

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**  
Учебное пособие

Дается краткое изложение всех разделов механики деформируемого тела: теории упругости, вязкоупругости, пластичности и ползучести. Рассмотрены модели тонких тел, теория устойчивости и механика разрушения. Представлен необходимый математический аппарат.

Книга адресована научным работникам, инженерам, аспирантам и студентам университетов.

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>6</b>
<b>1 Математические средства</b>	<b>7</b>
1.1 Векторы и тензоры	7
1.2 Линии, поверхности и поля	14
1.3 О простейших задачах математической физики	19
1.4 Функции комплексного переменного	22
1.5 Элементы вариационного исчисления	26
1.6 Асимптотические методы	31
<b>2 Общие законы механики</b>	<b>36</b>
2.1 Система материальных точек	36
2.2 Абсолютно твёрдое тело	37
2.3 Относительное движение	39
2.4 Принцип виртуальной работы	41
2.5 Уравнения Лагранжа	42
2.6 Гамильтонова механика	44
2.7 Статика	47
2.8 Колебания	48
2.9 Неголономные системы	50
<b>3 Основы механики деформируемого тела</b>	<b>53</b>
3.1 Модель сплошной среды. Дифференцирование	53
3.2 Деформация и поворот	54
3.3 Поле скоростей	56
3.4 Объёмное расширение и баланс массы	57
3.5 Напряжения и баланс импульса	58
3.6 Баланс моментов и его следствия	60
3.7 Виртуальная работа	61
3.8 Законы термодинамики	62
3.9 Определяющие уравнения	64

3.10	Переход к отчётной конфигурации . . . . .	65
3.11	Линеаризация уравнений . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Классическая линейная упругость</b> . . . . .	<b>69</b>
4.1	Полная система уравнений . . . . .	69
4.2	Общие теоремы статики . . . . .	70
4.3	Уравнения в перемещениях . . . . .	72
4.4	Определение перемещений по деформациям. Уравнения совместности . . . . .	73
4.5	Сосредоточенная сила в неограниченной среде . . . . .	75
4.6	Вариационные принципы . . . . .	76
4.7	Антиплоская деформация . . . . .	80
4.8	Кручение стержней . . . . .	81
4.9	Плоская задача . . . . .	87
4.10	Контактные задачи . . . . .	93
4.11	Температурные деформации и напряжения . . . . .	98
4.12	Моментная среда Коссера . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Тонкие тела</b> . . . . .	<b>104</b>
5.1	Особенности механики тонких тел . . . . .	104
5.2	Нелинейная теория стержней . . . . .	110
5.3	Линейная теория стержней . . . . .	115
5.4	Задача Сен-Венана . . . . .	119
5.5	Асимптотическое расщепление трёхмерной задачи . . . . .	123
5.6	Изгиб пластины . . . . .	127
5.7	Линейная теория оболочек . . . . .	131
5.8	Нелинейно-упругие оболочки . . . . .	138
5.9	Тонкостенные стержни . . . . .	142
<b>6</b>	<b>Динамика упругих тел</b> . . . . .	<b>146</b>
6.1	Колебания упругих тел . . . . .	146
6.2	Волны в упругой среде . . . . .	148
6.3	Динамика стержней . . . . .	150
6.4	Метод возмущений для линейных систем . . . . .	153
6.5	Нелинейные колебания . . . . .	156
6.6	Критические скорости роторов . . . . .	158

<b>7</b>	<b>Устойчивость равновесия</b>	<b>162</b>
7.1	Основы теории устойчивости	162
7.2	Устойчивость стержней	163
7.3	Неконсервативные задачи	166
7.4	Уравнения в вариациях для нелинейных оболочек	167
7.5	Устойчивость пластин	169
7.6	Вращение гибкого вала в трубке-оболочке	170
<b>8</b>	<b>Малые пластические деформации</b>	<b>173</b>
8.1	Экспериментальные данные	173
8.2	Определяющие уравнения	175
8.3	Полый шар под действием внутреннего давления	178
8.4	Балки и диски	180
8.5	Кручение	182
8.6	Плоская деформация	183
8.7	Изгиб жёстко-пластических пластин	186
8.8	Вариационные принципы для жёстко-пластического тела	188
8.9	Теоремы о предельной нагрузке	190
<b>9</b>	<b>Разрушение</b>	<b>193</b>
9.1	О критериях прочности	193
9.2	Напряжённое состояние у фронта трещины	194
9.3	Силы, действующие на фронт трещины	197
9.4	Учёт сил сцепления	200
9.5	J-интеграл и определение КИН	200
9.6	Рост трещин	203
9.7	Длительная прочность и накопление повреждений	204
<b>10</b>	<b>Реология</b>	<b>206</b>
10.1	Реологические модели	206
10.2	Линейная вязкоупругость	208
10.3	Пластические материалы	210
10.4	Идеальная жидкость	211
10.5	Вязкая жидкость	214
10.6	Ползучесть металлов	215
	<b>Список литературы</b>	<b>218</b>
	<b>Предметный указатель</b>	<b>226</b>

# Предисловие

Механика деформируемого твёрдого тела — одна из наиболее развитых и совершенных областей математической физики, это важная часть физической картины мира. Она имеет огромное практическое значение, без неё невозможно серьёзное проектирование конструкций — зданий, мостов, кораблей и т. д.

В двадцатом веке эта наука достигла высокого совершенства — особенно для упругих тел. Но успехи остаются малоизвестными для армии расчётчиков, ошибки в оценке прочности и жёсткости конструкций повторяются.

Большие новые перспективы в механике связаны с компьютерами, достижения вычислителей восхищают. Однако намечился разрыв между теоретическими основами моделирования и его компьютерной реализацией. Мощные современные программы нередко используются без должного представления о законах механики.

В этой, небольшой по объёму, книге автор стремился показать и совершенство, и доступность для восприятия современной механики деформируемого тела. Он надеется, что книга будет и учебным пособием — даже для вычислителей. Он сознает, что краткость — не всегда сестра таланта, и что список литературы должен быть объёмнее.

# Глава 1

## Математические средства

### 1.1 Векторы и тензоры

Когда-то векторы считались слишком сложным понятием, но теперь они изучаются в средней школе. Перестает быть пугалом и слово «тензор». Векторы — это тензоры первого ранга. Они определяются не только своими численными значениями (модулями), но и направлением в пространстве.

*Векторы* можно умножать на число, складывать, перемножать скалярно и векторно. В системе декартовых осей  $x, y, z$  ( $x_1, x_2, x_3$ ) с ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) вектор представляется в виде

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \sum a_i \mathbf{e}_i \equiv a_i \mathbf{e}_i. \quad (1.1)$$

Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющемуся индексу. Компоненты (проекции) вектора равны скалярным произведениям:  $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$ ; вообще,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = a_i b_i. \quad (1.2)$$

Модуль вектора  $|\mathbf{a}| = (a_i a_i)^{1/2}$ . Для ортов декартовой системы

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (1.3)$$

символы Кронекера.

Векторное произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$  по модулю равно

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$$

и направлено в соответствии с правилом правого винта: он ввинчивается в направлении  $\mathbf{c}$ , вращаясь от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$ . Вводя символы Леви-Чивита  $\epsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k$ , будем иметь

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_i b_j \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (1.4)$$

Отметим, что смешанное произведение любых трёх векторов

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

равно объёму построенного на них параллелепипеда — если они образуют «правую тройку». Символы  $\epsilon_{ijk}$  равны нулю, когда среди индексов есть равные, и  $\pm 1$  в иных случаях.

Векторное произведение называется псевдовектором, поскольку содержит дополнительный произвол в правиле винта. Основное свойство векторов (и вообще тензоров) — инвариантность, т. е. независимость от системы координат (базиса  $\mathbf{e}_i$ ). Правило винта как бы ограничивает инвариантность; поэтому будем использовать лишь правые тройки  $\mathbf{e}_i$ .

Важное свойство символов Леви-Чивита выражается определителем

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

и в частном случае даёт

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} \Rightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.6)$$

Поряду с базисом  $\mathbf{e}_i$  представим себе и другой базис  $\mathbf{e}'_i$ . Соотношение их определяется «направляющими косинусами»:

$$\alpha_{ik} \equiv \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k = \cos(\widehat{\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k}), \quad \mathbf{e}'_i = \alpha_{ik} \mathbf{e}_k, \quad (1.7)$$

причём

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} \quad (-\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j). \quad (1.8)$$

Поскольку любой вектор инвариантен, то

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{e}'_i \Rightarrow v'_i = \alpha_{ik} v_k. \quad (1.9)$$

Установленный закон преобразования компонент можно использовать для определения вектора: если в каждом базисе дана тройка чисел  $v_i$ , причём

соблюдается (1.9), то за этой тройкой стоит инвариантный объект — вектор  $\underline{v}$ .

Мы подготовлены к определению тензора второго ранга. Когда в каждом базисе задано 9 величин  $T_{ij}$  с законом преобразования

$$T'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jn}T_{kn}, \quad (1.10)$$

за ними «скрывается» инвариантный объект — тензор второго ранга  $\underline{T}$ . Заметим, что закон (1.10) — как бы дважды применённый (1.9).

Важнейшие примеры таких тензоров — диада  $\underline{ab}$ , единичный тензор  $\underline{E}$  и оператор линейного преобразования вектора в вектор. Если  $\underline{a}$  и  $\underline{b}$  — векторы, то 9 величин  $C_{ij} = a_i b_j$  подчиняются закону (1.10); этот тензор

$$\underline{c} = \underline{ab} \quad (1.11)$$

называется диадным произведением или просто диадой.

Пусть далее в каждом базисе  $E_{ij} \equiv \delta_{ij}$ . Благодаря (1.8) закон (1.9) выполняется в этом случае. Тензор с такими компонентами называется единичным.

Теперь представим себе линейное отображение множества векторов  $\underline{a}$  в векторы  $\underline{b}$ . В каждом базисе имеем  $a_i = c_{ij}b_j$ . Нетрудно доказать, что коэффициенты  $c_{ij}$  обязаны меняться по закону (1.9).

Далее необходимо определить тензоры третьего и ещё более высокого ранга. 27 величин  $A_{ijk}$ , меняющихся по закону

$$A'_{ijk} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}A_{pqr}, \quad (1.12)$$

являются компонентами тензора третьего ранга  ${}^3\underline{A}$ . Простейший пример — триада

$${}^3\underline{A} = \underline{abc}, \quad A_{ijk} = a_i b_j c_k. \quad (1.13)$$

Символы Леви-Чивита являются компонентами тензора  ${}^3\underline{\epsilon}$ . Подобным образом вводятся тензоры любого высокого ранга.

