b^3}, \quad \tau_B = \gamma\tau_A = 4,85 \frac{Pl}{b^3},$$

$$\sigma_{\text{экв}}^B = \sqrt{\tau_B^2 + 4\tau_B^2} = 13,2 \frac{Pl}{b^3}.$$

Таким образом, наиболее опасной точкой является точка D .
Из условия прочности

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{экв}}^D = 15 \frac{Pl}{b^3} \leq [\sigma]$$

находим требуемый размер:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{15Pl}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{15 \cdot 150 \cdot 0,3}{160 \cdot 10^6}} = 0,0162 \text{ м.}$$

Принимаем $b = 1,62$ см. ■

Пример 9.3. Элементы рамы, изображенной на рис. 9.1, a , имеют тонкостенное коробчатое поперечное сечение со сторонами $2b$ и b при толщине его стенки δ . Плоскость наибольшей жесткости сечения совпадает с вертикальной плоскостью рамы. На основании теории прочности III определить размер поперечного сечения b . Провести весовой анализ для рам указанного, круглого и прямоугольного сечений. В расчетах принять: $l = 0,3$ м; $P = 150$ Н; $[\sigma] = 160$ МПа; $\delta = 2$ мм.

Решение. 1. Опасное сечение рамы и значения изгибающих M_z , M_y и крутящего M_K моментов определены в примере 9.1.

2. Находим моменты инерции поперечного сечения элементов рамы (см. табл. П.3)

$$J_z = 2 \cdot \left[\frac{\delta (2b)^3}{12} + b\delta \cdot b^2 \right] = 3,33b^3\delta,$$

$$J_y = 2 \cdot \left[\frac{\delta b^3}{12} + 2b\delta \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] = 1,17b^3\delta$$

и с учетом знаков изгибающих моментов (см. пример 9.2) уравнение нейтральной линии

$$n: \sigma = -\frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z = (1,80y + 1,71z) \frac{Pl}{b^3\delta} = 0; \quad n: y = -0,950z.$$

Эпюры нормальных σ и касательных τ от крутящего момента (см. табл. П.4) напряжений в опасном сечении рамы представлены на рис. 9.3. Из их совместного рассмотрения заключаем, что наиболее опасной точкой является D ($y = b$, $z = b/2$), так как

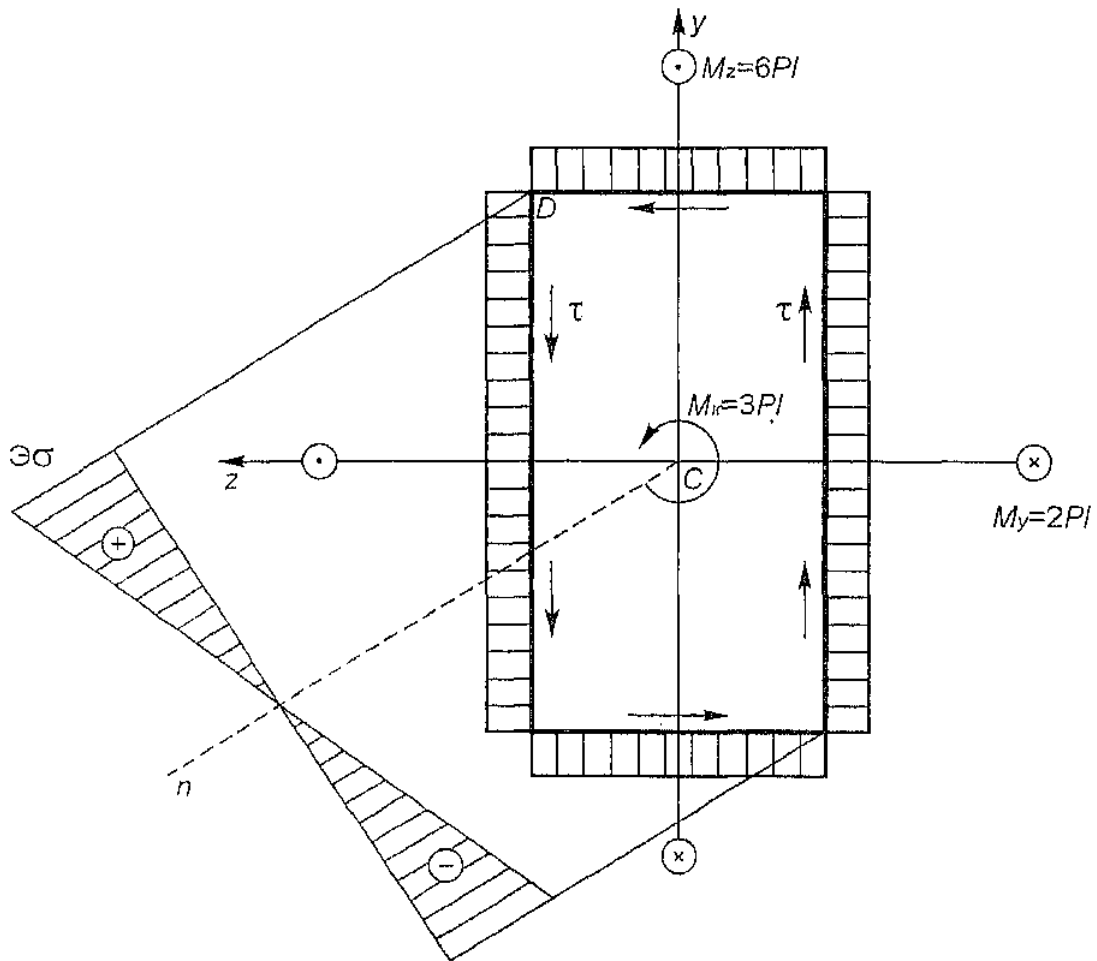


Рис. 9.3

$\sigma_D = \sigma_{\max}$, а касательное напряжение τ равномерно распределено по нормали к средней линии поперечного сечения. Вычисляя момент сопротивления кручению $W_K = 2F_K \delta = 4b^2 \delta$, получаем

$$\sigma_D = \left(1,80 \cdot b + 1,71 \cdot \frac{b}{2} \right) \frac{Pl}{b^3 \delta} = 2,66 \frac{Pl}{b^2 \delta},$$

$$\tau_D = \frac{M_K}{W_K} = \frac{3Pl}{2F_K \delta} = \frac{3Pl}{4b^2 \delta} = 0,75 \frac{Pl}{b^2 \delta},$$

$$\sigma_{\text{экв}}^D = \frac{Pl}{b^2\delta} \sqrt{2,66^2 + 4 \cdot 0,75^2} = 3,05 \frac{Pl}{b^2\delta}.$$

Из условия прочности

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{экв}}^D = 3,05 \frac{Pl}{b^2\delta} \leq [\sigma]$$

получаем

$$b \geq \sqrt{\frac{3,05Pl}{\delta [\sigma]}} = \sqrt{\frac{3,05 \cdot 150 \cdot 0,3}{0,002 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0207 \text{ м.}$$

Принимаем $b = 2,07$ см.

Весовой анализ достаточно провести по площадям поперечных сечений, которые пропорциональны массам рам:

— круглое сечение (пример 9.1):

$$F = \pi (d^{\text{III}})^2 / 4 = \pi \cdot 2,72^2 / 4 = 5,81 \text{ см}^2;$$

— прямоугольное сечение (пример 9.2):

$$F = 2b^2 = 2 \cdot 1,62^2 = 5,25 \text{ см}^2;$$

— тонкостенное сечение $F = 6b\delta = 6 \cdot 2,07 \cdot 0,2 = 2,48 \text{ см}^2$.

Следовательно, более экономичным является тонкостенное сечение. ■

Пример 9.4. С использованием теории прочности III провести проектировочный и проверочный расчеты на прочность изображенной на рис. 9.4, а балки тонкостенного замкнутого сечения. В расчетах принять: $P = 120$ Н, $l = 20$ см, $b/\delta = 10$, $\sigma_p = 240$ МПа, коэффициент запаса прочности $n = 2$.

Решение. 1. Эпюры всех внутренних силовых факторов приведены на рис. 9.1, а. Очевидно, опасное сечение рамы расположено в заделке, где

$$M_z = -2Pl, \quad M_y = -Pl, \quad M_x = 0,4Pl, \quad Q_z = P, \quad Q_y = 2P, \quad N = 9P.$$

2. Проводим проектировочный расчет. В соответствии с алгоритмом при этом учитываем только напряжения от моментов. Соответствующее НС — сочетание косоугольного изгиба и кручения.

Предварительно вычисляем моменты инерции поперечного сечения балки (см. гл. 3 и табл. П.3)

$$J_z = 2 \cdot \left[b \cdot 2\delta \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^3\delta}{12} \right] = 1,17b^3\delta = 1,17 \cdot 10^3\delta^4,$$

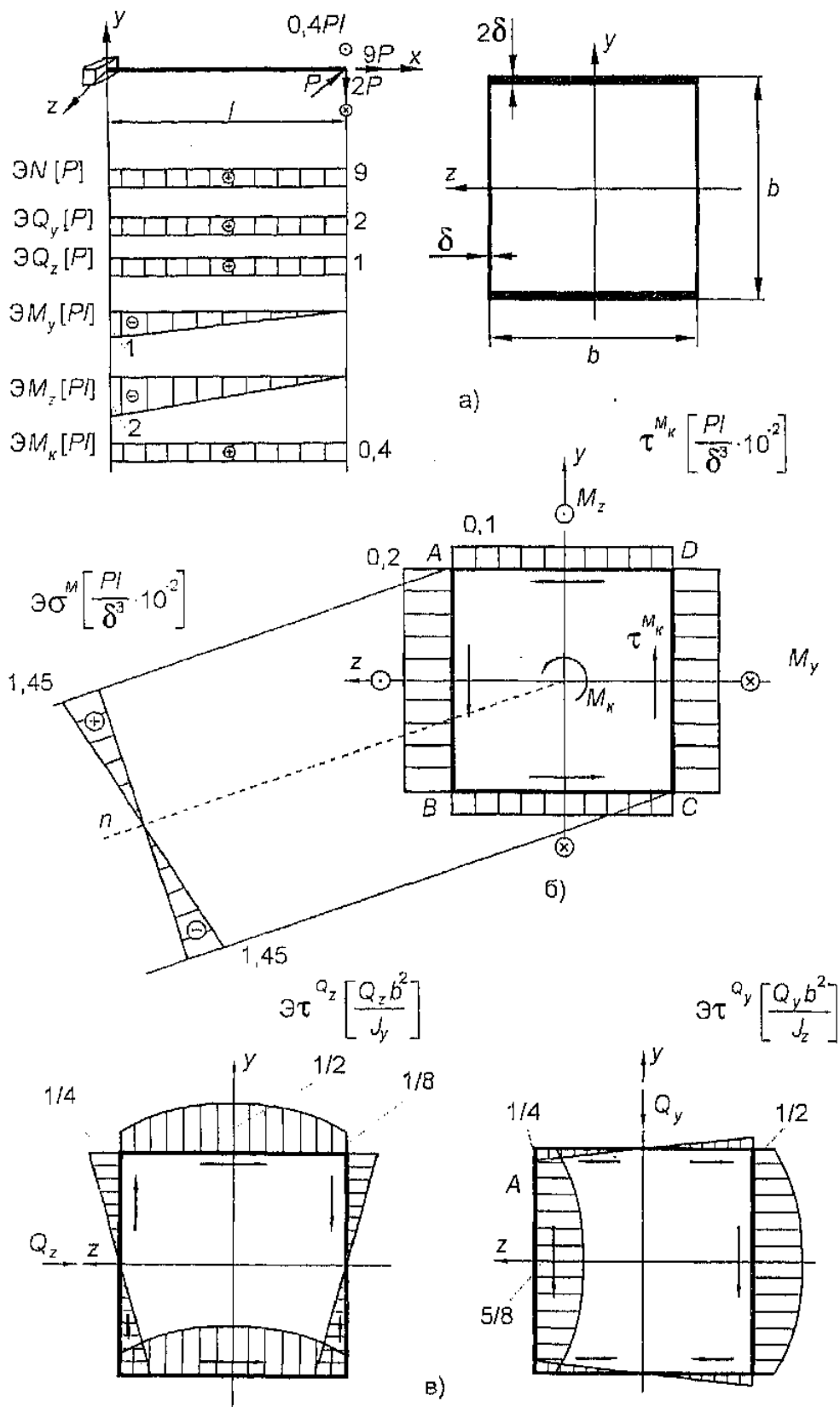


Рис. 9.4

$$J_{yy} = 2 \cdot \left[\frac{2\delta \cdot b^3}{12} + b\delta \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] = 0,833b^3\delta = 0,833 \cdot 10^3\delta^4,$$

и с учетом знаков изгибающих моментов (см. пример 9.2) уравнение нейтральной линии

$$n: \sigma = -\frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_{yy}}{J_{yy}} z = (1,71y + 1,20z) \frac{Pl}{\delta^4 \cdot 10^3} = 0; \quad n: y = -0,702z.$$

Эпюры нормальных σ^M от изгибающих моментов и касательных τ^M от крутящего момента (см. табл. П.4) напряжений в опасном сечении рамы представлены на рис. 9.4, б. Из их совместного рассмотрения заключаем, что наиболее опасной точкой является А на участке А—В ($y = b/2$, $z = b/2$), так как $\sigma_A = \sigma_{\max}$, а касательное напряжение τ равномерно распределено по нормали к контуру поперечного сечения, и на А—В толщина минимальная. Вычисляя величину $F_k = b^2 = 100\delta^2$, получаем

$$\sigma_A^M = \left(1,71 \frac{b}{2} + 1,20 \frac{b}{2} \right) \frac{Pl}{\delta^4 \cdot 10^3} = 1,45 \cdot 10^{-2} \frac{Pl}{\delta^3},$$

$$\tau_{A^k}^M = \frac{M_k}{2F_k \delta} = \frac{0,4Pl}{2F_k \delta} = \frac{0,4Pl}{2 \cdot 100\delta^3} = 0,200 \cdot 10^{-2} \frac{Pl}{\delta^3},$$

$$\sigma_{\text{экв}}^A =$$

$$= \sqrt{(\sigma_A^M)^2 + 4(\tau_{A^k}^M)^2} = \frac{Pl}{\delta^3} 10^{-2} \sqrt{1,45^2 + 4 \cdot 0,2^2} = 1,50 \cdot 10^{-2} \frac{Pl}{\delta^3}.$$

Учитывая, что $[\sigma] = \sigma_T/n = 120$ МПа, из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{экв}}^A = 1,50 \cdot 10^{-2} \frac{Pl}{\delta^3} \leq [\sigma]$$

получаем

$$\delta \geq \sqrt[3]{\frac{15,0 \cdot 10^{-3} Pl}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{15,0 \cdot 10^{-3} \cdot 120 \cdot 0,2}{120 \cdot 10^6}} = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Принимаем $\delta = 1,5$ мм, $b = 15$ мм.

3. Поверочный расчет. Прежде всего, находим напряжения от действия перерезывающих и нормальной сил. Эпюры касательных напряжений τ^{Q_y} и τ^{Q_z} от действия перерезывающих сил Q_y и Q_z представлены соответственно на рис. 9.4, а (методику их построения см. в § 5.3). Следовательно,

$$\begin{aligned}\tau_{\max}^{Q_y} &= \frac{5Q_y b^2}{8J_z} = \frac{5 \cdot 2P \cdot b^2}{8 \cdot 1,17b^3\delta} = 1,07 \frac{P}{b\delta} = \\ &= 1,07 \frac{120}{15 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = 5,70 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,70 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\max}^{Q_z} &= \frac{Q_z b^2}{2J_y} = \frac{P \cdot b^2}{2 \cdot 0,833b^3\delta} = 0,600 \frac{P}{b\delta} = \\ &= 0,600 \frac{120}{15 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = 3,20 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3,20 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Напряжения σ^N от действия нормальной силы распределены по сечению балки равномерно (см. гл. 1):

$$\begin{aligned}\sigma^N = \frac{N}{F} &= \frac{9P}{2(b \cdot \delta + b \cdot 2\delta)} = 4,5 \frac{P}{b\delta} = 4,5 \frac{120}{15 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 24,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,0 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Очевидно, σ^N составляет 20% от $[\sigma]$. Поэтому заново определяем $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{экв max}}$ уже с учетом всех силовых факторов. Поскольку дополнительный вклад в основном вносят напряжения σ^N , то и в данном случае расчетной точкой является А на участке А—В. Здесь

$$\begin{aligned}\sigma_A^M &= 1,45 \cdot 10^{-2} \frac{Pl}{\delta^3} = 1,45 \cdot 10^{-2} \frac{120 \cdot 0,2}{(1,5 \cdot 10^{-3})^3} = \\ &= 103 \cdot 10^6 \text{ Па} = 103 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_A^{M_x} &= 0,2 \cdot 10^{-2} \frac{Pl}{\delta^3} = 0,2 \cdot 10^{-2} \frac{120 \cdot 0,2}{(1,5 \cdot 10^{-3})^3} = \\ &= 14,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 14,2 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\Lambda}^{Q_y} &= \frac{Q_y b^2}{2J_z} = 0,856 \frac{P}{b\delta} = 0,856 \frac{120}{15 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 4,56 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,56 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\Lambda}^{Q_z} &= \frac{Q_z b^2}{4J_y} = 0,300 \frac{P}{b\delta} = 0,300 \frac{120}{15 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 1,60 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,60 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом знаков нормальных напряжений и направлений касательных напряжений получаем компоненты суммарного НС и эквивалентные напряжения:

$$\sigma_{\Lambda} = \sigma_{\Lambda}^M + \sigma^N = 103 + 24,0 = 127 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\Lambda} = \tau_{\Lambda}^{M_{\kappa}} + \tau_{\Lambda}^{Q_y} - \tau_{\Lambda}^{Q_z} = 14,2 + 4,56 - 1,60 = 17,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\Lambda} = \sqrt{\sigma_{\Lambda}^2 + 4\tau_{\Lambda}^2} = \sqrt{127^2 + 4 \cdot 17,2^2} = 132 \text{ МПа}.$$

Поскольку $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\Lambda}$ превышает $[\sigma]$ на 10%, то увеличиваем размеры сечения. Принимаем $\delta = 1,6$ мм, $b = 16$ мм и повторяем проверочный расчет:

$$\sigma^N = 4,5 \frac{P}{b\delta} = 4,5 \frac{120}{16 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}} = 21,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 21,1 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\Lambda}^M &= 1,45 \cdot 10^{-2} \frac{Pl}{\delta^3} = 1,45 \cdot 10^{-2} \frac{120 \cdot 0,2}{(1,6 \cdot 10^{-3})^3} = \\ &= 84,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 84,9 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\Lambda}^{M_{\kappa}} &= 0,2 \cdot 10^{-2} \frac{Pl}{\delta^3} = 0,2 \cdot 10^{-2} \frac{120 \cdot 0,2}{(1,6 \cdot 10^{-3})^3} = \\ &= 11,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11,7 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\Lambda}^{Q_y} &= 0,856 \frac{P}{b\delta} = 0,856 \frac{120}{16 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 4,01 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,01 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\tau_A^{Q_z} = 0,300 \frac{P}{b\delta} = 0,300 \frac{120}{16 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}} =$$

$$= 1,41 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,41 \text{ МПа};$$

$$\sigma_A = \sigma_A^M + \sigma^N = 84,9 + 21,1 = 106 \text{ МПа};$$

$$\tau_A = \tau_A^{M'} + \tau_A^{Q''} - \tau_A^{Q_z} = 11,7 + 4,01 - 1,41 = 14,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{экв}}^A = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = \sqrt{106^2 + 4 \cdot 14,3^2} = 110 \text{ МПа}.$$

Так как теперь $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{экв}}^A < [\sigma]$, то на этом расчет заканчиваем.

Итак, $\delta = 1,6$ мм, $b = 16$ мм. ■

Задачи

9.1. На концах вала круглого поперечного сечения приложены крутящий M_K и изгибающий M моменты. Определить диаметр d вала по теориям прочности I, II, III и IV. В расчетах принять: $M_K = 1$ кН·м, $M = 900$ Н·м, $[\sigma] = 100$ МПа, $\nu = 0,3$.

9.2. В сечениях тонкостенной трубы с радиусом поперечного сечения R и толщиной стенки δ действуют растягивающая сила P и крутящий момент $M = PR$. Труба изготовлена из листа двумя способами: 1 — края листа сварены, 2 — края листа свободны. Определить по теории прочности III отношение эквивалентных напряжений, соответствующих этим вариантам.

9.3. Найти отношение масс двух балок одинаковой длины с постоянным поперечным сечением, одно из которых круглое диаметром d , а другое — квадратное со стороной d , при условии их равнопрочности по теории прочности III. Балки нагружены на концах изгибающими M и крутящими $M_K = M/2$ моментами.

9.4. При каком соотношении между изгибающим M и крутящими M_K моментами, приложенными на концах балок, имеющих квадратное со стороной b и круглое диаметром d поперечные сечения, площади которых равны между собой, они будут равнопрочными? Балки изготовлены из одинакового материала. Сравнение провести, исходя из теории прочности IV.

9.5. Изображенная на рис. 9.5 балка имеет поперечное сечение в форме прямоугольника высоты $2b$ и ширины b . Сравнить

результаты проектировочных расчетов по теориям прочности III и IV. В расчетах принять: $P = 1$ кН; $l = 0,4$ м;

$M_k = 800$ Н·м; $[\sigma] = 300$ МПа.

9.6. Для указанной в задаче 9.5 балки рационально ориентировать поперечное сечение балки (длинная сторона сечения параллельна оси Sy или оси Sz). Для расчетов использовать теорию прочности III.

9.7. Вал круглого сечения диаметром d поддерживает шкив диаметром D и массой m (рис. 9.6). Используя теорию прочности III, определить эквивалентные напряжения в сечении $m-n$, если горизонтальные натяжения верхней и нижней частей ремня равны соответственно N_1 и N_2 . В расчетах принять: $d = 2$ см; $l = 15$ см; $D = 0,75$ м; $m = 20$ кг; $N_1 = 700$ Н; $N_2 = 100$ Н.

Указание: вес шкива учесть с помощью сосредоточенной силы $P = mg$ (см. рис. 9.6).

9.8. Вертикальная консольно заземленная труба (рис. 9.7) подвергается действию горизонтальной силы P , приложенной на расстоянии a от оси трубы. Определить на основании теории прочности III эквивалентные напряжения в стенках трубы. В расчетах принять: $P = 1$ кН; $a = 1$ м; $l = 7,5$ м; момент сопротивления изгибу $W = 150$ см³.

9.9. На вал насажены два круглых диска диаметром D_1 и D_2 , на которые действуют вертикальные силы P_1 и P_2 соответственно (рис. 9.8). Определить диаметр вала по третьей

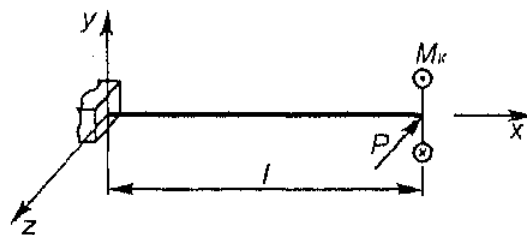


Рис. 9.5

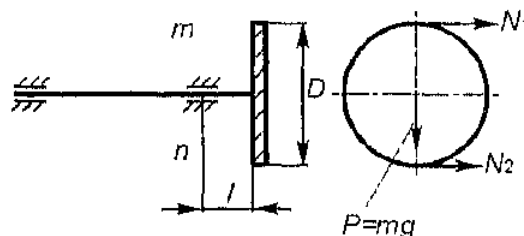


Рис. 9.6

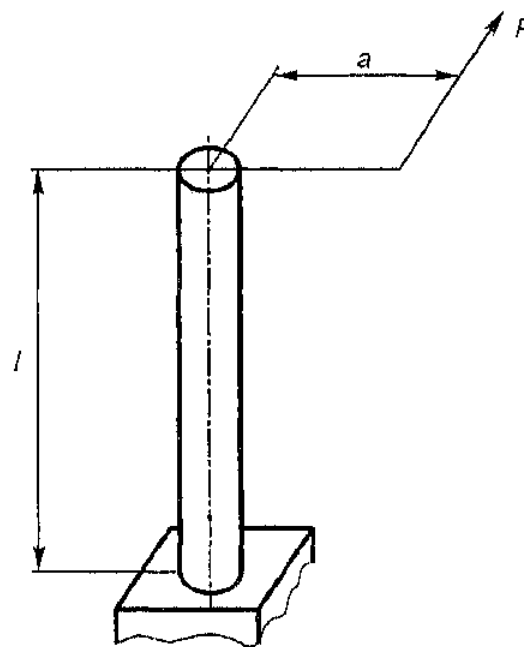


Рис. 9.7

теории прочности. В расчетах принять: $l = 1$ м; $D_1 = 20$ см; $D_2 = 50$ см; $P_1 = 5$ кН; $P_2 = 2$ кН; $[\sigma] = 500$ МПа.

9.10. К свободному краю балки (рис. 9.9) тонкостенного кольцевого поперечного сечения диаметра d и толщины δ присоединен жесткий элемент. К его свободным краям приложены силы P_1 и P_2 . По теории прочности IV определить δ . В расчетах принять: $l = 0,5$ м; $a = 15$ см; $P_1 = 500$ Н; $P_2 = 300$ Н; $d = 5$ см; $[\sigma] = 100$ МПа.

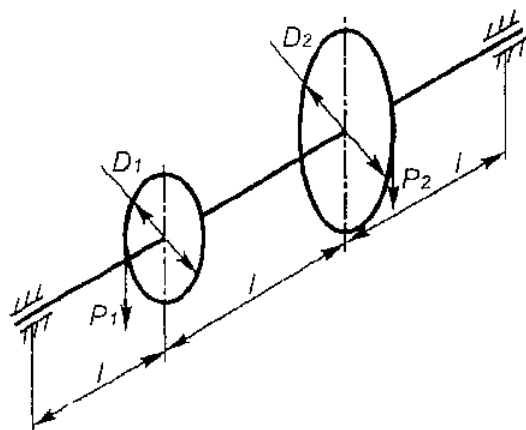


Рис. 9.8

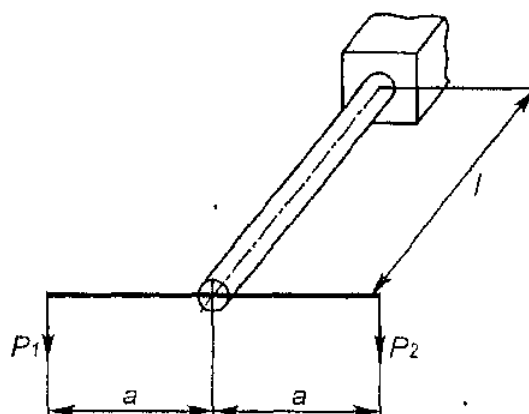


Рис. 9.9

9.11. Решить задачу 9.10 с использованием теории прочности III.

9.12. Для консольно заземленной балки длиной l , нагруженной на свободном краю крутящим моментом M и поперечной силой P , провести проектный и проверочные расчеты на прочность с использованием теорий прочности III и IV. Балка имеет поперечное квадратное сечение со стороной b . Для вычислений в расчетах принять: $M = 2Pl$; $P = 1$ кН; $l = 0,4$ м; $\sigma_p = 270$ МПа, $n = 3$.

9.13. В задаче 9.12, считая материал балки неодинаково работающим на растяжение и сжатие, а запас прочности неизвестным, определить последний при использовании теории прочности V. Дополнительно в расчетах принять: $k = [\sigma]_p / [\sigma]_c = 0,4$; $b = 4,5$ см.

9.14. К консольно закрепленной балке прямоугольного поперечного сечения $2b \times b$ на ее свободном конце приложены поперечная сила P и крутящий момент M . На основании теории прочности III провести проектный и проверочный расчеты

на прочность в двух вариантах: плоскость наибольшей жесткости сечения параллельна или перпендикулярна плоскости ее изгиба. В расчетах принять: $P = 100 \text{ Н}$; $M = 800 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $\sigma_{\text{т}} = 330 \text{ МПа}$, $n = 3$.

9.15. На вал диаметра d насажены два шкива, диаметры которых D_1 и D_2 . Усилия приводов P_1 и $P_2 = 2P_1$ направлены соответственно вертикально и горизонтально (рис. 9.10). Определить по теории прочности III наибольшее допустимое значение P_1 . В расчетах принять: $l = 0,6 \text{ м}$; $d = 2 \text{ см}$; $D_1 = 30 \text{ см}$; $D_2 = 15 \text{ см}$; $[\sigma] = 300 \text{ МПа}$.

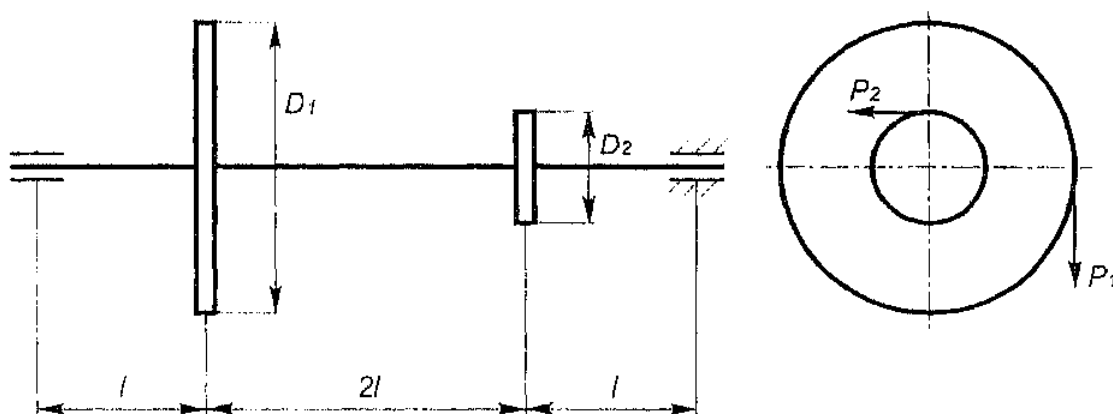


Рис. 9.10

9.16. Стальной стержень длиной l зашцеилен на левом краю, а на свободном торце нагружен растягивающей силой P и крутящим моментом $M = Pl$. Стержень имеет круглое поперечное сечение диаметром d . На основании теории прочности III определить допустимую силу P . В расчетах принять: $l = 0,5 \text{ м}$; $d = 3 \text{ см}$, $[\sigma] = 300 \text{ МПа}$.

В задачах 9.17—9.20 считать, что заданные нормальные σ и касательные τ напряжения определены экспериментально в опасной точке сечения.

9.17. На концах балки квадратного поперечного сечения со стороной b приложены изгибающие M и крутящие моменты $M_{\text{к}} = 2M$. На основании теории прочности III определить значения изгибающего и крутящего моментов. В расчетах принять: $b = 2 \text{ см}$; $\sigma = 100 \text{ МПа}$; $\tau = 55,9 \text{ МПа}$.

9.18. Решить задачу 9.17 для балки кругового поперечного сечения диаметра $d = 2 \text{ см}$.

9.19. На свободном краю консольно заземленной балки кругового поперечного сечения диаметра d приложены продольная сила P и крутящий момент $M_k = 2Pd$. На основании теории прочности IV найти силу P . В расчетах принять: $d = 3$ см, $\sigma = 20$ МПа; $\tau = 26,5$ МПа.

9.20. Решить задачу 9.19 с использованием теории прочности III.

9.21. Для изображенной на рис. 9.11 рамы, элементы которой имеют квадратное сечение со стороной b , провести проектировочный расчет на прочность на основании теории прочности III. В расчетах принять: $P = 2$ кН; $l = 0,5$ м; $[\sigma] = 300$ МПа.

9.22. Для изображенной на рис. 9.12 рамы, все элементы которой имеют круглое сечение диаметра d , на основании теорий прочности III и IV произвести проектировочный расчет на прочность. В расчетах принять: $l = 0,5$ м; $P = 3$ кН; $[\sigma] = 150$ МПа.

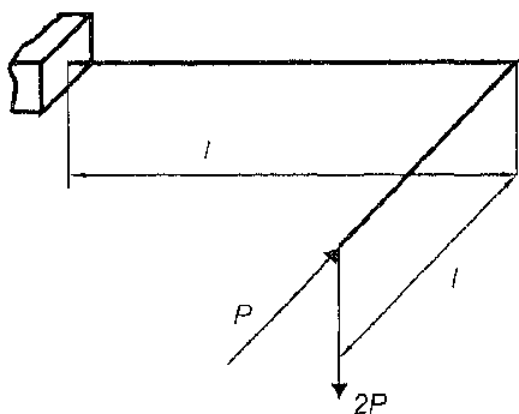


Рис. 9.11

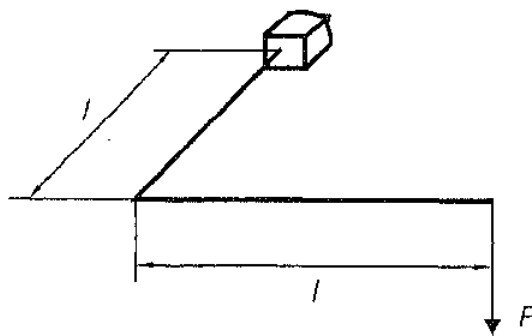


Рис. 9.12

9.23. Для изображенной на рис. 9.12 рамы, все элементы которой имеют постоянное тонкостенное коробчатое поперечное сечение высоты b , ширины $2b$ и толщины δ , на основании теории прочности IV определить δ . В расчетах принять: $P = 2$ кН; $l = 0,5$ м; $b = 3$ см; $[\sigma] = 200$ МПа.

9.24. Для изображенной на рис. 9.12 рамы, все элементы которой имеют круглое поперечное сечение диаметра d , по теориям прочности III и IV определить длину l , при которой эквивалентные напряжения в опасном сечении рамы достигнут допускаемых значений $[\sigma]$. В расчетах принять: $d = 5$ см; $P = 2$ кН; $[\sigma] = 160$ МПа.

9.25. Для изображенной на рис. 9.12 рамы, все элементы которой имеют круглое поперечное сечение диаметра d , на основа-

нии теории прочности V определить допускаемое значение силы P . В расчетах принять: $d = 3$ см, $l = 0,5$ м; $[\sigma]_p = 200$ МПа, материал рамы неодинаково работает на растяжение-сжатие, $k = [\sigma]_p / [\sigma]_c = 0,333$.

9.26. Для пространственной рамы (рис. 9.13), все элементы которой имеют квадратное сечение со стороной b , определить допускаемое значение силы P , исходя из теории прочности III. В расчетах принять: $b = 2$ см, $l = 0,2$ м; $[\sigma] = 160$ МПа.

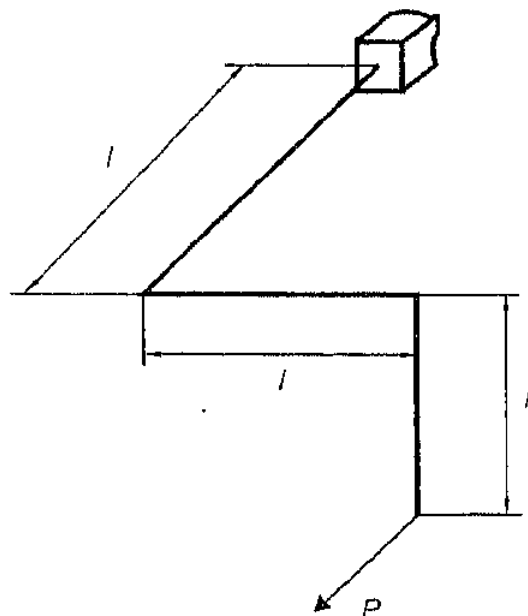


Рис. 9.13

9.27. Для изображенной на рис. 9.14 рамы коробчатого поперечного сечения определить силу P , при которой эквивалентные по теории прочности III напряжения в ее опасном сечении равны допускаемому $[\sigma]$. Сечение

имеет высоту b , ширину $3b$ и толщину δ . В расчетах принять: $b = 1$ см; $l = 0,4$ м; $\delta = 2$ мм; $[\sigma] = 200$ МПа.

9.28. Для изображенной на рис. 9.14 рамы тонкостенного коробчатого поперечного сечения высоты b , ширины $2b$ и толщины δ на основании теории прочности III определить предельно допускаемую длину l . В расчетах принять: $P = 100$ Н; $b = 1$ см; $\delta = 2$ мм; $[\sigma] = 200$ МПа.

9.29. Провести проектировочный и проверочный расчеты на прочность изображенной на рис. 9.12 рамы. Ее элементы имеют тонкостенное коробчатое сечение высоты b , ширины $2b$ и толщины $\delta = b/10$. Для вычислений использовать теорию прочности IV. В расчетах принять: $P = 600$ Н; $l = 0,5$ м; $\sigma_T = 270$ МПа, $n = 3$.

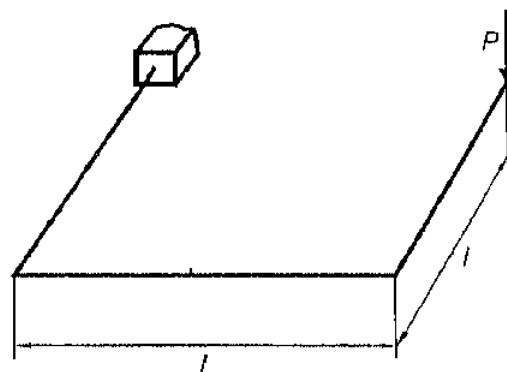


Рис. 9.14

9.30. Провести проектировочный и проверочный расчеты на прочность изображенной на рис. 9.11 рамы. Все ее элементы имеют тонкостенное кольцевое сечение радиуса R и толщиной

$\delta = R/10$. При вычислениях использовать теории прочности III и IV. В расчетах принять: $P = 700$ Н; $l = 0,5$ м; $\sigma_p = 270$ МПа, $n = 3$.

9.31. На основании теории прочности V провести проектно-прочный и поверочный расчеты изображенной на рис. 9.14 рамы, поперечным сечением которой является круг диаметра d .

В расчетах принять: $l = 0,4$ м; $k = [\sigma]_p / [\sigma]_c = 0,43$; $P = 900$ Н; $[\sigma] = 150$ МПа.

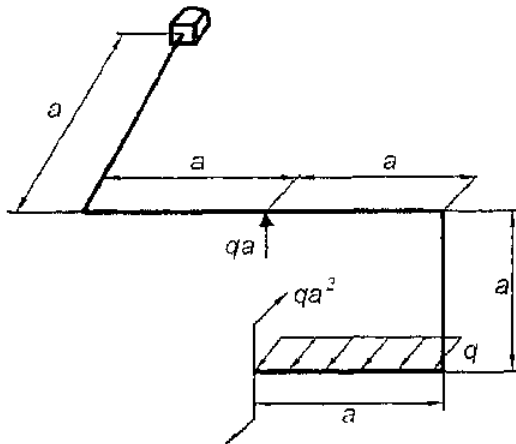


Рис. 9.15

9.32. Для изображенной на рис. 9.15 рамы (см. задачу 7.16), все элементы которой имеют круглое поперечное сечение, на основании теории прочности III определить диаметр сечения d . В расчетах принять: $q = 100$ Н/м; $a = 0,5$ м; $[\sigma] = 150$ МПа.

9.33. Для изображенной на рис. 9.16 рамы (см. задачу 7.17),

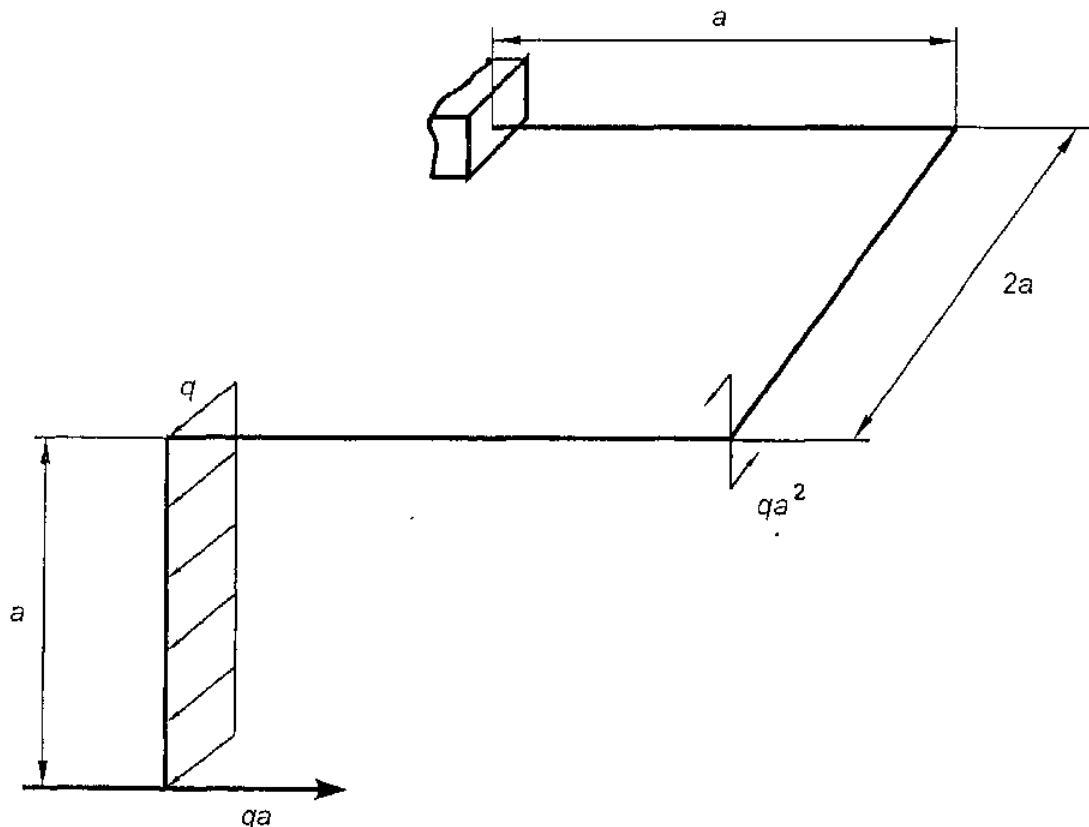


Рис. 9.16

все элементы которой имеют круглое поперечное сечение диаметра d , на основании теории прочности III определить размер a , при котором максимальные эквивалентные напряжения в ее опасном сечении достигают допускаемых. В расчетах принять: $q = 200 \text{ Н/м}$; $d = 3 \text{ см}$; $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

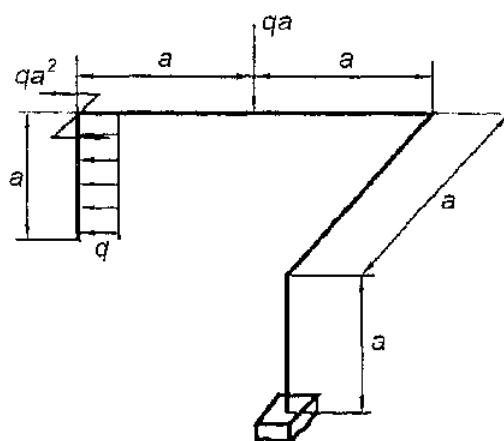


Рис. 9.17

9.34. Для изображенной на рис. 9.17 рамы (см. задачу 7.18), все элементы которой имеют тонкостенные круговое поперечное сечение радиуса R и толщины $\delta = R/5$, на основании теории прочности IV определить допускаемую нагрузку q . В расчетах принять: $a = 0,7 \text{ м}$; $R = 15 \text{ мм}$; $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$.

9.35. Для изображенной на рис. 9.18 рамы (см. задачу 7.19), все элементы которой имеют круглое поперечное сечение диаметра d , на основании теории прочности III провести проекторочный и поверочный расчеты. В расчетах принять: $q = 300 \text{ Н/м}$; $a = 0,6 \text{ м}$; $\sigma_T = 450 \text{ МПа}$, $n = 3$.

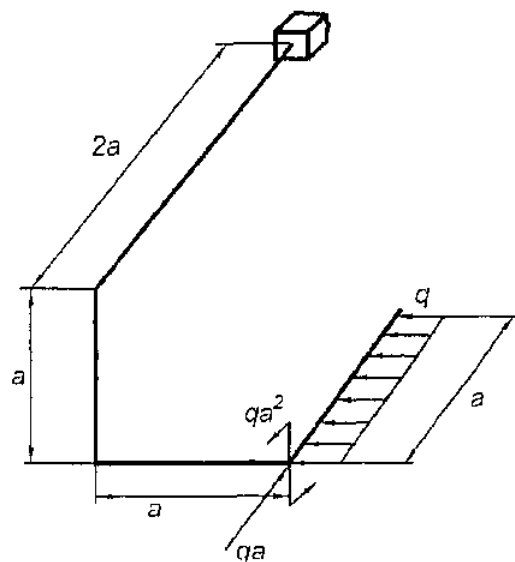


Рис. 9.18

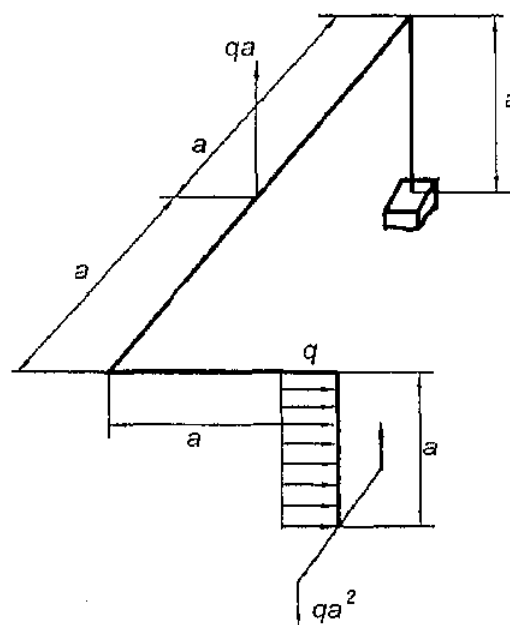


Рис. 9.19

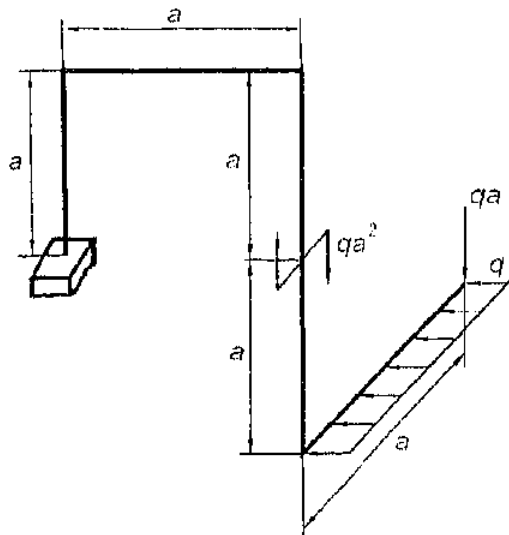


Рис. 9.20

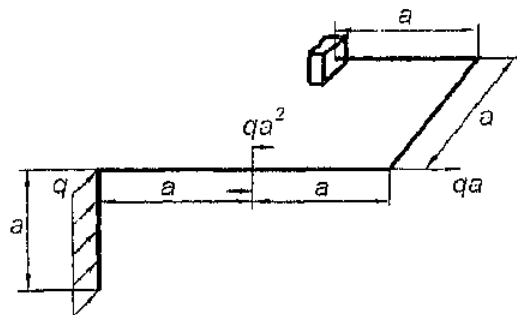


Рис. 9.21

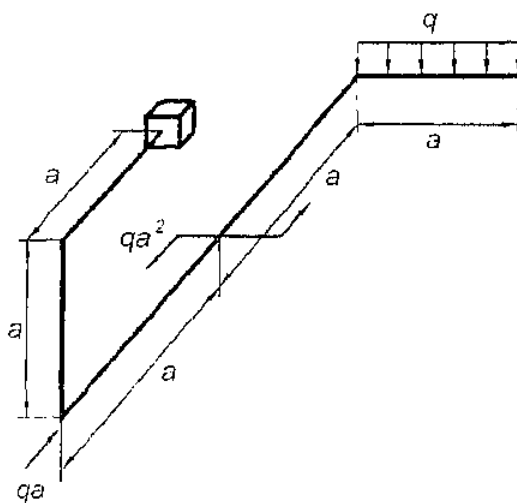


Рис. 9.22

сечение толщины δ , на основании теории прочности III определить радиус сечения R . В расчетах принять: $q = 200 \text{ Н/м}$; $a = 0,8 \text{ м}$; $\delta = 2 \text{ мм}$; $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

9.37. Для изображенной на рис. 9.20 рамы (см. задачу 7.21), все элементы которой имеют круглое поперечное сечение, на основании теории прочности IV определить его диаметр d . В расчетах принять: $q = 200 \text{ Н/м}$; $a = 0,6 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

9.38. Для изображенной на рис. 9.21 рамы (см. задачу 7.24), все элементы которой имеют тонкостенное круговое поперечное сечение толщины δ , на основании теории прочности V определить его радиус R . В расчетах принять: $q = 400 \text{ Н/м}$; $a = 0,7 \text{ м}$; $\delta = 2 \text{ мм}$; $k = [\sigma]_p / [\sigma]_c = 0,4$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

9.39. Для изображенной на рис. 9.22 рамы (см. задачу 7.25), все элементы которой имеют круглое поперечное сечение диаметра d , на основании теории прочности IV провести проектный и поверочный расчеты. В расчетах принять: $q = 300 \text{ Н/м}$; $a = 0,5 \text{ м}$; $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, $n = 3$.

9.40. Для рамы из примера 9.3 определить запас прочности n с использованием теории прочности III. В расчетах принять: $P = 150 \text{ Н}$; $l = 0,3 \text{ м}$; $\delta = 2 \text{ мм}$, $b/\delta = 10$, $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$.

9.41. Для изображенной на рис. 9.23 рамы (см. задачу 7.150) круглого поперечного сечения диаметра d на основании теории прочности III провести проектировочный расчет. В расчетах принять: $q = 200 \text{ Н/м}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$.

9.42. Для изображенной на рис. 9.24, рамы (см. задачу 7.151) круглого поперечного сечения диаметра d на основании теории прочности IV провести проектировочный расчет на прочность. В расчетах принять: $M = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

9.43. Для изображенной на рис. 9.25 рамы (см. задачу 7.152) круглого поперечного сечения диаметра d на основании теории прочности III провести проектировочный расчет на прочность. В расчетах принять: $q = 100 \text{ Н/м}$; $l = 0,5 \text{ м}$; $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$.

9.44. Для изображенной на рис. 9.26 рамы (см. задачу 7.153) круглого поперечного сечения диаметра d на основании теории прочности III провести проекти-

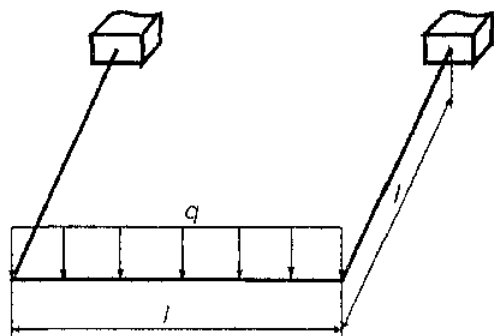


Рис. 9.23

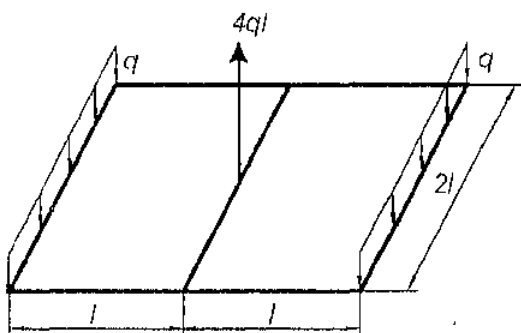


Рис. 9.25

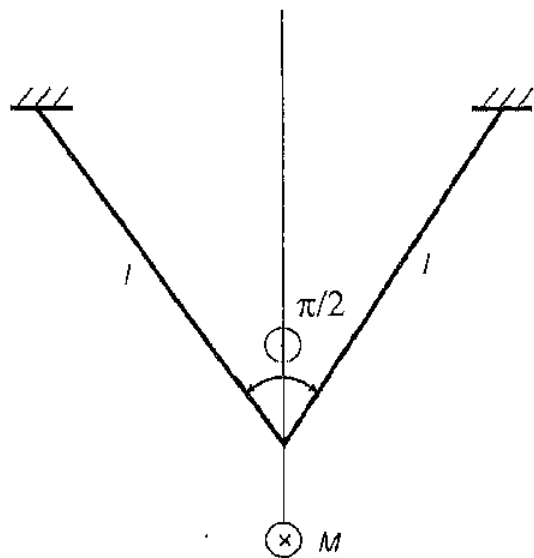


Рис. 9.24

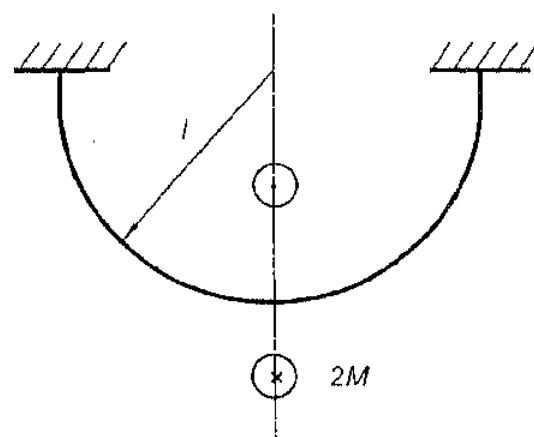


Рис. 9.26

ровочный расчет на прочность. В расчетах принять: $M = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

9.45. Для изображенной на рис. 9.27 рамы (см. задачу 7.154) круглого поперечного сечения диаметра d на основании теории прочности III провести проектировочный расчет на прочность. В расчетах принять: $q = 200 \text{ Н/м}$; $l = 0,6 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

9.46. Для изображенной на рис. 9.28 рамы (см. задачу 7.155) круглого поперечного сечения диаметра d на основании теории прочности III провести проектировочный расчет на прочность. В расчетах принять: $P = 200 \text{ Н}$; $l = 0,4 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

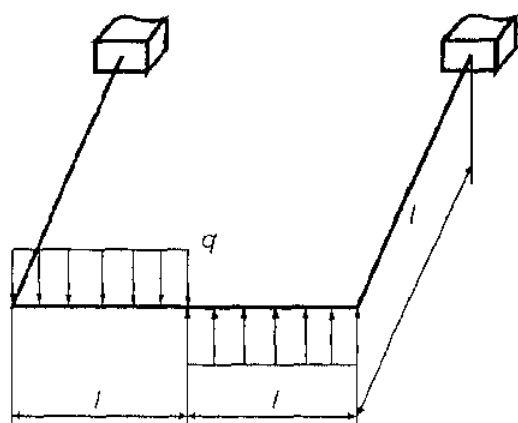


Рис. 9.27

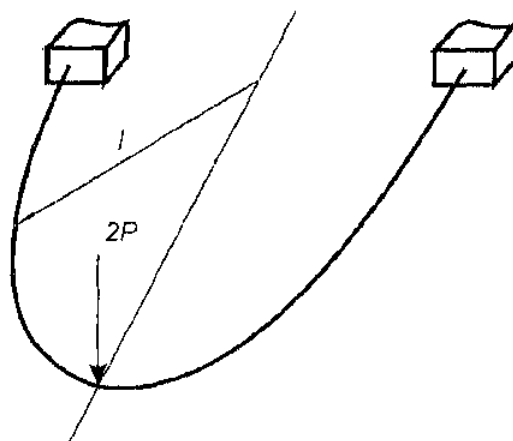


Рис. 9.28

Глава 10 РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В этой главе в отличие от всех остальных объектов изучения является оболочка.

Определение 10.1. Пусть Π — двусторонняя ориентированная поверхность. В каждой точке $A \in \Pi$ проведем нормаль и отложим два отрезка AA_1 и AA_2 длины $\delta/2$ в направлениях внешнего n и внутреннего $(-n)$ единичных нормальных векторов. Поверхности, образованные совокупностями точек A_1 и A_2 , обозначим Π_1 и Π_2 (рис. 10.1).

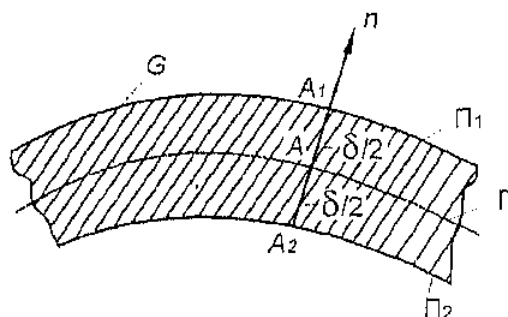


Рис. 10.1

Тело G , ограниченное поверхностями Π , Π_1 и Π_2 , называется *оболочкой толщины δ* , а поверхности Π , Π_1 и Π_2 — ее *срединной, внешней и внутренней поверхностями*. Если $\delta(A) = \text{const}$, то G — *оболочка постоянной толщины*.

Если $\delta \ll d = \max \left(\text{diam } \Pi, \max_{A_1, A_2 \in \Pi} \rho(A_1, A_2) \right)$, то оболочка называется *тонкой* (просто *оболочкой*). Здесь $\text{diam } \Pi$ — диаметр срединной поверхности, а $\rho(A_1, A_2)$ — расстояние между точками A_1 и A_2 . ■

Определение 10.2. Если Π — поверхность вращения, то оболочка называется *оболочкой вращения*, а ось поверхности Π — *осью оболочки*.

Плоская кривая Γ_m , лежащая в пересечении срединной поверхности и проходящая через ось вращения плоскости (вращением которой получена поверхность Π), называется *меридианом*, а соответствующее сечение оболочки — *меридиональным сечением* (рис. 10.2).

Сечение оболочки круговой конической поверхностью с вершиной в точке O_2 — точке пересечения нормали к срединной

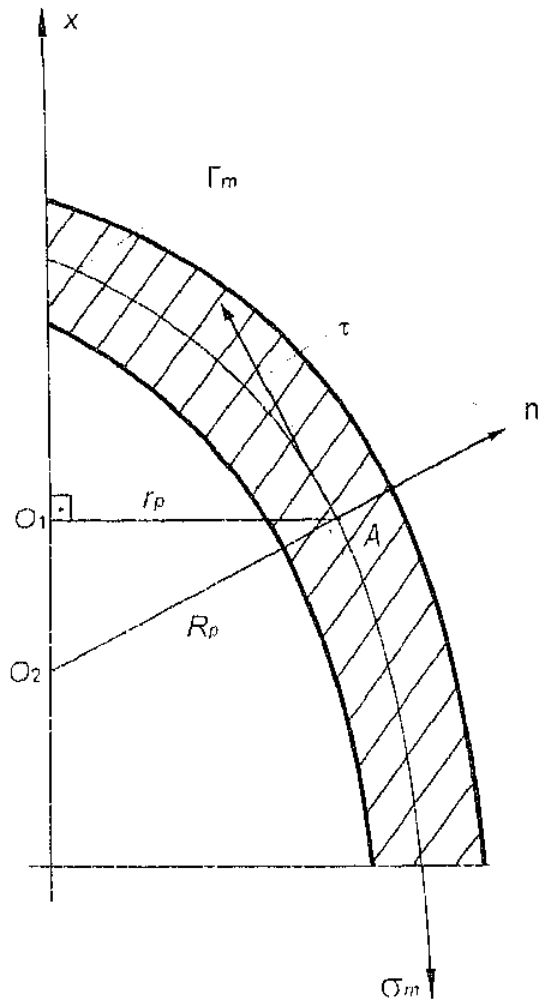


Рис. 10.2

поверхности и оси — называется окружным (коническим) сечением (рис. 10.2 и 10.3). Окружность Γ_p , являющаяся пересечением окружного сечения и срединной поверхности, называется *параллелью*. ■

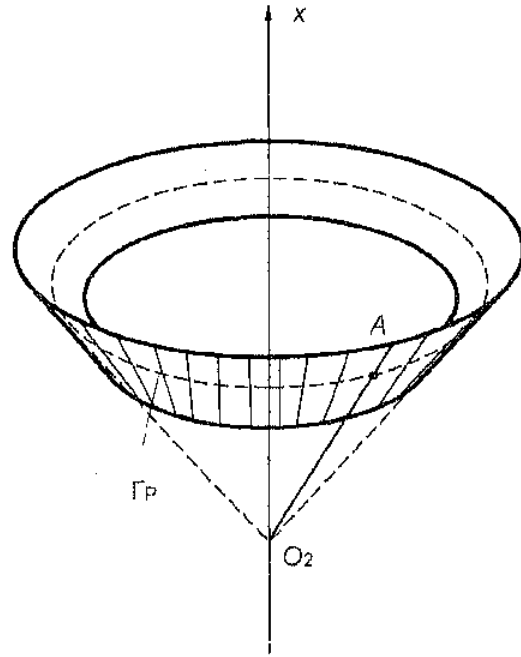


Рис. 10.3

Очевидно, параллель расположена в некоторой плоскости, перпендикулярной оси оболочки. Срединную поверхность можно задать параметрически следующим образом:

$$\Pi : r = r(s_p, s), \quad (10.1)$$

где s_p и s — длины дуг параллелей и меридианов. Причем эти кривые как координатные линии поверхности ортогональны.

Далее обозначим через r_p радиус окружности Γ_p , а через R_m и $R_p = |O_2A|$ — радиусы кривизны меридиана Γ_m и кривой Γ , лежащей в пересечении поверхности Π и плоскости с нормальным вектором τ — касательным вектором к Γ_m (см. рис. 10.2). В силу симметрии эти радиусы не зависят от окружной координаты:

$$r_p = r_p(s), \quad R_m = R_m(s), \quad R_p = R_p(s). \quad (10.2)$$

Для описания НДС оболочек вводятся предположения типа гипотезы Бернулли (см. аксиомы 8 и 8.1—8.5 в § П.1 и гл. 4, 5). При этом в сопротивлении материалов ограничиваются только определением напряжений в рамках так называемой *безмоментной теории оболочек вращения постоянной толщины*.

На рис. 10.4 изображен элемент оболочки (элемент срединной поверхности), ограниченный двумя коническими и двумя меридиональными сечениями.

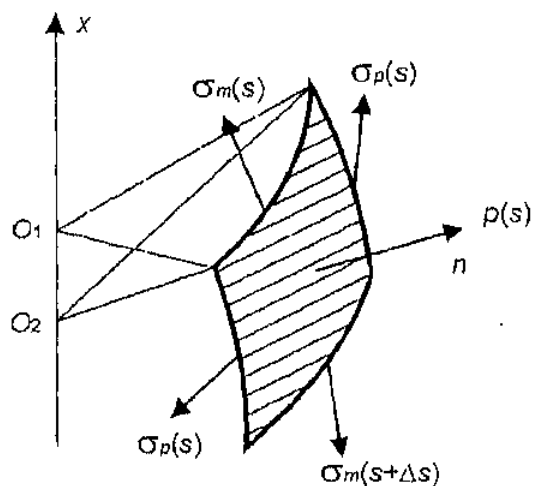


Рис. 10.4

Определение 10.3. Нормальные напряжения σ_p в меридиональных и σ_m в окружных сечениях называются соответственно *окружными* и *меридиональными напряжениями*. ■

Аксиома 8.6. Напряженное состояние оболочки удовлетворяет следующим условиям:

1. Напряжения на площадке с нормалью n отсутствуют (*гипотеза о ненадавливаемости волокон*).
2. В меридиональных и окружных сечениях отличны от нуля только окружные σ_p и меридиональные напряжения σ_m , которые распределены по толщине оболочки равномерно. ■

Эта гипотеза подтверждается в том случае, если:

- срединная поверхность оболочки гладкая;
- внешняя нагрузка (см. определение П.9) — *давление* $p(A)$, т.е.

$p_v = p n$, причем

$$p(A) = p(s), \quad (10.3)$$

и оно изменяется плавно;

- опоры оболочки таковы, что реакции в них направлены по касательной к меридиану.

Из уравнения равновесия в проекции на нормаль к срединной поверхности при учете аксиомы 8.6 следует уравнение, связывающее меридиональные и окружные напряжения (*уравнение Лапласа*):

$$\frac{\sigma_m}{R_m} + \frac{\sigma_p}{R_p} = \frac{p}{\delta}. \quad (10.4)$$

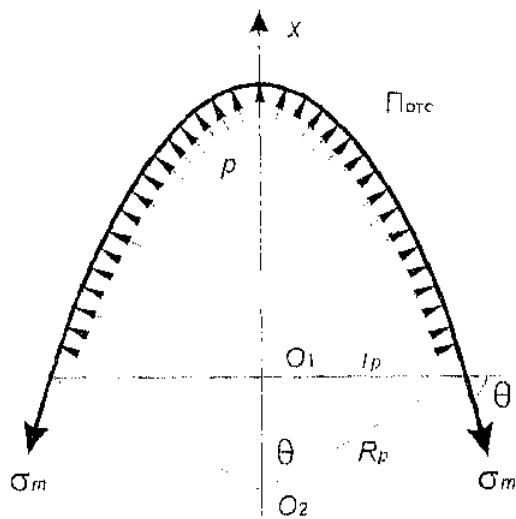


Рис. 10.5

Отметим, что при выводе уравнений равновесия в силу малости толщины оболочки полагается, что поверхностная нагрузка приложена к срединной поверхности.

Второе соотношение для определения напряжений удобнее составлять, проектируя уравнение равновесия для отсеченной части оболочки, соответствующей части $\Pi_{\text{отс}}$ срединной поверхности, на ось вращения — ось Ox (рис. 10.5):

$$\int \int_{\Pi_{\text{отс}}} (pn, i) dS = 2\pi r_p \sigma_m \delta \sin \theta, \quad r_p = R_p \sin \theta. \quad (10.5)$$

Для частных случаев распределения давления проекция равнодействующей давления определяется следующими утверждениями (в них Π не обязательно является поверхностью вращения).

Утверждение 10.1. Если $p = \text{const}$, то

$$\int \int_{\Pi_{\text{отс}}} (pn, i) dS = pF_{yz}, \quad (10.6)$$

где F_{yz} — площадь проекции поверхности $\Pi_{\text{отс}}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения, — плоскость Oyz . ■

Утверждение 10.2. Если оболочка заполнена однородной жидкостью с удельным весом γ ($p = \gamma x$; координата x отсчитывается от свободной поверхности, рис. 10.6), то

$$\int \int_{\Pi_{\text{отс}}} (pn, i) dS = \gamma V_{\text{отс}} = P_{\text{отс}}, \quad (10.7)$$

где $V_{\text{отс}}$ — объем области $G_{\text{отс}}$, ограниченной поверхностями $\Pi_{\text{отс}}$, цилиндрической поверхностью $\Pi_{\text{ц}}$ радиуса r_p и плоскостью $x = 0$; $P_{\text{отс}}$ — вес жидкости, находящейся в области $G_{\text{отс}}$. ■

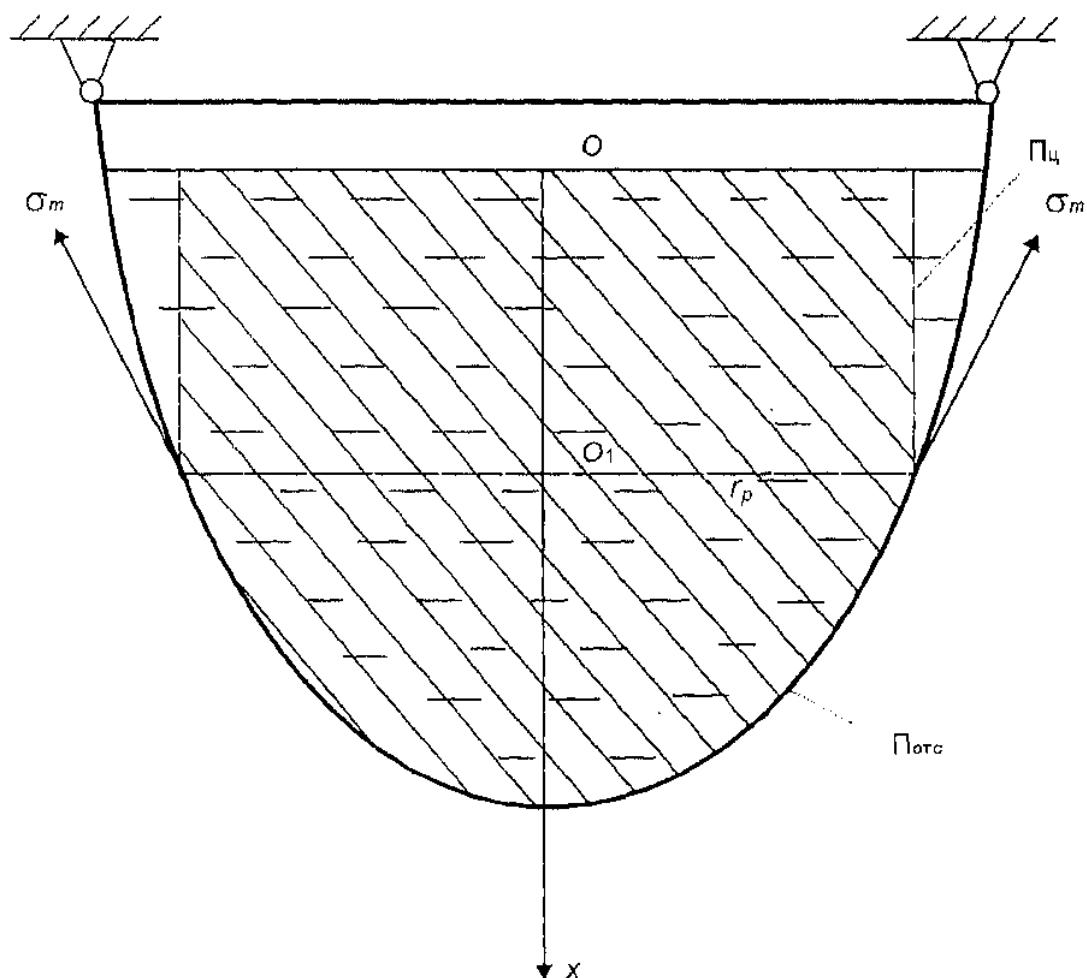


Рис. 10.6

Алгоритм расчета оболочек заключается в следующем.

1. С помощью уравнений (10.4) и (10.5) определяем окружные и меридиональные напряжения и строим их эпюры по оси. Если оболочка заполнена жидкостью и имеет место равномерное давление, то интеграл в (10.5) есть сумма правых частей равенств (10.6) и (10.7). Отметим, что на тех участках, где геометрия оболочки неизменна, эпюры напряжений непрерывны.

Для цилиндрических оболочек большой длины в рамках сопротивления материалов могут быть рассмотрены и так называемые балочные нагрузки (как правило, крутящие моменты, см. § П.1) — комбинированная модель. При этом НДС оболочки есть суперпозиция напряжений от давления в рамках теории оболочек и напряжений в тонкостенной балке (см. гл. 1, 4, 5).

2. По выбранной теории прочности находим $\sigma_{\text{ЭКВ}}(x)$. При этом учитываем, что одно из главных напряжений равно нулю, а два других совпадают с σ_r и σ_m . В случае комбинированной

модели в силу малой толщины оболочки НС ее элемента плоское, главные напряжения вычисляются по формуле (8.38), где σ_x — напряжения, полученные суммированием σ_m и нормальных напряжений от растяжения-сжатия и изгиба, а в местной системе координат $\sigma_y = \sigma_p$.

Вычисляя максимум функции $\sigma_{\text{экв}}(x)$ или рассматривая опасные сечения, находим $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{экв max}}$ (см. п. VI § П.1).

3. Исходя из неравенства (П.27), проводим расчет на прочность (проектировочный и поверочный). ■

Пример 10.1. Используя теорию прочности III, определить толщину нагруженной внутренним давлением $p = 0,4$ МПа замкнутой сферической оболочки радиуса $R = 1$ м. Допускаемые напряжения $[\sigma] = 120$ МПа.

Решение. 1. В силу симметрии задачи для сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления, меридиональные и окружные напряжения равны между собой и сразу определяются из уравнения (10.4):

$$\sigma_m = \sigma_p = \frac{pR}{2\delta} = \frac{2 \cdot 10^5}{\delta}.$$

2. Учитывая, что в данном случае

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_m; \quad \sigma_3 = 0,$$

определяем эквивалентное напряжение по формуле (8.47):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_m.$$

3. Из условий прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{pR}{2\delta} \leq [\sigma]$$

находим требуемую толщину оболочки

$$\delta \geq \frac{pR}{2[\sigma]} = \frac{0,4 \cdot 10^6 \cdot 1}{2 \cdot 120 \cdot 10^6} = 0,00170 \text{ м.}$$

Принимаем $\delta = 1,7$ мм. ■

Пример 10.2. По теории прочности IV определить толщину заполненной жидкостью плотности ρ круговой цилиндрической оболочки, изображенной на рис. 10.7, а. В расчетах принять: $R = 2,2$ м; $\rho = 800$ кг/м³; $[\sigma] = 100$ МПа.

Решение. 1. Нумерация характерных сечений оболочки и координатная ось Ox указаны на рис. 10.7, *а*.

Прежде всего, отметим, что для круговой цилиндрической оболочки $R_p = R$ и $\theta = \pi/2$, $r_p = R_p$. Кроме того, на всех участках область $G_{отс}$, указанная в утверждении 10.2, совпадает со всей областью, занимаемой жидкостью (см. рис. 10.7, *б* и *в*). Тогда, учитывая (10.7), приходим к следующему виду уравнения (10.5):

$$P_{отс} = \rho g \cdot (\pi R^2 \cdot 3R) = 2\pi R \sigma_m \delta,$$

откуда следует, что меридиональные напряжения постоянны по длине оболочки:

$$\sigma_m = \frac{3R^2 \rho g}{2\delta}.$$

Поскольку для круговой цилиндрической оболочки $R_m = \infty$, то уравнение (10.4) позволяет определить окружные напряжения вне зависимости от меридиональных:

$$\sigma_p = pR/\delta.$$

Используя это соотношение, по участкам определяем давление и окружные напряжения:

— участок 1—2 (см. рис. 10.7, *б*):

$$p = 0, \quad \sigma_p = 0;$$

— участок 2—3 (см. рис. 10.7, *в*):

$$p(x) = \rho g (3R - x), \quad \sigma_p(x) = \frac{\rho g (3R - x) R}{\delta}, \quad \sigma_{p2} = \sigma_p (3R) = 0,$$

$$\sigma_{p3} = \sigma_p (0) = \frac{3R^2 \rho g}{\delta}.$$

Эпюры σ_p и σ_m представлены на рис. 10.7, *а*.

2. Наиболее нагруженным является сечение 3. Здесь

$$\sigma_1 = \sigma_{p3}, \quad \sigma_2 = \sigma_m, \quad \sigma_3 = 0.$$

Максимальное эквивалентное напряжение вычисляем с помощью формулы (8.49):

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв макс}} &= \sqrt{\sigma_{p\beta}^2 + \sigma_m^2 - \sigma_{p\beta} \cdot \sigma_m} = \\ &= \frac{R^2 \rho g}{\delta} \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{R^2 \rho g}{\delta}.\end{aligned}$$

3. Используя условия прочности

$$\sigma_{\text{макс}} = \sigma_{\text{экв макс}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{R^2 \rho g}{\delta} \leq [\sigma],$$

определяем толщину оболочки

$$\delta \geq \frac{3\sqrt{3} R^2 \rho g}{2 [\sigma]} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 0,5^2 \cdot 800 \cdot 9,81}{2 \cdot 200 \cdot 10^6} = 0,987 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Принимаем $\delta = 1 \text{ мм}$. ■

Пример 10.3. Круговая коническая оболочка высоты h и с углом конусности α прикреплена к жесткому основанию, заполнена жидкостью плотности ρ и наддута избыточным давлением p_0 (рис. 10.8, а). Определить потребную толщину оболочки, исходя из теории прочности IV. В расчетах принять: $h = 1 \text{ м}$; $\alpha = 30^\circ$; $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$; $p_0 = 100 \text{ кН/м}^2$; $[\sigma] = 60 \text{ МПа}$.

Решение. 1. Нумерация характерных сечений оболочки и координатная ось Ox указаны на рис. 10.8, а.

Прежде всего, отметим, что для круговой конической оболочки (см. рис. 10.8, б, в)

$$R_m = \infty, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad r = r_p = x \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad R_p = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{2}{3} x.$$

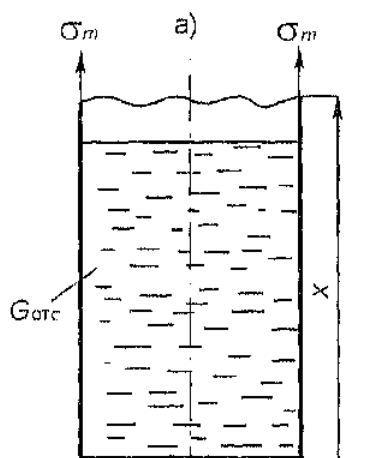
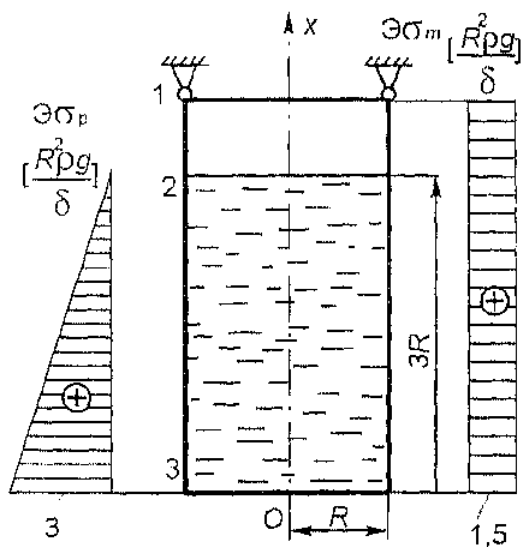
При этом уравнение (10.4) принимает вид:

$$\sigma_p = \frac{\rho R_p}{\delta} = \frac{2\rho x}{3\delta}.$$

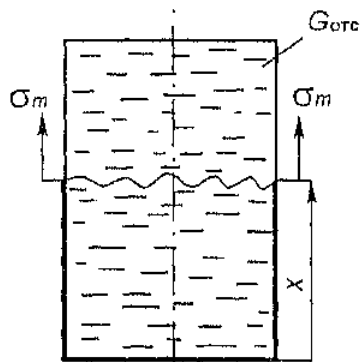
Далее с помощью этого равенства и уравнения (10.5) с учетом (10.6), (10.7) по участкам определяем окружные напряжения:

— участок 1—2 (рис. 10.8, б):

$$p = p_0, \quad \sigma_p(x) = \frac{2p_0 x}{3\delta},$$

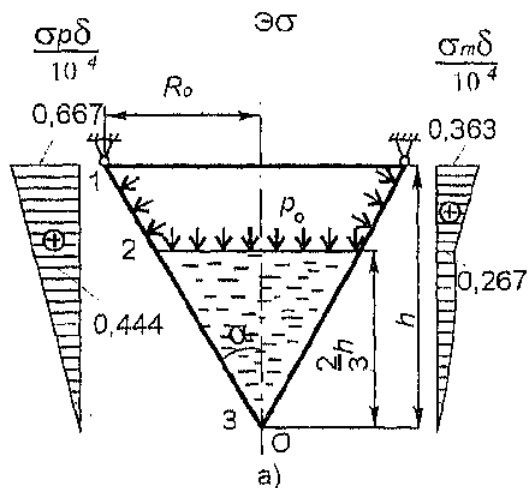


б)

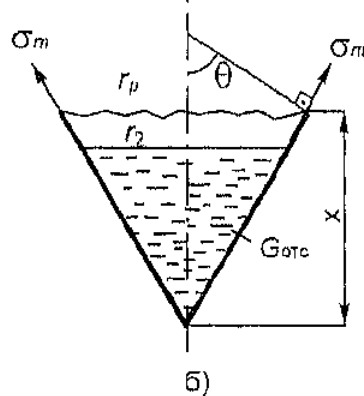


в)

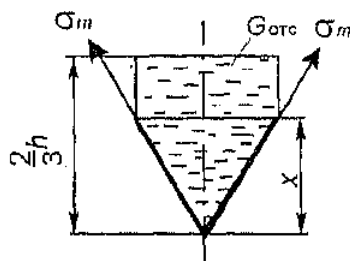
Рис. 10.7



а)



б)



в)

Рис. 10.8

$$\sigma_{p1} = \sigma_p(h) = \frac{2p_0h}{3\delta} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1}{3\delta} = 0,667 \cdot \frac{10^4}{\delta},$$

$$\sigma_{p2} = \sigma_p\left(\frac{2h}{3}\right) = \frac{4p_0h}{9\delta} = 0,444 \cdot \frac{10^5}{\delta};$$

— участок 2—3 (рис. 10.8, в):

$$p(x) = p_0 + \rho g \left(\frac{2}{3}h - x\right), \quad \sigma_p(x) = \frac{2x}{3\delta} \left[p_0 + \rho g \left(\frac{2}{3}h - x\right) \right],$$

$$\sigma_{p3} = \sigma_p(0) = 0.$$

Меридиональные напряжения находим из уравнения (10.5) с учетом (10.6) и (10.7):

— участок 1—2 (см. рис. 10.8, б):

$$P_{отс} + p_0 F_{yz} = \rho g \cdot \left(\frac{1}{3} \pi r_2^2 \cdot \frac{2}{3} h\right) + p_0 \pi r^2 = 2\pi r \sigma_m \delta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$r_2 = r \left(\frac{2}{3} h\right) = \frac{2h}{3\sqrt{3}}, \quad \sigma_m(x) = \frac{1}{3\delta x} \left(\frac{8}{81} \rho g h^3 + p_0 x^2\right),$$

$$\sigma_{m1} = \sigma_m(h) = \frac{h}{3\delta} \left(\frac{8}{81} \rho g h + p_0\right) =$$

$$= \frac{1}{3\delta} \cdot \left(\frac{8}{81} \cdot 900 \cdot 9,81 \cdot 1 + 10 \cdot 10^3\right) = 0,336 \cdot \frac{10^5}{\delta},$$

$$\sigma_{m2} = \sigma_m\left(\frac{2}{3} h\right) = \frac{h}{3\delta} \left(\frac{8}{81} \rho g h + p_0\right) =$$

$$= \frac{2}{9\delta} \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot 900 \cdot 9,81 \cdot 1 + 10 \cdot 10^3\right) = 0,226 \cdot \frac{10^5}{\delta};$$

— участок 2—3 (см. рис. 10.8, в):

$$P_{отс} + p_0 S_{yz} = \rho g \cdot \left[\pi r^2 \cdot \left(\frac{2}{3} h - x\right) + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot x \right] + p_0 \cdot \pi r^2 =$$

$$= 2\pi r \sigma_m \delta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sigma_m(x) = \frac{x}{3\delta} \left[\frac{2\rho g}{3} (h - x) + p_0 \right], \quad \sigma_{m3} = \sigma_m(0) = 0.$$

Зависимость σ_p от x на участке 1—2 линейная. Остальные составляющие эпюры необходимо исследовать на экстремум:

— участок 1—2:

$$\sigma'_m(x_m) = \frac{1}{3\delta} \left(-\frac{8}{81} \frac{\rho g h^3}{x_m^2} + p_0 \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{2h}{9} \sqrt{\frac{2\rho g h}{p_0}} = \frac{2h}{9} \sqrt{\frac{2 \cdot 900 \cdot 9,81 \cdot 1}{10 \cdot 10^3}} = \frac{2h}{9} \sqrt{2 \cdot 0,883} = \\ &= 0,295h < \frac{2}{3} h; \end{aligned}$$

— участок 2—3:

$$\sigma'_p(x_p) = \frac{2}{3\delta} \left[p_0 + \rho g \left(\frac{2}{3} h - 2x_p \right) \right] = 0,$$

$$x_p = h \left(\frac{1}{3} + \frac{p_0}{2\rho g h} \right) = h \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 0,883} \right) = 0,898h > \frac{2}{3} h;$$

$$\sigma'_m(x_m) = \frac{1}{3\delta} \left[\frac{2\rho g}{3} (h - 2x_m) + p_0 \right] = 0,$$

$$x_m = h \left(\frac{1}{2} + \frac{3p_0}{4\rho g h} \right) = h \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 0,883} \right) = 1,35h > \frac{2}{3} h.$$

Следовательно, экстремумов нет. Эпюры σ_p и σ_m приведены на рис. 10.8, а.

2. Наиболее нагруженным является сечение 1. Для него

$$\sigma_1 = \sigma_{p1}, \quad \sigma_2 = \sigma_{m1}, \quad \sigma_3 = 0.$$

Максимальное эквивалентное напряжение вычисляем с помощью формулы (8.49) (см. также пример 10.2):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эkv max}} &= \sqrt{\sigma_{p1}^2 + \sigma_{m1}^2 - \sigma_{p1} \cdot \sigma_{m1}} = \\ &= \frac{10^5}{\delta} \sqrt{0,667^2 + 0,336^2 - 0,667 \cdot 0,336} = 0,576 \cdot \frac{10^5}{\delta}. \end{aligned}$$

3. Используя условия прочности

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{эkv max}} = 0,576 \cdot \frac{10^5}{\delta} \leq [\sigma],$$

определяем толщину оболочки

$$\delta \geq \frac{0,576 \cdot 10^5}{[\sigma]} = \frac{0,576 \cdot 10^5}{60 \cdot 10^6} = 0,961 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Принимаем $\delta = 1$ мм. ■

Пример 10.4. Круговая цилиндрическая оболочка радиуса R с полусферическим днищем того же радиуса заполнена жидкостью плотности ρ и наддута давлением $p_0 = \rho g R$ (рис. 10.9, а). Определить напряжения в оболочке.

Решение. Нумерация характерных сечений оболочки и координатная ось Ox указаны на рис. 10.9, а.

Учитывая результаты примеров 10.1 и 10.2 для сферической и цилиндрической оболочек, определяем напряжения. На участках 0—1 и 1—2 сначала находим окружные напряжения:

— участок 0—1 (рис. 10.9, б):

$$p = p_0, \quad \sigma_p = \frac{p_0 R}{\delta};$$

— участок 1—2 (рис. 10.9, в):

$$p = p_0 + \rho g (3R - x) = \rho g (4R - x), \quad \sigma_p = \frac{\rho g (4R - x)}{\delta},$$

$$\sigma_{p1} = \sigma_p (3R) = \frac{\rho g R}{\delta}, \quad \sigma_{p2} = \sigma_p (0) = \frac{4\rho g R}{\delta},$$

а затем — меридиональные напряжения (на этих участках области $G_{отс}$ совпадают):

$$P_{отс} + p_0 F_{yz} = \rho g \cdot \left(\pi R^2 \cdot 3R + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \right) + p_0 \pi R^2 = 2\pi R \sigma_m \delta,$$

$$\sigma_m = \frac{7\rho g R^2}{3\delta}.$$

На участке 2—3 (рис. 10.9, г, здесь же указана угловая координата φ) сначала вычисляем меридиональные напряжения ($G_{отс}$ есть объединение сферического сегмента со стрелой $h_c = R(1 - \cos \varphi)$ и цилиндра радиуса $r = r_p = R \sin \varphi$ и высоты $h_{ц} = 3R + R \cos \varphi$; $\theta = \varphi$):

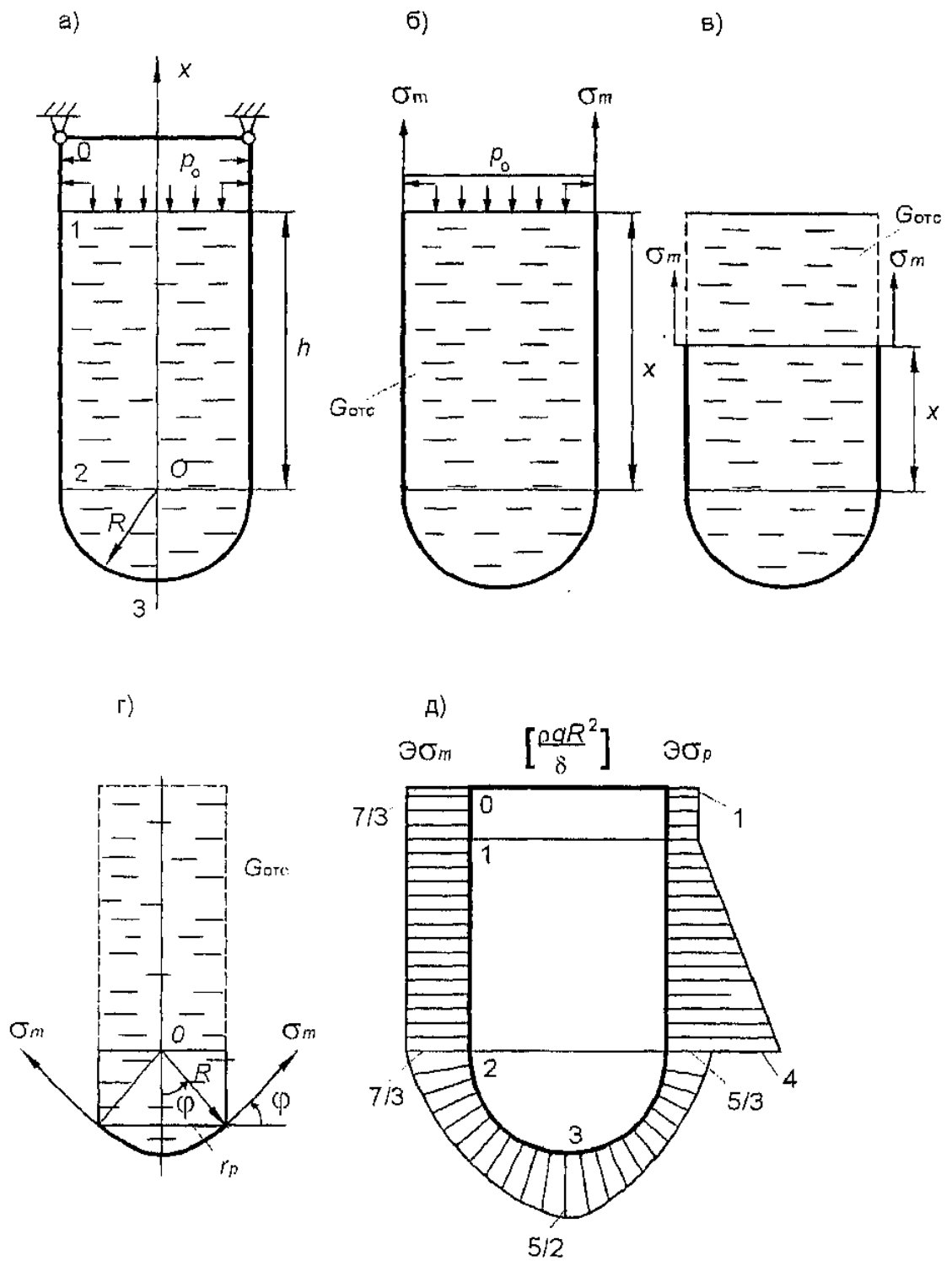


Рис. 10.9

$$P_{отс} + p_0 F_{yz} = \rho g \cdot \left[\frac{1}{3} \pi h_c^2 (3R - h_c) + \pi r^2 h_{\pi} \right] + p_0 \pi r^2 = 2\pi r \sigma_m \delta \sin \varphi,$$

$$\sigma_m(\varphi) = \frac{\rho g R^2}{\delta} \left(2 + \frac{1 - \cos^3 \varphi}{3 \sin^2 \varphi} \right),$$

$$\sigma_{m2} = \sigma_m \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{7\rho g R}{3\delta}, \quad \sigma_{m3} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sigma_m(\varphi) = \frac{5\rho g R}{2\delta},$$

а затем — окружные напряжения ($x = -R \cos \varphi$):

$$p = \rho g (4 + \cos \varphi),$$

$$\sigma_p(\varphi) = \frac{pR}{\delta} - \sigma_m = \frac{\rho g R^2}{\delta} \left(2 + \cos \varphi - \frac{1 - \cos^3 \varphi}{3 \sin^2 \varphi} \right),$$

$$\sigma_{p2} = \sigma_p \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{5\rho g R}{3\delta}, \quad \sigma_{p3} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sigma_p(\varphi) = \frac{5\rho g R}{2\delta}.$$

Отметим, что равенство $\sigma_{p3} = \sigma_{m3}$ можно получить без вычислений из соображений симметрии в точке сферы $\varphi = 0$.

На последнем участке необходимо исследовать напряжения на экстремум:

$$\begin{aligned} \sigma_m'(\varphi) &= \frac{\rho g R^2}{3\delta} \cdot \frac{3 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi (1 - \cos^3 \varphi)}{\sin^4 \varphi} = \\ &= - \frac{\rho g R^2}{3\delta} \cdot \frac{\cos \varphi (1 - \cos \varphi)^2 (2 + \cos \varphi)}{\sin^3 \varphi} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p'(\varphi) &= \frac{\rho g R^2}{\delta} \cdot \left[-\sin \varphi - \frac{3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 2 \cos \varphi (1 - \cos^3 \varphi)}{3 \sin^3 \varphi} \right] = \\ &= - \frac{\rho g R^2}{3\delta} \cdot \frac{(1 - \cos \varphi)^2 (2 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi + 3)}{\sin^3 \varphi} = 0 \end{aligned}$$

Поскольку эти уравнения не имеют решений на интервале $(0, \pi/2)$, то экстремумы отсутствуют.

Эпюры меридиональных и кольцевых напряжений изображены на рис. 10.9, д. Обратим внимание на разрыв кольцевых напряжений σ_p в месте сопряжения цилиндра со сферой. В этой зоне использованная теория не справедлива. Необходимо приме-

нять более сложные уравнения, которые в сопротивлении материалов не рассматриваются. Обычно в подобных сечениях используется такое конструктивное решение, как установка упругого кольца (шпангоута). ■

Пример 10.5. Круговая цилиндрическая оболочка большого удлинения находится под действием внутреннего давления p_0 и крутящего момента M (рис. 10.10, а). Используя теорию прочности IV, определить толщину цилиндрической оболочки. В расчетах принять: $R = 1$ м; $[\sigma] = 100$ МПа; $p_0 = 1$ МПа; $M = 3$ МН · м.

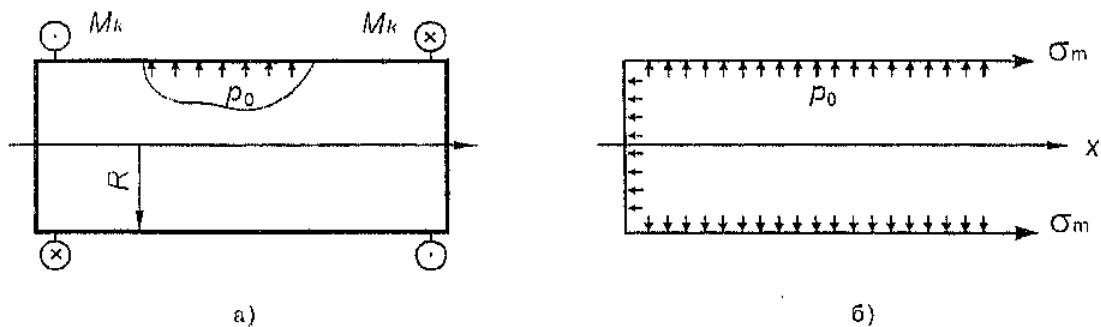


Рис. 10.10

Решение. 1. В соответствии с п.1 алгоритма отдельно вычисляем нормальные и касательные напряжения, используя соответственно модели оболочки и вала, работающего на кручение.

Окружные и меридиональные напряжения определяем с использованием результатов примера 10.2 (рис. 10.10, б):

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{\delta};$$

$$p_0 F_{yz} = p_0 \pi R^2 = 2\pi R \delta \sigma_m, \quad \sigma_m = \frac{p_0 R}{2\delta}.$$

Отсюда дополнительно получаем следующее общее для нагруженных постоянным давлением круговых цилиндрических оболочек утверждение: *окружные напряжения в два раза больше меридиональных.*

Далее рассматриваем кручение оболочки как тонкостенного стержня (см. гл. 4). При этом касательные напряжения в поперечном сечении определяются так:

$$\tau_k = \frac{M}{W_k}; \quad W_k = 2F_k \delta = 2\pi R^2 \delta.$$

2. В соответствии с п. 2 алгоритма находим главные напряжения по формуле (8.38), предварительно определяя σ_x , σ_y и τ :

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]},$$

$$\sigma_x = \sigma_m, \quad \sigma_y = \sigma_p, \quad \tau_{xy} = \tau_k;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{4\delta} \left(3p_0 R \pm \sqrt{p_0^2 R^2 + \frac{4M^2}{\pi^2 R^4}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\delta} \cdot \left[3 \cdot 10^6 \cdot 1 \pm \sqrt{(10^6 \cdot 1)^2 + \frac{4 \cdot (3 \cdot 10^6)^2}{\pi^2 \cdot 1^4}} \right] = \\ &= \frac{10^6}{\delta} \cdot (0,750 \pm 0,539) \text{ Па,} \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \frac{1,29}{\delta} \text{ МПа,} \quad \sigma_2 = \frac{0,211}{\delta} \text{ МПа,} \quad \sigma_3 = 0.$$

Отсюда находим эквивалентные напряжения (см. (8.49)):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{\delta} \sqrt{1,29^2 + 0,211^2 - 2 \cdot 1,29 \cdot 0,211} = \\ &= \frac{1,08}{\delta} \text{ МПа.} \end{aligned}$$

3. Используя условие прочности $\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]$, приходим к неравенству:

$$\delta \geq \frac{1,08}{[\sigma]} = \frac{1,08}{100} = 0,00108 \text{ м.}$$

Окончательно принимаем $\delta = 1,1$ мм. ■

Задачи

10.1. Определить толщину находящейся под действием внутреннего давления $p_0 = 1,5$ МПа круговой цилиндрической оболочки диаметра $D = 2$ м. Расчет выполнить по теории прочности IV, приняв $[\sigma] = 100$ МПа.

10.2. Круговая цилиндрическая оболочка (рис. 10.11) радиуса $R = 0,7$ м и с толщиной $\delta = 0,001R$ заполнена жидкостью плот-

ности $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$ до глубины $h = 2,5R$. Определить запас прочности, если $\sigma_{0,2} = 70 \text{ МПа}$.

10.3. Круговая цилиндрическая оболочка (см. рис. 10.11) радиуса $R = 0,5 \text{ м}$ наддута давлением $p_0 = 0,5 \text{ МПа}$. Используя теорию прочности IV, определить ее толщину, если $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.

10.4. Полусферическая оболочка (рис. 10.12) диаметра $D = 1,5 \text{ м}$ заполнена жидкостью плотности $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ до глубины $h = 2R/3$. Определить толщину оболочки, используя теорию прочности III, если $[\sigma]_p = 60 \text{ МПа}$.

10.5. Полусферическая оболочка (рис. 10.12) диаметра D заполнена жидкостью плотности ρ до глубины h и наддута избыточным давлением p_0 . Определить толщину оболочки, используя теорию прочности IV. В расчетах принять: $D = 2,5 \text{ м}$; $\rho = 850 \text{ кг/м}^3$; $p_0 = 0,2 \text{ МПа}$; $h = R/2$; $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$.

10.6. Опирающийся на нижнее основание резервуар в виде усеченного конуса (рис. 10.13), заполнен жидкостью плотности ρ . Определить максимальные главные напряжения. В расчетах принять: $D = 14 \text{ м}$; $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$; $h = 4 \text{ м}$; $\delta = 8 \text{ мм}$.

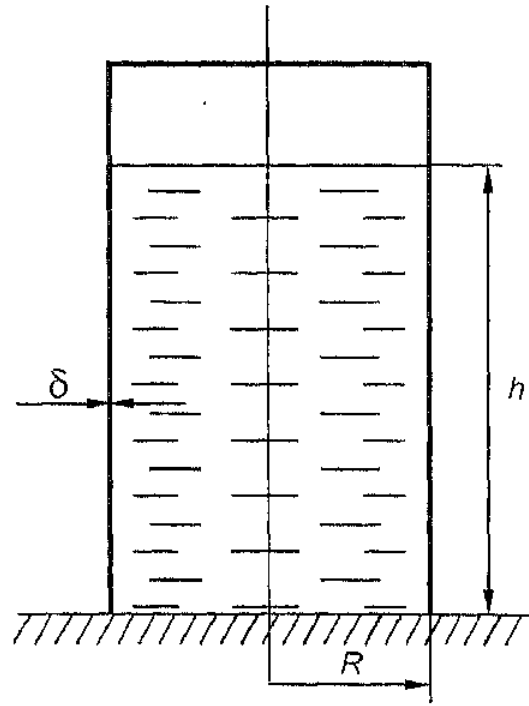


Рис. 10.11

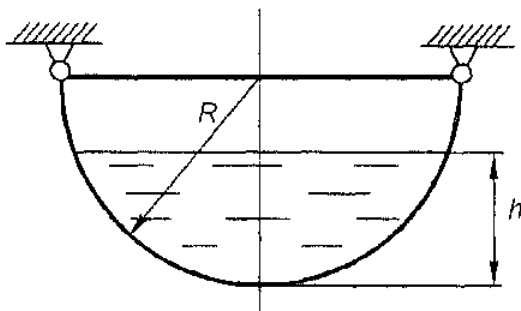


Рис. 10.12

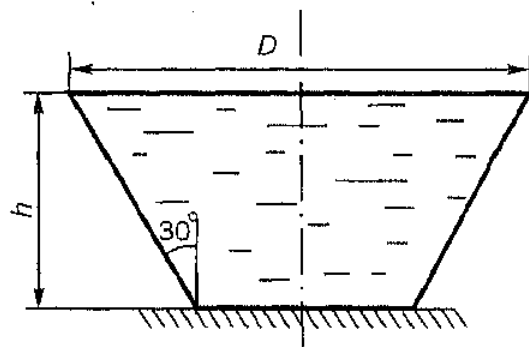


Рис. 10.13

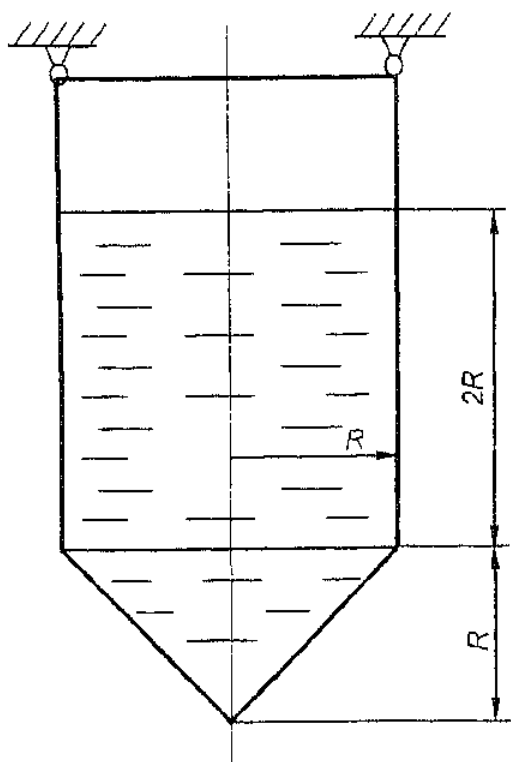


Рис. 10.14

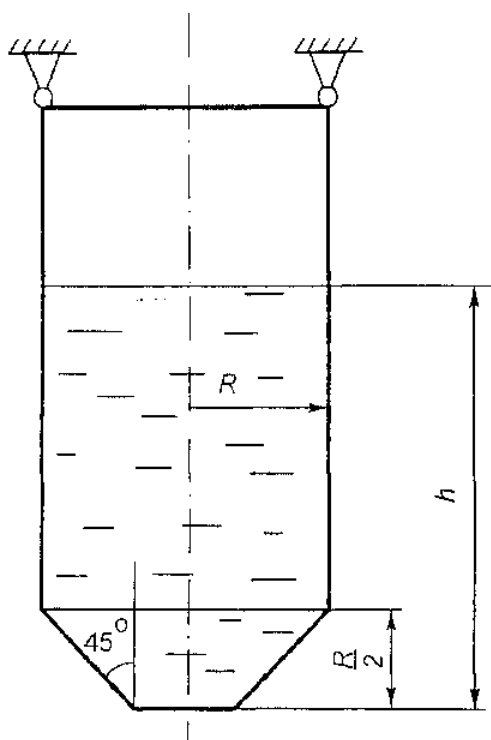


Рис. 10.15

10.7. Круговая цилиндрическая оболочка (рис. 10.14) радиуса $R = 0,8$ м с коническим дном заполнена жидкостью плотности $\rho = 800$ кг/м³ и надута давлением $p_0 = \rho g R / 2$. Определить толщину оболочки, используя теорию прочности IV, если $[\sigma] = 80$ МПа.

10.8—10.11. Для наддутых избыточным давлением p_0 составных оболочек (жидкость отсутствует), изображенных соответственно на рис. 10.15—10.18, определить их толщину, используя теорию прочности III. В расчетах принять: $R = 1$ м; $p_0 = 0,4$ МПа; $H = 3R$; $[\sigma] = 70$ МПа.

10.12—10.15. Для заполненных жидкостью до глубины h составных оболочек, изображенных соответственно на рис. 10.15—10.18, определить их

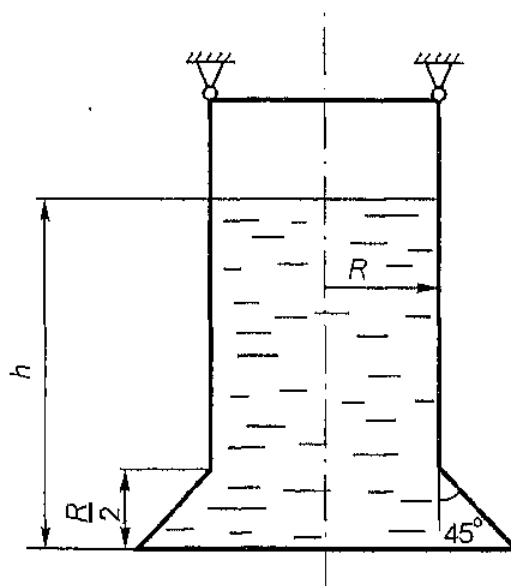


Рис. 10.16

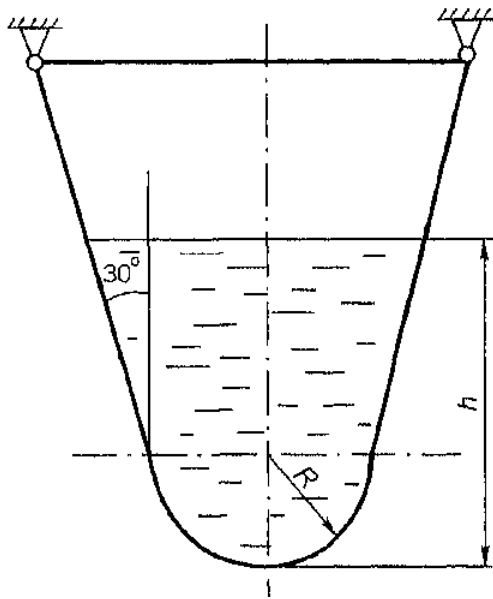


Рис. 10.17

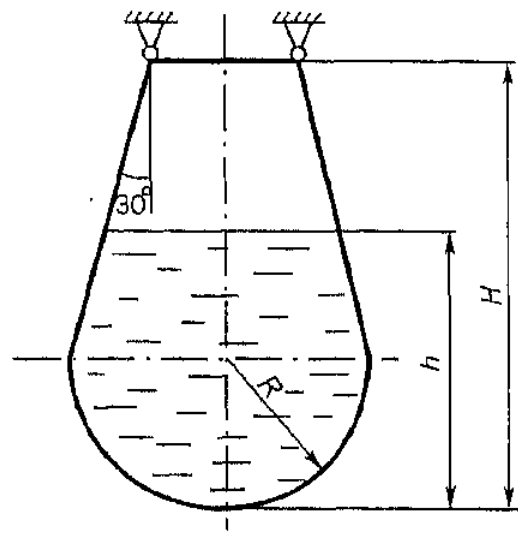


Рис. 10.18

толщину, используя теорию прочности IV. В расчетах принять: $R = 1,5$ м; $\rho = 850$ кг/м³; $h = 2R$; $H = 3R$; $[\sigma] = 100$ МПа.

10.16. Определить значения главных напряжений в нижнем сечении длинной круговой цилиндрической оболочки (рис. 10.19) радиуса $R = 0,5$ м и толщины $\delta = 0,005R$, заполненной жидкостью плотности $\rho = 850$ кг/м³ на глубину $h = 3R$ и нагруженной крутящим моментом $M = \pi \rho g R^4$.

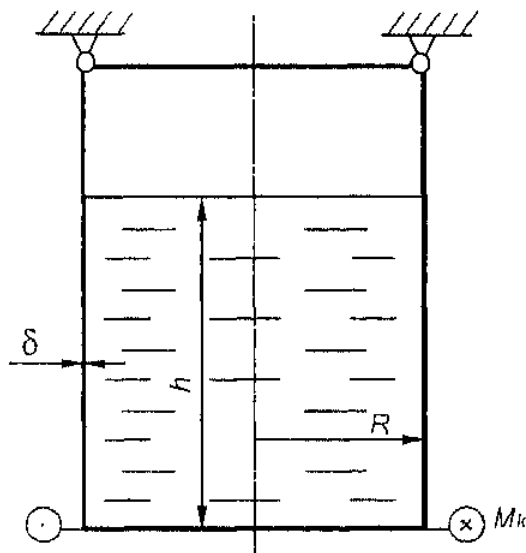


Рис. 10.19

10.17. Определить запас прочности круговой цилиндрической оболочки (рис. 10.20), наддутой избыточным давлением $p_0 = 0,2$ МПа и нагруженной крутящим моментом $M = 100$ кН·м, используя тео-

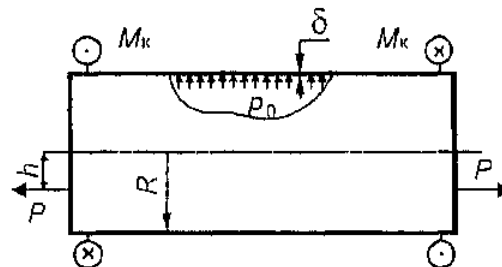


Рис. 10.20

рию прочности III. В расчетах принять: радиус оболочки $R = 1$ м; $\delta = 0,006R$; $P = 0$; $\sigma_T = 200$ МПа.

10.18—10.21. Для составных оболочек (см. рис. 10.15—10.18), заполненных жидкостью до глубины h и наддутых давлением p_0 , определить максимальные главные напряжения. В расчетах принять: $R = 1,5$ м; $\delta = 0,006R$; $h = 2,5R$; $\rho = 850$ кг/м³; $H = 3R$; $p_0 = 0,4$ МПа.

10.22. Длинная круговая цилиндрическая оболочка наддута давлением p_0 , нагружена продольной силой P и крутящим моментом M (см. рис. 10.20). Определить запас прочности, используя теорию прочности IV. В расчетах принять: диаметр оболочки $D = 0,6$ м; $h = 0,18$ м; $\delta = 4$ мм; $P = 75$ кН; $p_0 = 0,8$ МПа; $M = 5$ кН · м; $\sigma_{0,2} = 155$ МПа.

10.23. Длинная круговая цилиндрическая оболочка наддута давлением p_0 , нагружена продольной силой P и крутящим моментом M (см. рис. 10.20). Определить запас прочности, используя теорию прочности IV. В расчетах принять: диаметр оболочки $D = 0,5$ м; $h = 0,25$ м; $\delta = 10$ мм; $P = -700$ кН; $p_0 = 11$ МПа; $M = 30$ кН · м; $\sigma_{0,2} = 700$ МПа.

Глава 11

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

В некоторых случаях для построения адекватных расчетных схем конструкций приходится отказываться от некоторых гипотез. В частности, согласно принципу начальных размеров (аксиома 3) области G и G' , занимаемые недеформированным и деформированным телами, полагаются приближенно совпадающими, и внутренние силовые факторы для стержня вычисляются без учета изменения формы его оси. Эта аксиома, а также закон Гука (аксиома 7) приводят к принципу суперпозиции (утверждение П.2), который позволяет рассматривать простейшие виды деформации стержней независимо.

Однако, например, для гибких стержней изгибающий момент от продольной силы с плечом, соответствующим прогибу, оказывается значительным. В связи с этим в данной главе частично откажемся от аксиомы 3 и будем полагать, что продольные силы оказывают влияние на изгиб. Кроме того, в некоторых случаях приходится также допускать наличие пластических деформаций, т.е. считать, что не выполняется закон Гука (см. § 11.2 и гл. 13, 14).

§ 11.1. Продольно-поперечный изгиб

Расширяя определение 5.2, будем рассматривать следующий вид деформации.

Определение 11.1. *Продольно-поперечным изгибом* стержня (балки) называется такой изгиб, при котором продольные силы оказывают влияние на упругую линию и напряжения $\sigma = \sigma_x$, τ_{xy} и τ_{xz} в любом его поперечном сечении распределены так, что векторы внутренних силовых факторов имеют вид

$$R = Ni + Q_y j + Q_z k, \quad M = M_y j + M_z k, \quad M_x = 0. \quad \blacksquare \quad (11.1)$$

Справедливы условия, аналогичные приведенным в утверждении 5.1.

Утверждение 11.1. *(Условия продольно-поперечного изгиба.)* Необходимым условием продольно-поперечного изгиба балки при силовом нагружении является следующий вид векторов внешних сосредоточенных и распределенных сил и моментов:

$$P_k = P_{kx}i + P_{ky}j + P_{kz}k, \quad q = pi + q_yj + q_zk,$$

$$M_l = M_{ly}j + M_{lz}k, \quad m = m_yj + m_zk. \quad \blacksquare \quad (11.2)$$

Изгиб стержня под действием продольной силы также рассматривается в рамках внецентренного растяжения-сжатия. Однако там полагается, что изгибающие моменты не зависят от продольных сил.

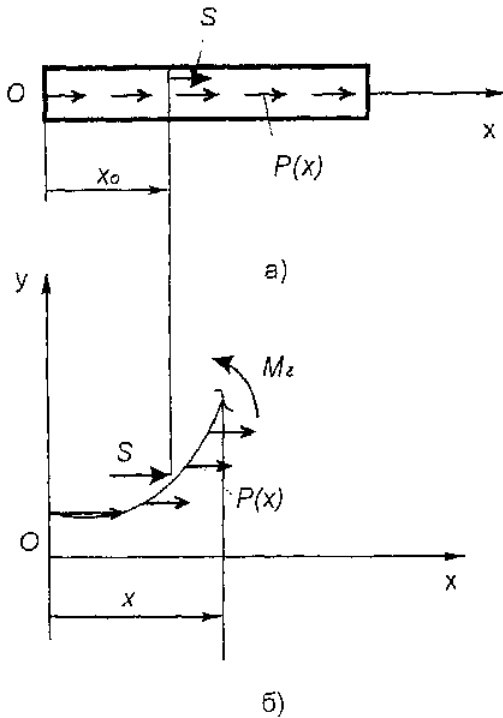


Рис. 11.1

ответствует сжимающему продольному усилию. Если при деформации направление внешних сил не меняется, то полный изгибающий момент имеет вид (рис. 11.1, б)

$$M_z = M_p + M_s, \quad (11.3)$$

$$M_s = -S [y(x) - y_0] H(x - x_0) - \int_0^x p(\xi) [y(x) - y(\xi)] d\xi,$$

где M_p и M_s — изгибающие моменты от поперечной и продольной нагрузок, y_0 — ордината точки приложения силы S в деформированном состоянии, а $H(x)$ — единичная функция Хевисайда, определяемая так: $H(x) = 1$ при $x \geq 0$, $H(x) = 0$ при $x < 0$.

Формула для M_S очевидным образом может быть обобщена на случай конечного числа сосредоточенных сил. Кроме того, возможен такой вариант продольной нагрузки, когда ее направление в деформированном состоянии зависит от угла поворота θ поперечного сечения (рис. 11.2):

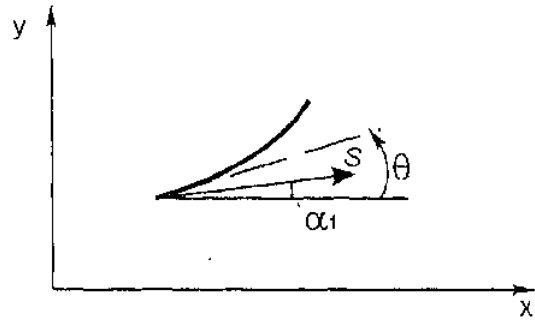


Рис. 11.2

$$S = S (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1), \quad p = p(x) (\cos \alpha_2, \sin \alpha_2), \quad \alpha_k = \alpha_k(\theta). \quad (11.4)$$

Определение 11.2. При $\alpha_k = \theta$ нагрузка называется *следящей*.

Формулы (11.3) соответствуют $\alpha_k = 0$. Далее ограничимся этим вариантом. Подстановка равенств (11.3) в уравнения (5.15) или (5.20) приводит к уравнениям упругой линии при продольно-поперечном изгибе, к которым должны быть добавлены соответствующие граничные условия (5.24)—(5.26).

Далее будем рассматривать только линейный вариант, полагая, как правило, что погонная продольная нагрузка отсутствует ($p(x) \equiv 0$), а единственная сосредоточенная сила приложена на конце стержня:

$$EJ_z y'' + Sy = M_p + Sy_0. \quad (11.5)$$

Оно аналогично (5.22) и (5.23) может быть также представлено так:

$$(EJ_z y'')' + Sy' = Q_y; \quad (11.6)$$

$$(EJ_z y'')'' + Sy'' = q. \quad (11.7)$$

Как правило, при решении задач применяются следующие формы уравнений, вытекающие из (11.5) и (11.7) при учете (5.20):

$$y'' \pm \alpha^2 y = \frac{M_p}{EJ_z} \pm \alpha^2 y_0, \quad M''_z \pm \alpha^2 M_z = q, \quad \alpha^2 = \frac{|S|}{EJ_z}, \quad (11.8)$$

где верхний знак соответствует сжимающим ($S > 0$), а нижний — растягивающим ($S < 0$) усилиям.

Отметим, что (11.5), (11.6) и первое уравнение в (11.8) могут использоваться только в статически определимых задачах, а

второе уравнение в (11.8) — в задачах с силовыми граничными условиями (5.24).

Таким образом, первый шаг при исследовании продольно-поперечного изгиба заключается в определении упругой линии с помощью решения соответствующих краевых задач (см. также § 5.2). При некоторых значениях продольных сил (они совпадают с критическими силами, определенными в § 11.2) эти решения обращаются в бесконечность, что связано с линеаризацией уравнений. Если использовать нелинейные уравнения типа (5.14), то в окрестностях указанных значений сил прогибы будут большими, но конечными. Однако обычно эти вопросы в сопротивлении материалов не рассматриваются.

Подход, связанный с решением краевых задач, при переменных характеристиках стержня и разрывной нагрузке становится достаточно сложным. Приближенный способ определения упругой линии, позволяющий избежать решения краевой задачи, указан в § 11.3.

Алгоритм расчета на прочность при продольно-поперечном изгибе заключается в следующем.

1. Вычисляется полный изгибающий момент M_z , если это возможно, по решению краевой задачи для второго уравнения в (11.8) либо по найденной упругой линии с помощью соотношений (11.3).

В первом случае используются указанные в (5.27) в скобках силовые условия стыковки участков:

$$M_z \Big|_{x=x_*-0} = M_z \Big|_{x=x_*+0} + M_*, \quad Q_y \Big|_{x=x_*-0} = Q_y \Big|_{x=x_*+0} + Q_*, \quad (11.9)$$

где M_* и Q_* — внешние сосредоточенные момент и сила в сечении $x = x_*$.

2. Проводится расчет на прочность так же, как и при внецентренном растяжении-сжатии (см. § 5.2). При этом нормальные напряжения в сечении вычисляются по вытекающей из (6.9) формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_z}{J_z} y. \quad (11.10)$$

Однако проектировочный расчет здесь осложняется тем, что упругая линия как решение краевой задачи и, соответственно, M_z и нормальные напряжения зависят от геометрических параметров сечения сложным нелинейным образом.

Поэтому обычно ограничиваются поверочным расчетом (находят запас прочности n , см. определение П.18). При этом возможны три варианта расчетов: а) считается неизменной продольная нагрузка; б) полагается фиксированной поперечная нагрузка; в) поперечная и продольная нагрузки изменяются пропорционально. В последних двух вариантах задача сводится к уравнению типа $\sigma_{\max}(n) = \sigma_{\text{пр}}$, которое, как правило, является сложным нелинейным и решается с использованием какого-либо численного метода. ■

Пример 11.1. Для балки постоянной жесткости, изображенной на рис. 11.3, определить полный изгибающий момент и упругую линию.

Решение. Нумерация характерных сечений балки указана на рис. 11.3.

Поскольку в данном случае граничные условия являются силовыми (см. (5.24)):

$$M_z(0) = M_z(l) = 0,$$

то для решения используем второе дифференциальное уравнение в (11.8), где следует положить $q = 0$. Его общие решения для участков 1—2 и 2—3 имеют вид

$$M_{z,12} = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x, \quad M_{z,23} = D_1 \sin \alpha x + D_2 \cos \alpha x.$$

Константы C_1 , C_2 , D_1 и D_2 определяются из указанных выше граничных условий и условий стыковки участков (см. (11.9), на обоих участках использована одна и та же система координат):

$$M_{z,12}(l_1) = M_{z,23}(l_1), \quad M'_{z,12}(l_1) = M'_{z,23}(l_1) + P.$$

Тогда приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 \sin \alpha l_1 + C_2 \cos \alpha l_1 - D_1 \sin \alpha l_1 - D_2 \cos \alpha l_1 = 0,$$

$$\alpha C_1 \cos \alpha l_1 - \alpha C_2 \sin \alpha l_1 - \alpha D_1 \cos \alpha l_1 + \alpha D_2 \sin \alpha l_1 = P,$$

$$D_1 \sin \alpha l + D_2 \cos \alpha l = 0,$$

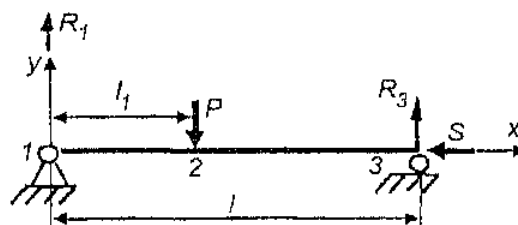


Рис. 11.3

решение которой таково:

$$C_1 = \frac{P}{\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha(l - l_1)}{\sin \alpha l}, \quad C_2 = 0,$$

$$D_1 = -\frac{P}{\alpha} \cos \alpha l \frac{\sin \alpha l_1}{\sin \alpha l}, \quad D_2 = \frac{P}{\alpha} \sin \alpha l_1.$$

Следовательно, изгибающие моменты на каждом участке определяются выражениями:

$$M_{z,12} = \frac{P}{\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha(l - l_1)}{\sin \alpha l} \sin \alpha x,$$

$$M_{z,23} = \frac{P}{\alpha} \frac{\sin \alpha l_1}{\sin \alpha l} \sin \alpha(l - x).$$

Далее, вычисляя изгибающие моменты от продольной нагрузки

$$M_{P,12} = \frac{P(l - l_1)}{l} x, \quad M_{P,23} = \frac{Pl_1}{l} (l - x),$$

с помощью уравнения (11.5) по участкам находим упругую линию балки ($y_0 = 0$):

$$y_{12} = \frac{P}{S} \left[\frac{l - l_1}{l} x - \frac{\sin \alpha(l - l_1)}{\alpha \sin \alpha l} \sin \alpha x \right],$$

$$y_{23} = \frac{P}{S} \left[\frac{l_1}{l} (l - x) - \frac{\sin \alpha l_1}{\alpha \sin \alpha l} \sin \alpha(l - x) \right]. \quad \blacksquare$$

Пример 11.2. Для балки постоянной жесткости, изображенной на рис. 11.4, определить полный изгибающий момент и упругую линию. Поперечная сила P приложена в середине балки ($l_1 = l/2$).



Рис. 11.4

Решение. Нумерация характерных сечений балки указана на рис. 11.4.

Решение задачи с использованием кинематических граничных условий (см. (5.25))

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0$$

приводит к громоздким уравнениям, поэтому воспользуемся симметрией задачи и рассмотрим участок 1—2. Для решения используем дифференциальное уравнение в форме (11.7), где следует положить $q = 0$. Его общее решение для рассматриваемого участка имеет вид

$$y_{12} = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 x + C_4 .$$

Константы C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) определяются из следующих граничных условий:

$$y_{12}(0) = 0, \quad y'_{12}(0) = 0, \quad y'_{12}(l_1) = 0, \quad y'''_{12}(l_1) = \frac{P}{EJ} .$$

Тогда приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$C_2 + C_4 = 0,$$

$$\alpha C_1 + C_3 = 0,$$

$$\alpha C_1 \cos \alpha l_1 - \alpha C_2 \sin \alpha l_1 + C_3 = 0,$$

$$- \alpha^3 C_1 \cos \alpha l_1 + \alpha^3 C_2 \sin \alpha l_1 = \frac{P}{EJ} .$$

Решая ее, получаем:

$$C_1 = - \frac{P}{\alpha^3 EJ}, \quad C_2 = \frac{P}{\alpha^3 EJ} \frac{1 - \cos \alpha l_1}{\sin \alpha l_1},$$

$$C_3 = \frac{P}{\alpha^2 EJ}, \quad C_4 = - \frac{P}{\alpha^3 EJ} \frac{1 - \cos \alpha l_1}{\sin \alpha l_1} .$$

Тогда изгибающие моменты и прогибы на участке определяются выражениями:

$$M_{z,12} = \frac{P}{\alpha} \left(\sin \alpha x - \frac{1 - \cos \alpha l_1}{\sin \alpha l_1} \cos \alpha x \right),$$

$$y_{12} = \frac{P}{\alpha^3 EJ} \left[\alpha x - \sin \alpha x - \frac{1 - \cos \alpha l_1}{\sin \alpha l_1} (1 - \cos \alpha x) \right] . \blacksquare$$

Пример 11.3. Выполнить поверочный расчет на прочность изображенной на рис. 11.3 балки прямоугольного поперечного сечения с основанием b и высотой h , считая, что продольная

сила остается постоянной. В расчетах принять: $P = 1$ кН, $S = 15,4$ кН; $l = 1$ м, $l_1 = 2l/3$ см, $b = 2$ см, $h = 4$ МПа, $E = 7,2 \cdot 10^4$ МПа, $\sigma_{пр} = \sigma_{пр.р} = \sigma_{пр.с} = 80$ МПа.

Решение. Вычисляем площадь, момент инерции и момент сопротивления изгибу сечения балки (см. табл. П.6):

$$F = bh = 2 \cdot 4 = 8 \text{ см}^2, \quad J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10,7 \text{ см}^4,$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{2 \cdot 4^2}{6} = 5,33 \text{ см}^3.$$

Находим параметры α (см. (11.8)), αl :

$$\alpha = \sqrt{\frac{S}{EJ}} = \sqrt{\frac{15,4 \cdot 10^3}{7,2 \cdot 10^{10} \cdot 10,7 \cdot 10^{-8}}} = 1,41 \text{ м}^{-1};$$

$$\alpha l = 1,41 \cdot 1 = 1,41$$

и с учетом результатов примера определяем изгибающие моменты (в ньютон-метрах):

$$\begin{aligned} M_{z,12} &= \frac{P}{\alpha} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha l}{3}}{\sin \alpha l} \sin \alpha x = \frac{1 \cdot 10^3}{1,41} \cdot \frac{\sin \frac{1,41}{3}}{\sin 1,41} \sin 1,41x = \\ &= 325 \sin 1,41x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{z,23} &= \frac{P}{\alpha} \cdot \frac{\sin \frac{2\alpha l}{3}}{\sin \alpha l} \sin \alpha(l-x) = \frac{1 \cdot 10^3}{1,41} \cdot \frac{\sin \frac{2,82}{3}}{\sin 1,41} \sin 1,41(1-x) = \\ &= 581 \sin 1,41(1-x). \end{aligned}$$

Исследуя эти функции, убеждаемся, что изгибающий момент достигает наибольшего значения при $x = l_1$:

$$M_{z \max} = 325 \sin \left(1,41 \cdot \frac{2 \cdot 1}{3} \right) = 263 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Поскольку изгибающий момент пропорционален поперечной силе P , а продольная сила по условию задачи считается неизменной, то уравнение для запаса прочности n (см. п. 2 алгоритма) является линейным ($N = -S$):

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{S}{F} + \frac{M_z \text{ макс } n}{W_z}.$$

Отсюда находим

$$n = \frac{\sigma_{\text{пр}} - \frac{S}{F}}{\frac{M_z}{W_z}} = \frac{80 \cdot 10^6 - \frac{15,4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}}}{\frac{263}{5,33 \cdot 10^{-6}}} = 1,23. \blacksquare$$

Задачи

В задачах 11.1—11.9 для балок, изображенных на указанных рисунках, с помощью интегрирования дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба определить прогиб и изгибающие моменты.

11.1. Рис. 11.5. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $P = 1$ кН, $l = 2$ м, $b = 5$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (8l^2)$.

11.2. Рис. 11.6. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $M = 1$ кН·м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (8l^2)$.

11.3. Рис. 11.7. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $P = 1$ кН, $M = Pl$, $l = 2$ м, $b = 5$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (8l^2)$.

11.4. Рис. 11.8. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $P = 1$ кН, $M = Pl$, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (8l^2)$.

11.5. Рис. 11.9. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 2$ кН/м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (10l^2)$.

11.6. Рис. 11.10. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 5$ кН/м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (8l^2)$.

11.7. Рис. 11.11. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 0,25$ кН/м, $M = ql^2$, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (10l^2)$.

11.8. Рис. 11.12. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 5$ кН/м, $P = 0,25ql$, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (10l^2)$.

11.9. Рис. 11.13. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 4$ кН/м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (4l^2)$.

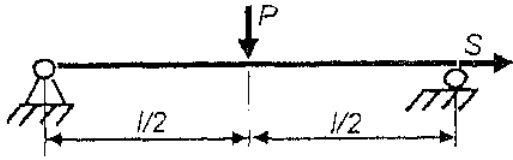


Рис. 11.5

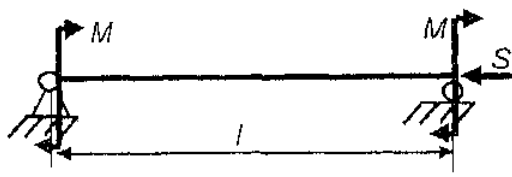


Рис. 11.6

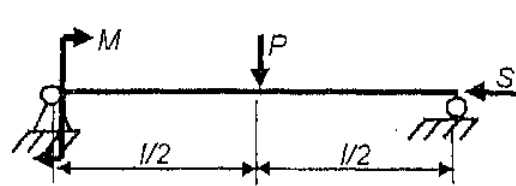


Рис. 11.7

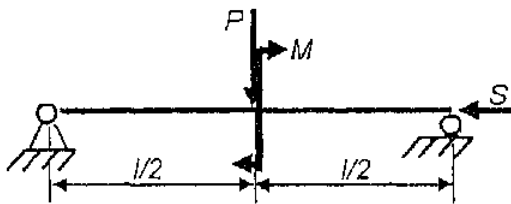


Рис. 11.8

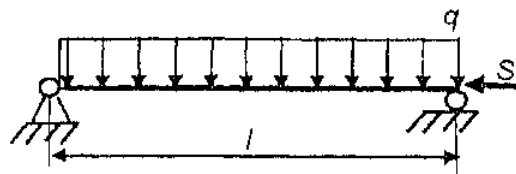


Рис. 11.9

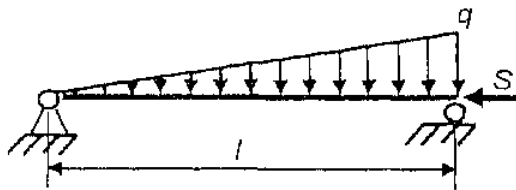


Рис. 11.10

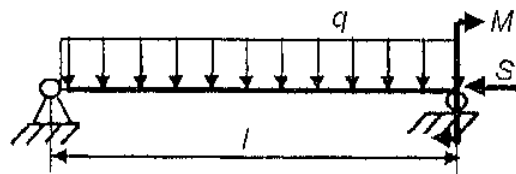


Рис. 11.11

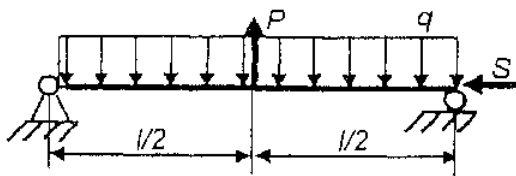


Рис. 11.12

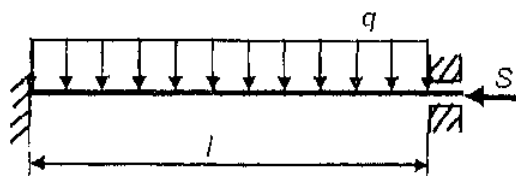


Рис. 11.13

В задачах 11.10—11.18 для балок, изображенных на указанных рисунках, с помощью интегрирования дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба определить максимальные изгибающие моменты и определить запас прочности балки, считая продольную силу постоянной.

11.10. Рис. 11.14. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 5$ кН/м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (12l^2)$, $\sigma_{пр} = 160$ МПа.

11.11. Рис. 11.15. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $M = 1$ кН·м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (10l^2)$, $\sigma_{пр} = 150$ МПа.

11.12. Рис. 11.16. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 2$ кН/м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (16l^2)$, $\sigma_{пр} = 160$ МПа.

11.13. Рис. 11.17. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 5$ кН/м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (16l^2)$, $\sigma_{пр} = 200$ МПа.

11.14. Рис. 11.18. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $P = 0,5$ кН, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (10l^2)$, $\sigma_{пр} = 200$ МПа.

11.15. Рис. 11.19. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $M = 0,5$ кН·м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (10l^2)$, $\sigma_{пр} = 150$ МПа.

11.16. Рис. 11.20. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 0,5$ кН/м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (16l^2)$, $\sigma_{пр} = 160$ МПа.

11.17. Рис. 11.21 Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 2$ кН/м, $P = 0,5ql$, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (16l^2)$, $\sigma_{пр} = 180$ МПа.

11.18. Рис. 11.22. Сечение — квадрат со стороной b . В расчетах принять: $q = 1$ кН/м, $l = 2$ м, $b = 4$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = \pi^2 EJ / (9l^2)$, $\sigma_{пр} = 150$ МПа.

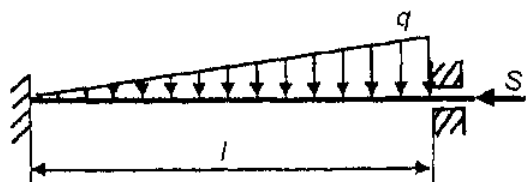


Рис. 11.14

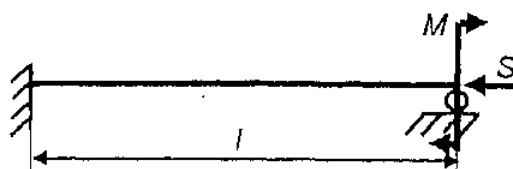


Рис. 11.15

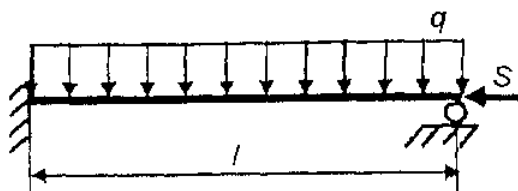


Рис. 11.16

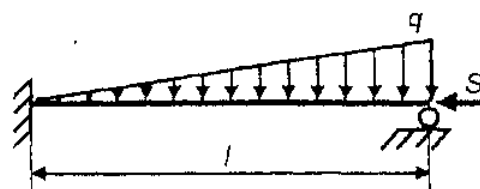


Рис. 11.17

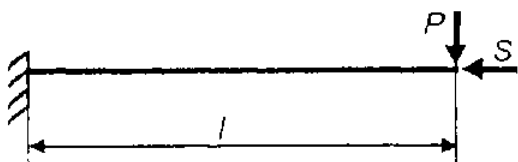


Рис. 11.18

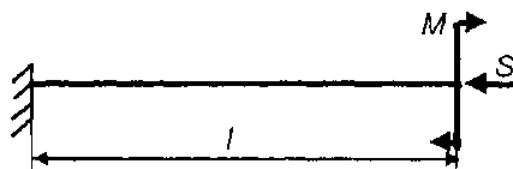


Рис. 11.19

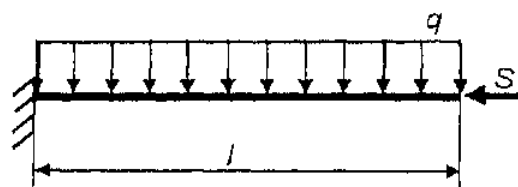


Рис. 11.20

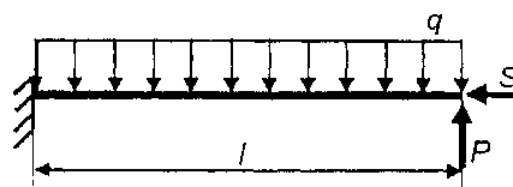


Рис. 11.21

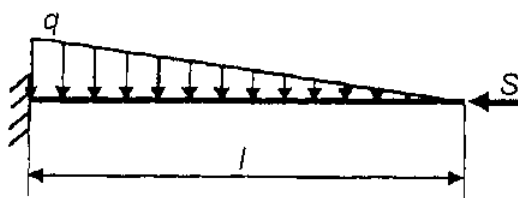


Рис. 11.22

§ 11.2. Устойчивость стержней

Положение равновесия системы называют устойчивым, если любым малым возмущениям этой системы соответствуют ее малые отклонения от этого положения.

В сопротивлении материалов рассматривается устойчивость прямолинейной формы равновесия стержней, находящихся под действием только продольной сжимающей нагрузки при однородных граничных условиях (см. § 5.2).

Определение 11.3. Такой вид деформации стержня называется *продольным изгибом*. ■

Соответствующее уравнение (*уравнение продольного изгиба*) для линейного варианта в случае действия и погонной нагрузки $p(x)$ и сосредоточенной силы S вытекает из (11.3) и (11.5):

$$EJ_z y'' = -S(y - y_0) H(x - x_0) - \int_0^x p(\xi) [y(x) - y(\xi)] d\xi. \quad (11.11)$$

Если погонная продольная нагрузка отсутствует, а единственная сосредоточенная сила приложена на конце стержня, то, как следует из (11.5) и (11.7), справедливы следующие уравнения:

$$EJ_z y'' + Sy = Sy_0 + M_R; \quad (11.12)$$

$$(EJ_z y'')'' + Sy'' = 0. \quad (11.13)$$

Здесь $M_R = M_R(y)$ — изгибающий момент от реакций в опорах, причем всегда $M_R(0) = 0$.

Все эти уравнения допускают тривиальное решение $y \equiv 0$, что соответствует существованию прямолинейной формы равновесия. В теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений соотношения (11.11)—(11.13) при $p(x) \equiv 0$ (или $S = 0$, $p(x) = p_0 f(x)$, где $f(x)$ — заданная функция) вместе с соответствующими однородными граничными условиями называются задачами на собственные значения S (или p_0). Они могут иметь бесконечное множество нетривиальных решений (*собственных функций, собственных форм*) $y_n(x)$ ($n \in N$) при $S = S_n$ ($p_0 = p_{0n}$).

В связи с этим Эйлером предложена следующая замена общей постановки задачи устойчивости механической системы.

Определение 11.4. Стержень является *устойчивым*, если $S < S_k$ ($p_0 < p_{0k}$), где

$$S_k = \min (S_1, S_2, \dots) \quad (p_{0k} = \min (p_{01}, p_{02}, \dots)) \quad (11.14)$$

— критическая сила (нагрузка), и теряет устойчивость при $S = S_k$ ($p_0 = p_{0k}$). ■

Отметим, что формы определяются не единственным образом. Кроме того, такой подход ничего не говорит о поведении стержня при $S \geq S_k$. Констатируется лишь возможность перехода от прямолинейной формы равновесия к криволинейной форме. Это связано с линеаризацией уравнений изгиба. Рассмотрение нелинейных уравнений позволяет получить решение и в этом случае (определить “закритическое” поведение стержня). В сопротивлении материалов эти вопросы не рассматриваются.

Таким образом, алгоритм исследования устойчивости стержня сводится к решению соответствующей краевой задачи на собственные значения и определению критической силы (11.14). ■

Так же, как и при продольно-поперечном изгибе, этот подход при переменных характеристиках стержня и разрывной нагрузке становится достаточно сложным. Приближенный способ определения критической силы, позволяющий избежать решения краевой задачи, указан в § 11.3.

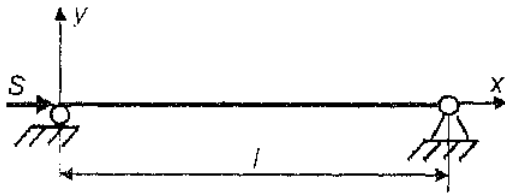


Рис. 11.23

Пример 11.4. (Задача Эйлера.) Найдём критическую силу для стержня, изображенного на рис. 11.23, полагая $EJ_2 = \text{const}$.

Решение. С использованием обозначений в (11.8) краевую задачу для уравнения (11.12) запишем так ($y_0 \equiv 0$):

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0. \quad (11.15)$$

Общее решение уравнения в (11.15) имеет вид ($\alpha > 0$):

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x.$$

Отсюда и из граничных условий в (11.15) получаем систему уравнений для определения констант C_1 и C_2 :

$$y(0) = C_1 = 0, \quad y(l) = C_1 \cos \alpha l + C_2 \sin \alpha l = 0, \quad (11.16)$$

которая имеет нетривиальное решение только в случае равенства нулю ее определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l \end{vmatrix} = \sin \alpha l = 0.$$

Вычисляя корни этого уравнения и используя определение 1.4, найдем

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{l}, \quad S_n = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2} n^2, \quad S_{\text{к}} = S_1 = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}. \quad (11.17)$$

Из (11.16) и (11.17) следует, что форма прогибов в критическом состоянии имеет вид

$$y = C \sin \frac{\pi x}{l}. \quad \blacksquare \quad (11.18)$$

Поскольку стержень может изгибаться в двух плоскостях, то формулу для критической силы следует записать так:

$$S_{\text{к}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \quad J = J_{\text{min}} = \min(J_y, J_z). \quad (11.19)$$

Определение 11.5. Критическая сила, задаваемая формулой (11.19), называется *эйлеровой силой*. ■

Пример 11.5. Определить критическую силу для ступенчатого стержня, изображенного на рис. 11.24, при $b = l/2$. Жесткость левой половины стержня $4EJ$, а правой EJ .

Решение. Нумерация характерных сечений балки указана на рис. 11.24. Будем использовать уравнение в (11.15). Рассмотрим два подхода к решению этой задачи, связанные с выбором системы координат.

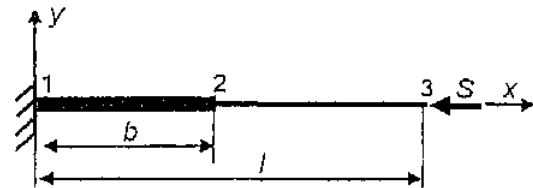


Рис. 11.24

Способ I предполагает применение стандартной системы координат: Ox — недеформированная ось балки, y — прогиб. Граничные условия и прогиб точки приложения продольной силы имеют следующий вид:

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y_0 = y(l).$$

Уравнения и их общие решения на каждом из двух участков следующие:

— участок 1—2:

$$y''_{12} + \frac{\alpha^2}{4} y_{12} = \frac{\alpha^2}{4} y_0, \quad y_{12} = C_1 \cos \frac{\alpha x}{2} + C_2 \sin \frac{\alpha x}{2} + y_0, \quad \alpha^2 = \frac{S}{EJ};$$

-- участок 2—3:

$$y''_{23} + \alpha^2 y_{23} = \alpha^2 y_0, \quad y_{23} = D_1 \cos \alpha x + D_2 \sin \alpha x + y_0.$$

Учитывая граничные условия и условия стыковки участков

$$y_{12}(l/2) = y_{23}(l/2), \quad y'_{12}(l/2) = y'_{23}(l/2),$$

приходим к следующей однородной системе уравнений относительно y_0 и констант C_1, C_2, D_1, D_2 :

$$C_1 + y_0 = 0,$$

$$\frac{\alpha}{2} C_2 = 0,$$

$$D_1 \cos \alpha l + D_2 \sin \alpha l = 0,$$

$$C_1 \cos \frac{\alpha l}{4} + C_2 \sin \frac{\alpha l}{4} - D_1 \cos \frac{\alpha l}{2} - D_2 \sin \frac{\alpha l}{2} = 0,$$

$$- C_1 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha l}{4} + C_2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha l}{4} + D_1 \alpha \sin \frac{\alpha l}{2} - D_2 \alpha \cos \frac{\alpha l}{2} = 0.$$

Далее необходимо использовать условие существования нетривиального решения этой системы уравнений — равенство нулю определителя ее матрицы. Однако доводить до конца этот способ решения не будем, так как тот же результат, но более просто получается с помощью другого подхода.

Способ II позволяет исключить из числа неизвестных y_0 . При этом ось абсцисс системы координат выбирается так: она проходит через точку приложения силы параллельно недеформированной оси стержня (см. рис. 11.12), вместо прогиба вводится функция $\tilde{y} = y - y_0$ — “прогиб относительно новой оси”. Тогда указанные выше граничные условия и равенство для прогиба в точке приложения продольной силы переходят в следующие (далее обходимся без волнистой линии в обозначении \tilde{y}):

$$y(0) = -y_0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Отметим, что первое равенство является дополнительным для определения y_0 и не входит в число граничных условий.

При таком подходе уравнения и их общие решения на каждом из двух участков следующие:

— участок 1—2:

$$y''_{12} + \frac{\alpha^2}{4} y_{12} = 0, \quad y_{12} = C_1 \cos \frac{\alpha x}{2} + C_2 \sin \frac{\alpha x}{2};$$

— участок 2—3:

$$y''_{23} + \alpha^2 y_{23} = 0, \quad y_{23} = D_1 \cos \alpha x + D_2 \sin \alpha x.$$

Учитывая граничные условия и приведенные выше условия стыковки участков, приходим к следующей однородной системе уравнений относительно констант C_1 , C_2 , D_1 , D_2 :

$$\frac{\alpha}{2} C_2 = 0,$$

$$D_1 \cos \alpha l + D_2 \sin \alpha l = 0,$$

$$C_1 \cos \frac{\alpha l}{4} + C_2 \sin \frac{\alpha l}{4} - D_1 \cos \frac{\alpha l}{2} - D_2 \sin \frac{\alpha l}{2} = 0,$$

$$- C_1 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha l}{4} + C_2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha l}{4} + D_1 \alpha \sin \frac{\alpha l}{2} - D_2 \alpha \cos \frac{\alpha l}{2} = 0.$$

Условие существования ее нетривиального решения приводит к следующему уравнению:

$$\cos \frac{\alpha l}{4} \left(\cos \frac{\alpha l}{2} - \sin^2 \frac{\alpha l}{4} \right) = 0,$$

которое эквивалентно двум уравнениям

$$\cos \frac{\alpha l}{4} = 0, \quad \cos \frac{\alpha l}{2} = \frac{1}{3}.$$

Критическое значение силы $S_{\text{к}}$, соответствующее наименьшему положительному решению этих уравнений, определяется формулой

$$S_{\text{к}} = \frac{4EJ}{l^2} \arccos^2 \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

Если условия закрепления стержня, его геометрия и жесткостные характеристики и/или нагрузка отличаются от тех, которые имеют место в задаче Эйлера, то формула (11.19) не будет справедливой. В общем случае она модифицируется следующим образом:

$$S_k = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}. \quad (11.20)$$

Определение 11.6. Коэффициент μ в формуле (11.20) называется *коэффициентом приведения длины*. ■

Он зависит от условий закрепления, характеристик стержня и типа нагрузки. Его можно найти, решая соответствующие задачи на собственные значения, что не всегда возможно. Приближенный способ определения критической силы, позволяющий избежать этих трудностей, указан в § 11.3.

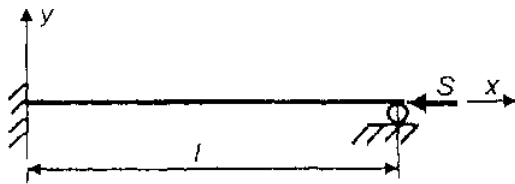


Рис. 11.25

Пример 11.6. Определить критическую силу и коэффициент приведения длины μ для изображенного на рис. 11.25 стержня постоянной жесткости EJ .

Решение. Способ I. Будем использовать уравнение (11.12), учитывая, что $y_0 = 0$ и $M_R = R(l - x)$ (R — неизвестная реакция в верхней опоре):

$$y'' + \alpha^2 y = r(l - x), \quad r = \frac{R}{EJ}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + \frac{r}{\alpha^2} (l - x).$$

Подставляя его в граничные условия

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

получаем однородную систему уравнений относительно C_1 , C_2 и r :

$$C_2 + \frac{r}{\alpha^2} l = 0,$$

$$\alpha C_1 - \frac{r}{\alpha^2} = 0,$$

$$C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l = 0.$$

Условие существования нетривиального решения (равенство нулю определителя системы) приводит к равенству

$$\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l = 0,$$

из которого следует трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l.$$

Его решение может быть найдено численно. Наименьший положительный корень $\alpha l \approx 4,49$. Соответствующая ему критическое значение силы и коэффициент приведения длины определяются так:

$$S_{\text{к}} = EJ \frac{\pi^2}{(0,7l)^2}, \quad \mu = 0,7.$$

Способ II. В нем будем использовать уравнение четвертого порядка (11.13)

$$y^{\text{IV}} + \alpha^2 y'' = 0,$$

которое имеет общее решение

$$y = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x + A_3 x + A_4.$$

Граничные условия для этого уравнения такие:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y''(l) = 0.$$

Отсюда следует система уравнений относительно A_1 , A_2 , A_3 и A_4 :

$$A_2 + A_4 = 0,$$

$$\alpha A_1 + A_3 = 0,$$

$$A_1 \sin \alpha l + A_2 \cos \alpha l + A_3 l + A_4 = 0,$$

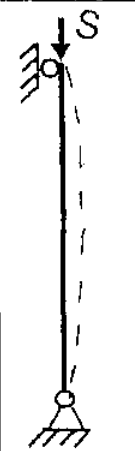
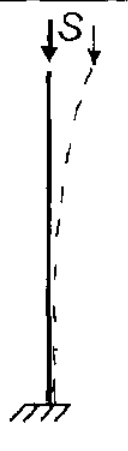

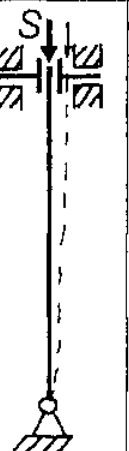
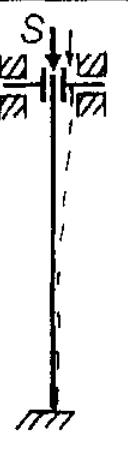

$$- \alpha^2 A_1 \sin \alpha l - \alpha^2 A_2 \cos \alpha l = 0.$$

Условие существования ее нетривиального решения приводит к тому же уравнению относительно α , которое было получено первым способом, и, естественно, к той же критической силе. ■

В некоторых случаях с помощью равенства (11.18) и метода продолжения решения коэффициент приведения длины можно указать сразу. Соответствующие результаты при $EJ = \text{const}$ приведены в табл. 11.1.

Поскольку до потери устойчивости стержень находится в состоянии растяжения-сжатия, то формулу (11.20) с использованием (1.6) можно привести к виду ($N = S$):

Таблица 11.1

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Схема |  |  |  |  |  |  |
| μ | 1 | 2 | $\frac{1}{k}$ | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ |

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{\mu l}{i}, \quad i = \sqrt{\frac{J}{F}}, \quad (11.21)$$

где i — радиус инерции сечения (см. (3.4)).

Определение 11.7. Величина λ в (11.21) называется *гибкостью стержня*. ■

Формулы (11.20) и (11.21) справедливы при выполнении закона Гука, т.е. если напряжения в стержне не превышают предела пропорциональности (см. § 1.2):

$$\sigma_k \leq \sigma_{\text{пц}}. \quad (11.22)$$

Отсюда и из (11.21) получаем, что формулы (11.20) и (11.21) можно применять только для *стержней большой гибкости* (длинных и тонких):

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пц}}, \quad \lambda_{\text{пц}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}. \quad (11.23)$$

Если $\lambda < \lambda_{\text{пц}}$, то зависимость $\sigma_k = \sigma_k(\lambda)$ — *диаграмма критических напряжений* — строится на основании опытных данных. Как правило, используются ее идеализации.

Для пластических материалов она имеет вид, указанный на рис. 11.26:

— при $\lambda < \lambda_T = (0,2 \div 0,4) \lambda_{\text{пц}}$ (*стержни малой гибкости*)
 $\sigma_k = \sigma_T$;

— при $\lambda_T \leq \lambda < \lambda_{пц}$ (стержни средней гибкости) $\sigma_k = \sigma_k(\lambda)$ — прямая, проходящая через точки (λ_T, σ_T) и $(\lambda_{пц}, \sigma_{пц})$:

$$\sigma_k = \sigma_T - \frac{\sigma_T - \sigma_{пц}}{\lambda_{пц} - \lambda_T} (\lambda - \lambda_T). \quad (11.24)$$

При этом обычно полагают:

— для сталей

$$\lambda_T = 0,4\lambda_{пц}; \quad (11.25)$$

— для цветных металлов

$$\lambda_T = 0,25 \lambda_{пц}. \quad (11.26)$$

Для хрупких материалов диаграмма критических напряжений имеет вид, указанный на рис. 11.27. Здесь полагается, что при $\lambda < \lambda_{пц}$ $\sigma_k = \sigma_k(\lambda)$ — прямая, проходящая через точки $(0, \sigma_B)$ и $(\lambda_{пц}, \sigma_{пц})$:

$$\sigma_k = \sigma_B - \frac{\sigma_B - \sigma_{пц}}{\lambda_{пц}} \lambda. \quad (11.27)$$

При исследовании устойчивости аналогично расчетам на прочность (см. п. VI § П.1) применяются два подхода.

1. Поверочный расчет. По заданной схеме, сечению, материалу и сжимающей силе S определяется коэффициент запаса устойчивости n_y :

$$n_y = \frac{\sigma_k}{\sigma}, \quad \sigma = \frac{S}{F}. \quad (11.28)$$

Он должен быть не меньше заданного $[n_y]$. Последний зависит от гибкости стержня, его материала и берется из справоч-

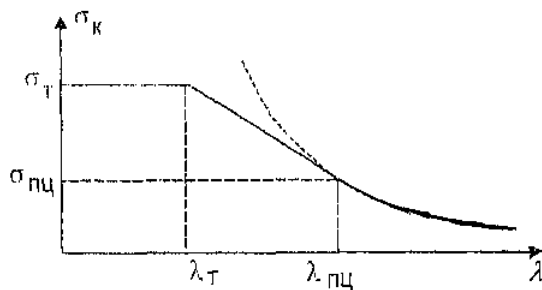


Рис. 11.26

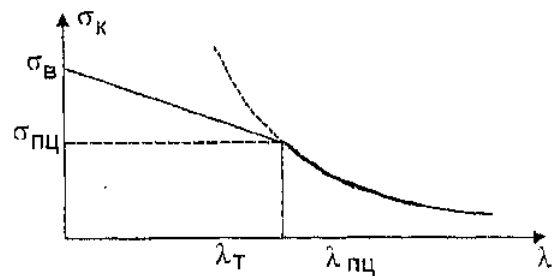


Рис. 11.27

ной литературы, задающей нормы устойчивости в конкретной отрасли промышленности.

Во многих случаях оправданно применение следующей эмпирической зависимости:

— при $\lambda < \lambda_{\text{пц}}$

$$n_y = A + B \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{пц}}} \right)^2; \quad (11.29)$$

— при $\lambda \geq \lambda_{\text{пц}}$

$$n_y = A + B. \quad (11.30)$$

Значения безразмерных параметров A и B для некоторых материалов приведены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

| Параметры | Пластичные металлы | Чугун | Дерево |
|-----------|--------------------|-------|--------|
| A | 1,8 | 5 | 2,8 |
| B | 1,2 | 0,5 | 0,4 |

Пример 11.7. Для рассмотренного в примере 11.4 стержня круглого поперечного сечения d выполнить поверочный расчет на устойчивость. В расчетах принять: $S = 40$ кН, $l = 80$ см, $d = 4$ см; стержень изготовлен из алюминиевого сплава с характеристиками $E = 7,1 \cdot 10^4$ МПа, $\sigma_T = 90$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 70$ МПа.

Решение. В соответствии с (11.28) определяем площадь сечения и нормальные напряжения в стержне:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 40^2}{4} = 1260 \text{ мм}^2,$$

$$\sigma = \frac{S}{F} = \frac{40 \cdot 10^3}{0,126 \cdot 10^{-2}} = 31,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 31,8 \text{ МПа}.$$

Зная коэффициент приведения длины (согласно определению 11.6 здесь $\mu = 1$), с использованием (11.21) находим радиус инерции сечения стержня и его гибкость:

$$i = \left(\frac{\pi \frac{d^4}{64}}{\pi \frac{d^2}{4}} \right)^{1/2} = \frac{d}{4} = 1 \text{ см}, \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 80}{1} = 80.$$

В данном случае материал пластический. Поэтому используем диаграмму, представленную на рис. 11.26. Выясним, в какой зоне работает стержень. Для этого по формулам (11.23) и (11.26) находим $\lambda_{\text{шц}}$ и $\lambda_{\text{т}}$:

$$\lambda_{\text{шц}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{шц}}}} = \pi \sqrt{\frac{7,1 \cdot 10^4}{70}} = 100,$$

$$\lambda_{\text{т}} = 0,25 \lambda_{\text{шц}} = 0,25 \cdot 100 = 25,0.$$

Следовательно, стержень имеет среднюю гибкость. Критические напряжения для него определяются формулой (11.24):

$$\sigma_{\text{к}} = 90 - \frac{90 - 70}{100 - 25,0} \cdot (80 - 25,0) = 73,5 \text{ МПа.}$$

Окончательно согласно равенству в (11.28) находим коэффициент запаса устойчивости:

$$n_{\text{у}} = \frac{\sigma_{\text{к}}}{\sigma} = \frac{75,3}{31,8} = 2,37. \blacksquare$$

2. Проектировочный расчет. По заданной схеме находится коэффициент приведения длины μ . Далее по материалу и сжимающей силе S из условия

$$\frac{S}{F} \leq [\sigma]_{\text{у}}, \quad [\sigma]_{\text{у}} = \frac{\sigma_{\text{к}}}{n_{\text{у}}} \quad (11.31)$$

подбирается сечение. Это неравенство является существенно нелинейным, так как и критическое напряжение, и коэффициент запаса устойчивости зависят от гибкости стержня, которая, в свою очередь, определяется геометрией сечения. Поэтому его обычно решают *методом последовательных приближений*, который в данном случае заключается в следующем (дополнительный индекс указывает на номер приближения).

В нулевом приближении сначала проводим расчет на сжатие: из неравенства (11.31) при $[\sigma]_{\text{у}} = [\sigma]_{\text{у}}^{(-1/2)} = \sigma_{\text{т}} / n_{\text{у}}$ и $n_{\text{у}} = n_{\text{с}}$ (в соответствии с (11.29) $n_{\text{с}} = n_{\text{у}}(0) = A$; если таких данных нет, то

n_c задается отдельно; вообще же n_y может быть задан произвольно) определяем площадь $F^{(0)}$ и по ней — геометрию сечения. Затем проводим поверочный расчет. А именно, находим $\sigma^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$, $\sigma_k^{(0)} = \sigma_k(\lambda^{(0)})$, $n_y^{(0)} = n_y(\lambda^{(0)})$ и $[\sigma]_y^{(0)}$. Если $\sigma^{(0)}$ превышает $[\sigma]_y^{(0)}$ более чем на 5%, то переходим к следующему приближению. В противном случае на этом расчет заканчивается.

На j -м шаге из неравенства (11.31) при

$$[\sigma]_y = [\sigma]_y^{-(j-1/2)} = \frac{\sigma^{(j-1)} + [\sigma]_y^{(j-1)}}{2} \quad (11.32)$$

определяем площадь $F^{(j)}$ и по ней — геометрию сечения. Дальнейшая последовательность действий такая же, как и в нулевом приближении.

Обычно при проектировочном расчете на устойчивость достаточно 2—4 итераций. И поскольку каждый шаг включает в себя поверочный расчет, то нет необходимости проводить его дополнительно.

Пример 11.8. Для стержня, рассмотренного в примере 11.6, подобрать поперечное сечение в форме двутавра. В расчетах принять: $S = 164$ кН, $l = 2$ м, материал стержня — сталь Ст3 ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 240$ МПа, $\sigma_{цц} = 200$ МПа).

Решение. Коэффициент приведения длины вычислен в примере 11.6: $\mu = 0,7$

Предварительно вычисляем характерные величины для диаграммы критических напряжений и запас прочности на сжатие. В данном случае материал пластический. Поэтому используем диаграмму, представленную на рис. 11.26. В соответствии с (11.23), (11.25) и (11.29) имеем:

$$\lambda_{цц} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} = 99,3; \quad \lambda_T = 0,4 \cdot 99,3 = 39,7; \quad n_c = A = 1,8.$$

Нулевое приближение. Проводим расчет на сжатие:

$$[\sigma]_y^{(-1/2)} = \frac{\sigma_T}{n_c} = \frac{240}{1,8} \text{ МПа} = 133 \text{ МПа},$$

$$F^{(0)} \geq \frac{S}{[\sigma]_y^{(-1/2)}} = \frac{164 \cdot 10^3}{133 \cdot 10^6} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 12,3 \text{ см}^2.$$

По сортаменту (см. § П.2, табл. П.9) выбираем двутавр № 12 ГОСТ 8239-72 с характеристиками: $F^{(0)} = 14,7 \text{ см}^2$, $J^{(0)} = J_{\min} = J_y = 27,9 \text{ см}^4$, $i^{(0)} = i_y = 1,38 \text{ см}$. В стержне выбранного сечения имеет место напряжение

$$\sigma^{(0)} = \frac{S}{F^{(0)}} = \frac{164 \cdot 10^3}{14,7 \cdot 10^{-4}} = 11,2 \cdot 10^7 \text{ Па} = 112 \text{ МПа}.$$

Используя (11.21), находим гибкость стержня:

$$\lambda^{(0)} = \frac{\mu l}{i^{(0)}} = \frac{0,7 \cdot 200}{1,38} = 101 > \lambda_{\text{пц}}.$$

Поэтому критические напряжения вычисляем по формуле (11.21):

$$\sigma_{\text{к}}^{(0)} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^{(0)2}} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{101^2} = 193 \text{ МПа}.$$

Из (11.30) и (11.31) с помощью табл. 11.2 находим коэффициент запаса и допускаемые напряжения:

$$n_y^{(0)} = 1,8 + 1,2 = 3,0; \quad [\sigma]_y^{(0)} = \frac{\sigma_{\text{к}}^{(0)}}{n_y^{(0)}} = \frac{193}{3,0} = 64,5.$$

Поскольку $\sigma^{(0)}$ превышает $[\sigma]_y^{(0)}$ более чем на 5%, то переходим к следующему шагу.

Первое приближение. В соответствии с (11.32) и (11.31) находим

$$[\sigma]_y^{(1/2)} = \frac{\sigma^{(0)} + [\sigma]_y^{(0)}}{2} = \frac{64,5 + 112}{2} = 88,2 \text{ МПа},$$

$$F^{(1)} = \frac{S}{[\sigma]_y^{(1/2)}} = \frac{164 \cdot 10^3}{88,2 \cdot 10^6} = 1,86 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 18,6 \text{ см}^2.$$

По сортаменту выбираем двутавр № 16 ГОСТ 8239-72 с характеристиками $F^{(1)} = 20,2 \text{ см}^2$, $J^{(1)} = J_{\min} = J_y = 58,6 \text{ см}^4$, $i^{(1)} = i_y = 1,70 \text{ см}$ и находим $\sigma^{(1)}$ и $\lambda^{(1)}$:

$$\sigma^{(1)} = \frac{S}{F^{(1)}} = \frac{164 \cdot 10^3}{20,2 \cdot 10^{-4}} = 8,12 \cdot 10^7 \text{ Па} = 81,2 \text{ МПа};$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{\mu l}{i^{(1)}} = \frac{0,7 \cdot 200}{1,70} = 82,3.$$

Так как $\lambda_T \leq \lambda^{(1)} < \lambda_{\text{пц}}$, для расчета $\sigma_K^{(1)}$ используем (11.24):

$$\begin{aligned} \sigma_K^{(1)} &= \sigma_T - \frac{\sigma_T - \sigma_{\text{пц}}}{\lambda_{\text{пц}} - \lambda_T} (\lambda^{(1)} - \lambda_T) = 240 - \frac{240 - 200}{99,3 - 39,7} \cdot (82,3 - 39,7) = \\ &= 211 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Из (11.29) и (11.31) с помощью табл. 11.2 находим коэффициент запаса и допускаемые напряжения:

$$n_y^{(1)} = 1,8 + 1,2 \cdot \left(\frac{82,3}{99,3} \right)^2 = 2,62; \quad [\sigma]_y^{(1)} = \frac{\sigma_K^{(1)}}{n_y^{(1)}} = \frac{211}{2,62} = 80,5 \text{ МПа.}$$

Отклонение действующего напряжения 81,2 МПа от допускаемого значения 80,5 МПа не превосходит 5%. Следовательно, расчет закончен. ■

Задачи

В задачах 11.19—11.35 для стержней, изображенных на указанных рисунках, с помощью решения краевой задачи для уравнения продольного изгиба определить критическую силу и коэффициент приведения длины.

11.19. Табл. 11.1, схема 2. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.20. Табл. 11.1, схема 3 ($k=3$). Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.21. Табл. 11.1, схема 4. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.22. Табл. 11.1, схема 5. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.23. Табл. 11.1, схема 6. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.24. Рис. 11.28. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.25. Рис. 11.29. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.26. Рис. 11.30. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.27. Рис. 11.31. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.28. Рис. 11.32. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.29. Рис. 11.33. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными.

11.30. Рис. 11.34. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными. В расчетах принять: $J_2 = 4J$, $J_1 = J$, $b = 2l/3$.

11.31. Рис. 11.34. В расчетах принять: материал стержня — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа), $J_2 = 9 \text{ см}^4$, $J_1 = 4 \text{ см}^4$, $l = 200 \text{ см}$, $b = 100 \text{ см}$.

11.32. Рис. 11.35. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными. В расчетах принять: $J_2 = 0,25J$, $J_1 = J$, $b = l/4$.