С тензорами можно производить *четыре основных действия*. Первое объединяет в себе умножение на число и сложение:

$$\underline{c} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}. \quad (1.14)$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  — скаляры, а тензоры  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  и  $\underline{c}$  — любого (одинакового) ранга.

Второе действие — умножение. Сомножители могут быть любых рангов, произведение имеет суммарный ранг:

$$\underline{aT} = {}^3\underline{A} \quad \Rightarrow \quad a_i T_{jk} = A_{ijk}. \quad (1.15)$$



Частным случаем является (1.11).

Третье действие – свёртка; ранг тензора уменьшается на два в результате суммирования. Для  ${}^3\mathbf{A}$  возможны три варианта:

$$A_{iik} = a_k, \quad A_{ijj} = b_j, \quad A_{ijj} = c_i. \quad (1.16)$$

Инвариантный характер  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  следует из (1.12) и (1.8):

$$a'_k = \alpha_{ip}\alpha_{iq}\alpha_{kr}A_{pqr} = \alpha_{kr}a_r.$$

Для тензора второго ранга свёртка даёт скаляр, называемый первым инвариантом или следом:

$$T_{ii} = I_1(\mathbf{T}) = \text{tr } \mathbf{T}. \quad (1.17)$$

Четвертое из основных действий – перестановка индексов. Для тензора второго ранга это транспонирование:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \Rightarrow A_{ij} = B_{ji}. \quad (1.18)$$

Для векторов связь компонент с самим инвариантным объектом – это (1.1). Аналогичные соотношения верны и для тензоров:

$$\mathbf{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad {}^3\mathbf{A} = A_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k. \quad (1.19)$$

В каждом базисе имеем 9 диад  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ . По первому действию образуем правую часть (для  $\mathbf{T}$ ) и убеждаемся, что сумма не зависит от базиса, т. е. инвариантна, и что её компоненты действительно равны  $T_{ij}$ . Разложение  ${}^3\mathbf{A}$  по триадам обосновывается столь же легко.

Четыре основных действия можно комбинировать. Особенно часто встречается сочетание умножения и свёртки:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{b} \Rightarrow a_i T_{ij} = b_j; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{b} = a_i T_{ij} b_j. \quad (1.20)$$

Точка означает свёртку в произведении по соответствующим соседним индексам. Примеры с двойной свёрткой:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji}, \quad {}^4\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{T} \Rightarrow c_{ijkl} \varepsilon_{lk} = T_{ij}. \quad (1.21)$$

Векторное умножение не является самостоятельным действием, это комбинация умножения и свёртки с участием тензора Леви-Чивита:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{T} \equiv a_i \varepsilon_{ijk} T_{jn} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_n. \quad (1.22)$$

Если (·) приравнивает соседние индексы, то (×) означает скалярную альтернативу.

«Скалярное» и векторное умножение естественно выглядят с полиадными представлениями:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{T}} &= a_i \mathbf{e}_i \cdot T_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = a_j \delta_{ij} T_{jk} \mathbf{e}_k = a_i T_{jk} \mathbf{e}_k, \\ \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{E}} &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = -^3 \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \\ \underline{\mathbf{e}}_i \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_j &= \mathbf{e}_i \cdot T_{pq} \mathbf{e}_p \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ip} T_{pq} \delta_{qj} = T_{ij}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Важные понятия *собственных значений*  $\lambda_i$  и *собственных векторов*  $\mathbf{a}_i$  возникают из задачи

$$\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad T_{ij} a_j = \lambda a_i. \quad (1.24)$$

В компонентах это обычная матричная задача на собственные значения с характеристическим уравнением

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (1.25)$$

(детерминант). Коэффициенты кубического уравнения называются *главными инвариантами тензора*:

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{ii}, \quad I_2 = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} + T_{11}T_{33} - T_{13}T_{31} + \\ &+ T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32}, \quad I_3 = |T_{ij}| \equiv \det \underline{\mathbf{T}}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Симметричный тензор  $\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}^T$  имеет замечательные свойства: его собственные значения вещественны, а направленные по  $\mathbf{a}_i$  «главные оси» (при различных  $\lambda_i$ ) ортогональны. Первое доказывается от противного, а второе — следующим образом:

$$\mathbf{a}_2 \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$$

(всегда  $\mathbf{a} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \underline{\mathbf{T}}^T \cdot \mathbf{a}$ ). Собственные векторы образуют ортонормированный базис, и компоненты  $\underline{\mathbf{T}}$  в нём таковы:

$$T_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \lambda_k \delta_{ik} \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{T}} = \sum \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \quad \left( \sum_i \lambda_i \right). \quad (1.27)$$

Здесь отказывает правило суммирования по повторяющемуся индексу, поскольку используется специальный базис.

Все действия с тензором упрощаются с представлением (1.27):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum \lambda_i, I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \\ \underline{\underline{T}}^2 &\equiv \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}} = \sum \lambda_i^2 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \\ \underline{\underline{T}}^{-1} &= \sum \lambda_i^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \quad (\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{E}}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Можно извлечь и квадратный корень при  $\lambda_i \geq 0$ :  $\underline{\underline{T}}^{\frac{1}{2}} = \sum \lambda_i^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ . Становится очевидным тождество Гамильтона – Кэли

$$-\underline{\underline{T}}^3 + I_1 \underline{\underline{T}}^2 - I_2 \underline{\underline{T}} + I_3 \underline{\underline{E}} = 0. \quad (1.29)$$

Любой тензор второго ранга можно представить суммой симметричной и антисимметричной частей:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^S + \underline{\underline{T}}^A, \quad \underline{\underline{T}}^S \equiv \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T), \quad \underline{\underline{T}}^A \equiv \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T). \quad (1.30)$$

У антисимметричного тензора

$$\underline{\underline{B}} = -\underline{\underline{B}}^T, \quad B_{ik} = -B_{ki},$$

и он вполне определяется своим «сопутствующим вектором»:

$$\underline{\underline{B}} = \mathbf{b} \times \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{B}}_{\times}, \quad \underline{\underline{B}}_{\times} \equiv B_{ik} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k. \quad (1.31)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \underline{\underline{E}} &= -\frac{1}{2} B_{ik} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) \times \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \\ &= -\frac{1}{2} B_{ik} (\mathbf{e}_k \delta_{ij} - \mathbf{e}_i \delta_{kj}) \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} (\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}^T) = \underline{\underline{B}}. \end{aligned}$$

«Векторный инвариант»  $\underline{\underline{B}}_{\times}$  и сопутствующий вектор  $\mathbf{b}$  связаны лишь с антисимметричной частью тензора.

Нам понадобится и понятие тензора поворота. Он связывает два базиса:

$$\mathbf{e}'_i = \underline{\underline{P}} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \underline{\underline{P}} \equiv \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_i = \alpha_{ik} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i; \quad \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}}^T = \underline{\underline{E}}, \quad \det \underline{\underline{P}} = 1. \quad (1.32)$$

Важной является теорема о полярном разложении тензора: при  $\det \underline{\underline{F}} > 0$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{P}}, \quad (1.33)$$

где  $\underline{\underline{P}}$  — тензор поворота, а  $\underline{U}$  и  $\underline{V}$  — симметричные и положительные ( $\mathbf{a} \cdot \underline{U} \cdot \mathbf{a} > 0$  для любого  $\mathbf{a}$ ). Ясно, что

$$\underline{V} = (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T)^{1/2} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{U} \cdot \underline{\underline{P}}^T; \quad (1.34)$$

тензор  $\underline{V}$  отличается от  $\underline{U}$  лишь поворотом, у него те же собственные значения и инварианты.

До сих пор мы рассматривали векторы и тензоры лишь в ортонормированном базисе ( $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$ ). Обратимся далее к *общему случаю базиса* из трёх линейно независимых векторов  $\mathbf{a}_i$ . Необходимо ввести так называемый взаимный базис или кобазис  $\mathbf{a}^i$  с условием

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^k = \delta_i^k. \quad (1.35)$$

Любой вектор теперь представляется в виде

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i = v_i \mathbf{a}^i, \quad v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i, \quad v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i. \quad (1.36)$$

Суммировать можно лишь по разновысоким индексам. Компоненты  $v_i$  называются ковариантными, а  $v^i$  — контравариантными.

В разложении тензора второго ранга имеем четыре типа компонент — ковариантных, контравариантных и смешанных:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= T_{ik} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^k = T^{ik} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k = T_i^k \mathbf{a}^i \mathbf{a}_k = T_k^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^k, \quad T_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \mathbf{a}_k, \\ &T_i^k = \mathbf{a}_i \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \mathbf{a}^k, \quad \dots \end{aligned} \quad (1.37)$$

В частности, для единичного тензора

$$\underline{\underline{E}} = g_{ik} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^k = g^{ik} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k = \mathbf{a}^i \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i, \quad g_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k, \quad g^{ik} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^k. \quad (1.38)$$

Величины  $g_{ik}$  называются «ковариантными компонентами метрического тензора» — не очень удачный термин.

При ортонормированном базисе взаимный базис совпадает с исходным, различие ко- и контравариантных компонент исчезает. Но при рассмотрении больших деформаций без косоугольного базиса не обойтись.

В задаче на собственные значения (1.24) в компонентах характеристическое уравнение будет таким

$$|T_{ik} - \lambda g_{ik}| = 0, \quad |T^{ik} - \lambda g^{ik}| = 0, \quad |T_i^k - \lambda \delta_i^k| = 0.$$

Выражения инвариантов (1.26) сохраняются лишь для смешанных компонент. Собственные векторы  $\mathbf{a}_i$  при различных  $\lambda_i$  линейно независимы; в базисе из них

$$\underline{T} = \sum \lambda_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^i \quad (1.39)$$

диагонализация несимметричного тензора.

## 1.2 Линии, поверхности и поля

Точка в пространстве определяется радиус-вектором  $\mathbf{r} = x_k \mathbf{e}_k$ . Линию можно рассматривать как однопараметрическое множество с зависимостью  $\mathbf{r}(q)$ . По касательной к линии направлен вектор производной

$$\mathbf{r}'(q) = |\mathbf{r}'(q)| \mathbf{t};$$

$\mathbf{t}$  — орт касательной (рис. 1).