11.33. Рис. 11.35. В расчетах принять: материал стержня — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа), $J_2 = 8 \text{ см}^4$, $J_1 = 2 \text{ см}^4$, $l = 300 \text{ см}$, $b = 100 \text{ см}$.

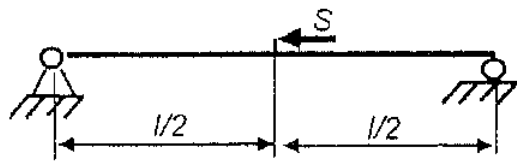


Рис. 11.28

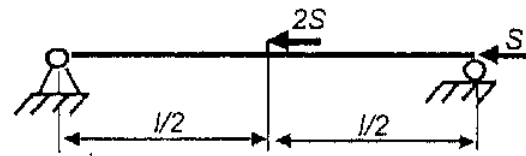


Рис. 11.29

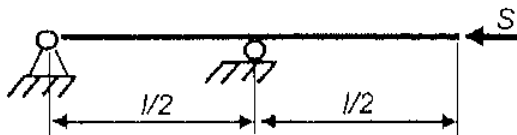


Рис. 11.30

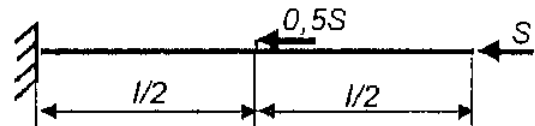


Рис. 11.31

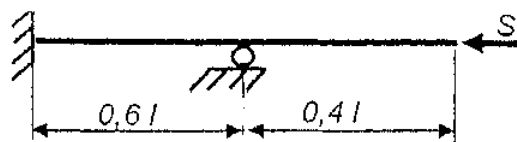


Рис. 11.32

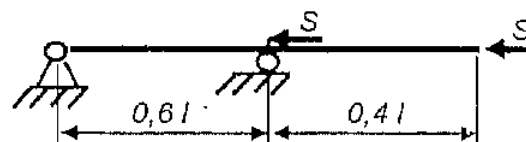


Рис. 11.33

11.34. Рис. 11.36. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными. В расчетах принять: $J_2 = 2,25J$, $J_1 = J$, $b = l/2$.

11.35. Рис. 11.36. В расчетах принять: материал стержня — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа), $J_2 = 8$ см⁴, $J_1 = 9$ см⁴, $l = 150$ см, $b = 50$ см.

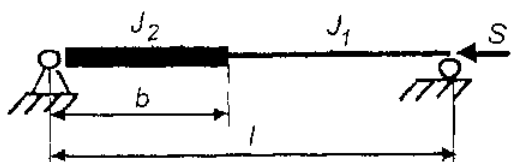


Рис. 11.34

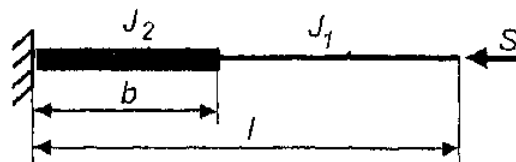


Рис. 11.35

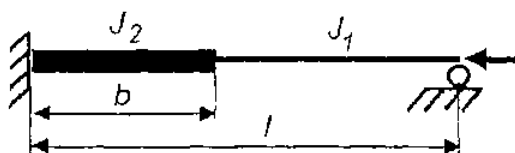


Рис. 11.36

В задачах 11.36—11.41 для стержней, изображенных на указанных рисунках, с помощью решения краевой задачи для уравнения продольного изгиба определить коэффициент приведения длины μ и выполнить проверочный расчет на устойчивость.

11.36. Табл. 11.1, схема 4. В расчетах принять: $l = 2$ м, $S = 40$ кН, материал стержня — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 180$ МПа, $\sigma_{\text{т}} = 200$ МПа), поперечное сечение является прямоугольником с основанием 10 см и высотой 5 см.

11.37. Табл. 11.1, схема 6. В расчетах принять: $l = 2$ м, $S = 200$ кН, материал стержня — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 180$ МПа, $\sigma_{\text{т}} = 200$ МПа), поперечное сечение является равнобедренным треугольником с основанием 10 см и высотой 5 см.

11.38. Табл. 11.1, схема 5. В расчетах принять: $l = 1$ м, $S = 50$ кН, материал стержня — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа,

$\sigma_{\text{пц}} = 80$ МПа, $\sigma_{0,2} = 90$ МПа), поперечное сечение — круг диаметром 5 см.

11.39. Рис. 11.28. В расчетах принять: $l = 2$ м, $S = 300$ кН, материал стержня — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 180$ МПа, $\sigma_{\text{т}} = 200$ МПа), поперечное сечение является прямоугольником с основанием 10 см и высотой 5 см.

11.40. Рис. 11.30. В расчетах принять: $l = 1$ м, $S = 200$ кН, материал стержня — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 180$ МПа, $\sigma_{\text{т}} = 200$ МПа), поперечное сечение является равнобедренным треугольником с основанием 10 см и высотой 5 см.

11.41. Рис. 11.32. В расчетах принять: $l = 1,5$ м, $S = 250$ кН, материал стержня — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 80$ МПа, $\sigma_{0,2} = 90$ МПа), поперечное сечение — круг диаметром 10 см.

В задачах 11.42—11.46 для стержней, изображенных на указанных рисунках, с помощью решения краевой задачи для уравнения продольного изгиба определить коэффициент приведения длины μ и выполнить проектировочный расчет на устойчивость (подобрать номер профиля). Изгиб происходит в плоскости наименьшей жесткости.

11.42. Табл. 11.1, схема 2. В расчетах принять: $l = 2$ м, $S = 330$ кН, материал стержня — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 180$ МПа, $\sigma_{\text{т}} = 200$ МПа), поперечное сечение составлено из двух швеллеров ГОСТ 8240-86, соединенных концами полок.

11.43. Табл. 11.1, схема 3 ($k = 3$). В расчетах принять: $l = 5$ м, $S = 580$ кН, материал стержня — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 180$ МПа, $\sigma_{\text{т}} = 200$ МПа), поперечное сечение составлено из двух швеллеров ГОСТ 8240-86, соединенных стенками.

11.44. Рис. 11.29. В расчетах принять: $l = 1$ м, $S = 17,5$ кН, материал стержня — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 80$ МПа, $\sigma_{0,2} = 90$ МПа), поперечное сечение составлено из четырех уголков ГОСТ 8510-86, соединенных полками.

11.45. Рис. 11.31. В расчетах принять: $l = 1$ м, $S = 195$ кН, материал стержня — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{пц}} = 180$ МПа, $\sigma_{\text{т}} = 200$ МПа), поперечное сечение — двутавр ГОСТ 8239-86.

11.46. Рис. 11.33. В расчетах принять: $l = 1$ м, $S = 50$ кН, материал стержня — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\sigma_{\text{шт}} = 80$ МПа, $\sigma_{0,2} = 90$ МПа), поперечное сечение составлено из двух уголков ГОСТ 8509-86, соединенных большими полками.

§ 11.3. Энергетические методы решения задач устойчивости и продольно-поперечного изгиба

Основой этих приближенных методов является закон сохранения энергии в состоянии равновесия.

При рассмотрении устойчивости стержня (продольном изгибе) имеем равенство:

$$U = A_S, \quad (11.33)$$

где U — потенциальная энергия стержня при изгибе в плоскости Oxy , A_S — работа внешних продольных сил.

В соответствии с (5.37) и (5.20) (перерезывающими силами Q_y обычно пренебрегают) для потенциальной энергии стержня длиной l в линейном варианте имеет место следующая формула:

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2}{2EJ_z} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_z (y'')^2 dx. \quad (11.34)$$

Работа системы сосредоточенных сил S_i ($i = 1, 2, \dots, k$) с точками приложения x_i и погонной нагрузки $p(x)$ вычисляется так:

$$A_S = \sum_{i=1}^k S_i \lambda(x_i) + \int_0^l p(x) \lambda(x) dx, \quad (11.35)$$

где $\lambda(x)$ — продольное смещение сечения стержня за счет изгиба его оси (перемещениями за счет деформаций растяжения-сжатия пренебрегаем), которое определяется следующим образом:

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{2} [y'(x)]^2, \quad \lambda(x) - \lambda(0) = -\frac{1}{2} \int_0^x [y'(x)]^2 dx. \quad (11.36)$$

Для приближенного вычисления критического значения S_{ik} одной из сосредоточенных сил при заданных остальных силах и

погонной нагрузке или амплитудного значения p_{0k} ($p(x) = p_0 f(x)$, где $f(x)$ — заданная функция) при заданных силах S_i с учетом граничных условий задается форма прогиба

$$y(x) = C y_0(x). \quad (11.37)$$

Подстановка этой функции в равенство (11.33) с учетом (11.34)—(11.36) приводит к простейшему линейному алгебраическому уравнению первого порядка относительно искомого критического параметра (константа C сокращается). Например, если к стержню приложена только одна сосредоточенная продольная сила S , то

$$S_k = \frac{U(y_0)}{A_{S1}(y_0)}, \quad A_{S1} = A_S |_{S=1}. \quad (11.38)$$

Часто форма прогиба выбирается в одном из следующих видов:

- прогиб $y_p(x)$ от действия подходящей поперечной нагрузки;
- степенные или тригонометрические многочлены

$$y(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n; \quad (11.39)$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^r a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + \sum_{k=1}^s b_k \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad r+s=n. \quad (11.40)$$

Число коэффициентов у этих многочленов должно быть на единицу больше числа n граничных условий. При этом чем больше учитывается условий, тем точнее определяется критическая сила.

Пример 11.9. Определить критическую силу для стержня постоянной жесткости EJ из примера 11.4, используя энергетический метод.

Решение. Граничные условия на обоих концах стержня заключаются в равенстве нулю прогиба и момента (см. (5.24)—(5.27)):

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0.$$

Уравнение упругой линии стержня принимаем в виде многочлена четвертой степени:

$$y = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4.$$

Из граничных условий получаем связь между коэффициентами этого многочлена:

$$\begin{aligned} y(0) &= a_4 = 0, \\ y(l) &= a_0 l^4 + a_1 l^3 + a_2 l^2 + a_3 l + a_4 = 0, \\ y''(0) &= 2a_2 = 0, \\ y''(l) &= 12a_0 l^2 + 6a_1 l + 2a_2 = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений ($a_0 = C$ — свободное неизвестное), получаем:

$$a_2 = a_4 = 0, \quad a_1 = -2Cl, \quad a_3 = Cl^3.$$

Тогда уравнение упругой линии принимает вид

$$y = Cy_0, \quad y_0 = x^4 - 2lx^3 + l^3x.$$

Используя (11.33), (11.35) и (11.36), находим ($\lambda(0) = 0$)

$$\begin{aligned} U(y_0) &= \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{EJ}{2} \int_0^l (12x^2 - 12lx)^2 dx = \frac{12}{5} EJl^5, \\ A_{S1}(y_0) &= -1 \cdot \lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l (4x^3 - 6lx^2 + l^3)^2 dx = \frac{17}{70} l^7. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения потенциальной энергии и работы единичной силы в (11.38), получаем приближенное значение критической силы:

$$S_K = EJ \frac{168}{17l^2} \approx 9,88 \frac{EJ}{l^2}.$$

Отметим, что оно отличается от определяемого формулой Эйлера (11.19) точного значения

$$S_K = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \approx 9,87 \frac{EJ}{l^2}$$

всего лишь третьей значащей цифрой. ■

При продольно-поперечном изгибе стержня к правой части закона сохранения энергии (11.33) добавляется работа поперечной нагрузки A_p :

$$U = A_S + A_p. \quad (11.41)$$

Для системы сосредоточенных сил P_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и моментов M_j ($j = 1, 2, \dots, m$) с точками приложения x_{P_i} и x_{M_j} , а также погонных поперечной нагрузки $q(x)$ и моментов $m(x)$ работа A_p вычисляется так ($\theta(x) = y'(x)$, см. (5.21)):

$$A_p = \sum_{i=1}^l P_i y(x_{P_i}) + \sum_{i=1}^m M_i y(x_{M_i}) + \int_0^l q(x)y(x) dx + \int_0^l m(x)\theta(x) dx. \quad (11.42)$$

Подстановка функции (11.37) в равенство (11.41) с учетом (11.34)–(11.36) и (11.42) позволяет определить амплитуду C прогиба:

$$C = \frac{k_P}{1 - k_S}, \quad k_P = \frac{A_P(y_0)}{U(y_0)}, \quad k_S = \frac{A_S(y_0)}{U(y_0)}. \quad (11.43)$$

При выборе формы прогиба необходимо учитывать, что точность решения связана с удовлетворением граничных условий так же, как и при исследовании устойчивости. Как правило, полагают, что форма имеет один из следующих видов:

- многочлены (11.39) или (11.40);
- прогиб $y_P(x)$ от действия только поперечной нагрузки;
- форма $y_S(x)$ прогиба при потере устойчивости.

Во втором варианте равенства в (11.43) упрощаются:

$$C = \frac{1}{1 - k_S}, \quad k_P = 1. \quad (11.44)$$

Если при этом имеется только одна сосредоточенная сила и ее критическое значение определяется с помощью функции $y_P(x)$, то из (11.37), (11.43) и (11.44) найдем:

$$y(x) \approx \frac{y_P(x)}{1 - S/S_K}. \quad (11.45)$$

Отметим, что, как правило, либо без ущерба для точности величина S_K может быть вычислена с помощью отличной от $y_P(x)$ аппроксимации формы прогиба, либо может быть взято ее точное значение.

Указанные выше приближенные формулы удобно применять для вычисления запаса прочности, поскольку при этом, в отли-

чие от точного решения (см. § 11.1), задача сводится к решению алгебраического уравнения.

Пример 11.10. Для изображенной на рис. 11.37 балки с помощью энергетического метода определить изгибающие моменты и упругую линию. Сжимающую силу S принять равной

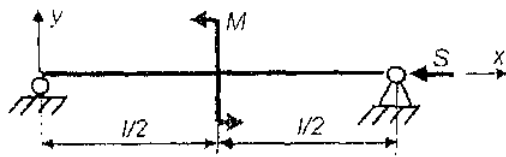


Рис. 11.37

$\pi^2 EJ / (2l^2)$.

Решение. Воспользуемся аппроксимацией формы упругой линии при продольно-поперечном изгибе прогибом $y_p(x)$ от действия только поперечной нагрузки. Очевидно, балка имеет обратную симметрию относительно сечения, в котором приложен момент. Поэтому достаточно получить решение только для левой половины балки.

Обычными средствами (см. § 5.1) находим

$$M_p = Mx/l.$$

Интегрированием уравнения поперечного изгиба (5.20)

$$EJy''_p = M_p$$

определяем прогиб $y_p(x)$. При этом учитываем кинематическое граничное условие на левом конце балки и вытекающее из упомянутой симметрии равенство нулю прогиба в центре балки:

$$y_p(0) = y_p(l/2) = 0.$$

Тогда получаем

$$y_p = \frac{M}{EJ} \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{xl}{24} \right).$$

Критическую силу удобнее найти, задавая с учетом обратной симметрии форму прогиба при продольном изгибе двумя полу-волнами синусоиды (см. табл. 11.1):

$$S_{\kappa} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}, \quad 1 - \frac{S}{S_{\kappa}} = \frac{7}{8}.$$

Учитывая эти результаты, по формуле (11.45) находим

$$y = \frac{4Mxl}{21EJ} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{4} \right).$$

Изгибающий момент, как следует из (11.3), в этом случае определяется так:

$$M_z = M_P - Sy = \frac{Mx}{l} \left[1 - \frac{2\pi^2}{21} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{4l} \right) \right]. \blacksquare$$

Пример 11.11. Используя приближенные формулы, провести проверочный расчет на прочность балки, рассмотренной в примере 11.3, для двух вариантов: а) продольная сила постоянная; б) все силы могут изменяться пропорционально.

Решение. Определяем опорные реакции, максимальный изгибающий момент и прогиб в сечении с координатой $x = l_1 = 2l/3$ в случае поперечного изгиба (см. рис. 11.3):

$$R_1 = P \frac{l - l_1}{l}, \quad R_2 = P \frac{l_1}{l}, \quad M_{z, P} = P \frac{l_1 (l - l_1)}{l}, \quad y_P = -P \frac{l_1^2 (l - l_1)^2}{3EJ_z}.$$

Критическая сила для данной балки равна эйлеровой (см. промежуточные результаты примера 11.3):

$$S_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 7,2 \cdot 10^{10} \cdot 10,7 \cdot 10^{-8}}{1^2} = 76000 \text{ Н} = 76,0 \text{ кН}.$$

Используя (11.5) и (11.45), находим максимальный изгибающий момент

$$M_{z \max} = M_{z, P} - \frac{Sy_P}{1 - S/S_k} = 264 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

а). Поскольку с принятой точностью максимальный изгибающий момент совпадает с найденным в примере 11.3, то и коэффициент запаса будет тот же.

б). В случае пропорционального изменения продольной и поперечной сил уравнение для запаса прочности n в соответствии с (11.10) и п.2 алгоритма, указанного в § 11.1, имеет вид

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{S \cdot n}{F} + \frac{M_{z, P} \cdot n - \frac{Sy_P n^2}{1 - Sn/S_k}}{W_z}.$$

Решая это квадратное уравнение при исходных данных примера 11.3, получаем два корня: $n_1 = 1,16$ и $n_2 = -24,1$. По смыслу запаса прочности второй корень лишний, поэтому $n = 1,16$. \blacksquare

Задачи

В задачах 11.47—11.61 для стержней, изображенных на указанных рисунках, используя энергетический метод, определить критическую силу S .

11.47. Рис. 11.38. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными. В расчетах принять: $b = 0,4l$.

11.48. Рис. 11.38. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 40$ см, $J = 1,5$ см⁴, материал — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

11.49. Рис. 11.38. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 120$ см, $J = 1,5$ см⁴, материал — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

11.50. Рис. 11.38. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 160$ см, $J = 1,5$ см⁴, материал — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа).

11.51. Рис. 11.39. Длину стержня l и изгибную жесткость EJ считать известными. В расчетах принять: $b = 0,4l$.

11.52. Рис. 11.39. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 40$ см, $J = 2$ см⁴, материал — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

11.53. Рис. 11.39. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 120$ см, $J = 2$ см⁴, материал — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

11.54. Рис. 11.39. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 160$ см, $J = 2$ см⁴, материал — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа).

11.55. Рис. 11.40. В расчетах принять: $l = 200$ см, $J = 3$ см⁴, $S_1 = S$, $S_2 = S$, материал — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа).

11.56. Рис. 11.40. В расчетах принять: $l = 100$ см, $J = 3$ см⁴, $S_1 = S$, $S_2 = S$, материал — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа).

11.57. Рис. 11.40. В расчетах принять: $l = 200$ см, $J = 3$ см⁴, $S_1 = S$, $S_2 = 2S$, материал — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

11.58. Рис. 11.41. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 120$ см, $J = 4$ см⁴, материал — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

11.59. Рис. 11.41. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 80$ см, $J = 4$ см⁴, материал — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа).

11.60. Рис. 11.42. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 100$ см, $J = 4$ см⁴, материал — сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа).

11.61. Рис. 11.43. В расчетах принять: $l = 200$ см, $b = 50$ см, $J = 2,5$ см⁴, материал — дюралюминий ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа).

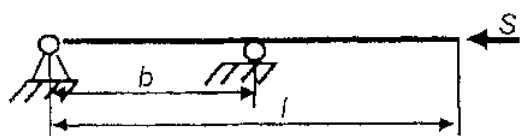


Рис. 11.38

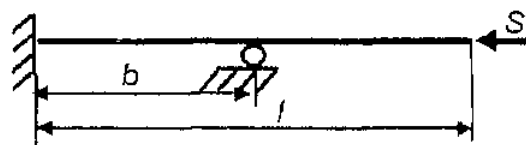


Рис. 11.39

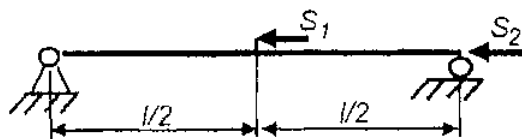


Рис. 11.40

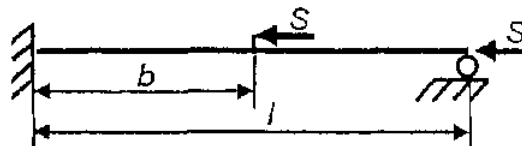


Рис. 11.41

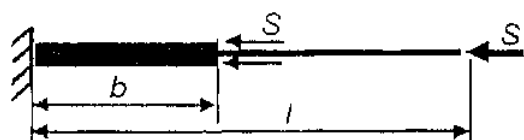


Рис. 11.42



Рис. 11.43

В задачах 11.62—11.66 для стержней, изображенных на указанных схемах в табл. 11.1, вычислить коэффициент приведения длины μ с использованием энергетического метода.

11.62. Схема 1.

11.63. Схема 2.

11.64. Схема 4.

11.65. Схема 5.

11.66. Схема 6.

В задачах 11.67—11.72 для стержней, изображенных на указанных рисунках, с использованием энергетического метода определить изгибающие моменты, упругую линию и выполнить поверочный расчет для случая одновременного и пропорционального изменения всех сил. Сечение балки — прямоугольник с основанием b и высотой h .

11.67. Рис. 11.44. В расчетах принять: $P = 200$ Н, $l = 2$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = 1$ кН, $M = Pl$, $b = 22,5$ мм, $h = 20$ мм, $\sigma_{\text{пр}} = 200$ МПа.

11.68. Рис. 11.45. В расчетах принять: $P = 150$ Н, $l = 2$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = 1$ кН, $M = Pl$, $b = 22,5$ мм, $h = 20$ мм, $\sigma_{пр} = 250$ МПа.

11.69. Рис. 11.46. В расчетах принять: $q = 0,5$ кН/м, $l = 2$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = 1$ кН, $b = 22,5$ мм, $h = 20$ мм, $\sigma_{пр} = 200$ МПа.

11.70. Рис. 11.47. В расчетах принять: $P = 100$ Н, $l = 2$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = 1$ кН, $b = 22,5$ мм, $h = 20$ мм, $\sigma_{пр} = 200$ МПа.

11.71. Рис. 11.48. В расчетах принять: $P = 0,5$ кН, $l = 2$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = 5$ кН, $b = 22,5$ мм, $h = 20$ мм, $\sigma_{пр} = 200$ МПа.

11.72. Рис. 11.49. В расчетах принять: $M = 0,2$ кН·м, $l = 2$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $S = 5$ кН, $b = 22,5$ мм, $h = 20$ мм, $\sigma_{пр} = 200$ МПа.

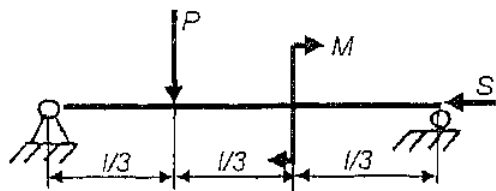


Рис. 11.44

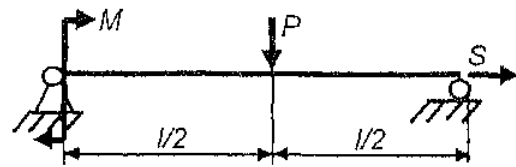


Рис. 11.45

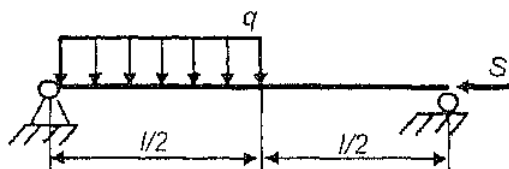


Рис. 11.46

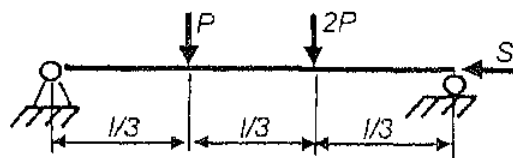


Рис. 11.47

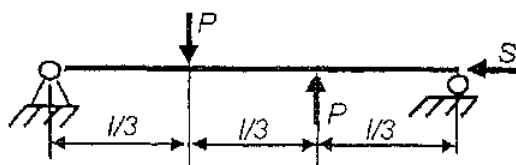


Рис. 11.48

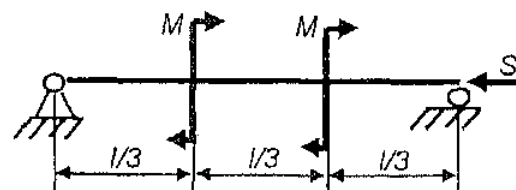


Рис. 11.49

Глава 12

ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В этой главе рассматриваются используемые в сопротивлении материалов некоторые элементарные методы расчета стержневых систем при действии динамических нагрузок (см. определение П. 13). Общая задача об определении НДС деформируемого тела в произвольные моменты времени даже в случае стержневых систем является достаточно сложной и изучается в специальных дисциплинах.

§ 12.1. Расчет движущихся систем статическими методами

Для того чтобы можно было при расчетах на прочность, жесткость или устойчивость использовать методы сопротивления материалов, вводится следующая упрощающая гипотеза.

Аксиома 9. Деформации тела не влияют на перемещение тела G как абсолютно твердого. ■

Это предположение дает возможность использовать следующий алгоритм расчета при динамическом нагружении.

1. Методами теоретической механики определяем траекторию

$$r = r(A, t) \quad (12.1)$$

каждой точки $A \in G$, где t — абсолютное время.

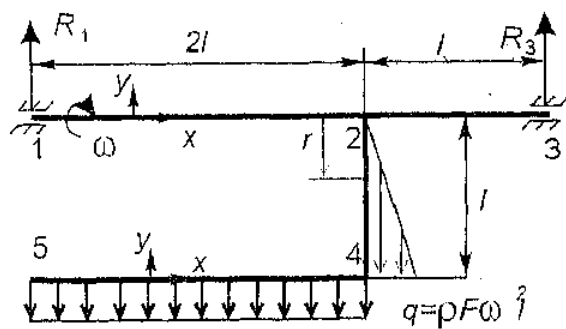
2. В связанной системе координат рассматриваем тело как самоуравновешенную (кинематически не изменяемую) систему с приложенными к ней в соответствии с принципом Д'Аламбера инерционными массовыми силами (см. определение П.7)

$$F = -\ddot{r}(A, t), \quad (12.2)$$

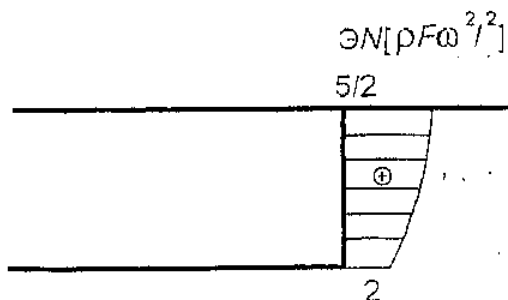
где точками обозначены производные по времени.

3. Для стержневых систем по формулам (П.7) и (П.10) от массовых сил переходим к объемным и далее к погонным характеристикам, а затем используем в соответствии с условиями задачи те или иные методы сопротивления материалов. При этом в случае изгибных деформаций вращающихся систем опорные подшипники моделируются шарнирными опорами. ■

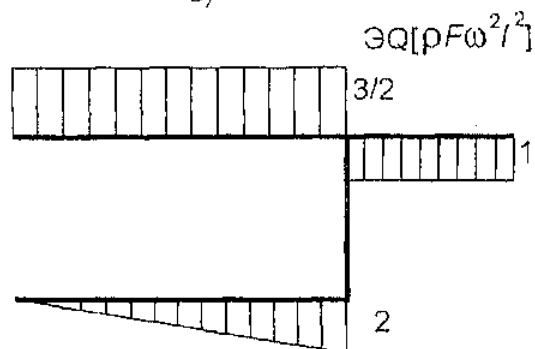
Вообще, при таком подходе время играет роль параметра (переменной, не являющейся аргументом в дифференциальных зависимостях). Однако в большинстве задач рассматривается



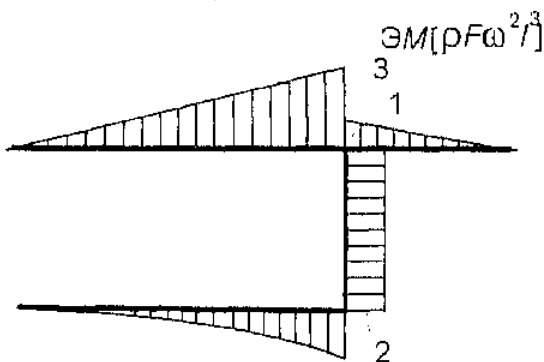
а)



б)



в)



г)

Рис. 12.1

равноускоренное движение, т. е. инерционные силы (12.2) от времени не зависят.

Пример 12.1. Рама, все элементы которой имеют поперечные сечения площади F и выполнены из одинакового материала плотности ρ , вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис 12.1, а). Построить эпюры изгибающих моментов M , перерезывающих Q и нормальных N сил.

Решение Нумерация характерных сечений рамы приведена на рис 12.1, а.

1—2. Инерционные погонной нагрузки q на каждом участке определяем, используя свойства равномерного вращательного движения и полагая, что в силу малости размеров поперечного сечения объемные силы распределены по нему равномерно (см. рис. 12.1, а):

— участок 1 — 2 — 3:

$$q = 0;$$

— участок 2 — 4 (нагрузка продольная; r — координата, отсчитываемая от оси вращения рамы):

$$q = \rho F \omega^2 r;$$

— участок 4 — 5 (нагрузка поперечная):

$$q = \rho F \omega^2 l.$$

Схема нагружения рамы инерционными силами показана на рис 12.1, а.

3. Рама статически определимая (см. гл. 7). Находим реакции опор R_1 и R_3 :

$$\sum M_1 = 0: R_3 \cdot 3l - \frac{1}{2} \rho F \omega^2 l \cdot 2l \cdot l - \rho F \omega^2 l \cdot l \cdot 2l = 0, \quad R_3 = \rho F \omega^2 l^2 ;$$

$$\sum M_3 = 0: -R_1 \cdot 3l + \frac{1}{2} \rho F \omega^2 l \cdot l \cdot l + \rho F \omega^2 l \cdot 2l \cdot 2l = 0,$$

$$R_1 = \frac{3}{2} \rho F \omega^2 l^2 .$$

Далее по участкам определяем N , Q и M :

— участок 1 — 2 (∂M линейная):

$$N = 0, \quad Q = \frac{3}{2} \rho F \omega^2 l^2, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 3 \rho F \omega^2 l^3;$$

— участок 2 — 3 (∂M линейная):

$$N = 0, \quad Q = -\rho F \omega^2 l^2, \quad M_3 = 0, \quad M_2 = \rho F \omega^2 l^3;$$

— участок 2 — 4 (∂N — парабола):

$$N(r) = R_1 + R_3 - \int_0^r q(r) dr = R_1 + R_3 + \frac{1}{2} \rho F \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} \rho F \omega^2 (5l^2 - r^2),$$

$$N_2 = N(0) = \frac{5}{2} \rho F \omega^2 l^2, \quad N_4 = N(l) = 2 \rho F \omega^2 l^2,$$

$$Q = 0, \quad M = R_1 \cdot 2l - R_3 \cdot l = 2 \rho F \omega^2 l^3;$$

— участок 4 — 5 (∂Q линейная, ∂M — парабола)

$$N = 0, \quad Q_5 = 0, \quad Q_4 = -\rho F \omega^2 l \cdot 2l = 2 \rho F \omega^2 l^2;$$

$$M_5 = 0, \quad M_4 = -\rho F \omega^2 l \cdot 2l \cdot l = -2 \rho F \omega^2 l^3. \quad \blacksquare$$

Задачи

12.1. Стержень постоянного поперечного сечения площади F и длины l равномерно вращается с угловой скоростью ω (рис. 12.2). На его свободном краю прикреплена масса m . Считая стержень безынерционным, определить площадь его поперечного

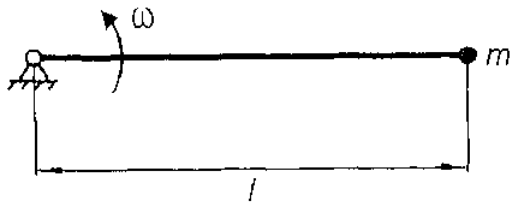


Рис. 12.2

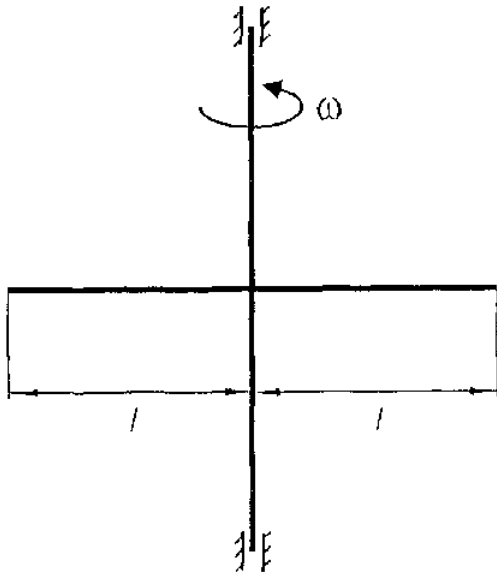


Рис. 12.3

сечения F и перемещение δ свободного края. В расчетах принять: $m = 5$ кг; $l = 0,7$ м; $\omega = 50$ с⁻¹, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 80$ МПа.

12.2. Решить задачу 12.1 с учетом массы стержня $m_0 = m$.

12.3. Стержень постоянного поперечного сечения площади F равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 12.3). Определить размер l , при котором максимальные напряжения в нем достигнут допускаемых $[\sigma]$. В расчетах принять: $F = 1$ см²; $\rho = 7700$ кг/м³; $\omega = 150$ с⁻¹; $[\sigma] = 90$ МПа.

12.4. Стержень постоянного поперечного сечения площади F равномерно вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω

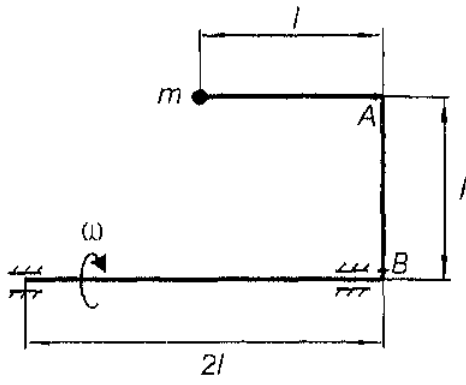
(см. рис. 12.3). На его свободных концах расположены сосредоточенные массы m . Определить угловую скорость ω , при которой удлинение каждой половины стержня составит Δl . В расчетах принять: $F = 1$ см²; $l = 1$ м; $\rho = 7700$ кг/м³; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $m = 1$ кг, $\Delta l = 0,1$ мм. Рассмотреть два варианта: а) безынерционный стержень, б) масса стержня $m_0 \neq 0$.

12.5—12.7. Указанные на соответствующих рисунках рамы вращаются с постоянной угловой скоростью ω . К ним прикреплены сосредоточенные массы m . Построить эпюры N , Q и M . Массой элементов рамы пренебречь.

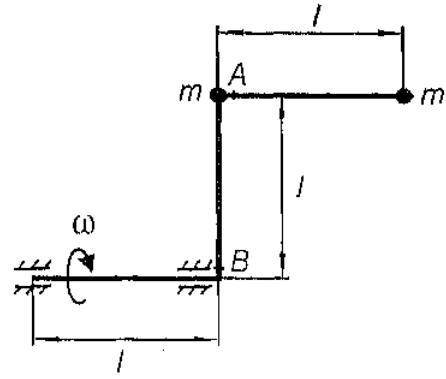
12.8—12.12. Указанные на соответствующих рисунках рамы постоянного сечения площади F вращаются с постоянной угловой скоростью ω . Плотность материала их элементов ρ . Построить эпюры N , Q и M .

12.13. Изображенная на рис. 12.4 рама, все элементы которой имеют круглое поперечное сечение, вращается с постоянной угловой скоростью ω . К ее концевому элементу прикреплен сосредоточенный

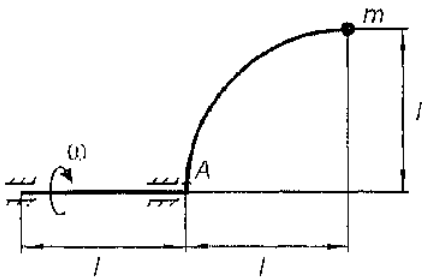
12.5



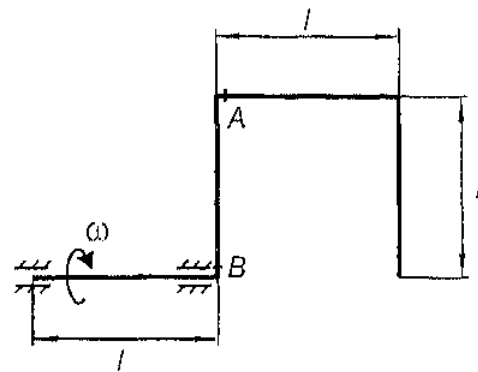
12.6



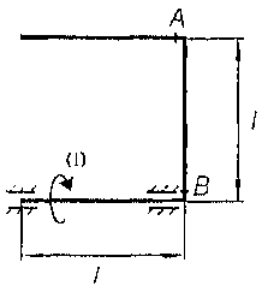
12.7



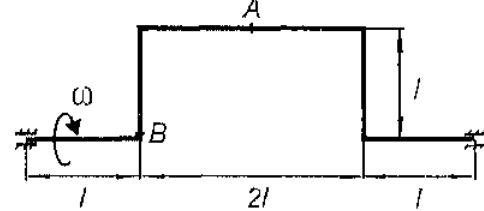
12.8



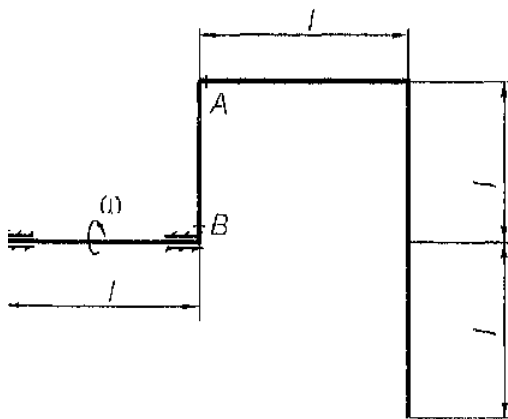
12.9



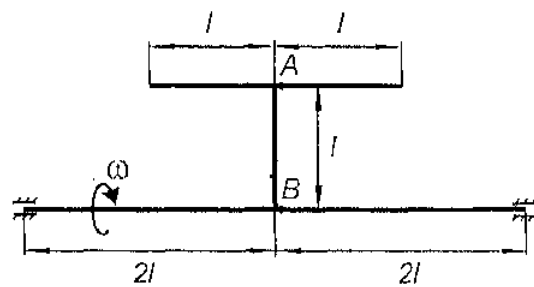
12.10



12.11



12.12



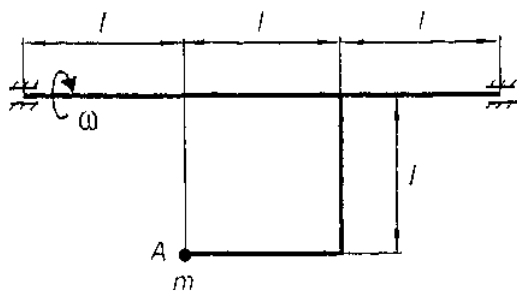


Рис. 12.4

груз m . Построить эпюры N , Q , M и определить диаметр сечения d . В расчетах принять:

$\omega = 25 \text{ с}^{-1}$, $m = 5 \text{ кг}$; $l = 0,4 \text{ м}$; $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$. Массой элементов рамы пренебречь.

12.14. Решить предыдущую задачу при отсутствии дополнительной массы m и учете инер-

ции элементов рамы ($\rho = 7700 \text{ кг/м}^3$).

В задачах 12.15—12.17 изображенные на указанных рисунках рамы круглого поперечного сечения вращаются с постоянной угловой скоростью ω . Построить эпюры N , Q , M и определить диаметры поперечных сечений d .

12.15 Рис. 12.5. В расчетах принять: $l = 0,4 \text{ м}$; $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$; $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$, $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

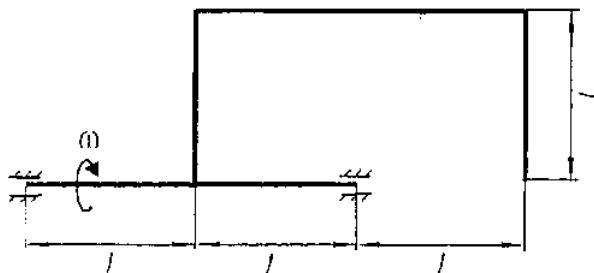


Рис. 12.5

12.16. Рис.12.6. В расчетах принять: $l = 0,4 \text{ м}$; $\rho = 7500 \text{ кг/м}^3$; $\omega = 30 \text{ с}^{-1}$, $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

12.17. Рис. 12.7. В расчетах принять: $l = 0,3 \text{ м}$; $\rho = 2200 \text{ кг/м}^3$; $\omega = 15 \text{ с}^{-1}$, $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.

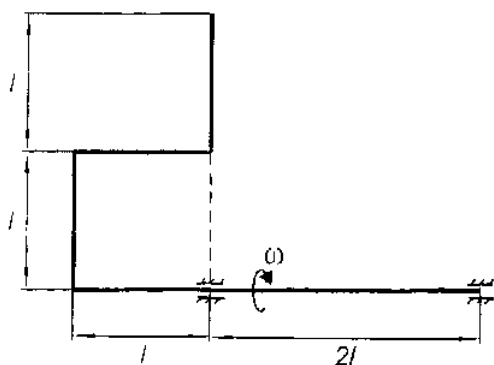


Рис. 12.6

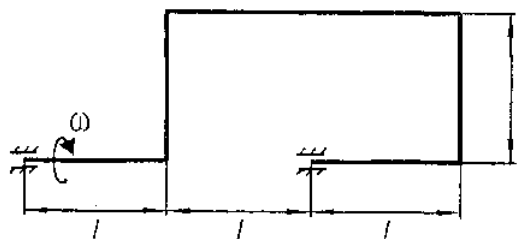


Рис. 12.7

В задачах 12.18 и 12.19 изображенные на указанных рисунках безынерционные рамы круглого поперечного сечения вращаются с постоянной угловой скоростью ω . С учетом прикрепленных к ним сосредоточенных масс m построить эпюры N , Q , M и определить диаметры поперечных сечений d .

12.18. Рис. 12.8. В расчетах принять: $m = 3$ кг, $l = 0,3$ м; $\omega = 20$ с⁻¹, $[\sigma] = 150$ МПа.

12.19. Рис. 12.9. В расчетах принять: $m = 5$ кг; $l = 0,4$ м; $\omega = 30$ с⁻¹, $[\sigma] = 150$ МПа.

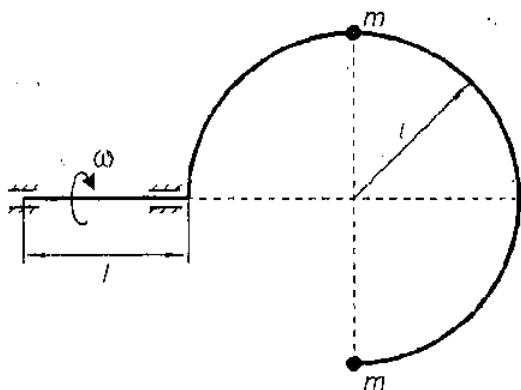


Рис. 12.8

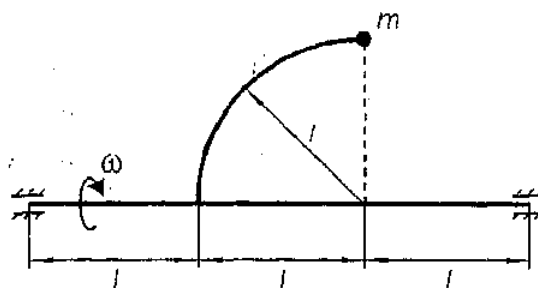


Рис. 12.9

12.20. Из расчета на прочность найти допускаемую угловую скорость вращения $[\omega]$ рамы, элементы которой имеют круглое поперечное сечение диаметра d (рис. 12.10). В расчетах принять: $l = 0,5$ м; $\rho = 7500$ кг/м³; $d = 2$ см; $[\sigma] = 800$ МПа.

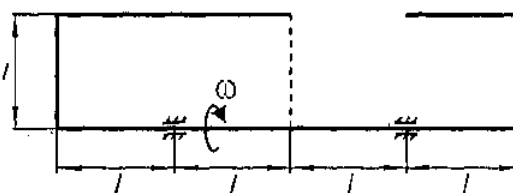


Рис. 12.10

12.21. Рама, элементы которой имеют квадратное сечение со стороной d , вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 12.4). Найти перемещения точки A по нормали к оси вращения. В расчетах принять: $l = 0,3$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\rho = 7900$ кг/м³; $d = 2$ см; $\omega = 40$ с⁻¹.

§ 12.2. Ударное нагружение стержневых систем

В соответствии с известными положениями теоретической механики используется следующее понятие.

Определение 12.1. *Ударными нагрузками* называются такие внешние динамические силы (см. определения П.9 и П.13), время действия которых пренебрежимо мало, но импульс конечен. ■

Отметим, что к таковым относятся и инерционные силы, возникающие при мгновенном наложении связей на деформируемую систему.

Аксиома 10.1.

1. Возмущения распространяются по деформируемому телу G с бесконечной скоростью, т.е. различные виды энергии переходят друг в друга мгновенно.

2. В результате действия ударных нагрузок напряжения в теле G достигают максимальных значений в положении равновесия. ■

При решении задач на ударное нагружение используется закон сохранения энергии (П.18), который в соответствии с аксиомой 10.1 приобретает вид ($T \equiv 0$):

$$U_0 + T_0 + A = U, \quad (12.3)$$

где U_0 и T_0 — потенциальная и кинетическая энергии тела системы в начальный момент, U — потенциальная энергия в положении равновесия, A — работа внешних сил, выполняемая при переходе в это положение.

В некоторых случаях (например, мгновенное наложение или снятие связей) соотношение (12.3) используется непосредственно. При этом иногда для определения энергии U требуются дополнительные гипотезы относительно деформированного состояния тела G .

Другой подход заключается в замене тела G некоторой моделью с одной степенью свободы. Он используется в основном в том случае, если нагрузки вызваны ударом некоторого другого тела. При этом процесс соударения полагается абсолютно неупругим. Соответствующая методика базируется на двух положениях.

Во первых, для системы с одной степенью свободы, находящейся под действием ударной нагрузки, вводится понятие “эквивалентной” ей системы, нагруженной статически.

А именно, с одной стороны, в качестве динамической системы рассматривается вертикальный пружинный маятник с жесткостью c (см. § 7.2) и сосредоточенной массой m_0 . По нему ударяет груз, обладающий массой m и начальной скоростью v_0 (рис. 12.11, а, где g — ускорение свободного падения). С другой

стороны, полагается, что статическая система — та же пружина с сосредоточенной массой (см. рис. 12.11, б):

$$\lambda m + m_0. \quad (12.4)$$

Определение 12.2. Величина λ в (12.4) называется *коэффициентом динамичности системы*. ■

Он определяется с помощью следующей гипотезы.

Аксиома 10.2 Напряжённно-деформированные состояния указанных двух систем совпадают и считаются *эквивалентными*, если

$$\delta_d^\Sigma = \delta_3^\Sigma, \quad (12.5)$$

где δ_d^Σ и δ_3^Σ — максимальные перемещения конца пружины для динамической и статической систем. ■

Каждое из этих перемещений раскладывается на два слагаемых:

$$\delta_d^\Sigma = \delta_{ст}^{(0)} + \delta_d, \quad \delta_3^\Sigma = \delta_{ст}^{(0)} + \lambda \delta_{ст}, \quad (12.6)$$

где $\delta_{ст}$ и $\delta_{ст}^{(0)}$ — статические перемещение в обеих системах за счет действия сил тяжести mg и m_0g , а δ_d — составляющая перемещения динамической системы, обусловленная только ударом.

Из (12.5) и (12.6) вытекает следующая формула для коэффициента динамичности:

$$\lambda = \frac{\delta_d}{\delta_{ст}}. \quad (12.7)$$

Использование закона сохранения энергии приводит к уравнению

$$\lambda^2 - 2\lambda - \frac{v_0^2}{\delta_{ст} g (1 + k_0)} = 0, \quad k_0 = \frac{m_0}{m}, \quad (12.8)$$

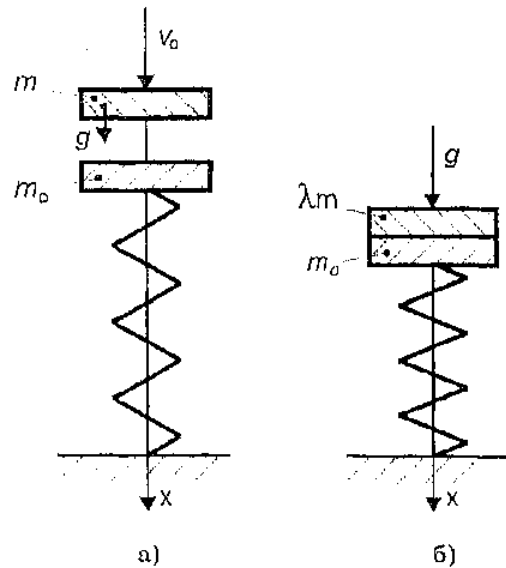


Рис. 12.11

откуда следует явное выражение для коэффициента динамичности ($\lambda > 1$):

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{\delta_{ст} g (1 + k_0)}}. \quad (12.9)$$

Отметим, что, поскольку в соответствии с формулой (12.7) коэффициент динамичности не зависит от силы тяжести, то равенство (12.9) справедливо и для горизонтально расположенных пружин.

Из (12.9) вытекают следующие частные случаи:

— при $m_0 = m$ ($k_0 = 0$)

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{\delta_{ст} g}}; \quad (12.10)$$

— при падении груза с высоты H

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст} (1 + k_0)}}; \quad (12.11)$$

— при $v_0 = 0$ ($H = 0$)

$$\lambda = 2; \quad (12.12)$$

— при $v_0^2 / (\delta_{ст} g) \gg 1$ или $H / \delta_{ст} \gg 1$

$$\lambda \approx \frac{v_0}{\sqrt{\delta_{ст} g (1 + k_0)}} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст} (1 + k_0)}}; \quad (12.13)$$

— при $v_0^2 / (\delta_{ст} g) \gg 1$ или $H / \delta_{ст} \gg 1$ и $m_0 \ll m$

$$\lambda \approx \frac{v_0}{\sqrt{\delta_{ст} g}} = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}}. \quad (12.14)$$

Во-вторых, для деформируемой системы (тела) G (системы с бесконечным числом степеней свободы) строится “эквивалентная” ей система с одной степенью свободы. А именно, рассматривается тело G , по которому в некоторой точке $A_* \in \Pi = \partial G$ наносится удар точечным грузом, обладающим массой m и начальным вектором скорости v_0 (рис. 12.12), а также указанная выше пружинная система с массой

$$m_0 = k_m m_G,$$

$$m_G = \iiint_G \rho \, dx \, dy \, dz, \quad (12.15)$$

где ρ и m_G — плотность и масса тела G .

Аксиома 10.3. Тело G и пружинная система полагаются эквивалентными, если:

— равны их кинетические энергии T_G и T_0 (см. (П.19)):

$$T_G = T_0, \quad T_G = \frac{1}{2} \iiint_G \rho v^2 \, dx \, dy \, dz, \quad T_0 = \frac{1}{2} m_0 v_*^2, \quad v_* = v|_{A_*}, \quad (12.16)$$

где v — поле скоростей в теле;

— статическое перемещение пружины под действием единичной силы (податливость c^{-1} пружины) определяется так:

$$\delta_{ст}^{(1)} = c^{-1} = \text{пр}_{v_0} u_{ст*}^{(1)}, \quad u_{ст*}^{(1)} = u_{ст}^{(1)}|_{A_*}, \quad (12.17)$$

где $u_{ст}^{(1)}$ — статическое поле перемещений в теле от действия единичной силы, сонаправленной с вектором скорости v_0 и приложенной в точке A_* . ■

Определение 12.3. Величина k_m в (12.15) называется коэффициентом приведения массы. ■

Формулы (12.15) и (12.16) приводят к следующему результату для коэффициента приведения массы:

$$k_m = \frac{1}{m_G v_*^2} \iiint_G \rho v^2 \, dx \, dy \, dz. \quad (12.18)$$

Ввиду неизвестности поля скоростей по этой формуле нельзя однозначно определить коэффициент приведения массы. Поэтому вводится дополнительная гипотеза.

Аксиома 10.4. Поле скоростей v в теле пропорционально полю перемещений u с не зависящим от точки коэффициентом пропорциональности

$$v = k_1 u, \quad k_1 = \text{const}, \quad (12.19)$$

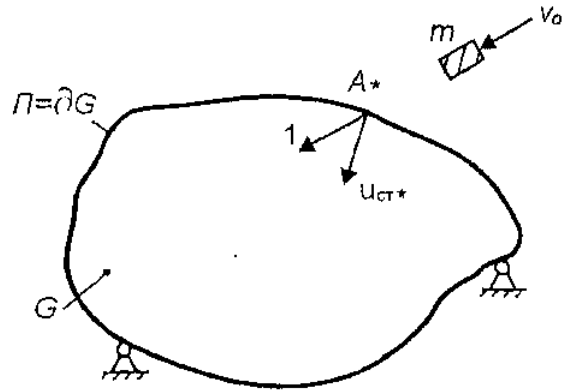


Рис. 12.12

а поле перемещений в любой точке тела коллинеарно вектору статического перемещения $u_{\text{ст}^*}$ тела в точке A_* от действия единичной силы:

$$u = k_2 u_{\text{ст}^*}, \quad k_2 = \text{const.} \quad \blacksquare \quad (12.20)$$

С учетом этой гипотезы формула (12.15) принимает вид

$$k_m = \frac{1}{m_G u_{\text{ст}^*}^{(1)2}} \iiint_G \rho u_{\text{ст}}^{(1)2} dx dy dz. \quad (12.21)$$

При поперечном ударе по однородной балке или при продольном ударе по торцу стержня эта формула упрощается:

$$k_m = \frac{1}{\delta_{\text{ст}}^{(1)2} l} \int_0^l y_{\text{ст}}^{(1)2} dx, \quad (12.22)$$

где $y_{\text{ст}}^{(1)}$ — прогибы балки или перемещения сечений стержня под действием единичной силы, сонаправленной с вектором скорости v_0 и приложенной в точке удара.

Отметим, что при использовании формулы (12.22) либо прогиб (перемещения сечений) $y_{\text{ст}}^{(1)}$ находится как решение соответствующей краевой задачи (см. 5.2 и гл. 1), либо применяются приближенные аппроксимации (см § 11.3).

Таким образом, алгоритм расчета стержневых систем при ударном погружении заключается либо в непосредственном использовании закона сохранения энергии (12.3), либо в нижеприведенной последовательности действий.

1. Решаем статическую задачу для стержневой системы при действии единичной силы, сонаправленной с вектором скорости v_0 и приложенной в точке A_* . В том числе по формуле (12.17)

определяем перемещение $\delta_{\text{ст}}^{(1)}$.

2. По формулам (12.15), (12.21) или (12.22) находим коэффициент приведения массы и приведенную массу m_0 эквивалентной системы с одной степенью свободы.

3. Используя (12.10) (или (12.11)—(12.14)), вычисляем коэффициент динамичности λ . При этом $\delta_{\text{ст}} = mg\delta_{\text{ст}}^{(1)}$.

4. С использованием аксиом 10.1—10.3 определяем максимальные значения обобщенных внутренних силовых факторов

$Q_{jд}$ (см. § 7.1), обобщенных перемещений $\delta_{jд}$ и напряжений $\sigma_{\alpha\betaд}$ системы при ударном нагружении:

$$Q_{jд} = \lambda Q_{jст} = \lambda m g Q_{jст}^{(1)}, \quad \delta_{jд} = \lambda \delta_{jст} = \lambda m g \delta_{jст}^{(1)},$$

$$\sigma_{\alpha\betaд} = \lambda \sigma_{\alpha\betaст} = \lambda m g \sigma_{\alpha\betaст}^{(1)}, \quad (12.23)$$

где $Q_{jст}$, $\delta_{jст}$, $\sigma_{\alpha\betaст}$ и $Q_{jст}^{(1)}$, $\delta_{jст}^{(1)}$, $\sigma_{\alpha\betaст}^{(1)}$ — компоненты статического НДС системы при нагружении силами, равными mg и 1 соответственно.

Пример 12.2. Вычислить коэффициент динамичности для вертикально стоящего стержня, на который со скоростью v_0 падает груз массы m (рис. 12.13). В расчетах принять: $v_0 = \sqrt{gl}$, $m_G = m$.

Решение. 1. Определяем (см § 1.1) нормальные силы, напряжения, деформации и перемещения в стержне от действия единичной силы, приложенной на свободном конце (положение оси Ox указано на рис. 12.13).

$$N^{(1)} = 1, \quad \sigma^{(1)} = \frac{1}{F}, \quad \varepsilon^{(1)} = \frac{1}{EF},$$

$$\delta^{(1)}(x) = \frac{x}{EF}, \quad \delta_{ст}^{(1)} = \delta^{(1)}(l) = \frac{l}{EF}.$$

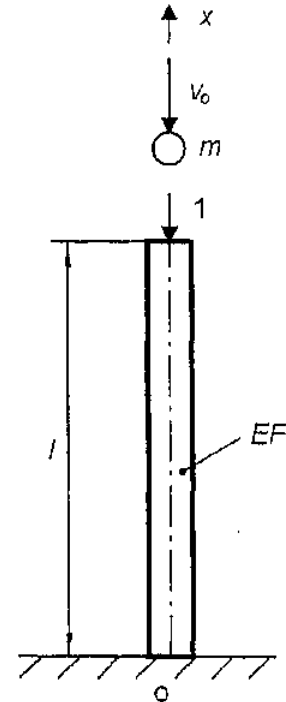


Рис. 12.13

2. Используя формулу (12.22), находим коэффициент приведения массы

$$k_m = \frac{1}{\delta_{ст}^{(1)2} l} \int_0^l \delta^{(1)2} dx = \frac{(EF)^2}{l^2 \cdot l} \int_0^l \left(\frac{x}{EF}\right)^2 dx = \frac{1}{3}$$

и приведенную массу

$$m_0 = k_m m_G = m/3.$$

3. Определяя предварительно коэффициент k_0 (см. (12.8)) и перемещение $\delta_{ст}$

$$k_0 = \frac{m_0}{m} = \frac{1}{3}, \quad \delta_{ст} = m g \delta_{ст}^{(1)} = \frac{m g l}{EF},$$

из (12.9) получаем следующую формулу для коэффициента динамичности:

$$\lambda = 1 + \sqrt{1 + \frac{gl \cdot EF}{mgl \cdot g (1 + 1/3)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3EF}{4mg}} \quad \blacksquare$$

Пример 12.3. На шарнирно опертую невесомую балку длиной l с высоты H падает груз массы m . Балка имеет прямоугольное поперечное сечение высоты $2d$ и ширины d . Удар происходит в плоскости наибольшей жесткости сечения. Найти максимальные динамические напряжения и прогибы в точке удара для двух вариантов ее расположения: *a* — центр пролета балки, *б* — точка, расположенная на расстоянии $l/4$ от ее левой опоры. В расчетах принять: $l = 0,5$ м; $H = 0,1$ м; $m = 2$ кг, $d = 1$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. 1. Эпюры изгибающих моментов от действия единичной силы для обоих вариантов задачи приведены соответственно на рис. 12.14, *a* и *б* (см. § 5.1).

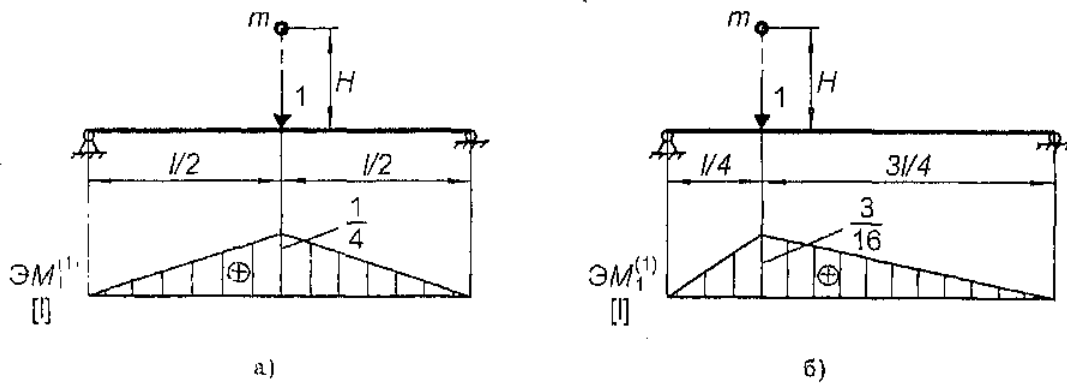


Рис. 12.14

Предварительно определяя геометрические характеристики поперечного сечения балки (см. табл. П.3 и П.6)

$$J_z = \frac{d \cdot (2d)^3}{12} = \frac{2d^4}{3}, \quad W_z = \frac{d \cdot (2d)^2}{6} = \frac{2d^3}{3},$$

по эпюрам моментов вычисляем максимальные нормальные напряжения (см. гл. 5) и прогибы (используем интегралы Мора и правило Верещагина, см. § 7.1):

— вариант “а”:

$$M_{\max}^{(1)} = \frac{l}{4}, \quad \sigma_{\max \text{ ст}}^{(1)} = \frac{M_{\max}^{(1)}}{W_z} = \frac{3l}{8d^3},$$

$$\delta_{\text{ст}}^{(1)} = \frac{2}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{l^3}{48EJ_z} = \frac{3l^3}{96Ed^4};$$

— вариант “б”:

$$M_{\text{max}}^{(1)} = \frac{3l}{16}, \quad \sigma_{\text{max ст}}^{(1)} = \frac{9l}{32d^3},$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ст}}^{(1)} &= \frac{2}{EJ_z} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{3l}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{4} \cdot \frac{3l}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{16} \right) = \\ &= \frac{3l^3}{256EJ_z} = \frac{9l^3}{512Ed^4}. \end{aligned}$$

2. Так как балка считается невесомой, то $m_0 = 0$, и нет необходимости вычислять коэффициент приведения массы.

3. Вычисляем $\delta_{\text{ст}}$:

— вариант “а”:

$$\delta_{\text{ст}} = mg\delta_{\text{ст}}^{(1)} = \frac{3l^3 mg}{96Ed^4} = \frac{3 \cdot 0,5^3 \cdot 2 \cdot 9,81}{96 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,01^4} = 0,382 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

— вариант “б”:

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{9l^3 mg}{512Ed^4} = \frac{9 \cdot 0,2^3 \cdot 2 \cdot 9,81}{512 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,01^4} = 0,251 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Так как в обоих случаях $H/\delta_{\text{ст}} \gg 1$ и $m_0 = 0$, то коэффициент динамичности λ вычисляем по упрощенной формуле (12.14):

— вариант “а”:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1}{0,382 \cdot 10^{-4}}} = 72,4;$$

— вариант “б”:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1}{0,251 \cdot 10^{-4}}} = 89,3.$$

4. Находим соответствующие максимальные динамические нормальные напряжения и прогибы δ в точке удара:

— вариант “а”:

$$\sigma_{\max д} = mg\lambda\sigma_{\max ст}^{(1)} = \frac{3mg\lambda l}{8d^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot 72,4 \cdot 0,5}{8 \cdot 0,01^3} =$$

$$= 266 \cdot 10^6 \text{ Па} = 266 \text{ МПа};$$

$$\delta = \lambda\delta_{ст} = 72,4 \cdot 0,382 \cdot 10^{-4} = 27,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 2,76 \text{ мм};$$

— вариант “б”:

$$\sigma_{\max д} = \frac{9mg\lambda l}{32d^3} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot 89,3 \cdot 0,5}{32 \cdot 0,01^3} =$$

$$= 246 \cdot 10^6 \text{ Па} = 246 \text{ МПа};$$

$$\delta = \lambda\delta_{ст} = 89,3 \cdot 0,251 \cdot 10^{-4} = 22,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 2,24 \text{ мм. } \blacksquare$$

Пример 12.4. Решить предыдущую задачу для случая удара по середине балки при учете ее инерционных свойств при $\rho = 7200 \text{ кг/м}^3$. Сравнить коэффициенты приведения массы и динамичности, полученные с помощью точного выражения для упругой линии и при её аппроксимации функцией $A \sin \frac{\pi x}{l}$.

Решение. 1. Необходимые эпюры изгибающих моментов построены в п. 1 примера 12.3 (см. рис. 12.14, а). Там же определены величины $\sigma_{\max ст}^{(1)}$ и $\delta_{ст}^{(1)}$.

2. Для вычисления приведенной массы по формулам (12.15) и (12.22) необходимо найти упругую линию балки $y_{ст}^{(1)} = y(x)$ (см. § 5.2). В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть левую половину балки со следующими граничными условиями:

$$y(0) = 0, \quad y'(l/2) = 0.$$

Для этого участка записываем дифференциальное уравнение (5.20) и находим его общее решение:

$$EJ_2 y'' = \frac{lx}{2}, \quad EJ_2 y' = EJ_2 \theta = \frac{lx^2}{4} + A, \quad EJ_2 y = \frac{lx^3}{12} + Ax + B.$$

Отсюда с учетом граничных условий получаем уравнения относительно констант интегрирования A и B :

$$B = 0, \quad \frac{l^3}{16} + A = 0.$$

Следовательно,

$$EJ_z y = -\frac{lx}{4} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3} \right).$$

Величина $\delta_{ст}^{(1)}$ вычисляется через найденные прогибы:

$$\delta_{ст}^{(1)} = -y \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{l^4}{48EJ_z}.$$

Естественно, она совпадает со значением, найденным в предыдущем примере.

Далее определяем коэффициент приведения

$$k_m = \frac{1}{\delta_{ст}^{(1)^2} l} \int_0^l y^2 dx = \frac{(48EJ_z)^2}{l^3 \cdot l} \int_0^l \frac{l^2 x^2}{(4EJ_z)^2} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3} \right)^2 dx = \frac{69}{105}$$

и приведенную массу

$$m_0 = k_m m_{ст} = k_m \rho Fl = 2k_m \rho d^2 l = 2 \cdot \frac{69}{105} \cdot 7200 \cdot 0,01^2 \cdot 0,5 = \\ = 0,473 \text{ кг.}$$

Если использовать указанную в условии аппроксимацию упругой линии, то получаем

$$\tilde{\delta}_{ст}^{(1)} = A \sin \frac{\pi x}{l} \Big|_{x=l/2} = A; \quad \tilde{k}_m = \frac{1}{A^2 \cdot l} \int_0^l \left(A \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{1}{2};$$

$$\tilde{\delta}_{ст} = \delta_{ст} \frac{\tilde{\delta}_{ст}^{(1)}}{\delta_{ст}^{(1)}} = 0,382 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{3l^3 mg}{96Ed^4} = \\ = \frac{3 \cdot 0,5^3 \cdot 2 \cdot 9,81}{96 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,01^4} = 0,382 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Полученный таким образом коэффициент ниже k_m приблизительно на 24%.

3. Величина $\delta_{ст}$ найдена в предыдущей задаче: $\delta_{ст} = 0,382 \cdot 10^{-4}$ м. Поскольку $H/\delta_{ст} \gg 1$, то коэффициент динамичности λ вычисляем по упрощенной формуле (12.13). Определяя предварительно коэффициент k_0 в формуле (12.9)

$$k_0 = \frac{m_0}{m} = \frac{0,473}{2} = 0,236,$$

получаем

$$\lambda = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст} (1 + k_0)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1}{0,382 \cdot 10^{-4} \cdot (1 + 0,236)}} = 65,1.$$

При использовании приближенной аппроксимации упругой линии приходим к следующему результату:

$$\bar{m}_0 = 0,473 \cdot \frac{105}{69} \cdot \frac{1}{2} = 0,359 \text{ кг}; \quad \bar{k}_0 = \frac{m_0}{m} = \frac{0,359}{2} = 0,179;$$

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1}{0,382 \cdot 10^{-4} \cdot (1 + 0,179)}} = 66,6.$$

Коэффициент динамичности получается выше. Однако отличие составляет всего 2%.

4. Дальнейшие действия такие же, как в предыдущем примере:

$$\sigma_{\max д} = \frac{3mg\lambda l}{8d^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot 65,1 \cdot 0,5}{8 \cdot 0,01^3} = 239 \cdot 10^6 \text{ Па} = 239 \text{ МПа}.$$

Как видно из сравнения с результатами предыдущего примера, учет инерционности балки привел к уменьшению коэффициента динамичности и, соответственно, максимальных напряжений приблизительно на 10%. ■

Пример 12.5. Один конец вала длины l и диаметра d консольно закреплен, а на другой насажен диск диаметра D и массы m . Конструкция вращается с угловой скоростью ω . Определить максимальное касательное напряжение в вале в момент его внезапной остановки (*крутящий удар*). В расчетах принять: $D = 15$ см, $m = 40$ кг, $l = 0,5$ м; $d = 5$ см, $\omega = 40 \text{ с}^{-1}$, $G = 7 \cdot 10^4$ МПа. Массой вала и деформациями диска пренебречь.

Решение этой задачи строим с помощью непосредственного использования закона сохранения энергии (12.3), где полагаем $U_0 = 0$ и $A = 0$:

$$T_0 = U.$$

Вычисляя массовый полярный момент инерции диска ($J_p = \pi D^2/4$ — геометрический полярный момент инерции, см. табл. П.4; ρ — поверхностная плотность)

$$J = \rho J_p = \frac{m}{\pi D^2/4} \frac{\pi D^4}{32} = \frac{mD^2}{8},$$

находим кинетическую энергию системы (учитываем только энергию диска, которая определяется известной формулой теоретической механики):

$$T_0 = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mD^2\omega^2}{16}.$$

Крутящий момент M_k , возникающий в вале после его внезапной остановки, постоянен по длине. Поэтому для потенциальной энергии деформации системы получаем вытекающее из (4.13) равенство (диск недеформируемый; $J_k = \pi d^4/32$ — полярный момент инерции поперечного сечения вала):

$$U = \frac{M_k^2 l}{2GJ_k} = \frac{16M_k^2 l}{\pi Gd^4}.$$

Используя полученные выражения для энергий, из закона сохранения энергии находим крутящий момент

$$M_k = \frac{d^2 D \omega}{16} \sqrt{\frac{\pi m D}{l}}.$$

Максимальные касательные напряжения в вале находим по формуле в (4.7):

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{D\omega}{d} \sqrt{\frac{mG}{\pi l}} = \frac{0,15 \cdot 40}{0,05} \sqrt{\frac{40 \cdot 7 \cdot 10^{10}}{\pi \cdot 0,5}} = 160 \text{ МПа},$$

где $W_k = \pi d^3/16$ — момент сопротивления кручению поперечного сечения вала. ■

Задачи

12.22. На невесомую балку постоянного квадратного поперечного сечения со стороной d с высоты H падает груз массой m (рис. 12.15). Найти коэффициент динамичности λ , напряжения и прогибы балки в

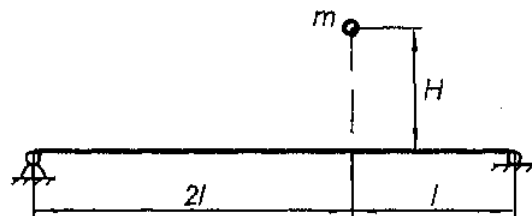


Рис. 12.15

точке удара В расчетах принять: $H = 0,1$ м; $m = 2$ кг, $l = 0,5$ м; $d = 2$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

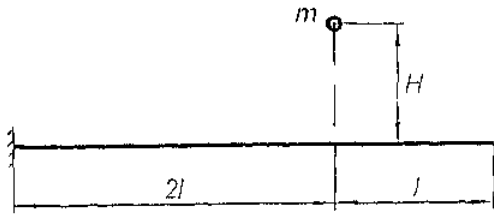


Рис. 12.16

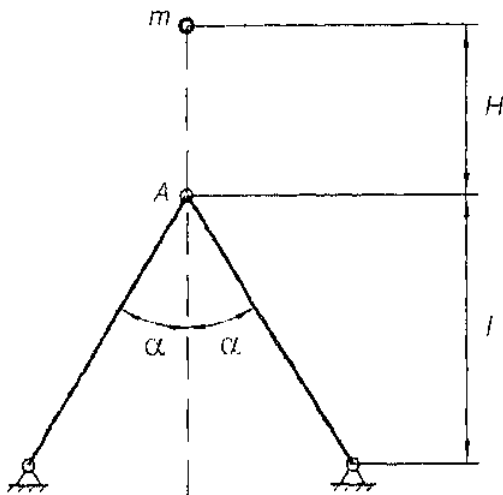


Рис. 12.17

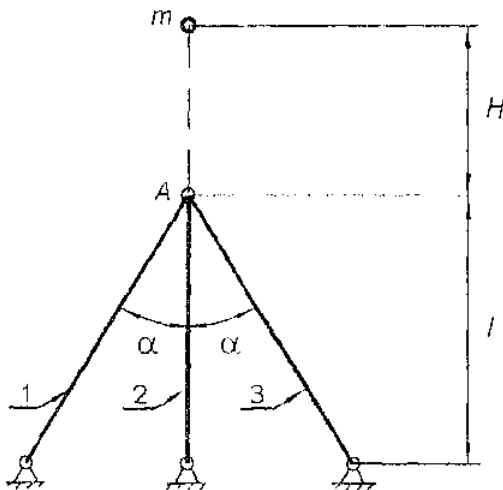


Рис. 12.18

12.23. На невесомую балку постоянного квадратного поперечного сечения со стороной d высоты H падает груз массой m (рис 12.16). Найти коэффициент динамичности λ , прогибы балки в точке удара и максимальные напряжения. В расчетах принять $H = 0,1$ м; $m = 2$ кг, $l = 0,5$ м; $d = 2$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

12.24. На невесомую стержневую систему с высоты H падает груз массой m (рис. 12.17). Стержни имеют круглое сечение диаметра d . Определить напряжения в стержнях и вертикальное перемещение точки A . В расчетах принять: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $H = 0,05$ м; $m = 2$ кг, $l = 1$ м, $\alpha = 30^\circ$, $d = 2$ см.

12.25. На невесомую стержневую систему с высоты H падает груз массой m (рис. 12.18). Стержни имеют круглое сечение диаметра d . Определить напряжения в стержнях и вертикальное перемещение точки A . В расчетах принять: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $H = 0,05$ м; $m = 2$ кг, $l = 1$ м, $\alpha = 30^\circ$, $d = 2$ см.

12.26. Вертикально стоящий стержень, имеющий длину l и площадь поперечного сечения F , при статическом действии груза веса G укорачивается на величину Δl . Предполагая, что стержень не теряет устойчивости, определить укорочение стержня при падении на него такого же груза с высоты H .

В расчетах принять: $l = 1$ м, $H = 0,1$ м; $G = 100$ Н, $\Delta l = 0,007$ мм; $F = 2$ см². Собственным весом стержня пренебречь.

12.27. На раму, все элементы которой имеют квадратное поперечное сечение со стороной d , с высоты H падает груз массы m (рис 12.19). Найти коэффициент динамичности λ , максимальные нормальные напряжения и вертикальное перемещение точки A . В расчетах принять: $H = 0,1$ м; $m = 1$ кг, $R = 0,2$ м; $d = 2$ см, $E = 7 \cdot 10^4$ МПа. Массой рамы пренебречь.

12.28. На раму, все элементы которой имеют квадратное сечение со стороной d , с высоты H падает груз массой m (рис. 12.20). Найти коэффициент динамичности λ , максимальные нормальные напряжения и вертикальное перемещение точки A . В расчетах принять: $H = 0,1$ м; $m = 1$ кг; $l = 0,2$ м; $d = 2$ см, $E = 7 \cdot 10^4$ МПа. Массой рамы пренебречь.

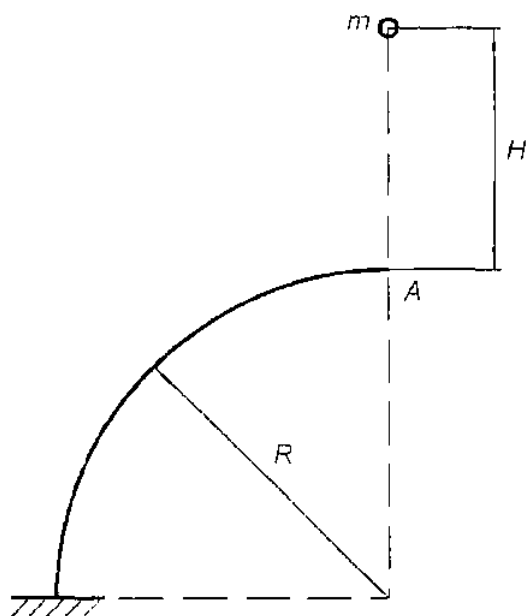


Рис. 12.19

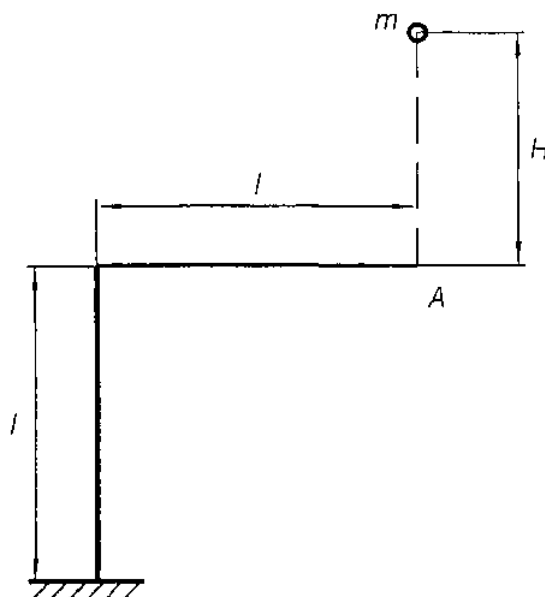


Рис. 12.20

12.29. На раму, все элементы которой имеют круглое сечение диаметра d , с высоты H падает груз массы m (рис. 12.21). Определить коэффициент динамичности λ , максимальный изгибающий момент и вертикальное перемещение точки A . В расчетах принять: $H = 5$ см, $m = 3$ кг, $l = 0,3$ м; $d = 3$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Массой рамы пренебречь.

12.30. На балку с высоты H падает груз массой m (рис. 12.22). Найти вертикальные перемещения в точке A и максимальные нормальные напряжения. В расчетах принять: $l = 0,5$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $H = 0,2$ м; $m = 10$ кг, момент инерции сечения $J = 350$ см⁴, момент сопротивления изгибу $W = 58,4$ см³. Массой балки пренебречь.

12.31. Масса m падает с одинаковой высоты H и ударяется о жесткий недеформируемый диск на свободных концах стержней (рис. 12.23, а и б). Найти отношение коэффициентов динамичности для этих стержней, полагая их невесомыми.

12.32. Лыжина массой m , двигаясь со скоростью v_0 , ударяет в верхний конец забитой в дно реки сваи (рис. 12.24). Определить значение v_0 , при котором наибольшее нормальное напряжение в свае достигнет допускаемого $[\sigma]$. В расчетах принять: $l = 3$ м, $m = 300$ кг, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 850$ МПа, момент инерции сечения сваи $J = 873$ см⁴, момент сопротивления изги-

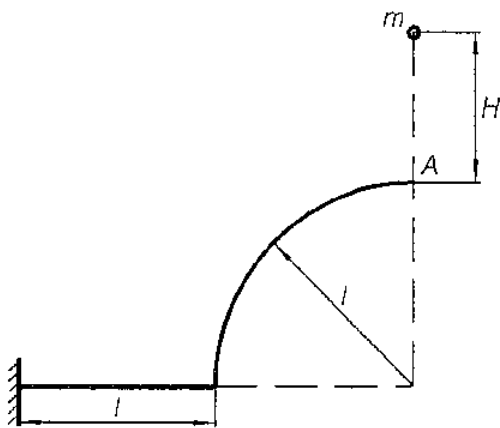


Рис. 12.21



Рис. 12.22

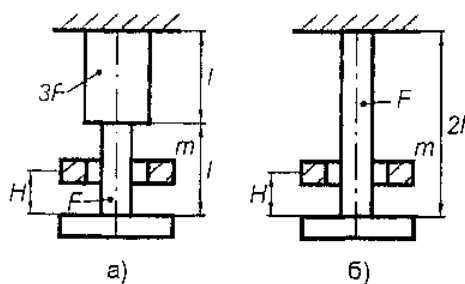


Рис. 12.23

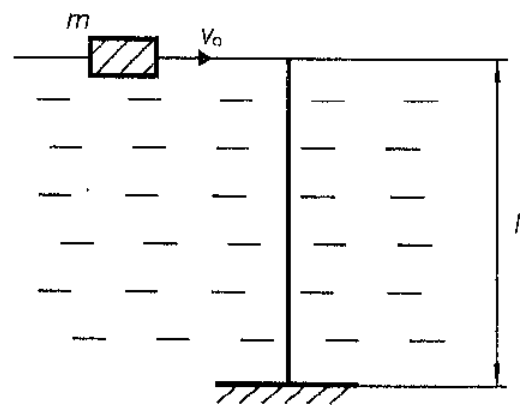


Рис. 12.24

бу $W = 109 \text{ см}^3$. Массой сваи и сопротивлением воды пренебречь.

12.33. Найти коэффициенты приведения массы для консольно заземленной балки длины l к сечению на ее свободном краю. Использовать: а) точную форму упругой линии балки и следующие аппроксимации её прогибов: б) $y = Ax^2$;

в) $y = A \left(l - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$.

12.34. Найти коэффициент приведения массы для жестко заземленной с обоих краев балки длины l к её среднему сечению.

Прогибы балки аппроксимировать функцией $y = A \left(l - \cos \frac{2\pi x}{l} \right)$.

12.35. Найти коэффициент приведения массы для шарнирно опертой балки длиной l к её среднему сечению. Прогибы балки аппроксимировать функцией $y = A \sin \frac{\pi x}{l}$.

12.36. Определить коэффициент приведения массы заземленного на одном краю стержня длины l к сечению на его свободном торце при продольном ударе. Использовать: а) точные значения продольных перемещений стержня δ и следующие аппроксимации: б) $\delta = Ax^2$; в) $\delta = A \sin \frac{\pi x}{2l}$.

12.37. Найти отношение коэффициентов динамичности при ударе падающей с высоты H массы m в середину шарнирно опертой балки длины l . Расчет провести без учета и с учетом массы балки. Прогиб балки аппроксимировать функцией $y = A \sin \frac{\pi x}{l}$, а ее массу m_G считать равной массе падающего груза.

12.38. Определить максимально допустимую длину l консольно заземленной балки при ударе в её свободное торцевое сечение груза массы m , падающего со скоростью v_0 . Балка имеет постоянное поперечное сечение в форме квадрата со стороной d . В расчетах принять: $m = 5 \text{ кг}$, $\rho = 7900 \text{ кг/м}^3$, $[\sigma] = 500 \text{ МПа}$, $d = 3 \text{ см}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $v_0 = 5 \text{ м/с}$.

12.39. Решить задачу 12.32 при учете массы сваи, приняв $\rho = 7900 \text{ кг/м}^3$, площадь ее поперечного сечения $F = 20,2 \text{ см}^2$.

12.40. Груз массой m падает с высоты H на диск, укрепленный на нижнем конце стержня круглого сечения диаметром d (см. рис. 12.23, б). Найти удлинение стержня и напряжения в нем. Задачу решить без учета и с учетом массы стержня. В рас-

четах принять: $m = 2$ кг, $H = 0,5$ м; $\rho = 2200$ кг/м³, $d = 2$ см, $l = 2$ м, $E = 7 \cdot 10^4$ МПа.

12.41. На вертикально стоящий стержень квадратного поперечного сечения со стороной d и длиной l с высоты H падает груз массой m . Предполагая, что стержень не теряет устойчивости, определить, с какой высоты должен упасть груз, для того чтобы напряжение в стержне достигло $\sigma_{\text{пц}}$. В расчетах принять: $m = 3$ кг, $l = 0,5$ м; $\sigma_{\text{пц}} = 150$ МПа, $d = 15$ мм, $\rho = 7500$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

12.42. Сравнить максимальные напряжения в консольной балке прямоугольного поперечного сечения $2d \times d$ и длины l , вызванные ударом по ее свободному краю падающего с высоты H груза массы m , в случаях, когда удар приходится в плоскостях наибольшей и наименьшей жесткости. Задачу решить без учета и с учетом веса балки, изготовленной из материала плотностью ρ .

12.43. Привязанный к концу проволочного каната груз массы $m = 4$ т движется вниз с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с. Найти напряжения в канате, возникающие при внезапной остановке его верхнего конца. В расчетах принять: $E = 10^5$ МПа, свободная длина каната в момент удара $l = 20$ м, площадь его поперечного сечения $F = 15$ см².

12.44. Маховик с массовым моментом инерции J насажен на свободный конец консольно закрепленного вала длины l и диаметра d , который вращается с постоянной угловой скоростью ω . Определить значение ω , при котором в случае внезапной остановки вала касательные напряжения в нем достигнут допустимых $[\tau]$. В расчетах принять: $d = 2$ см, $l = 0,5$ м; $J = 0,01$ кг · м²; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа. Массой вала пренебречь.

12.45. Маховик диаметра D и массы m насажен в центральном сечении на вращающийся с постоянной угловой скоростью ω двух опорный вал длины l и диаметра d . Определить значение l , при котором в случае внезапной остановки вала касательные напряжения в нем достигнут допустимых напряжений $[\tau]$. В расчетах принять: $d = 2$ см, $D = 20$ см, $m = 10$ кг, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $\omega = 20$ с⁻¹, $[\tau] = 150$ МПа. Массой вала пренебречь.

Глава 13
РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

При расчетах на прочность по допускаемым напряжениям полагается, что система теряет работоспособность, если хотя бы в одной точке какого-либо сечения стержней напряжения достигают предельного значения (см. п. VI § П.1). Однако многие из конструкций, элементы которых выполнены из пластических материалов, допускают достижение предела текучести в некотором множестве точек, что соответствует второму методу расчета — расчету по предельным нагрузкам.

Определение 13.1. *Предельной* называется такая минимальная нагрузка, при действии которой конструкция из геометрически неизменяемой превращается в геометрически изменяемую (см. определение П.15).

Несущей способностью конструкции называется ее свойство сохранять работоспособность при нагрузках, меньших предельных.

В сопротивлении материалов при расчетах на несущую способность реальная диаграмма растяжения-сжатия или сдвига (см. рис. 1.3) приближенно заменяется диаграммой для идеального упругопластического (рис. 13.1, а) или жесткопластического (рис. 13.1, б) материала. При этом, как правило, предполагается, что материал одинаково работает и на растяжение, и на сжатие. При достижении предела текучести σ_T или τ_T деформации могут быть произвольными.

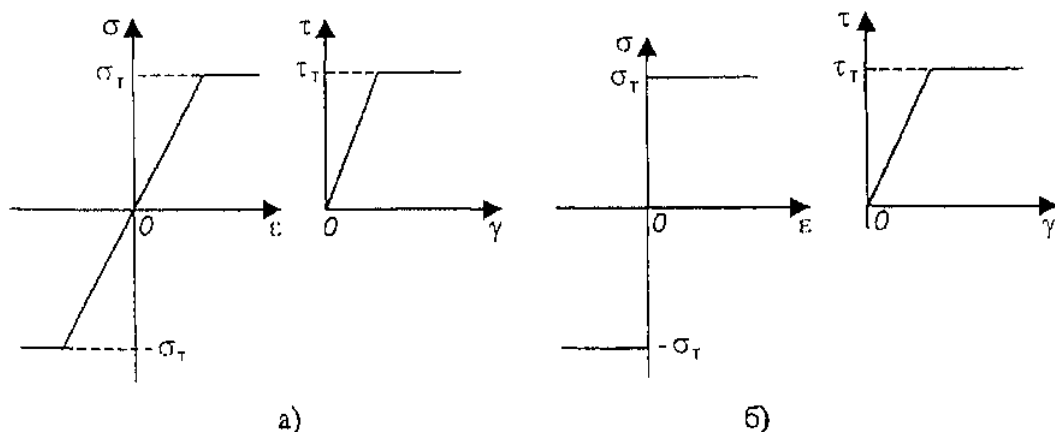


Рис. 13.1

Методы расчета на несущую способность для простейших видов деформации объединены одной идеей, но в то же время различаются.

А. Растяжение-сжатие стержней. При этой деформации напряжения в любой точке поперечного сечения равны между собой (см. (1.6)). Поэтому, если в некотором сечении напряжения равны σ_T , то соответствующие этому сечению торцы правой

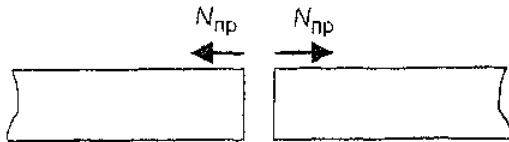


Рис. 13.2

и левой частей стержня могут перемещаться независимо друг от друга. Следовательно, стержень как бы разделяется на две части с приложенными на торцах нормальными силами (рис. 13.2)

$$N_{\text{пр}} = \sigma_T F. \quad (13.1)$$

Определение 13.2. Величина $N_{\text{пр}}$ в (13.1) называется *предельной нормальной силой*. ■

Б. Изгиб балок. При расчетах на предельную нагрузку ограничимся рассмотрением брусков с симметричными относительно оси Sy сечениями и будем пренебрегать перерезывающими силами, т.е. будем рассматривать чистый сгиб (см. определение 5.2).

Если нагрузка не превышает некоторых значений, то нормальные напряжения во всех точках любых поперечных сечений бруса остаются в упругой области и распределены по линейным законам (см. рис. 5.3). С увеличением нагрузки в том сечении, где изгибающий момент максимален, напряжения становятся равными σ_T сначала в наиболее удаленных волокнах, затем — в волокнах, расположенных ближе к центру тяжести S и, наконец, во всех волокнах. Этот процесс последовательно продемонстрирован эпюрами напряжений на рис. 13.3. Дальнейшее увеличение нагрузки не приводит к изменению напряжений, и левая и правая части балки могут свободно поворачиваться вокруг оси Sz друг относительно друга.

Нейтральный слой $C_T z_1$ в таком сечении параллельно смещен относительно оси Sz . Точка $C_T (y_T, 0)$ определяется из условия равновеликости верхней D_{TB} и нижней D_{TH} частей сечения $D = D_{TB} \cup D_{TH}$ (см. рис. 13.3):

$$F_B = F_H, \quad (13.2)$$

где $F_B = F(D_{TB})$ и $F_H = F(D_{TH})$.

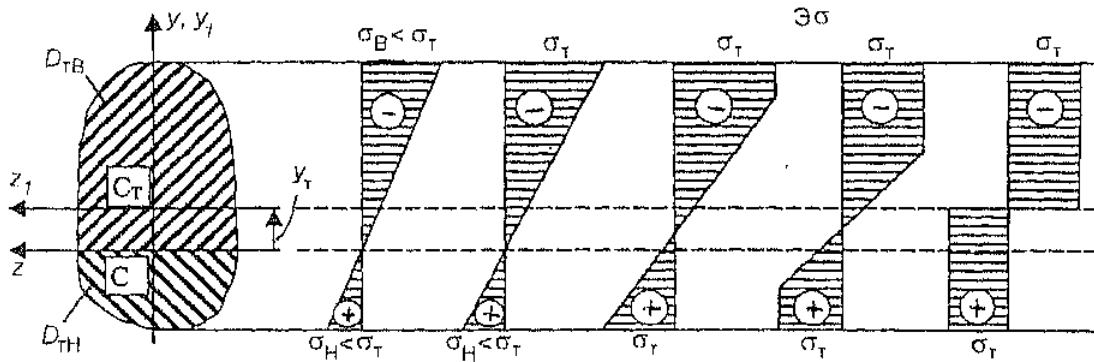


Рис. 13.3

К концам обеих частей балки при этом приложен изгибающий момент (рис. 13.4)

$$M_{z \text{ пр}} = \sigma_T W_{z \text{ пр}}, \quad W_{z \text{ пр}} = S_{zB} - S_{zH} = S_{z_1B} - S_{z_1H}, \quad (13.3)$$

где S_{zB} , S_{zH} , S_{z_1B} , S_{z_1H} — статические моменты областей D_{TB} и D_{TH} относительно осей Cz и $C_T z_1$.

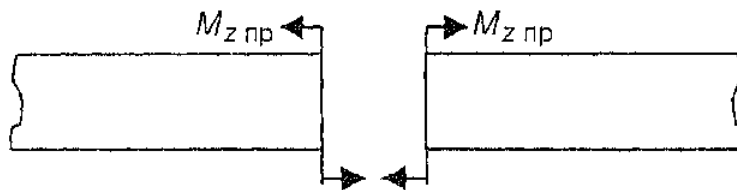


Рис. 13.4

Определение 13.3. Сечение, в котором напряжения распределены так, как указано на последней эпюре на рис. 13.3, называется *пластическим шарниром*, величины $M_{z \text{ пр}}$ и $W_{z \text{ пр}}$ в (13.3)— *предельными изгибающим моментом и моментом сопротивления при изгибе*. ■

Если сечение симметрично также и относительно оси Cz , то $C_T = C$ и имеет место следующая формула:

$$W_{z \text{ пр}} = 2S_{zB}. \quad (13.4)$$

В. Кручение круглых стержней. Для стержня кольцевого сечения с внешним R и внутренним R_0 радиусами аналогичная рассмотренной при изгибе последовательность распределения касательных напряжений по радиусу приведена на рис. 13.5 (при этом учтена аксиома 8.1, гл. 4). Так же, как и при изгибе,

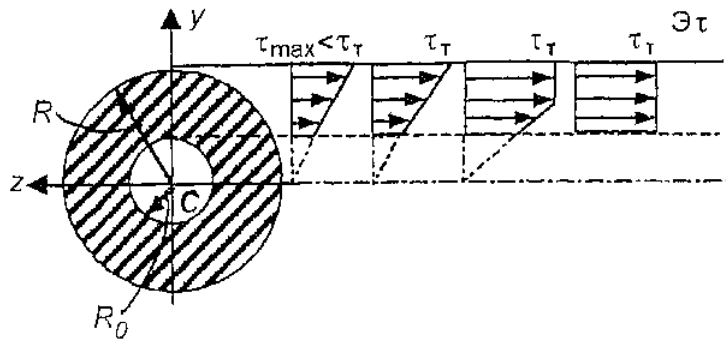


Рис. 13.5

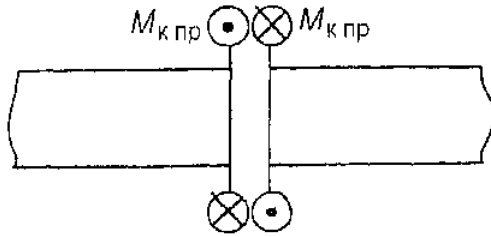


Рис. 13.6

дальнейшее увеличение нагрузки не приводит к изменению напряжений, и левая и правая части стержня могут свободно поворачиваться вокруг оси Sx друг относительно друга. К концам обеих частей приложен крутящий момент (рис. 13.6)

$$M_{к. пр} = \tau_{\tau} W_{к. пр}, \quad W_{к. пр} = \frac{2\pi}{3} (R^3 - R_0^3) = \frac{\pi}{12} (d^3 - d_0^3), \quad (13.5)$$

где d и d_0 — соответствующие диаметры.

Определение 13.4. Величины $M_{к. пр}$ и $W_{к. пр}$ в (13.5) называются *предельными крутящим моментом и моментом сопротивления кручению*. ■

Для стержня кругового поперечного сечения из (13.5) вытекает следующая формула ($R_0 = 0$):

$$W_{к. пр} = \frac{2\pi}{3} R^3 = \frac{\pi}{12} d^3. \quad (13.6)$$

При расчетах на несущую способность для всех трех рассмотренных видов деформаций используется следующее положение.

Утверждение 13.1. Наличие сечения, в котором внутренний силовой фактор равен соответствующему предельному, приводит к появлению одной степени свободы, т.е. к снятию одной связи. ■

Отсюда для систем с одной внешней нагрузкой или с пропорциональными одному параметру несколькими внешними нагрузками приходим к следующим *алгоритмам расчета по предельным нагрузкам*.

1. Для статически определимого стержня, работающего на растяжение-сжатие, и статически определимых ферменных сис-

тем (см. § 1.1 и 2.1) исчерпание несущей способности происходит уже тогда, когда в одном сечении $N = N_{\text{пр}}$, т.е. расчет по предельным нагрузкам совпадает с расчетом по допускаемым напряжениям, если $[\sigma] = \sigma_T$.

2. Для статически определимого стержня, работающего на кручение, статически определимой балки и статически определимых рам (см. § 4.1, 5.1 и 7.1) исчерпание несущей способности также происходит уже тогда, когда в одном сечении внутренний силовой фактор $Q = M_z$ или $Q = M_k$ равен соответствующему предельному $Q_{\text{пр}}$. Поэтому достаточно из “упругой” задачи найти Q_{max} как функцию от нагрузки (эта зависимость линейная). Тогда предельное значение нагрузки есть решение уравнения $Q_{\text{max}} = Q_{\text{пр}}$.

В некоторых случаях в СО-задачах расположение сечения, в котором имеет место состояние текучести, можно указать сразу, не определяя Q_{max} .

3. Для статически неопределимых стержней, работающих на растяжение-сжатие или кручение (см. § 1.2 и 4.2), несущая способность теряется при появлении двух таких сечений, а для статически неопределимых сложных стержневых систем, работающих на кручение (см. § 4.2), балок (см. § 5.2), ферменных систем и рам (см. § 2.2 и 7.3), имеющих степень статической неопределимости, равную s , — при наличии $(s + 1)$ сечений этого типа.

Естественным подходом к решению таких задач является следующий путь. Предполагаем, что материал идеальный упруго-пластический. В исходной СН-задаче определяем сечение, в котором соответствующий внутренний силовой фактор $Q = Q_{\text{max}}$. Далее, полагая, что в этом сечении снята соответствующая связь и $Q = Q_{\text{пр}}$ (при изгибе имеем пластический шарнир), решаем полученную $(s - 1)$ раз статически неопределимую задачу. Продолжая этот процесс, на последнем шаге приходим к СО-задаче с s сечениями, в которых $Q = Q_{\text{пр}}$. К ней применяем указанные выше п. 1 или 2. Однако этот путь достаточно сложен и используется крайне редко, а именно лишь в том случае, если в предельном состоянии необходимо знать внутренние силовые факторы и перемещения во всех сечениях.

Как правило, необходимо определить только предельную нагрузку. Наиболее удобным для этой цели является так называемый *кинематический метод* (существует также *статический*

метод; см. [16]). Материал системы полагается идеально жесткопластическим (это не сказывается на конечном результате). Рассматриваются все кинематически возможные предельные состояния, т.е. изображаются возможные картины деформаций СО-систем с $(s + 1)$ сечениями, в которых $Q = Q_{\text{пр}}$. При этом в силу того, что материал жесткопластический, в тех сечениях, в которых $Q < Q_{\text{пр}}$, деформации отсутствуют (соответствующие участки системы перемещаются как абсолютно жесткие тела) Кинематические предельные состояния не могут выбираться произвольно. Они должны быть совместимы со статически возможными состояниями в том смысле, что работа предельных внутренних силовых факторов на соответствующих перемещениях должна быть положительной. Для каждого из состояний из уравнений равновесия определяется предельная нагрузка. Действительное предельное состояние выбирается на основании следующего утверждения.

Утверждение 13.2. Пусть $P_{\text{пр}}^*$ — предельная нагрузка для некоторого кинематического состояния, совместимого со статическим, а $P_{\text{пр}}$ — истинное значение предельной нагрузки. Тогда

$$P_{\text{пр}} \leq P_{\text{пр}}^* \quad \blacksquare \quad (13.7)$$

Следовательно, истинная предельная нагрузка является минимальной из всех возможных. ■

Отметим, что для стержневых систем, указанных в пп. 2 и 3, предельная нагрузка всегда больше той, которая соответствует расчету по допускаемым напряжениям.

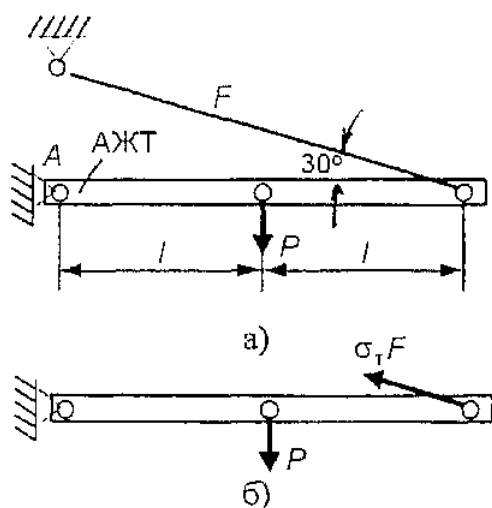


Рис. 13.7

Пример 13.1. Для стержневой системы, изображенной на рис. 13.7, а (АЖТ — абсолютно жесткое тело), определить предельное значение $P_{\text{пр}}$ силы P .

Решение. Система статически определимая. Следовательно, исчерпание ее несущей способности определяется переходом стержня в состояние текучести. Считая напряжения в стержне равными σ_T , из условия равновесия балки (рис. 13.7, б) получаем:

$$\sum M_A = 0: \sigma_T \cdot F \cdot \sin 30^\circ \cdot 2l - P \cdot l = 0,$$

откуда находим $P_{\text{пр}} = \sigma_T F$. ■

Пример 13.2. Для стержневой системы, изображенной на рис. 13.8, а, определить предельное значение $P_{\text{пр}}$ силы P .

Решение. Система один раз статически неопределимая. Следовательно, исчерпание ее несущей способности определяется переходом двух стержней в состояние текучести. Все возможные варианты ограничиваются следующими парами стержней: 2—3, 1—3 и 1—2.

Используя уравнение равновесия, для каждого случая получаем

— стержни 2—3 (рис. 13.8, б; узел А неподвижный; направление усилий в стержнях 2 и 3 выбираем с учетом того, что АЖТ поворачивается вокруг точки А):

$$\sum M_A = 0: \sigma_T \cdot F \cdot l - P \cdot 2l + \sigma_T \cdot 2F \cdot 3l = 0, \quad P_{\text{пр} 23} = 3,5\sigma_T F;$$

— стержни 1—3 (рис. 13.8, в; узел В неподвижный; направление усилий в стержнях 1 и 3 выбираем с учетом того, что АЖТ поворачивается вокруг точки В):

$$\sum M_B = 0: \sigma_T \cdot F \cdot l - P \cdot l + \sigma_T \cdot 2F \cdot 2l = 0, \quad P_{\text{пр} 13} = 5\sigma_T F;$$

— стержни 1—2 (рис. 13.8, г; узел С неподвижный; направление усилий в стержнях 1 и 2 выбираем с учетом того, что АЖТ поворачивается вокруг точки С):

$$\sum M_C = 0: -\sigma_T \cdot F \cdot 3l - \sigma_T \cdot F \cdot 2l + P \cdot l = 0, \quad P_{\text{пр} 12} = 5\sigma_T F.$$

Окончательно получаем

$$P_{\text{пр}} = \min \{P_{\text{пр} 23}, P_{\text{пр} 13}, P_{\text{пр} 12}\} = 3,5\sigma_T F. \quad \blacksquare$$

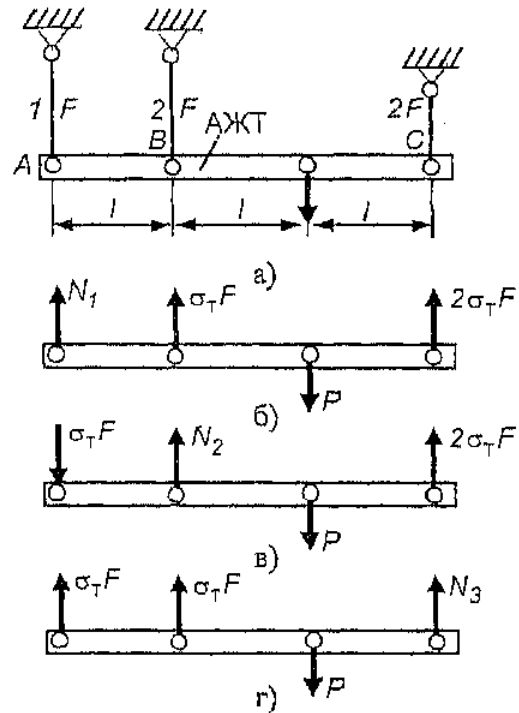


Рис. 13.8

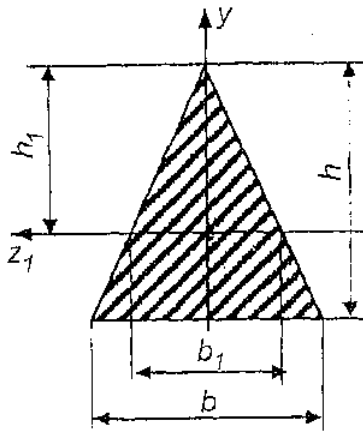


Рис. 13.9

Пример 13.3. Для поперечного сечения, изображенного на рис. 13.9, определить предельный момент сопротивления при изгибе $W_{z \text{ пр}}$.

Решение. Нейтральная линия в соответствии с выше принятыми обозначениями изображена на рисунке как ось Oz_1 . Ее положение находим с использованием условия (13.2) для верхней части сечения (b_1 и h_1 — основание и высота треугольника, соответствующего этой

части сечения, F — площадь всего сечения) и подобия треугольников

$$F_B = \frac{1}{2} b_1 h_1 = \frac{F}{2} = \frac{1}{4} bh, \quad \frac{h_1}{h} = \frac{b_1}{b}.$$

Рассматривая эти равенства как систему уравнений относительно b_1 и h_1 , получаем

$$b_1 = b/\sqrt{2}, \quad h_1 = h/\sqrt{2}.$$

Определяем статические моменты верхней и нижней частей сечения (последнюю часть рассматриваем как большой треугольник с удаленным из него малым треугольником):

$$S_{z_1 B} = \frac{1}{2} b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{24} bh^2,$$

$$S_{z_1 H} = \frac{1}{2} bh \cdot \left[\frac{h}{3} - (h - h_1) \right] - S_{z_1 B} = -\frac{bh^2}{24} (8 - 5\sqrt{2}).$$

По формуле (13.13) находим предельный момент сопротивления:

$$W_{z \text{ пр}} = \frac{\sqrt{2}}{24} bh^2 + \frac{bh^2}{24} (8 - 5\sqrt{2}) = \frac{bh^2}{6} (2 - \sqrt{2}) \approx 0,0977bh^2. \blacksquare$$

Пример 13.4. Для изображенной на рис. 13.10 двухопорной балки определить предельное значение $P_{\text{пр}}$ силы P .

Решение. Нумерация характерных сечений указана на рис. 13.10, а. Поскольку балка СО, то число пластических шарниров равно единице. В данном случае эпюру моментов можно не

строить, поскольку ясно, что максимум изгибающих моментов может быть только в центре балки, так как на концах балки моменты равны нулю, на каждом участке эшоры линейны (все нагрузки являются сосредоточенными). Следовательно, пластический шарнир возникает в середине балки (сечении 2).

Изображаем картину деформаций в предельном состоянии (см. рис. 13.10). При этом направление $M_{пр}$ выбрано так, что оно согласуется с углом поворота сечения. Далее рассматриваем равновесие СО-балки с пластическим шарниром. Записывая, например, уравнение равновесия для левой половины балки

$$\sum M_2^л = 0: \frac{P}{2} \cdot l - M_{пр} = 0,$$

получаем предельную силу: $P_{пр} = 2M_{пр}/l$. Конкретное ее значение может быть найдено по формуле (13.3) при задании сечения. ■

Пример 13.5. Для изображенной на рис. 13.11 балки постоянного поперечного сечения определить предельное значение $P_{пр}$ силы P .

Решение. Нумерация характерных сечений указана на рис. 13.11. Данная балка один раз статически неопределима. Для исчерпания ее несущей способности необходимо возникновение двух пластических шарниров.

Не определяя опорные реакции (см. рис. 13.11), аналогично предыдущему примеру делаем вывод о том, что пластичес-

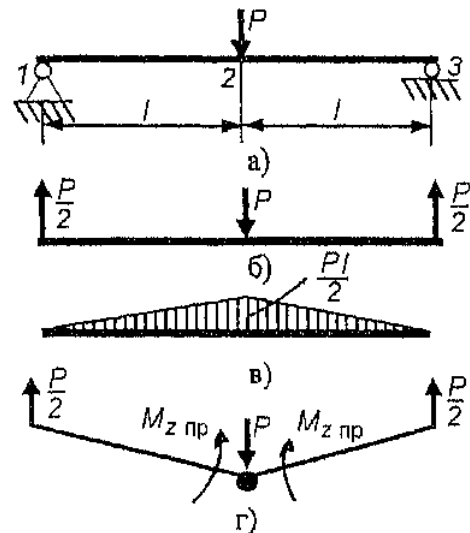


Рис. 13.10

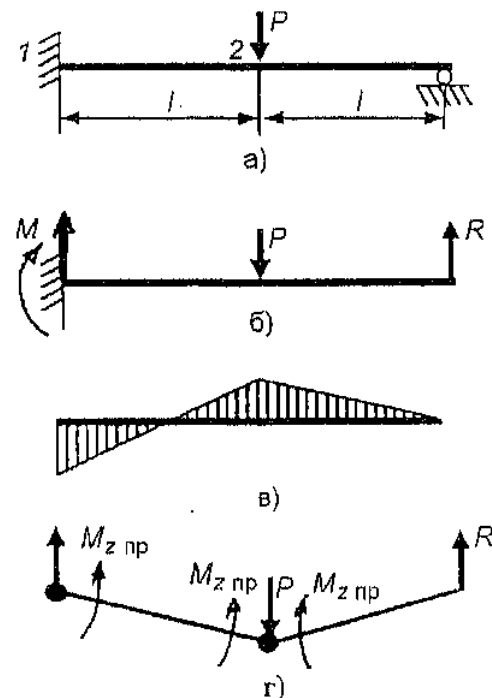


Рис. 13.11

кие шарниры возникают в заделке и в середине балки (сечениях 1 и 2). Причем в силу постоянства поперечного сечения абсолютные величины предельных моментов в них совпадают. Единственно возможная совместимая картина деформаций указана на рис. 13.11.

Рассматриваем равновесие СО-балки с пластическими шарнирами. При этом удобно выбрать такие уравнения, в которые входит только одна реакция:

$$\sum M_2^H = 0: -R_1 \cdot l + 2M_{\text{пр}} = 0;$$

$$\sum M_3 = 0: -R_1 \cdot 2l + 2M_{\text{пр}} - M_{\text{пр}} + P \cdot l = 0.$$

Исключая из этой системы уравнений R_1 , находим предельную силу:

$$P_{\text{пр}} = 3M_{\text{пр}}/l. \blacksquare$$

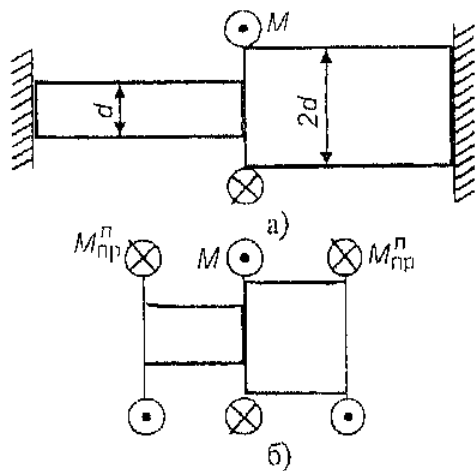


Рис. 13.12

Пример 13.6. Для изображенного на рис. 13.12 ступенчатого вала определить предельный крутящий момент $M_{\text{пр}}$.

Решение. Задача один раз статически неопределимая. Вал теряет несущую способность тогда, когда напряжения на левом и правом участках достигнут предела текучести τ_T (все сечения — пластические шарниры). Поскольку диаметры частей вала различны, то и значения предельного

крутящего момента на левом и правом участках различные:

$$M_{\text{пр}}^{\text{л}} = \frac{\pi}{12} \tau_T d^3, \quad M_{\text{пр}}^{\text{п}} = \frac{\pi}{12} \tau_T (2d)^3 = \frac{2\pi}{3} \tau_T d^3.$$

Единственно возможный вариант направлений этих моментов указан на рис. 13.12. Составляя уравнение равновесия, получаем:

$$\sum M_x = 0: -M_{\text{пр}}^{\text{л}} + M - M_{\text{пр}}^{\text{п}} = 0,$$

$$M_{\text{пр}} = M_{\text{пр}}^{\text{л}} + M_{\text{пр}}^{\text{п}} = \frac{3\pi}{4} \tau_T d^3. \blacksquare$$

Задачи

В задачах 13.1—13.11 для стержневых систем, изображенных на указанных рисунках, определить предельное значение $P_{\text{пр}}$ силы P .

13.1. Рис. 13.13. В расчетах принять: $F_1 = F_2 = 2 \text{ см}^2$, $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_{\text{T}} = 220 \text{ МПа}$.

13.2. Рис. 13.13. В расчетах принять: $F_1 = 2 \text{ см}^2$, $F_2 = 4 \text{ см}^2$, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma_{\text{T}} = 220 \text{ МПа}$.

13.3. Рис. 13.14. В расчетах принять: $F_1 = F_3 = 2 \text{ см}^2$, $F_2 = 4 \text{ см}^2$, $\alpha = 60^\circ$, $\sigma_{\text{T}} = 220 \text{ МПа}$.

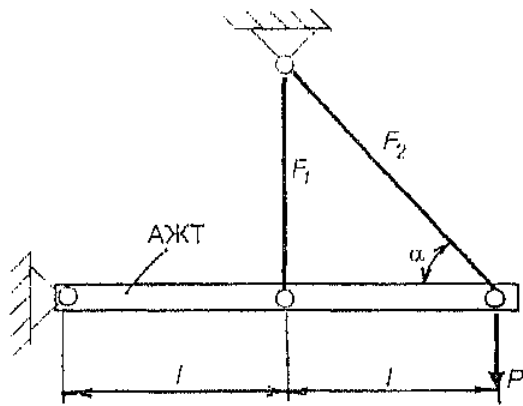


Рис. 13.13

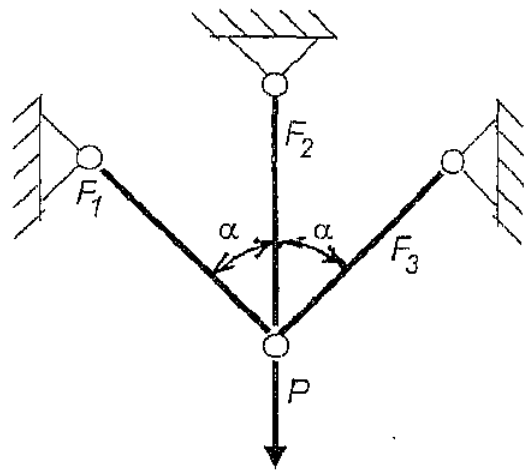


Рис. 13.14

13.4. Рис. 13.14. В расчетах принять: $F_1 = F_2 = F_3 = 2 \text{ см}^2$, $\alpha = 60^\circ$, $\sigma_{\text{T}} = 220 \text{ МПа}$.

13.5. Рис. 13.15. В расчетах принять: $F_1 = F_2 = F_3 = 2 \text{ см}^2$, $\sigma_{\text{T}} = 220 \text{ МПа}$.

13.6. Рис. 13.15. В расчетах принять: $F_1 = 1 \text{ см}^2$, $F_2 = 2 \text{ см}^2$, $F_3 = 3 \text{ см}^2$, $\sigma_{\text{T}} = 220 \text{ МПа}$.

13.7. Рис. 13.16. В расчетах принять: $F_1 = 1 \text{ см}^2$, $F_2 = 3 \text{ см}^2$, $F_3 = 1,4 \text{ см}^2$, $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_{\text{T}} = 220 \text{ МПа}$.

13.8. Рис. 13.16. В расчетах принять: $F_1 = 1 \text{ см}^2$, $F_2 = 2 \text{ см}^2$, $F_3 = 1,4 \text{ см}^2$, $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_{\text{T}} = 220 \text{ МПа}$.

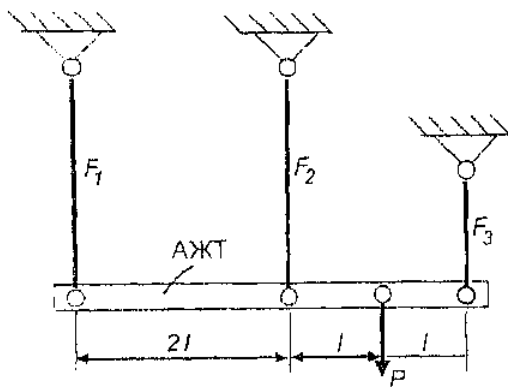


Рис. 13.15

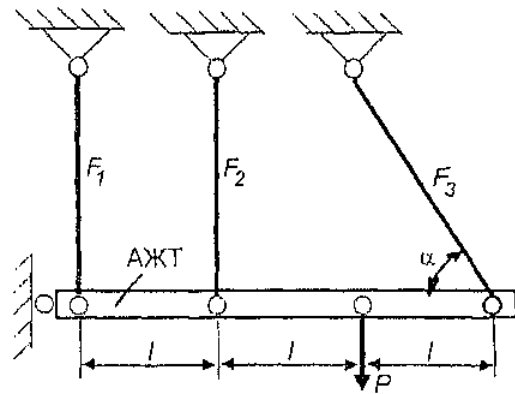


Рис. 13.16

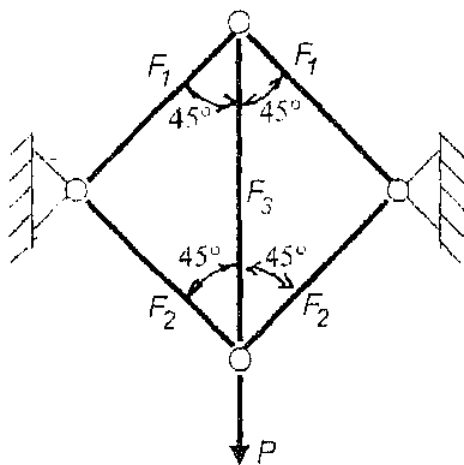


Рис. 13.17

13.9. Рис. 13.17. В расчетах принять: $F_1 = 1 \text{ см}^2$, $F_2 = 3 \text{ см}^2$, $F_3 = 1,4 \text{ см}^2$, $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$.

13.10. Рис. 13.17. В расчетах принять: $F_1 = F_2 = 2 \text{ см}^2$, $F_3 = 0,7 \text{ см}^2$, $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$.

13.11. Рис. 13.17. В расчетах принять: $F_1 = 2 \text{ см}^2$, $F_2 = 4 \text{ см}^2$, $F_3 = 1,4 \text{ см}^2$, $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$.

В задачах 13.12—13.17 для стержневых систем, изображенных на указанных рисунках, определить минимальное значение

параметра F , при котором система сохраняет несущую способность.

13.12. Рис. 13.13. В расчетах принять: $F_1 = F_2 = F$, $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$, $P = 300 \text{ кН}$.

13.13. Рис. 13.14. В расчетах принять: $F_1 = F_3 = F$, $F_2 = 2F$, $\alpha = 60^\circ$, $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$, $P = 300 \text{ кН}$.

13.14. Рис. 13.15. В расчетах принять: $F_1 = F$, $F_2 = 5F$, $F_3 = 2F$, $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$, $P = 300 \text{ кН}$.

13.15. Рис. 13.15. В расчетах принять: $F_1 = F_2 = F$, $F_3 = 5F$, $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$, $P = 300 \text{ кН}$.

13.16. Рис. 13.16. В расчетах принять: $F_1 = F_2 = F$, $F_3 = 1,4F$, $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_T = 220 \text{ МПа}$, $P = 300 \text{ кН}$.

13.17. Рис. 13.16. В расчетах принять: $F_1 = F$, $F_2 = 4F$, $F_3 = 1,4F$, $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_T = 220$ МПа, $P = 300$ кН.

13.18. Для стержневой системы, изображенной на рис. 13.14, определить максимальный угол α , при котором система сохраняет несущую способность. В расчетах принять: $F_1 = F_3 = 2$ см², $F_2 = 2,4$ см², $\sigma_T = 240$ МПа, $P = 100$ кН.

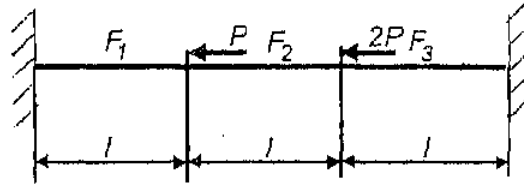


Рис. 13.18

В задачах 13.19—13.21 для изображенного на рис. 13.18 ступенчатого бруса определить предельное значение $P_{пр}$ силы P .

13.19. В расчетах принять:

$F_1 = 4$ см², $F_2 = 2$ см², $F_3 = 6$ см², $\sigma_T = 240$ МПа.

13.20. В расчетах принять: $F_1 = 2$ см², $F_2 = 1$ см², $F_3 = 6$ см², $\sigma_T = 220$ МПа.

13.21. В расчетах принять: $F_1 = 3$ см², $F_2 = 1$ см², $F_3 = 7$ см², $\sigma_T = 240$ МПа.

13.22. Для сечения в форме ромба с диагоналями $2b$ и $2h$ определить предельные моменты сопротивления $W_{пр}$ при изгибе относительно диагоналей ромба. Найти их отношение при $h = 2b$.

В задачах 13.23—13.27 для указанных сечений определить предельный момент сопротивления W_z при изгибе и найти его отношение к моменту сопротивления изгибу, найденному из расчета по допускаемым напряжениям.

13.23. Прямоугольник с основанием b и высотой $h = 2b$.

13.24. Равнобочная трапеция с высотой h и основаниями $b_1 = 3h$, $b_2 = 4h$.

13.25. Круг диаметра d .

13.26. Кольцо с внутренним d и внешним $D = 2d$ диаметрами.

13.27. Тонкостенное кольцо толщины δ и диаметра $d = 10\delta$.

В задачах 13.28—13.38 для сечений, указанных на соответствующих рисунках или непосредственно в условии задачи, определить предельный момент сопротивления W_z при изгибе.

13.28. В расчетах принять: $b = 3$ см.

13.29. В расчетах принять: $b = 2$ см.

13.30. В расчетах принять: $b = 1,5$ см.

13.31. В расчетах принять: $b = 3$ см.

13.32. В расчетах принять: $b = 3$ см.

13.33. В расчетах принять: $b = 1,5$ см.

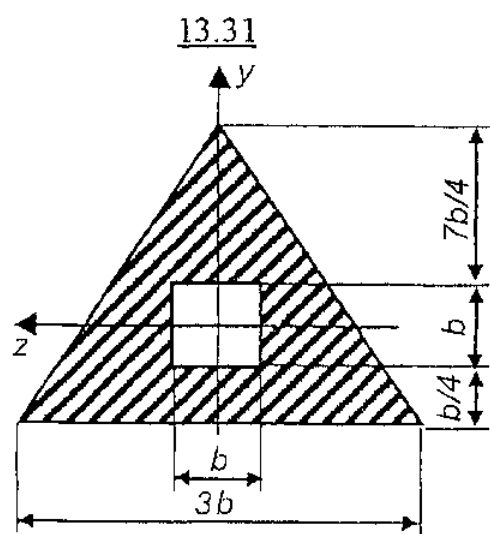
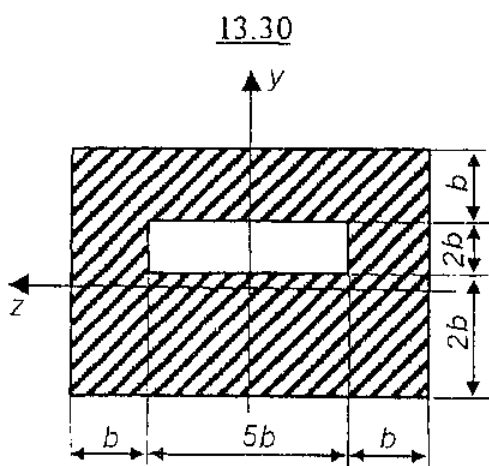
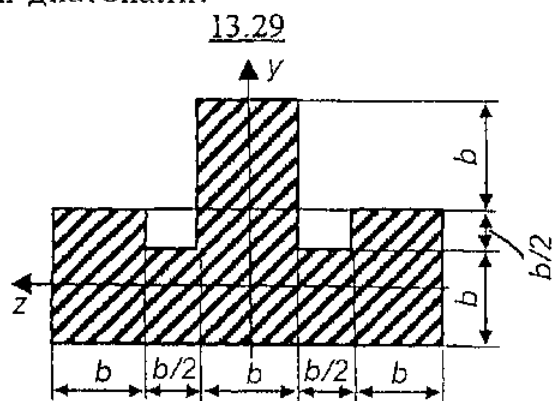
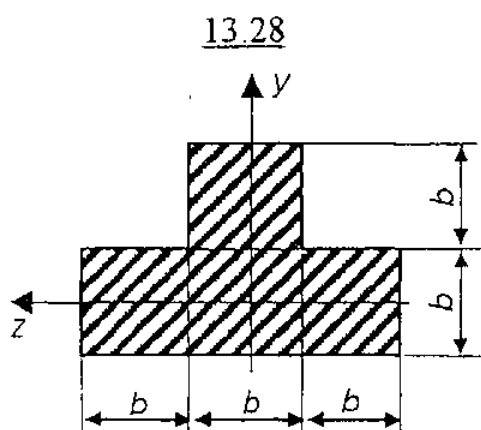
13.34. Сечение — квадрат с диагональю $3b$, в центре которого вырезан так, как показано на рисунке, квадрат со стороной b . В расчетах принять: $b = 2$ см.

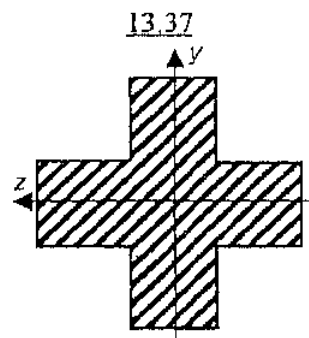
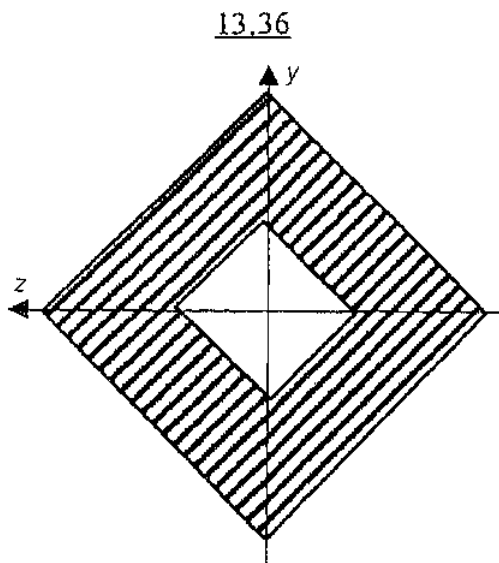
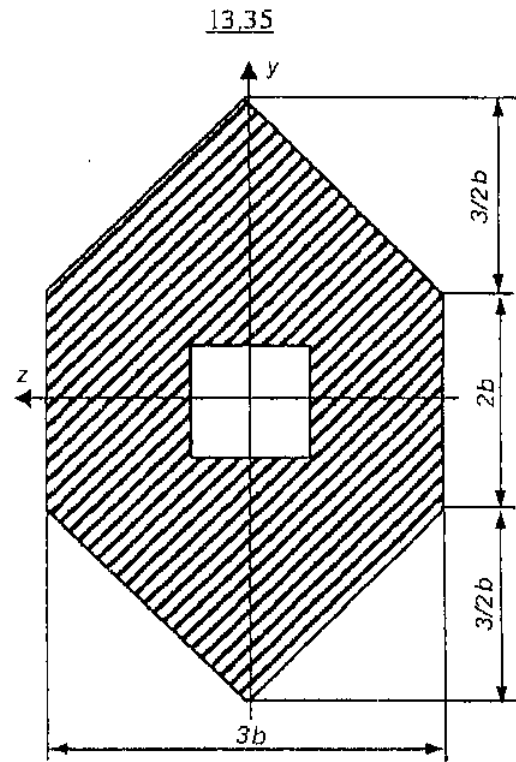
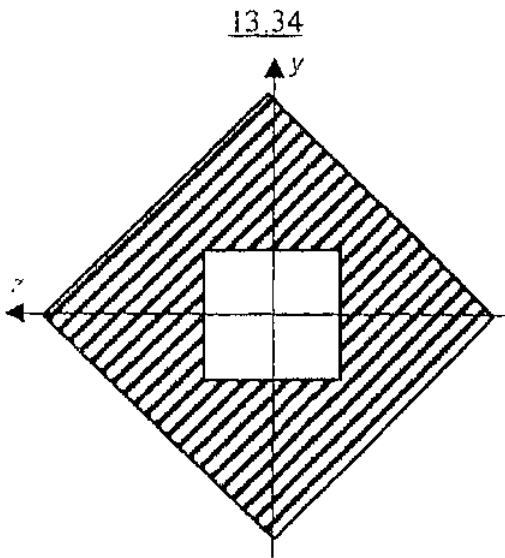
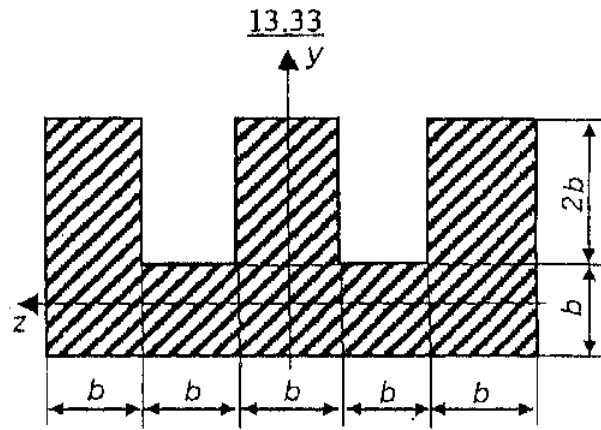
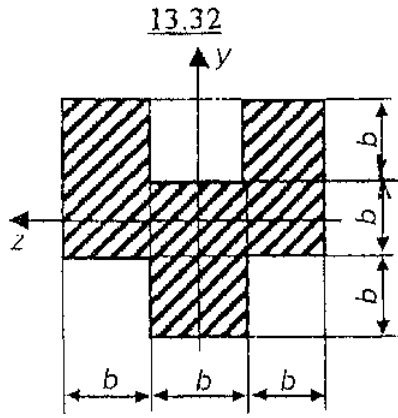
13.35. В центре сечения вырезан так, как показано на рисунке, квадрат со стороной b . В расчетах принять: $b = 3$ см.

13.36. Сечение — квадрат с диагональю $3b$, в центре которого вырезан так, как показано на рисунке, квадрат с диагональю b . В расчетах принять: $b = 2$ см.

13.37. Сечение — квадрат со стороной $3b$, в углах которого вырезаны так, как показано на рисунке, квадраты со стороной b . В расчетах принять: $b = 3$ см.

13.38. Правильный восьмиугольник со стороной $1,5$ см. Изгиб относительно наибольшей диагонали.





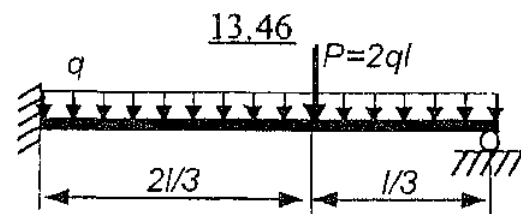
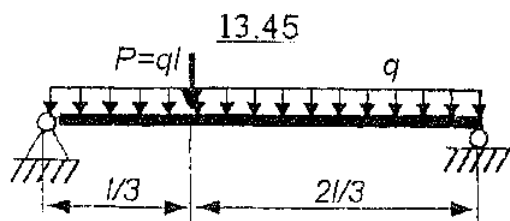
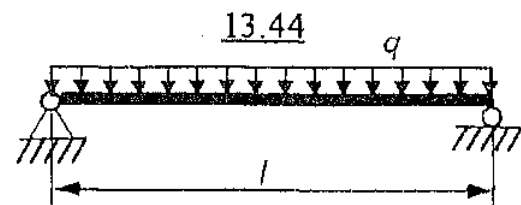
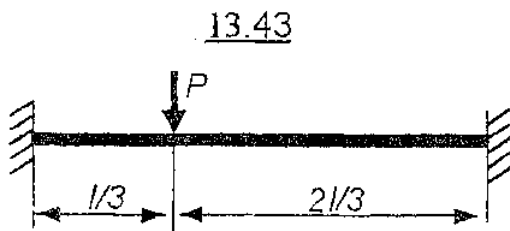
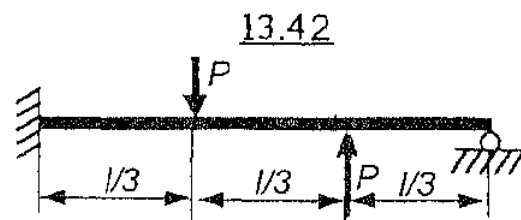
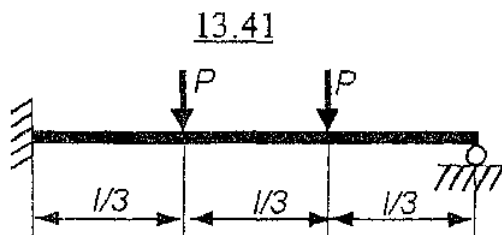
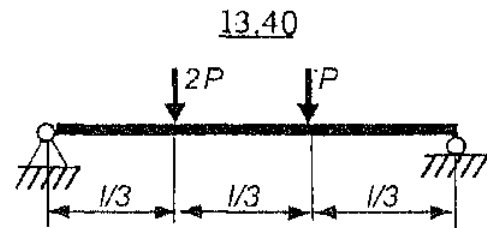
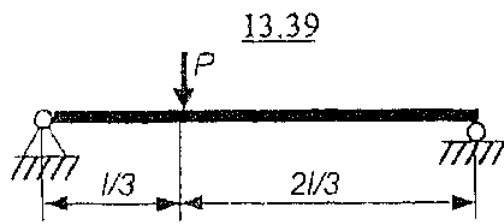
В задачах 13.39—13.54 для балок, изображенных на соответствующих рисунках, определить указанное предельное значение ($P_{\text{пр}}$, $q_{\text{пр}}$ или $M_{\text{пр}}$) внешней нагрузки. В расчетах принять: $l = 1$ м, $W_{z \text{ пр}} = 4 \text{ см}^3$, $\sigma_{\text{т}} = 200 \text{ МПа}$

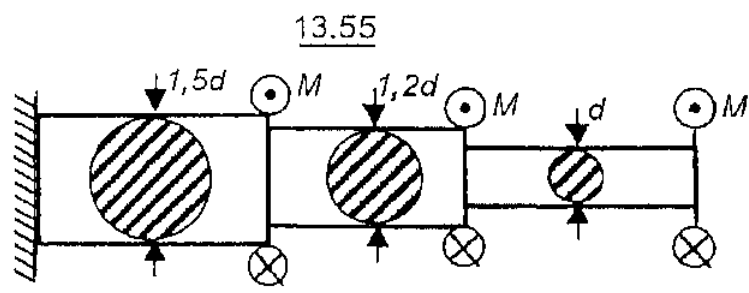
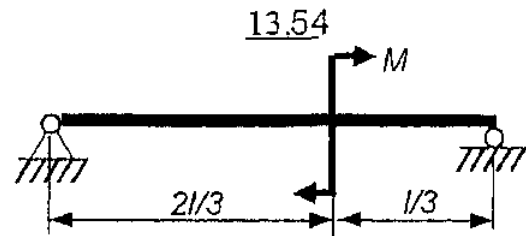
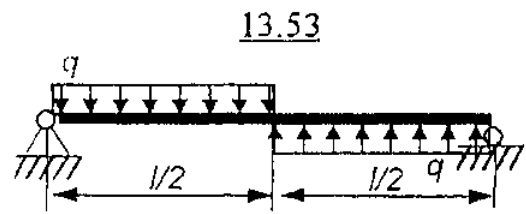
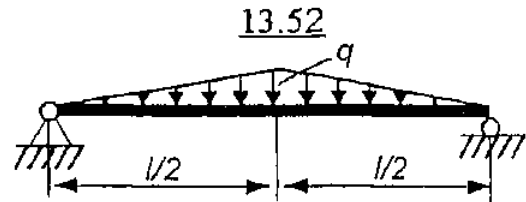
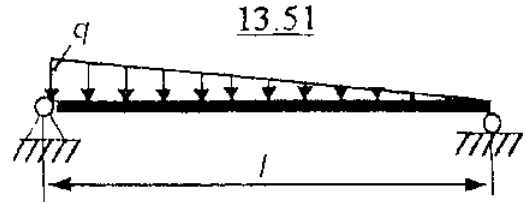
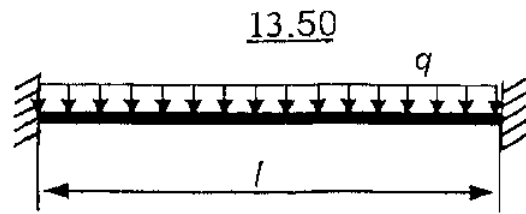
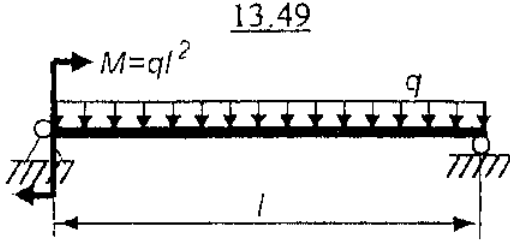
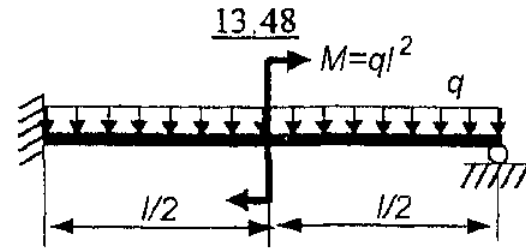
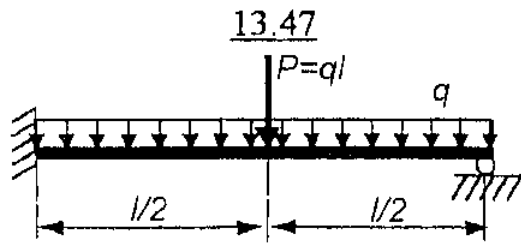
13.39—13.43. $P_{\text{пр}}$.

13.44—13.53. $q_{\text{пр}}$.

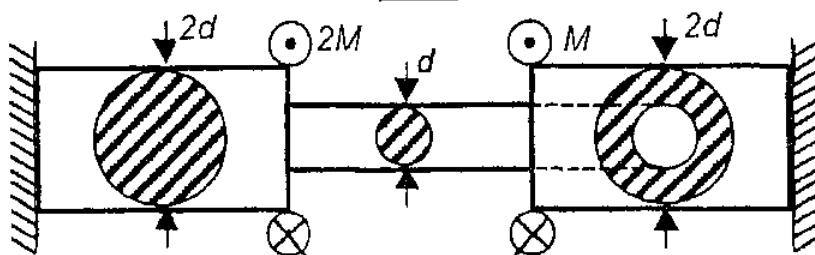
13.54. $M_{\text{пр}}$.

13.55—13.59. Для валов, изображенных на соответствующих рисунках, определить предельное значение $M_{\text{пр}}$ момента M . В расчетах принять: $d = 2$ см, $\tau_{\text{т}} = 80 \text{ МПа}$.

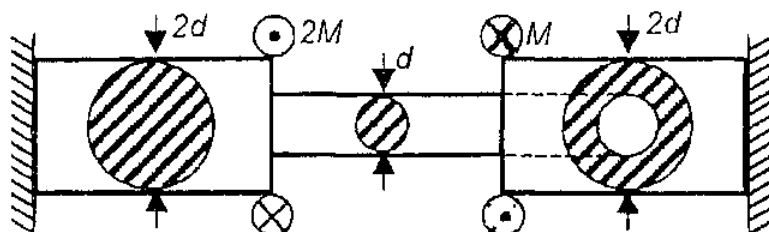




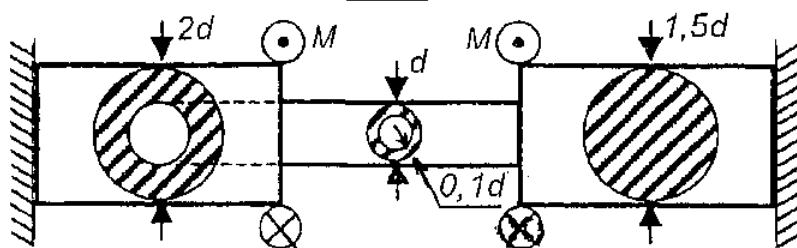
13.56



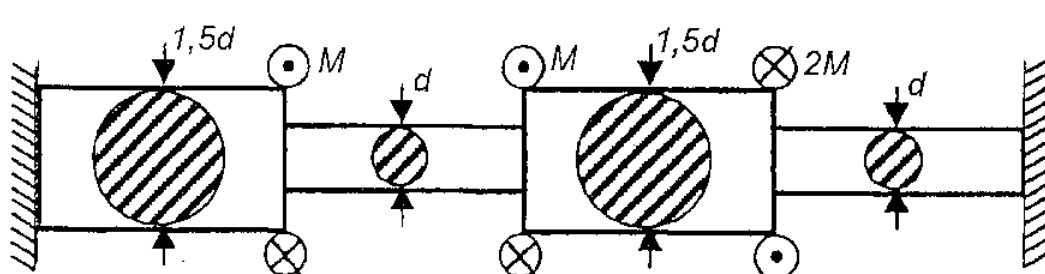
13.57



13.58



13.59



Глава 14 РАСЧЕТЫ НА УСТАЛОСТЬ

В сопротивлении материалов наряду с частными случаями динамических расчетов элементов конструкций, указанных в гл. 12, рассматриваются установившиеся процессы, приводящие к *периодической (циклической)* зависимости нормальных σ и/или касательных τ напряжений от времени t :

$$\sigma = \sigma(t), \quad \tau = \tau(t), \quad \sigma(t + T) = \sigma(t), \quad \tau(t + T) = \tau(t), \quad (14.1)$$

где T — *период (цикл)* изменения напряжений.

Определение 14.1. *Усталостью* называется разрушение материала при циклическом изменении НДС при напряжениях, меньших предельных статических, а *выносливостью* — его способность выдерживать большое число циклов без проявления усталостных эффектов. ■

Далее основные результаты приводятся для нормальных напряжений. При рассмотрении касательных напряжений в соответствующих обозначениях необходимо заменить σ на τ .

Определение 14.2. Величины

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}, \quad (14.2)$$

где σ_{\max} и σ_{\min} — максимальное и минимальное значения напряжений за цикл, называются соответственно *средним напряжением (статической составляющей цикла)*, *амплитудой цикла (его переменной составляющей)* и *коэффициентом асимметрии цикла*.

При $R_\sigma = -1$ цикл называется *симметричным*, а в противном случае — *асимметричным*. Если $\sigma_{\min} > 0$ или $\sigma_{\max} < 0$, то цикл именуется *знакопостоянным*, остальные асимметричные циклы — *знакопеременными*. При $\sigma_{\min} = 0$ (соответственно $R_\sigma = 0$) или $\sigma_{\max} = 0$ ($R_\sigma = \infty$) цикл называется *отнулевым (пульсационным)*.

Циклы с равными коэффициентами асимметрии называются *подобными*. ■

Определение 14.3. Для фиксированного числа N циклов с коэффициентом асимметрии R_σ напряжение σ_{RN} (в этом обозначении R — конкретное числовое значение R_σ), равное σ_{\max} , при котором происходит разрушение, называется *ограниченным пределом выносливости*.

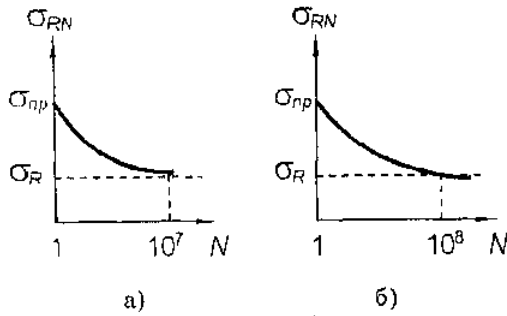


Рис. 14.1

График функциональной зависимости $\sigma_{RN} = \sigma_{RN}(N)$ называется *кривой усталости* (на рис. 14.1 $\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{в}}$, $\sigma_{\text{т}}$ или $\sigma_{0,2}$), а величины $\sigma_R = \sigma_{RN}(10^7)$ для сталей и чугуна (рис. 14.1, а) и $\sigma_R = \sigma_{RN}(10^8)$ для цветных металлов и сплавов (рис. 14.1, б) — *пределом выносливости*. Соответствующее число $N = 10^7$ или $N = 10^8$ называется *базовым числом циклов*.

Цикл, для которого $\sigma_{\max} = \sigma_R$, называется *предельным*. ■

Кривые усталости строятся опытным путем. Отметим, что для сталей и чугуна (см. рис. 14.1, а) эти кривые имеют горизонтальную асимптоту $\sigma_{RN} = \sigma_{R\infty} \approx \sigma_R$.

Аксиома 11. Кривые усталости и, соответственно, предел выносливости не зависят от вида цикла (вида функции $\sigma = \sigma(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$). ■

Из этой гипотезы, определения 14.3 и формул (14.2) вытекает, что амплитуда предельного цикла и его среднее напряжение связаны между собой следующим образом ($R = R_\sigma$ — параметр):

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \sigma_R (R) (1 - R), \quad \sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_R (R) (1 + R). \quad (14.3)$$

Определение 14.4. График функции $\sigma_a = \sigma_a(\sigma_m)$, задаваемой равенствами в (14.3), называется *диаграммой предельных амплитуд*. ■

Её идеализированные варианты для пластических и хрупких материалов (ломаные $ABCD$ и ABC) изображены соответственно на рис. 14.2, а и б. Здесь σ_{-1} — предел выносливости для симметричного цикла, а остальные величины определяются так:

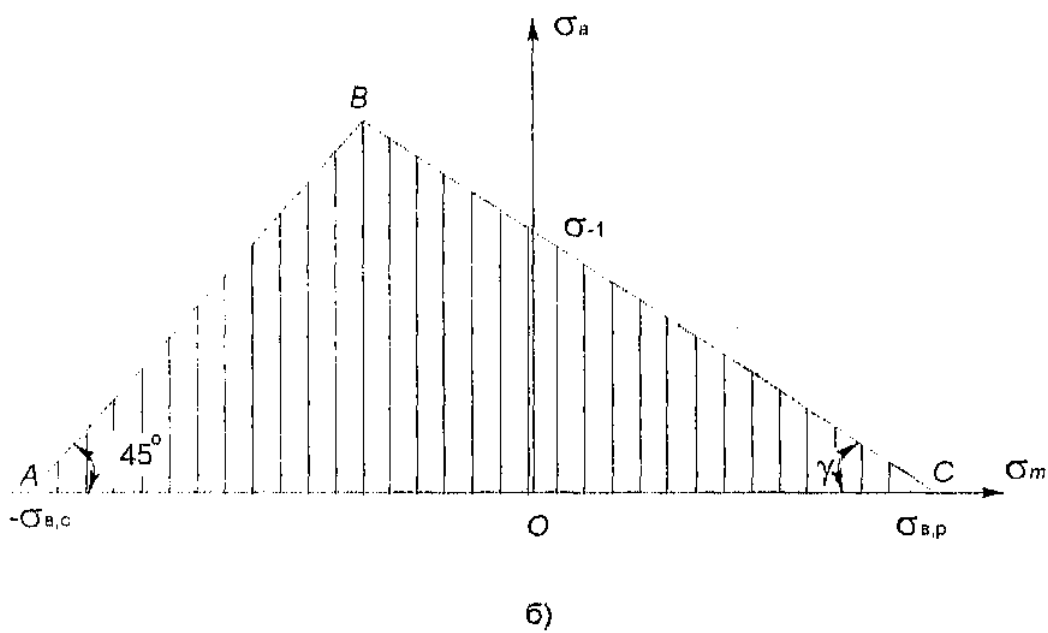
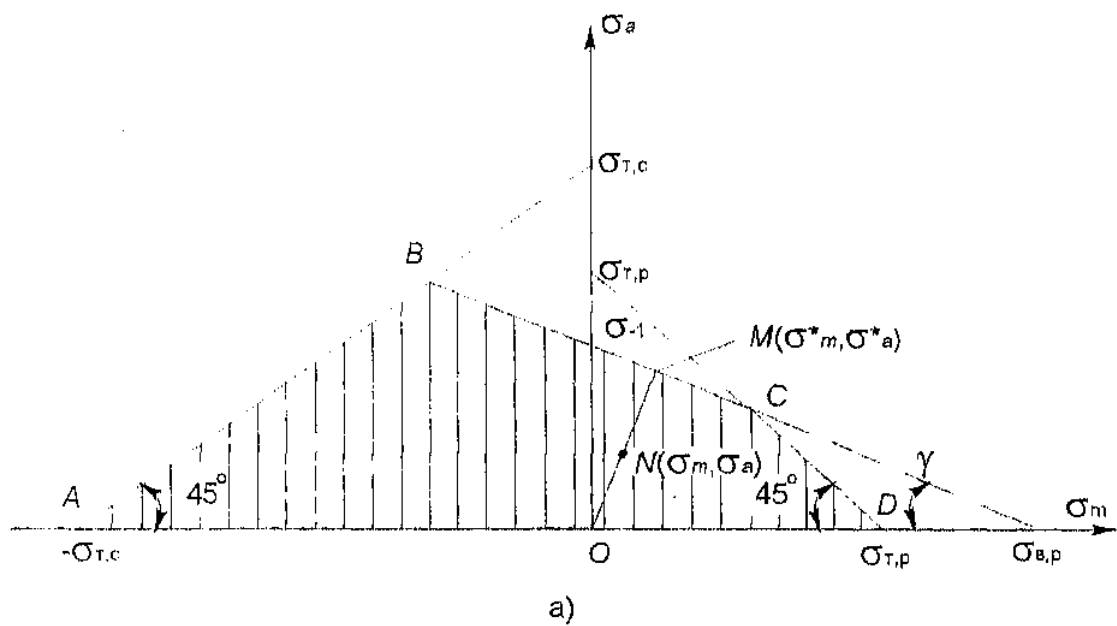


Рис. 14.2

--- хрупкие материалы:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{в}}, \quad \psi_{\sigma} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (14.4)$$

где σ_0 — предел выносливости для отнулевого цикла;

— пластические материалы:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{т}}, \quad \psi_{\sigma} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad (14.5)$$

или

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{т}}, \quad \psi_{\sigma} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\text{в}}} \quad (14.6)$$

Точки, лежащие внутри заштрихованной области, соответствуют циклам, безопасным в отношении усталостного разрушения. Диаграмма предельных амплитуд строится по результатам испытаний на специальных образцах. Для учета их отличий от реальных деталей вводятся поправочные коэффициенты.

Определение 14.5. Эффективными коэффициентами концентрации напряжений, коэффициентами качества обработки поверхности, упрочнения поверхности, масштабного фактора и влияния внешней среды называются следующие величины соответственно:

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1\kappa}}, \quad K_{\rho} = \frac{\sigma_{-1\rho}}{\sigma_{-1}}, \quad K_{\nu} = \frac{\sigma_{-1\nu}}{\sigma_{-1}}, \quad K_d = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}, \quad K_f = \frac{\sigma_{-1f}}{\sigma_{-1}}, \quad (14.7)$$

где σ_{-1} — предел выносливости для образца, а такие же величины с дополнительными индексами определяются при учете каждого из дополнительных факторов.

При этом полагается, что предел выносливости детали $\sigma_{-1д}$ вычисляется так:

$$\sigma_{-1д} = \sigma_{-1} / K_{\sigmaд}, \quad (14.8)$$

где

$$K_{\sigmaд} = \frac{K_{\sigma}}{K_{\rho} K_{\nu} K_d K_f} \quad (14.9)$$

— общий поправочный коэффициент. ■

Коэффициенты K_{σ} , K_{ρ} , K_{ν} , K_d и K_f приводятся в справочных таблицах.

Как правило, проводится только проверочный расчет на усталость при заданных параметрах циклов внешних нагрузок. При этом

предполагается, что данный цикл (точка N , см. рис. 14.2, a) и соответствующий ему предельный (точка M на диаграмме) являются подобными, что приводит к следующим равенствам для запаса прочности по усталости:

$$n_{\sigma R} = \frac{\sigma_a^*}{\sigma_a} = \frac{\sigma_m^*}{\sigma_m}. \quad (14.10)$$

Отсюда с учетом (14.8) для различных участков диаграммы вытекают следующие равенства для $n_{\sigma R}$:

— участок BC :

$$n_{\sigma R} = \tilde{n}_{\sigma R} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a K_{\sigma D} + \psi_{\sigma} \sigma_m}, \quad \psi_{\sigma} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{в.р}}; \quad (14.11)$$

— участок CD (только пластические материалы, $\sigma_m > 0$):

$$n_{\sigma R} = \tilde{n}_{\sigma R} = \frac{\sigma_{т.р}}{\sigma_a K_{\sigma D} + \sigma_m}; \quad (14.12)$$

— участок AB ($\sigma_m < 0$, $\sigma_{пр.с} = \sigma_{т.с}$ для пластических и $\sigma_{пр.с} = \sigma_{в.с}$ для хрупких материалов):

$$n_{\sigma R} = \tilde{n}_{\sigma R} = \frac{\sigma_{т.с}}{\sigma_a K_{\sigma D} - \sigma_m}. \quad (14.13)$$

Для пластических материалов при $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.с} = \sigma_{т}$ формулы (14.12) и (14.13) объединяются в одну:

$$n_{\sigma R} = \tilde{n}_{\sigma R} = \frac{\sigma_{т}}{\sigma_a K_{\sigma D} + |\sigma_m|}. \quad (14.14)$$

Формулы (14.13) или (14.14) применяются только при сжатии. Если имеет место изгиб или кручение, то всегда полагается $\sigma_m \geq 0$.

При расчетах нет необходимости анализировать, какому конкретному участку диаграммы соответствует данный цикл. Достаточно провести вычисления по формулам (14.11) и (14.12) (или (14.13), (14.14)) и найти запас прочности по усталости как минимальный из этих двух результатов:

$$n_{\sigma R} = \min(\tilde{n}_{\sigma R}, \tilde{\tilde{n}}_{\sigma R}). \quad (14.15)$$

Отметим, что при $K_{\sigma d} = 1$ формулы (14.12)—(14.14) дают обычный запас прочности n (см. п. VI § П.1). Но поскольку $K_{\sigma d} \geq 1$, то $n_{\sigma R} \leq n$. И поэтому нет необходимости дополнительно проводить статический расчет на прочность.

Алгоритм расчета на усталость следующий.

1. Решаем соответствующую статическую задачу. При этом нагрузки являются параметрами.

2. Анализируя эпюры внутренних силовых факторов и учитывая концентрацию напряжений, выделяем опасные сечения (далее i — индекс сечения), а в них — опасные точки (далее j — соответствующий им индекс).

3. В каждом из сечений и в каждой точке проводим расчет на усталость.

При действии только нормальных или касательных напряжений (во втором случае, напомним, в обозначениях необходимо заменить σ на τ) выполняем следующие действия:

а) полагая значения нагрузок равными максимальным и минимальным значениям, определяем σ_{\max} и σ_{\min} , а затем по формулам (14.2) — σ_m и σ_a ;

б) по справочным таблицам или по условию задачи с помощью (14.9) и (14.11) находим коэффициенты $K_{\sigma d}$ и ψ_{σ} ;

в) находим *запас прочности по усталости* $n_R^{ij} = n_{\sigma R}^{ij}$, используя формулу (14.15).

При одновременном действии нормальных и касательных напряжений выполняем пп. а—в для каждого из напряжений, находим $n_{\sigma R}^{ij}$, $n_{\tau R}^{ij}$ и дополнительно выполняем следующее действие:

г) определяем общий запас прочности по усталости n_R^{ij} , используя эмпирическую формулу Гафа—Поларда:

$$\frac{1}{n_R^2} = \frac{1}{n_{\sigma R}^2} + \frac{1}{n_{\tau R}^2}. \quad (14.16)$$

4. Вычисляем действительный запас прочности как минимальный из найденных выше запасов:

$$n = \min_{i, j} (n_R^{ij}, n_{\sigma}^{ij}). \quad \blacksquare \quad (14.17)$$

Пример 14.1. Изготовленная из стали 45 ($\sigma_B = 610$ МПа, $\sigma_T = 340$ МПа, $\sigma_{-1} = 250$ МПа) балка квадратного поперечного

сечения изгибается силой P , изменяющейся в пределах от $P_{\min} = 3$ кН до $P_{\max} = 13$ кН (рис. 14.3). Определить коэффициент запаса прочности n . В расчетах принять: $l = 0,3$ м; $d = 5$ см, общий поправочный коэффициент в сечении, соответствующем изменению геометрии, $K_{\text{сд}} = 2,4$.

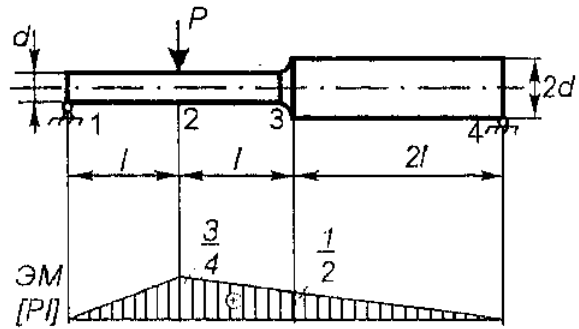


Рис. 14.3

Решение. Нумерация сечений указана на рис. 14.3.

1. Решая соответствующую статическую задачу, строим эпюру изгибающих моментов (см. рис. 14.3).

2. Опасными являются сечения 2 и 3. В первом из них имеет место максимальный изгибающий момент, а во втором — концентрация напряжений. Опасные точки в каждом — наиболее удаленные от нейтральной линии (см. гл. 5). При этом необходимо рассматривать сечение 3 на участке 2—3, так как здесь меньше диаметр.

Вычисляем момент сопротивления изгибу в этих сечениях

$$W = \frac{d \cdot d^2}{6} = \frac{d^3}{6} = \frac{0,05^3}{6} = 0,208 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$$

и находим максимальные статические напряжения:

— сечение 2:

$$M = \frac{3}{4}Pl, \quad \sigma_{\text{ст}} = \frac{M}{W} = \frac{3Pl}{4W};$$

— сечение 3:

$$M = \frac{1}{2}Pl, \quad \sigma_{\text{ст}} = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{2W}.$$

3. Так как материал пластический, то коэффициент ψ_{σ} определяем по формуле (14.11):

$$\psi_{\sigma} = \frac{250}{610} = 0,410.$$

Далее вычисляем σ_{\max} , σ_{\min} и по формулам (14.2), (14.11), (14.12), (14.15) находим σ_m , σ_a , $n_{\sigma R}$:

— сечение 2 ($K_{\sigma d} = 1$):

$$\sigma_{\max} = \frac{3P_{\max}l}{4W} = \frac{3 \cdot 13 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{4 \cdot 0,208 \cdot 10^{-4}} = 141 \cdot 10^6 \text{ Па} = 141 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\max} \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = 141 \cdot \frac{3}{13} = 32,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_m = \frac{141 + 32,4}{2} = 86,7 \text{ МПа}, \quad \sigma_a = \frac{141 - 32,4}{2} = 54,3 \text{ МПа},$$

$$\bar{n}_{\sigma R} = \frac{250}{54,3 \cdot 1 + 0,410 \cdot 86,7} = 2,78,$$

$$\tilde{n}_{\sigma R} = \frac{340}{54,3 \cdot 1 + 86,7} = 2,41,$$

$$n_{\sigma R} = \min(2,78; 2,41) = 2,41;$$

— сечение 3 ($K_{\sigma d} = 2,4$):

$$\sigma_{\max} = \frac{P_{\max}l}{2W} = \frac{13 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 0,208 \cdot 10^{-4}} = 93,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 93,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\max} \frac{P_{\min}}{P_{\max}} = 93,7 \cdot \frac{3}{13} = 21,6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_m = \frac{93,7 + 21,6}{2} = 57,6 \text{ МПа}, \quad \sigma_a = \frac{93,7 - 21,6}{2} = 36,0 \text{ МПа},$$

$$\bar{n}_{\sigma R} = \frac{250}{36,0 \cdot 2,4 + 0,410 \cdot 57,6} = 2,27,$$

$$\tilde{n}_{\sigma R} = \frac{340}{36,0 \cdot 2,4 + 57,6} = 2,36,$$

$$n_{\sigma R} = \min(2,27; 2,36) = 2,27.$$

4. Действительны запас прочности находим с помощью (14.15):

$$n = \min(2,78; 2,41; 2,27; 2,36) = 2,27. \blacksquare$$

Пример 14.2. К ступенчатому круглому валу с диаметрами D и d на его торцах приложены продольные силы P , изменяю-

щиеся по отнулевому циклу с $P_{\max} = 100$ кН, и крутящие моменты M , изменяющиеся по симметричному циклу с $M_{\max} = 0,8$ кН · м. Определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $D = 48$ мм, $d = 40$ мм; вал изготовлен из легированной стали ($\sigma_{\text{в}} = 900$ МПа, $\sigma_{\text{т}} = 600$ МПа, $\sigma_{-1} = 300$ МПа, $\tau_{\text{в}} = 0,5\sigma_{\text{в}}$, $\tau_{\text{т}} = 0,5\sigma_{\text{т}}$, $\tau_{-1} = 0,5\sigma_{\text{в}}$); на стыке участков с различными диаметрами имеет место концентрация напряжений, определяемая коэффициентами $K_{\sigma} = 1,66$; $K_{\sigma d} = 0,775$; $K_{\tau} = 1,45$; $K_{\tau d} = 0,751$; $K_{\tau l} = 0,961$ (остальные коэффициенты равны единице).

Решение. 1--2. Нормальные усилия и крутящие моменты постоянны по длине вала:

$$N = P, \quad M_{\text{к}} = M.$$

Максимальные статические напряжения имеют место на участке с меньшим диаметром (см. гл. 1, 4 и табл. П.4):

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{N}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}, \quad \tau_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\text{к}}} = \frac{16M}{\pi d^3}.$$

3. С использованием условий задачи определяем $\tau_{\text{в}}$, $\tau_{\text{т}}$, τ_{-1} :

$$\tau_{\text{в}} = 450 \text{ МПа}, \quad \tau_{\text{т}} = 300 \text{ МПа}, \quad \tau_{-1} = 225 \text{ МПа},$$

а также по формуле в (14.11) ψ_{σ} (материал пластический; значение коэффициента ψ_{τ} для симметричного цикла не требуется) и с помощью равенства (14.9) поправочные коэффициенты $K_{\sigma d}$, $K_{\tau d}$:

$$\psi_{\sigma} = \frac{300}{900} = 0,333; \quad K_{\sigma d} = \frac{1,66}{0,775} = 2,14; \quad K_{\tau d} = \frac{1,45}{0,751 \cdot 0,961} = 2,01.$$

Далее вычисляем коэффициенты запаса по усталости по нормальным напряжениям (цикл отнулевой, см. определение 14.2):

$$\sigma_{\max} = \frac{4P_{\max}}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,04^2} = 79,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 79,6 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = 0,$$

$$\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2} = \frac{79,6}{2} = 39,8 \text{ МПа},$$

$$\tilde{n}_{\sigma R} = \frac{300}{39,8 \cdot (2,14 + 0,333)} = 3,05,$$

$$\tilde{n}_{\sigma R} = \frac{600}{39,8 \cdot (2,14 + 1)} = 4,80, \quad n_{\sigma R} = \min(3,05; 4,80)$$

и по касательным напряжениям (цикл симметричный, см. определение 14.2; в этом случае, очевидно, $\tilde{n}_{\tau R} > \tilde{n}_{\sigma R}$):

$$\begin{aligned} \tau_{\max} = -\tau_{\min} = \tau_a &= \frac{16M_{\max}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,04^3} = 63,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 63,7 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\tau_m = 0, \quad n_{\tau R} = \tilde{n}_{\tau R} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a K_{\tau d}} = \frac{225}{63,7 \cdot 2,01} = 1,76.$$

Наконец, с использованием формулы (14.16) находим общий запас прочности:

$$n = n_R = \frac{n_{\sigma R} n_{\tau R}}{\sqrt{n_{\sigma R}^2 + n_{\tau R}^2}} = \frac{3,05 \cdot 1,76}{\sqrt{3,05^2 + 1,76^2}} = 1,52. \blacksquare$$

Задачи

Если не заданы значения каких-то поправочных коэффициентов, то их следует положить равными единице; если не заданы механические характеристики материала при кручении, то при необходимости они должны быть предварительно определены по формулам $\tau_B = 0,5\sigma_B$, $\tau_T = 0,5\sigma_T$, $\tau_{-1} = 0,25\sigma_B$.

14.1. На цилиндрический стержень со ступенчато изменяющимся круглым сечением (диаметры D и d) действуют приложенные на его торцах продольные силы P , изменяющиеся по симметричному циклу. Определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $P_{\max} = 100$ кН, $d = 4$ мм, $D = 48$ мм; стержень изготовлен из стали 45 ($\sigma_B = 610$ МПа, $\sigma_T = 360$ МПа, $\sigma_{-1} = 250$ МПа); на стыке участков с различными диаметрами имеет место концентрация напряжений, определяемая коэффициентами $K_{\sigma} = 1,66$; $K_{\sigma d} = 0,775$.

14.2. Для указанного в предыдущей задаче стержня определить запас прочности в случае нагружения стержня на его тор-

цах крутящими моментами M , изменяющимися по отнулевому циклу. В расчетах принять: $M_{\max} = 0,5$ кН · м; коэффициенты концентрации заменить следующими: $K_{\tau} = 1,45$; $K_{\sigma d} = 0,775$.

14.3. Определить коэффициент запаса прочности консольно закрепленного круглого вала диаметра d и длины l . Вал нагружен на свободном краю поперечной силой P , изменяющейся по симметричному циклу, и крутящим моментом M , изменяющимся по отнулевому циклу. В расчетах принять: $P_{\max} = 2$ кН, $M_{\max} = 1,5$ кН · м; $l = 0,5$ м; $d = 5$ см; вал изготовлен из стали 45 ($\sigma_B = 650$ МПа, $\sigma_T = 360$ МПа, $\sigma_{-1} = 250$ МПа).