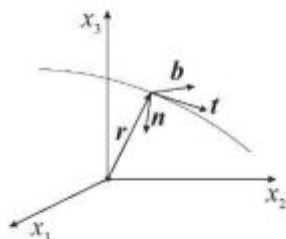


Рис. 1

Если координата совпадает с дуговой  $q = s$ , то  $|\mathbf{r}'| = 1$ . Орт главной нормали  $\mathbf{n}$ , бинормали  $\mathbf{b}$  и кривизна  $k$  вводятся равенствами  $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$ ,  $k \times \mathbf{n} = \mathbf{b}$ . В формулах Френе

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}' = D \times \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Вектор Дарбу  $D$  является угловой скоростью вращения триэдра  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  при возрастании  $s$  с единичной скоростью; он равен

$$D = \tau \mathbf{t} + k \mathbf{b}, \quad k = |\mathbf{r}''|, \quad \tau = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''' / k^2 \quad (2.2)$$

кручение кривой. Функции  $k(s)$  и  $\tau(s)$  однозначно определяют форму кривой (как коэффициенты дифференциальных уравнений (2.1)).

Поверхность — это двухпараметрическое множество с зависимостью  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2) \equiv \mathbf{r}(q^\alpha)$ . Меняя  $q^1$  при постоянной  $q^2$ , получим координатную линию  $q^1$ ; если наоборот — линию  $q^2$ . Каждая точка поверхности лежит на пересечении двух координатных линий. Векторы производных  $\partial \mathbf{r} / \partial q^\alpha \equiv \partial_\alpha \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_\alpha$  направлены по касательным к координатным линиям. Орт нормали к поверхности

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (2.3)$$

Мы имеем *скалярное поле*  $u(\mathbf{r})$ , если в каждой точке пространства задано значение величины  $u$  (поле температуры среды, поле давления идеального газа). С декартовыми координатами имеем функцию трёх переменных  $u(x_k)$ ; её дифференциал

$$du = \partial_k u dx_k = d\mathbf{r} \cdot \nabla u, \quad \nabla \equiv \mathbf{e}_k \partial_k \quad (2.4)$$

( $\partial_k \equiv \partial/\partial x_k$ ). Здесь  $\nabla$  — это *набла-оператор Гамильтона*,  $\nabla u$  — градиент поля  $u$ . Выражение  $\nabla$  должно быть таким, чтобы соблюдалось (2.4). Вектор  $\nabla u$  направлен по линии скорейшего роста величины  $u$ , а его модуль равен скорости этого роста. Равенства  $u = \text{const}$  определяют поверхности уровня, векторы  $\nabla u$  к ним перпендикулярны.

*Векторное поле* величины  $\mathbf{v}$  задаётся функцией  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Сохраняется (2.4), но  $\nabla \mathbf{v}$  теперь тензор

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{e}_k \partial_k \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \partial_i v_k. \quad (2.5)$$

След и векторный инвариант этого тензора являются *дивергенцией* и *ротором* векторного поля:

$$\text{div } \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_k \cdot \partial_k \mathbf{v} = \partial_k v_k, \quad \text{rot } \mathbf{v} \equiv \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_k \times \partial_k \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} \partial_i v_j \mathbf{e}_k. \quad (2.6)$$

Дивергенция и ротор играют важную роль в связи с интегральными теоремами теории поля. *Теорема Гаусса о дивергенции* выражается равенством

$$\oint_O \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dO = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV. \quad (2.7)$$

Слева — поток вектора  $\mathbf{a}$  через замкнутую поверхность  $O$ , ограничивающую объём  $V$ ; орг внешней нормали  $\mathbf{n}$  направлен наружу.

*Теорема Стокса о циркуляции* выглядит так:

$$\oint_C (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) = \int_O \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{a} dO. \quad (2.8)$$

Это циркуляция вектора  $\mathbf{a}$  по замкнутому контуру  $C$ ; натянутая на  $C$  поверхность  $O$  может быть любой, но направление нормали  $\mathbf{n}$  согласовано с направлением обхода  $C$  правилом правого винта.

Векторное поле называется *потенциальным*, если

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_C (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \nabla u. \quad (2.9)$$

Скаляр  $u$  — это потенциал поля  $\mathbf{v}$ .

Соленоидальное поле характеризуется равенствами

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \int_O \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dO = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.10)$$

Здесь имеем векторный потенциал  $\mathbf{A}$ . Дополнительно можно задать «условие калибровки»  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \dots$ .

В общем случае векторное поле можно представить суммой потенциального и соленоидального со скалярным  $\varphi$  и векторным  $\psi$  потенциалами:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \nabla \times \psi, \quad \nabla \cdot \psi = \dots \quad (2.11)$$

До сих пор были дифференциальные операции первого порядка. Второй порядок имеет оператор Лапласа  $\Delta$ :

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla u = \partial_k \partial_k u. \quad (2.12)$$

Реже встречается

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}. \quad (2.13)$$

Важнейшим фундаментальным примером поля является электромагнитное. Смысл электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{B}$  векторов ясен из выражения силы, действующей на заряд  $q$  при его движении со скоростью  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.14)$$

В динамике поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  связаны и определяются знаменитой четверкой уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\varepsilon_0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{j}/\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь (...) производная по времени,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $c$  — скорость света,  $\rho$  — заряд на единицу объёма,  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока. В статике «электричество отделяется от магнетизма»:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\phi = \rho/\varepsilon_0. \quad (2.16)$$

Это уравнение Пуассона является одним из основных в математической физике. Для магнитного поля имеем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0; \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= c^2(\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}) = \mathbf{j}/\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь присутствует векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , и он должен удовлетворять уравнению Пуассона.

При отсутствии зарядов и токов потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. являются гармоническими функциями:

$$\Delta\phi = 0, \quad \Delta\mathbf{A} = 0. \quad (2.18)$$

От декартовых координат  $x_k$  перейдем к произвольным криволинейным координатам  $q^k$ . Радиус-вектор произвольной точки — это функция  $\mathbf{r}(q^k)$ , каждая точка лежит на пересечении трёх координатных линий: по касательным к ним направлены векторы производных  $\mathbf{r}_k \equiv \partial_k \mathbf{r}$ , составляющие в каждой точке базис при взаимном базисе  $\mathbf{r}^k$ . Из выражения дифференциала (2.4) следует

$$\nabla = \mathbf{r}^k \partial_k. \quad (2.19)$$

В качестве примера рассмотрим цилиндрические координаты (рис. 2). Имеем

$$\begin{aligned} q^1 &= \rho, \quad q^2 = \phi, \quad q^3 = x_3 \equiv z, \\ \mathbf{r}(q^i) &= \rho \mathbf{e}_\rho(\phi) + z \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_\rho &\equiv \mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_\rho, \\ \mathbf{r}_2 &= \rho \mathbf{e}'_\rho \equiv \rho \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{k}, \\ \nabla &= \mathbf{e}_\rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi \partial_\phi + \mathbf{k} \partial_z. \end{aligned} \quad (2.20)$$

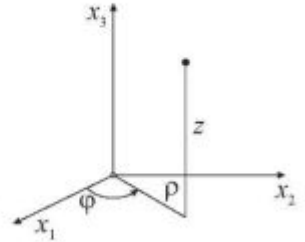


Рис. 2

В таких координатах любой вектор представляется в виде

$$\mathbf{v} = v_\rho \mathbf{e}_\rho + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_z \mathbf{k}; \quad (2.21)$$

тогда его градиент

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{e}_\rho (\partial_\rho v_\rho \mathbf{e}_\rho + \partial_\rho v_\phi \mathbf{e}_\phi + \partial_\rho v_z \mathbf{k}) + \\ &+ \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi (\partial_\phi v_\rho \mathbf{e}_\rho + v_\rho \mathbf{e}_\phi + \partial_\phi v_\phi \mathbf{e}_\phi - v_\phi \mathbf{e}_\rho + \partial_\phi v_z \mathbf{k}) + \\ &+ \mathbf{k} (\partial_z v_\rho \mathbf{e}_\rho + \partial_z v_\phi \mathbf{e}_\phi + \partial_z v_z \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \partial_\rho v_\rho + \frac{1}{\rho} (v_\rho + \partial_\phi v_\phi) + \partial_z v_z, \quad \nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{1}{\rho} \partial_\phi v_z - \right. \\ &\left. - \partial_z v_\phi \right) \mathbf{e}_\rho + (\partial_z v_\rho - \partial_\rho v_z) \mathbf{e}_\phi + \left[ \partial_\rho v_\phi - \frac{1}{\rho} (\partial_\phi v_\rho - v_\phi) \right] \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.23)$$



Эффективный формальный аппарат позволяет обходиться без графических построений. Для вычисления дивергенции не нужно рисовать элемент с границами  $q^k = \text{const}$ ,  $q^k + dq^k = \text{const}$  и считать потоки вектора через шесть граней.

Заметим также, что используемое прямое тензорное исчисление не требует введения символов Кристоффеля, ковариантных производных и других атрибутов индексной записи.

Дифференциальные операции над тензорами не представляют трудностей. В декартовых координатах для тензора второго ранга

$$\nabla \underline{\underline{T}} = e_i \partial_i T_{jk} e_j e_k, \quad \nabla \cdot \underline{\underline{T}} = \partial_i T_{ik} e_k \quad (2.24)$$

тензор третьего ранга и вектор. Отметим важные тождества

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\underline{ab}) &= \nabla \cdot \underline{ab} + \underline{a} \cdot \nabla \underline{b}, & \nabla \cdot (\varphi \underline{E}) &= \nabla \varphi, \\ \nabla \cdot (\underline{T} \cdot \underline{v}) &= \nabla \cdot \underline{T} \cdot \underline{v} + \underline{T} \cdot \nabla \underline{v}^T. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Это легко обосновывается в индексной записи:  $\partial_i (a_i b_j) = \partial_i a_i b_j + a_i \partial_i b_j$ . Или же достаточно представить  $\nabla = e_i \partial_i$ .

В криволинейных координатах основным является (2.19). Для симметричного тензора в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \sigma_r e_r e_r + \sigma_\varphi e_\varphi e_\varphi + \sigma_z k k + \tau_{r\varphi} (e_r e_\varphi + \\ &+ e_\varphi e_r) + \tau_{rz} (e_r k + k e_r) + \tau_{\varphi z} (e_\varphi k + k e_\varphi), \quad \nabla \cdot \underline{\underline{T}} = \\ &= [\partial_r \sigma_r + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi + \partial_\varphi \tau_{r\varphi}) + \partial_z \tau_{rz}] e_r + [\partial_r \tau_{r\varphi} + \frac{1}{r}(\partial_\varphi \sigma_\varphi + \\ &+ 2\tau_{r\varphi}) + \partial_z \tau_{\varphi z}] e_\varphi + [\partial_r \tau_{rz} + \frac{1}{r}(\tau_{rz} + \partial_\varphi \tau_{\varphi z}) + \partial_z \sigma_z] k \end{aligned} \quad (2.26)$$

(обозначения механических напряжений).

Неким обобщением математического понятия поля являются *функции тензорного аргумента*. В отображении  $\Phi(x)$  аргумент и функция могут быть тензорами любого ранга. Часто встречаются скалярные функции  $\Phi(\underline{\underline{T}})$ ; в каждом базисе имеем  $\Phi(T_{ij})$ , но при переходе к новому базису отображение меняется с сохранением значения  $\Phi$ . Производная

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{T}}} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial T_{ik}} e_i e_k, \quad d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{T}}} \cdot d\underline{\underline{T}}^T. \quad (2.27)$$

Главные инварианты как функции тензора дифференцируются так:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{E}}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{T}}} = I_1 \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{T}}^T, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{T}}} = I_3 \underline{\underline{T}}^{-T}. \quad (2.28)$$

В последней записи — обращение с транспонированием. Первое равенство очевидно, т. к.  $I_1 = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{T}}$ . Второе выводится из тождества  $I_1^2 = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}} + 2I_2$ . Третье — это правило дифференцирования определителя.

### 1.3 О простейших задачах математической физики

Распределение температуры  $\theta(\mathbf{r}, t)$  в теле описывается уравнением

$$\kappa \Delta \theta + b = c \dot{\theta}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $c$  — теплоёмкость на единицу объёма,  $b$  — скорость подвода тепла в единицу объёма (например, при проникающем нагреве излучением),  $(\dots) \dot{\phantom{x}} = \partial_t$  — производная по времени. При выводе (3.1) вводится вектор потока тепла  $\mathbf{h}$ : величина  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} dO$  равна тепловой мощности, передаваемой через площадку  $\mathbf{n} dO$  (в направлении  $\mathbf{n}$ ). По закону Фурье

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla \theta \quad (3.2)$$

первое слагаемое в (3.1) равно  $-\nabla \cdot \mathbf{h}$ .

Должно быть задано начальное условие  $\theta(\mathbf{r}, 0) = \theta_0(\mathbf{r})$ . Граничные условия на поверхности  $O$  могут быть разными. В первой красной задаче задано  $\theta$ . Во второй — нормальная производная:  $\kappa \partial_n \theta = q$ , где  $q$  — тепловая мощность на единицу поверхности извне (при теплоизоляции  $q = 0$ ). Наиболее сложными являются задачи с некоторыми комбинированными условиями (смешанными).

Стационарное распределение температуры  $\theta(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению Пуассона, а при  $b = 0$  — Лапласа.

Обратимся к другому знаменитому уравнению — *колебаний струны*:

$$T u'' + f = \rho \ddot{u}. \quad (3.3)$$

Здесь  $u(x, t)$  — прогиб,  $T$  — сила натяжения,  $\rho$  — масса на единицу длины,  $f$  — поперечная нагрузка. Уравнение выражает второй закон Ньютона для бесконечно малого элемента струны (рис. 3).

Угол наклона элемента

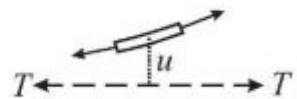


Рис. 3

$$\alpha(x, t) = \arctg u' \approx u',$$

поперечная проекция силы справа

$$(T + \dots) \sin \alpha(x + dx, t) \approx T(u' + u'' dx).$$

Прогиб считается бесконечно малым — тогда можно пренебречь изменением силы  $T$ . Точное нелинейное уравнение струны рассмотрим в главе 5.

Граничные условия к (3.3) — заданный на концах  $x = 0, l$  прогиб. Начальные условия — на прогиб и скорость:  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $\dot{u}(x, 0) = V_0(x)$ .

Рассмотрим три уравнения

$$\kappa(\partial_x^2 \theta + \partial_y^2 \theta) + b = 0, \quad (3.4)$$

$$\kappa \theta'' + b = c \dot{\theta} \quad (3.5)$$

и (3.3). Они относятся к трём разным *типам уравнений* в частных производных — эллиптическому, параболическому и гиперболическому. Если решения эллиптического уравнения (3.4) — гладкие, без каких-либо разрывов, то решения (3.3) — нет. Параболическое уравнение (3.5) занимает некое промежуточное место.

Качественное различие между уравнениями связано с характеристическими линиями, или просто *характеристиками*. Для (3.3) в плоскости  $x, t$  рассмотрим вспомогательную задачу Коши: на некоторой линии  $\Gamma$  (с координатой  $s$ ) задана функция  $u = \varphi(s)$  и нормальная производная  $\partial_n u = \psi(s)$ ; с помощью (3.3) требуется найти все вторые производные  $u'', \dot{u}', \ddot{u}$ . Но для них имеем линейную систему алгебраических уравнений

$$u'' dx + \dot{u}' dt = du', \quad \dot{u}' dx + \ddot{u} dt = d\dot{u}. \quad (3.6)$$

Правые части находятся по  $\varphi$  и  $\psi$ . Если определитель системы

$$D = \rho(c^2 dt^2 - dx^2) \quad (c^2 \equiv T/\rho) \quad (3.7)$$

не равен нулю, система однозначно разрешима — линия не является характеристикой. На характеристиках  $dx = \pm c dt$  имеем  $D = 0$  и необходимое условие разрешимости

$$\rho d(\dot{u} \mp cu') = f dt. \quad (3.8)$$

Интегрирование этого соотношения — своеобразный способ решения гиперболического уравнения.

Рассматривая подобным образом уравнение (3.4), обнаруживаем отсутствие характеристик — признак эллиптичности. Уравнение (3.5) имеет лишь одно семейство характеристик, что для второго порядка означает параболический тип.

Уравнения (3.3) – (3.5), как и (2.15) – (2.17), линейны. Для них справедлив закон суперпозиции: решение от суммы воздействий равно сумме решений от каждого воздействия в отдельности. Иногда этого достаточно — как в электростатике при заданном распределении зарядов. Точечный заряд  $q$ , находящийся в начале координат, создаёт поле с потенциалом  $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 r$  — решение (2.16) с учётом теоремы Гаусса. Для зарядов с плотностью  $\rho(\mathbf{r})$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV_1. \quad (3.9)$$

Заметим, что в механике деформируемого тела многие уравнения нелинейны, и закона суперпозиции для них нет.

Хорошо поставленная задача должна иметь единственное решение. Невозможность двух решений линейной задачи доказывается от противного. Рассмотрим пример: стационарную теплопроводность с заданной температурой на границе. Предположив существование двух решений, для их разности получим однородную задачу:

$$\Delta\tilde{\theta} = 0, \quad \tilde{\theta}|_0 = 0. \quad (3.10)$$

Используя далее тождества

$$\nabla \cdot (\theta \nabla \theta) = \theta \Delta \theta + |\nabla \theta|^2, \quad \int_O \theta \partial_n \theta dO = \int_O (\theta \Delta \theta + |\nabla \theta|^2) dV, \quad (3.11)$$

обнаруживаем  $\int |\nabla \tilde{\theta}|^2 dV = 0 \Rightarrow \tilde{\theta} = \text{const} = 0$ .

Едва ли не самый известный метод решения краевых задач математической физики носит имя *Фурье*. В одномерной задаче теплопроводности

$$a^2 \theta'' = \dot{\theta} \quad (a^2 \equiv \kappa/c), \quad \theta(0, t) = \theta(l, t) = 0, \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad (3.12)$$

рассматриваются частные решения с разделением переменных:

$$\theta = \varphi(x)T(t) \Rightarrow \varphi''/\varphi = \dot{T}/a^2 T = \text{const} \equiv -\lambda. \quad (3.13)$$

Учитывая граничные условия, приходим к простейшей задаче Штурма — Ливуилля

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \quad (3.14)$$

с набором собственных значений и собственных функций

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 / l^2 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \varphi_n = \sqrt{2/l} \sin n\pi x / l. \quad (3.15)$$

Система  $\varphi_n$  ортонормирована и полна — практически любую функцию можно разложить в ряд по  $\varphi_n$ :

$$\int_0^1 \varphi_k \varphi_n dx = \delta_{kn}, \quad u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k(x), \quad u_k = \int_0^1 u \varphi_k dx. \quad (3.16)$$

Определив из (3.13)  $T_k(t)$ , получим решение (3.12)

$$\theta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k a^2 t} \varphi_k(x), \quad (3.17)$$

где постоянные  $C_k$  находятся по  $\theta_0(x)$  в виде (3.16).

Примерно через сто лет после Фурье был предложен более общий метод собственных функций — уже для неоднородных задач. Решение уравнения (3.5) при условиях  $\theta(0, t) = \theta_1(t)$ ,  $\theta(l, t) = \theta_2(t)$  ищется сразу в виде ряда  $\theta = \sum \tau_k(t) \varphi_k(x)$ , и обыкновенные дифференциальные уравнения для  $\tau_k$  получаются после умножения (3.5) на  $\varphi_k$  и интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \kappa \left[ (\theta' \varphi_k - \theta \varphi_k') \Big|_0^l + \int_0^l \theta \varphi_k'' dx \right] + \int_0^l b \varphi_k dx &= c \dot{\tau}_k \Rightarrow \\ \Rightarrow c \dot{\tau}_k + \kappa \lambda_k \tau_k &= \kappa [\theta_1(t) \varphi_k'(0) - \theta_2(t) \varphi_k'(l)] + b_k(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

А это уравнение решается через интеграл Дюамеля:

$$\dot{\tau} + \omega \tau = f(t) \Rightarrow \tau(t) = \tau(0) e^{-\omega t} + \int_0^t f(y) e^{\omega(y-t)} dy. \quad (3.19)$$

Необходимо отметить, что при неоднородных граничных условиях ряды по собственным функциям сходятся хуже — неравномерно.

В настоящее время сложные аналитические решения уступают место более эффективным численным.

## 1.4 Функции комплексного переменного

Комплексное число имеет три формы представления:

$$z = x + iy = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi},$$

где  $i$  — мнимая единица,  $x = \operatorname{Re} z$  и  $y = \operatorname{Im} z$  — вещественная и мнимая части,  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  — модуль  $z$ ,  $\varphi = \arg z$  — аргумент. Сложение и умножение производятся по правилам

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Сопряжённое число

$$\bar{z} = x - iy \Rightarrow x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/2i.$$

Функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (4.1)$$

будем предполагать *аналитическими (регулярными, голоморфными)*. Это значит — дифференцируемыми и представимыми степенными рядами:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - a)^k; \\ C_0 = f(a), \quad C_1 = f'(a), \quad C_2 = f''(a)/2, \quad \dots \quad (4.2)$$

Ряды Тейлора (4.2) позволяют ввести  $\sin z$ ,  $\ln(1+z)$  и т. д. Оказывается, у ряда есть круг сходимости  $|z - a| \leq r$ , граница которого определяется *особыми точками*  $f(z)$  или *точками ветвления*. Особая точка  $z_0$  называется полюсом, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  и существенно особой, если предел не существует. Например, для  $e^{1/z}$  точка  $z = 0$  — существенно особая.