14.4. Стержень с постоянным круглым поперечным сечением диаметра d имеет кольцевую выточку, вызывающую концентрацию напряжений. Он нагружен продольной силой, изменяющейся от $P_{\min} = 1$ кН до $P_{\max} = 8$ кН. Определить коэффициент запаса прочности стержня. В расчетах принять: $d = 12$ мм, $K_{\sigma d} = 0,833$; $K_{\sigma r} = 0,909$; стержень изготовлен из легированной стали ($\sigma_B = 900$ МПа, $\sigma_T = 600$ МПа, $\sigma_{-1} = 300$ МПа).

Указание: коэффициент концентрации напряжений K_{σ} определить по эмпирической формуле

$$K_{\sigma} = 1,5 + 1,5 \frac{\sigma_B - 400}{1100}.$$

14.5. Определить коэффициент запаса прочности изображенной на рис 14.4 балки, имеющей круговое поперечное сечение диаметра d . Сила P изменяется от $P_{\max} = 5$ кН до $P_{\min} = -1,2$ кН. В расчетах принять: $l = 0,5$ м; $d = 3$ см; балка изготовлена из легированной стали ($\sigma_B = 1000$ МПа, $\sigma_T = 600$ МПа, $\sigma_{-1} = 300$ МПа).

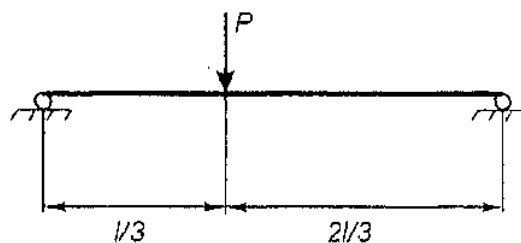


Рис. 14.4

14.6. К валу со ступенчато изменяющимся круглым поперечным сечением (диаметры D , d) на его торцах приложены переменные крутящие моменты M . Определить допускаемые величины максимального M_{\max} и минимального M_{\min} крутящих моментов. В расчетах принять: $D = 5$ см, $d = 4$ см, $M_{\min} / M_{\max} = 0,3$; запас прочности

$n = 2$; на стыке участков с различными диаметрами имеет место концентрация напряжений, определяемая коэффициентами $K_{\tau} = 1,43$; $K_{\tau d} = 0,751$, $K_{\tau F} = 0,961$; материал — легированная сталь ($\sigma_B = 790$ МПа, $\sigma_T = 550$ МПа, $\tau_{-1} = 200$ МПа).

14.7. Определить коэффициент запаса прочности ступенчатой круглой балки (диаметрами D и d), работающей на изгиб по отнулевому циклу, если известно, что в опасном сечении $M_{\max} = 300$ Н · м. В расчетах принять: $D = 5$ см, $d = 3$ см; в опасном сечении $K_{\sigma} = 2,03$; $K_{\sigma d} = 0,752$; $K_{\sigma F} = 0,934$; балка изготовлена из стали 45 ($\sigma_B = 610$ МПа, $\sigma_T = 360$ МПа, $\sigma_{-1} = 250$ МПа).

14.8. Определить коэффициент запаса прочности вращающегося ступенчатого круглого вала (диаметры D и d), испытывающего переменный во времени изгиб с кручением по симметричному циклу, полагая, что в опасном сечении $\sigma_{\max} = 20$ МПа, $\tau_{\max} = 15$ МПа. В расчетах принять: $D = 4$ см, $d = 2$ см; в опасном сечении $K_{\sigma} = 2,09$; $K_{\sigma d} = 0,769$; $K_{\sigma F} = 0,952$; $K_{\tau} = 2,03$; $K_{\tau d} = 0,833$. Вал изготовлен из стали 3 ($\sigma_B = 450$ МПа, $\sigma_T = 240$ МПа, $\sigma_{-1} = 130$ МПа, $\tau_{-1} = 100$ МПа).

14.9. Определить наибольшее допускаемое значение изменяющегося по симметричному циклу изгибающего момента M в опасном сечении ступенчатой балки (диаметры D и d). В расчетах принять: $D = 2$ см, $d = 1$ см; материал — сталь 45 ($\sigma_B = 610$ МПа, $\sigma_T = 340$ МПа, $\sigma_{-1} = 250$ МПа); запас прочности $n = 2$; в опасном сечении $K_{\sigma} = 2,23$; $K_{\sigma d} = 0,8$; $K_{\sigma F} = 0,952$.

14.10. Цилиндрический стержень диаметра D имеет поперечное отверстие с диаметром d (рис. 14.5). На торцах он нагружен растягивающими силами, изменяющимися от $P_{\min} = 100$ кН до $P_{\max} = 300$ кН. Определить коэффициент запаса прочности стержня.

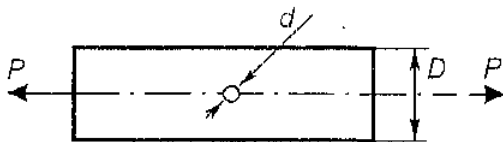


Рис. 14.5

В расчетах принять: $D = 60$ мм, $d = 6$ мм; в сечении с отверстием $K_{\sigma} = 1,57$; $K_{\sigma d} = 0,77$; материал — легированная сталь ($\sigma_B = 900$ МПа, $\sigma_T = 600$ МПа, $\sigma_{-1} = 300$ МПа).

14.11. Круглый вал диаметра d ослаблен шпоночной канавкой. К его торцам приложены крутящие моменты, изменяющиеся от $M_{\min} = 0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ до $M_{\max} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $d = 4 \text{ см}$; в сечениях с канавкой $K_{\tau} = 1,80$; $K_{\tau d} = 0,833$; $K_{\tau p} = 0,952$; материал — сталь 45 ($\sigma_b = 650 \text{ МПа}$, $\sigma_{\tau} = 360 \text{ МПа}$, $\sigma_{-1} = 250 \text{ МПа}$).

14.12. Двухопорный вал со ступенчато изменяющимся круговым поперечным сечением нагружен сосредоточенной силой P , изменяющейся по симметричному циклу (рис. 14.6). Определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $P_{\max} = 2 \text{ кН}$, $l = 0,4$

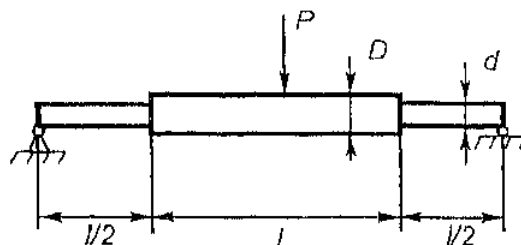


Рис. 14.6

м; $d = 4 \text{ см}$, $D = 5 \text{ см}$, $K_{\sigma} = 1,7$; $K_{\sigma d} = 0,8$; материал — легированная сталь ($\sigma_b = 900 \text{ МПа}$, $\sigma_{\tau} = 600 \text{ МПа}$, $\sigma_{-1} = 300 \text{ МПа}$).

14.13. Решить задачу 14.12 при условии, что сила P изменяется по отнулевому циклу.

14.14. Стержень постоянного круглого поперечного сечения диаметра d имеет кольцевую выточку, вызывающую концентрацию напряжений. Он нагружен продольной силой, изменяющейся от $P_{\max} = -9 \text{ кН}$ до $P_{\min} = -13,6 \text{ кН}$. Определить коэффициент запаса прочности стержня. В расчетах принять: $d = 12 \text{ мм}$, $K_{\sigma} = 2,18$; $K_{\sigma d} = 0,833$; $K_{\sigma p} = 0,909$; материал — сталь 3 ($\sigma_b = 380 \text{ МПа}$, $\sigma_{\tau} = 240 \text{ МПа}$, $\sigma_{-1} = 170 \text{ МПа}$).

14.15. Двухопорный вал кругового поперечного сечения диаметра d и длины l в центральном сечении нагружен сосредоточенной силой P , изменяющейся от $P_{\max} = 1,5 \text{ кН}$ до $P_{\min} = -1 \text{ кН}$, и постоянным по длине вала крутящим моментом M , изменяющимся по отнулевому циклу. Определить коэффициент запаса прочности. В расчетах принять: $M_{\max} = 0,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $l = 0,3 \text{ м}$; $d = 2 \text{ см}$; материал — сталь 45 ($\sigma_b = 610 \text{ МПа}$, $\sigma_{\tau} = 340 \text{ МПа}$, $\sigma_{-1} = 250 \text{ МПа}$).

14.16. Двухопорный вал постоянного круглого поперечного сечения диаметра d нагружен сосредоточенной силой P и крутящим моментом M , изменяющимся по симметричному циклу (рис. 14.7). Определить коэффициент запаса прочности. В расче-

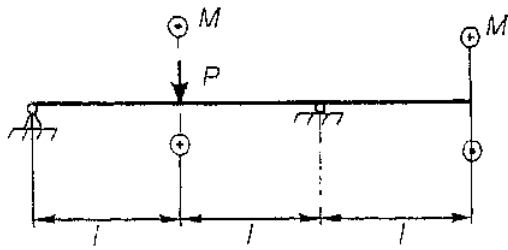


Рис. 14.7

тах принять: $P_{\max} = 3$ кН, $M_{\max} = 1$ кН·м; $l = 0,2$ м; $d = 4$ см, материал — углеродистая сталь ($\sigma_B = 650$ МПа, $\sigma_T = 320$ МПа, $\sigma_{-1} = 250$ МПа).

14.17. Для двухопорной балки длины l найти предельное значение силы P , приложенной в центральном сечении и изменяющейся по отнулевому циклу. Балка имеет квадратное поперечное сечение со стороной b . В расчетах принять: $n = 4$; $l = 0,3$ м; $b = 2$ см; материал — легированная сталь ($\sigma_B = 900$ МПа, $\sigma_T = 600$ МПа, $\sigma_{-1} = 300$ МПа).

14.18. Вал круглого поперечного сечения диаметра d имеет кольцевую выточку, вызывающую концентрацию напряжений. Он нагружен постоянным по длине циклически изменяющимся от M_{\max} до M_{\min} крутящим моментом M . Определить M_{\min} . В расчетах принять: $M_{\max} = 1$ кН·м, $n = 4$, $d = 4$ см; $K_T = 1,44$; $K_{td} = 0,775$; $K_{\tau p} = 0,93$; материал — сталь ($\tau_B = 500$ МПа, $\tau_T = 300$ МПа, $\tau_{-1} = 250$ МПа).

14.19. В опасном сечении балки прямоугольного поперечного сечения высоты $2b$ и ширины b действует изгибающий момент M , изменяющийся по симметричному циклу. Определить предельное значение M в двух вариантах: 1) плоскость изгиба балки совпадает с плоскостью максимальной жесткости сечения; 2) плоскость изгиба балки перпендикулярна плоскости максимальной жесткости сечения. В расчетах принять: $n = 3$, $b = 3$ см; материал — сталь 45 ($\sigma_B = 600$ МПа, $\sigma_T = 360$ МПа, $\sigma_{-1} = 250$ МПа).

14.20. В опасном сечении вала круглого поперечного сечения диаметра d действует изгибающий M и крутящий $M_K = M/2$ моменты, изменяющиеся по отнулевому циклу. Определить предельные значения M и M_K . В расчетах принять: $n = 3$, $d = 2$ см; материал — сталь 3 ($\sigma_B = 380$ МПа, $\sigma_T = 240$ МПа, $\sigma_{-1} = 160$ МПа).

Глава 15

СТЕРЖНИ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

По соотношению радиуса кривизны R оси Γ и $\text{diam } D$ в соответствии с определением П.3 стержни подразделяются на два класса: стержни малой и большой кривизны. Для стержней малой кривизны и прямых стержней внутренние силовые факторы, отвечающие простейшим НДС (растяжение-сжатие, изгиб и кручение), независимы (см. гл. 1,4,5). Для стержней большой кривизны это не так.

Далее будем считать, что ось Sx ПДСК $Sxyz$ в поперечном сечении D стержня большой кривизны направлена по касательной к кривой Γ , а ось Sy — по нормали к Γ в сторону вогнутости (рис. 15.1). Будем также полагать, что стержень является плоской системой в смысле определения 7.2 и Sy — ось симметрии поперечного сечения.

Эпюры внутренних силовых факторов для кривых стержней строятся так же, как и для рам (см. § 7.1), с использованием правила знаков, указанного в § 5.1. При этом нормальные N и перерезывающие Q_y силы, изгибающие моменты M_z и внешние нагрузки связаны между собой следующими дифференциальными зависимостями (ср. с (1.10) и (5.3)):

$$N'(s) = -\frac{Q(s)}{R(s)} - p(s), \quad Q'_y(s) = \frac{N(s)}{R(s)} + q(s),$$

$$M'_z(s) = Q_y(s) - m(s).$$
(15.1)

На основании принципа суперпозиции (см. утверждение П.2) НДС стержня большой кривизны есть сумма состояний, порожденных нормальной силой и поперечными силовыми факторами. Для каждого из них используются все гипотезы и термины, принятые соответственно в теориях растяжения-сжатия (см. гл. 1) и поперечного изгиба (см. гл. 5).

В первом случае остаются справедливыми все формулы, указанные в гл. 1. В том числе для нормальных напряжений из (1.6) имеем

$$\sigma^N = \frac{N}{F}.$$
(15.2)

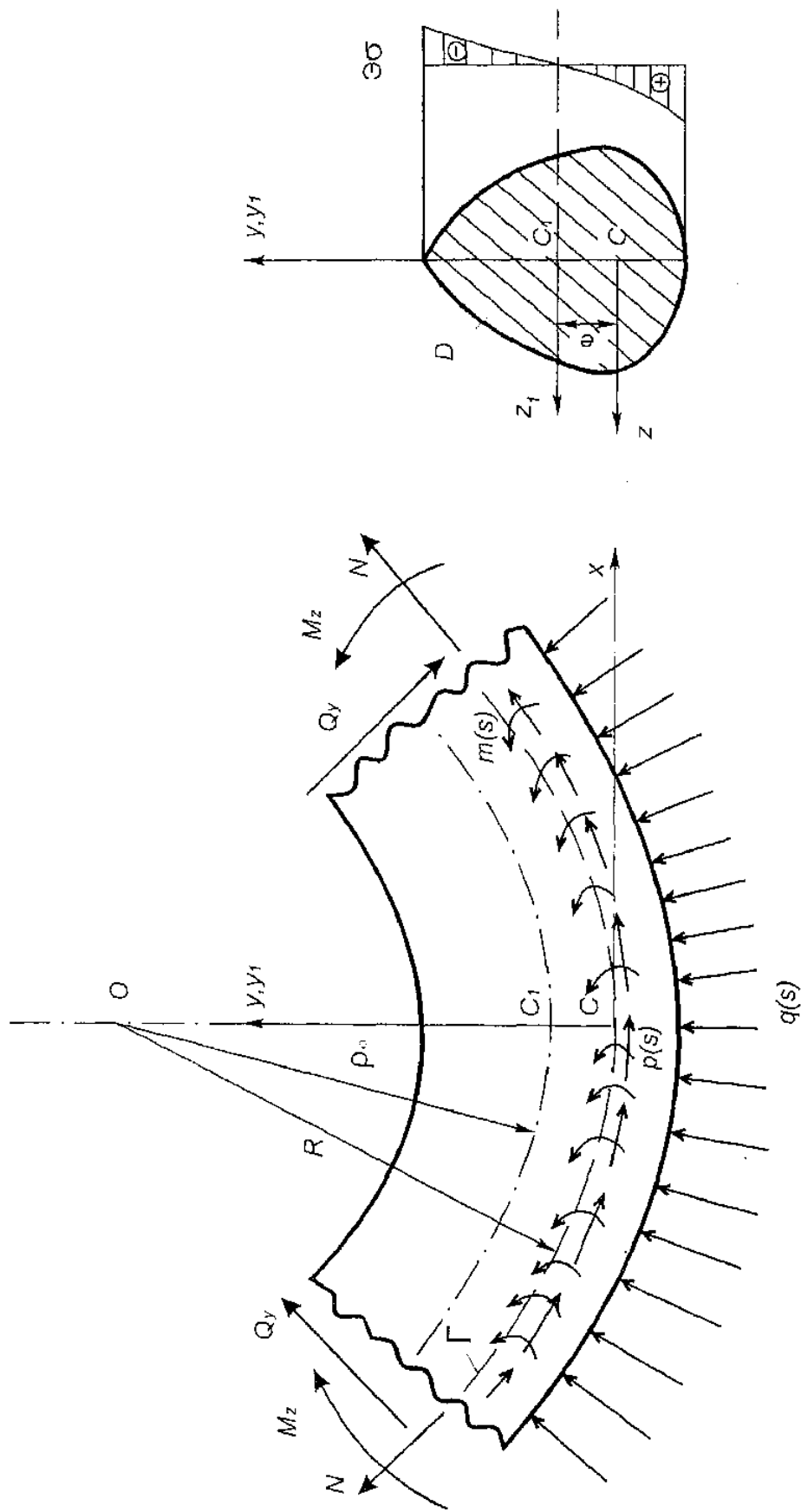


Рис. 15.1

Во втором варианте использование гипотез чистого изгиба приводит к следующей связи *изгибных* продольных деформаций $\varepsilon^M = \varepsilon_x$ и нормальных напряжений $\sigma^M = \sigma_x$ с радиусами кривизны ρ_0 и ρ упругой линии Γ_y в начальном и деформированном состояниях (см. рис. 15.1):

$$\varepsilon^M = -\frac{y_1 (\rho_0 - \rho)}{\rho (\rho_0 - y_1)}, \quad \sigma^M = -\frac{y_1 (\rho_0 - \rho)}{\rho (\rho_0 - y_1)} E, \quad (15.3)$$

где ось $C_1 z_1$ системы координат $C_1 y_1 z_1$ совпадает с нейтральным слоем, и

$$C_1 (e, 0), \quad y = y_1 + e, \quad z = z_1, \quad R = \rho_0 + e. \quad (15.4)$$

Утверждение 15.1. Для того чтобы деформации в (15.3) соответствовали чистому изгибу бруса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$e = R \frac{m}{m+1}, \quad m = \frac{1}{F} \iint_D \frac{y}{R-y} dy dx. \quad \blacksquare \quad (15.5)$$

Отсюда следует, что как ρ_0 , так и e являются чисто геометрическими характеристиками сечения. Значения ρ_0 для некоторых областей приведены в табл. 15.1. Для других сечений их можно найти, например, в [22, 23]. Величина e при этом может быть найдена по соответствующей формуле в (15.4).

Подстановка второго равенства из (15.3) с учетом (15.4) в выражение для изгибающего момента M_z в (П.24) приводит к следующему закону распределения изгибных нормальных напряжений по сечению (см. рис. 15.1):

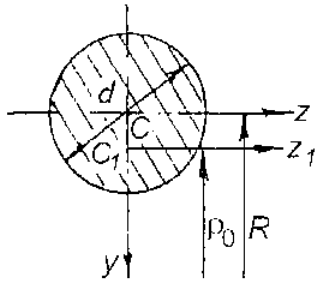
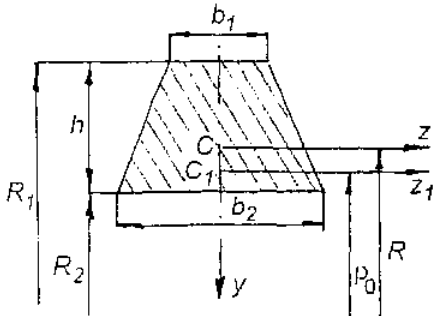
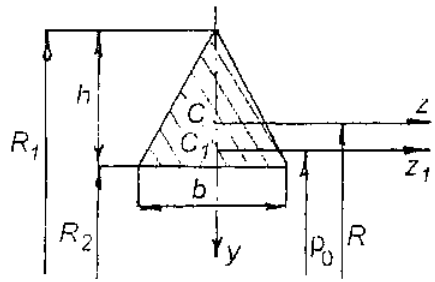
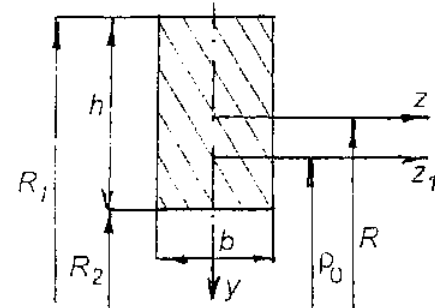
$$\sigma^M = -\frac{y-e}{R-y} \frac{M_z}{eF}. \quad (15.6)$$

Отметим, что при $R \rightarrow \infty$ $e \rightarrow 0$ и все формулы переходят в соответствующие равенства для чистого изгиба балки (см. § 5.2).

Суммарное нормальное напряжение вычисляется аналогично внецентренному растяжению—сжатию (см. (6.9)):

$$\sigma = \sigma^N + \sigma^M = \frac{1}{F} \left[N - \frac{y-e}{(R-y)e} M_z \right]. \quad (15.7)$$

Таблица 15.1

| № ш/п | Тип сечения | ρ_0 |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Круглое сечение  | $\rho_0 = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{4R^2 - d^2}}{4}$ |
| 2 | Равнобочная трапеция  | $\rho_0 = \frac{h \frac{b_1 + b_2}{2}}{\left(b_1 + R_1 \frac{b_2 - b_1}{h} \right) \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)}$ |
| 3 | Равнобедренный треугольник  | $\rho_0 = \frac{\frac{hb}{2}}{R_1 \frac{b}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - b}$ |
| 4 | Прямоугольник  | $\rho_0 = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$ |

Таким же остается и *алгоритм расчета на прочность*. При этом следует учитывать, что, как вытекает из (15.6), Эб так же, как и для балки, не имеет локальных экстремумов по y . Поэтому нормальные напряжения принимают максимальные и минимальные значения в наиболее удаленных от оси точках.

При поверочном расчете касательные напряжения, возникающие в поперечных сечениях кривого стержня при его изгибе, можно приближенно определять по формуле Журавского для балки (см. § 5.3).

Потенциальная энергия кривого стержня вычисляется следующим образом:

$$U = \int_1 \left(\frac{M_z^2}{2EFcR} + \frac{N^2}{2EF} + \frac{M_z N}{EFR} + k_y \frac{Q_y^2}{2GF} \right) ds. \quad (15.8)$$

Отсюда с использованием теоремы Кастильяно можно получить аналогичную (7.18) формулу для перемещения δ сечения по заданному направлению (*интегралы Мора для криволинейного бруса*):

$$\delta = \int_1 \left(\frac{M_z M_z^1}{EFcR} + \frac{NN^1}{EF} + \frac{M_z N^1 + NM_z^1}{EFR} + k_y \frac{Q_y Q_y^1}{GF} \right) ds. \quad (15.9)$$

Как правило, в формулах (15.8) и (15.9) вкладом перерезывающей силы можно пренебречь.

Пример 15.1. Крюк трапециевидного поперечного сечения нагружен силой $P = 150$ кН (рис. 15.2). Определить максимальные нормальные напряжения в опасном сечении крюка. В расчетах принять: ось кривой части крюка—окружность, $b_1 = 50$ мм, $b_2 = 100$ мм, $R_1 = 250$ мм, $R_2 = 100$ мм.

Решение. Используя метод сечений и уравнения равновесия, находим, что опасным является сечение А—А (см. рис. 15.2), так как там изгибающий момент и продольная сила имеют наибольшие по модулю значения: $M = -PR$ и $N = P$.

Находим геометрические характеристики сечения. Разбивая трапецию на два треугольника (пунктирная линия на рис. 15.2), сначала определяем высоту h трапеции, площадь F сечения, координату y_c его центра тяжести во вспомогательной системе координат $C_0 y_0 z_0$ ($z_c = 0$ в силу симметрии; см. гл. 3 и табл. П.3) и радиус кривизны оси криволинейной части стержня:

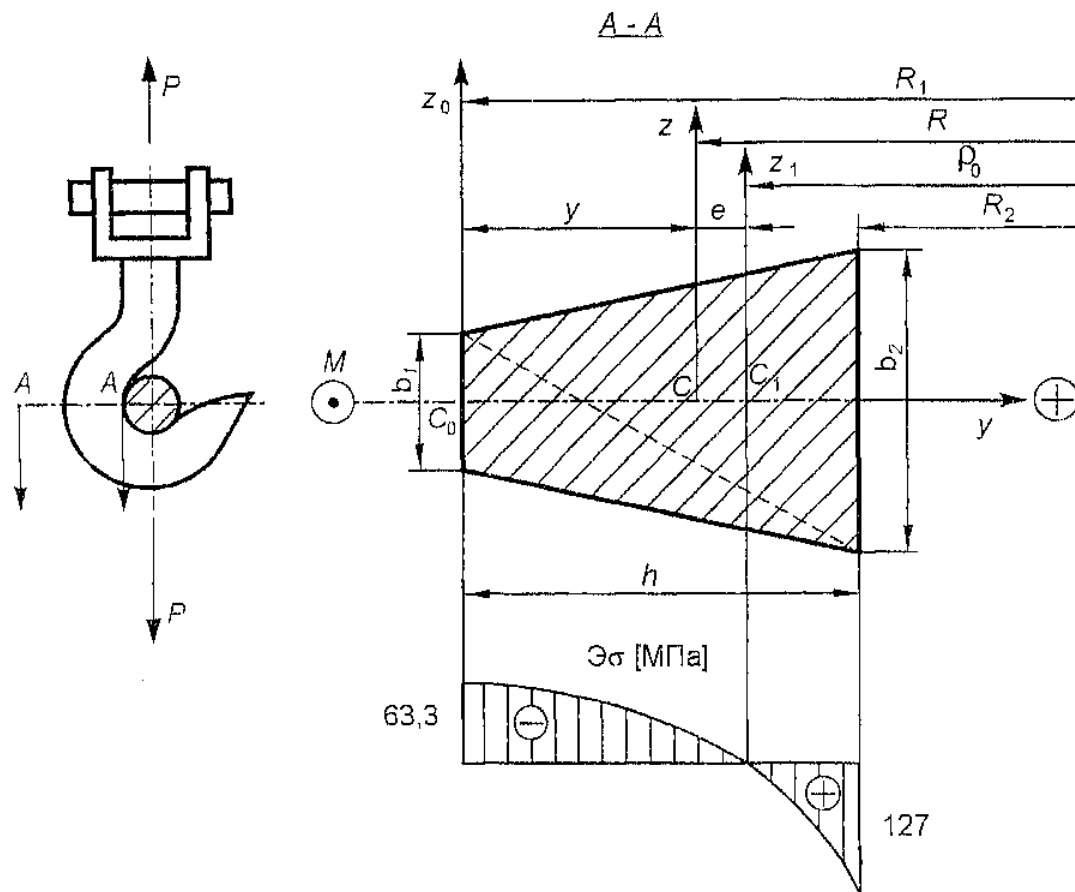


Рис. 15.2

$$h = R_1 - R_2 = 250 - 100 = 150 \text{ мм};$$

$$F = h \frac{b_1 + b_2}{2} = 150 \cdot \frac{50 + 100}{2} = 11200 \text{ мм}^2 = 0,0112 \text{ м}^2;$$

$$y_c = \frac{S_{z_0}}{F} = \frac{\frac{hb_1}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{hb_2}{2} \cdot \frac{2h}{3}}{F} = \frac{h^2 (b_1 + 2b_2)}{6F} =$$

$$= \frac{150^2 \cdot (50 + 2 \cdot 100)}{6 \cdot 11200} = 83,3 \text{ мм};$$

$$R = R_1 - y_c = 250 - 83,3 = 167 \text{ мм} = 0,167 \text{ м}.$$

Поскольку $h/R = 0,898$, то необходимо применять теорию изгиба криволинейных стержней. С помощью табл. 15.1 и формулы (15.4) находим ρ_0 и e :

$$\rho_0 = \frac{F}{\left(b_1 + R_1 \frac{b_2 - b_1}{h} \right) \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)} =$$

$$= \frac{11200}{\left(50 + 250 \cdot \frac{100 - 50}{150} \right) \ln \frac{250}{100} - (100 - 50)} = 156 \text{ мм};$$

$$e = R - \rho_0 = 167 - 156 = 11 \text{ мм} = 0,011 \text{ м}.$$

Нормальные напряжения в опасном сечении определяются формулой (15.7) и соответствующими выражениями для момента и нормальной силы:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left[1 + \frac{y - e}{(R - y) e} R \right].$$

Отсюда находим, что максимальные сжимающие и растягивающие напряжения как напряжения соответственно в точках меньшего ($y = y_1$) и большего ($y = y_2$) оснований:

$$y_1 = -y_c = -83,3 \text{ мм} = -0,0833 \text{ м};$$

$$y_2 = h - y_c = 150 - 83,3 = 66,7 \text{ мм} = 0,0667 \text{ м};$$

$$\sigma_{\max c} = |\sigma(y_1)| = \left| \frac{P}{F} \left[1 + \frac{y_1 - e}{(R - y_1) e} R \right] \right| = \left| \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_1 - e}{R_1 e} R \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{150 \cdot 10^3}{0,0112} \left(1 + \frac{-0,0833 - 0,011}{0,250 \cdot 0,011} \cdot 0,167 \right) \right| =$$

$$= 63,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 63,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max p} = |\sigma(y_2)| = \frac{P}{F} \left[1 + \frac{y_2 - e}{(R - y_2) e} R \right] = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_2 - e}{R_2 e} R \right) =$$

$$= \frac{150 \cdot 10^3}{0,0112} \left(1 + \frac{-0,0667 - 0,011}{0,100 \cdot 0,011} \cdot 0,167 \right) =$$

$$= 127 \cdot 10^6 \text{ Па} = 127 \text{ МПа}.$$

Соответствующая эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 15.2. ■

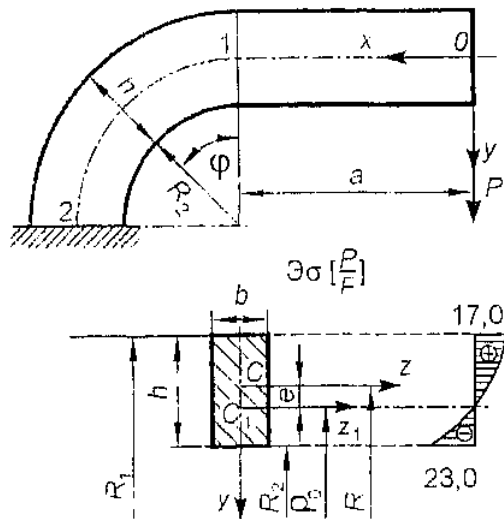


Рис. 15.3

Пример 15.2. Определить допускаемую нагрузку и вертикальное перемещение точки приложения силы для стального кронштейна прямоугольного поперечного сечением (рис. 15.3) при $P = P_{\text{доп}}$. В расчетах принять: $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $R_2 = 120$ мм, $h = 100$ мм, $b = 50$ мм, $a = 150$ мм.

Решение. Разбиваем стержень на участки (см. рис. 15.3).

Положение главных центральных осей сечения указано на рис. 15.3 (см. табл. П.3). Вычисляем радиус кривизны оси стержня на участке 1—2:

$$R = R_2 + \frac{h}{2} = 120 + \frac{100}{2} = 170 \text{ мм} = 0,170 \text{ м.}$$

Отношение $h/R = 0,588$, поэтому на этом участке необходимо использовать теорию изгиба стержня большой кривизны.

Находим изгибающие моменты на обоих участках и нормальную силу на участке 1—2 (координаты x , y и φ указаны на рис. 15.3):

— участок 0—1:

$$M^I(x) = Px ;$$

— участок 1—2:

$$M^I(\varphi) = P(a + R \sin \varphi), \quad N^P(\varphi) = P \sin \varphi.$$

Очевидно, опасным является сечение 2 криволинейного участка, где

$$M = M^I(\pi/2) = P(a + R), \quad N = N^P(\pi/2) = P.$$

Следовательно, нормальные напряжения в этом сечении в соответствии с формулой (15.7) определяются так:

$$\sigma = \frac{\rho}{F} \left[1 - \frac{y - e}{(R - y)e} (a + R) \right].$$

Вычисляем площадь сечения, а также по табл. 15.1 и формуле (15.4) находим радиус кривизны нейтрального слоя и смещение нейтральной оси от центра тяжести сечения:

$$F = bh = 50 \cdot 100 = 5000 \text{ мм}^2 = 0,005 \text{ м}^2,$$

$$R_1 = R_2 + h = 120 + 100 = 220 \text{ мм},$$

$$\rho_0 = \frac{h}{\ln(R_1/R_2)} = \frac{100}{\ln(220/120)} = 165 \text{ мм},$$

$$e = R - \rho_0 = 170 - 165 = 5 \text{ мм} = 0,005 \text{ м}.$$

Максимальные растягивающие и сжимающие напряжения имеют место соответственно в точках с координатами $y = -h/2$ и $y = h/2$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max p} &= \sigma \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{P}{F} \left[1 - \frac{-h/2 - e}{(R + h/2) e} (a + R) \right] = \\ &= \frac{P}{F} \left[1 + \frac{h/2 + e}{R_1 e} (a + R) \right] = \\ &= \frac{P}{F} \left[1 + \frac{0,05 + 0,005}{0,22 \cdot 0,005} \cdot (0,15 + 0,17) \right] = 17,0 \frac{P}{F}; \\ \sigma_{\max c} &= \left| \sigma \left(\frac{h}{2} \right) \right| = \frac{P}{F} \left| 1 - \frac{h/2 - e}{(R - h/2) e} (a + R) \right| = \\ &= \frac{P}{F} \left| 1 - \frac{h/2 - e}{R_2 e} (a + R) \right| = \\ &= \frac{P}{F} \left[1 - \frac{0,05 - 0,005}{0,12 \cdot 0,005} \cdot (0,15 + 0,17) \right] = 23,0 \frac{P}{F}. \end{aligned}$$

Соответствующая эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 15.3.

Условие прочности $\sigma_{\max} = \sigma_{\max c} \leq [\sigma]$ приводит к следующему неравенству для нагрузки:

$$P \leq \frac{[\sigma] F}{23,0} = \frac{160 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{23,0} = 34,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 34,8 \text{ кН}.$$

Принимаем $P = P_{\text{доп}} = 34,8$ кН и находим вертикальное перемещение сечения 0 под действием этой силы. Для этого определяем внутренние силовые факторы от действия единичной силы $P = 1$:

— участок 0—1:

$$M^1(x) = x ;$$

— участок 1-2:

$$M^1(\varphi) = (a + R \sin \varphi), \quad N^1 = \sin \varphi.$$

При вычислении перемещения пренебрегаем влиянием перебивающей силы и используем интегралы Мора (15.9) на участке 1—2 и (7.18) на участке 0—1 (впрочем, и здесь формально справедливо равенство (15.9), поскольку на этом участке $N = 0$):

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^a \frac{M^P M^1}{EJ_z} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{M^P M^1}{EFcR} R d\varphi + \int_0^{\pi/2} \frac{NN^1}{EF} R d\varphi + \\ &+ \int_0^{\pi/2} \frac{M^P N^1 + N^P M^1}{EFR} = \int_0^a \frac{Px^2}{EJ_z} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{P(a + R \sin \varphi)^2}{EFcR} R d\varphi + \\ &+ \int_0^{\pi/2} \frac{P \sin^2 \varphi}{EF} R d\varphi + \int_0^{\pi/2} \frac{2P(a + R \sin \varphi) \sin \varphi}{EFR} R d\varphi = \\ &= \frac{Pa}{EF} \left[\frac{a^2}{3i_z^2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{e} + \frac{R^2}{2ea} + \frac{3R}{2a} \right) + \frac{2R}{a} + 2 \right]. \end{aligned}$$

Вычисляя момент, радиус инерции сечения (см. табл. П.3) и вспомогательные отношения

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 \cdot 100^3}{12} = 4,17 \cdot 10^6 \text{ мм}^4 = 4,17 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{4,17 \cdot 10^{-6}}{0,005} = 8,34 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\frac{a^2}{i_z^2} = \frac{0,15^2}{8,34 \cdot 10^{-4}} = 27,0; \quad \frac{a}{e} = \frac{0,15}{0,005} = 30;$$

$$\frac{R}{c} = \frac{0,170}{0,005} = 34,0; \quad \frac{R}{a} = \frac{0,170}{0,15} = 1,13,$$

окончательно получим

$$\delta = \frac{34,8 \cdot 10^3 \cdot 0,15}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,005} \times \left[\frac{27,0}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot \left(30,0 + \frac{34,0 \cdot 1,13}{2} + \frac{3 \cdot 1,13}{2} \right) + 2 \cdot 1,13 + 2 \right] = 0,487 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,487 \text{ мм. } \blacksquare$$

Задачи

15.1. Определить максимальные растягивающие и сжимающие напряжения изображенного на рис. 15.4 кривого стержня, имеющего круглое поперечное сечение. В расчетах принять: $R_1 = 0,2$ м; $R_2 = 0,3$ м; $l = 0,2$ м; $P = 20$ кН.

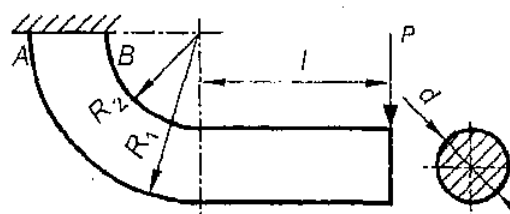


Рис. 15.4

15.2. Определить допускаемую величину сил P для изображенной на рис. 15.5 серьги с трапециевидным поперечным сечением. В расчетах принять: $a = 0,8$ м; $R_1 = 0,5$ м; $R_2 = 0,3$ м; $b_1 = 6$ см; $b_2 = 12$ см; $[\sigma] = 120$ МПа.

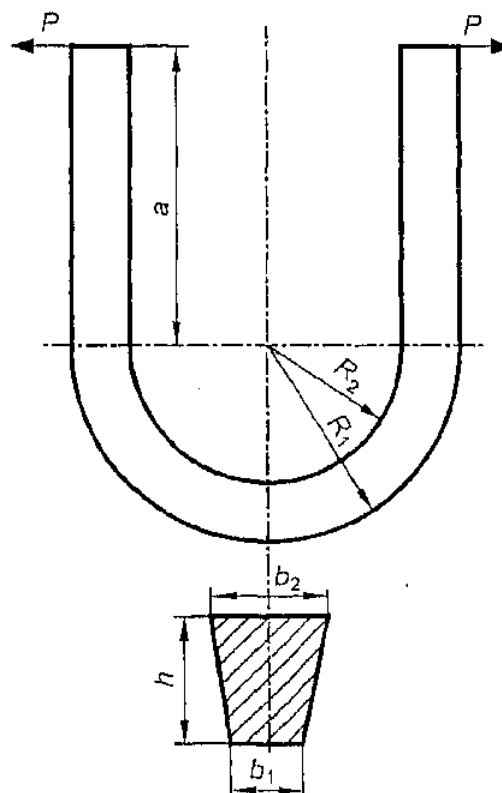


Рис. 15.5

15.3. Определить сближение концов изображенного на рис. 15.6 кривого стержня квадратного сечения со стороной $a = R/2$.

15.4. Провести поверочный расчет на прочность изображенного на рис. 15.7 стержня, имеющего форму полукольца прямоугольного поперечного сечения. В расчетах принять: $R_1 = 0,5$ м; $b = 4$ см; $h = 6$ см; $P = 7$ кН; $\sigma_T = 200$ МПа.

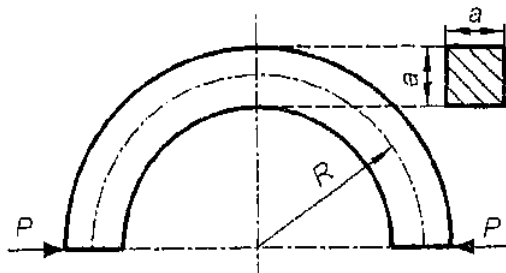


Рис. 15.6

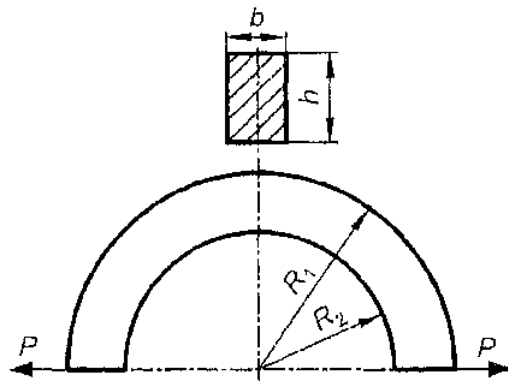


Рис. 15.7

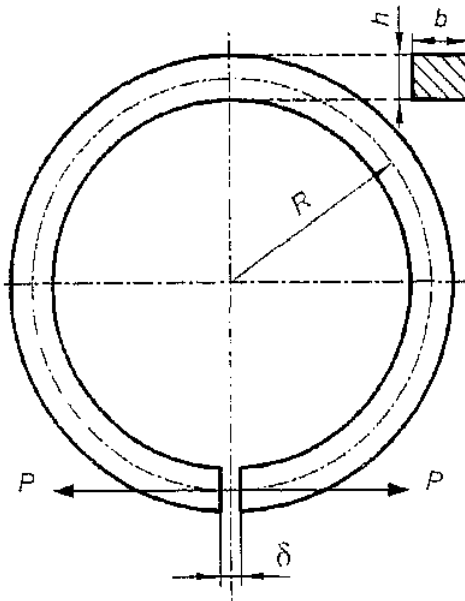


Рис. 15.8

15.5. Определить, на какую величину δ можно развести торцы изображенного на рис. 15.8 разрезанного кольца прямоугольного сечения, чтобы максимальное нормальное напряжение не превышало предела текучести. В расчетах принять: $R = 4$ см, $h = 1$ см, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_T = 300$ МПа.

15.6. Определить допускаемое значение силы P для изображенного на рис. 15.9 кронштейна постоянного прямоугольного поперечного сечения. В расчетах принять: $r = 1$ см; $h = 3$ мм; $b = 12$ мм; $l = 4$ см; $[\sigma] = 400$ МПа.

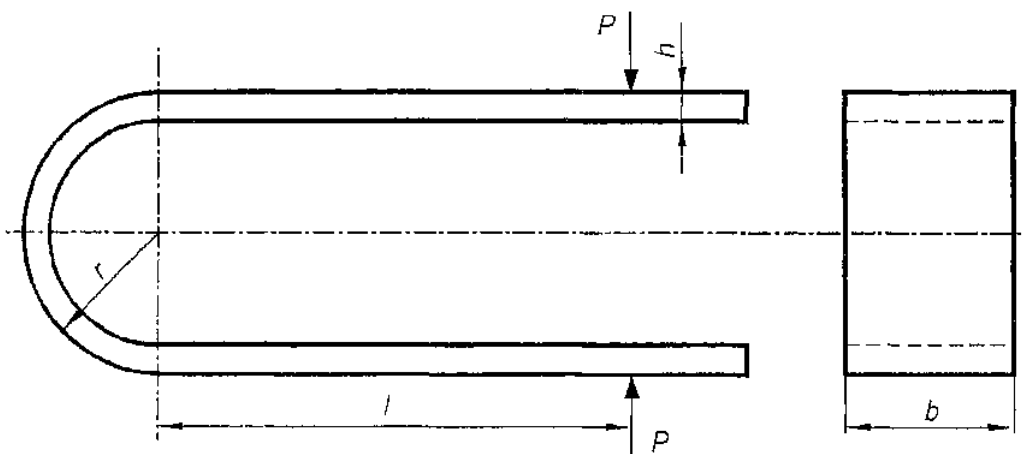


Рис. 15.9

15.7. Определить максимальные нормальные напряжения в изображенном на рис. 15.10 кольце квадратного поперечного сечения. В расчетах принять: $R_1 = 2a$, $R_2 = a$; $l = 1,5a$; $a = 10$ см; $P = 100$ кН.

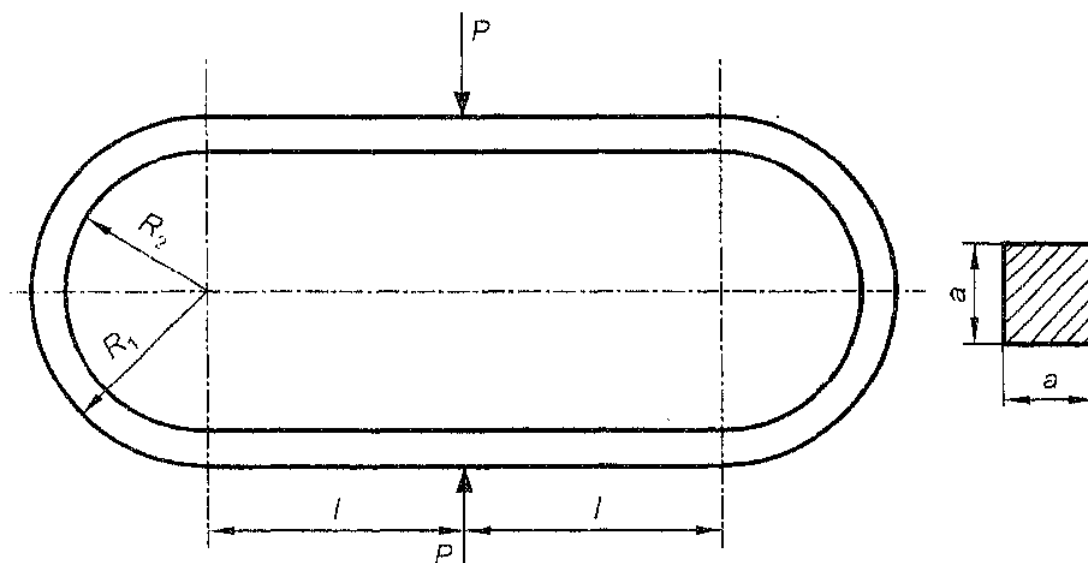


Рис. 15.10

15.8. Определить угол поворота свободного конца изображенного на рис. 15.4 кривого стержня круглого поперечного сечения. В расчетах принять: $R_1 = 30$ см; $R_2 = 24$ см; $l = 0,2$ м; $P = 20$ кН; $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа.

15.9. Определить максимальные сжимающие напряжения в изображенном на рис. 15.11 кривом стержне. В расчетах принять: $r = 0,4$ м; $d = 0,1$ м; $P = 1$ кН; $M = 10$ кН · м.

15.10. Вычислить допускаемую величину силы P для изображенной на рис. 15.12 s-образной серьги. В расчетах принять: $r = 0,5$ м; $a = 0,15$ м; $[\sigma] = 270$ МПа.

15.11. Определить перемещения точек приложения силы P для изображенного на рис. 15.9 кронштейна. В расчетах принять: $r = 1$ см; $h = 3$ мм; $b = 12$ мм; $l = 4$ см; $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа; $P = 200$ Н.

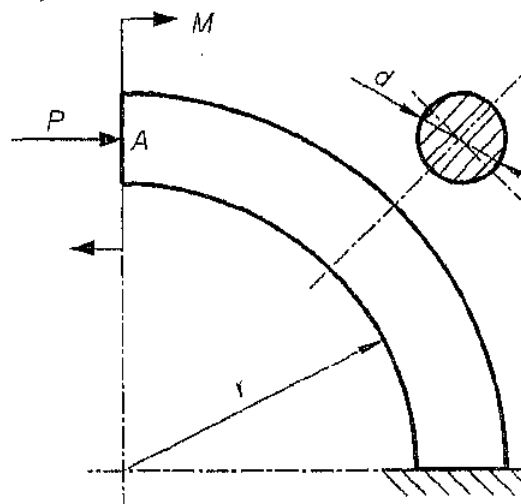


Рис. 15.11

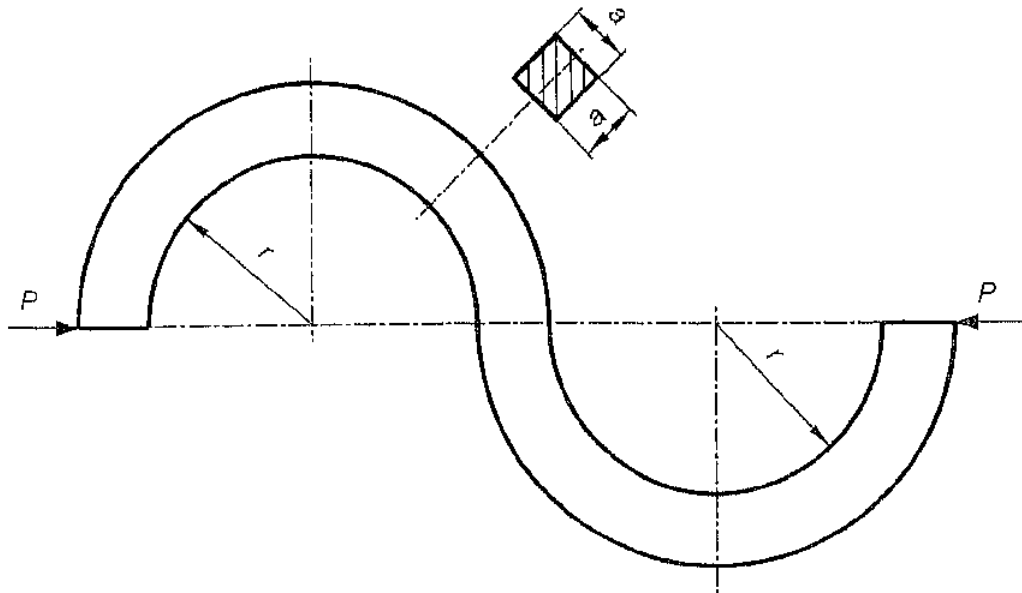


Рис. 15.12

15.12. Найти перемещения точек приложения сил P для изображенного на рис. 15.10 кольца. В расчетах принять: $R_1 = 2a$, $R_2 = a$, $a = 10$ см, $l = 1,5a$; $P = 100$ кН; $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа.

15.13. Определить перемещения точек приложения сил P изображенной на рис. 15.5 серьги. В расчетах принять: $R_1 = 50$ см; $R_2 = 30$ см, $b_1 = 6$ см; $b_2 = 12$ см; $l = 0,8$ м; $P = 1$ кН.

15.14. Вычислить угол поворота сечения А изображенного на рис. 15.11 кривого стержня. В расчетах принять: $r = 0,5$ м; $a = 0,15$ м; $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа; $M = 3$ кН · м; $P = 10$ кН.

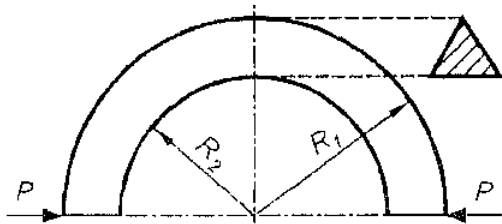


Рис. 15.13

15.15. Определить запас прочности изображенного на рис. 15.13 кривого стержня с сечением в виде правильного треугольника. В расчетах принять: $R_1 = 0,7$ м; $R_2 = 0,5$ м; $P = 100$ кН, $\sigma_T = 200$ МПа.

15.16. Определить максимальные напряжения в изображенном на рис. 15.14 кривом стержне прямоугольного поперечного сечения. В расчетах принять: $R_1 = 0,9$ м; $R_2 = 0,7$ м; $b = 1$ см, $M = 2$ кН · м.

15.17. Используя теорию прочности III, определить запас прочности изображенного на рис. 15.15 кривого стержня трапециевидного поперечного сечения. В расчетах принять:

$R_1 = 55 \text{ см}; R_2 = 35 \text{ см},$
 $b_1 = 5 \text{ см}; b_2 = 10 \text{ см},$
 $P = 200 \text{ кН}, \sigma_T = 270 \text{ МПа}.$

15.18. Определить взаимное смещение точек приложения силы для изображенной на рис.15.12 s-образной серьги. В расчетах принять: $r = 0,5 \text{ м};$ $a = 15 \text{ см};$ $E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$ $P = 10 \text{ кН}.$

15.19. Определить горизонтальное перемещение сечения А изображенного на рис. 15.15 кривого стержня трапециевидного поперечного сечения. В расчетах принять: $R_1 = 55 \text{ см}; R_2 = 35 \text{ см}; b_1 = 5 \text{ см}; b_2 = 10 \text{ см};$ $P = 2 \text{ кН}; E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$

15.20. Определить угол поворота сечения А изображенного на рис. 15.16 кривого стержня с сечением в виде правильного треугольника. В расчетах принять: $R_1 = 0,7 \text{ м}; R_2 = 0,5 \text{ м}; P = 10 \text{ кН},$ $E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

15.21. Используя теорию прочности III, определить запас прочности изображенного на рис. 15.16 кривого стержня с сечением в виде правильного треугольника. В расчетах принять: $R_1 = 0,7 \text{ м};$ $R_2 = 0,5 \text{ м}; P = 100 \text{ кН}, M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}, \sigma_{0,2} = 170 \text{ МПа}.$

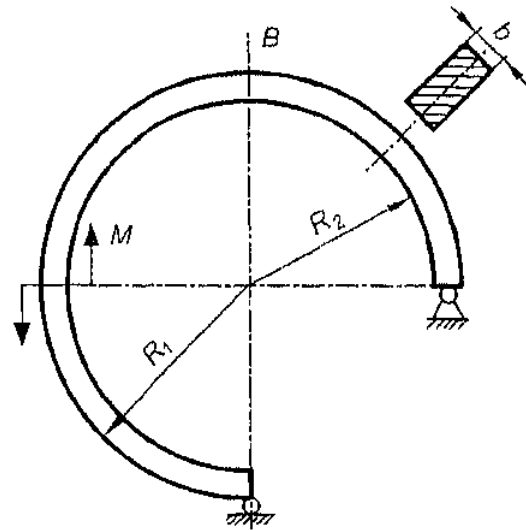


Рис. 15.14

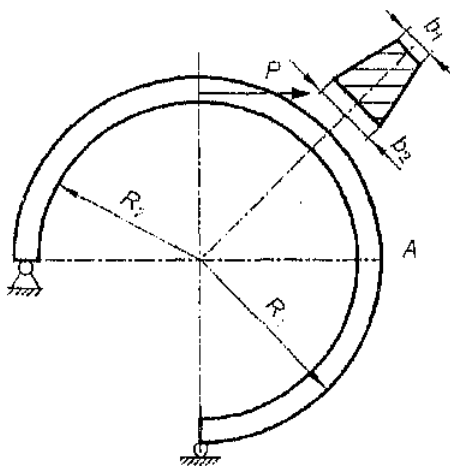


Рис. 15.15

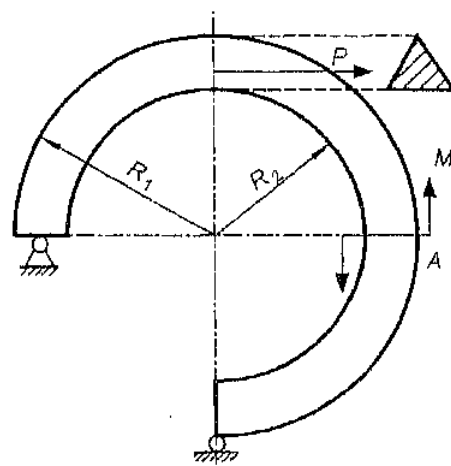


Рис. 15.16

Глава 16

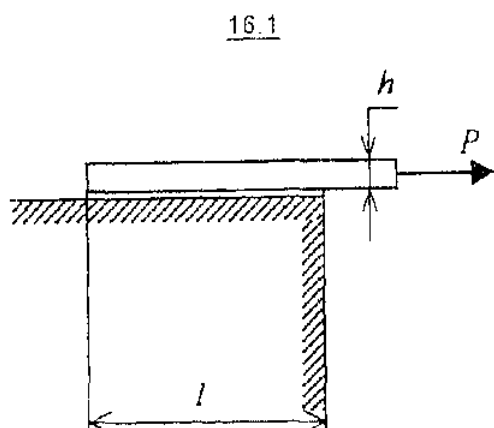
ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

Материал этой главы составлен с использованием задач Московских городских олимпиад по сопротивлению материалов [13] и разработок кафедры "Прикладная механика" БГТУ (Решение нестандартных задач по сопротивлению материалов: Методические указания к решению задач для самостоятельной работы студентов дневной формы обучения, студентов, участвующих в олимпиадах. — Брянск: БГТУ, 1997. — 62 с.).

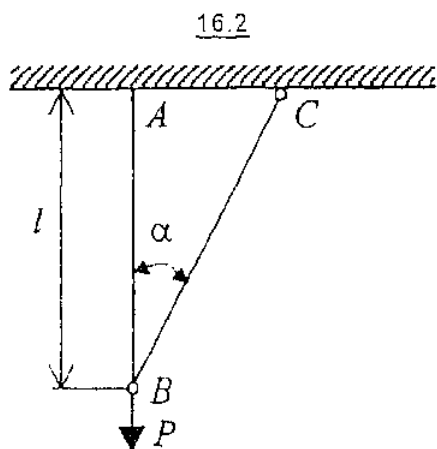
Задачи

(номера рисунков соответствуют номерам задач)

16.1. Тонкая стальная полоса толщины h и единичной ширины приклеена к жесткому основанию. От действия силы P в по-



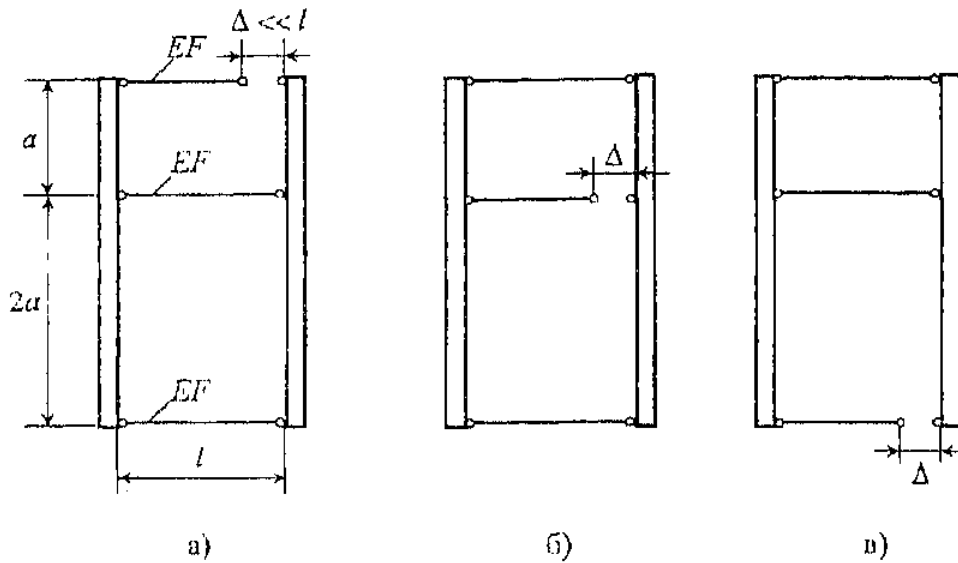
лосе возникает напряжение σ , не превышающее предела пропорциональности. Определить касательные напряжения τ в склейке, считая их пропорциональными относительному смещению u склеенных элементов: $\tau = Ku$, где K — коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств клея.



16.2. Вертикальный стержень AB с характеристиками F_{AB} , J_z и E_{AB} заделан концом A в потолок и растянут силой P . Его торец B поддерживается тягой BC , установленной к стержню под углом α и обладающей характеристиками F_{BC} и E_{BC} . Полагая, что стержень AB работает на изгиб, определить усилие в тяге.

16.3. Две жесткие планки соединены между собой тремя

16.3



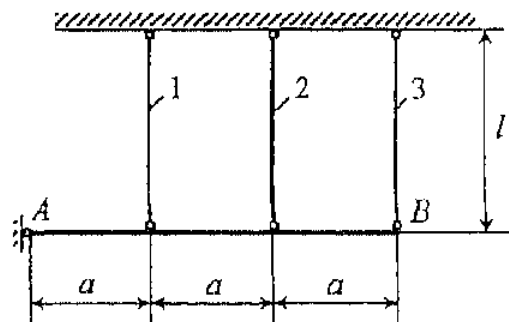
упругими стержнями, один из которых короче двух других на величину Δ . Определить, при каком варианте (а, б или в) размещения короткого стержня напряжения в конструкции после сборки будут наименьшими, и найти усилия в этом стержне.

16.4. Абсолютно жесткая балка AB подвешена на трех упругих стержнях и должна находиться в горизонтальном положении. Однако первый стержень оказался на величину δ_1 короче, а второй на δ_2 длиннее проектного размера. На какую величину δ_3 должен быть длиннее или короче третий стержень, для того чтобы балка заняла горизонтальное положение?

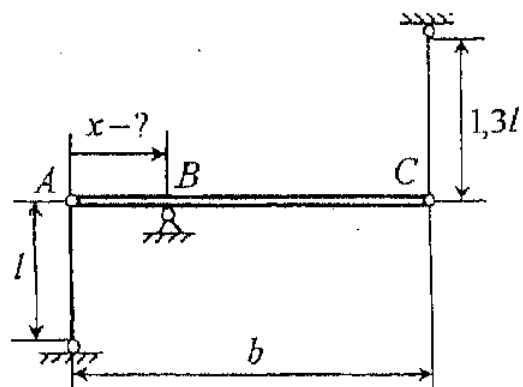
Указание: собственные веса балки и стержней не учитывать.

16.5. Где следует расположить опору B для того, чтобы в изображенной конструкции не возникали напряжения при

16.4



16.5

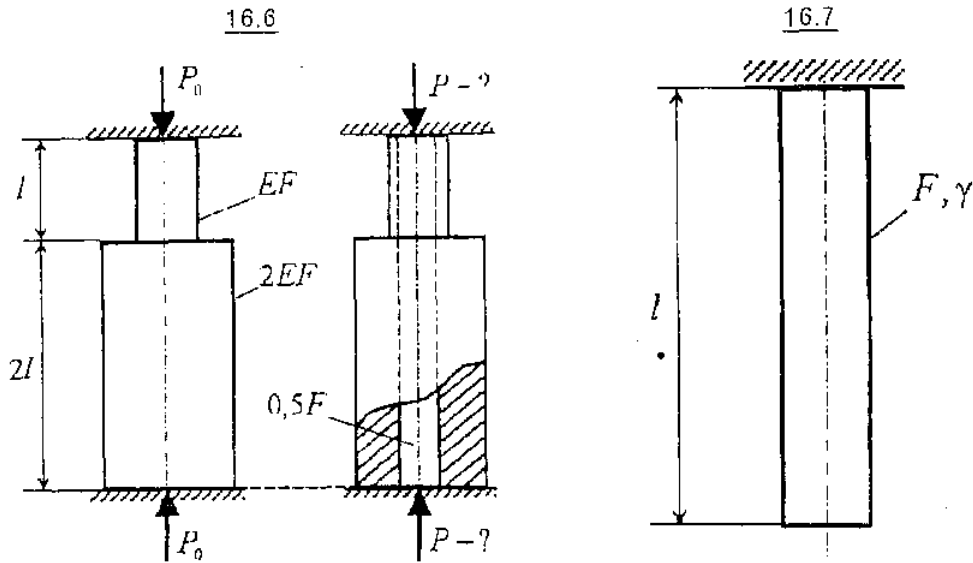


изменении температуры окружающей среды?

Указание: материал стержней считать одинаковым.

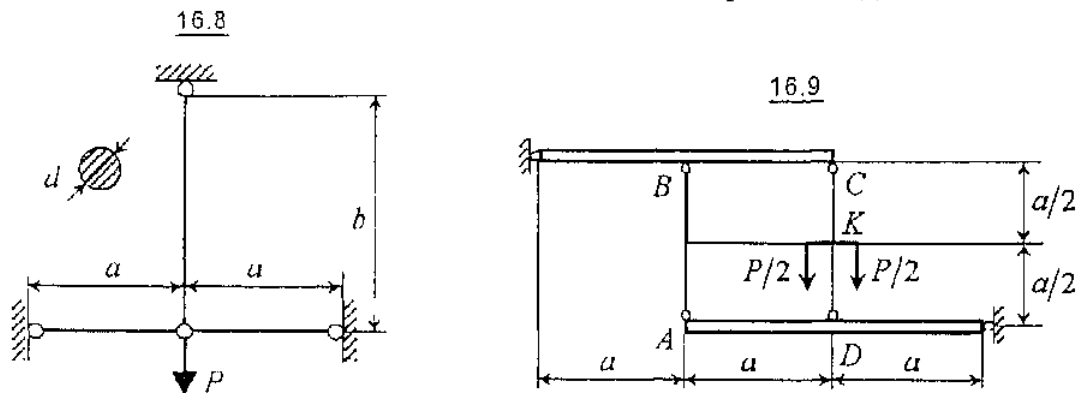
16.6. Ступенчатый стержень зажимается с помощью абсолютных жестких опор силами $P = P_0$, после чего в нем просверливается отверстие площадью $0,5F$. Как изменится сила сжатия P ?

16.7. Определить максимальные касательные напряжения τ_{\max} , возникающие в стержне под действием собственного веса (γ — удельный вес).

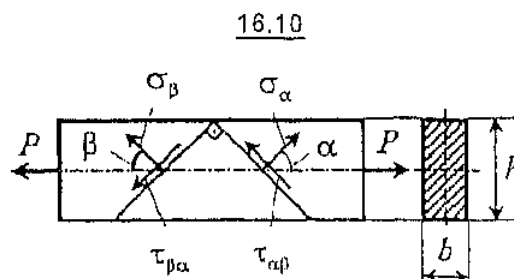


16.8. При каком значении силы P в поперечном сечении вертикального стержня возникает заданное напряжение $[\sigma]$? В расчетах принять, что модуль упругости E и поперечные сечения всех стержней одинаковы.

16.9. Построить эпюры внутренних усилий в стержнях AB и CD стержневой системы, полагая заштрихованные элементы абсолютно жесткими, а площади поперечных сечений и материалы остальных стержней одинаковыми.

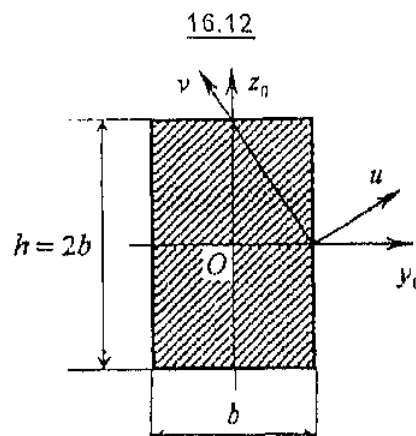
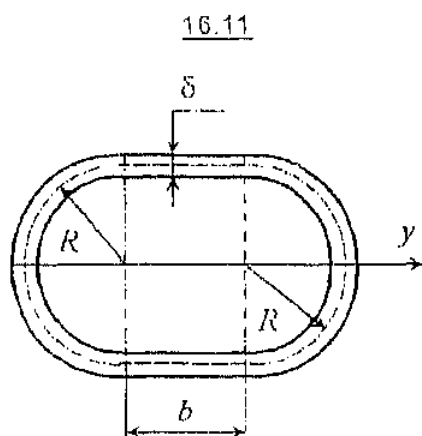


16.10. Определить растягивающую силу P в стержне, если известны напряжения на двух наклонных площадках $\sigma_\alpha = 20$ МПа, $\sigma_\beta = 60$ МПа. В расчетах принять следующие размеры поперечного сечения: $b = 2$ см, $h = 5$ см.



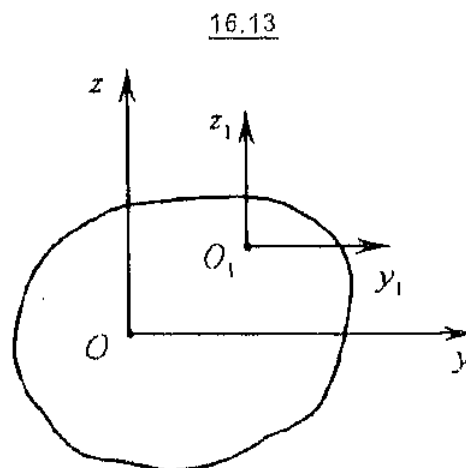
16.11. Из тонкой полосы ширины a изготовлен профиль. Определить, при каком значении радиуса R профиль будет иметь наибольший момент инерции относительно оси Oy .

16.12. Доказать, что все оси, проходящие через точку A указанного прямоугольного сечения, являются главными.



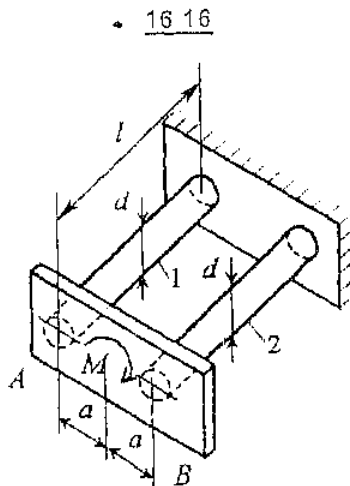
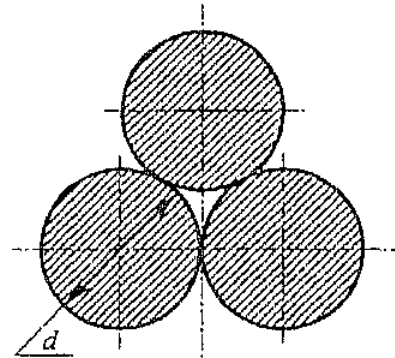
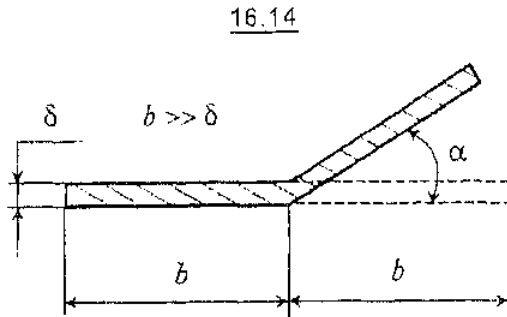
16.13. Для области площади F известен полярный момент инерции $J_{\rho O}$ относительно точки O . Найти геометрическое место точек O_1 , относительно которых полярный момент инерции $J_{\rho O_1}$ будет постоянным и равным $5J_{\rho O}$.

16.14. Найти угол α , при котором главные центральные моменты инерции указанного тонкостенного уголкового сечения будут равны между собой.



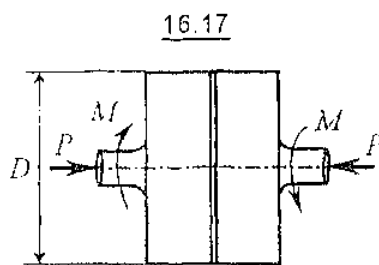
16.15. Найти минимальное значение момента сопротивления изгибу сечения балки, состоящей из трех монолитно связанных между собой стержней с одинаковыми круглыми поперечными сечениями.

16.15



16.16. Круглые стержни 1 и 2 одними торцами заделаны, а их другие торцы соединены между собой абсолютно жесткой планкой AB , к которой приложен крутящий момент M . Используя теорию прочности III, определить диаметр d стержней и вертикальное перемещение сечения A . В расчетах принять: $M = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $a = 0,08 \text{ м}$, $l = 0,02 \text{ м}$, $E = 2,5 G = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

Указание: считать, что при деформации стержней планка остается в вертикальной плоскости.



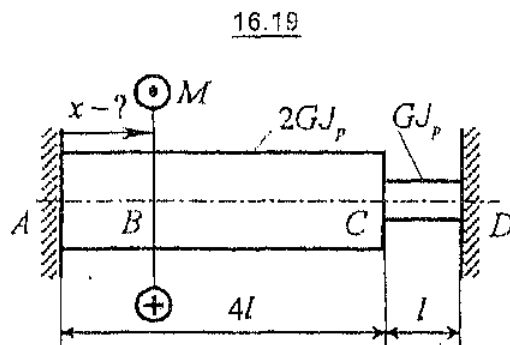
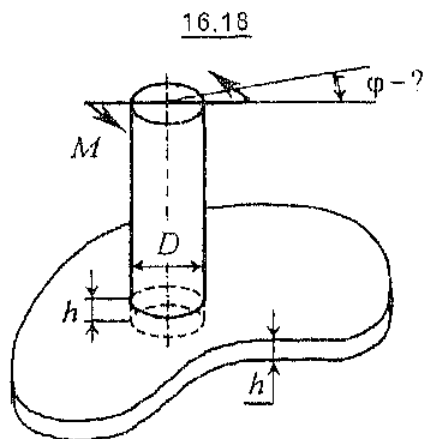
16.17. Дисковая муфта диаметра D передает с одного вала на другой крутящий момент M . Диски прижимаются друг к другу силами P , коэффициент трения между ними равен f . Найти максимальный момент, который может передать муфта без проскальзывания.

Указание: считать, что сила P распределяется по поверхности дисков равномерно.

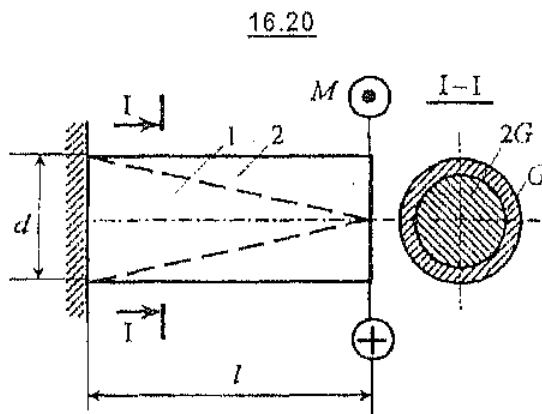
16.18. Абсолютно жесткий вал круглого сечения диаметра D заделан нижним концом в упругую плиту на глубину толщины плиты h и нагружен крутящим моментом M . Модуль сдвига материала плиты равен G . На какой угол φ повернется вал, если в

соединении вала с плитой проскальзывание отсутствует, а горизонтальные размеры плиты неограниченны?

16.19. В каком месте следует приложить крутящий момент M для того, чтобы потенциальная энергия упругих деформаций указанного ступенчатого вала была наибольшей?

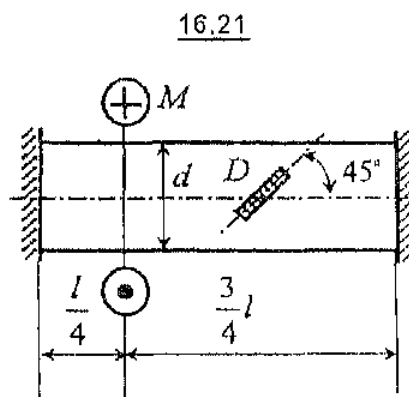


16.20. Жесткость материала конической части 1 составного кругового цилиндрического вала в два раза больше, чем жесткость части 2. Найти угол закручивания сечения, в котором применен крутящий момент M .



Указание: считать, что справедлива гипотеза плоских сечений и что соединенные части вала является абсолютно жестким.

16.21. Стальной стержень круглого поперечного сечения подвергается действию крутящего момента M . Определить деформацию, измеряемую тензорезистором D , если $M = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $d = 4 \text{ см}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0,3$.



16.22. Труба 1 закручивается моментом M , после чего к ней приваривается втулка 2 с внешним и внутренним диаметрами D_2 и d_2 соответственно. Найти отношение наибольших напряжений, возникающих в трубе и втулке после снятия момента M .

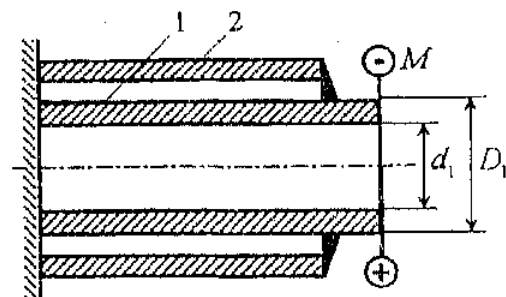
16.23. При соединении стального стержня 1 и стальной трубы 2 оси отверстий в них не совместились на 3° . После принудительного закручивания обеих деталей они были собраны так, как показано на рисунке. Найти максимальные напряжения в стержне и трубе. В расчетах принять: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, $a = 0,6$ м.

16.24. Для балок а и б определить, при каком отношении M/Pl площади ω_1 и ω_2 , ограниченные их упругими линиями, будут равны между собой. Найти эти площади.

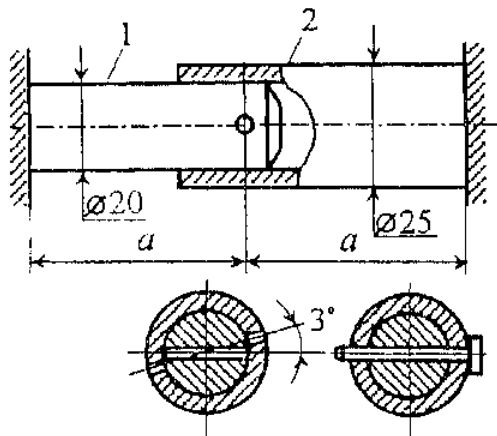
16.25. Для балки ABCD, нагруженной распределенной нагрузкой $q(x)$ в пролетах BC и CD, найти отношение моментов в сечениях A и B.

16.26. В нагруженной на конце силой P балке прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ замерен максимальный прогиб в пролете между опорами. Определить максимальные нормальные напряжения в опасном сечении балки и величину силы P .

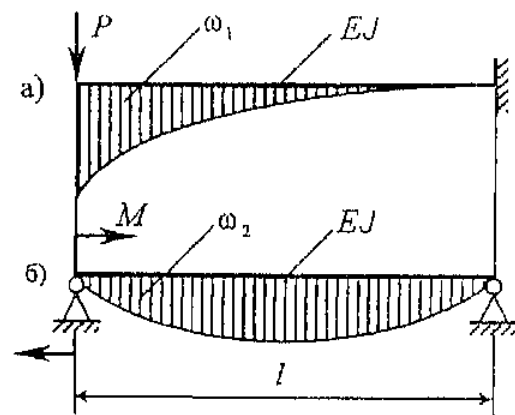
16.22



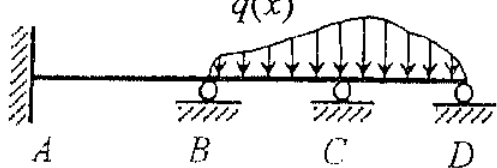
16.23



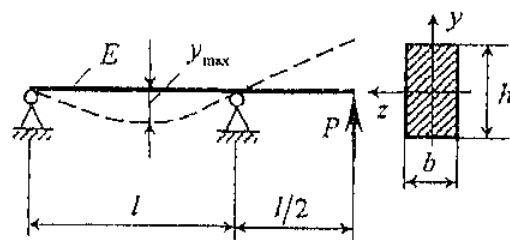
16.24



16.25



16.26



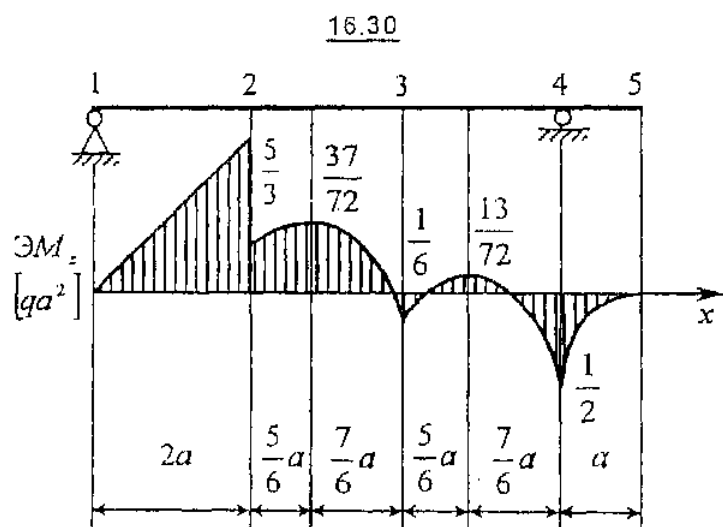
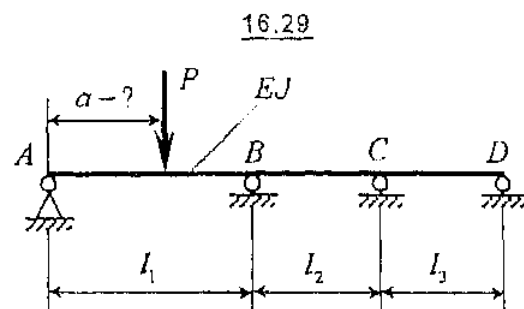
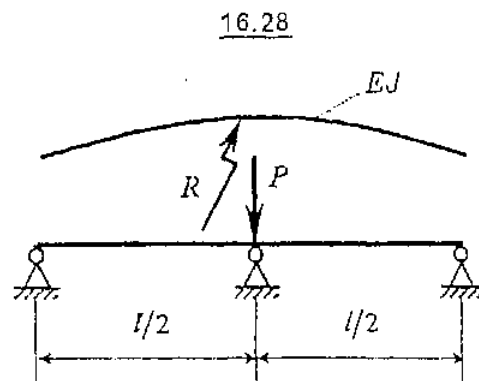
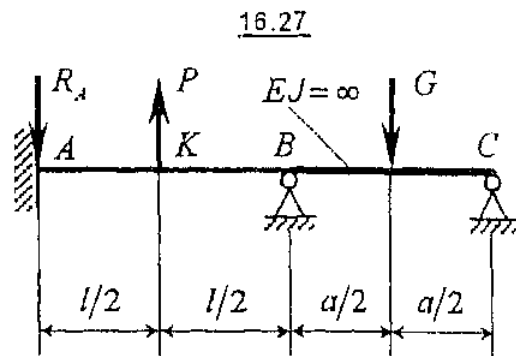
16.27. Левый конец балки AC зашцеилен. Участок BC является абсолютно жестким. При отсутствии нагрузки балка свободно лежит на опорах B и C , не препятствующих ее отрыву от них. В этом состоянии к балке прикладываются две силы: $P \geq 0$ и $G \geq 0$. При каких соотношениях между этими силами: 1) реакция $R_A = P$; 2) реакция $R_A = P/2$?

Указание: собственный вес балки не учитывать.

16.28. Балка в виде дуги окружности радиуса R устанавливается на трех опорах, расположенных на одном уровне, и нагружается силой P . При каком радиусе реакции в опорах будут одинаковыми?

16.29. Балка постоянного сечения нагружается на пролете AB силой P . При каком a ($0 \leq a \leq l_1$) реакция в опоре D будет наибольшей?

16.30. По заданной эпюре изгибающих моментов установить нагрузку, действующую на балку.



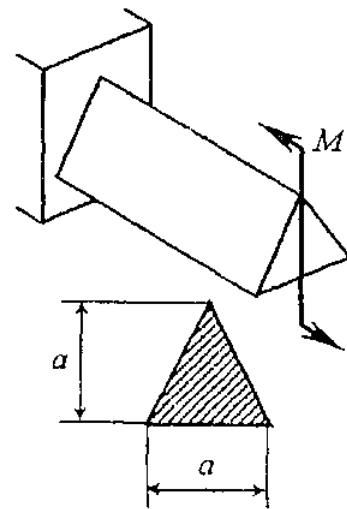
16.31. Для балки треугольного поперечного сечения определить допускаемый момент $[M]$. В расчетах принять: $[\sigma]_p = 100$ МПа, $[\sigma]_c = 150$ МПа, $a = 6$ см.

16.32. Для указанной рамы построить эпюры внутренних силовых факторов.

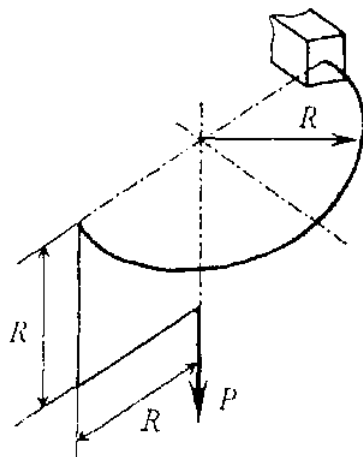
16.33. Определить модуль упругости E и радиус кривизны упругой линии ρ нагруженной моментом M балки, если известен угол поворота сечения A θ_A . В расчетах принять: $M = 100$ Н·м, $a = 2$ см, $l = 1$ м, $\theta_A = 0,075$ рад.