Значение  $z_0$  есть точка ветвления, если в её окрестности теряется однозначность —  $f(z)$  получает приращение при обходе вокруг  $z_0$ . Например:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \ln z = \ln |z| + i\varphi;$$

при обходе точки  $z = 0$  функция  $\ln z$  получает приращение  $2\pi i$ . Полагая  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , получим  $\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|}$  при  $\varphi = \pi$  и  $-\pi$ . Для однозначности в комплексной плоскости проводят линии разреза от точки ветвления, различая значения функции на берегах разреза.

Неоднозначность и необходимость разрезов возникает в результате процедуры аналитического продолжения функции посредством степенных рядов.

Вещественная и мнимая части регулярной функции (4.1) должны быть сопряжёнными гармоническими функциями, связанными условиями Коши – Римана:

$$\Delta u = \Delta v = 0, \quad \partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v. \quad (4.3)$$

Это следует из различных представлений производной

$$f'(z) = \partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y f/i = \partial_y v - i\partial_y u. \quad (4.4)$$

В векторной форме

$$\nabla u = \nabla v \times \mathbf{k} \quad (\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}). \quad (4.5)$$

Для определённых интегралов (по линии между  $z_1$  и  $z_2$ ) сохраняется формула Ньютона – Лейбница

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2}, \quad F' = f. \quad (4.6)$$

Отсюда можно заключить, что по замкнутому контуру

$$\oint f(z) dz = 0. \quad (4.7)$$

Однако, эта знаменитая теорема Коши верна лишь при отсутствии у  $f(z)$  особых точек внутри контура. В противном случае она нарушается из-за неоднозначности первообразной. Например:

$$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (4.8)$$

для любого контура с точкой  $z = 0$  внутри (приращение  $\ln z$ ).

В окрестности особой точки  $z = a$  вместо (4.2) имеем ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(z-a)^k = \dots + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \dots \quad (4.9)$$

У существенно особой точки присутствуют все члены с  $k < 0$ . У полюса порядка  $n$  – члены с  $k \geq -n$ , у простого полюса – с  $k \geq -1$ . Важнейшую роль играет коэффициент

$$C_{-1} = \text{Res } f(a) \quad -$$

вычет функции в точке  $z = a$ .

Все члены ряда Лорана имеют однозначную первообразную  $(z - a)^{k+1}/(k + 1)$  — кроме одного. Поэтому

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res } f(a_k) \quad (4.10)$$

теорема о вычетах. Мы пришли к ней при одной особой точке, но верно и обобщение.

Частным случаем (4.10) является интегральная формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a). \quad (4.11)$$

В случае простого полюса  $C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)$ . Если  $f(z) = P(z)/Q(z)$  — отношение аналитических функций, то

$$C_{-1} = P(a)/Q'(a) \quad (4.12)$$

по правилу Лопиталя. Для полюса второго порядка

$$C_{-1} = [f(z)(z - a)^2]'_{z=a}. \quad (4.13)$$

Одной из областей применения функций комплексного переменного является операционное исчисление. Преобразованием Лапласа или изображением функции  $f(t)$  ( $t \geq 0$ ) называется интеграл

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (4.14)$$

определённый сначала при достаточно больших  $\text{Re } p$ , а затем аналитически продолженный. Дифференцированию оригинала  $f(t)$  соответствует алгебраическая операция с изображением:

$$f(t) = \dot{F}(t), \quad \tilde{f}(p) = p\tilde{F}(p) - F(0). \quad (4.15)$$

Поэтому задача Коши

$$\dot{u} + au = f(t), \quad u(0) = u_0 \quad (4.16)$$

в изображениях решается так

$$p\tilde{u} - u_0 + a\tilde{u} = \tilde{f} \Rightarrow \tilde{u} = \frac{\tilde{f} + u_0}{p + a}. \quad (4.17)$$



Найти оригинал по изображению можно разными способами. Самый общий — по формуле Римана — Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt} dp. \quad (4.18)$$

Здесь часто помогает теорема о вычетах (4.10). Весьма полезна теорема о свёртке:

$$\tilde{f}(p) = \tilde{u}(p)\tilde{v}(p) \Rightarrow f(t) = \int_0^t u(\tau)v(t-\tau) d\tau \equiv u * v. \quad (4.19)$$

Учитывая, что  $1/(p+a)$  — изображение  $e^{-at}$ , получим из (4.17) решение задачи (4.16) в виде интеграла Дюамеля (3.19).

## 1.5 Элементы вариационного исчисления

Иоганн Бернулли и Леонард Эйлер ставили и решали задачи об экстремуме величин

$$I[u] = \int_a^b f(x, u, u') dx, \quad (5.1)$$

называемых *функционалами*. Имеем обобщение понятия функции — отображение  $u(x)$  в число  $I$ .

Ключевым является *понятие вариации*: это задаваемое нами бесконечно малое приращение величины, совместимое с заданными ограничениями — связями. Вариации определяются по правилам исчисления бесконечно малых:

$$\delta f(x) = f'(x)\delta x, \quad \delta F(x_k) = \sum \frac{\partial F}{\partial x_k} \delta x_k. \quad (5.2)$$

Вариация функционала (5.1) такова

$$\delta I = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \frac{\partial f}{\partial u'} \delta u' \right) dx = \frac{\partial f}{\partial u'} \delta u \Big|_a^b + \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial u} - \left( \frac{\partial f}{\partial u'} \right)' \right] \delta u dx. \quad (5.3)$$

Необходимое условие экстремума гладкой функции

$$\delta F(x_k) = 0 \Rightarrow \partial F / \partial x_k = 0. \quad (5.4)$$

Первое из этих равенств — простейшее *вариационное уравнение*. Из него следует столько обычных равенств, сколько независимых вариаций. Для функционала имеем

$$\delta I = \int_a^b \Phi \delta u \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0. \quad (5.5)$$

В этом утверждении — *основная лемма* вариационного исчисления. Вариант доказательства:  $\delta u(x) = \Phi(x)\delta\varepsilon \Rightarrow \int \Phi^2 \, dx = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ .

Если в задаче об экстремуме (5.1) заданы значения  $u(x)$  на концах  $x = a, b$ , то  $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$ , и из равенства  $\delta I = 0$  по основной лемме получаем знаменитое уравнение Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \left( \frac{\partial f}{\partial u'} \right)' = 0. \quad (5.6)$$

Для произвольной функции  $f$  это уравнение не интегрируется аналитически. Однако в важном случае  $f(u, u')$  имеем первый интеграл:

$$f - u' \frac{\partial f}{\partial u'} = C = \text{const} \\ \left( C'(x) = \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial u'} u'' - u'' \frac{\partial f}{\partial u'} - u' \left( \frac{\partial f}{\partial u'} \right)' = 0 \right), \quad (5.7)$$

вместо второго порядка (5.6) получили первый.

Если значения  $u(x)$  на концах не заданы, получаем *естественные граничные условия*:  $\partial f / \partial u' = 0$  при  $x = a, b$ .

Изложенное легко обобщается на случай с высшими производными:

$$I[u] = \int_a^b f(x, u, u', u'') \, dx; \\ \delta I = \left[ \frac{\partial f}{\partial u'} - \left( \frac{\partial f}{\partial u''} \right)' \right] \delta u \Big|_a^b + \frac{\partial f}{\partial u''} \delta u' \Big|_a^b + \\ + \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial u} - \left( \frac{\partial f}{\partial u'} \right)' + \left( \frac{\partial f}{\partial u''} \right)'' \right] \delta u \, dx = 0. \quad (5.8)$$

Равенство нулю подчеркнутого выражения – уравнение Эйлера. Внеинтегральные члены равны нулю при заданных на концах  $u$  и  $u'$ , или же дают естественные граничные условия.

Случай нескольких аргументов  $u_k(x)$  ( $k = 1, \dots, n$ ):

$$I[u_k] = \int_a^b f(x, u_k, u'_k) dx;$$

$$\delta I = \sum \left( \frac{\partial f}{\partial u'_k} \delta u_k \Big|_a^b + \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial u_k} - \left( \frac{\partial f}{\partial u'_k} \right)' \right] \delta u_k dx \right) = 0. \quad (5.9)$$

Уравнения Эйлера образуют систему.

Обратимся к вариационным постановкам для уравнений с частными производными. Смешанной краевой задаче для уравнения Пуассона

$$\Delta u = 0, \quad u|_{O_1} = u_0, \quad \partial_n u|_{O_2} = q, \quad (O_1 \cup O_2 = O = \partial V) \quad (5.10)$$

соответствует вариационная постановка

$$\delta I = 0, \quad I[u] = \int_V \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + f u \right) dV - \int_{O_2} q u dO, \quad u|_{O_1} = u_0. \quad (5.11)$$

Граничное условие на части поверхности  $O_2$  – естественное, а на части  $O_1$  обеспечиваем сами. Проварьируем функционал (5.11):

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_V (\nabla u \cdot \nabla \delta u + f \delta u) dV - \int_{O_2} q \delta u dO = \\ &= \int_V (f - \Delta u) \delta u dV + \int_{O_2} (\partial_n u - q) \delta u dO = 0 \\ &\left( \int_{O_2} \partial_n u \delta u dO = \int_O \mathbf{n} \cdot \nabla u \delta u dO = \int_V (\Delta u \delta u + \nabla u \cdot \nabla \delta u) dV \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

До сих пор ограничения были лишь на границах – в краевых условиях. Рассмотрим теперь задачи на *условный экстремум*. Для них эффективен

метод множителей Лагранжа, который для обычных функций выглядит так:

$$\delta f(x_k) = 0, \quad g_\alpha(x_k) = 0; \quad \tilde{f} \equiv f + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} g_{\alpha},$$

$$\delta \tilde{f} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_k} \right) \delta x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad (\dots) = 0. \quad (5.13)$$

Имеем ограничения с функциями  $g_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ), вариации  $\delta x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) должны удовлетворять условиям  $\sum_k (\partial g_{\alpha} / \partial x_k) \delta x_k = 0$ . Независимы лишь  $n - m$  вариаций. Но множители Лагранжа  $\lambda_{\alpha}$  подбираются так, чтобы выражения  $(\dots)$  при зависимых вариациях обратились в нуль. Для независимых вариаций эти выражения должны равняться нулю.

Каждому ограничению отвечает свой множитель Лагранжа. Вводя  $\lambda_{\alpha}$ , мы получаем задачу без ограничений (для  $\tilde{f}$ ).

В качестве **иллюстрации** рассмотрим изопериметрическую задачу — две точки в плоскости  $x, y$  требуется соединить линией заданной длины так, чтобы площадь под графиком  $y(x)$  была наибольшей:

$$S[y] = \int_a^b y \, dx \rightarrow \max, \quad \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx = l = \text{const}. \quad (5.14)$$

Решение:

$$\tilde{S}[y] = \int_a^b \tilde{f}(y, y') \, dx, \quad \tilde{f} = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'} \right)'. \quad (5.15)$$

Здесь имеем уравнение первого порядка. В результате его интегрирования (методом введения параметра) найдём  $y(x)$  в виде дуги окружности.

Однако здесь, как и выше, рассматривалось лишь условие стационарности  $\delta I = 0$ , что недостаточно для экстремума. Имеем минимум, если вторая вариация

$$\delta^2 I \equiv \delta(\delta I) > 0 \quad (5.16)$$

и максимум, если  $< 0$ . В задаче (5.11)

$$\delta^2 I[u] = \int_V |\nabla \delta u|^2 \, dV > 0. \quad (5.17)$$

Заметим, что  $\delta^2 u \equiv 0$ .

Иногда экстремум устанавливается без варьирования — доказательством соответствующего неравенства.

Вариационные постановки очень часто служат основой вычислительных алгоритмов. Знаменитый *метод Рунца* позволяет найти приближённое решение без уравнений Эйлера. Для задачи с функционалом (5.1) при заданных на концах  $u_a$  и  $u_b$  приближённое решение ищем в виде

$$\tilde{u}(x) = u_a + \frac{u_b - u_a}{b - a}(x - a) + \sum a_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0. \quad (5.18)$$

Граничные условия удовлетворены при любых значениях варьируемых параметров  $\alpha_k$ . Функционал превращается в функцию  $\tilde{I}(\alpha_k)$ ,

$$\delta \tilde{I} = \sum (\partial I / \partial \alpha_k) \delta \alpha_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial I / \partial \alpha_k = 0. \quad (5.19)$$

Координатные функции  $\varphi_k(x)$  можно задавать по разному, например  $\varphi_k = \sin k\pi(x - a)/(b - a)$ . Но для машинных методов предпочтительнее финитные функции (рис. 4).



Рис. 4

Параметры  $\alpha_k$  непосредственно связаны со значениями решения в узлах  $u(x_k)$ , интеграл равен сумме однотипных интегралов по «конечным элементам». Метод элементов (МКЭ) является основным средством расчёта конструкций.

Для построения приближённого решения вариационной задачи не обязательно подставлять аппроксимацию типа (5.18) в функционал. Следуя Галёркину, можно исходить из вариационного уравнения:

$$\int_a^b \Phi \delta u \, dx = 0, \quad \tilde{u} = \sum \alpha_k \varphi_k, \quad \int_a^b \tilde{\Phi} \varphi_k \, dx = 0 \quad (5.20)$$

( $\tilde{\Phi}$  вычисляется по  $\tilde{u}$ ). Такой метод иногда называется проекционным. Он эффективен и в тех случаях, когда функционала нет, а есть лишь вариационное уравнение.

Формулировки законов природы в виде утверждений об экстремуме функционалов называются *вариационными принципами*. Например, принцип Ферма в геометрической оптике: между двумя точками в неоднородной среде свет распространяется так, чтобы время было минимальным.

Некоторые принципы имеют вид вариационных уравнений и не связаны с функционалами. Они называются *дифференциальными вариационными принципами*.

## 1.6 Асимптотические методы

Эти методы очень эффективны и популярны, поскольку позволяют корректно строить аналитические решения сложных задач. Начнём с уравнения  $f(x, \lambda) = 0$ , где  $\lambda \rightarrow 0$  — малый параметр. Решение  $x(\lambda)$  часто может быть представлено рядом по степеням  $\lambda$ :

$$x = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots, \quad f(x, \lambda) = f(x_0, 0) + \lambda(\partial_x f x_1 + \partial_\lambda f) + \dots = 0. \quad (6.1)$$

На первом шаге находим главный член  $x_0$  — из уравнения  $f(x_0, 0) = 0$ . На втором —  $x_1$ , причём задача для  $x_1$  линейна. На третьем —  $x_2$  и т. д. Выигрыш в том, что при  $\lambda = 0$  задача намного проще.

Однако эта схема не работает в очень многих случаях. Бывает, что на первом шаге решение  $x_0$  не единственно, что зависимость от  $\lambda$  не представляется рядом (6.1), что второй член  $x_1$  «намного больше  $x_0$ » и др. Применение асимптотических методов требует некой изобретательности.

Рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$Cu = f, \quad C = C_0 + \lambda C_1, \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

с матрицей  $C$  и столбцами неизвестных  $u$  и «нагрузкой»  $f$ . *Конструктивное условие разрешимости*: правая часть должна быть ортогональна всем линейно независимым решениям сопряжённой однородной системы:

$$\psi_k: \quad C^T \psi = 0, \quad \psi_k^T C u = \psi_k^T f = 0. \quad (6.3)$$

Если определитель  $\det C \neq 0$ , имеем  $\psi = 0$ , и система разрешима (причём однозначно) при любой  $f$ . В задаче (6.2) при  $\det C_0 \neq 0$  проходит следующее решение:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \lambda u_1 + \dots, \quad C_0 u_0 = f, \quad C_0 u_1 + C_1 u_0 = 0, \quad \dots \\ u_0 &= C_0^{-1} f, \quad u_1 = -C_0^{-1} C_1 u_0, \quad \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

Этот случай не очень интересен, главный член  $u_0$  определяется полностью на первом шаге. Впрочем, иногда малая поправка  $u_1$  качественно отличается от  $u_0$  и становится важной.

Пусть теперь  $\det C_0 = 0$ . Решение может быть следующим

$$\begin{aligned}
 u &= \lambda^{-1}u_0 + u_1 + \lambda u_2 + \dots, \quad C_0 u_0 = 0, \quad C_0 u_1 + C_1 u_0 = f, \quad \dots \\
 u_0 &= \sum a_k \varphi_k \quad (C_0 \varphi = 0), \\
 \psi_i^T \left( f - C_1 \sum a_k \varphi_k \right) &= 0 \quad (C_0^T \psi = 0). \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

На первом шаге решение есть любая линейная комбинация столбцов  $\varphi_k$ . Коэффициенты  $a_k$  определяются условием разрешимости на втором шаге. Имеем явление *асимптотического расщепления* исходной задачи (6.2) на три: для  $\varphi_k$ , для  $\psi_k$  и для  $a_k$  (с матрицей  $(\psi_i^T C_1 \varphi_k)$ ). В отличие от (6.4), при расщеплении необходимо не менее двух шагов, и главный член окончательно определяется условием разрешимости для поправочных членов.

Вырожденность  $C_0$  необходима для расщепления, но ход решения может отличаться от (6.5). Возможно  $u = O(1)$  (порядка 1),  $O(\lambda^{-2})$  и т. д. При первом члене  $\lambda^{-4}$  потребуется пять шагов — процедура может чрезвычайно усложниться.

Другой пример нетривиальной асимптотики — колебания с малой дополнительной нелинейной силой:

$$\ddot{u} + u = \lambda f(u, \dot{u}). \quad (6.6)$$

По существу ошибочным является следующее решение

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(t) + \lambda u_1(t) + \dots, \quad \ddot{u}_0 + u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = A \sin(t + \alpha), \\
 \ddot{u}_1 + u_1 &= f(u_0, \dot{u}_0), \quad \dots \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Правая часть уравнения для  $u_1$  имеет период  $2\pi$  и вызывает резонансный рост  $u_1$ . Нарушается важное *требование к асимптотическим разложениям*: «высшие члены не должны быть более сингулярны, чем низшие». При  $f = f(u)$  решение (6.6) периодически, т. к.

$$\dot{u}^2/2 + u^2/2 - \lambda \int f(u) du = \text{const},$$

поэтому поправка  $u_1$  искажает картину, а не уточняет её.

Вместо (6.7) Пуанкаре предложил процедуру с «почти тождественным преобразованием времени»:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(\tau) + \lambda u_1(\tau) + \dots, \quad \tau \equiv t(1 + \lambda\gamma_1 + \dots), \\
 (1 + \lambda\gamma_1 + \dots)^2 u'' + u &= \lambda f[u, (1 + \lambda\gamma_1 + \dots)u'] \Rightarrow u_0'' + u_0 = 0, \\
 u_0 &= A \sin(\tau + \alpha), \quad u_1'' + u_1 = \underline{f(u_0, u_0')} - 2\gamma_1 u_0'', \quad \dots \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Резонансного роста  $u_1$  не будет, если подчеркнутое выражение не содержит первой гармоники:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \tau, A \cos \tau) \sin \tau \, d\tau + 2\gamma_1 A = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(\dots) \cos \tau \, d\tau = 0 \quad (6.9)$$

(можно принять  $\alpha = 0$ , т. к. задача автономна). Амплитуда  $A$  и изменение частоты  $\gamma_1$  определяются уравнениями (6.9). Если  $f = f(u)$ , то второе уравнение удовлетворяется тождественно, а первое связывает  $\gamma_1$  и  $A$ .

Но метод Пуанкаре позволяет строить лишь периодические решения и непригоден при колебаниях переменной амплитуды. Большие возможности даёт метод многих масштабов с введением нескольких «времен разного порядка».