16.34. Какую ширину b должна иметь балка в виде полосы постоянной толщины h и длины l для того, чтобы она под действием силы $P = 0,5$ кН плотно прилегала к цилиндру радиуса R ? В расчетах принять: $h = 1$ см, $l = 1$ м, $R = 5$ м, $P = 0,5$ кН, $[\sigma] = 200$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

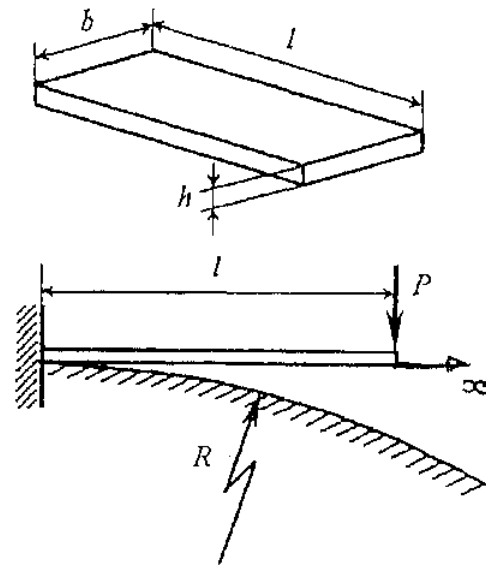
16.31



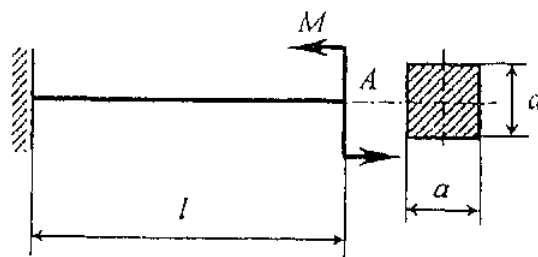
16.32



16.34

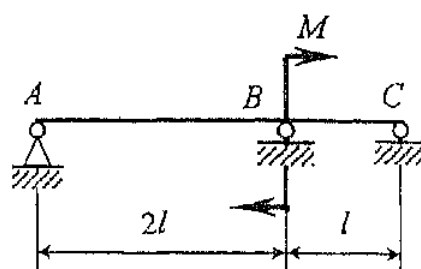


16.33



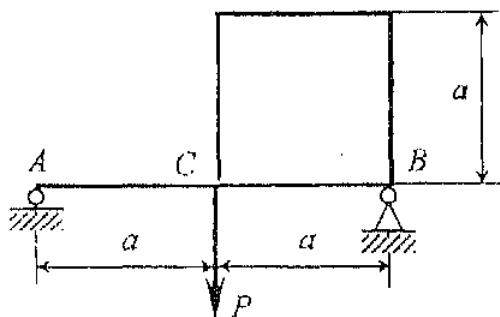
16.35. Используя теорему взаимности работ, найти реакцию в опоре C балки.

16.35

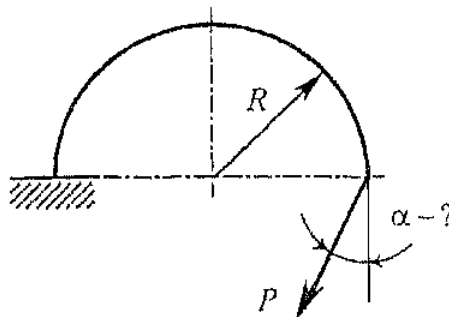


16.36. Консольный конец балки AB изогнут в виде ломаного бруса и в сечении C касается балки. Установить, будет ли конец бруса оказывать давление на балку при ее нагружении силой P и увеличится или уменьшится при этом изгибающий момент и прогиб балки в точке C .

16.36



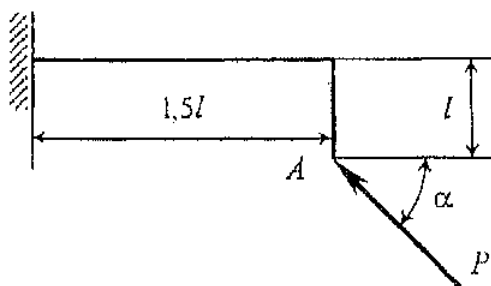
16.37



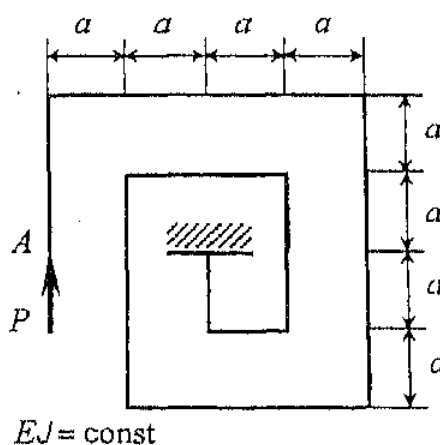
16.38. Под каким углом α нужно приложить силу P для того, чтобы вертикальное перемещение сечения A рамы было равно нулю?

16.39. Определить горизонтальное перемещение сечения A рамы постоянной жесткости.

16.38

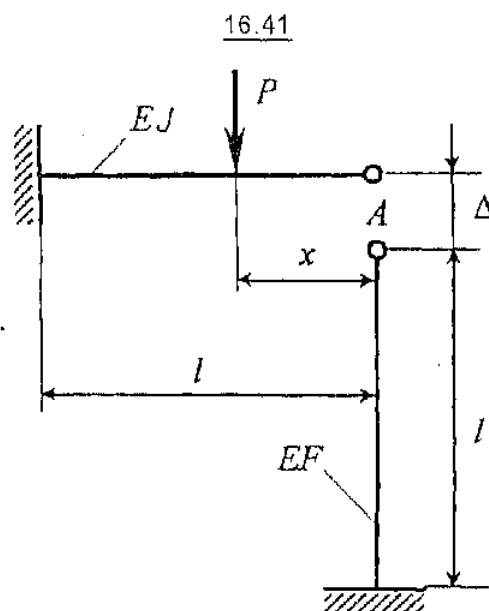
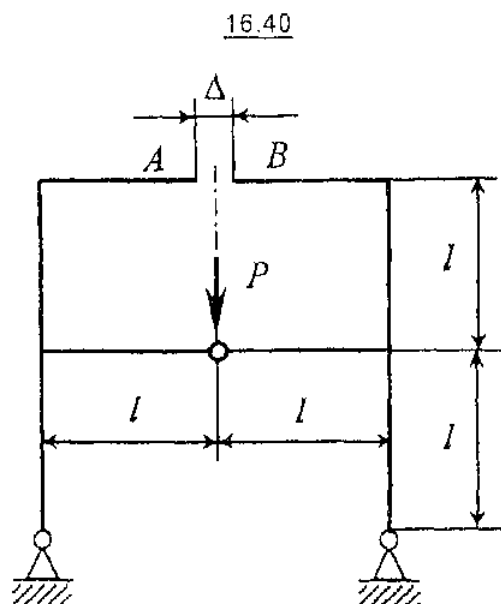


16.39



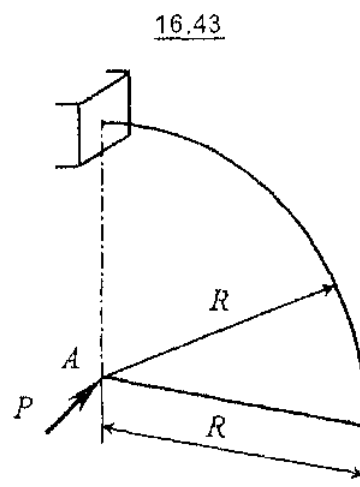
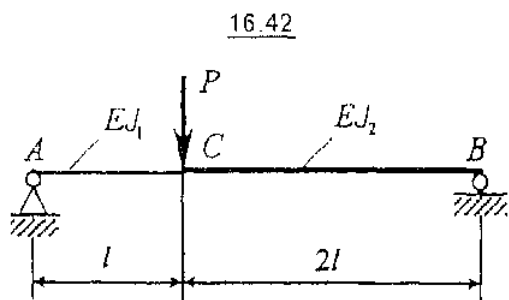
16.40. В недеформированном состоянии расстояние между сечениями A и B рамы постоянной жесткости EJ равно Δ . При каком значении силы P эти сечения совместятся?

16.41. На каком удалении от опоры A следует прикладывать заданную силу $P > 16EJ\Delta/(3l^3)$, чтобы совместить балку и стержень в точке A (рис. 16.41)?



16.42. Каким должно быть соотношение между жесткостями EJ_2 и EJ_1 участков балки для того, чтобы максимальное вертикальное перемещение имело место в сечении C балки? Найти это перемещение. В расчетах принять: $P = 6,25$ кН, $l = 0,24$ м, $J_1 = 16$ см⁴, $E = 2 \cdot 10^6$ МПа.

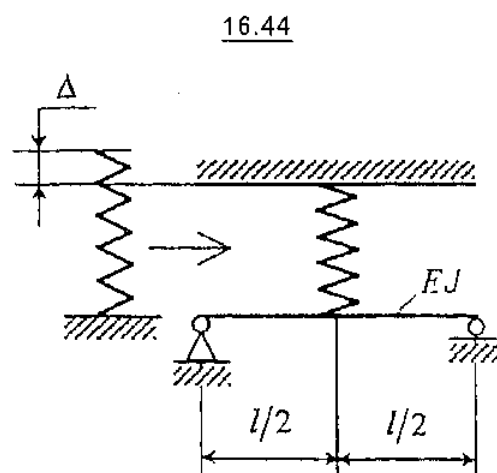
16.43. Для плоско-пространственной стержневой системы, имеющей круглое поперечное сечение диаметра d , опреде-



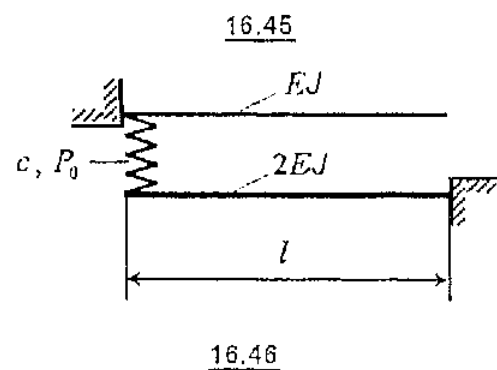
лить перемещение сечения A по направлению действия силы P . В расчетах принять: $d = 2$ см, $R = 0,5$ м; $P = 100$ Н,

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,25$.

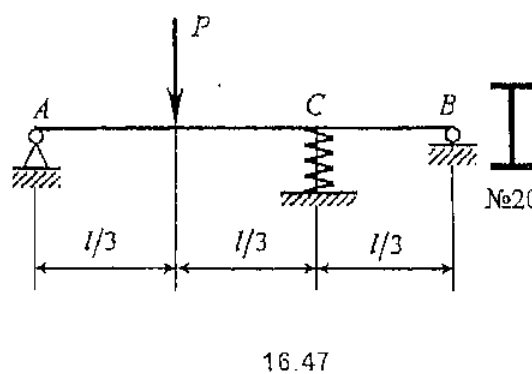
16.44. Предварительно сжатая на величину Δ цилиндрическая пружина жесткости c вставляется между абсолютно жесткой плоскостью и балкой по центру последней. Определить силу, с которой будет сжата пружина.



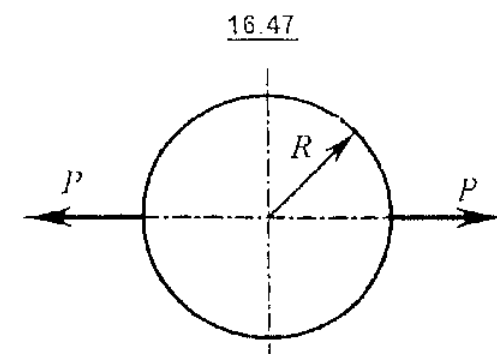
16.45. Предварительно сжатая цилиндрическая пружина жесткости c вставляется между балками и продвигается вправо. Установить наибольшее значение силы в пружине при ее продвижении между балками, если известно, что в крайнем левом положении на пружину действует сжимающая сила P_0 .



16.46. Опора C балки из двутавра №20 выполнена в виде цилиндрической пружины круглого поперечного сечения диаметра d . Определить наибольшие напряжения в пружине и балке. В расчетах принять: $d = 2$ см, диаметр пружины $D = 10$ см, число витков $n = 6$, $l = 6$ м, $P = 10$ кН.



16.47. Показать, что в рамках гипотез сопротивления материалов площадь, ограниченная упругой линией плоской кольцевой нерастяжимой рамы, остается равной πR^2 .



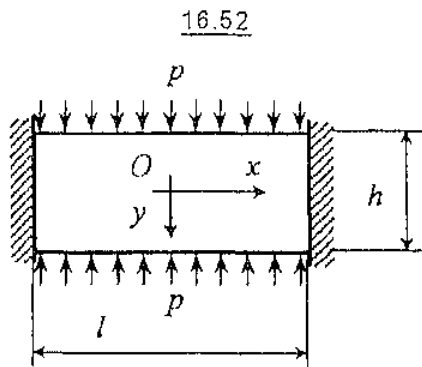
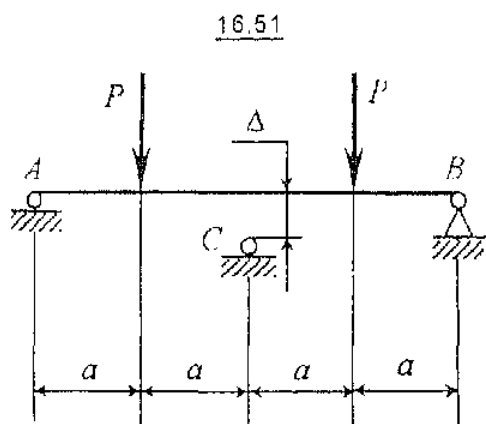
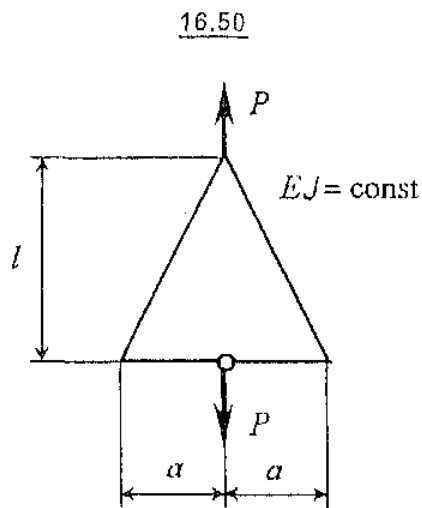
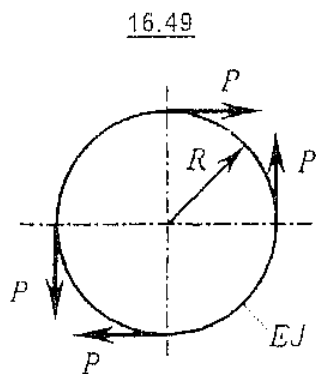
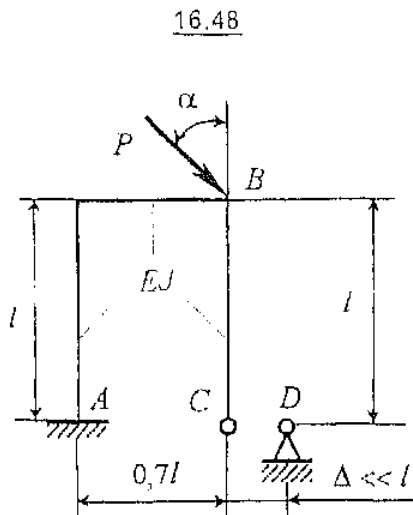
16.48. Какую силу P и под каким углом α следует приложить в сечении B рамы для того, чтобы шарнир C совместился с шарниром D опоры?

16.49, 16.50. Для указанных рам построить эпюры внутренних силовых факторов.

16.51. На какую величину Δ нужно опустить среднюю опору C балки для того, чтобы изгибающий момент в сечении над этой опорой был равен нулю?

16.52. Стержень прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ вставлен между двумя жесткими стенками и по граням, параллельным плоскости Oxz , сжат равномерным давлением p . Материал стержня имеет модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν . Найти изменение размеров и объема бруса.

Указание: трением между стержнем и стенками пренебречь.



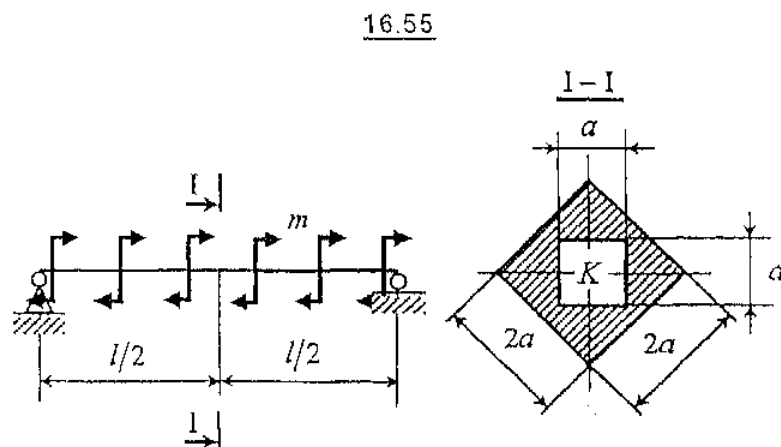
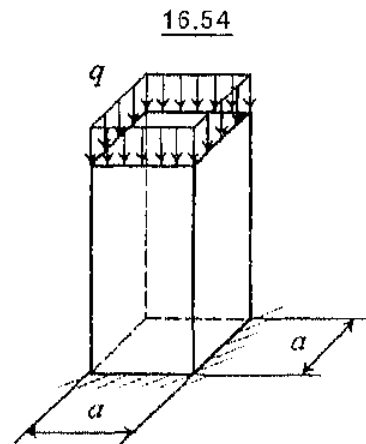
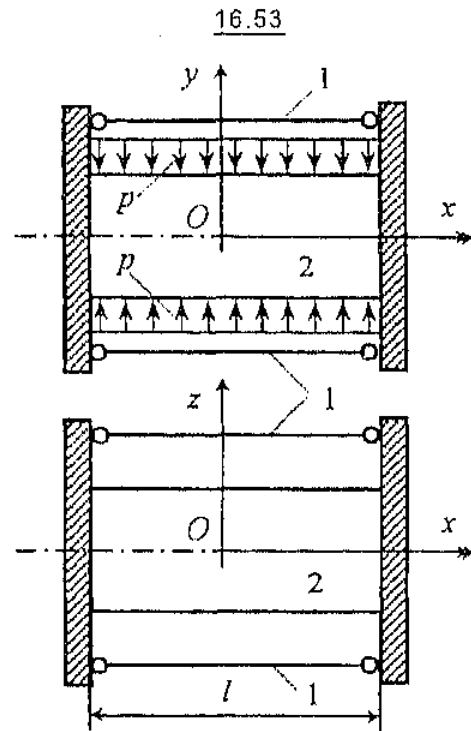
16.53. Две абсолютно жесткие плиты скреплены между собой четырьмя одинаковыми стержнями 1 (площадь поперечного сечения $F = F_1$, модуль упругости $E = E_1$, коэффициент Пуассона $\nu = \nu_1$). Между плитами без зазора вставлен прямоугольный стержень 2 ($F = F_2$, $E = E_2$, $\nu = \nu_2$), нагруженный по граням, параллельным плоскости Oxz , равномерным давлением p . Определить изменение объема стержня 2 и напряжение в стержнях 1.

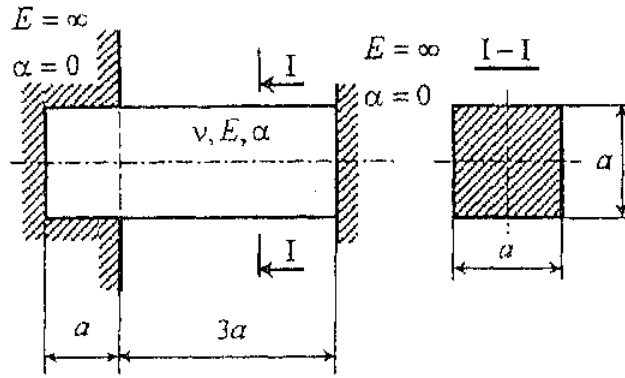
Указание: трением между стержнем и плитами пренебречь.

16.54. Столб квадратного поперечного сечения $a \times a$ нагружен равномерно распределенной по верхнему торцу нагрузкой q . Какую часть торца нужно освободить от нагрузки, чтобы получить наибольшее сжимающее напряжение? Определить это напряжение.

16.55. Балка нагружена постоянным распределенным моментом m . Найти главные напряжения в точке K поперечного сечения посередине пролета.

16.56. Стержень квадратного поперечного сечения $a \times a$ левым концом



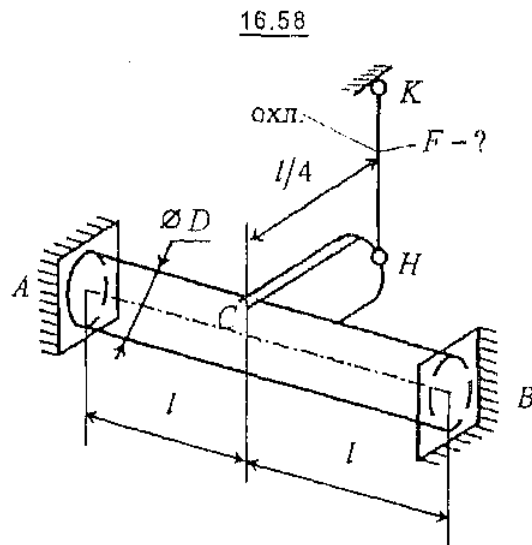
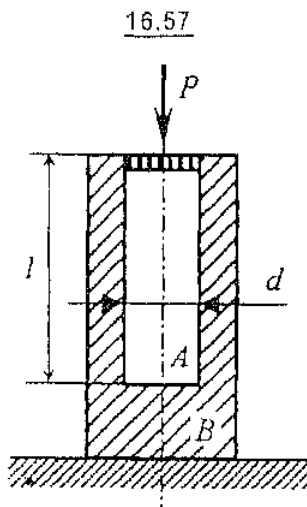


вставляется без зазора и натянута в абсолютно жесткое гнездо, а правым упирается в жесткую стену. Найти напряжения в стержне при его равномерном нагреве на $\Delta t = 40^\circ\text{C}$. В расчетах принять: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$; коэффициент линейного расширения $\alpha = 10^{-4}$ $1/^\circ\text{C}$.

Указание: считать устойчивость стержня обеспеченной; трением пренебречь.

16.57. Резиновый цилиндр A (E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона) диаметра d помещен без зазора в полый недеформируемый цилиндр B и сжимается силой P . Определить изменение объема цилиндра и его укорочение в направлении действия силы.

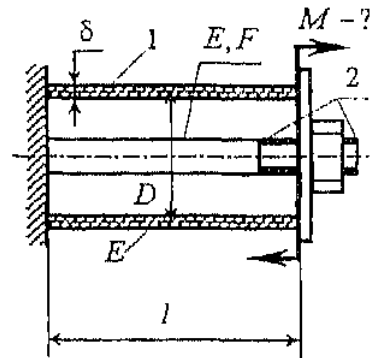
16.58. Конструкция состоит из вала AB круглого сечения диаметра D , абсолютно жесткой балки CH и охлаждаемого стержня KH . Используя теорию прочности III, определить, при



какой площади F поперечного сечения стержня DE достигается равнопрочность изготовленных из одного материала вала и стержня. В расчетах принять: $l = 0,8$ м; $D = 10$ см.

16.59. Для увеличения допускаемого изгибающего момента M тонкостенной трубы 1, изготовленной из материала с разным сопротивлением на растяжение и сжатие ($[\sigma]_c = 2[\sigma]_p$), создается предварительное сжатие в трубе с помощью винтовой стяжки 2 с шагом резьбы s . На сколько оборотов n следует завернуть гайку для того, чтобы значение M стало наибольшим? Найти это значение.

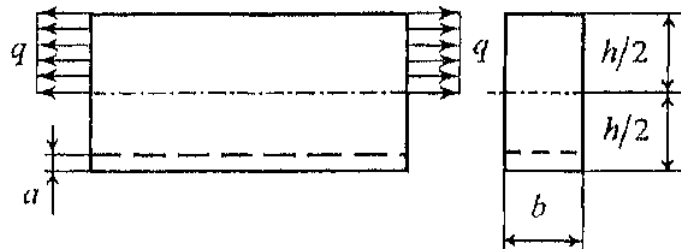
16.59



Указание: для стяжки 2 считать изгибную жесткость пренебрежимо малой по сравнению с жесткостью на изгиб трубы, а прочность обеспеченной.

16.60. Металлическая полоса прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ растягивается равномерно распределенной нагрузкой q , приложенной на верхней половине торцов. Затем часть полосы отрезается по пунктирной линии AB . Определить значение a , при котором наибольшее напряжение в стержне окажется

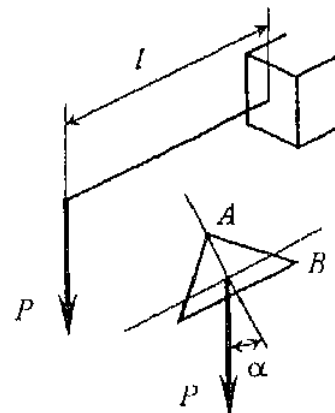
16.60



равным наибольшему напряжению до отрезки.

16.61. Консольная балка, имеющая сечение в виде прямоугольного равнобедренного треугольника, нагружена на свободном торце приложенной к центру тяжести сечения силой P . При каком значении угла α , определяющего направление силы, растягивающие напряжения в точках A и B будут равны?

16.61



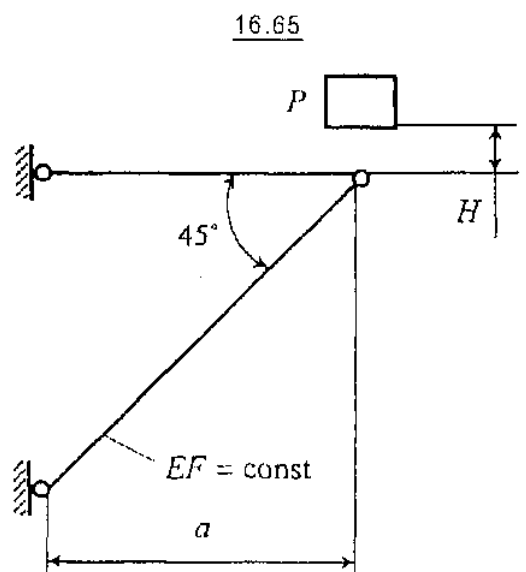
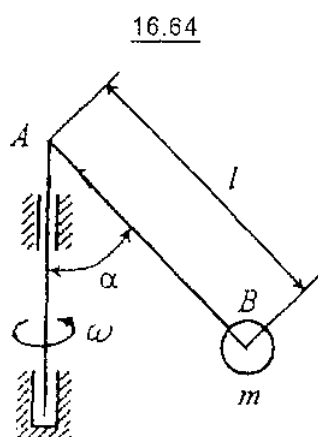
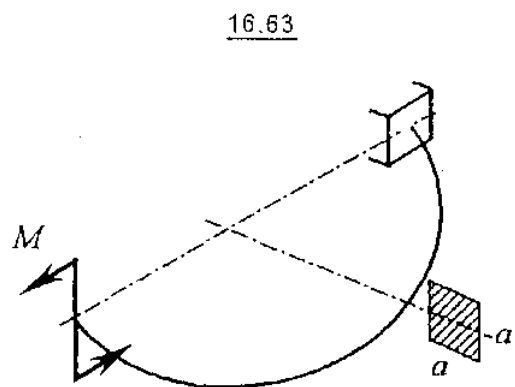
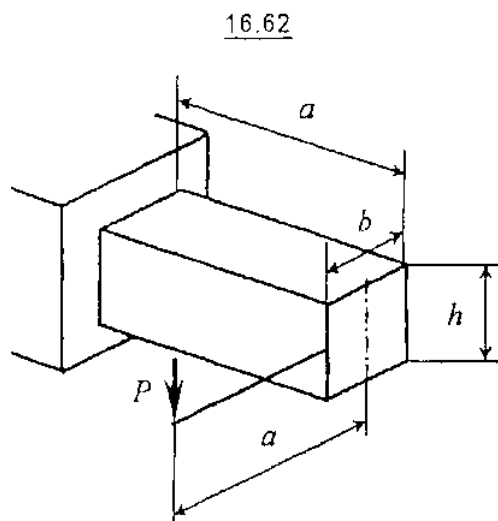
16.62. К стержню прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ и длины a через

жесткую консоль длины a приложена сила P . Используя теорию прочности III, провести поверочный расчет на прочность. В расчетах принять: $b = 4$ см, $h = 12$ см, $a = 0,8$ м; $P = 5,2$ кН; $[\sigma] = 160$ МПа.

16.63. Используя теорию прочности III, провести проектно-верочный расчет на прочность рамы квадратного поперечного сечения, к которой приложен момент M . В расчетах принять: $M = 35$ кН·м, $[\sigma] = 160$ МПа.

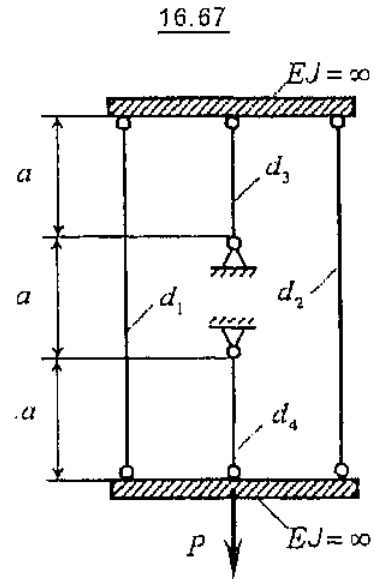
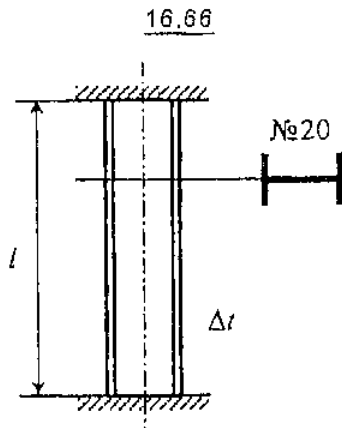
16.64. Определить угловую скорость ω , при которой в равномерно вращающемся стержне AB возникает только продольная сила. В расчетах принять $\alpha = 30^\circ$, $l = 1$ м.

16.65. Определить динамические напряжения σ_d в указанной стержневой системе. В расчетах принять: $P = 200$ Н, $H = 0,1$ м; $F = 5$ см², $a = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.



16.66. Определить максимально допускаемое изменение температуры Δt стального стержня длины l . В расчетах принять: поперечное сечение — двутавр №20, $l = 5$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$; $[\sigma]_c = 200$ МПа.

16.67. Определить сжимающие усилия в элементах указанной стержневой системы, все элементы которой имеют круглые поперечные сечения. В расчетах принять: диаметры стержней $d_1 = d_2 = 1$ см, $d_3 = d_4 = 2$ см, $P = 50$ кН, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.



§ П.1. Основные понятия сопротивления материалов

Здесь приводятся общие определения и аксиомы (гипотезы), на которых основано изложение теоретического материала, содержащегося в задачнике. Причем полагаются известными такие понятия теоретической механики, как *сила, масса, температура, перемещение материальной точки*, а также *аксиома об абсолютности времени*.

1. Объект изучения

Определение П.1. *Материальным телом* называется трехмерная геометрическая область G , заполненная материей (материальной средой). ■

Для материального тела обычно используется то же обозначение, что и для геометрической области.

Аксиома 1. (*Гипотеза сплошности.*) Среда, заполняющая материальное тело, является сплошной. ■

Определение П.2. Среда называется *сплошной*, если в любой области $D \subset G$ содержится материя. ■

Кроме того, предполагается, что материал тела обладает следующими свойствами.

Аксиома 2. (*Свойства материала.*) Материал является *однородным* (его свойства не зависят от формы и размеров тела, а также одинаковы во всех точках) и *изотропным* (его свойства одинаковы во всех направлениях). ■

В сопротивлении материалов, в основном, за исключением объектов, указанных в гл. 10, рассматривается специальный случай геометрии тела G — стержень, а также совокупности стержней.

Определение П.3. *Стержнем* называется тело G , полученное непрерывным движением вдоль кривой $\Gamma = O_0 \overset{\cap}{O_k}$ перпендикулярной к ней плоской области $D(O)$, где $O \in D \cap \Gamma$. При этом $\lambda \ll l(\Gamma)$, где $\lambda = \max_{\Gamma} \text{diam } D \ll l(\Gamma)$, $\text{diam } D$ — диаметр области D , а $l(\Gamma)$ — длина Γ (см. рис. П.1).

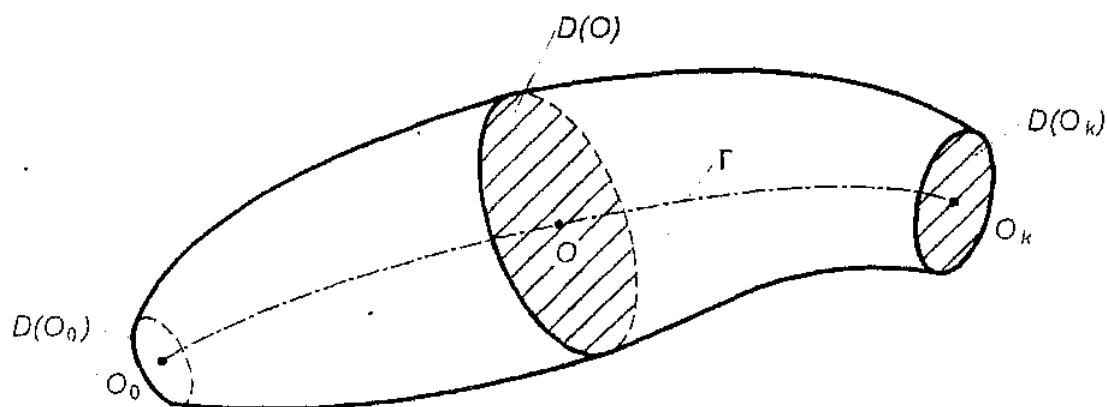


Рис. II.1

Кривая Γ называется *осью стержня*, D — *поперечным сечением*, $D(O_0)$ и $D(O_k)$ — *торцевыми сечениями*, а граничная поверхность стержня без торцевых сечений — его *боковой поверхностью*.

Если $D(O) = \text{const}$, то G — *стержень постоянного сечения*. Если Γ — прямая, то *стержень* называют *прямым*, а в противном случае — *кривым*. Если $\lambda \ll R$ (R — минимальный радиус кривизны оси), то G — *стержень малой кривизны*, в противном случае G — *стержень большой кривизны* (просто *кривой стержень*). В соответствии с видом оси различают также *пространственные* и *плоские стержни*.

Совокупность стержней, соединенных между собой по поперечным сечениям, называется *стержневой системой*. Соединения — *узлы*, а сами стержни — *элементы системы*. ■

В сопротивлении материалов, как правило, изучаются специальные стержневые системы — *фермы* и *рамы*. Подробно они рассмотрены соответственно в гл. 2 и 7.

Отметим, что иногда в учебной литературе стержень также именуют несколько устаревшим термином “брус”, который в современной научной литературе не применяется.

II. Деформации

В отличие от теоретической механики, в сопротивлении материалов рассматриваются деформируемые тела.

Определение II.4. Тело (среда) называется *деформируемым*, если его материальные точки могут изменять свои относительные положения и взаимодействуют между собой. Сам процесс изменения взаимного положения точек носит название *деформации*. ■

В качестве меры деформируемости вводятся следующие величины.

Определение П.5. Пусть A_1, A_2, A_3 — точки тела G в начальный момент времени t_0 (до деформации). При $t > t_0$ (после деформации) тело занимает область G' , а точки A_1, A_2, A_3 переходят в A'_1, A'_2, A'_3 (рис. П.2). При этом $u|_{A_k} = \vec{A_k A'_k}$ — вектор перемещения в точке A_k . Совокупности материальных точек, лежащих на отрезках A_1A_2 и A_1A_3 , называются *материальными волокнами*, и говорят, что волокна A_1A_2 и A_1A_3 в результате деформации переходят в $A'_1A'_2$ и $A'_1A'_3$.

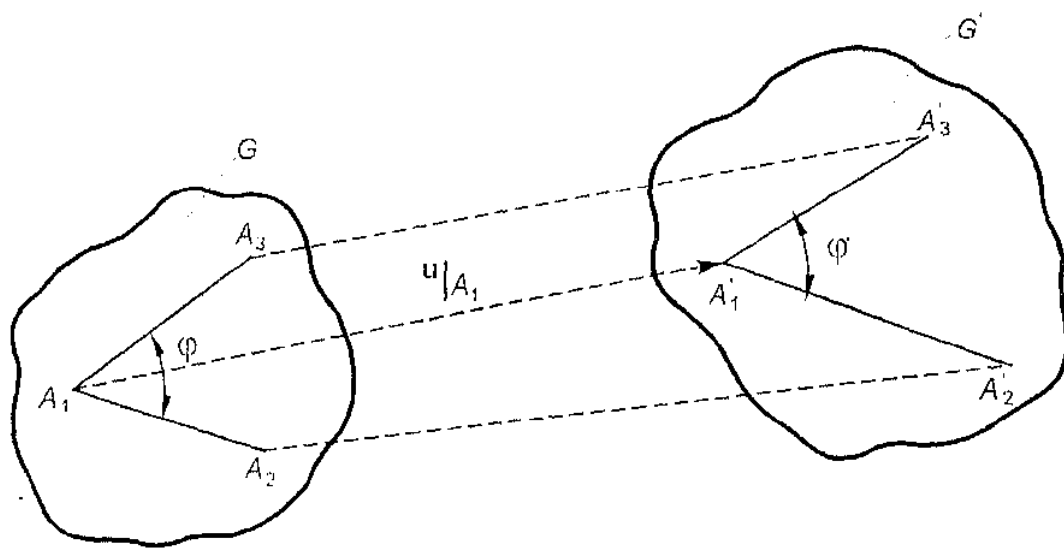


Рис. П.2

Обозначим $s = |A_1A_2|$, $s' = |A'_1A'_2|$, $s_1 = |A_1A_3|$, $n = \vec{A_1A_2}$, $m = \vec{A_1A_3}$ и $\varphi = \hat{nm}$, $\varphi' = \hat{A'_1A'_2 A'_1A'_3}$. Тогда $\Delta s = s' - s$ и $\Delta s/s$ — удлинение и относительное удлинение волокна A_1A_2 , $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi$ — изменение угла между направлениями n и m . Величины

$$\varepsilon_n = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s}, \quad \varepsilon_{nm} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s_1 \rightarrow 0}} \Delta\varphi \quad (\text{П.1})$$

называются соответственно *линейной в направлении n* и *угловой между направлениями n и t* деформациями в точке A_1 , а $\gamma_{nt} = 2\varepsilon_{nt}$ — *углом сдвига*. ■

Очевидно, в силу определения имеет место равенство

$$\varepsilon_{nt} = \varepsilon_{tn}. \quad (\text{П.2})$$

Если используется прямоугольная декартова система координат (ПДСК) $Oxyz$, то для деформаций в направлениях ортов i, j, k и между ними применяются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{yy}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{zz}, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \gamma_{xy}, \quad 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz}, \quad 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Определение П.6. Деформированным состоянием тела G называется совокупность линейных и угловых деформаций для всех точек $A \in G$ и любых направлений. ■

Дополнительно обычно используется следующая гипотеза.

Аксиома 3. (*Принцип начальных размеров.*) Перемещения и деформации во всех точках и для любых направлений являются малыми величинами. ■

Отметим, что эта гипотеза позволяет в определении П.5 приближенно заменить кривые $A'_1A'_2$ и $A'_1A'_3$ прямолинейными отрезками. Кроме того, при использовании уравнений равновесия (кроме задач устойчивости и продольно-поперечного изгиба, см. гл. 11) она дает возможность полагать, что форма и размеры тела не изменяются (области G и G' приближенно совпадают).

III. Силы и напряжения

Пусть тело G ограничено поверхностью $\Pi = \partial G$. Различают следующие виды действующих на него сил.

Определение П.7. (*Первая классификация сил.*)

1. *Сосредоточенными* называются силы P_k ($k = 1, \dots, N_p$) и моменты M_l ($l = 1, \dots, N_M$), приложенные в точках $A_k, A_l \in G$ или $A_k, A_l \in \Pi$.

2. К *распределенным* силам относятся следующие величины.

а). Пусть $A \in \Delta G \subset G$ и ΔP и Δm — вектор равнодействующей всех сил, действующих на тело ΔG , и его масса, $\lambda = \text{diam } \Delta G$.

Тогда

$$q_m = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ A \in \Delta G}} \frac{\Delta P}{\Delta m} \quad (\text{П.4})$$

— вектор распределенных массовых сил в точке A .

б). Пусть дополнительно ΔV — объем области ΔG . Тогда

$$q_V = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ A \in \Delta G}} \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad (\text{П.5})$$

— вектор распределенных объемных сил в точке A .

в). Пусть $A \in \Delta \Pi \subset \Pi$ и ΔP и ΔF — вектор равнодействующей всех сил, действующих на поверхность $\Delta \Pi$, и ее площадь $\lambda = \text{diam } \Delta \Pi$. Тогда

$$p = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ A \in \Delta \Pi}} \frac{\Delta P}{\Delta F} \quad (\text{П.6})$$

— вектор распределенных поверхностных сил в точке A . ■

Объемные и массовые силы связаны между собой так:

$$q_V = \rho q_m, \quad (\text{П.7})$$

где ρ — плотность материала тела.

Через сосредоточенные и распределенные силы могут быть выражены равнодействующая сила R_c и момент $M_{e, O}$ относительно точки приведения O , действующие на все тело G :

$$\begin{aligned} R_c &= \sum_{k=1}^{N_P} P_k + \iiint_G q_V dx dy dz + \iint_{\Pi} p dS, \\ M_{e, O} &= \sum_{l=1}^{N_M} M_{l, O} + \sum_{k=1}^{N_P} [r_k, P_k] + \\ &+ \iiint_G [r, q_V] dx dy dz + \iint_{\Pi} [r, p] dS, \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

где $r = \vec{OA}$ — радиус-вектор, $r_k = \vec{OA}_k$ — радиус-вектор точки A_k приложения силы P_k .

Для стержня, с учетом его специфики, сосредоточенные силы P_k ($k = 1, \dots, N_p$) и моменты $M_{l, O}$ ($l = 1, \dots, N_M$) — равнодействующие всех сосредоточенных сил и моментов относительно точки O , приложенных в точках сечений с центрами в точках $O_k, O_l \in \Gamma$, и вводятся следующие распределенные силы.

Определение П.8. Пусть G — стержень с осью Γ , $O \in \Delta\Gamma \subset \Gamma$, ΔG — часть стержня с осью $\Delta\Gamma$, ограниченная соответствующими поперечными сечениями, $\Delta l = |\Delta\Gamma|$, ΔP и ΔM — векторы равнодействующих силы и момента относительно точки O , найденные по формуле (П.8), где тройные интегралы вычисляются по стержню ΔG , а поверхностные — по его боковой поверхности. Тогда

$$q = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ \Delta \in \Delta\Gamma}} \frac{\Delta P}{\Delta l}, \quad m = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ \Delta \in \Delta\Gamma}} \frac{\Delta M}{\Delta l} \quad (\text{П.9})$$

— погонные сила и момент в точке (сечении) O . ■

Из определений П. 7 и П.8 вытекает связь погонных величин с векторами объемных и поверхностных сил:

$$q = \int \int_D q_V dydz + \int_{\partial D} p ds, \quad m = \int \int_D [r_\Lambda, q_V] dydz + \int_{\partial D} [r_\Lambda, p] ds, \quad (\text{П.10})$$

где ∂D — кривая, ограничивающая сечение D , а $r_\Lambda = yj + zk$ — радиус-вектор в плоскости сечения Oyz .

Аналогично (П.8) имеют место следующие формулы для равнодействующих силы R_c и момента $M_{c, O}$ относительно некоторой точки O , действующих на весь стержень G :

$$R_c = \sum_{k=1}^{N_p} P_k + \int_{\Gamma} q ds, \quad (\text{П.11})$$

$$M_{c, O} = \sum_{l=1}^{N_M} M_{l, O} + \sum_{k=1}^{N_p} [r_k, P_k] + \int_{\Gamma} m ds + \int_{\Gamma} [r, q] ds.$$

Определение П.9. (Вторая классификация сил.)

1. *Внешние силы* — это все силы и моменты, указанные в определениях П.7 и П.8. Их вместе с внешними полями (например, температурой) называют также *нагрузками*.

2. *Внутренние силы (усилия)*. Для их определения проведем через внутреннюю точку $A \in G$ сечение тела поверхностью Π с нормальным вектором ν в точке A . Тогда $G = G_+ \cup G_-$, $G_+ \cap G_- = \Pi$. Причем $\Pi_+ \equiv \Pi$ с нормальным вектором $\nu_+ = \nu$ в точке A — часть границы области G_+ , а противоположно ориентированная поверхность $\Pi'_- \equiv \Pi$ (нормальный вектор в точке A $\nu_- = -\nu$) — часть границы области G_- (рис. П.3).

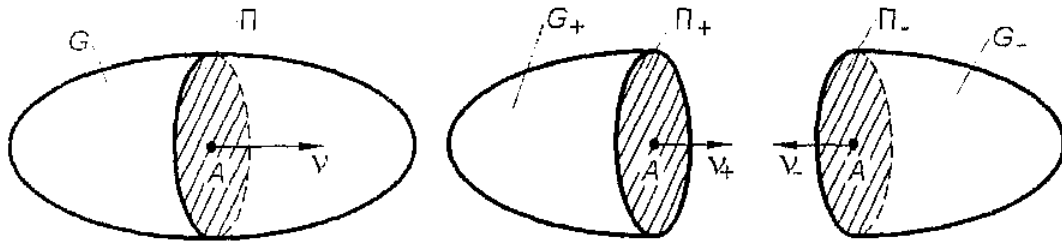


Рис. П.3

Поверхностная сила p_ν для поверхности Π_+ в точке A называется *вектором напряжений в точке A на площадке с нормалью ν* . ■

Аксиома 4. Во всех точках $A \in G$ и для любых площадок вектор напряжений существует (существует и конечен соответствующий предел (П.6)), и он не зависит от выбора поверхности сечения Π .

Поверхностные внутренние моменты отсутствуют (так называемая “безмоментная среда”). ■

Корректность введенного понятия (возможность рассмотрения либо одной отсеченной части, либо другой) становится очевидной после введения следующей гипотезы.

Аксиома 5. (*Принцип отвердевания, гипотеза замороженности*.) В любой момент времени деформируемое тело считается абсолютно твердым, и к нему могут быть применены законы теоретической механики. ■

Отсюда с учетом третьего закона Ньютона вытекает следующая связь векторов напряжений на площадках с нормальными векторами $\nu_+ = \nu$ и $\nu_- = -\nu$:

$$p_\nu = -p_{-\nu}. \quad (\text{П.12})$$

Определение П.10. *Напряженным состоянием* тела G называется множество векторов напряжений во всех точках $A \in G$ и

для любых площадок. Совокупность напряженного и деформированного состояний называется *напряженно-деформированным состоянием* (сокращенно — НДС), а деформации и напряжения — его *компонентами*. ■

Вектор напряжения принято раскладывать на составляющие.

Определение П.11. Пусть Π — плоскость (или касательная плоскость к сечению), ν и α, β — единичные нормальный и базисные векторы плоскости Π (рис. П.4). Представим вектор напряжения на этой площадке так:

$$p_\nu = \sigma_\nu + \tau_\nu, \quad \sigma_\nu = \sigma_\nu \nu, \quad \tau_\nu = \tau_{\nu\alpha} \alpha + \tau_{\nu\beta} \beta. \quad (\text{П.13})$$

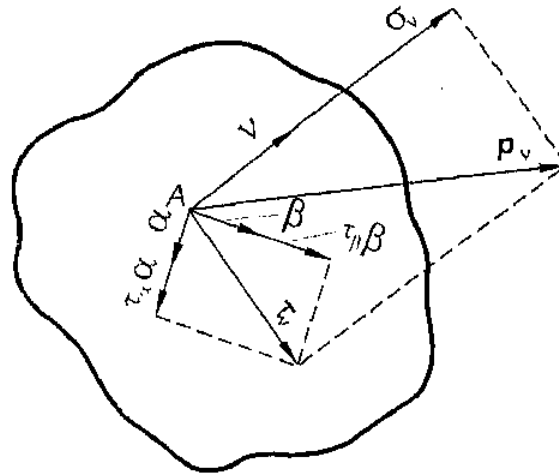


Рис. П.4

Тогда σ_ν и τ_ν называются *векторами нормального и касательного напряжений*, а σ_ν и $\tau_{\nu\alpha}, \tau_{\nu\beta}$ — соответственно *нормальным и касательными напряжениями*. Если $\sigma_\nu > 0$ (< 0), то нормальные напряжения — *растягивающие (сжимающие)*. ■

Утверждение П.1. (*Закон парности касательных напряжений*.) Для любых ν и α ($\nu \perp \alpha$) справедливы равенства:

$$\tau_{\nu\alpha} = \tau_{\alpha\nu}. \quad \blacksquare \quad (\text{П.14})$$

Если ν, α, β совпадают с осями i, j, k ПДСК, то применяются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xx}, \quad \sigma_y = \sigma_{yy}, \quad \sigma_z = \sigma_{zz}, \\ \tau_{xy} &= \sigma_{xy}, \quad \tau_{xz} = \sigma_{xz}, \quad \tau_{yz} = \sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

По отличным от нуля напряжениям в ПДСК различают следующие виды НДС.

Определение П.12. НДС называется:

а) *пространственным*, если хотя бы три его компоненты с индексами, включающими x , y и z , отличны от нуля;

б) *плоским*, если равны нулю все его компоненты с индексами, включающими x , или y , или z ;

в) *одноосным*, если отлична от нуля только одна из компонент с индексом x , или y , или z ;

г) *плоским чистым сдвигом (чистым сдвигом)*, если отлична от нуля только одна из компонент с индексом xy , или xz , или yz . ■

Отметим, что для реализации НДС “б” и “в” внешние силы должны лежать в соответствующей плоскости или на прямой.

Все силы подразделяются также следующим образом.

Определение П.13. (*Третья классификация сил.*)

1. *Динамические силы* — это силы, зависящие от времени.

2. *Статические силы* — это силы, не зависящие от времени. ■

В сопротивлении материалов, как правило, рассматривается второй тип сил.

Приведем также еще один опытный факт, часто учитываемый при построении моделей сопротивления материалов.

Аксиома 6. (*Принцип Сен-Венана.*) НДС тела вдали от места приложения нагрузки не зависит от вида ее распределения по области приложения при фиксированных результирующих силе и моменте. ■

В частности, эта гипотеза позволяет рассматривать такую идеализацию внешней нагрузки, как сосредоточенные силы.

IV. Связь между напряженным и деформированным состояниями

Эта связь является характеристикой материала и обычно определяется из опыта.

Как правило, за исключением гл. 14, рассматриваются так называемые упругие материалы.

Определение П.14. Материал называется упругим (идеально упругим), если он обладает способностью полностью восстанавливать свою форму и размеры после устранения нагрузок. ■

Для таких материалов обычно используется следующий опытный факт (гипотеза).

Аксиома 7. (*Закон Гука.*) Для упругого материала силовые факторы (силы, напряжения) есть однородные линейные функции кинематических характеристик (перемещений, деформа-

ций). При этом имеет место и аналогичная обратная зависимость.

Например, перемещение u_A в точке A по какому-то направлению связано с внешними силами P_1, \dots, P_n так:

$$u_A = \sum_{i=1}^n k_i P_i. \quad \blacksquare \quad (\text{П.16})$$

Стандартные формулировки закона Гука приведены в гл. 1, 4 и 8.

Из принципа начальных размеров и закона Гука при учете аксиомы 5 вытекают следующие утверждения.

Утверждение П.2. (*Принцип суперпозиции.*) НДС и перемещения тела, вызванные системой нагрузок, равны сумме соответствующих характеристик, определяемых каждой из нагрузок. \blacksquare

Утверждение П.3. Для упругого тела G потенциальная энергия имеет вид

$$U = \iiint_G u \, dx dy dz, \quad (\text{П.17})$$

где u — однозначная функция деформаций или напряжений, называемая *удельной потенциальной энергией*. \blacksquare

Утверждение П.4. (*Закон сохранения энергии.*) Для упругого тела G справедливо равенство

$$U + T = U_0 + T_0 + A, \quad (\text{П.18})$$

где U и U_0 , T и T_0 — потенциальная и кинетические энергии тела в конечном и начальном состояниях, A — работа внешних сил, совершаемая для перехода из одного состояния в другое.

При этом кинетическая энергия вычисляется так (v — поле скоростей):

$$T = \frac{1}{2} \iiint_G \rho v^2 \, dx dy dz. \quad \blacksquare \quad (\text{П.19})$$

В частных случаях закон сохранения упрощается:

— статическое деформирование:

$$U = U_0 + A; \quad (\text{П.20})$$

— статические процессы при начальном недеформированном состоянии:

$$U = A. \quad (\text{П.21})$$

Кроме того, отметим, что в сопротивлении материалов, как правило, рассматриваются так называемые кинематически неизменяемые системы, а не механизмы.

Определение П.15. Стержень или стержневая система называются *кинематически неизменяемыми*, если при предположении о недеформируемости стержня или элементов стержневой системы они остаются неподвижными при любых внешних нагрузках. ■

Для этого, как известно из теоретической механики, на тело должны быть наложены внешние связи, которые, как правило, реализуются в виде *опор*. В случае стержня основные типы опор следующие.

1. *Заделка (защемляющая неподвижная опора)*. Она исключает поступательное и вращательное движение сечения и накладывает в пространственном и плоском случае соответственно 6 и 3 связи.

2. *Шарнир (шарнирно-неподвижная опора)*. Она исключает поступательное движение сечения, но не ограничивает его вращение. Число накладываемых связей 3 и 2 соответственно.

3. *Каток (шарнирно-подвижная опора)*. Она исключает поступательное движение сечения в направлении, перпендикулярном опорной плоскости, но не ограничивает его вращение и поступательное движение параллельно упомянутой плоскости. Число накладываемых связей 1 и 1 соответственно.

Графическое изображение этих опор приведено на рис. П.5, а (пространственный и плоский варианты) и П.5, б, П.5, в (плоский случай).

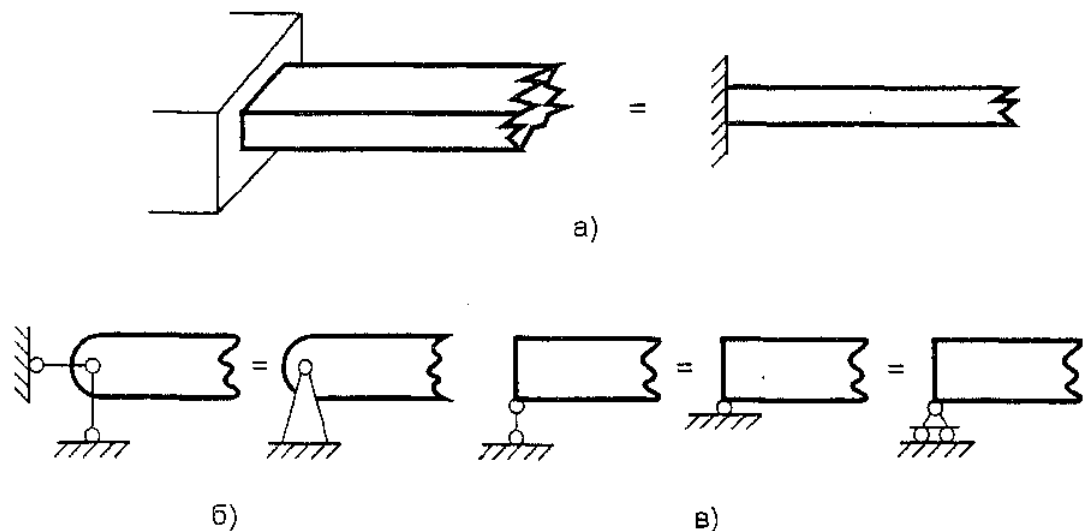


Рис. П.5

V. Внутренние силовые факторы в стержне

В силу малости поперечных размеров стержня в моделях сопротивления материалов, кроме напряжений, используются следующие интегральные характеристики.

Определение П.16. Пусть D — поперечное сечение стержня в некоторой точке $O \in \Gamma$, а $Oxyz$ — ПДСК, ось Ox которой направлена по касательной к Γ (для прямого стержня совпадает с Γ) и сонаправлена с единичным нормальным вектором $\nu = i$ к сечению (рис. П.6).

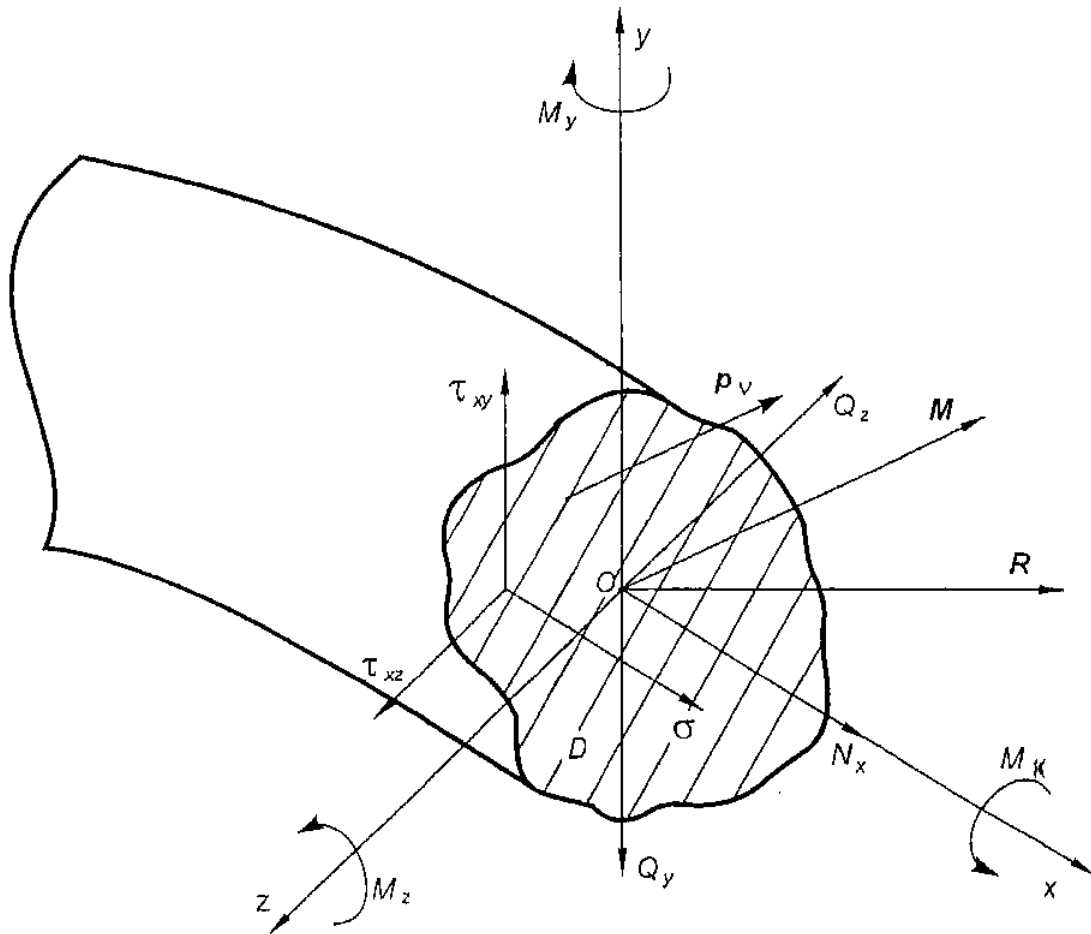


Рис. П.6

Внутренними силовыми факторами (*усилиями*) в стержне называются векторы результирующих силы R и момента M в поперечном сечении (см. (П.8), где отличен от нуля только вектор $p = p_n$, поверхностный интеграл переходит в двойной по области D , а центр приведения $O \in D \cap \Gamma$) и их координаты

$$R = \int\int_D p_v dydz = Ni - Q_y j - Q_z k, \quad (\text{П.22})$$

$$M = \int\int_D [r_A, p_v] dydz = M_K i - M_y j + M_z k.$$

Скалярные усилия имеют специальные названия: N и Q_y, Q_z — нормальная (осевая) и перерезывающие (поперечные) силы, M_K и M_y, M_z — крутящий и изгибающие моменты. ■

Если вектор напряжений в соответствии с (П.13) представить в виде

$$p_v = \sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k, \quad (\text{П.23})$$

то для нормальной и перерезывающей силы, крутящего и изгибающих моментов придем к следующим формулам:

$$N = \int\int_D \sigma_x dydz, \quad Q_y = - \int\int_D \tau_{xy} dydz, \quad Q_z = - \int\int_D \tau_{xz} dydz,$$

$$M_K = \int\int_D (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dydz, \quad (\text{П.24})$$

$$M_y = - \int\int_D \sigma_x z dydz, \quad M_z = - \int\int_D \sigma_x y dydz.$$

Выбор положительных направлений Q_y, Q_z, M_z и M_y связан с правилом знаков, приведенным в § 5.1.

Обычно первым этапом решения задач сопротивления материалов является определение внутренних усилий и построение их эпюр (графиков). Оно основывается на принципе отвердевания, называется *методом сечений* и обычно проводится в два этапа.

1. Опоры отбрасываются и заменяются соответствующими реакциями связей (пример этой операции для плоского случая приведен на рис. П.7). Для их вычисления используются уравнения равновесия всего стержня или стержневой системы.

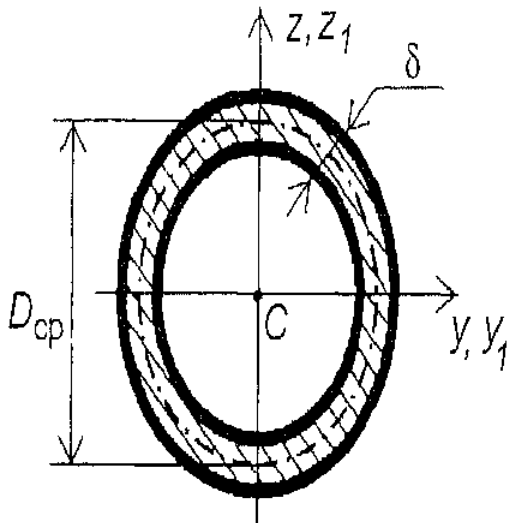


Рис. П.7

2. Проводится поперечное сечение бруса. Действие отброшенной части заменяется системой направляемых, как правило, положительным образом внутренних усилий, для определения которых составляются уравнения равновесия для оставшейся части стержня: $R + R_p = 0$, $M + M_p = 0$ (см. (П.22) и (П.8)).

В некоторых задачах первый этап может быть опущен.

При составлении уравнений равновесия часто используются следующие записи:

$$\sum X = 0, \quad \sum M_A = 0, \quad (\text{П.25})$$

означающие проекции уравнения сил на ось Ox и моментов на какую-либо ось, и аналогичные им.

Однако этих действий может оказаться недостаточно. Поэтому деформируемые стержни или их системы подразделяют следующим образом.

Определение П.17. Система называется *внешне статически определимой*, если число n_p уравнений равновесия для всей системы равно количеству r_p реакций, и *внутренне статически определимой*, если при известных реакциях число n_i уравнений равновесия для любой отсеченной части системы равно количеству r_i усилий в сечении. Система называется *статически определимой (СО)*, если она является как внешне, так и внутренне статически определимой.

В противном случае ($n_p < r_p$ и/или $n_i < r_i$) система *статически неопределимая (СН)*. При этом число ($s = r_p - n_p + r_i - n_i$) — *степень статической неопределимости системы*. ■

Отметим, что при $n_p > r_p$ система является механизмом.

VI. Типы расчетов

Основная задача сопротивления материалов как науки — расчет изучаемых элементов конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и усталость. Последние два понятия и связанные с ними методы расчета рассмотрены в гл. 11 и 14. Здесь ограничимся первыми двумя типами расчетов.

Определение П.18. *Прочность* — это способность тела выдерживать внешние нагрузки без возникновения некоторого опасного состояния (разрушения, необратимых деформаций и т.д.).

Жесткость — это способность тела выдерживать внешние нагрузки без появления кинематических изменений (деформаций, перемещений и т.д.), превышающих некоторые значения. ■

Во всех случаях требуется перейти от интегральных характеристик (внутренних силовых факторов) к локальным (напряжениям). В сопротивлении материалов это делается с помощью следующей гипотезы.

Аксиома 8. (Гипотеза плоских сечений, гипотеза Бернулли.) Поперечные сечения бруса остаются плоскими и перпендикулярными оси бруса и после его деформирования. ■

Расчеты на прочность делятся на два типа:

- расчет по допускаемым напряжениям;
- расчет по предельным нагрузкам.

Последний метод изложен в гл. 13. Ниже ограничимся лишь первым типом. В нем полагается, что, исходя из требований к конструкции и свойств материала, задано некоторое предельное напряжение $\sigma_{пр}$ (или предельные напряжения на растяжение $\sigma_{пр.р}$ и сжатие $\sigma_{пр.с}$), и из анализа НДС выбирается максимальное напряжение σ_{max} (или максимальные растягивающие $\sigma_{max.р}$ и сжимающие $\sigma_{max.с}$ напряжения).

Кроме того, вводится следующее понятие.

Определение П.19. Запасом прочности (коэффициентом запаса) по растягивающим (сжимающим) напряжениям деформируемого тела называется число n_p (n_c), показывающее, во сколько раз необходимо увеличить внешние нагрузки (все или часть из них при фиксированных остальных), чтобы максимальные растягивающие (сжимающие) напряжения стали равными $\sigma_{пр.р}$ ($\sigma_{пр.с}$).

Запас прочности n при этом вычисляется так:

$$n = \min (n_p, n_c). \quad \blacksquare$$

Если материал тела одинаково работает на растяжение и на сжатие, то, очевидно, $n = n_p = n_c$.

Коэффициент запаса зависит от многих факторов: неадекватности выбора расчетной схемы конструкции, разброса значений экспериментально найденных характеристик материала, неточности знания внешних нагрузок и т.д. — и, как правило, является нормативной величиной для каждой отрасли и типа конструкции.

Утверждение П.5. Если напряжения прямо пропорциональны внешней нагрузке, то коэффициент запаса может быть определен через напряжения:

$$\sigma_{пр.р} = n_p \sigma_{max.р} \quad (\sigma_{пр.с} = n_c \sigma_{max.с}). \quad \blacksquare$$

Отметим, что упомянутая пропорциональность имеет место во всех случаях, за исключением продольно-поперечного изгиба (см. § 11.1).

Если коэффициент запаса задан (даны *допускаемые (нормативные) коэффициенты* $[n]$ или $[n]_p$ и $[n]_c$) и выполняются условия утверждения П.5, то вычисляется *допускаемое (допускаемые) напряжение*:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{[n]} \left([\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{пр.р}}}{[n]_p}, \quad [\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{пр.с}}}{[n]_c} \right). \quad (\text{П.26})$$

Далее полагается, что прочность обеспечивается выполнением следующего условия (условий):

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma] \quad \left(\sigma_{\text{max p}} \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_{\text{max c}} \leq [\sigma]_c \right). \quad (\text{П.27})$$

При *расчете на жесткость* неравенства (П.27) должны рассматриваться совместно с соответствующими ограничениями на кинематические характеристики.

Каждые из указанных расчетов подразделяются на два типа:
 а) *проектировочный*, в котором по части заданных параметров конструкции (схеме нагружения, нагрузкам, материалу, геометрическим размерам и т.д.) определяются недостающие параметры (например, размеры);

б) *поверочный (проверочный)*, при котором по всем заданным параметрам конструкции:

- либо проверяется выполнение неравенств (П.27);
- либо вычисляется коэффициент запаса;
- либо находится *допускаемая внешняя нагрузка*, т.е. нагрузка, обеспечивающая выполнение неравенств (П.27) (при этом σ_{max} — функция нагрузки).

Если в результате поверочного расчета требуемое неравенство выполняется или вычисленное значение отличается в худшую сторону от допускаемого не более чем на 5%, то на этом расчет заканчивается. В противном случае проектируемый параметр изменяется в нужную сторону и расчет повторяется.

Как правило, проектировочный расчет сложен. Поэтому он проводится при некоторых упрощающих предположениях. Тогда поверочный расчет является необходимым завершающим этапом. В противном случае (за исключением задачи об определении допускаемой нагрузки) он не нужен.

§ П.2. Справочные материалы

Таблица П.1

Некоторые геометрические и механические величины и их единицы (СИ)

| Величина | | Обозначение единицы |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| Обозначение | Наименование | |
| l, a | Длина | м |
| F | Площадь | м^2 |
| $J_z, J_y, J_x,$ $J_{yz}, J_{zx}, J_{xy}, J_x, J_y$ | Моменты инерции плоской области | м^4 |
| S_z, S_y | Статические моменты плоской области | м^3 |
| W_z, W_y, W_x | Моменты сопротивления деформации | м^3 |
| i_z, i_y | Радиусы инерции плоской области | м |
| P | Сила | Н |
| M | Момент силы | Н · м |
| q | Погонная сила | Н/м |
| m | Погонный момент | Н |
| ρ | Плотность | кг/м^3 |
| A | Работа | Дж = Н · м |
| U | Потенциальная энергия | Дж = Н · м |
| p | Давление | Па = Н/м ² , МПа |
| σ, τ | Напряжения | Па = Н/м ² , МПа |
| E, G | Модули упругости | Па = Н/м ² , МПа |
| ν | Коэффициент Пуассона | — |
| α | Коэффициент температурного расширения | 1/°С |

Таблица П.2

Физико-механические свойства некоторых материалов

($\sigma_{в.с}$, $\sigma_{т.с}$ — пределы прочности и текучести при сжатии, σ_{-1p} — предел выносливости при растяжении;
 $\tau_{в} = (0,6 \div 0,7)$ $\sigma_{в}$, $\tau_{т} = (0,5 \div 0,6)$ $\sigma_{т}$, если не указано в таблице)

| Материал | $\sigma_{в}$, $\tau_{в}$ МПа | $\sigma_{т}$, $\sigma_{тл}$, $\tau_{т}$ МПа | σ_{-1p} , σ_{-1} , τ_{-1} МПа | $E(\sigma) \cdot 10^{-5}$ МПа | ν | $\rho \cdot 10^{-3}$ кг/м ³ | $\alpha \cdot 10^6$ 1/°C |
|--------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|-------|-------------------------------------------|-----------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Углеродистые стали обыкновенного качества | | | | | | | |
| Ст1 | $\sigma_{в} = 320 \div 400$ | $\sigma_{т} = 190$ | $\sigma_{-1p} = 120 \div 150$ $\sigma_{-1} = 160 \div 220$ $\tau_{-1} = 80 \div 120$ | — | — | — | — |
| Ст2 | $\sigma_{в} = 320 \div 420$ | $\sigma_{т} = 220$ | $\sigma_{-1p} = 120 \div 160$ $\sigma_{-1} = 170 \div 220$ $\tau_{-1} = 80 \div 130$ | — | — | — | — |
| Ст3 | $\sigma_{в} = 380 \div 470$ | $\sigma_{т} = 240$ | $\sigma_{-1p} = 120 \div 160$ $\sigma_{-1} = 170 \div 220$ $\tau_{-1} = 100 \div 130$ | — | — | — | — |
| Углеродистые стали специального назначения | | | | | | | |
| 15К | $\sigma_{в} = 380$ | $\sigma_{т} = 210 \div 230$ | — | — | — | — | — |
| 20К | $\sigma_{в} = 410$ | $\sigma_{т} = 230 \div 250$ | — | — | — | — | — |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---------------------------------|---------------------------|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|------|---|------|-----------|
| М16С | $\sigma_b = 380$ | $\sigma_T = 230$ | — | — | — | — | — |
| А12 | $\sigma_b = 420 \div 570$ | — | — | 2,02 | — | — | 11,9—14,2 |
| А40Г | $\sigma_b = 600 \div 750$ | — | — | — | — | — | — |
| Углеродистые стали качественные | | | | | | | |
| 10 | $\sigma_b = 320 \div 440$ | $\sigma_T = 210$ | $\sigma_{-1p} = 120 \div 150$ $\sigma_{-1} = 160 \div 220$ $\tau_{-1} = 80 \div 120$ | 1,90 | — | 7,83 | 11,6—14,6 |
| 20 | $\sigma_b = 420 \div 500$ | $\sigma_T = 250$ | $\sigma_{-1p} = 120 \div 160$ $\sigma_{-1} = 170 \div 220$ $\tau_{-1} = 100 \div 130$ | 2,02 | — | 7,82 | 11,1—14,4 |
| 30 | $\sigma_b = 500 \div 600$ | $\sigma_T = 300$ | $\sigma_{-1p} = 170 \div 210$ $\sigma_{-1} = 200 \div 270$ $\tau_{-1} = 110 \div 140$ | — | — | 7,82 | 12,6—15,6 |
| 45 | $\sigma_b = 610 \div 750$ | $\sigma_T = 360$ | $\sigma_{-1p} = 190 \div 250$ $\sigma_{-1} = 250 \div 340$ $\tau_{-1} = 150 \div 200$ | 2,04 | — | 7,81 | 11,6—14,7 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------------------------|---------------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------------------|----------------|------|------|-----------|
| Легированные стали | | | | | | | |
| 20X | $\sigma_B = 720 \div 850$ | $\sigma_T = 400 \div 650$ | $\sigma_{-1} = 310 \div 380$ $\tau_{-1} = 170 \div 230$ | 2,07 | — | 7,74 | 11,3 |
| 45X | $\sigma_B = 850 \div 1050$ | $\sigma_T = 700 \div 950$ | $\sigma_{-1} = 400 \div 500$ | 2,109 (0,8015) | — | 7,82 | 12,8 |
| 40XH | $\sigma_B = 1000 \div 1450$ | $\sigma_T = 800 \div 1300$ | $\sigma_{-1p} = 310 \div 420$ $\sigma_{-1} = 460 \div 600$ | — | — | — | — |
| 20XНЗА | $\sigma_B = 950 \div 1450$ | $\sigma_T = 850 \div 1100$ | $\sigma_{-1} = 430 \div 650$ $\tau_{-1} = 240 \div 310$ | 2,040 (0,815) | — | 7,85 | 11,0—14,5 |
| 40XНМА | $\sigma_B = 1100 \div 1700$ $\tau_B = 0,63 \sigma_B$ | $\sigma_T = 850 \div 1600$ | $\sigma_{-1} = 500 \div 700$ $\tau_{-1} = 270 \div 380$ | 2,040 | — | 7,85 | 11,7 |
| 30XГСА | $\sigma_B = 1100 \div 1700$ $\tau_B = 0,63 \sigma_B$ | $\sigma_T = 850 \div 1500$ | $\sigma_{-1} = 480 \div 700$ $\tau_{-1} = 280 \div 400$ | 1,980 (0,830) | — | 7,85 | 11,0 |
| Тугоплавкие металлы | | | | | | | |
| Вольфрам | $\sigma_B = 107$ | — | — | 4,2 (1,5) | 0,3 | 19,3 | 4,45 |
| Молибден | $\sigma_B = 780$ | $\sigma_T = 760$ | — | 3,3 (1,22) | 0,31 | 10,2 | 5,6 |
| Ниобий | $\sigma_B = 770$ | $\sigma_T = 600$ | — | 1,06 (0,88) | 0,39 | 8,57 | 7,1 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-------------|-----------|---------|-------|
| Серый чугун | | | | | | | |
| СЧ12-28 | $\sigma_b = 120$ $\sigma_{b,r} = 500$ | — | — | 0,8—1,5 | 0,23—0,27 | 6,8—7,1 | 10—12 |
| Жаропрочный чугун | | | | | | | |
| Х28 | $\sigma_b = 350$ | — | — | — | — | — | — |
| Ковкий чугун | | | | | | | |
| КЧ30-6 | $\sigma_b \geq 300$ $\tau_b = 240$ | $\sigma_T = 190$ $\sigma_{T,c} = 210$ | $\sigma_{-1p} = 70$ $\sigma_{-1} = 120$ $\tau_{-1} = 110$ | 1,55 (0,63) | 0,23 | 7,2 | 10,5 |
| КЧ50-4 | $\sigma_b \geq 500$ $\tau_b = 520$ | $\sigma_T = 270$ $\sigma_{T,r} = 300$ | $\sigma_{-1p} = 110$ $\sigma_{-1} = 180$ $\tau_{-1} = 160$ | 1,74 (0,68) | 0,28 | 7,3 | 10 |
| Алюминиевые сплавы | | | | | | | |
| АМцМ | $\sigma_b = 130$ $\tau_b = 80$ | $\sigma_T = 50$ | $\sigma_{-1} = 50$ | 0,71 (0,27) | 0,3 | 2,73 | 24 |
| Д1(О) | $\sigma_b = 210$ | $\sigma_T = 110$ | $\sigma_{-1} = 75$ | 0,71 (0,27) | 0,31 | 2,8 | 22,9 |
| Д16, Д16П | $\sigma_b = 440$ | $\sigma_T = 290$ | — | 0,71 (0,27) | 0,31 | 2,78 | 22,7 |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|---------------------|-------------------------|--------|-----------|-----------------------------------------------|
| Титан и его сплавы | | | | | | | |
| BT1 | $\sigma_B = 610$ | $\sigma_T = 470$ | $\sigma_{-1} = 260$ | 1,121 (0,411) | 0,32 | 4,5 | 8 |
| OT4 | $\sigma_B = 700 \div 850$ | $\sigma_T = 550 \div 650$ | — | 1,1 (0,4)—1,2 | — | 4,55 | 8—9,8 |
| BT8 | $\sigma_B = 1050 \div 1800$ $\tau_B = 650 \div 700$ | $\sigma_T = 950 \div 1100$ $\sigma_{ПК} = 750 \div 850$ | $\sigma_{-1} = 500$ | 1,1 (0,425) | 0,3 | 4,48 | 8,3—9,1 |
| BT14 | $\sigma_B = 950 \div 1200$ | $\sigma_T = 850 \div 1100$ | — | 1,15 | — | 4,52 | 8—8,7 |
| Медные сплавы | | | | | | | |
| ЛА77-2 мягкая твердая | $\sigma_B = 400$ $\sigma_B = 650$ | $\sigma_T = 140$ — | — — | 1,05 — | — — | 8,6 — | 18,3 — |
| Br. O-10 | $\sigma_B = 250$ $\tau_B = 270$ | — | — | 3 | — | — | — |
| Авиационная древесина | | | | | | | |
| Сосна | Вдоль волокона | | — | 0,102—0,145 (0,0055) | 0,49 | 0,48—0,54 | Вдоль волокон 3,7; поперек волокон 63,6 |
| | $\sigma_B = 93,1 \div 115$ | $\sigma_{ПК,р} = 61$ | | | | | |
| | $\sigma_{B,r} = 42,7 \div 46,6$ $\tau_B = 6,2 \div 7,3$ | $\sigma_{ПК,c} = 31$ | | | | | |

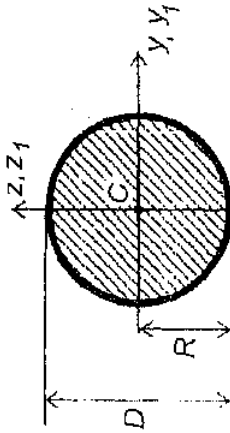
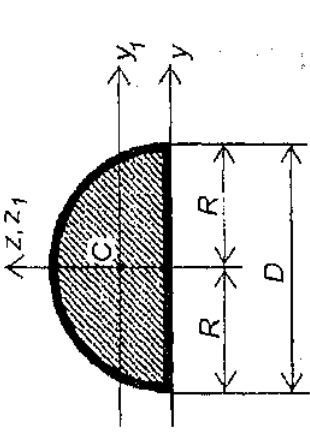
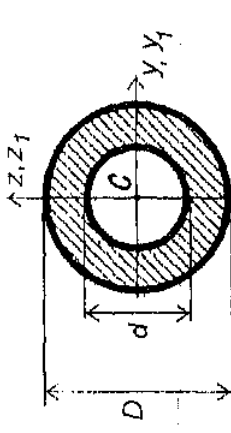
Окончание табл. П.2

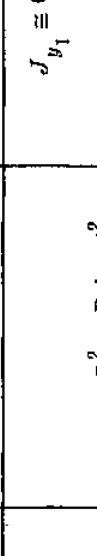
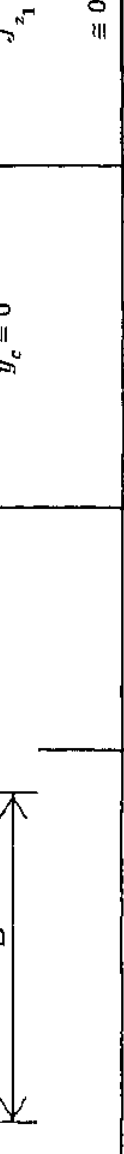
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|---|-------------------------|------|------|--------------------------------------------|
| Ель | $\sigma_{\text{в}} = 107 + 122$ $\sigma_{\text{в,с}} = 38,5 + 42,3$ $\tau_{\text{в}} = 5,2 + 6,7$ | $\sigma_{\text{пл,р}} = 56$ $\sigma_{\text{пл,с}} = 27$ | — | 0,11 (0,0055) | 0,44 | 0,46 | Вдоль волокон 5,4; поперек волокон 34,1 |
| Дуб | $\sigma_{\text{в}} = 128,8$ $\sigma_{\text{в,с}} = 52$ $\tau_{\text{в}} = 8,5 + 12,5$ | $\sigma_{\text{пл,с}} = 29$ | — | 0,073—0,151 (0,0065) | 0,43 | 0,76 | Вдоль волокон 4,9; поперек волокон 54,4 |

Таблица П.3

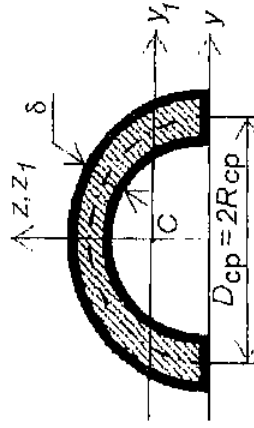
Геометрические характеристики простейших плоских областей
 (\$C_{y_1 z_1}\$ — центральная система координат; \$C(y_c, z_c)\$)

| Форма сечения | Площадь сечения F | Координаты центра тяжести | Моменты инерции | Примечания |
|---------------|------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | hb | $z_c = \frac{h}{2}$, $y_c = \frac{b}{2}$ | $J_{y_1} = \frac{bh^3}{12}$, $J_{z_1} = \frac{hb^3}{12}$, $J_y = \frac{bh^3}{3}$, $J_z = \frac{hb^3}{3}$ | |
| | $\frac{1}{2}hb$ | $z_c = \frac{h}{3}$, $y_c = \frac{1}{3}(2d - b)$ | $J_{y_1} = \frac{bh^3}{36}$, $J_{z_1} = \frac{bh^3}{12}$, $J_{y_1} = \frac{bh(b^2 - bd + d^2)}{36}$, $J_z = \frac{h[d^3 + (b-d)^3]}{12}$ | |