Третий пример асимптотического анализа – уравнение с малым параметром при старшей производной:

$$\lambda \ddot{u} + \dot{u} + u = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = b. \quad (6.10)$$

Решение вида

$$u = u_0(t) + \lambda u_1(t) + \dots, \quad \dot{u}_0 + u_0 = 0, \quad \dot{u}_1 + u_1 = -\ddot{u}_0, \quad \dots \quad (6.11)$$

не может удовлетворять обоим начальным условиям. В *методе сращения асимптотических разложений* процесс (6.11) называется внешним  $u^e$  и рассматривается лишь вне окрестности границы. В окрестности  $t = 0$  строится внутреннее разложение:

$$\begin{aligned} u^i &\equiv V = V_0(T) + \lambda V_1(T) + \dots, \quad T \equiv \lambda^{-1}t, \\ \lambda^{-1}(V'' + V') + V &= 0, \quad V(0) = a, \quad \lambda^{-1}V'(0) = b; \\ V_0'' + V_0' &= 0 \Rightarrow V_0 = A_0 + B_0 e^{-T} = a, \\ V_1'' + V_1' + V_0 &= 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_1 = A_1 + B_1 e^{-T} - aT = (a+b)(1 - e^{-T}) - aT. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Только внутреннее разложение выходит на границу и потому удовлетворяет граничным (начальным) условиям. Построив  $u^e$  и  $u^i$ , следует срастить их, т. е. учесть фактическое совпадение. Простейшая процедура сращения Прандтля

$$\lim_{t \rightarrow 0} u^e = \lim_{T \rightarrow \infty} u^i \quad (6.13)$$



недостаточна в рассматриваемом примере. Более сложная процедура Ван-Дайка основана на равенстве  $u^e$  и  $u^i$  в нескольких первых членах. В (6.11) имеем

$$u_0 = C_0 e^{-t}, \quad u_1 = (C_1 - C_0 t) e^{-t}.$$

Сравнение

$$\begin{aligned} u^e &= C_0 e^{-\lambda T} + \lambda(C_1 - C_0 \lambda T) e^{-\lambda T} + \dots = \\ &= C_0(1 - \lambda T + \dots) + \lambda C_1 + \dots = u^i = \\ &= a + \lambda[(a+b)(1 - e^{-T}) - aT] + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_0 = a, \quad C_1 = a + b. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Задача (6.10) решается и без асимптотики. Сравнение с (6.11) – (6.14) позволяет оценить реальную асимптотическую точность.

Никакая обычная задача не содержит бесконечно малого  $\lambda$ , введение параметра зависит от нас. Можно переписать уравнение в безразмерных величинах и обнаружить некую малую комбинацию параметров. А можно просто поставить  $\lambda$  перед теми членами, в малости влияния которых мы уверены.

## Библиография

Автор разделяет взгляды на математическое моделирование, выраженные И. И. Блехманом, А. Д. Мышкисом и Я. Г. Пановко [9].

Тензорное исчисление излагается во многих книгах [2, 56, 67, 82, 91] — преимущественно в индексной записи. Но автор считает [32] совершенно необходимым использование и прямого тензорного исчисления [103]. Такой подход представлен в книгах А. И. Лурье [53, 54].

С основами дифференциальной геометрии можно ознакомиться в книгах [79, 102]. Теория векторных полей прекрасно изложена у Л. Д. Ландау [48] и Р. Фейнмана [105].

Классическим задачам математической физики посвящены фундаментальные курсы Р. Куранта и Д. Гильберта [44], А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [99] и других авторов [29, 41].

Теория и применение функций комплексного переменного очень хорошо изложены во многих книгах [45, 85, 67]. Руководство [28] содержит подробное описание операционного метода.

Основы вариационного исчисления представлены, в частности, у Л. Э. Эльсгольца [115]. Применение вариационных методов изложено С. Г. Михлиным [62] и К. Ректорисом [84].

Эффективные асимптотические методы можно изучать по книгам Н. Н. Боголобова и Ю. А. Митропольского [10], Н. Н. Моисеева [63] и А. Х. Найфэ [68]. Широта рассмотрения асимптотики позволяет особо рекомендовать [68].

Очень интересная комбинация вариационного и асимптотического методов разработана и описана В. Л. Бердичевским [5].

## Глава 2

# Общие законы механики

### 2.1 Система материальных точек

Прежде всего следует ввести *систему отсчёта* — твёрдое тело с часами. Положение точки определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}(t)$ , инерция — массой  $m$ , а внешнее воздействие — вектором силы  $\mathbf{F}$ . Закон Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad - \quad (1.1)$$

дифференциальное уравнение, которое легко интегрируется лишь при  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \mathbf{F}(\tau)(t - \tau) d\tau; \quad (1.2)$$

Начальное положение  $\mathbf{r}_0$  и скорость  $\mathbf{v}_0$  должны быть заданы.

Вопрос о системе отсчёта нетривиален. Раньше это было «абсолютное пространство», затем его заполнили странной неуловимой средой — эфиром и связали «с отдалёнными звёздами». Во всех инерциальных системах отсчёта, т. е. движущихся относительно «эфира» поступательно (без вращения) с постоянной скоростью, закон имеет вид (1.1) с одним и тем же значением  $\mathbf{F}$ . Влияние системы отсчёта рассматривается в теории относительности.

В системе материальных точек с массами  $m_k$  и радиус-векторами  $\mathbf{r}_k(t)$  имеем и систему уравнений Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^e + \sum_i \mathbf{F}_{ki}, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{F}_{ki}$  — внутренняя сила от точки « $i$ », а  $\mathbf{F}_k^e$  — внешняя сила.

## 2.2 Абсолютно твёрдое тело

---

Внутренние силы подчиняются закону действия — противодействия и считаются центральными:

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}, \quad \mathbf{F}_{ki} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) = 0. \quad (1.4)$$

Складывая все равенства (1.3), придём к закону *баланса импульса*

$$\left( \sum m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)' = \sum \mathbf{F}_k^e \quad - \quad (1.5)$$

сюда входят лишь внешние силы. Это является также законом движения центра масс с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \sum m_k \mathbf{r}_k \quad \left( m \equiv \sum m_k \right); \quad m \ddot{\mathbf{r}}_c = \sum \mathbf{F}_k^e. \quad (1.6)$$

Фундаментальным является и закон *баланса момента импульса*:

$$\left( \sum \mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k \right)' = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e, \quad (1.7)$$

легко выводимый из (1.3) и (1.4).

Третий фундаментальный закон: *скорость изменения кинетической энергии* равна суммарной мощности внешних и внутренних сил

$$\dot{T} \equiv \left( \frac{1}{2} \sum m_k |\dot{\mathbf{r}}_k|^2 \right)' = \sum \mathbf{F}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k = \sum \mathbf{F}_k^e \cdot \dot{\mathbf{r}}_k + \frac{1}{2} \sum \mathbf{F}_{ki} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i). \quad (1.8)$$

Для потенциальных сил мощность равна скорости убывания потенциальной энергии. Если внутренние силы имеют потенциал  $\Pi$ , то

$$(T + \Pi)' = \sum \mathbf{F}_k^e \cdot \dot{\mathbf{r}}_k. \quad (1.9)$$

В изолированной системе  $\mathbf{F}_k^e = 0$ ,  $T + \Pi = \text{const}$ .

## 2.2 Абсолютно твёрдое тело

Радиус вектор  $\mathbf{R}$  любой точки тела (рис. 5) представляется в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор «полоса» (часто это центр масс), а ортогональная тройка ортов  $\mathbf{e}_i$  жёстко связана с телом:  $x_i = \text{const}$ .

Поворот тела определяется тензором  $\underline{\mathbf{P}} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{i0}$ . Любой поворот можно совершить вокруг некоторой неподвижной оси (с ортом  $\mathbf{k}$ ) на соответствующий угол  $\varphi$ ; тогда

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{E}} \cos \varphi + \mathbf{k} \times \underline{\mathbf{E}} \sin \varphi + \mathbf{k} \mathbf{k} (1 - \cos \varphi). \quad (2.2)$$

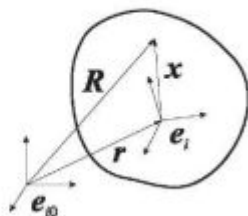


Рис. 5

Обоснование:  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{30} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{e}_{10} = \mathbf{e}_1 \cos \varphi - \mathbf{e}_2 \sin \varphi$ ,  $\mathbf{e}_{20} = \mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi$ , сумма  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_{i0}$  имеет вид (2.2). Вектор  $\varphi \mathbf{k}$  вполне определяет поворот.

Угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$  можно ввести так:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{P}}^T = \underline{\mathbf{E}} &\Rightarrow \dot{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \underline{\mathbf{P}}^T = -(\dot{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \underline{\mathbf{P}}^T)^T = \boldsymbol{\omega} \times \underline{\mathbf{E}}, \\ \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} (\dot{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \underline{\mathbf{P}}^T)_{\times}, \quad \dot{\underline{\mathbf{P}}} = \boldsymbol{\omega} \times \underline{\mathbf{P}} &\Rightarrow \dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

( $\mathbf{e}_i = \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{e}_{i0}$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \mathbf{e}_{i0}$ ). Учтывая это при дифференцировании (2.1), получим скорость и ускорение точки твёрдого тела:

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{x}}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{w} \equiv \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Импульс, момент импульса и кинетическая энергия тела содержат инерционные характеристики — массу, вектор эксцентриситета и тензор инерции:

$$m = \int dm, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{m} \int \mathbf{x} dm, \quad \underline{\mathbf{I}} = \int (x^2 \underline{\mathbf{E}} - \mathbf{x} \mathbf{x}) dm. \quad (2.5)$$

Импульс равен

$$\mathbf{Q} = \int \mathbf{v} dm = m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.6)$$

Момент импульса (относительно неподвижного центра)

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{R} \times \mathbf{v} dm = \mathbf{r} \times \mathbf{Q} + m \boldsymbol{\varepsilon} \times \dot{\mathbf{r}} + \underline{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.7)$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} (m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \underline{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}) + m\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Динамика твёрдого тела — в двух векторных уравнениях баланса импульса и момента импульса (2.5) и (2.7). При  $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$  уравнения разделяются:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \int \mathbf{f} dm, \quad (\underline{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega})^\cdot = \int \mathbf{x} \times \mathbf{f} dm \equiv \mathbf{M}, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{f}$  — массовая сила (т. е. на единицу массы). В уравнении вращения

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{I}}} &= I_{ks} (\dot{\mathbf{e}}_k \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_k \dot{\mathbf{e}}_s) = \boldsymbol{\omega} \times \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{I}} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \underline{\mathbf{I}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \underline{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Последнее уравнение удалось аналитически проинтегрировать лишь в некоторых случаях — Эйлера, Лагранжа, Ковалевской.

## 2.3 Относительное движение

Рассмотрим движение точки в двух системах отсчёта: неподвижной с осями  $\mathbf{e}_{i0} = \text{const}$  и подвижной с осями  $\mathbf{e}_i(t)$  (рис. 5). Сохраняются равенства (2.1), но теперь  $x_i = x_i(t)$  — закон относительного движения. Достаточно очевидны определения относительной скорости и относительного ускорения:

$$\mathbf{v}_r = \dot{x}_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{w}_r = \ddot{x}_i \mathbf{e}_i. \quad (3.1)$$

Из (2.1) следует закон сложения скоростей

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_e \equiv \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Скорость  $\mathbf{v}_e$  точки подвижной системы, «где мы находимся», называется переносной.