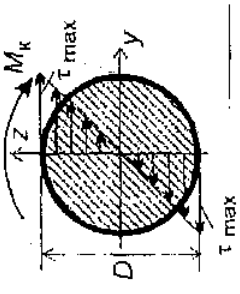
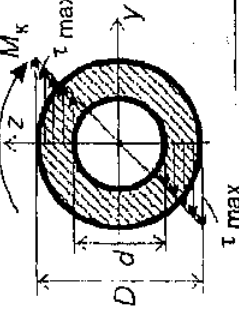
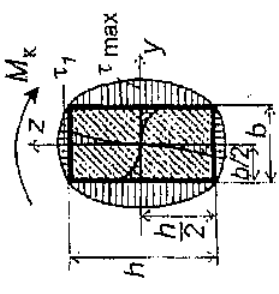
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
|  | $\frac{\pi D^2}{4} = \pi R^2$ | $y_c = z_c = 0$ | $J_p = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2},$ $J_{z_1} = J_{y_1} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$ | |
|  | $\frac{\pi D^2}{8} = \frac{\pi R^2}{2}$ | $y_c = 0,$ $z_c = \frac{2}{3} \frac{D}{\pi} \approx 0,212D =$ $= 0,424R$ | $J_{y_1} = \frac{D^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx$ $\approx 0,11R^4,$ $J_{z_1} = \frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi R^4}{8}$ $\approx 0,0246D^4 \approx 0,393R^4$ | |
|  | $\frac{\pi D^2}{4} (1 - c^2)$ | $y_c = z_c = 0$ | $J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4),$ $J_{z_1} = J_{y_1} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4)$ | $c = \frac{d}{D}$ |

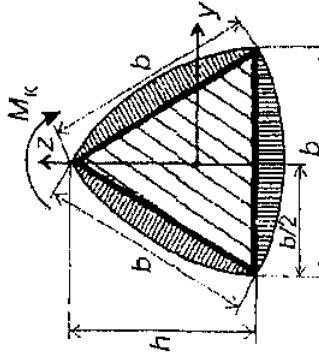
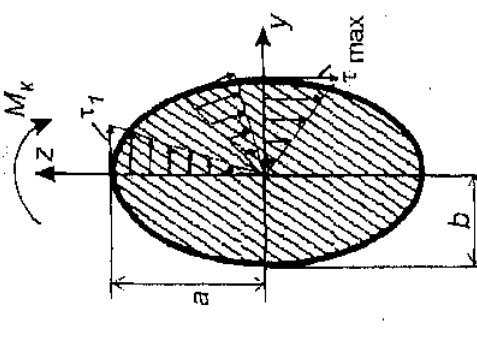
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
|  | $\frac{\pi(D^2 - d^2)}{8} = \frac{\pi D^2}{8} (1 - c^2)$ | $z_c = \frac{2}{3\pi} \frac{D^2 + Dd + d^2}{D + d} = \frac{2}{3} \frac{D}{\pi} \left(\frac{1 + c + c^2}{1 + c} \right) \approx 0,212D \left(\frac{1 + c + c^2}{1 + c} \right),$ $y_c = 0$ | $J_{y_1} \approx 0,00686(D^4 - d^4) - \frac{0,0177D^2d^2(D - d)}{D + d} = 0,00686D^4 \left(1 - c^2 - 2,54c^2 \left(\frac{1 - c}{1 + c} \right) \right),$ $J_y = \frac{\pi D^4}{128} (1 - c^4),$ $J_{z_1} = \frac{\pi D^4}{128} (1 - c^2) \approx 0,02664D^4 (1 - c^4)$ | $c = \frac{d}{D}$ |
|  | $\pi D_{cp} \delta$ | $y_c = z_c = 0$ | $J_p = \frac{\pi D_{cp}^3 \delta}{4},$ $J_{z_1} = J_{y_1} = \frac{\pi D_{cp}^3 \delta}{8} = \pi R_{cp}^3 \delta$ | $\frac{\delta}{D} \ll 1$ |

Окончание табл. П.3

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
|  | $\frac{\pi D_{cp} \delta}{2} = \pi R_{cp} \delta$ | $z_c = \frac{D_{cp}}{\pi} = \frac{2R_{cp}}{\pi} \cong 0,637R_{cp},$ $y_c = 0$ | $J_{y_1} = \frac{D_{cp}^3 \delta}{16\pi} (\pi^2 + 8) =$ $= \frac{R_{cp}^3 \delta}{2\pi} (\pi^2 + 8),$ $J_y = J_z = \frac{\pi D_{cp}^3 \delta}{16} = \frac{\pi R_{cp}^3 \delta}{2}$ | $\frac{\delta}{D_{cp}} \ll 1$ |

Характеристики сечений при кручении

| Форма сечения | J_k | Момент сопротивления W_k | Примечания |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1</p>  | <p>2</p> $\frac{\pi D^4}{32} \cong 0,1D^4$ | <p>3</p> $\frac{\pi D^3}{16} \cong 0,2D^3$ | <p>4</p> |
|  | $\frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) \cong 0,1D^4 (1 - c^4)$ | $\frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) \cong 0,2D^3 (1 - c^4)$ | $c = \frac{d}{D}$ |
|  | $\beta b^3 h$ | $\alpha b^2 h$ | $\tau_1 = \gamma \tau_{\max}$ $\alpha, \beta, \gamma - \text{числовые коэффициенты, см. табл. П.5.}$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $\frac{h^4}{15\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot b^4}{80\sqrt{3}}$ | $\frac{b^3}{20} = \frac{h^3}{7,5\sqrt{3}}$ | <p>τ изображается для внешних волокон. Треугольник равносторонний. τ_{\max} соответствует серединам сторон.</p> |
|  | $\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$ | $\frac{\pi b^2 a}{2}$ | <p>τ_{\max} соответствует концам малой оси, а $\tau_1 = \frac{b}{a} \tau_{\max}$ --- концам большой оси.</p> |

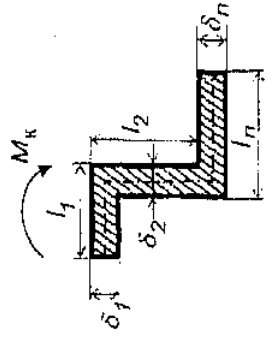
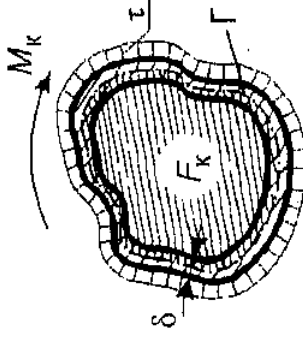
| 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>Стандартные профили (таблицы П.7—П.11).</p> | $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \delta_i^3 l_i$ $\frac{1}{3} \delta^3 l$ | $\frac{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \delta_i^3 l_i}{\delta_{\max}}$ $\frac{1}{3} \delta^2 l$ | <p>l_i, δ_i — длина и толщина i-го участка, $\delta_{\max} = \max(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$; $\frac{\delta_{\max}}{l} \ll 1$; l — суммарная длина средней линии.</p> <p>$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \delta$</p> <p>$l_i, \delta_i$ — длина и толщина i-го участка, $\delta_{\max} = \max(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, $\eta = 1,00$ — уголок; $\eta = 1,20$ — двутавр; $\eta = 1,12$ — швеллер.</p> |
|  | $\frac{4F_k^2}{\int_{\Gamma} \frac{ds}{\delta}}$ | $2F_k \delta_{\min}$ | <p>F_k — площадь области, ограниченной средней линией Γ; $\delta_{\min} = \min \delta(s), l = \Gamma , 0 \leq s \leq l$, $\tau(s) = \frac{M_k}{2F_k \delta(s)}$.</p> |

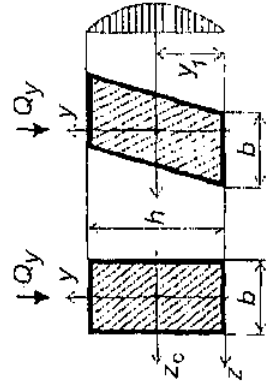
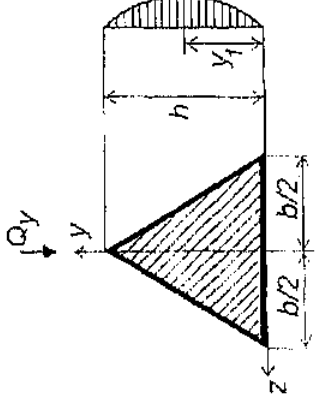
Таблица П.5

Коэффициенты α , β и γ для прямоугольника из табл. П.4

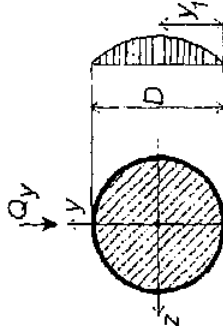
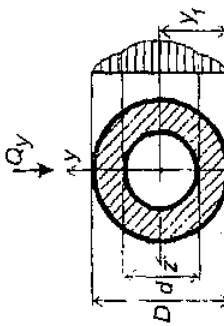
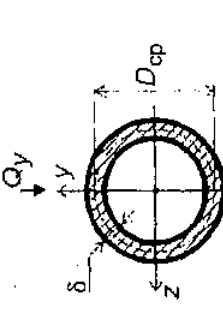
| h/b | 1 | 1,5 | 1,75 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | ∞ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| α | 0,208 | 0,231 | 0,239 | 0,246 | 0,267 | 0,282 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333 |
| β | 0,141 | 0,196 | 0,214 | 0,229 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333 |
| γ | 1,00 | 0,859 | 0,820 | 0,795 | 0,753 | 0,745 | 0,743 | 0,742 | 0,742 | 0,742 |

Таблица П.6

Моменты сопротивления и касательные напряжения сечений при изгибе

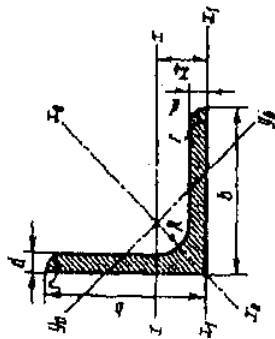
| 1 Форма сечения | 2 Максимальные касательные напряжения τ_{\max} | 3 Координата точки, соответствующей τ_{\max} | 4 Моменты сопротивления |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
|  | $\frac{3}{2} \frac{Q_y}{F}$ | $y_1 = \frac{h}{2}$ | $W_z = \frac{bh^2}{6}$ |
|  | $\frac{3}{2} \frac{Q_y}{F}$ | $y_1 = \frac{h}{2}$ | $W_{z_{\min}} = \frac{bh^2}{24},$ $W_{z_{\max}} = \frac{bh^2}{12}$ |

Окончание табл. П.6

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------|
|  | $\frac{4}{8} \frac{Q_y}{F}$ | $y_1 = \frac{D}{2} = R$ | $W_z = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi R^3}{2}$ |
|  | $\frac{2}{8} \frac{Q_y}{F} \frac{(1-c^3)}{(1-c^4)(1-c)}$ $c = \frac{d}{D}$ | $y_1 = \frac{D}{2} = \frac{d}{2}$ | $W_z = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4)$ |
|  | $\frac{Q_y}{2F}$ | $y_1 = \frac{D_{cp}}{2}$ | $W_z = 4\pi D_{cp}^2 \delta,$ $\frac{\delta}{D_{cp}} \ll 1$ |

Сортамент прокатной стали

Сталь прокатная угловая равнополочная. ГОСТ 8509-72



| Профиль | мм | | | | | Площадь, см ² | Справочные величины для осей | | | | | | | | | | | | Масса 1 м длины профиля, кг |
|---------|----------------------------------------------------------|---|---------------------------------|-----|----------------------------------------------------------|--------------------------|---------------------------------|-------|----------------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------|------|----------------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------|--|-----------------------------|
| | b | d | R | r | γ | | x-x' | | y ₀ -y ₀ ' | | x ₀ -x ₀ ' | | y ₀ -y ₀ ' | | x ₁ -x ₁ ' | | z ₀ , см | | |
| | J _{x₁²} , см ⁴ | | i _{x₁} , см | | J _{y₀²} , см ⁴ | | i _{y₀} , см | | J _{x₀²} , см ⁴ | i _{x₀} , см | | J _{y₁²} , см ⁴ | i _{y₁} , см | | J _{x₁²} , см ⁴ | i _{x₁} , см | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | |
| 2 | 20 | 4 | 3,5 | 1,2 | 1,13 | 0,40 | 0,59 | 0,63 | 0,75 | 0,17 | 0,39 | 0,81 | 0,60 | 0,89 | | | | | |
| 2,5 | 25 | 4 | 3,5 | 1,2 | 1,46 | 0,50 | 0,58 | 0,78 | 0,75 | 0,22 | 0,38 | 1,09 | 0,64 | 1,15 | | | | | |
| 2,8 | 28 | 3 | 4,0 | 1,3 | 1,43 | 0,81 | 0,75 | 1,29 | 0,95 | 0,34 | 0,49 | 1,57 | 0,73 | 1,12 | | | | | |
| 3,2 | 32 | 4 | 4,5 | 1,5 | 1,86 | 1,03 | 0,74 | 1,62 | 0,93 | 0,44 | 0,48 | 2,11 | 0,76 | 1,46 | | | | | |
| 3,6 | 36 | 4 | 4,5 | 1,5 | 1,62 | 1,16 | 0,85 | 1,84 | 1,07 | 0,48 | 0,55 | 2,20 | 0,55 | 1,27 | | | | | |
| 4 | 40 | 4 | 5,0 | 1,7 | 1,86 | 1,77 | 0,97 | 2,80 | 1,23 | 0,74 | 0,63 | 3,26 | 0,89 | 1,46 | | | | | |
| 4,5 | 45 | 4 | 5,0 | 1,7 | 2,43 | 2,26 | 0,96 | 3,58 | 1,21 | 0,94 | 0,62 | 4,39 | 0,94 | 1,91 | | | | | |
| 5 | 50 | 5 | 5,5 | 1,8 | 2,10 | 2,56 | 1,10 | 4,06 | 1,39 | 1,06 | 0,71 | 4,64 | 0,99 | 1,65 | | | | | |
| | | 3 | | | 2,75 | 3,29 | 1,09 | 5,21 | 1,38 | 1,36 | 0,70 | 6,24 | 1,04 | 2,16 | | | | | |
| | | 3 | | | 2,35 | 3,55 | 1,23 | 5,63 | 1,55 | 1,47 | 0,79 | 6,35 | 1,09 | 1,85 | | | | | |
| | | 4 | | | 3,08 | 4,58 | 1,22 | 7,26 | 1,53 | 1,90 | 0,78 | 8,53 | 1,13 | 2,42 | | | | | |
| | | 5 | | | 3,79 | 5,53 | 1,20 | 8,75 | 1,54 | 2,30 | 0,79 | 10,73 | 1,17 | 2,97 | | | | | |
| | | 3 | | | 2,65 | 5,13 | 1,39 | 8,13 | 1,75 | 2,12 | 0,89 | 9,04 | 1,21 | 2,08 | | | | | |
| | | 4 | | | 3,48 | 6,63 | 1,38 | 10,50 | 1,74 | 2,74 | 0,89 | 12,10 | 1,26 | 2,73 | | | | | |
| | | 5 | | | 4,20 | 8,03 | 1,37 | 12,70 | 1,72 | 3,35 | 0,88 | 15,30 | 1,30 | 3,37 | | | | | |
| | | 3 | | | 2,96 | 7,11 | 1,55 | 11,30 | 1,95 | 2,95 | 1,00 | 12,40 | 1,33 | 2,32 | | | | | |
| | | 4 | | | 3,89 | 9,21 | 1,54 | 14,60 | 1,94 | 3,80 | 0,99 | 16,60 | 1,38 | 3,05 | | | | | |
| | | 5 | | | 4,80 | 11,20 | 1,53 | 17,80 | 1,92 | 4,63 | 0,98 | 20,90 | 1,42 | 3,77 | | | | | |

Продолжение табл. П.7

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 5,6 | 56 | 4 | 6,0 | 2,0 | 4,38 5,41 | 13,10 16,00 | 1,73 1,72 | 20,80 25,40 | 2,18 2,16 | 5,41 6,59 | 1,11 1,10 | 23,30 29,20 | 1,52 1,57 | 3,44 4,25 |
| 6,3 | 63 | 4 | 7,0 | 2,3 | 4,96 6,13 7,28 | 18,90 23,10 27,10 | 1,95 1,94 1,93 | 29,90 36,60 42,90 | 2,45 2,44 2,43 | 7,81 9,52 11,20 | 1,25 1,25 1,24 | 33,10 41,50 50,00 | 1,69 1,74 1,78 | 3,90 4,81 5,72 |
| 7 | 70 | 4,5 | | | 6,20 6,86 8,15 9,42 10,70 | 29,0 31,9 37,6 43,0 48,2 | 2,16 2,16 2,15 2,14 2,13 | 46,0 50,7 59,6 68,2 76,4 | 2,72 2,72 2,71 2,69 2,68 | 12,0 13,2 15,5 17,8 20,0 | 1,39 1,39 1,38 1,37 1,37 | 51,0 56,7 68,4 80,1 91,9 | 1,88 1,90 1,94 1,99 2,02 | 4,87 5,38 6,39 7,39 8,37 |
| 7,5 | 75 | 5 | 9 | 3,0 | 7,39 8,78 10,10 11,50 12,80 | 39,5 46,6 53,3 59,8 66,1 | 2,31 2,30 2,29 2,28 2,27 | 62,6 73,9 84,6 94,6 105,0 | 2,91 2,90 2,89 2,87 2,86 | 16,4 19,3 22,1 24,8 27,5 | 1,49 1,48 1,48 1,47 1,46 | 69,6 83,9 98,3 113,0 127,0 | 2,02 2,06 2,10 2,15 2,18 | 5,80 6,89 7,96 9,02 10,10 |
| 8 | 80 | 5,5 | | | 8,63 9,38 10,80 12,30 | 52,7 57,0 65,3 73,4 | 2,47 2,47 2,45 2,44 | 83,6 60,4 104,0 116,0 | 3,11 3,11 3,09 3,08 | 21,8 23,5 27,0 30,3 | 1,59 1,58 1,58 1,57 | 93,2 102,0 119,0 137,0 | 2,17 2,19 2,23 2,27 | 6,78 7,36 8,51 9,65 |
| 9 | 90 | 6 | 10 | 3,3 | 10,60 12,30 13,90 15,60 | 82,1 94,3 106,0 118,0 | 2,78 2,77 2,76 2,75 | 130,0 150,0 168,0 186,0 | 3,50 3,49 3,48 3,46 | 34,0 38,9 43,8 48,6 | 1,79 1,78 1,77 1,77 | 145,0 169,0 194,0 219,0 | 2,43 2,47 2,51 2,55 | 8,33 9,64 10,90 12,20 |
| 10 | 100 | 6,5 | | | 12,80 13,80 15,60 19,20 22,80 26,30 29,70 | 122,0 131,0 147,0 179,0 209,0 237,0 264,0 | 3,09 3,08 3,07 3,05 3,03 3,00 2,98 | 193,0 207,0 233,0 284,0 331,0 375,0 416,0 | 3,88 3,88 3,87 3,84 3,81 3,78 3,74 | 50,7 54,2 60,9 74,1 86,9 99,3 112,0 | 1,99 1,98 1,98 1,96 1,95 1,94 1,94 | 214,0 231,0 265,0 333,0 402,0 472,0 542,0 | 2,68 2,71 2,75 2,83 2,91 2,99 3,06 | 10,10 10,80 12,20 15,10 17,90 20,60 23,30 |
| 11 | 110 | 7 | 12 | 4,0 | 15,20 17,20 | 176,0 198,0 | 3,40 3,39 | 279,0 315,0 | 4,29 4,28 | 72,7 81,8 | 2,19 2,18 | 308,0 353,0 | 2,96 3,00 | 11,90 13,50 |

Продолжение табл. 11.7

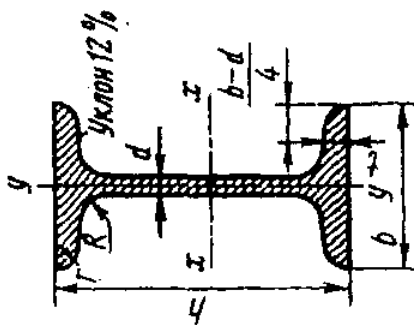
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|------|-----|----|----|-----|-------|-------|------|-------|------|-------|------|--------|------|------|
| 12,5 | 125 | 8 | 14 | 4,6 | 19,7 | 294,0 | 3,87 | 467,0 | 4,87 | 122,0 | 2,49 | 516,0 | 3,36 | 15,5 |
| | | 9 | | | 22,0 | 327,0 | 3,86 | 520,0 | 4,86 | 135,0 | 2,48 | 582,0 | 3,40 | 17,3 |
| | | 10 | 14 | | 24,3 | 360,0 | 3,85 | 571,0 | 4,84 | 149,0 | 2,47 | 649,0 | 3,45 | 19,1 |
| | | 12 | | | 28,9 | 422,0 | 3,82 | 670,0 | 4,82 | 174,0 | 2,46 | 782,0 | 3,53 | 22,7 |
| | | 14 | | | 33,4 | 482,0 | 3,80 | 764,0 | 4,78 | 200,0 | 2,45 | 916,0 | 3,61 | 26,2 |
| | | 16 | | | 37,8 | 539,0 | 3,78 | 853,0 | 4,75 | 224,0 | 2,44 | 1051,0 | 3,68 | 29,6 |
| 14 | 140 | 9 | | | 24,7 | 466,0 | 4,34 | 739,0 | 5,47 | 192,0 | 2,79 | 818,0 | 3,78 | 19,4 |
| | | 10 | 14 | 4,6 | 27,3 | 512,0 | 4,33 | 814,0 | 5,46 | 211,0 | 2,78 | 911,0 | 3,82 | 21,5 |
| | | 12 | | | 32,5 | 602,0 | 4,31 | 957,0 | 5,43 | 248,0 | 2,76 | 1097,0 | 3,90 | 25,5 |
| 16 | 160 | 10 | | | 31,4 | 774 | 4,96 | 1229 | 6,25 | 319 | 3,19 | 1356 | 4,30 | 24,7 |
| | | 11 | | | 34,4 | 844 | 4,95 | 1341 | 6,24 | 348 | 3,18 | 1494 | 4,35 | 27,0 |
| | | 12 | | | 37,4 | 913 | 4,94 | 1450 | 6,23 | 376 | 3,17 | 1633 | 4,39 | 29,4 |
| | | 14 | 16 | 5,3 | 43,3 | 1046 | 4,92 | 1662 | 6,20 | 431 | 3,16 | 1911 | 4,47 | 34,0 |
| | | 16 | | | 49,1 | 1175 | 4,89 | 1866 | 6,17 | 485 | 3,14 | 2191 | 4,55 | 38,5 |
| | | 18 | | | 54,8 | 1299 | 4,87 | 2061 | 6,13 | 537 | 3,13 | 2472 | 4,63 | 43,0 |
| | | 20 | | | 60,4 | 1419 | 4,85 | 2248 | 6,10 | 589 | 3,12 | 2756 | 4,70 | 47,4 |
| 18 | 180 | 11 | | | 38,8 | 1216 | 5,60 | 1933 | 7,06 | 500 | 3,59 | 2128 | 4,85 | 30,5 |
| | | 12 | 16 | 5,3 | 42,2 | 1317 | 5,59 | 2093 | 7,04 | 540 | 3,58 | 2324 | 4,89 | 33,1 |
| | | 12 | | | 47,1 | 1823 | 6,22 | 2896 | 7,84 | 749 | 3,99 | 3182 | 5,37 | 37,0 |
| | | 13 | | | 50,9 | 1961 | 6,21 | 3116 | 7,83 | 805 | 3,98 | 3452 | 5,42 | 39,9 |
| | | 14 | | | 54,6 | 2097 | 6,20 | 3333 | 7,81 | 861 | 3,97 | 3722 | 5,46 | 42,8 |
| 20 | 200 | 16 | 18 | 6,0 | 62,0 | 2363 | 6,17 | 3755 | 7,78 | 970 | 3,96 | 4264 | 5,54 | 48,7 |
| | | 20 | | | 76,5 | 2871 | 6,12 | 4560 | 7,72 | 1182 | 3,93 | 5355 | 5,70 | 60,1 |
| | | 25 | | | 94,3 | 3466 | 6,06 | 5494 | 7,63 | 1438 | 3,91 | 6733 | 5,89 | 74,0 |
| | | 30 | | | 111,5 | 4020 | 6,00 | 6351 | 7,55 | 1688 | 3,89 | 8130 | 6,07 | 87,6 |
| 22 | 220 | 14 | 21 | 7,0 | 60,4 | 2814 | 6,83 | 4470 | 8,60 | 1159 | 4,38 | 4941 | 5,93 | 47,4 |
| | | 16 | | | 68,6 | 3175 | 6,81 | 5045 | 8,58 | 1306 | 4,36 | 5661 | 6,02 | 53,8 |

Окончание табл. П.7

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|----|-----|----|----|---|-------|------|------|-------|------|------|------|-------|------|-------|
| | | 16 | | | 78,4 | 4717 | 7,76 | 7492 | 9,78 | 1942 | 4,98 | 8286 | 6,75 | 61,5 |
| | | 18 | | | 87,7 | 5247 | 7,73 | 8337 | 9,75 | 2158 | 4,96 | 9342 | 6,83 | 68,9 |
| | | 20 | | | 97,0 | 5765 | 7,71 | 9160 | 9,72 | 2370 | 4,94 | 10401 | 6,91 | 76,1 |
| 25 | 250 | 22 | 24 | 8 | 106,1 | 6270 | 7,69 | 9961 | 9,69 | 2579 | 4,93 | 11464 | 7,00 | 83,3 |
| | | 25 | | | 119,7 | 7006 | 7,65 | 11125 | 9,64 | 2887 | 4,91 | 13064 | 7,11 | 94,0 |
| | | 28 | | | 133,1 | 7717 | 7,61 | 12244 | 9,59 | 3190 | 4,89 | 14674 | 7,23 | 104,5 |
| | | 30 | | | 142,0 | 8177 | 7,59 | 12965 | 9,56 | 3389 | 4,89 | 15753 | 7,31 | 111,4 |

Сортамент прокатной стали

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые ГОСТ 8239-72



| Номер балки | мм | | | | | | | | | | Масса 1м, кг | Справочные величины для осей | | | | | |
|-------------|-----|-----|-----|-----|------|-----|------------------------------|------------------------------|-----------------|------------------------------|--------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------|------|--|--|
| | h | b | d | t | R | r | x - x | | | y - y | | | | | | | |
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | J_{x^2} см ⁴ | W_{x^2} см ³ | i_{x^2} см | S_{x^2} см ³ | | J_{y^2} см ⁴ | W_{y^2} см ³ | i_{y^2} см | | | |
| 1 | 100 | 55 | 4,5 | 7,2 | 7,0 | 2,5 | 12,0 | 198 | 39,7 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | | |
| 10 | 120 | 64 | 4,8 | 7,3 | 7,5 | 3,0 | 14,7 | 350 | 58,4 | 11,50 | 4,88 | 33,7 | 27,9 | 8,72 | 1,38 | | |
| 12 | 140 | 73 | 4,9 | 7,5 | 8,0 | 3,0 | 17,4 | 572 | 81,7 | 13,70 | 5,73 | 46,8 | 41,9 | 11,50 | 1,55 | | |
| 14 | 160 | 81 | 5,0 | 7,8 | 8,5 | 3,5 | 20,2 | 873 | 109,0 | 15,90 | 6,57 | 62,3 | 58,6 | 14,50 | 1,70 | | |
| 16 | 180 | 90 | 5,1 | 8,1 | 9,0 | 3,5 | 23,4 | 1290 | 143,0 | 18,40 | 7,42 | 81,4 | 82,6 | 18,40 | 1,88 | | |
| 18 | 180 | 100 | 5,1 | 8,3 | 9,0 | 3,5 | 25,4 | 1430 | 159,0 | 19,90 | 7,51 | 89,8 | 114,0 | 22,80 | 2,12 | | |
| 18a | 200 | 100 | 5,2 | 8,4 | 9,5 | 4,0 | 26,8 | 1840 | 184,0 | 21,00 | 8,28 | 104,0 | 115,0 | 23,10 | 2,07 | | |
| 20 | 200 | 110 | 5,2 | 8,6 | 9,5 | 4,0 | 28,9 | 2030 | 205,0 | 22,70 | 8,37 | 114,0 | 155,0 | 28,20 | 2,32 | | |
| 20a | 220 | 110 | 5,4 | 8,7 | 10,0 | 4,0 | 30,6 | 2550 | 232,0 | 24,00 | 9,13 | 131,0 | 157,0 | 28,60 | 2,27 | | |
| 22 | 220 | 120 | 5,4 | 8,9 | 10,0 | 4,0 | 32,8 | 2790 | 254,0 | 25,80 | 9,22 | 143,0 | 206,0 | 34,30 | 2,50 | | |
| 22a | 240 | 115 | 5,6 | 9,5 | 10,5 | 4,0 | 34,8 | 3460 | 289,0 | 27,30 | 9,97 | 163,0 | 198,0 | 34,50 | 2,37 | | |
| 24 | 240 | 125 | 5,6 | 9,8 | 10,5 | 4,0 | 37,5 | 3800 | 317,0 | 29,40 | 10,10 | 178,0 | 260,0 | 41,60 | 2,63 | | |
| 24a | 270 | 125 | 6,0 | 9,8 | 11,0 | 4,5 | 40,2 | 5010 | 371,0 | 31,50 | 11,20 | 210,0 | 260,0 | 41,50 | 2,54 | | |

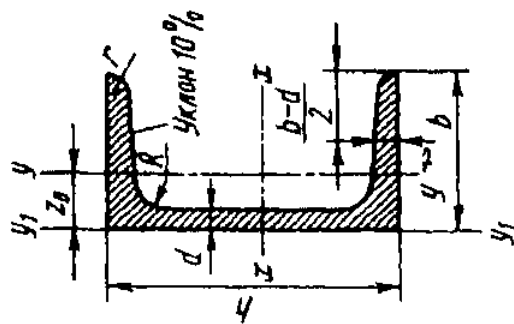
Окончание табл. П.9

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|-----|-----|-----|------|------|------|-----|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|------|
| 27a | 270 | 135 | 6,0 | 10,2 | 11,0 | 4,5 | 43,2 | 33,90 | 5500 | 407,0 | 11,30 | 229,0 | 337,0 | 50,00 | 2,80 |
| 30 | 300 | 135 | 6,5 | 10,2 | 12,0 | 5,0 | 46,5 | 36,50 | 7080 | 472,0 | 12,30 | 268,0 | 337,0 | 49,90 | 2,69 |
| 30a | 300 | 145 | 6,5 | 10,7 | 12,0 | 5,0 | 49,9 | 39,20 | 7780 | 518,0 | 12,50 | 292,0 | 436,0 | 60,10 | 2,95 |
| 33 | 330 | 140 | 7,0 | 11,2 | 13,0 | 5,0 | 53,8 | 42,20 | 9840 | 597,0 | 13,50 | 339,0 | 419,0 | 59,90 | 2,79 |
| 36 | 360 | 145 | 7,5 | 12,3 | 14,0 | 6,0 | 61,9 | 48,60 | 13380 | 743,0 | 14,70 | 423,0 | 516,0 | 71,10 | 2,89 |
| 40 | 400 | 155 | 8,3 | 13,0 | 15,0 | 6,0 | 72,6 | 57,00 | 19062 | 953,0 | 16,20 | 545,0 | 667,0 | 86,10 | 3,03 |
| 45 | 450 | 160 | 9,0 | 14,2 | 16,0 | 7,0 | 84,7 | 66,50 | 27696 | 1231,0 | 18,10 | 708,0 | 808,0 | 101,00 | 3,09 |
| 50 | 500 | 170 | 10,0 | 15,2 | 17,0 | 7,0 | 100,0 | 78,50 | 39727 | 1589,0 | 19,90 | 919,0 | 1043,0 | 123,0 | 3,23 |
| 55 | 550 | 180 | 11,0 | 16,5 | 18,0 | 7,0 | 118,0 | 92,60 | 55962 | 2035,0 | 21,80 | 1181,0 | 1356,0 | 151,0 | 3,39 |
| 60 | 600 | 190 | 12,0 | 17,8 | 20,0 | 8,0 | 138,0 | 108,00 | 76806 | 2560,0 | 23,60 | 1491,0 | 1725,0 | 182,00 | 3,54 |

Сортамент прокатной стали

Сталь горячекатаная.

Швеллеры с уклоном внутренних граней полок. ГОСТ 8240-72



| Номера швеллера | ММ | | | | | | | | | | Масса 1 м, кг | Справочные величины для осей | | | | | | z ₀ , см |
|-----------------|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-----------------------------------|---------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-------|------|--|------------------------|
| | h | b | d | t | R | r | x-x | | | y-y | | | | | | | | |
| | | | | | | | J _x см ⁴ | W _x см ³ | i _x см | Δ _x см ³ | | J _y см ⁴ | W _y см ³ | i _y см | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | | |
| 5 | 50 | 32 | 4,4 | 7,0 | 6,0 | 2,5 | 6,16 | 4,84 | 22,8 | 9,1 | 1,92 | 5,59 | 5,61 | 2,75 | 0,954 | 1,16 | | |
| 6,5 | 65 | 36 | 4,4 | 7,2 | 6,0 | 2,5 | 7,51 | 5,90 | 48,6 | 15,0 | 2,54 | 9,00 | 8,70 | 3,68 | 1,080 | 1,24 | | |
| 8 | 80 | 40 | 4,5 | 7,4 | 6,5 | 2,5 | 8,98 | 7,05 | 89,4 | 22,4 | 3,16 | 13,30 | 12,80 | 4,75 | 1,190 | 1,31 | | |
| 10 | 100 | 46 | 4,5 | 7,6 | 7,0 | 3,0 | 10,90 | 8,59 | 174,0 | 34,8 | 3,99 | 20,40 | 20,40 | 6,46 | 1,370 | 1,44 | | |
| 12 | 120 | 52 | 4,8 | 7,8 | 7,5 | 3,0 | 13,30 | 10,40 | 304,0 | 50,6 | 4,78 | 29,60 | 31,20 | 8,52 | 1,530 | 1,54 | | |
| 14 | 140 | 58 | 4,9 | 8,1 | 8,0 | 3,0 | 15,60 | 12,30 | 491,1 | 70,2 | 5,60 | 40,80 | 45,40 | 11,00 | 1,700 | 1,67 | | |
| 14а | 140 | 62 | 4,9 | 8,7 | 8,0 | 3,0 | 17,00 | 13,30 | 545,0 | 77,8 | 5,66 | 45,10 | 57,50 | 13,30 | 1,840 | 1,87 | | |
| 16 | 160 | 64 | 5,0 | 8,4 | 8,5 | 3,5 | 18,10 | 14,20 | 747,0 | 93,4 | 6,42 | 54,10 | 63,30 | 13,80 | 1,870 | 1,80 | | |
| 16а | 160 | 68 | 5,0 | 9,0 | 8,5 | 3,5 | 19,50 | 15,30 | 823,0 | 103,0 | 6,49 | 59,40 | 78,80 | 16,40 | 2,010 | 2,00 | | |
| 18 | 180 | 70 | 5,1 | 8,7 | 9,0 | 3,5 | 20,70 | 16,30 | 1090,0 | 121,0 | 7,24 | 69,80 | 86,00 | 17,00 | 2,040 | 1,94 | | |
| 18а | 180 | 74 | 5,1 | 9,3 | 9,0 | 3,5 | 22,20 | 17,40 | 1190,0 | 132,0 | 7,32 | 76,10 | 105,00 | 20,00 | 2,180 | 2,13 | | |

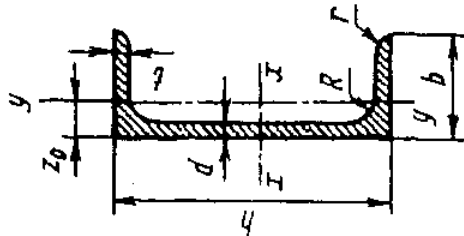
Окончание табл. П.10

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|-------|-------|---------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|------|
| 20 | 200 | 76 | 5,2 | 9,0 | 9,5 | 4,0 | 23,40 | 18,40 | 1520,0 | 152,0 | 8,07 | 87,80 | 113,00 | 20,50 | 2,200 | 2,07 |
| 20a | 200 | 80 | 5,2 | 9,7 | 9,5 | 4,0 | 25,20 | 19,80 | 1670,0 | 167,0 | 8,15 | 95,90 | 139,00 | 24,20 | 2,350 | 2,28 |
| 22 | 220 | 82 | 5,4 | 9,5 | 10,0 | 4,0 | 26,70 | 21,00 | 2110,0 | 192,0 | 8,89 | 110,00 | 151,00 | 25,10 | 2,370 | 2,21 |
| 22a | 220 | 87 | 5,4 | 10,2 | 10,0 | 4,0 | 28,80 | 22,60 | 2330,0 | 212,0 | 8,99 | 121,00 | 187,00 | 30,00 | 2,550 | 2,46 |
| 24 | 240 | 90 | 5,6 | 10,0 | 10,5 | 4,0 | 30,60 | 24,00 | 2900,0 | 242,0 | 9,73 | 139,00 | 208,00 | 31,60 | 2,600 | 2,42 |
| 24a | 240 | 95 | 5,6 | 10,7 | 10,5 | 4,0 | 32,90 | 25,80 | 3180,0 | 265,0 | 9,84 | 151,00 | 254,00 | 37,20 | 2,780 | 2,67 |
| 27 | 270 | 95 | 6,0 | 10,5 | 11,0 | 4,5 | 35,20 | 27,70 | 4160,0 | 308,0 | 10,90 | 178,00 | 262,00 | 37,30 | 2,730 | 2,47 |
| 30 | 300 | 100 | 6,5 | 11,0 | 12,0 | 5,0 | 40,50 | 31,80 | 5810,0 | 387,0 | 12,00 | 224,00 | 327,00 | 43,60 | 2,840 | 2,52 |
| 33 | 330 | 105 | 7,0 | 11,7 | 13,0 | 5,0 | 46,50 | 36,50 | 7980,0 | 484,0 | 13,10 | 281,00 | 410,00 | 51,80 | 2,970 | 2,59 |
| 36 | 360 | 110 | 7,5 | 12,6 | 14,0 | 6,0 | 53,40 | 41,90 | 10820,0 | 601,0 | 14,20 | 350,00 | 513,00 | 61,70 | 3,100 | 2,68 |
| 40 | 400 | 115 | 8,0 | 13,5 | 15,0 | 6,0 | 61,50 | 48,30 | 15220,0 | 761,0 | 15,70 | 444,0 | 642,00 | 73,40 | 3,230 | 2,75 |

Сортамент прокатной стали

Сталь горячекатаная.

Швеллеры с параллельными гранями полок. ГОСТ 8240-72



| Номер швеллера | мм | | | | | | | | | | Масса тм, кг | Справочные величины для осей | | | | | | z ₀ , см |
|----------------|-----|----|-----|-----|-----|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------|-------------------------------------|--------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------|-------|------|--|------------------------|
| | h | b | d | t | r | R | x-x | | | y-y | | | | | | | | |
| | | | | | | | J _x , см ⁴ | W _x , см ³ | i _x , см | S _x , см ³ | | J _y , см ⁴ | W _y , см ³ | i _y , см | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | | |
| 5 | 50 | 32 | 4,4 | 7,0 | 6,0 | 3,5 | 6,16 | 4,84 | 22,8 | 9,14 | 1,92 | 5,81 | 5,95 | 2,99 | 0,983 | 1,21 | | |
| 6,5 | 65 | 36 | 4,4 | 7,2 | 6,0 | 3,5 | 7,51 | 5,90 | 48,8 | 15,00 | 2,55 | 9,02 | 9,35 | 4,06 | 1,120 | 1,29 | | |
| 8 | 80 | 40 | 4,5 | 7,4 | 6,5 | 3,5 | 8,98 | 7,05 | 89,8 | 22,50 | 3,16 | 13,30 | 13,90 | 5,31 | 1,240 | 1,38 | | |
| 10 | 100 | 46 | 4,5 | 7,6 | 7,0 | 4,0 | 10,90 | 8,59 | 175,0 | 34,90 | 3,99 | 20,50 | 22,60 | 7,37 | 1,440 | 1,53 | | |
| 12 | 120 | 52 | 4,8 | 7,8 | 7,5 | 4,5 | 13,30 | 10,40 | 305,0 | 50,80 | 4,79 | 29,70 | 34,90 | 9,84 | 1,620 | 1,66 | | |
| 14 | 140 | 58 | 4,9 | 8,1 | 8,0 | 4,5 | 15,60 | 12,30 | 493,0 | 70,40 | 5,61 | 40,90 | 51,50 | 12,90 | 1,810 | 1,82 | | |
| 14a | 140 | 62 | 4,9 | 8,7 | 8,0 | 4,5 | 17,00 | 13,30 | 547,0 | 78,20 | 5,68 | 45,20 | 65,20 | 15,70 | 1,960 | 2,04 | | |
| 16 | 160 | 64 | 5,0 | 8,4 | 8,5 | 5,0 | 18,10 | 14,20 | 750,0 | 93,80 | 6,44 | 54,30 | 72,80 | 16,40 | 2,000 | 1,97 | | |
| 16a | 160 | 68 | 5,0 | 9,0 | 8,5 | 5,0 | 19,50 | 15,30 | 827,0 | 103,00 | 6,51 | 59,50 | 90,50 | 19,60 | 2,150 | 2,19 | | |
| 18 | 180 | 70 | 5,1 | 8,7 | 9,0 | 5,0 | 20,70 | 16,30 | 1090,0 | 121,00 | 7,26 | 70,00 | 100,00 | 20,60 | 2,200 | 2,14 | | |
| 18a | 180 | 74 | 5,1 | 9,3 | 9,0 | 5,0 | 22,20 | 17,40 | 1200,0 | 133,00 | 7,34 | 76,30 | 123,00 | 24,30 | 2,350 | 2,36 | | |
| 20 | 200 | 76 | 5,2 | 9,0 | 9,5 | 5,5 | 23,40 | 18,40 | 1530,0 | 153,00 | 8,08 | 88,00 | 134,00 | 25,20 | 2,390 | 2,30 | | |

Окончание табл. П.11

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|-------|-------|---------|--------|-------|--------|--------|-------|-------|------|
| 20a | 200 | 80 | 5,2 | 9,7 | 9,5 | 5,5 | 25,20 | 19,80 | 1680,0 | 168,00 | 8,17 | 96,20 | 162,00 | 29,70 | 2,540 | 2,53 |
| 22 | 220 | 82 | 5,4 | 9,5 | 10,0 | 6,0 | 26,70 | 21,00 | 2120,0 | 193,00 | 8,90 | 111,00 | 178,00 | 31,00 | 2,580 | 2,47 |
| 22a | 220 | 87 | 5,4 | 10,2 | 10,0 | 6,0 | 28,80 | 22,60 | 2340,0 | 212,00 | 9,01 | 121,00 | 220,00 | 37,00 | 2,770 | 2,75 |
| 24 | 240 | 90 | 5,6 | 10,0 | 10,5 | 6,0 | 30,60 | 24,00 | 2910,0 | 243,00 | 9,75 | 139,00 | 248,00 | 39,50 | 2,850 | 2,72 |
| 24a | 240 | 95 | 5,6 | 10,7 | 10,5 | 6,0 | 32,90 | 25,80 | 3200,0 | 266,00 | 9,86 | 152,00 | 302,00 | 46,50 | 3,030 | 3,01 |
| 27 | 270 | 95 | 6,0 | 10,5 | 11,0 | 6,5 | 35,20 | 27,70 | 4180,0 | 310,00 | 10,90 | 178,00 | 314,00 | 46,70 | 2,990 | 2,78 |
| 30 | 300 | 100 | 6,5 | 11,0 | 12,0 | 7,0 | 40,50 | 31,80 | 5830,0 | 389,00 | 12,00 | 224,00 | 393,00 | 54,80 | 3,120 | 2,83 |
| 33 | 330 | 105 | 7,0 | 11,7 | 13,0 | 7,5 | 46,50 | 36,50 | 8010,0 | 486,00 | 13,10 | 281,00 | 491,00 | 64,60 | 3,250 | 2,90 |
| 36 | 360 | 110 | 7,5 | 12,6 | 14,0 | 8,5 | 53,40 | 41,90 | 10850,0 | 603,00 | 14,30 | 350,00 | 611,00 | 76,30 | 3,380 | 2,99 |
| 40 | 400 | 115 | 8,0 | 13,5 | 15,0 | 9,0 | 61,50 | 48,30 | 15260,0 | 763,00 | 15,80 | 445,0 | 760,00 | 89,90 | 3,510 | 3,05 |

Таблица П.12

Приставки и множители для образования десятичных кратных
и дольных единиц и их наименований

| Приставка | Обозначение приставки | | Множитель |
|-----------|-----------------------|---------|------------|
| | международное | русское | |
| экса | E | Э | 10^{18} |
| пета | P | П | 10^{15} |
| тера | T | Т | 10^{12} |
| гига | G | Г | 10^9 |
| мега | M | М | 10^6 |
| кило | k | к | 10^3 |
| гекто | h | г | 10^2 |
| дека | da | да | 10^1 |
| деци | d | д | 10^{-1} |
| санти | c | с | 10^{-2} |
| милли | m | м | 10^{-3} |
| микро | μ | мк. | 10^{-6} |
| нано | n | н | 10^{-9} |
| пико | p | п | 10^{-12} |
| фемто | f | ф | 10^{-15} |
| атто | a | а | 10^{-18} |

ОТВЕТЫ

Глава I

$$\begin{aligned}
 & 1.1. \quad N_{\max} = 5qa, \quad \sigma_{\max} = 5 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{83}{6} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.2. \quad N_{\max} = 2qa, \\
 & N_{\min} = -5qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{qa}{2F}, \quad \sigma_{\min} = -5 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\min} = -\frac{22}{3} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.3. \quad N_{\max} = 3qa, \\
 & \sigma_{\max} = 2 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{29}{6} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.4. \quad N_{\max} = qa, \quad N_{\min} = -3qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{1}{3} \frac{qa}{F}, \\
 & \sigma_{\min} = -\frac{qa}{F}, \quad \delta_{\min} = -\frac{7}{4} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.5. \quad N_{\max} = 3qa, \quad N_{\min} = -qa, \quad \sigma_{\max} = 3 \frac{qa}{F}, \\
 & \sigma_{\min} = \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{9}{4} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.6. \quad N_{\max} = 3qa, \quad N_{\min} = -qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{3}{2} \frac{qa}{F}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{qa}{F}, \\
 & \delta_{\min} = -2 \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.7. \quad N_{\max} = 3qa, \quad N_{\min} = -2qa, \quad \sigma_{\max} = 3 \frac{qa}{F}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{qa}{F}, \\
 & \delta_{\max} = \frac{9}{4} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.8. \quad N_{\max} = 6qa, \quad \sigma_{\max} = 6 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{17}{2} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.9. \quad N_{\max} = 2qa, \\
 & \sigma_{\max} = 2 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{11}{4} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.10. \quad N_{\max} = 4qa, \quad N_{\min} = -2qa, \quad \sigma_{\max} = 2 \frac{qa}{F}, \\
 & \sigma_{\min} = -2 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = 2 \frac{qa^2}{EF}, \quad \delta_{\min} = -2 \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.11. \quad N_{\max} = 2qa, \quad N_{\min} = -2qa, \\
 & \sigma_{\max} = \frac{qa}{F}, \quad \sigma_{\min} = -2 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{qa^2}{EF}, \quad \delta_{\min} = -\frac{qa^2}{EF}, \quad 1.12. \quad N_{\max} = 6qa, \quad \sigma_{\max} = 6 \frac{qa}{F}, \\
 & \delta_{\max} = 9 \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.13. \quad N_{\max} = 3qa, \quad N_{\min} = -qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{3}{2} \frac{qa}{F}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{qa}{F}, \\
 & \delta_{\max} = \frac{9}{8} \frac{qa^2}{EF}, \quad \delta_{\min} = \frac{1}{2} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.14. \quad N_{\max} = qa, \quad N_{\min} = -3qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{qa}{F}, \\
 & \sigma_{\min} = -3 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{1}{8} \frac{qa^2}{EF}, \quad \delta_{\min} = -\frac{13}{4} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.15. \quad N_{\min} = -6qa, \quad \sigma_{\min} = -3 \frac{qa}{F}, \\
 & \delta_{\min} = -6 \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.16. \quad N_{\max} = 9qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{9}{2} \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = 10 \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.17. \quad N_{\max} = 5qa, \\
 & N_{\min} = -3qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{5}{2} \frac{qa}{F}, \quad \sigma_{\min} = -3 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{25}{8} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.18. \quad N_{\max} = 2qa, \\
 & N_{\min} = -3qa, \quad \sigma_{\max} = 2 \frac{qa}{F}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{3}{2} \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\min} = -\frac{9}{2} \frac{qa^2}{EF}, \quad 1.19. \quad N_{\max} = qa, \\
 & N_{\min} = -2qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{1}{2} \frac{qa}{F}, \quad \sigma_{\min} = -2 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{1}{4} \frac{qa^2}{EF}, \quad \delta_{\min} = -\frac{7}{4} \frac{qa^2}{EF}, \\
 & 1.20. \quad N_{\max} = 4qa, \quad N_{\min} = -3qa, \quad \sigma_{\max} = 2 \frac{qa}{F}, \quad \sigma_{\min} = -3 \frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = 2 \frac{qa^2}{EF}
 \end{aligned}$$

$$\delta_{\min} = -\frac{qa^2}{EF}, \quad 1.21. \quad N_{\max} = 3qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{3qa}{2F}, \quad \delta_{\max} = \frac{11qa^2}{4EF}, \quad 1.22. \quad N_{\max} = 5qa,$$

$$N_{\min} = -qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{5qa}{2F}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{25qa^2}{8EF}, \quad 1.23. \quad N_{\max} = \frac{31}{7}qa,$$

$$N_{\min} = -\frac{11}{7}qa, \quad \sigma_{\max} = \frac{31qa}{14F}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{11qa}{7F}, \quad \delta_{\max} = \frac{961qa^2}{392EF},$$

$$1.24. \quad N_{\min} = -\frac{1}{2}\alpha t_0 EF, \quad \sigma_{\min} = -\frac{1}{2}\alpha t_0 E, \quad \delta_{\min} = -\frac{9}{16}\alpha t_0 a, \quad 1.25. \quad N_{\max} = 4P,$$

$$N_{\min} = -P, \quad \delta_{\max} = 5\frac{Pl}{EF}, \quad \delta_{\min} = -\frac{1}{2}\frac{Pl}{EF}, \quad 1.26. \quad N_{\max} = \frac{8}{5}qa, \quad N_{\min} = -\frac{12}{5}qa,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{8qa}{5F}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{12qa}{5F}, \quad \delta_{\max} = \frac{96qa^2}{25EF}, \quad 1.27. \quad N_{\min} = -\frac{3}{2}\alpha\Delta t EF,$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{3}{4}\alpha\Delta t E, \quad \delta_{\max} = \frac{3}{2}\alpha\Delta t a, \quad \delta_{\min} = -\frac{3}{16}\alpha\Delta t EF, \quad 1.28. \quad F = 4,79\text{ см}^2$$

$$1.29. \quad F = 4,03\text{ см}^2 \quad 1.30. \quad F = 1,99\text{ см}^2 \quad 1.31. \quad F = 1,37\text{ см}^2 \quad 1.32. \quad F = 5\text{ см}^2$$

$$1.33. \quad a = 1/5 \quad 1.34. \quad \text{В первом.} \quad 1.35. \quad \Delta = \frac{11Pa}{4EF}, \quad 1.36. \quad N_{\max} = \frac{3}{4}qa, \quad N_{\min} = -\frac{1}{4}qa,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3qa}{4F}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{1}{4}\frac{qa}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{9qa^2}{32EF}, \quad 1.37. \quad N_{\max} = \frac{5}{3}P_0, \quad N_{\min} = -\frac{1}{3}P_0,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{5P_0}{6F}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{1}{6}\frac{P_0}{F}, \quad \delta_{\max} = \frac{5P_0 a}{6EF}, \quad 1.38. \quad P = \alpha\Delta t EF, \quad 1.39. \quad P = 400\text{ кН.}$$

$$1.40. \quad P = 240\text{ кН.} \quad 1.41. \quad l_1 = 8\text{ м.} \quad 1.42. \quad \sigma = 61,1\text{ МПа}, \quad E = 0,699 \cdot 10^7\text{ МПа.}$$

$$1.43. \quad |\sigma|_{\max} = 369\text{ МПа}, \quad |\delta|_{\max} = 0,436\text{ мм.} \quad 1.44. \quad \sigma = 133\text{ МПа.}$$

Глава 2

2.1. $N_1 = N_7 = -0,707P$, $N_3 = N_5 = 0,707P$, $N_2 = N_6 = 0,5P$, $N_4 = -P$; швеллер 8 ГОСТ 8240-72; $\delta_{\lambda}^{\text{нпр}} = 3,24\text{ мм}$. 2.2. $N_1 = N_4 = N_7 = 1,16P$, $N_3 = N_5 = -1,16P$, $N_2 = N_6 = -0,577P$; уголок 100×63×6 ГОСТ 8510-72; $\delta_{\lambda}^{\text{нпр}} = 3,82\text{ мм}$. 2.3. $N_1 = -1,12P$, $N_2 = P$, $N_3 = 0,5P$, $N_4 = -P$, $N_5 = 1,12P$; уголок 75×75×6 ГОСТ 8509-72; $\delta_{\lambda}^{\text{нпр}} = 5,60\text{ мм}$. 2.4. $N_1 = N_4 = -0,901P$; $N_3 = -P$, $N_2 = N_5 = 0,901P$; швеллер 8 ГОСТ 8240-72; $\delta_{\lambda}^{\text{нпр}} = 2,21\text{ мм}$. 2.5. $N_1 = 0,707P$, $N_2 = -0,707P$, $N_3 = -0,5P$, $N_4 = 0,5P$, $N_5 = 1,41P$, $N_6 = 0$, $N_7 = -1,5P$; уголок 80×80×8 ГОСТ 8509-72; $\delta_{\lambda}^{\text{нпр}} = 5,12\text{ мм}$. 2.6. $N_1 = P$, $N_2 = N_4 = 1,41P$, $N_3 = -2P$, $N_5 = -P$, $n = 8,24$. 2.7. $N_1 = ql$, $N_2 = 4,47ql$, $N_3 = -3ql$, $n = 8,38$. 2.8. $N_1 = 2,24P$, $N_2 = -P$, $N_3 = 4P$, $N_4 = -4,24P$, $N_5 = -1,41P$, $n = 6,19$. 2.9. $N_1 = N_2 = 2P$, $N_3 = -2,24P$, $N_4 = -2,12P$, $N_5 = 0,707P$, $n = 9,39$. 2.10. $N_1 = 1,33ql$, $N_2 = -2,67ql$, $N_3 = -1,89ql$, $n = 6,18$. 2.11. $N_1 = -2ql$, $N_2 = 2,83ql$, $N_3 = -4ql$, $N_4 = 4,47ql$, $N_5 = 2ql$, $n = 5,25$. 2.12. $N = 0,5ql$, $\delta_{\lambda} = 1,41ql^2/(EF)$, $q_{\text{дон}} = 38\text{ кН/м}$. 2.13. $N = 0,5P$, $\delta_{\lambda} = 0,559Pl/(EF)$, $P_{\text{дон}} = 85\text{ кН}$. 2.14. $N = -P$,

$$\delta_A = 1,41 Pl / (EF), \quad P_{дон} = 51 \text{ кН}. \quad 2.15. \quad N = ql, \quad \delta_A = 2,24 ql^2 / (EF),$$

$$q_{дон} = 8,6 \text{ кН/м}. \quad 2.16. \quad N = 0,5P, \quad \delta_A = 0,354 Pl / (EF), \quad P_{дон} = 26 \text{ кН}. \quad 2.17.$$

$$N = -2,24 ql, \quad \delta_A = 11,2 ql^2 / (EF), \quad q_{дон} = 3,3 \text{ кН/м}.$$

В ответах к задачам 2.18 – 2.29 приведены усилия в стержнях и перемещения точек приложения сил отдельно для силовой (индекс P) и температурной (индекс t) задач.

$$2.18. \quad F = 2 \text{ см}^2, \quad \delta = 1,30 \text{ мм}; \quad (N_1^P = 0,671P, \quad N_2^P = -1,05P,$$

$$\delta^P = 2,18 Pa / (EF); \quad N_1^t = -0,628\alpha\Delta t EF, \quad N_2^t = -0,580\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = 1,21\alpha\Delta t a).$$

$$2.19. \quad F = 2,5 \text{ см}^2, \quad \delta = 0,902 \text{ мм}; \quad (N_1^P = 0,929P, \quad N_2^P = -0,892P,$$

$$\delta^P = 1,86 Pa / (EF); \quad N_1^t = -0,535\alpha\Delta t EF, \quad N_2^t = -0,446\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = 0,929\alpha\Delta t a).$$

$$2.20. \quad F = 2 \text{ см}^2, \quad \delta = 0,363 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad (N_1^P = 0,444P, \quad N_2^P = -0,889P,$$

$$\delta^P = 1,48 Pa / (EF); \quad N_1^t = N_2^t = -0,667\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = -2,22\alpha\Delta t a).$$

$$2.21. \quad F = 1 \text{ см}^2, \quad \delta = 0,458 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad (N_1^P = N_2^P = 0,310P, \quad N_3^P = N_4^P = -0,372P,$$

$$\delta^P = 0,774 Pa / (EF), \quad N_1^t = N_2^t = -0,743\alpha\Delta t EF, \quad N_3^t = N_4^t = -1,11\alpha\Delta t EF,$$

$$\delta^t = -1,86\alpha\Delta t a). \quad 2.22. \quad F = 1,5 \text{ см}^2, \quad \delta = 0,877 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad (N_1^P = N_2^P = -0,349P,$$

$$N_3^P = N_4^P = -0,398P, \quad N_5^P = 0,442P, \quad \delta^P = 1,09 Pa / (EF); \quad N_1^t = N_2^t = -0,283\alpha\Delta t EF,$$

$$N_3^t = N_4^t = 0,408\alpha\Delta t EF, \quad N_5^t = -0,453\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = 0,884\alpha\Delta t a).$$

$$2.23. \quad F = 2 \text{ см}^2, \quad \delta = 1,10 \text{ мм}; \quad (N_1^P = -0,843P, \quad N_2^P = 0,659P,$$

$$\delta^P = 1,76 Pa / (EF); \quad N_1^t = -0,632\alpha\Delta t EF, \quad N_2^t = -0,506\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = 1,32\alpha\Delta t a).$$

$$2.24. \quad F = 2,5 \text{ см}^2, \quad \delta = 1,57 \text{ мм}; \quad (N_1^P = -0,601P, \quad N_2^P = 1,25P, \quad \delta^P = 2,60 Pa / (EF);$$

$$N_1^t = -0,721\alpha\Delta t EF, \quad N_2^t = -0,5\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = 3,12\alpha\Delta t a). \quad 2.25. \quad F = 1 \text{ см}^2,$$

$$\delta = 0,685 \text{ мм}; \quad (N_1^P = 0,609P, \quad N_2^P = 0,174P, \quad N_3^P = 0,217P, \quad \delta^P = 0,478 Pa / (EF);$$

$$N_1^t = -0,087\alpha\Delta t EF, \quad N_2^t = 0,261\alpha\Delta t EF, \quad N_3^t = -0,174\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = 1,22\alpha\Delta t a).$$

$$2.26. \quad F = 2 \text{ см}^2, \quad \delta = 0,661 \text{ мм}; \quad (N_1^P = N_2^P = -0,428P, \quad N_3^P = -0,571P,$$

$$N_4^P = N_5^P = 0,571P, \quad \delta^P = 1,71 Pa / (EF); \quad N_1^t = N_2^t = N_4^t = N_5^t = -N_3^t = 0,286\alpha\Delta t EF,$$

$$\delta^t = -1,14\alpha\Delta t a). \quad 2.27. \quad F = 3,5 \text{ см}^2, \quad \delta = 0,770 \text{ мм}; \quad (N_1^P = 1,40P, \quad N_2^P = -1,01P,$$

$$\delta^P = 4,19 Pa / (EF); \quad N_1^t = -0,838\alpha\Delta t EF, \quad N_2^t = -1,40\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = -2,51\alpha\Delta t a).$$

$$2.28. \quad F = 3 \text{ см}^2, \quad \delta = 0,792 \text{ мм}; \quad (N_1^P = -1,52P, \quad N_2^P = -0,822P, \quad \delta^P = 3,42 Pa / (EF);$$

$$N_1^t = 0,913\alpha\Delta t EF, \quad N_2^t = -0,507\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = -2,05\alpha\Delta t a). \quad 2.29. \quad F = 1,5 \text{ см}^2,$$

$$\delta = 1,18 \text{ мм}; \quad (N_1^P = -0,340P, \quad N_2^P = 0,531P, \quad \delta^P = 1,28 Pa / (EF);$$

$$N_1^t = -0,510\alpha\Delta t EF, \quad N_2^t = -0,204\alpha\Delta t EF, \quad \delta^t = 1,91\alpha\Delta t a). \quad 2.30. \quad n = 7,84,$$

$$(N_1 = -0,661P, \quad N_2 = N_3 = 0,212P). \quad 2.31. \quad n = 5,83, \quad (N_1 = 0,444P, \quad N_2 = -0,889P).$$

$$2.32. \quad n = 4,14, \quad (N_1 = 0,601P, \quad N_2 = -1,25P). \quad 2.33. \quad n = 2, \quad (N_1 = 0,340P,$$

$$N_2 = 0,960P, \quad N_{3,AB} = -0,300P, \quad N_{3,BC} = 3,70P). \quad 2.34. \quad n = 2,01, \quad (N_1 = 0,286P,$$

$$N_{2,AB} = -0,0714P, \quad N_{2,BC} = 0,928P, \quad N_3 = -1,29P). \quad 2.35. \quad n = 3,06,$$

$$(N_{1,AB} = -0,248P, \quad N_{1,BC} = 1,75P, \quad N_2 = 1,21P). \quad 2.36. \quad N_1 = N_2 = N_3 = 0,222 \Delta EF / l,$$

$$N_4 = N_5 = 0,111 \Delta EF / l, \quad \Delta \leq 0,666 \text{ мм}. \quad 2.37. \quad N_1 = 0,667 \Delta EF / l, \quad N_2 = 1,33 \Delta EF / l,$$

$$\Delta \leq 0,220 \text{ мм}. \quad 2.38. \quad N_1 = 0,329 \Delta EF / l, \quad N_2 = 0,294 \Delta EF / l, \quad \Delta \leq 0,498 \text{ мм}.$$

- 2.39. $N_1 = N_3 = 0,167 \Delta EF/l$, $N_2 = -0,333 \Delta EF/l$, $\Delta \leq 0,880 \text{ мм}$.
 2.40. $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -0,163 \Delta EF/l$, $N_5 = 0,231 \Delta EF/l$, $\Delta \leq 0,635 \text{ мм}$.
 2.41. $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 0,333 \Delta EF/l$, $\Delta \leq 0,440 \text{ мм}$.

Глава 3

3.1. – 3.12. см. § II.2.

В задачах 3.13 – 3.40 главные центральные оси лежат на оси симметрии области, другая координата считается от нижнего края сечения.

- 3.13. $z_c = 5,29b$; $J_x = 11,2b^4$; $J_y = 75,5b^4$. 3.14. $z_c = 2,03b$; $J_x = 8,98b^4$; $J_y = 15,7b^4$. 3.15. $z_c = 2,0a$; $J_x = 18,7a^4$; $J_y = 10a^4$. 3.16. $z_c = 2,12a$; $J_x = 4,0a^4$; $J_y = 6,67a^4$. 3.17. $z_c = 0,906a$; $J_x = 1,06a^4$; $J_y = 1,03a^4$. 3.18. $z_c = 1,14a$; $J_x = 10,3a^4$; $J_y = 1,91a^4$. 3.19. $z_c = 1,28b$; $J_x = 1,29b^4$; $J_y = 0,811b^4$. 3.20. $z_c = 2,40b$; $J_x = 85,0b^4$; $J_y = 79,2b^4$. 3.21. $z_c = 20,3b$; $J_x = 5,79 \cdot 10^3 b^4$; $J_y = 29,4 \cdot 10^3 b^4$. 3.22. $z_c = 0,924b$; $J_x = 1,25b^4$; $J_y = 0,611b^4$. 3.23. $z_c = 1,93b$; $J_x = 8,98b^4$; $J_y = 14,5b^4$. 3.24. $z_c = 2,83a$; $J_x = 12,2a^4$; $J_y = 21,2a^4$. 3.25. $z_c = 1,22a$; $J_x = 9,33a^4$; $J_y = 1,37a^4$. 3.26. $z_c = 3,77b$; $J_x = 89,3b^4$; $J_y = 294b^4$. 3.27. $z_c = 1,93b$; $J_x = 12,5b^4$; $J_y = 11,7b^4$. 3.28. $z_c = 4,10b$; $J_x = 201b^4$; $J_y = 189b^4$. 3.29. $z_c = 4,0b$; $J_x = 41,7b^4$; $J_y = 162b^4$. 3.30. $z_c = 1,34b$; $J_x = 35,9b^4$; $J_y = 7,92b^4$. 3.31. $z_c = 1,83b$; $J_x = 6,75b^4$; $J_y = 8,75b^4$. 3.32. $z_c = 1,27b$; $J_x = 1,5b^4$; $J_y = 2,81b^4$. 3.33. $z_c = 1,51b$; $J_x = 5,88b^4$; $J_y = 12,6b^4$. 3.34. $z_c = 2,5b$; $J_x = 6,67b^4$; $J_y = 16,7b^4$. 3.35. $z_c = 8b$; $J_x = 69,3b^4$; $J_y = 501b^4$. 3.36. $z_c = 6,84b$; $J_x = 62,2b^4$; $J_y = 329b^4$. 3.37. $z_c = 3,1b$; $J_x = 90,7b^4$; $J_y = 78,5b^4$. 3.38. $z_c = 1,29b$; $J_x = 73,7b^4$; $J_y = 13,0b^4$. 3.39. $z_c = 6,79b$; $J_x = 33,5b^4$; $J_y = 171b^4$. 3.40. $z_c = 5,61b$; $J_x = 30,3b^4$; $J_y = 156b^4$.

В задачах 3.41 – 3.69 α_0 отсчитывается от горизонтальной оси против часовой стрелки, координаты центра тяжести считаются от нижнего (y_c) и левого (z_c) края области.

- 3.41. $J_1 = \frac{bh^3}{12}$; $J_2 = \frac{hb^3}{12}$; $\alpha_0 = 0$. 3.42. $J_1 = \frac{bh^3}{36}$; $J_2 = \frac{hb^3}{12}$; $\alpha_0 = 0$.
 3.43. $J_1 = \frac{bh^3}{18}$; $J_2 = \frac{hb^3}{24}$; $\alpha_0 = 0$. 3.44. $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$. 3.45. $J_1 = 0,520a^4$; $J_2 = 0,135a^4$; $z_c = 0,467a$; $y_c = 0,906a$; $\alpha_0 = -7,13^\circ$. 3.46. $J_1 = 2,31a^4$; $J_2 = 0,880a^4$; $z_c = 0,833a$; $y_c = 1,92a$; $\alpha_0 = -29,2^\circ$. 3.47. $J_1 = 17,7b^4$; $J_2 = 6,90b^4$; $z_c = 2,22b$; $y_c = 1,25b$; $\alpha_0 = 10,1^\circ$. 3.48. $J_1 = 49,6b^4$; $J_2 = 24,4b^4$; $z_c = 2,31b$; $y_c = 3,3b$; $\alpha_0 = 14,7^\circ$. 3.49. $J_1 = 10,5b^4$; $J_2 = 4,03b^4$; $z_c = 2,5b$; $y_c = 1,21b$; $\alpha_0 = -33,4^\circ$. 3.50. $J_1 = 8,55b^4$; $J_2 = 2,23b^4$; $z_c = 1,83b$; $y_c = 0,937b$; $\alpha_0 = 7,1^\circ$.

3.51. $J_1 = 5,34b^4$; $J_2 = 1,30b^4$; $z_c = 0,8b$; $y_c = 2,0b$; $\alpha_0 = -24,0^\circ$. 3.52. $y_0 = 1,2|a$.
 3.53. $b = 5,70$ см. 3.54. $b = 1,93$ см. 3.55. $J_1 = 5,40$ см⁴; $J_2 = 2,10$ см⁴; $\alpha_0 = 33,0^\circ$.
 3.56. $z_c = 1,85b$; $y_c = 1,41b$; $\alpha_0 = -10,1^\circ$. 3.57. $z_c = 1,84b$; $y_c = 1,43b$; $\alpha_0 = -10,7^\circ$.
 3.58. $z_c = 1,39b$; $y_c = 1,53b$; $\alpha_0 = -36,3^\circ$. 3.59. $z_c = 1,5b$; $y_c = 1,72b$; $\alpha_0 = -38,7^\circ$.
 3.60. $z_c = 2,0b$; $y_c = 1,88b$; $\alpha_0 = 16,5^\circ$. 3.61. $z_c = 2,0b$; $y_c = 2,21b$; $\alpha_0 = 19,6^\circ$.
 3.62. $z_c = 0,847b$; $y_c = 1,38b$; $\alpha_0 = -20,1^\circ$. 3.63. $z_c = 1,03b$; $y_c = 1,85b$; $\alpha_0 = 3,21^\circ$.
 3.64. $z_c = 1,95b$; $y_c = 1,78b$; $\alpha_0 = -34,2^\circ$. 3.65. $z_c = 2,31b$; $y_c = 0,893b$; $\alpha_0 = -1,02^\circ$.
 3.66. $z_c = 3,18b$; $y_c = 1,81b$; $\alpha_0 = -6,34^\circ$. 3.67. $z_c = 2,99b$; $y_c = 2,12b$; $\alpha_0 = 2,71^\circ$.
 3.68. $z_c = 1,90b$; $y_c = 1,35b$; $\alpha_0 = -9,44^\circ$. 3.69. $z_c = 1,42b$; $y_c = 2,97b$; $\alpha_0 = 33,8^\circ$.
 3.70. $z_c = 1,13b$; $y_c = 0,667b$; $\alpha_0 = -23,1^\circ$. 3.71. – 3.76. см. § П.2.

В задачах 3.77 – 3.85 главные центральные оси лежат на оси симметрии области, другая координата считается от нижнего или левого края сечения.

3.77. $J_z = 4,24\delta a^3$; $J_y = 5,61\delta a^3$; $y_c = 0,934a$; $\alpha_0 = 0^\circ$.
 3.78. $J_z = 6,24\delta b^3$; $J_y = 13,5\delta b^3$; $z_c = 1,34b$; $\alpha_0 = 0^\circ$. 3.79. $J_1 = 0,271\delta a^3$; $J_2 = 0,0210\delta a^3$; $\alpha_0 = 45^\circ$. 3.80. $J_z = 0,583\delta a^3$; $J_y = 2,75\delta a^3$; $\alpha_0 = 0^\circ$.
 3.81. $J_1 = 3,60\delta b^3$; $J_2 = 0,814\delta b^3$; $\alpha_0 = -12,7^\circ$. 3.82. $J_z = 4,15\delta a^3$; $J_y = 8,28\delta a^3$; $\alpha_0 = 0^\circ$.
 3.83. $J_z = 4,90\delta a^3$; $J_y = 6,68\delta a^3$; $\alpha_0 = 0^\circ$. 3.84. $J_z = 3,57\delta a^3$; $J_y = 4,59\delta a^3$; $\alpha_0 = 0^\circ$.
 3.85. $J_z = 43,2\delta a^3$; $J_y = 8,71\delta a^3$; $\alpha_0 = 0^\circ$.

Глава 4

4.1. $\varphi_{\max} = 7,79^\circ$. 4.2. $U = 2,47$ Дж; $\varphi_{\max} = 0,630^\circ$. 4.3. $\varphi_{\max} = 24,6^\circ$.
 4.4. $M_{\max} = 2$ ма; $\tau_{\max} = 10 \frac{ma}{d^3}$; $\varphi_{\max} = 21,7 \frac{ma^2}{Gd^4}$. 4.5. $d = 10,6$ мм; $\varphi_{\max} = 9,28^\circ$.
 4.6. $D = 97,8$ мм. 4.7. $d = 40,4$ мм. 4.8. $d = 160$ мм; $D = 200$ мм. 4.9. $\frac{M_1}{M_2} = 0,590$.
 4.10. 533 раза. 4.11. $d = 57,1$ мм. 4.12. $\tau_{\max 1} / \tau_{\max 2} = 10$; $\theta_1 / \theta_2 = 40$.
 4.13. $[\tau] / \tau_{\max} = 1,19$; $[\theta] / \theta = 0,812$. 4.14. $\tau_{\max} = 52,7$ МПа; $G = 8,05 \cdot 10^4$ МПа.
 4.15. $\delta = 32,1$ мм. 4.16. $d = 105$ мм. 4.17. $\tau_{\max} = 65,6$ МПа; $\theta = 1,18^\circ / \text{м}$.
 4.18. $D/d = 1,09$. 4.19. $h = 187$ мм. 4.20. 1:1,2:1,45. 4.21. 1:1,06:1,33.
 4.22. $h = 0,383$ м. 4.23. $h = 0,112$ м. 4.24. $b = 74,2$ мм; $\varphi = 17,5^\circ$.
 4.25. $M_1 = 5,18$ кН·м; $\frac{M_1}{M_2} = 0,750$. 4.26. $\tau_{\max} = 47,6$ МПа. 4.27. $\tau_{\max 1} = 25,3$ МПа;
 $\tau_{\max 2} = 11,5$ МПа; $\varphi_{\max} = 1,38^\circ$. 4.28. $M = 22,5$ кН·м; $\varphi_{\max} = 2,86^\circ$.
 4.29. $\tau_{\max} = 74,9$ кПа; $\varphi_{\max} = 0,00114^\circ$. 4.30. $m = 1,07$ кН. 4.31. $\varphi_d = 0,00415^\circ$.
 4.32. $d = 11,5$ мм. 4.33. $\tau_{\max} = 37,7$ МПа. 4.34. $M_2 / M_1 = 3,0$. 4.35. $m = 1,04$ кН.
 4.36. $\tau_1 = 37,5$ МПа; $\tau_2 = 50,2$ МПа. 4.37. $d = 37,8$ мм; $\varphi_{\max} = 1,81^\circ$.
 4.38. $m = 11,9$ кН. 4.39. $x_0 = 1,32a$. 4.40. $n = 2,65$.

- 5.1. $Q_{y,\max} = \frac{15}{8}qa$, $Q_{y,\min} = -\frac{9}{8}qa$, $M_{z,\max} = \frac{18}{8}qa^2$, $M_{z,\min} = -qa^2$.
- 5.2. $Q_{y,\max} = \frac{1}{2}qa$, $Q_{y,\min} = -\frac{1}{2}qa$, $M_{z,\max} = \frac{1}{3}qa^2$, $M_{z,\min} = -\frac{1}{6}qa^2$.
- 5.3. $Q_{y,\max} = \frac{5}{6}qa$, $Q_{y,\min} = -\frac{2}{3}qa$, $M_{z,\max} = qa^2$, $M_{z,\min} = -\frac{1}{6}qa^2$.
- 5.4. $Q_{y,\max} = \frac{3}{2}qa$, $Q_{y,\min} = -\frac{3}{2}qa$, $M_{z,\max} = \frac{3}{2}qa^2$. 5.5. $Q_{y,\max} = \frac{1}{3}qa$,
 $M_{z,\max} = \frac{4}{3}qa^2$, $M_{z,\min} = -\frac{5}{3}qa^2$. 5.6. $Q_{y,\max} = \frac{5}{12}qa$, $Q_{y,\min} = -\frac{7}{12}qa$,
 $M_{z,\max} = \frac{25}{288}qa^2$, $M_{z,\min} = -qa^2$. 5.7. $Q_{y,\max} = qa$, $Q_{y,\min} = -2qa$,
 $M_{z,\max} = 1,15qa^2$, $M_{z,\min} = -1,5qa^2$. 5.8. $Q_{y,\max} = \frac{1}{2}qa$, $Q_{y,\min} = -\frac{3}{2}qa$,
 $M_{z,\max} = \frac{9}{8}qa^2$. 5.9. $Q_{y,\max} = 2qa$, $Q_{y,\min} = -qa$, $M_{z,\max} = qa^2$, $M_{z,\min} = -\frac{1}{2}qa^2$.
- 5.10. $Q_{y,\max} = \frac{5}{9}q_0a$, $Q_{y,\min} = -\frac{4}{9}q_0a$, $M_{z,\max} = \frac{5}{9}q_0a^2$. 5.11. $Q_{y,\max} = 2q_0a$,
 $M_{z,\min} = -\frac{5}{6}q_0a^2$. 5.12. $Q_{y,\max} = \frac{19}{3}q_0a$, $Q_{y,\min} = -\frac{17}{3}q_0a$, $M_{z,\max} = \frac{151}{45}q_0a^2$,
 $M_{z,\min} = -\frac{5}{3}q_0a^2$. 5.13. $|Q_y|_{\max} = \frac{1}{6}q_0a$, $|M_z|_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{108}q_0a^2$. 5.14. $|Q_y|_{\max} = 40$ кН,
 $|M_z|_{\max} = 80$ кН·м. 5.15. $|Q_y|_{\max} = 20$ кН, $|M_z|_{\max} = 40$ кН·м.
- 5.16. $|Q_y|_{\max} = 40$ кН, $|M_z|_{\max} = 40$ кН·м. 5.17. $|Q_y|_{\max} = 60$ кН,
 $|M_z|_{\max} = 120$ кН·м. 5.18. $|Q_y|_{\max} = 20$ кН, $|M_z|_{\max} = 30$ кН·м.
- 5.19. $|Q_y|_{\max} = 20$ кН, $|M_z|_{\max} = 20$ кН·м. 5.20. $|Q_y|_{\max} = 30$ кН,
 $|M_z|_{\max} = 80$ кН·м. 5.21. $|Q_y|_{\max} = 50$ кН, $|M_z|_{\max} = 62,5$ кН·м.
- 5.22. $|Q_y|_{\max} = 30$ кН, $|M_z|_{\max} = 80$ кН·м. 5.23. $|Q_y|_{\max} = 20$ кН,
 $|M_z|_{\max} = 50$ кН·м. 5.24. $|Q_y|_{\max} = 23,3$ кН, $|M_z|_{\max} = 33,3$ кН·м.
- 5.25. $|Q_y|_{\max} = 22,5$ кН, $|M_z|_{\max} = 17,4$ кН·м. 5.26. $a = 0,536l$. 5.27. $a = 0,250l$.
- 5.28. $b = 7,84$ см, двугавр № 20 (ГОСТ 84240-72). 5.29. $b = 2,30$ см.
- 5.30. $y_{\min} = -\frac{5}{384} \frac{qa^4}{EJ_z}$, $|\theta| = \frac{qa^3}{24EJ_z}$. 5.31. $\delta = -\frac{11}{120} \frac{qa^4}{EJ_z}$, $\theta = -\frac{5}{24} \frac{qa^3}{EJ_z}$.
- 5.32. $EJ_z y = m \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3a} + \frac{1}{6}ax \right)$. 5.33. $\theta = -\frac{2}{3} \frac{qa^3}{EJ_z}$, $\delta = 0$. 5.34. $\theta = 0$,
 $\delta = -\frac{2}{3} \frac{Pa^3}{EJ_z}$. 5.35. $\theta = -\frac{1}{2} \frac{Pa^2}{EJ_z}$, $\delta = -\frac{1}{6} \frac{Pa^2(3l-a)}{EJ_z}$. 5.36. $\theta = -\frac{1}{6} \frac{qa^3}{EJ_z}$.

$$\delta = -\frac{1}{24} \frac{qa^3(3a+4b)}{EJ_z} \quad 5.37. \quad \theta_A = -\theta_B = -0,001 \text{ рад}, \quad \delta = -0,062 \text{ см.}$$

$$5.38. \quad \theta_A = -0,0097 \text{ рад}, \quad \theta_B = -0,0127 \text{ рад}, \quad \delta = -1,94 \text{ см.}$$

$$5.39. \quad \theta_A = -\theta_B = -0,0094 \text{ рад}, \quad \delta = -1,04 \text{ см.} \quad 5.40. \quad \theta_A = \frac{Pal}{3EJ}, \quad \theta_B = -\frac{2Pal}{3EJ},$$

$$\delta_D = -\frac{Pa^2(2l+a)}{3EJ} \quad 5.41. \quad \theta_A = \frac{Pal}{6EJ}, \quad \theta_B = -\frac{Pal}{3EJ}, \quad \delta_D = -\frac{Pa^2(l+a)}{3EJ}$$

$$5.42. \quad \theta_A = \frac{qa^3l}{12EJ}, \quad \theta_B = -\frac{qa^3l}{12EJ}, \quad \delta_D = -\frac{qa^3(4l+3a)}{24EJ}$$

$$5.43. \quad y(x) = \frac{qx^2}{240EJl} (-7l^3 + 9ql^2x - 2x^3) \quad 5.44. \quad y(x) = \frac{qx}{120EJl} (-l^3 + 2l^2x^2 - x^3)l$$

$$5.45. \quad y(x) = \frac{qx}{24EJ} \left(-\frac{11}{2}a^3 + \frac{67}{54}ax^2 - x^3 \right) \quad 0 \leq x \leq a;$$

$$y(x) = \frac{qa}{4EJ} \left(\frac{13}{6}a^3 - \frac{67}{12}a^2x + 3ax^2 - \frac{149}{216}x^3 \right) \quad a \leq x \leq 3a.$$

$$5.46. \quad y(x) = \frac{\alpha l}{h} \left(x^2 - \frac{x^3}{3a} - \frac{2}{3}ax \right). \quad 5.47. \quad y(x) = \frac{\alpha l}{h} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{a^2}{6} \right).$$

$$5.48. \quad y(x) = \frac{\alpha l}{h} \left(-x^2 + \frac{x^3}{3a} \right). \quad 5.49. \quad \text{№12.} \quad 5.50. \quad \sigma_{\max} = 138 \text{ МПа}, \quad \tau_{\max} = 14 \text{ МПа.}$$

$$5.51. \quad \sigma = 4,16 \text{ МПа.} \quad 5.52. \quad \text{№10.} \quad 5.53. \quad b = 7,10 \text{ см.} \quad 5.54. \quad \text{№30.} \quad 5.55. \quad \text{№33.}$$

$$5.56. \quad b = 9a. \quad 5.57. \quad \tau_{\max} = \frac{19 Q_y b^2}{2 J_z}, \quad l = 2b. \quad 5.58. \quad \tau_{\max} = \frac{25 Q_y b^2}{8 J_z}, \quad l = 0,270b.$$

$$5.59. \quad \tau_{\max} = 76,3 \text{ МПа}, \quad l = -64,8 \text{ см.} \quad 5.60. \quad \tau_{\max} = 63 \text{ МПа}, \quad l = -17,2 \text{ см.}$$

$$5.61. \quad \tau_{\max} = \frac{5 Q_y a^2}{2 J_z}, \quad l = 0,115a \quad 5.62. \quad \tau_{\max} = \frac{Q_y}{1,6b\delta}, \quad l = \frac{2b^4\delta}{I_z} = 1,27b.$$

$$5.63. \quad \tau_{\max} = \frac{Q_y}{2,5b\delta}, \quad l = 1,07b. \quad 5.64. \quad \tau_{\max} = \frac{3Q_y(4b+h)}{2hb(6b+h)}, \quad l = \frac{3b^2}{6b+h}$$

$$5.65. \quad \tau_{\max} = \frac{3 Q_y}{4 a\delta \sin \alpha}, \quad l = -\frac{3}{2}a \cos \alpha \quad 5.66. \quad \tau_{\max} = \frac{3 Q_y}{4 b\delta} \frac{3+7 \sin \alpha}{7+10 \sin \alpha},$$

$$l = \frac{b}{7+10 \sin \alpha} \quad 5.67. \quad \tau_{\max} = \frac{3 Q_y}{2 b\delta} \frac{1+\sin \alpha}{4+3 \sin \alpha}, \quad l = -b \left(\frac{2+3 \sin \alpha}{4+3 \sin \alpha} + 2 + \text{ctg} \alpha \right).$$

$$5.68. \quad \tau_{\max} = 0,170 \frac{Q_z}{b\delta} \quad 5.69. \quad \tau_{\max} = \frac{3Q_z}{8b\delta} \quad 5.70. \quad \tau_{\max} = 0,280 \frac{Q_z}{a\delta}$$

$$5.71. \quad \tau_{\max} = 0,280 \frac{Q_z}{a\delta} \quad 5.72. \quad \tau_{\max} = \frac{\sqrt{3} Q_z a^2}{4 J_y} \quad 5.73. \quad \tau_{\max} = 0,770 \frac{Q_z}{b\delta}$$

$$5.74. \quad \tau_{\max} = 0,590 \frac{Q_z}{b\delta} \quad 5.75. \quad \tau_{\max} = \frac{3Q_z(h+b)^2}{2b\delta(2b+h)(b+2h)} \quad 5.76. \quad \tau_{\max} = \frac{3Q_z}{8a\delta \cos \alpha}$$

$$5.77. \quad \tau_{\max} = \frac{Q_z}{b\delta} \left[\left(2 + \frac{\text{ctg} \alpha}{2} - \frac{4 + \text{ctg} \alpha + 3 \sin \alpha}{2 + 10 \sin \alpha} \right) \sin \alpha + \frac{1}{2} \left(2 - \frac{4 + \text{ctg} \alpha + 3 \sin \alpha}{2 + 10 \sin \alpha} \right)^2 \right]$$

$$\left[2 \left(\frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha}{12 \cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \left(2 + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2} \right)^2 + 3 \right) - \frac{(4 + \operatorname{ctg} \alpha + 3 \sin \alpha)^2}{(2 + 10 \sin \alpha) \sin \alpha} \right]$$

$$5.78. \quad \tau_{\max} = \frac{Q_z}{b\delta} \left[\frac{1}{\sin \alpha} \left(1 + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] / \left[4 \left(\frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha}{12 \cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \left(1 + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$5.79. \quad \tau_{\max} = 67,2 \text{ МПа}, \quad l = 8,71 \text{ см.} \quad 5.80. \quad \tau_{\max} = 0,144 \frac{Q_y}{b^2}. \quad 5.81. \quad \tau_{\max} = 0,042 \frac{Q_y}{b^2}.$$

$$5.82. \quad \tau_{\max} = 0,10 \frac{Q_y}{b^2}.$$

Глава 6

- 6.1. $k_n = 0,445$; $z_0 = 1,5b$; $y_0 = -1,1b$. 6.2. $\sigma = 134 \text{ МПа}$.
 6.3. $\sigma_p = 101 \text{ МПа}$; $\sigma_c = 99,0 \text{ МПа}$. 6.4. $\sigma_p/\sigma_c = 0,830$. 6.5. $n = 1,65$.
 6.6. $n = 1,07$. 6.7. $b = 3,5 \text{ см}$. 6.8. $\alpha = 53,1^\circ$. 6.9. $k_n = -0,292$; $z_0 = -1,41b$;
 $y_0 = -1,21b$. 6.10. $k_n = -0,885$; $\sigma = 90 \text{ МПа}$. 6.11. $\sigma_p = 217 \text{ МПа}$,
 $\sigma_c = 249 \text{ МПа}$. 6.12. $n = 1,37$. 6.13. $n = 1,16$. 6.14. $M = 0,230 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
 6.15. $1,40 \text{ см}$. 6.16. $k_n = -0,286$; $z_0 = -0,667b$; $y_0 = -b$. 6.17. $\sigma_c = 199 \text{ МПа}$.
 6.18. $\sigma_p = 115 \text{ МПа}$, $\sigma_c = 130 \text{ МПа}$. 6.19. $n = 1,32$. 6.20. $n = 1,18$.
 6.21. $b = 3,2 \text{ см}$. 6.22. $M = 30,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$. 6.23. $k_n = 0,385$; $z_0 = -0,203b$; $y_0 = 1,33b$.
 6.24. $\sigma = 17,1 \text{ МПа}$. 6.25. $\sigma_p = \sigma_c = 157 \text{ МПа}$. 6.26. $n = 1,69$. 6.27. $n = 1,26$.
 6.28. $\delta = 2,0 \text{ мм}$. 6.29. $2,0 \text{ см}$. 6.30. $\sigma = 92,8 \text{ МПа}$. 6.31. $\sigma_p = 197 \text{ МПа}$,
 $\sigma_c = 225 \text{ МПа}$. 6.32. $n = 3,31$. 6.33. $\sigma = 151 \text{ МПа}$. 6.34. $\sigma_p = 78,0 \text{ МПа}$;
 $\sigma_c = 134 \text{ МПа}$. 6.35. $n = 1,32$. 6.36. $\sigma = 120 \text{ МПа}$. 6.37. $\sigma = 150 \text{ МПа}$.
 6.38. $\sigma = 192 \text{ МПа}$. 6.39. $\sigma = 167 \text{ МПа}$. 6.40. $\sigma = 167 \text{ МПа}$. 6.41. $\sigma = 74,1 \text{ МПа}$.
 6.42. $\sigma = 150 \text{ МПа}$. 6.43. $\sigma = 188 \text{ МПа}$. 6.44. $\sigma = 83,3 \text{ МПа}$. 6.45. $\sigma = 204 \text{ МПа}$.
 6.46. $\sigma = 96,7 \text{ МПа}$; $z_0 = 0$; $y_0 = 2,83 \text{ см}$. 6.47. $\sigma_p = 121 \text{ МПа}$, $\sigma_c = 79,2 \text{ МПа}$.
 6.48. $n = 1,08$. 6.49. $n = 1,29$. 6.50. $n = 1,11$. 6.51. $\sigma_p = 176 \text{ МПа}$, $\sigma_c = 133 \text{ МПа}$.
 6.52. $\sigma = 57,9 \text{ МПа}$; $\sigma = 27,9 \text{ МПа}$. 6.53. $\sigma_p = 50 \text{ МПа}$, $\sigma_c = 16,7 \text{ МПа}$.
 6.54. $\sigma = 101 \text{ МПа}$. 6.55. $\sigma_p = 101 \text{ МПа}$, $\sigma_c = 74,6 \text{ МПа}$. 6.56. $n = 1,70$.
 6.57. $\sigma = 52,0 \text{ МПа}$. 6.58. $\sigma_p = 332 \text{ МПа}$; $\sigma_c = 31,8 \text{ МПа}$. 6.59. $\sigma = 244 \text{ МПа}$.
 6.60. $r = 0,186b$. 6.61. $r = 0,181b$. 6.62. $r = 0,249b$. 6.63. $r = 0,548b$.
 6.64. $r = 0,108b$. 6.65. $r = 0,427b$. 6.66. $r = 0,129b$.

Глава 7

$$7.1. \quad |N_x|_{\max} = qa, \quad |Q_y|_{\max} = qa, \quad |M_z|_{\max} = qa^2. \quad 7.2. \quad |N_x|_{\max} = \frac{3}{4} qa,$$

$$|Q_y|_{\max} = qa, \quad |M_z|_{\max} = \frac{1}{2} qa^2. \quad 7.3. \quad |N_x|_{\max} = qa, \quad |Q_y|_{\max} = qa, \quad |M_z|_{\max} = \frac{5}{2} qa^2.$$

7.4. $|N_x|_{\max} = P$, $|Q_y|_{\max} = P$, $|M_z|_{\max} = Pa$ 7.5. $|N_x|_{\max} = \frac{4}{3}qa$, $|Q_y|_{\max} = \frac{4}{3}qa$,
 $|M_z|_{\max} = \frac{4}{3}qa^2$ 7.6. $|N_x|_{\max} = qa$, $|Q_y|_{\max} = qa$, $|M_z|_{\max} = qa^2$ 7.7. $|N_x|_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}qa$,
 $|Q_y|_{\max} = \frac{3}{2}qa$, $|M_z|_{\max} = \frac{9}{8}qa^2$ 7.8. $|N_x|_{\max} = \frac{4}{3}qa$, $|Q_y|_{\max} = \frac{4}{3}qa$, $|M_z|_{\max} = \frac{2}{3}qa^2$.
 7.9. $|N_x|_{\max} = P$, $|Q_y|_{\max} = P$, $|M_z|_{\max} = 2Pa$ 7.10. $|N_x|_{\max} = P$, $|Q_y|_{\max} = P$,
 $|M_z|_{\max} = Pa$ 7.11. $|N_x|_{\max} = \frac{1}{6}qa$, $|Q_y|_{\max} = \frac{5}{6}qa$, $|M_z|_{\max} = \frac{25}{72}qa^2$.
 7.12. $|N_x|_{\max} = 0,707P$; $|Q_y|_{\max} = 0,707P$; $|M_z|_{\max} = 2Pa$ 7.13. $|N_x|_{\max} = \frac{1}{2}\frac{m}{a}$,
 $|Q_y|_{\max} = \frac{1}{2}\frac{m}{a}$, $|M_z|_{\max} = m$ 7.14. $|N_x|_{\max} = \frac{1}{8}\frac{M}{a}$, $|Q_y|_{\max} = \frac{1}{8}\frac{M}{a}$, $|M_z|_{\max} = \frac{3}{4}M$.
 7.15. $|N_x|_{\max} = \frac{m}{a}$, $|Q_y|_{\max} = \frac{m}{a}$, $|M_z|_{\max} = m$ 7.16. $|N_x|_{\max} = qa$, $|Q_y|_{\max} = qa$,
 $|Q_z|_{\max} = qa$, $|M_x|_{\max} = 2qa^2$, $|M_y|_{\max} = 2qa^2$, $|M_z|_{\max} = 3qa^2$ 7.17. $|N_x|_{\max} = qa$,
 $|Q_y|_{\max} = qa$, $|Q_z|_{\max} = qa$, $|M_x|_{\max} = qa^2$, $|M_y|_{\max} = 3qa^2$, $|M_z|_{\max} = qa^2$.
 7.18. $|N_x|_{\max} = qa$, $|Q_y|_{\max} = qa$, $|Q_z|_{\max} = qa$, $|M_x|_{\max} = \frac{3}{2}qa^2$, $|M_y|_{\max} = \frac{3}{2}qa^2$,
 $|M_z|_{\max} = qa^2$ 7.19. $|N_x|_{\max} = qa$, $|Q_y|_{\max} = qa$, $|Q_z|_{\max} = qa$, $|M_x|_{\max} = \frac{3}{2}qa^2$,
 $|M_y|_{\max} = 2qa^2$, $|M_z|_{\max} = 2qa^2$ 7.20. $|N_x|_{\max} = qa$, $|Q_y|_{\max} = qa$, $|Q_z|_{\max} = qa$,
 $|M_x|_{\max} = 2qa^2$, $|M_y|_{\max} = 2qa^2$, $|M_z|_{\max} = qa^2$ 7.21. $|N_x|_{\max} = qa$, $|Q_y|_{\max} = qa$,
 $|Q_z|_{\max} = qa$, $|M_x|_{\max} = 2qa^2$, $|M_y|_{\max} = 2qa^2$, $|M_z|_{\max} = 3qa^2$ 7.22. $|N_x|_{\max} = qa$,
 $|Q_y|_{\max} = qa$, $|Q_z|_{\max} = qa$, $|M_x|_{\max} = \frac{3}{2}qa^2$, $|M_y|_{\max} = \frac{3}{2}qa^2$, $|M_z|_{\max} = 2qa^2$.
 7.23. $|N_x|_{\max} = qa$, $|Q_y|_{\max} = qa$, $|Q_z|_{\max} = qa$, $|M_x|_{\max} = 2qa^2$, $|M_y|_{\max} = 2qa^2$,
 $|M_z|_{\max} = 2qa^2$ 7.24. $|N_x|_{\max} = qa$, $|Q_y|_{\max} = qa$, $|Q_z|_{\max} = qa$, $|M_x|_{\max} = qa^2$,
 $|M_y|_{\max} = 2qa^2$, $|M_z|_{\max} = qa^2$ 7.25. $|N_x|_{\max} = qa$, $|Q_y|_{\max} = qa$, $|Q_z|_{\max} = qa$,
 $|M_x|_{\max} = qa^2$, $|M_y|_{\max} = 2qa^2$, $|M_z|_{\max} = 2qa^2$ 7.26. $\delta_{A,x} = 0$, $\delta_{A,y} = (2 + \sqrt{2})\frac{Pa}{EF}$.
 7.27. $\delta_{A,x} = \frac{3}{8}\frac{Pa}{EF}$, $\delta_{A,y} = -\frac{3\sqrt{3}}{16}\frac{Pa}{EF}$ 7.28. $\theta_B = -\frac{2Ma}{3EJ_z}$ 7.29. $\delta_A = -\frac{Pa^3}{EJ_z}$.
 7.30. $\theta_B = -\frac{4Pa^2}{EJ_z}$ 7.31. $\theta_B = -\frac{4Pa^2}{3EJ_z}$ 7.32. $\delta_A = -\frac{25qa^4}{4EJ_z}$ 7.33. $\delta_A = -\frac{25qa^4}{12EJ_z}$.
 7.34. $\delta_A = \frac{53qa^4}{72EJ_z}$ 7.35. $\delta_A = \frac{1ma^2}{8EJ_z}$ 7.36. $\theta_B = \frac{131qa^3}{96EJ_z}$ 7.37. $\delta_A = \frac{251qa^4}{96EJ_z}$.
 7.38. $\theta_B = \frac{5ql^3}{2EJ_z}$ 7.39. $\delta_A = \frac{25ql^4}{18EJ_z}$ 7.40. $\theta_B = \frac{21qa^3}{16EJ_z}$ 7.41. $\theta_B = 0$.

$$\begin{aligned}
7.42. \theta_B &= -\frac{1}{3} \frac{qa^3}{EJ_z} & 7.43. \delta_A &= \frac{31}{15} \frac{qa^4}{EJ_z} & 7.44. \delta_A &= \frac{43}{48} \frac{qa^4}{EJ_z} & 7.45. \delta_A &= -\frac{1}{9} \frac{qa^4}{EJ_z} \\
7.46. \delta_A &= \frac{115}{96} \frac{qa^4}{EJ_z} & 7.47. \theta_B &= -\frac{1}{27} \frac{qa^3}{EJ_z} & 7.48. \delta_A &= \frac{17}{12} \frac{qa^4}{EJ_z} & 7.49. \theta_B &= -\frac{199}{40} \frac{qa^3}{EJ_z} \\
7.50. \theta_B &= -0,833 \frac{qa^3}{EJ_z} & 7.51. \delta_{A,x} &= -\frac{5}{6} \frac{qa^4}{EJ_z}, \delta_{A,y} &= -\frac{23}{24} \frac{qa^4}{EJ_z} & 7.52. \delta_{A,x} &= \frac{5}{2} \frac{qa^4}{EJ_z} \\
\delta_{A,y} &= -\frac{209}{24} \frac{qa^4}{EJ_z} & 7.53. \theta_B &= -0,833 \frac{Pa^2}{EJ_z} & 7.54. \delta_{A,x} &= -\frac{16}{27} \frac{qa^4}{EJ_z}, \delta_{A,y} &= -\frac{22}{27} \frac{qa^4}{EJ_z} \\
7.55. \delta_{A,x} &= -\frac{3}{10} \frac{qa^4}{EJ_z}, \delta_{A,y} &= -\frac{17}{20} \frac{qa^4}{EJ_z} & 7.56. \delta_{A,x} &= -\frac{8}{9} \frac{qa^4}{EJ_z}, \delta_{A,y} &= \frac{8}{9} \frac{qa^4}{EJ_z} \\
7.57. \delta_{A,x} &= -\frac{20}{27} \frac{qa^4}{EJ_z}, \delta_{A,y} &= \frac{2}{27} \frac{qa^4}{EJ_z} & 7.58. \theta_B &= -\frac{4}{3} \frac{Pa^2}{EJ_z} & 7.59. \delta_{A,x} &= \frac{\pi Pa^3}{EJ_z} \\
\delta_{A,y} &= 0 & 7.60. \theta_B &= 0,461 \frac{qa^3}{EJ_z} & 7.61. \delta_{A,x} &= -3,12 \frac{Pa^3}{EJ_z}, \delta_{A,y} &= -3,14 \frac{Pa^2}{EJ_z} \\
7.62. \delta_{A,x} &= -0,072 \frac{Ma^2}{EJ_z}, \delta_{A,y} &= 0 & 7.63. \theta_B &= 1,10 \frac{Ma}{EJ_z} & 7.64. \theta_B &= 1,95 \frac{Ma}{EJ_z}
\end{aligned}$$

$$7.65. \delta_B = qa^4 \left[-\frac{5}{6(EJ_z)_{BD}} + \frac{4}{3(EJ_z)_{DC}} - \frac{2}{(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.66. \delta_B = qa^4 \left[\frac{1}{(EJ_z)_{BD}} - \frac{1}{2(EJ_z)_{DC}} + \frac{2}{(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.67. \delta_B = \frac{qa^4}{2} \left[\frac{5}{3(EJ_y)_{BD}} - \frac{1}{6(EJ_y)_{DC}} + \frac{3}{(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.68. \delta_B = qa^4 \left[-\frac{1}{3(EJ_y)_{BD}} - \frac{1}{3(EJ_y)_{DC}} - \frac{2}{(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.69. \delta_B = qa^4 \left[\frac{8}{3(EJ_y)_{BD}} + \frac{1}{12(EJ_y)_{DC}} + \frac{4}{(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.70. \delta_B = qa^4 \left[-\frac{1}{4(EJ_y)_{BD}} - \frac{1}{(EJ_z)_{DC}} - \frac{1}{2(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.71. \delta_B = qa^4 \left[\frac{5}{3(EJ_z)_{BD}} + \frac{1}{6(EJ_y)_{DC}} + \frac{3}{(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.72. \delta_B = qa^4 \left[\frac{1}{2(EJ_z)_{BD}} - \frac{1}{(EJ_z)_{DC}} + \frac{1}{(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.73. \delta_B = \frac{qa^4}{2} \left[\frac{1}{2(EJ_z)_{BD}} + \frac{1}{(EJ_z)_{DC}} + \frac{1}{(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.74. \delta_E = \frac{qa^4}{2} \left[-\frac{1}{2(EJ_y)_{ED}} + \frac{1}{(EJ_y)_{DC}} - \frac{1}{(GJ_x)_{DC}} \right]$$

$$7.75. \delta_y = -4 \frac{Pl^3}{Eb^4}, \quad \delta_z = -\frac{Pl^3}{Eb^4} \quad 7.76. \delta_y = \frac{7 Pl^3}{4 Eb^4}, \quad \delta_z = -16 \frac{Pl^3}{Eb^4}$$

$$7.77. \delta_y = -\frac{1 Pl^3}{2 Eb^4}, \quad \delta_z = -16 \frac{Pl^3}{Eb^4} \quad 7.78. \delta_y = -\frac{7 Pl^3}{4 Eb^4}, \quad \delta_z = 2 \frac{Pl^3}{Eb^4}$$

$$7.79. \delta_y = \frac{ql^4}{Eb^4}, \quad \delta_z = -\frac{11 ql^4}{2 Eb^4} \quad 7.80. \delta_y = -\frac{23 Pl^3}{864 Eb^4}, \quad \delta_z = -\frac{23 Pl^3}{216 Eb^4}$$

$$7.81. \delta_y = 0, \quad \delta_z = -\frac{1 Pl^3}{8 Eb^4} \quad 7.82. \delta_y = -\frac{23 Pl^3}{432 Eb^4}, \quad \delta_z = \frac{23 Pl^3}{108 Eb^4}$$

$$7.83. \delta_y = \frac{5 Pl^3}{32 Eb^4}, \quad \delta_z = -\frac{1 Pl^3}{8 Eb^4} \quad 7.84. \delta_y = -\frac{5 ql^4}{256 Eb^4}, \quad \delta_z = -\frac{5 ql^4}{8 Eb^4}$$

$$7.85. \tau_{\max} = 17,8 \text{ МПа}; \delta = 17,4 \text{ мм} \quad 7.86. d = 6,05 \text{ мм}; n = 6; b = 6,12 \text{ мм}; n_1 = 8,7;$$

$$\frac{G_{sp}}{G_{cp}} = 1,83 \quad 7.87. \tau_{\max} = 54,1 \text{ МПа}; \delta = 20,4 \text{ мм}; U = 10,2 \text{ Дж}$$

$$7.88. \tau_{\max} = 29,3 \text{ МПа}; n = 6,46 \quad 7.89. \frac{\tau_{\max 1}}{\tau_{\max 2}} = 0,743; \frac{\delta_1}{\delta_2} = 0,881$$

$$7.90. \tau_{\max} = 0,768 [\tau] \quad 7.91. P = 323 \text{ Н} \quad 7.92. c = 6,09 \text{ кН/м} \quad 7.93. P = 503 \text{ Н};$$

$$\delta = 260 \text{ мм} \quad 7.94. d = 40,0 \text{ мм}; n = 8 \quad 7.95. c = 132 \text{ кН/м} \quad 7.96. P = 1,11 \text{ кН}$$

$$7.97. P_1 = 11,0 \text{ кН}; P_2 = 8,96 \text{ кН}; \delta = 55,8 \text{ мм}; \tau_{\max 1} = 182 \text{ МПа}; \tau_{\max 2} = 314 \text{ МПа}$$

$$7.98. P_1 = 101 \text{ Н}; P_2 = 299 \text{ Н}; \delta_1 = 162 \text{ мм}; \delta_2 = 102 \text{ мм}; \tau_1 = 202 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = 359 \text{ МПа}; U_1 = 8,07 \text{ Дж}; U_2 = 15,3 \text{ Дж} \quad 7.99. P_1 = 2,51 \text{ кН}; P_2 = 2,02 \text{ кН};$$

$$\delta = 50,1 \text{ мм}; \tau_1 = 167 \text{ МПа}; \tau_2 = 134 \text{ МПа} \quad 7.100. d = 4,33 \text{ мм}; n = 8$$

$$7.101. \tau_{\max 1} = 107 \text{ МПа}; \tau_{\max 2} = 241 \text{ МПа}; U_1 = 72,8 \text{ Дж}; U_2 = 48,3 \text{ Дж}$$

$$7.102. M = 96,5 \text{ Н} \cdot \text{м} \quad 7.103. c = 183 \frac{\text{Н}}{\text{м}}; U = 1,09 \text{ Дж} \quad 7.104. M = 10,9 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$7.105. d = 12,7 \text{ мм} \quad 7.106. \sigma_{\max} = 254 \text{ МПа}; \varphi = 1,09 \text{ рад}; n_{гр} = 1,02$$

В ответах к задачам 7.107 – 7.114: $R_{x,A}$ – положительные реакции направлены вправо, отрицательные – влево; $R_{y,A}$ – положительные вверх, отрицательные – вниз. Положительные перемещения – в сторону действия нагрузки.

$$7.107. R_{x,A} = 0,435P; \quad R_{y,A} = 0,140P; \quad \delta_p = 0,210Pl^3/(EJ_z)$$

$$7.108. R_{x,A} = -0,309P; \quad R_{y,A} = -0,332P; \quad \delta_p = 0,184Pl^3/(EJ_z) \quad 7.109.$$

$$R_{x,A} = 0,298P, \quad R_{y,A} = -0,947P, \quad \delta_p = 0,805Pl^3/(EJ_z) \quad 7.110. R_{x,A} = -0,127M/l;$$

$$R_{y,A} = -0,842M/l; \quad \varphi_M = 0,201Ml/(EJ_z) \quad 7.111. R_{x,A} = 0,251M/l;$$

$$R_{y,A} = -1,37M/l; \quad \varphi_M = 0,839Ml/(EJ_z) \quad 7.112. R_{x,A} = -1,3M/l; \quad R_{y,A} = 0,3M/l;$$

$$\varphi_M = 1,03Ml/(EJ_z) \quad 7.113. R_{x,A} = -1,19M/l; \quad R_{y,A} = -0,3M/l; \quad \varphi_M = 1,09Ml/(EJ_z)$$

$$7.114. R_{x,A} = 0,184P; \quad R_{y,A} = 0,141P; \quad \delta_p = 0,246Pl^3/(EJ_z)$$

В ответах к задачам 7.115 – 7.122 и далее обозначение внутренних силовых факторов в сечении A с индексом «лев» («прав») соответствует их значениям слева (справа) от сечения.

- 7.115. $N_A = 0$, $Q_A = 0,0197ql$; $M_A = 0$, $|Q|_{\max} = 1,02ql$; $|M|_{\max} = 0,5ql^2$.
 7.116. $N_A = 0$; $Q_A = -0,669ql$; $M_A = 0$, $|Q|_{\max} = 1,33ql$; $|M|_{\max} = 0,669ql^2$.
 7.117. $N_A = 0$, $Q_A = -1,1P$; $M_A^{\text{лев}} = Pl$; $M_A = 0$, $M_A^{\text{прав}} = -Pl$; $|Q|_{\max} = 1,1P$; $|M|_{\max} = Pl$. 7.118. $N_A = -0,193ql$; $Q_A = 0$; $M_A = 0$; $|Q|_{\max} = 0,807ql$; $|M|_{\max} = 0,212ql^2$. 7.119. $N_A = 0,369ql$; $Q_A = 0$, $M_A = 0$, $|Q|_{\max} = ql$, $|M|_{\max} = 0,5ql^2$. 7.120. $N_A = 0$, $Q_A = 0,275ql$; $M_A = 0$, $|Q|_{\max} = ql$, $|M|_{\max} = 0,5ql^2$.
 7.121. $N_A = -0,598P$; $Q_A^{\text{лев}} = P$, $Q_A = 0$, $Q_A^{\text{прав}} = -P$, $M_A = 0$, $|Q|_{\max} = P$, $|M|_{\max} = 0,567Pl$. 7.122. $N_A = 0$, $Q_A = 0,0787P$; $M_A = 0$, $|Q|_{\max} = 1,08P$; $|M|_{\max} = Pl$. 7.123. $\delta_{K-K} = 0,015Pa^3/(EJ_z)$ - сечения расходятся.
 7.124. $\varphi_K = 1,06qa^3/(EJ_z)$ - по часовой стрелке. 7.125. $\varphi_K = 0,0357qa^3/(EJ_z)$ - против часовой стрелки. 7.126. $\varphi_K = 0,161qa^3/(EJ_z)$ - против часовой стрелки.
 7.127. $\delta_{K-K} = 0,16qa^4/(EJ_z)$ - влево. 7.128. $\delta_{K-K} = 0,147qa^4/(EJ_z)$ - вправо.
 7.129. $\delta_{K-K} = 0,097qa^4/(EJ_z)$ - сечения сходятся. 7.130. $\varphi_K = 0,188qa^3/(EJ_z)$ - по часовой стрелке.

В ответах к задачам 7.131 – 7.136 в скобках приведены реакции в опорах. Положительные реакции: силы направлены вверх, моменты – против часовой стрелки.

- 7.131. $Q_{\max} = \frac{111}{88}ql$, $Q_{\min} = -\frac{31}{22}ql$, $M_{\max} = \frac{65}{88}ql^2$, $M_{\min} = -\frac{46}{22}ql^2$
 ($M_A = -\frac{17}{44}ql^2$, $R_A = -\frac{31}{22}ql$, $R_B = \frac{147}{88}ql$, $R_C = \frac{65}{88}ql$). 7.132. $Q_{\max} = \frac{3}{8}ql$,
 $Q_{\min} = -\frac{29}{72}ql$, $M_{\max} = \frac{5}{9}ql^2$, $M_{\min} = -\frac{4}{9}ql^2$ ($M_A = \frac{1}{24}ql^2$, $R_A = -\frac{29}{72}ql$,
 $R_B = \frac{7}{9}ql$, $R_C = -\frac{3}{8}ql$). 7.133. $Q_{\max} = \frac{151}{135}ql$, $Q_{\min} = -\frac{119}{135}ql$, $M_{\max} = 0,270ql^2$,
 $M_{\min} = \frac{16}{45}ql^2$ ($M_A = -\frac{8}{45}ql^2$, $R_A = -\frac{24}{45}ql$, $R_B = \frac{223}{135}ql$, $R_C = -\frac{16}{135}ql$).
 7.134. $Q_{\max} = \frac{5}{4}ql$, $Q_{\min} = -\frac{21}{8}ql$, $M_{\max} = 2ql^2$, $M_{\min} = -\frac{5}{8}ql^2$ ($R_A = -\frac{21}{8}ql$,
 $R_B = \frac{31}{8}ql$, $R_C = \frac{7}{8}ql$, $R_D = -\frac{1}{8}ql$). 7.135. $Q_{\max} = \frac{9}{8}ql$, $Q_{\min} = -\frac{7}{8}ql$,
 $M_{\max} = \frac{13}{24}ql^2$, $M_{\min} = -\frac{14}{24}ql^2$ ($M_A = \frac{7}{12}ql^2$, $R_A = \frac{9}{8}ql$, $R_B = \frac{11}{8}ql$, $M_C = \frac{1}{6}ql^2$,
 $R_C = -\frac{1}{2}ql$). 7.136. $Q_{\max} = \frac{24}{23}ql$, $Q_{\min} = -\frac{28}{23}ql$, $M_{\max} = \frac{14}{23}ql^2$, $M_{\min} = -\frac{10}{23}ql^2$
 ($R_A = \frac{18}{23}ql$, $R_B = \frac{52}{23}ql$, $R_C = -\frac{15}{23}ql$, $R_D = -\frac{9}{23}ql$). 7.137 – 7.148. См. ответы к
 силовым задачам 2.18 – 2.29. 7.149. $N_1 = \frac{16}{23}ql$, $N_2 = \frac{15}{23}ql$, $R_{y,A} = \frac{15}{23}ql$ (вверх),

$$R_{x,A} = 0, \quad 7.150. \quad N = 0,73P; \quad R_{y,A} = 0,5P \text{ (вверх)}. \quad 7.151. \quad N = \frac{3}{13}ql, \quad R_{x,A} = \frac{49}{52}ql$$

$$\text{(влево)}, \quad R_{y,A} = \frac{3}{26}ql \text{ (вверх)}. \quad 7.152. \quad N = 0,39P; \quad Q_A = M_A = 0, \quad N_A = -0,5P;$$

$$Q_A^{\text{max}} = 0,195P; \quad Q_A^{\text{min}} = -0,195P. \quad 7.153. \quad N = \frac{11}{45}P, \quad M_A = \frac{11}{45}Pl \text{ (против часовой}$$

$$\text{стрелки)}, \quad R_{x,A} = \frac{34}{45}Pl \text{ (влево)}, \quad R_{y,A} = 0. \quad 7.154. \quad N_1 = N_2 = 0,221P;$$

$$N_A = Q_A = M_A = 0, \quad Q_A^{\text{max}} = -P/2, \quad Q_A^{\text{min}} = P/2.$$

В ответах к задачам 7.155 – 7.160 внутренние силовые факторы приведены в соответствии с правилом знаков, индексами «и» и «ю» обозначены изгибающий и крутящий моменты.

$$7.155. \quad Q_A = M_{x,A} = 0, \quad M_{y,A} = 0,352qa^2. \quad 7.156. \quad Q_{z,A} = M_{x,A} = 0,$$

$$M_{y,A} = -1/9M \quad (Q_{z,A}, M_{x,A} - \text{обратно симметричные факторы, } M_{y,A} - \text{прямо}$$

$$\text{симметричный фактор в сечении } A \text{ по плоскости симметрии системы,}$$

$$\text{проекция силы и момента на оси ПДСК } Axuz), \quad M_{x,A}^{\text{max}} = M_{x,A}^{\text{min}} = -\frac{5\sqrt{2}}{9}M,$$

$$M_{y,A}^{\text{max}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}M, \quad M_{y,A}^{\text{min}} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}M. \quad 7.157. \quad Q_A = M_{x,A} = 0, \quad M_{y,A} = 0,258qa^2.$$

$$7.158. \quad Q_A = M_{x,A} = 0, \quad M_{y,A}^{\text{max}} = M, \quad M_{y,A}^{\text{min}} = -M, \quad M_{z,A} = -0,071M.$$

$$7.159. \quad Q_A = -0,538qa; \quad M_{x,A} = 0, \quad M_{y,A} = -0,103qa^2. \quad 7.160. \quad Q_A = M_{x,A} = 0,$$

$$Q_A^{\text{max}} = P, \quad Q_A^{\text{min}} = -P, \quad M_{y,A} = 0,637Pa.$$

Глава 8

(Приведен один из возможных вариантов координат нормальных векторов площадок; размерность напряжений - МПа, удельных энергий - кДж/м³)

$$8.1. \quad p_v = (34,1; 15,0; 59,5); \quad \sigma_1 = 90; \quad \sigma_2 = 60; \quad \sigma_3 = 30;$$

$$v_1 = (0,667; -0,333; 0,667), \quad v_2 = (-0,333; 0,667; 0,667),$$

$$v_3 = (0,667; 0,667; -0,333); \quad \tau_{\text{max}} = \tau_{13} = 30; \quad \tau_{23} = 15; \quad \tau_{12} = 15;$$

$$v_{13} = (0,943; 0,236; 0,236), \quad v_{23} = (0,236; 0,943; 0,236), \quad v_{12} = (0,236; 0,236; 0,943);$$

$$v_0 = (0,578; 0,578; 0,578), \quad \sigma_0 = 60, \quad \tau_0 = 24,5; \quad u_0 = 10,3; \quad u_\varphi = 5,57; \quad u = 15,9.$$

$$8.2. \quad p_v = (0,621; 3,62; 0); \quad \sigma_1 = 6; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -3; \quad v_1 = (0,577; 0,577; 0,577),$$

$$v_2 = (-0,615; -0,158; 0,773), \quad v_3 = (0,537; -0,801; 0,264); \quad \tau_{\text{max}} = \tau_{13} = \tau_{12} = 4,50;$$

$$\tau_{23} = 0; \quad v_{13} = (0,788; -0,158; 0,595), \quad v_{23} = (-0,055; -0,678; 0,733),$$

$$v_{12} = (-0,027; 0,296; 0,955); \quad v_0 = (0,288; -0,221; 0,932); \quad \sigma_0 = 0, \quad \tau_0 = 4,24; \quad u_0 = 0;$$

$$u_\varphi = 0,167; \quad u = 0,167. \quad 8.3. \quad p_v = (10; -40; 14,1); \quad \sigma_1 = 63,9; \quad \sigma_2 = 20,0; \quad \sigma_3 = -43,9;$$

$$v_1 = (-0,189; -0,982; 0), \quad v_2 = (0; 0; 1), \quad v_3 = (-0,982; 0,189; 0); \quad \tau_{\text{max}} = \tau_{13} = 53,9;$$

$$\tau_{23} = 31,9; \quad \tau_{12} = 21,9; \quad v_{13} = (-0,828; 0,560; 0), \quad v_{23} = (-0,694; 0,134; 0,707),$$

$$v_{12} = (-0,134; -0,694; 0,707); \quad v_0 = (-0,676; -0,458; 0,577); \quad \sigma_0 = 13,3; \quad \tau_0 = 44,2;$$

$$u_0 = 0,507; \quad u_\varphi = 18,2; \quad u = 18,7. \quad 8.4. \quad p_v = (4; -3; 0); \quad \sigma_1 = 11,2; \quad \sigma_2 = 6,76; \quad \sigma_3 = 0;$$

$\nu_1 = (0,851; 0,526; 0)$, $\nu_2 = (0,526; -0,851; 0)$, $\nu_3 = (0; 0; 1)$; $\tau_{\max} = \tau_{13} = 5,62$;
 $\tau_{23} = 3,38$; $\tau_{12} = 2,24$; $\nu_{13} = (0,602; 0,372; 0,707)$, $\nu_{23} = (0,372; -0,602; 0,707)$,
 $\nu_{12} = (0,974; -0,230; 0)$; $\nu_0 = (0,795; -0,188; 0,577)$; $\sigma_0 = 6,0$; $\tau_0 = 4,62$;
 $u_0 = 0,103$; $u_\phi = 0,198$; $u = 0,301$. **8.5.** $p_v = (94,6; 89,3; 0)$; $\sigma_1 = 145$; $\sigma_2 = 100$;
 $\sigma_3 = 55,3$; $\nu_1 = (0,851; 0,526; 0)$, $\nu_2 = (0; 0; 1)$, $\nu_3 = (0,526; -0,851; 0)$;
 $\tau_{\max} = \tau_{13} = 44,7$; $\tau_{23} = \tau_{12} = 22,4$; $\nu_{13} = (0,974; -0,230; 0)$,
 $\nu_{23} = (0,372; -0,602; 0,707)$, $\nu_{12} = (0,602; 0,372; 0,707)$; $\nu_0 = (0,795; -0,188; 0,577)$;
 $\sigma_0 = 100$; $\tau_0 = 36,6$; $u_0 = 28,6$; $u_\phi = 12,4$; $u = 41,0$.

8.6. $p_v = (57,3; -61,6; -32,7)$; $\sigma_1 = 180$; $\sigma_2 = 90$; $\sigma_3 = -90$;
 $\nu_1 = (0,667; 0,667; -0,333)$, $\nu_2 = (0,667; -0,333; 0,667)$,
 $\nu_3 = (-0,333; 0,667; 0,667)$; $\tau_{\max} = \tau_{13} = 135$; $\tau_{23} = 90$; $\tau_{12} = 45$;
 $\nu_{13} = (0,236; 0,943; 0,236)$, $\nu_{23} = (0,236; 0,236; 0,943)$, $\nu_{12} = (0,943; 0,236; 0,236)$;
 $\nu_0 = (0,578; 0,578; 0,578)$; $\sigma_0 = 60$; $\tau_0 = 112$; $u_0 = 10,3$; $u_\phi = 117$; $u = 127$.

8.7. $p_v = (3,66; -26,3; 55,6)$; $\sigma_1 = 90$; $\sigma_2 = 60$; $\sigma_3 = 60$; $\nu_1 = (0,577; 0,577; 0,577)$,
 $\nu_2 = (-0,615; -0,158; 0,773)$, $\nu_3 = (0,537; -0,801; 0,264)$; $\tau_{\max} = \tau_{13} = \tau_{12} = 15$;
 $\tau_{23} = 0$; $\nu_{13} = (0,788; -0,158; 0,595)$, $\nu_{23} = (-0,055; -0,678; 0,733)$,
 $\nu_{12} = (-0,027; 0,296; 0,955)$; $\nu_0 = (0,288; -0,221; 0,932)$; $\sigma_0 = 70$; $\tau_0 = 14,1$;
 $u_0 = 14,0$; $u_\phi = 1,86$; $u = 15,9$. **8.8.** $p_v = (-6,34; -3,66; -38,3)$; $\sigma_1 = 60$; $\sigma_2 = 30$;
 $\sigma_3 = -20$; $\nu_1 = (-0,408; 0,408; 0,816)$, $\nu_2 = (0,577; -0,577; 0,577)$,
 $\nu_3 = (0,707; 0,707; 0)$; $\tau_{\max} = \tau_{13} = 40$; $\tau_{23} = 25$; $\tau_{12} = 15$;
 $\nu_{13} = (0,211; 0,788; 0,577)$, $\nu_{23} = (0,908; 0,0920; 0,408)$, $\nu_{12} = (0,120; -0,120; 0,985)$;
 $\nu_0 = (0,506; 0,311; 0,804)$; $\sigma_0 = 23,3$; $\tau_0 = 33,0$; $u_0 = 1,56$; $u_\phi = 10,1$; $u = 11,7$.

8.9. $p_v = (31,3; 54,6; 64,3)$; $\sigma_1 = 90$; $\sigma_2 = 90$; $\sigma_3 = -90$;
 $\nu_1 = (0,972; 0,228; -0,0600)$, $\nu_2 = (0,00300; 0,243; 0,970)$,
 $\nu_3 = (-0,236; 0,943; -0,236)$; $\tau_{\max} = \tau_{13} = 90$; $\tau_{23} = 90$; $\tau_{12} = 0$;
 $\nu_{13} = (0,523; 0,828; -0,209)$, $\nu_{23} = (-0,165; 0,839; 0,519)$, $\nu_{12} = (0,689; 0,333; 0,643)$;
 $\nu_0 = (0,427; 0,816; 0,389)$; $\sigma_0 = 30$; $\tau_0 = 84,9$; $u_0 = 2,57$; $u_\phi = 66,9$; $u = 69,4$.

8.10. $p_v = (67,0; 4,02; 0)$; $\sigma_1 = 67,1$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -67,1$; $\nu_1 = (0,851; 0,526; 0)$,
 $\nu_2 = (0; 0; 1)$, $\nu_3 = (0,526; -0,851; 0)$; $\tau_{\max} = \tau_{13} = 67,1$; $\tau_{23} = 33,5$; $\tau_{12} = 33,5$;
 $\nu_{13} = (0,974; -0,230; 0)$, $\nu_{23} = (0,372; -0,602; 0,707)$, $\nu_{12} = (0,602; 0,372; 0,707)$;
 $\nu_0 = (0,795; -0,188; 0,577)$; $\sigma_0 = 0$; $\tau_0 = 54,7$; $u_0 = 0$; $u_\phi = 29,0$; $u = 29,0$.

8.11. $p_v = (74,1; -3,35; 0)$; $\sigma_1 = 110$; $\sigma_2 = 39,6$; $\sigma_3 = 0$; $\nu_1 = (0,924; 0,383; 0)$,
 $\nu_2 = (0,383; -0,924; 0)$, $\nu_3 = (0; 0; 1)$; $\tau_{\max} = \tau_{13} = 55,2$; $\tau_{23} = 19,8$; $\tau_{12} = 35,3$;
 $\nu_{13} = (0,653; 0,271; 0,707)$, $\nu_{23} = (0,271; -0,653; 0,707)$, $\nu_{12} = (0,924; -0,383; 0)$;
 $\nu_0 = (0,754; -0,312; 0,577)$; $\sigma_0 = 50$; $\tau_0 = 45,7$; $u_0 = 7,14$; $u_\phi = 19,4$; $u = 26,5$.

8.12. $p_v = (68,2; 76,3; 0)$; $\sigma_1 = 104$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -29,2$; $\nu_1 = (0,623; 0,783; 0)$,
 $\nu_2 = (0; 0; 1)$, $\nu_3 = (0,783; -0,623; 0)$; $\tau_{\max} = \tau_{13} = 66,7$; $\tau_{23} = 14,6$; $\tau_{12} = 52,1$;
 $\nu_{13} = (-0,114; 0,993; 0,707)$, $\nu_{23} = (0,554; -0,441; 0,707)$, $\nu_{12} = (0,441; 0,554; 0,707)$;

$v_0 = (-0,0929; 0,814; 0,577)$; $\sigma_0 = 25$; $\tau_0 = 57,3$; $u_0 = 1,79$; $u_\phi = 30,5$; $u = 32,3$.
8.13. $p_v = (67,1; -44,7; 0)$; $\sigma_1 = 221$; $\sigma_2 = 79,3$; $\sigma_3 = 0$; $v_1 = (-0,383; -0,924; 0)$,
 $v_2 = (-0,924; 0,383; 0)$, $v_3 = (0; 0; 1)$; $\tau_{max} = \tau_{13} = 110$; $\tau_{23} = 39,6$; $\tau_{12} = 70,7$;
 $v_{13} = (-0,271; -0,653; 0,707)$, $v_{23} = (-0,653; 0,271; 0,707)$,
 $v_{12} = (-0,924; -0,383; 0)$; $v_0 = (-0,755; -0,312; 0,577)$; $\sigma_0 = 100$; $\tau_0 = 91,1$;
 $u_0 = 28,6$; $u_\phi = 77,4$; $u = 106$. **8.14.** $\epsilon_x = 0,114 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_y = 0,524 \cdot 10^{-4}$;
 $\epsilon_z = 0,176 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xy} = -0,124 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xz} = 0,124 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{yz} = 0$; $\theta = 0,342 \cdot 10^{-3}$.
8.15. $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$; $\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0,186 \cdot 10^{-4}$; $\theta = 0$. **8.16.** $\epsilon_x = -0,305 \cdot 10^{-3}$;
 $\epsilon_y = 0,314 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_z = 0,667 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_{xy} = 0,124 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$; $\theta = 0,757 \cdot 10^{-4}$.
8.17. $\epsilon_x = 0,362 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_y = 0,238 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_z = -0,257 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_{xy} = 0,124 \cdot 10^{-4}$;
 $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$; $\theta = 0,343 \cdot 10^{-4}$. **8.18.** $\epsilon_x = 0,314 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_y = 0,667 \cdot 10^{-4}$;
 $\epsilon_z = 0,190 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xy} = 0,248 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$; $\theta = 0,571 \cdot 10^{-3}$.
8.19. $\epsilon_x = 0,424 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_y = 0,524 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_z = -0,133 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xy} = 0,495 \cdot 10^{-3}$;
 $\epsilon_{xz} = 0,124 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{yz} = -0,620 \cdot 10^{-3}$; $\theta = 0,343 \cdot 10^{-3}$. **8.20.** $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0,133 \cdot 10^{-3}$;
 $\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0,620 \cdot 10^{-4}$; $\theta = 0,399 \cdot 10^{-3}$. **8.21.** $\epsilon_x = -0,381 \cdot 10^{-4}$;
 $\epsilon_y = -0,381 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_z = 0,210 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xy} = -0,186 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xz} = -0,619 \cdot 10^{-4}$;
 $\epsilon_{yz} = 0,619 \cdot 10^{-4}$; $\theta = 0,133 \cdot 10^{-3}$. **8.22.** $\epsilon_x = 0,367 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_y = -0,562 \cdot 10^{-3}$;
 $\epsilon_z = 0,367 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xy} = 0,248 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xz} = -0,619 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_{yz} = 0,248 \cdot 10^{-3}$;
 $\theta = 0,172 \cdot 10^{-3}$. **8.23.** $\epsilon_x = 0,186 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_y = -0,186 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_z = 0$; $\epsilon_{xy} = 0,371 \cdot 10^{-3}$;
 $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$; $\theta = 0$. **8.24.** $\epsilon_x = 0,405 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_y = 0,952 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_z = -0,214 \cdot 10^{-3}$;
 $\epsilon_{xy} = 0,155 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$; $\theta = 0,286 \cdot 10^{-3}$. **8.25.** $\epsilon_x = 0,321 \cdot 10^{-4}$;
 $\epsilon_y = 0,218 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_z = -0,107 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xy} = 0,402 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$; $\theta = 0,143 \cdot 10^{-3}$.
8.26. $\epsilon_x = 0,190 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_y = 0,810 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_z = -0,429 \cdot 10^{-3}$; $\epsilon_{xy} = 0,310 \cdot 10^{-3}$;
 $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$; $\theta = 0,571 \cdot 10^{-3}$. **8.27.** $\sigma_{\text{сж}}^I = 41,2$; $\sigma_{\text{сж}}^{II} = 50,6$; $\sigma_{\text{сж}}^{III} = 82,5$;
 $\sigma_{\text{сж}}^{IV} = 72,1$; $\sigma_{\text{сж}}^V = 70,1$. **8.28.** $\sigma_{\text{сж}}^I = \sigma_{\text{сж}}^{II} = 50,0$; $\sigma_{\text{сж}}^{III} = \sigma_{\text{сж}}^{IV} = 100$; $\sigma_{\text{сж}}^V = 85,0$.
8.29. $\sigma_{\text{сж}}^I = 121$; $\sigma_{\text{сж}}^{II} = 149$; $\sigma_{\text{сж}}^{III} = 212$; $\sigma_{\text{сж}}^{IV} = 184$; $\sigma_{\text{сж}}^V = 185$.
8.30. $\sigma_{\text{сж}}^I = \sigma_{\text{сж}}^{II} = \sigma_{\text{сж}}^{III} = \sigma_{\text{сж}}^{IV} = \sigma_{\text{сж}}^V = 140$. **8.31.** $\sigma_{\text{сж}}^I = \sigma_{\text{сж}}^{II} = 70,0$;
 $\sigma_{\text{сж}}^{III} = \sigma_{\text{сж}}^{IV} = 140$; $\sigma_{\text{сж}}^V = 119$. **8.32.** $\sigma_{\text{сж}}^I = 400$; $\sigma_{\text{сж}}^{II} = 370$; $\sigma_{\text{сж}}^{III} = 600$; $\sigma_{\text{сж}}^{IV} = 557$;
 $\sigma_{\text{сж}}^V = 540$. **8.33.** $\sigma_{\text{сж}}^I = 383$; $\sigma_{\text{сж}}^{II} = 378$; $\sigma_{\text{сж}}^{III} = 567$; $\sigma_{\text{сж}}^{IV} = 500$; $\sigma_{\text{сж}}^V = 511$.
8.34. $\sigma_{\text{сж}}^I = 72,2$; $\sigma_{\text{сж}}^{II} = 75,8$; $\sigma_{\text{сж}}^{III} = 94,3$; $\sigma_{\text{сж}}^{IV} = 83,1$; $\sigma_{\text{сж}}^V = 87,7$.
8.35. $\sigma_{\text{сж}}^I = 25,4$; $\sigma_{\text{сж}}^{II} = 51,0$; $\sigma_{\text{сж}}^{III} = 128$; $\sigma_{\text{сж}}^{IV} = 124$; $\sigma_{\text{сж}}^V = 97,0$. **8.36.** $\sigma_{\text{сж}}^I = 203$;
 $\sigma_{\text{сж}}^{II} = 174$; $\sigma_{\text{сж}}^{III} = 240$; $\sigma_{\text{сж}}^{IV} = 214$; $\sigma_{\text{сж}}^V = 229$. **8.37.** $\sigma_{\text{сж}}^I = \sigma_{\text{сж}}^{III} = \sigma_{\text{сж}}^V = 90,0$;
 $\sigma_{\text{сж}}^{II} = \sigma_{\text{сж}}^{IV} = 78,0$. **8.38.** $\sigma_{\text{сж}}^I = \sigma_{\text{сж}}^{II} = \sigma_{\text{сж}}^{III} = \sigma_{\text{сж}}^{IV} = \sigma_{\text{сж}}^V = 188$.
8.39. $\sigma_{\text{сж}}^I = \sigma_{\text{сж}}^{II} = \sigma_{\text{сж}}^{III} = \sigma_{\text{сж}}^{IV} = \sigma_{\text{сж}}^V = 200$.
8.40. $\sigma_{\text{сж}}^I = \sigma_{\text{сж}}^{II} = \sigma_{\text{сж}}^{III} = \sigma_{\text{сж}}^{IV} = \sigma_{\text{сж}}^V = 169$. **8.41.** $\tau_{xy} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_x$. **8.42.** $\sigma_1 = 138$;

увеличится в $\sqrt{3}$ раз. 8.43. $\sigma_1 = 160$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -40$; $\sigma_{\max}^V = 180 > [\sigma]$.
 8.44. $\sigma = 180$. 8.45. $\sigma_1^{\text{III}} = -55$, $\sigma_3^{\text{IV}} = -72$. 8.46. Для а). 8.47. $\sigma = -100$.
 8.48. $\sigma_{\max}^{\text{III}} = 25$; $\sigma_{\max}^{\text{IV}} = 21,8$.

Глава 9

9.1. $d^I \geq 4,89\text{см}$, $d^{\text{II}} \geq 4,97\text{см}$, $d^{\text{III}} \geq 5,12\text{см}$, $d^{\text{IV}} \geq 5,06\text{см}$. 9.2. 1/26,8.
 9.3. 1,64. 9.4. 1,5. 9.5. $h^{\text{III}} \geq 2,22\text{см}$, $b^{\text{IV}} \geq 2,12\text{см}$. 9.6. Плоскость наибольшей жесткости сечения лежит в плоскости изгиба. 9.7. $\sigma_{\max} = 160\text{МПа}$.
 9.8. $\sigma_{\max} = 50,4\text{МПа}$. 9.9. $d \geq 4,38\text{см}$. 9.10. $\delta \geq 2\text{мм}$. 9.11. $d \geq 2,04\text{мм}$.
 9.12. $h^{\text{III}} \geq 4,47\text{см}$, $b^{\text{IV}} \geq 4,29\text{см}$ - проектировочный и поверочный расчеты.
 9.13. $n = 3,87$. 9.14. $b_1 \geq 2,91\text{см}$, $b_2 \geq 3,19\text{см}$ - проектировочный и поверочный расчеты.
 9.15. $P = 246\text{Н}$. 9.16. $P = 1,6\text{кН}$. 9.17. $M = 59,6\text{Н}\cdot\text{м}$, $M_x = 119\text{Н}\cdot\text{м}$. 9.18. $M = 52,5\text{Н}\cdot\text{м}$, $M_x = 105\text{Н}\cdot\text{м}$. 9.19. $P = 2,54\text{кН}$.
 9.20. $P = 2,2\text{кН}$. 9.21. $b \geq 4,06\text{см}$. 9.22. $d^{\text{III}} \geq 5,23\text{см}$, $d^{\text{IV}} \geq 5,13\text{см}$.
 9.23. $\delta \geq 3,38\text{мм}$. 9.24. $l^{\text{III}} = 0,709\text{м}$, $l^{\text{IV}} = 0,757\text{м}$. 9.25. $P = 849\text{Н}$.
 9.26. $P = 533\text{Н}$. 9.27. $P = 225\text{Н}$. 9.28. $l = 0,607\text{м}$. 9.29. $b \geq 2,73\text{см}$ - проектировочный и поверочный расчеты.
 9.30. $R^{\text{III}} \geq 3,34\text{см}$, $R^{\text{IV}} \geq 3,27\text{см}$ - проектировочный и поверочный расчеты.
 9.31. $d \geq 3,16\text{см}$. 9.32. $d \geq 1,81\text{см}$; 9.33. $a = 0,91\text{м}$. 9.34. $q = 215\text{Н/м}$. 9.35. $d \geq 2,71\text{см}$ - проектировочный и поверочный расчеты.
 9.36. $R \geq 2,05\text{см}$. 9.37. $d \geq 2,55\text{см}$. 9.38. $R \geq 2,1\text{см}$. 9.39. $d \geq 2,84\text{см}$ - проектировочный и поверочный расчеты.
 9.40. $n = 1,4$; 9.41. $d \geq 1,51\text{см}$. 9.42. $d \geq 1,58\text{см}$. 9.43. $d \geq 1,75\text{см}$. 9.44. $d \geq 1,72\text{см}$.
 9.45. $d \geq 1,2\text{см}$. 9.46. $d \geq 1,76\text{см}$.

Глава 10

10.1. $\delta = 12,9\text{мм}$. 10.2. $n = 5,10$. 10.3. $\delta = 2,70\text{мм}$. 10.4. $\delta = 0,0275\text{мм}$.
 10.5. $\delta = 18,1\text{мм}$. 10.6. $\sigma_1 = 24,4\text{МПа}$; $\sigma_2 = 7,14\text{МПа}$. 10.7. $\delta_{\text{II}} = 0,136\text{мм}$; $\delta_x = 0,192\text{мм}$.
 10.8. $\delta = 8,05\text{мм}$. 10.9. $\delta = 12,1\text{мм}$. 10.10. $\delta = 14,2\text{мм}$. 10.11. $\delta = 13,2\text{мм}$.
 10.12. $\delta = 0,345\text{мм}$. 10.13. $\delta = 0,688\text{мм}$. 10.14. $\delta = 0,375\text{мм}$. 10.15. $\delta = 0,415\text{мм}$.
 10.16. $\sigma_1 = 3,79\text{МПа}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -0,0453\text{МПа}$. 10.17. $n = 5,73$. 10.18. $\sigma_1 = 99,9\text{МПа}$.
 10.19. $\sigma_1 = 222,5\text{МПа}$. 10.20. $\sigma_1 = 143,3\text{МПа}$. 10.21. $\sigma_1 = 157,7\text{МПа}$. 10.22. $n = 2,73$. 10.23. $n = 2,24$.

Глава 11

11.1. $y_{\max} = 1,43\text{мм}$, $M_{\max} = 0,454\text{кН}\cdot\text{м}$. 11.2. $y_{\max} = 1,55\text{мм}$, $M_{\max} = 1\text{кН}\cdot\text{м}$.
 11.3. $y_{\max} = 7,41\text{мм}$, $M_{\max} = 2\text{кН}\cdot\text{м}$. 11.4. $y_{\max} = 5,40\text{мм}$, $M_{\max} = 1,56\text{кН}\cdot\text{м}$.
 11.5. $y_{\max} = 10,9\text{мм}$, $M_{\max} = 1,11\text{кН}\cdot\text{м}$. 11.6. $y_{\max} = 14,0\text{мм}$, $M_{\max} = 1,46\text{кН}\cdot\text{м}$.
 11.7. $y_{\max} = 5,36\text{мм}$, $M_{\max} = 1\text{кН}\cdot\text{м}$. 11.8. $y_{\max} = 16,3\text{мм}$,

- $M_{\max} = 1,57 \text{ кН} \cdot \text{м}$. 11.9. $y_{\max} = 4,16 \text{ мм}$, $M_{\max} = 1,39 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
 11.10. $M_{\max} = 1,01 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,63$. 11.11. $M_{\max} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,53$.
 11.12. $M_{\max} = 1,02 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,63$. 11.13. $M_{\max} = 1,20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,75$.
 11.14. $M_{\max} = 1,55 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,34$. 11.15. $M_{\max} = 0,916 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,67$.
 11.16. $M_{\max} = 1,20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,38$. 11.17. $M_{\max} = 1,22 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,53$.
 11.18. $M_{\max} = 0,923 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $n = 1,65$. 11.19. $S_x = \pi^2 EI / (4l^2)$, $\mu = 2$.
 11.20. $S_x = 9\pi^2 EI / l^2$, $\mu = 1/3$. 11.21. $S_x = \pi^2 EI / (4l^2)$, $\mu = 2$. 11.22. $S_x = \pi^2 EI / l^2$,
 $\mu = 1$. 11.23. $S_x = 4\pi^2 EI / l^2$, $\mu = 1/2$. 11.24. $S_x = 18,7 EI / l^2$, $\mu = 0,727$.
 11.25. $S_x = 4,86 EI / l^2$, $\mu = 1,43$. 11.26. $S_x = 5,43 EI / l^2$, $\mu = 1,35$.
 11.27. $S_x = 2,26 EI / l^2$, $\mu = 2,09$. 11.28. $S_x = 7,99 EI / l^2$, $\mu = 1,11$.
 11.29. $S_x = 5,75 EI / l^2$, $\mu = 1,31$. 11.30. $S_x = 88,8 EI / l^2$, $\mu = 0,333$.
 11.31. $S_x = 9,24 \text{ кН}$, $\mu = 0,865$. 11.32. $S_x = 0,986 EI / l^2$, $\mu = 3,16$.
 11.33. $S_x = 1,94 \text{ кН}$, $\mu = 1,51$. 11.34. $S_x = 25,2 EI / l^2$, $\mu = 0,626$.
 11.35. $S_x = 54,8 \text{ кН}$, $\mu = 0,710$. 11.36. $\mu = 2$, $n_y = 3,21$. 11.37. $\mu = 1/2$, $n_y = 2,33$.
 11.38. $\mu = 1$, $n_y = 3,21$. 11.39. $\mu = 0,727$, $n_y = 3,24$. 11.40. $\mu = 1,35$, $n_y = 2,75$.
 11.41. $\mu = 1,11$, $n_y = 2,63$. 11.42. $\mu = 2$, №24. 11.43. $\mu = 1/3$, №24. 11.44. $\mu = 1,43$,
 $50 \times 50 \times 4$. 11.45. $\mu = 2,09$, № 27. 11.46. $\mu = 1,31$, $100 \times 65 \times 8$. 11.47. $S_x = 4,62 EI / l^2$.
 11.48. $S_x = 2,67 \text{ кН}$. 11.49. $S_x = 4,92 \text{ кН}$. 11.50. $S_x = 2,34 \text{ кН}$.
 11.51. $S_x = 5,18 EI / l^2$. 11.52. $S_x = 3,85 \text{ кН}$. 11.53. $S_x = 8,16 \text{ кН}$.
 11.54. $S_x = 4,95 \text{ кН}$. 11.55. $S_x = 2,73 \text{ кН}$. 11.56. $S_x = 10,9 \text{ кН}$.
 11.57. $S_x = 7,41 \text{ кН}$. 11.58. $S_x = 29,7 \text{ кН}$. 11.59. $S_x = 10,8 \text{ кН}$. 11.60. $S_x = 7,54 \text{ кН}$.
 11.61. $S_x = 3,02 \text{ кН}$. 11.62. $\mu = 1$. 11.63. $\mu = 2$. 11.64. $\mu = 2$. 11.65. $\mu = 1$.
 11.66. $\mu = 1/2$. 11.67. $M_{\max} = 0,226 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $y_{\max} = 10,5 \text{ мм}$, $n = 1,30$.
 11.68. $M_{\max} = 0,300 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $y_{\max} = 29,8 \text{ мм}$, $n = 1,26$. 11.69. $M_{\max} = 0,163 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $y_{\max} = 20,2 \text{ мм}$, $n = 1,66$. 11.70. $M_{\max} = 0,128 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $y_{\max} = 16,4 \text{ мм}$, $n = 2,01$.
 11.71. $M_{\max} = 0,130 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $y_{\max} = 3,59 \text{ мм}$, $n = 1,84$. 11.72. $M_{\max} = 0,144 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $y_{\max} = 2,80 \text{ мм}$, $n = 1,77$.

Глава 12

- 12.1. $F \geq 1,09 \text{ см}^2$, $\delta = 0,281 \text{ мм}$. 12.2. $F \geq 1,64 \text{ см}^2$, $\delta = 0,249 \text{ мм}$.
 12.3. $l = 1,02 \text{ м}$. 12.4. $\omega = 44,7 \text{ с}^{-1}$, $\omega = 39,9 \text{ с}^{-1}$.
 В ответах к задачам 12.5 – 12.7 $P = m\omega^2 l$.
 12.5. $N_A = 0$, $Q_A = P$, $M_A = Pl$, $N_B = P$, $Q_B = 0$, $M_B = Pl$.
 12.6. $N_A = 0$, $Q_A = P$, $M_A = Pl$, $N_B = 2P$, $Q_B = 0$, $M_B = Pl$. 12.7. $N_A = P$,
 $Q_A = 0$, $M_A = Pl$.
 В ответах к задачам 12.8 – 12.12 $q = \rho F \omega^2 l$.
 12.8. $N_A = 0$, $Q_A = 3ql/2$, $M_A = ql^2$, $N_B = 2ql$, $Q_B = 0$, $M_B = ql^2$.
 12.9. $N_A = 0$, $Q_A = ql$, $M_A = ql^2/2$, $N_B = 3ql/2$, $Q_B = 0$, $M_B = ql^2/2$.

- 12.10. $N_A = 0$, $Q_A = 0$, $M_A = 2ql^2$, $N_B = 3ql/2$, $Q_B = 0$, $M_B = 3ql^2/2$.
 12.11. $N_A = 0$, $Q_A = -ql$, $M_A = ql^2/2$, $N_B = 3ql/2$, $Q_B = 0$, $M_B = ql^2/2$.
 12.12. $N_A = 0$, $Q_A = -ql$, $M_A = ql^2/2$, $N_B = 0$, $Q_B = 1,25ql$, $M_B = 5ql^2/2$.
 12.13. $d \geq 3,24$ см. 12.14. $d \geq 1,64$ см. 12.15. $d \geq 1,35$ см. 12.16. $d \geq 3,46$ см.
 12.17. $d \geq 4,01$ мм. 12.18. $d \geq 1,94$ см. 12.19. $d \geq 4,02$ см. 12.20. $\omega = 32,7$ с⁻¹.
 12.21. $\delta_A = 8,77$ мм

Ответы к задачам 12.22 - 12.45 получены с использованием формул (12.13) или (12.14).

- 12.22. $\lambda = 22,1$, $\delta = 9,02$ мм, $\sigma = 108$ МПа. 12.23. $\lambda = 9,03$, $\delta = 2,22$ см;
 $\sigma_{\max} = 133$ МПа. 12.24. $\sigma = 26,8$ МПа, $\delta_A = 0,134$ мм. 12.25. $\sigma_1 = \sigma_3 = 17,5$ МПа;
 $\sigma_2 = 23,3$ МПа; $\delta_A = 0,117$ мм. 12.26. $\delta_{\max} = 1,19$ мм. 12.27. $\lambda = 55,0$,
 $\sigma_{\max} = 80,9$ МПа, $\delta_A = 3,63$ мм. 12.28. $\lambda = 42,2$, $\sigma_{\max} = 62,1$ МПа, $\delta_A = 4,73$ мм.
 12.29. $\lambda = 18,1$, $M_{\max} = 319$ Н·м, $\delta_A = 5,54$ мм. 12.30. $\delta_A = 2,41$ мм,
 $\sigma_{\max} = 138$ МПа. 12.31. $\lambda_a/\lambda_b = 1,22$. 12.32. $v_0 = 4,01$ м/сек. 12.33. а) $k_m = 0,236$;
 б) $k_m = 0,2$; в) $k_m = 0,226$. 12.34. $k_m = 0,375$. 12.35. $k_m = 0,5$.
 12.36. а) $k_m = 0,333$; б) $k_m = 0,2$; в) $k_m = 0,5$. 12.37. 1,22. 12.38. $l_{\max} = 1,5$ м.
 12.39. $v_0 = 4,12$ м/сек. 12.40. $\delta = 1,34$ мм, $\sigma = 46,8$ МПа и $\delta = 1,21$ мм,
 $\sigma = 42,4$ МПа. 12.41. $H = 0,235$ м. 12.42. Напряжения одинаковы. 12.43.
 $\sigma = 141$ МПа. 12.44. $\omega = 31,3$ с⁻¹. 12.45. $l = 0,453$ м.

Глава 13

- 13.1. $P_{\text{тп}} = 53,1$ кН. 13.2. $P_{\text{тп}} = 66$ кН. 13.3. $P_{\text{тп}} = 132$ кН. 13.4. $P_{\text{тп}} = 88$ кН.
 13.5. $P_{\text{тп}} = 88$ кН. 13.6. $P_{\text{тп}} = 117$ кН. 13.7. $P_{\text{тп}} = 65,3$ кН. 13.8. $P_{\text{тп}} = 55,0$ кН.
 13.9. $P_{\text{тп}} = 124$ кН. 13.10. $P_{\text{тп}} = 77,6$ кН. 13.11. $P_{\text{тп}} = 155$ кН. 13.12. $F = 11,3$ см².
 13.13. $F = 4,55$ см². 13.14. $F = 2,28$ см². 13.15. $F = 2,28$ см². 13.16. $F = 7,56$ см².
 13.17. $F = 4,55$ см². 13.18. $\alpha = 63,8^\circ$. 13.19. $P_{\text{тп}} = 80$ кН. 13.20. $P_{\text{тп}} = 64$ кН.
 13.21. $P_{\text{тп}} = 80$ кН. 13.22. $W_{z,\text{тп}} = 2bh^2/3$, $W_{y,\text{тп}} = 2hb^2/3$, $W_{z,\text{тп}}/W_{y,\text{тп}} = 2$.
 13.23. $W_{z,\text{тп}} = bh^2/4$, $W_{z,\text{тп}}/W_z = 1,5$.
 13.24. $W_{z,\text{тп}} = h^2(b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2)\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)/2})/[3(b_2 - b_1)]^2$, $W_{z,\text{тп}}/W_z = 1,57$.
 13.25. $W_{z,\text{тп}} = d^3/6$, $W_{z,\text{тп}}/W_z = 16/(3\pi)$. 13.26. $W_{z,\text{тп}} = (D^3 - d^3)/6$,
 $W_{z,\text{тп}}/W_z = 32/(3\pi)$. 13.27. $W_{z,\text{тп}} = d^2\delta$, $W_{z,\text{тп}}/W_z = 8/\pi$. 13.28. $W_{z,\text{тп}} = 45$ см³.
 13.29. $W_{z,\text{тп}} = 25,9$ см³. 13.30. $W_{z,\text{тп}} = 119$ см³. 13.31. $W_{z,\text{тп}} = 63,6$ см³.
 13.32. $W_{z,\text{тп}} = 99$ см³. 13.33. $W_{z,\text{тп}} = 28,4$ см³. 13.34. $W_{z,\text{тп}} = 16$ см³.
 13.35. $W_{z,\text{тп}} = 257$ см³. 13.36. $W_{z,\text{тп}} = 17,3$ см³. 13.37. $W_{z,\text{тп}} = 74,3$ см³.
 13.38. $W_{z,\text{тп}} = 8,59$ см³. 13.39. $P_{\text{тп}} = 3,6$ кН. 13.40. $P_{\text{тп}} = 1,44$ кН.
 13.41. $P_{\text{тп}} = 1,6$ кН. 13.42. $P_{\text{тп}} = 7,2$ кН. 13.43. $P_{\text{тп}} = 7,2$ кН. 13.44. $q_{\text{тп}} = 6,4$ кН/м.
 13.45. $q_{\text{тп}} = 2,4$ кН/м. 13.46. $q_{\text{тп}} = 1,92$ кН/м. 13.47. $q_{\text{тп}} = 3,2$ кН/м.

- 13.48. $q_{\text{тп}} = 1,92 \text{ кН/м}$. 13.49. $q_{\text{тп}} = 7,2 \text{ кН/м}$. 13.50. $q_{\text{тп}} = 12,8 \text{ кН/м}$.
 13.51. $q_{\text{тп}} = 12,5 \text{ кН/м}$. 13.52. $q_{\text{тп}} = 9,6 \text{ кН/м}$. 13.53. $q_{\text{тп}} = 25,6 \text{ кН/м}$.
 13.54. $M_{\text{тп}} = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$. 13.55. $M_{\text{тп}} = 145 \text{ Н}\cdot\text{м}$. 13.56. $M_{\text{тп}} = 754 \text{ Н}\cdot\text{м}$.
 13.57. $M_{\text{тп}} = 754 \text{ Н}\cdot\text{м}$. 13.58. $M_{\text{тп}} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$. 13.59. $M_{\text{тп}} = 335 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Глава 14

- 14.1. $n = 1,46$. 14.2. $n = 3,15$. 14.3. $n = 2,12$. 14.4. $n = 2,93$. 14.5. $n = 1,95$.
 14.6. $M_{x,\text{max}} = 1,23 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_{x,\text{min}} = 0,38 \text{ кН}\cdot\text{м}$. 14.7. $n = 1,33$. 14.8. $n = 1,75$.
 14.9. $M_{\text{max}} = 4,18 \text{ Н}\cdot\text{м}$. 14.10. $n = 3,12$. 14.11. $n = 2,20$. 14.12. $n = 4,44$.
 14.13. $n = 7,66$. 14.14. $n = 1,52$. 14.15. $n = 1,65$. 14.16. $n = 1,90$. 14.17. $P = 2,01 \text{ кН}$.
 14.18. $M_{x,\text{min}} = 619 \text{ Н}\cdot\text{м}$. 14.19. $M_1 = 1,50 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_2 = 0,750 \text{ кН}\cdot\text{м}$.
 14.20. $M = 53,9 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $M_x = 27,0 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Глава 15

- 15.1. $\sigma_A = -80 \text{ МПа}$; $\sigma_B = 103 \text{ МПа}$. 15.2. $P = 59,6 \text{ кН}$. 15.3. $\delta = 92,3 \frac{\pi P}{ER}$.
 15.4. $n = 1,40$. 15.5. $\delta = 2,05 \text{ мм}$. 15.6. $P = 140 \text{ Н}$. 15.7. $\sigma_{\text{max}} = 53,8 \text{ МПа}$.
 15.8. $\theta = 0,0188 \text{ рад}$. 15.9. $\sigma_{\text{max}} = 112 \text{ МПа}$. 15.10. $P = 243 \text{ кН}$.
 15.11. $\delta = 1,87 \text{ мм}$. 15.12. $\delta = 0,445 \text{ мм}$. 15.13. $\delta = 0,120 \text{ мм}$.
 15.14. $\theta = 0,00839 \text{ рад}$. 15.15. $n = 1,68$. 15.16. $\sigma_{\text{max}} = -59,5 \text{ МПа}$. 15.17. $n = 1,43$.
 15.18. $\delta = 1,92 \text{ мм}$. 15.19. $\delta = 0,379 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$. 15.20. $\theta = 0,158 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$.
 15.21. $n = 2,25$.

Глава 16

- 16.1. $\tau = \frac{h\sigma_0}{e^{P/l} - e^{-P/l}} (Pe^{P/l} + Pe^{-P/l})$, где $P = \sqrt{\frac{K}{hE}}$.
 16.2. $N = \frac{E_{BC} F_{BC}}{E_{AB} F_{AB}} \frac{P \cos \alpha}{\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{E_{BC} F_{BC}}{E_{AB} F_{AB}} \cos^2 \alpha + \frac{E_{BC} F_{BC} l^2}{3E_{AB} J} \sin^2 \alpha}$. 16.3. Вариант в),
 $N = \Delta/14$. 16.4. $\delta_3 = (2\delta_2 - \delta_1)/3$. 16.5. $x = 0,435b$. 16.6. $P = 0,6P_0$. 16.7. $\tau_{\text{max}} = \frac{\gamma l}{2}$.
 16.8. $P = 0,785d^2 [\sigma]$. 16.9. $N_{AB} = 2P/3$, $N_{CK} = -P/3$, $N_{KD} = -4P/3$.
 16.10. $P = 80 \text{ кН}$. 16.11. $R = R_{\text{max}} = \frac{a}{2\pi}$. 16.13. Окружность радиуса
 $R = \sqrt{4 \frac{I_{Pz}}{F} + \frac{S_z^2 + S_y^2}{F^2}}$ относительно центра тяжести сечения. 16.14. $\alpha = 127^\circ$.
 16.15. $W_y = 0,501d^3$. 16.16. $d = 17,3 \text{ мм}$, $\delta_A = 0,227 \text{ мм}$. 16.17. $M_{\text{max}} = 0,25 fPD$.
 16.18. $\varphi = \frac{M}{\pi G D^2 h}$. 16.19. $x = 3l$. 16.20. $\varphi = \frac{0,867 M l}{G J_p}$. 16.21. $\varepsilon_{D1} = -19,4 \cdot 10^{-3}$.
 16.22. $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{D_1 (D_2^4 - d_2^4)}{D_2 (D_1^4 - d_1^4)}$. 16.23. $\tau_{\text{max},1} = 41,2 \text{ МПа}$, $\tau_{\text{max},2} = 35,7 \text{ МПа}$.

16.24. $\frac{M}{Pl} = 3$, $\omega_1 = \frac{Pl^4}{8EJ_z}$, $\omega_2 = \frac{Ml^3}{24EJ_z}$. 16.25. $\frac{M_B}{M_A} = -2$ или $M_A = M_B = 0$.

16.26. $P = 18\sqrt{3} \frac{EJ_z \delta_{\max}}{l^3}$, $\sigma_{\max} = \frac{9\sqrt{3} Eh \delta_{\max}}{2 l^2}$. 16.27. 1) $G/P = 0$,

2) $G/P \geq 1 + l/4a$. 16.28. $R = 9 \frac{EJ_z}{Pl}$. 16.29. $a = l/\sqrt{3}$. 16.30. $M_2 = 3qa^2/2$,

$P_3 = 2qa$, $q_{2-5} = -q$. 16.31. $M_{\text{дон}} = 1,01 \text{ кН} \cdot \text{м}$. 16.32. $N_{\max} = P$, $Q_{\max} = P$,

$M_{z,\max} = M_{x,\max} = PR$. 16.33. $E = 10^5 \text{ МПа}$, $\rho = 13,3 \text{ м}$. 16.34. $b(x) = 0,15 \frac{x}{l} \text{ м}$.

16.35. $R_C = \frac{2M}{3l}$. 16.36. Изгибающий момент в середине балки не изменяется, а прогиб уменьшается.

16.37. $\alpha = 109^\circ$. 16.38. $\alpha = 18,4^\circ$. 16.39. $\delta_A = 0$.

16.40. $P = 2 \frac{\Delta EJ_z}{l^3}$. 16.41. $x = l/2$. 16.42. $\frac{J_2}{J_1} = 4$, $\delta_C = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

16.43. $\delta_A = 0,0183 \text{ м}$. 16.44. $P = \frac{c \cdot 48EJ_z}{c \cdot l^3 + 48EJ_z} \Delta$. 16.45. $x_{\max} = 0,414l$,

$P_{\max} = \frac{\Delta_0}{\frac{0,0237l^3}{EJ} + \frac{1}{c} + \frac{0,0335l^3}{EJ}}$, где $\Delta_0 = P_0 \left(\frac{1}{c} + \frac{l^3}{6EJ} \right)$. 16.46. $\tau_{\max} = 80 \text{ МПа}$,

$\sigma_{\max} = 120 \text{ МПа}$. 16.48. $P = -6,50 \frac{\Delta EJ}{l^3}$, $\alpha = -60^\circ$. 16.49. $M_{z,\max} = PR/2$, $N_{\max} = P$,

$Q_{y,\max} = P$. 16.50. $M_{z,\max} = Pa/2$, $N_{\max} = P \sqrt{1 - \frac{1}{16 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{1}{4} \right)}}$, $Q_{y,\max} = P/2$.

16.51. $\Delta = \frac{Pa^3}{2EJ_z}$. 16.52. $\Delta V = -\frac{plbh}{E} (1-2\nu)(1+\nu)$, $\Delta h = -\frac{ph}{E} (1-\nu^2)$,

$\Delta b = \frac{ph\nu}{E} (1+\nu)$, $\Delta l = 0$. 16.53. $\sigma = \frac{P\nu_2}{4 \frac{F_1}{F_2} + \frac{E_2}{E_1}}$, $\Delta V = -\frac{1-2\nu_2}{F_2} \left(\frac{4\nu_2}{\frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} + 4} + 1 \right) PF_2 l$.

16.54. $\sigma = -1,58q$. 16.55. $\sigma_{1,2,3}^k = 0$. 16.56. $\sigma_y = \sigma_x = -32 \text{ кПа}$, $\sigma_z = -16 \text{ кПа}$.

16.57. $\Delta V = \frac{Pl}{E} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right)$, $\Delta l = \frac{4Pl}{\pi d^2 E} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right)$. 16.58. $F = 4,39 \cdot 10^4 \text{ м}^2$.

16.59. $M_{\text{дон}} = 0,375[\sigma] \pi D_{\text{тр}}^2 \delta$, $n = \frac{[\sigma] F_{\text{тр}} l (1/F_{\text{тр}} + 1/F_c)}{2ES}$. 16.60. $a = \frac{2h}{5}$.

16.61. $\alpha = 71,6^\circ$. 16.62. $n = 2,30$. 16.63. $a = 12,8 \text{ см}$. 16.64. $\omega = 3,36 \text{ л/с}$.

16.65. $\sigma_1 = 75,0 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 106 \text{ МПа}$. 16.66. $\Delta t_{\text{дон}} = 52,0^\circ \text{ С}$. 16.67. $N_3 = 8,33 \text{ кН}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. — М.: Физматгиз, 1976. — 856 с.
2. *Беляев Н.М.* Сборник задач по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1968. — 352 с.
3. *Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В.* Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1987. — 263 с.
4. *Винокуров А.И.* Сборник задач по сопротивлению материалов. — М.: Высш. шк., 1990. — 383 с.
5. *Дарков А.В., Шпиро Г.С.* Сопротивление материалов: Учебник для техн. вузов. — М.: Высш. шк., 1989. — 624 с.
6. *Долинский Ф.В., Михайлов М.Н.* Краткий курс сопротивления материалов: Учеб. пособие для машиностроит. вузов. — М.: Высш. шк., 1988. — 432 с.
7. *Заславский Б.В.* Краткий курс сопротивления материалов: Учебник для авиац. вузов. — М.: Машиностроение, 1986. — 328 с.
8. *Иванов Н.И.* Сборник задач по сопротивлению материалов. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 276 с.
9. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. — М.: ГИМФЛ, 1959. — 371 с.
10. *Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И.* Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. Л.С. Минина. — М.: Высш. шк., 1999. — 592 с.
11. Курс сопротивления материалов /М.М. Филоненко-Бордич, С.М. Изюмов, Б.А. Олисов и др. — В 2-х ч. — М.: ГИТТЛ, 1955—1956.
12. *Лихарев К.К., Сухова Н.А.* Сборник задач по курсу “Сопротивление материалов”. — М.: Машиностроение, 1970. — 223 с.
13. Московские городские олимпиады по сопротивлению материалов (1971—1998 гг). Задачи и решения/С.В. Зарубин, В.В. Исаченко, М.И. Мартиросов, Ю.А. Родионова, В.И. Щербаков. — М.: Изд-во Минобразования РФ, 1999. — 152 с.
14. *Никифоров С.Н.* Сопротивление материалов. — М.: Высш. шк., 1966. — 584 с.
15. *Ободовский Б.А., Ханин С.Е.* Сопротивление материалов в примерах и задачах. — Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1968. — 384 с.
16. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов/И.Н. Миролубов, С.А. Енгальчев, М.Д. Сергиевский, Ф.З. Алмаметов, Н.А. Курицын, К.Г. Смирнов-Васильев, Л.В. Яшина. — М.: Высш. шк., 1967. — 482 с.

17. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 712 с.
18. *Рудицын М.Н., Артсмов П.Я., Любошиц М.Н.* Справочное пособие по сопротивлению материалов. — Минск: Вышэйшая школа, 1970. — 628 с.
19. Сборник задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для техн. вузов/А.С. Вольмир, Ю.П. Григорьев, А.И. Коданев, В.А. Марьин, В.В. Новицкий; Под ред. А.С. Вольмира. — М.: Наука, 1984. — 408 с.
20. Сборник задач по сопротивлению материалов/Под ред. В.К. Качурина. — М.: Наука, 1970. — 432 с.
21. Сборник задач по сопротивлению материалов/А.А. Уманский, А.М. Афанасьев, А.С. Вольмир, Ю.П. Григорьев, А.И. Коданев, В.А. Марьин, В.В. Новицкий; Под ред. А.А. Уманского. — М.: Наука, 1964. — 552 с.
22. Сопротивление материалов/Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др. — Киев, 1973. — 775 с.
23. Сопротивление материалов/А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Н.И. Монахов и др. — М.: Высш. шк., 1979. — 595 с.
24. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности/Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков; Под ред. Г.С. Варданяна. — М.: Изд-во АСВ, 1995. — 568 с.
25. Справочник по сопротивлению материалов/Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев; Отв. ред. Г.С. Писаренко. — Киев: Наукова думка, 1988. — 736 с.
26. Справочник машиностроителя. Т. 3./Н.С. Ачеркан, М.П. Вукалович, В.Н. Кудрявцев и др.; Ред. И.И. Трапезин. — М.: ГНТИ машиностр. лит-ры, 1962. — 652 с.
27. *Старовойтов Э.И.* Сопротивление материалов. — Гомель: БелГУТ, 1999. — 219 с.
28. *Степин П.А.* Сопротивление материалов. — М.: Высш. шк., 1987. — 367 с.
29. *Терегулов И.Г.* Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. — М.: Высш. шк., 1984. — 472 с.
30. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. — В 2-х т. — М.: Наука, 1965.
31. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. — 592 с. — (Сер. Механика в техническом университете; Т. 2).
32. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1967. — 375 с.
33. *Шалашилин В.И., Горшков А.Г., Трошин В.Н.* Сопротивление материалов: Учеб. пособие. — Изд-во МАИ, 2000. — 616 с.
34. *Шапиро Д.М., Подорванова А.И., Миронов А.Н.* Сборник задачи по сопротивлению материалов. — М.: Высш. шк., 1970. — 333 с.