Повторное дифференцирование даёт закон сложения ускорений

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= \mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c, \\ \mathbf{w}_e &\equiv \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}), \quad \mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Помимо переносного ускорения  $\mathbf{w}_e$  появилось нетривиальное ускорение Кориолиса  $\mathbf{w}_c$ . Последнее равно нулю при поступательном переносном движении ( $\boldsymbol{\omega} = 0$ ) и при относительном покое ( $\mathbf{v}_r = 0$ ).

Закон Ньютона с учётом (3.3) можно записать в виде

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} - \underline{m\mathbf{w}_e} - \underline{m\mathbf{w}_c} \quad (3.4)$$

и придать этому следующий смысл: в неинерциальной системе отсчёта к обычным силам  $\mathbf{F}$  добавляются силы инерции переносного движения и Кориолиса (подчёркнуты). Находясь в неинерциальных системах (вращающаяся Земля, ускоряющийся автомобиль), мы ощущаем силы инерции как вполне реальные. Силы Кориолиса — одни из главных причин образования циклонов и антициклонов в атмосфере. Разрушение вращающегося ротора при больших скоростях — результат действия сил инерции переносного движения (центробежных сил).

Обратимся к сложению угловых скоростей и ускорений. Вращение твёрдого тела рассматривается в двух системах отсчёта — неподвижной и подвижной. Связанные с ними наблюдатели регистрируют скорости  $\omega_a$ ,  $\omega_r$  и ускорения  $\varepsilon_a = \dot{\omega}_a$ ,  $\varepsilon_r$ . Подвижная система имеет скорость  $\omega_c$  и ускорение  $\varepsilon_c = \dot{\omega}_c$ . Без ущерба для общности можно считать, что тело вращается вокруг неподвижной точки — общего начала неподвижной и подвижной декартовой системы. Сложение скоростей:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= \omega_c \times \mathbf{R}, & \mathbf{v}_r &= \omega_r \times \mathbf{R}, \\ \mathbf{v}_a &= \omega_a \times \mathbf{R} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \Rightarrow \omega_a = \omega_c + \omega_r. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Расписав подобным образом правило сложения ускорений (3.3), получим

$$\varepsilon_a = \varepsilon_c + \varepsilon_r + \omega_c \times \omega_r. \quad (3.6)$$

При использовании вращающихся систем отсчёта полезно ввести оператор дифференцирования по Яуманну  $(\dots)^\nabla$ . Для скаляра это просто производная по времени. Для вектора

$$\mathbf{v}^\nabla \equiv \dot{v}_i \mathbf{e}_i = \dot{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (3.7)$$

для тензора второго ранга

$$\underline{\mathbf{T}}^\nabla = \dot{T}_{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \dot{\underline{\mathbf{T}}} - \boldsymbol{\omega} \times \underline{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{T}} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.8)$$

Очевидно,  $\varepsilon_r = \omega_r^\nabla$ , и тогда (3.6) получается простым дифференцированием (3.5).

## 2.4 Принцип виртуальной работы

Это общая вариационная постановка задач механики:

$$\sum (\mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (4.1)$$

Вариации  $\delta \mathbf{r}_k$  называются виртуальными перемещениями. Они должны удовлетворять заданным ограничениям — *связям*:

$$g_\alpha(\mathbf{r}_k, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m) \Rightarrow \sum_k \frac{\partial g_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (4.2)$$

Связи в общем случае нестационарные, но в (4.2) время как бы остановлено. Для скоростей имеем

$$\sum_k \frac{\partial g_\alpha}{\partial \dot{\mathbf{r}}_k} \cdot \dot{\mathbf{r}}_k + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0 \quad - \quad (4.3)$$

только при стационарных связях  $\delta \mathbf{r}_k$  могут «совпадать со скоростями».

Со стороны связей как материальных объектов на точки действуют силы реакций  $\mathbf{R}_k$ . В уравнении Ньютона

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k^a + \mathbf{R}_k \quad (4.4)$$

выделяются «активные силы», не являющиеся реакциями связей. Очень важно предположение об «идеальности связей»:

$$\sum \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (4.5)$$

Для известных конкретных связей — гладких поверхностей, направляющих, нерастяжимых нитей и др. — (4.5) выполняется. В уравнении виртуальной работы остаются только активные силы.

Фундаментальные законы баланса импульса, момента импульса и энергии могут быть выведены из (4.1). Выделив внешние и внутренние силы, будем иметь

$$\sum (\mathbf{F}_k^e - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k + \delta A^i = 0. \quad (4.6)$$

Работа внутренних сил  $\delta A^i = 0$  на виртуальных перемещениях без деформации:

$$\delta \mathbf{r}_k = \text{const} + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_k. \quad (4.7)$$



Это не вызывает сомнений при потенциальных внутренних силах (энергия определяется деформацией), но в остальном является предположением.

Полагая в (4.6)  $\delta \mathbf{r}_k = \text{const}$ , получим закон импульса (1.5). При  $\delta \mathbf{r}_k = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_k$  придём к закону момента импульса (1.7). Если же  $\delta \mathbf{r}_k = \dot{\mathbf{r}}_k \delta t$ , то

$$\sum \mathbf{F}_k^e \cdot \dot{\mathbf{r}}_k + \delta A^i / \delta t = \dot{T} \quad -$$

баланс энергии.

Из вариационного уравнения всегда следует столько «обычных» уравнений, сколько есть независимых вариаций. При отсутствии связей все  $\delta \mathbf{r}_k$  независимы, скобки в (4.1) равны нулю. Если же связи присутствуют, имеем задачу с ограничениями (4.2). Вводя множители Лагранжа  $\lambda_\alpha$ , получим

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k^a + \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial \mathbf{r}_k}}_{\mathbf{R}_k}. \quad (4.8)$$

Подчёркнуто выражение реакции связей  $\mathbf{R}_k$ . Дополнительные неизвестные  $\lambda_\alpha$  находятся с привлечением уравнений связей (4.2). Но существует иной подход, при котором наличие связей уменьшает число неизвестных — об этом далее.

## 2.5 Уравнения Лагранжа

Рассматривается система с набором обобщённых координат  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Радиус-векторы всех точек могут быть представлены в виде  $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_i, t)$ . Если в системе  $N$  точек и задано  $m$  связей (4.2), то число степеней свободы  $n = 3N - m$ . Для твёрдого тела в пространстве  $n = 6$ , в плоскости  $n = 3$ . Материальный прямой отрезок имеет 5 степеней свободы. Поскольку

$$\mathbf{v}_k = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}, \quad (5.1)$$

то кинетическая энергия  $T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$  — квадратичная форма от обобщённых скоростей.

Внешне уравнения Лагранжа почти не отличаются от уравнений Эйлера в вариационном исчислении:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)' - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \quad (5.2)$$

Здесь  $Q_i$  — обобщённые силы, вычисляемые по виртуальной работе активных сил:

$$\delta A = \sum \mathbf{F}_k^n \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum Q_i \delta q_i, \quad Q_i = \sum_k \mathbf{F}_k^n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}. \quad (5.3)$$

Подчеркнём, что в аналитической механике силы рассматриваются как обобщённые, определяются виртуальной работой и не содержат реакций связей. В этом важное отличие механики Лагранжа от механики Ньютона и Эйлера. В соответствии с законом импульса автомобиль ускоряется от силы трения на ведущих колесах, а давление газа в цилиндрах двигателя не может изменить импульс (внутренние силы). В лагранжевой механике наоборот: давление газа является важнейшей составляющей обобщённой силы, а трение (в точке контакта без скольжения) в неё не входит. Обе точки зрения правильны, но вторая глубже и полезнее. Без знания основ лагранжевой механики невозможно разобраться в некоторых вопросах механики деформируемого тела.

Но как выводятся уравнения Лагранжа (5.2)? Первый способ — тождественное преобразование (4.1) к виду

$$\sum_i \left[ Q_i - \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)' + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0, \quad (5.4)$$

откуда при независимых  $\delta q_i$  следуют (5.2). Однако проще второй способ с интегрированием по времени:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \sum (\mathbf{F}_k - m_k \ddot{\mathbf{r}}_k) \cdot \delta q_i dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum Q_i \delta q_i + \delta T \right) dt - \sum m_k \dot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $\delta T = \sum [(\partial T / \partial q_i) \delta q_i + (\partial T / \partial \dot{q}_i) \delta \dot{q}_i]$ . Действуя как в п. 1.5, придём к (5.2).

В случае потенциальных сил существует функция  $\Pi(q_i, t)$ :

$$\delta A = -\delta \Pi, \quad Q_i = -\partial \Pi / \partial q_i. \quad (5.6)$$

Уравнения (5.2) можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)' = \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right), \quad L(q_i, \dot{q}_i, t) \equiv T - \Pi \quad (5.7)$$

лагранжиан.

## 2.6 Гамильтонова механика

Ключевые понятия этого более высокого уровня механики: принцип Гамильтона, канонические уравнения, канонические преобразования, уравнение Гамильтона — Якоби.

К вариационному *принципу Гамильтона* мы уже пришли в (5.5). Рассматривается система с потенциальными силами и лагранжианом  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Действием по Гамильтону называется функционал

$$S[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (6.1)$$

Истинный закон  $q_i(t)$ , по которому должна двигаться система, называется прямым путём и удовлетворяет уравнениям Лагранжа (5.7). Имеем

$$\delta S = \sum \left( p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{p}_i \right) \delta q_i dt \right), \quad p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (6.2)$$

Величины  $p_i$  называются обобщёнными импульсами. Положим на концах промежутка  $\delta q_i(t_{1,2}) = 0$ . Тогда на прямом пути

$$\delta S = 0. \quad (6.3)$$

*Канонические уравнения* Гамильтона получаются из уравнений Лагранжа с помощью формального преобразования Лежандра. Пусть задана функция  $\varphi(x_i, z_\alpha)$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $\alpha = 1, \dots, m$ ) и

$$y_i \equiv \partial \varphi / \partial x_i \quad - \quad (6.4)$$

новые переменные, вводимые как бы вместо  $x_i$ . Обратное преобразование можно представить в виде

$$x_i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i}, \quad \psi(y_i, z_\alpha) = \sum x_i y_i - \varphi; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z_\alpha} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha}. \quad (6.5)$$

Для доказательства рассмотрим вариацию — с суммированием по повторяющемуся индексу:

$$\delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \psi}{\partial z_\alpha} \delta z_\alpha = x_i \delta y_i + y_i \delta x_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \delta z_\alpha.$$

Подчёркнутые слагаемые сокращаются, остальное ведёт к (6.5). Определение импульсов в (6.2) рассматриваем как переход от  $\dot{q}_i$  к  $p_i$  типа (6.4), при этом остальные аргументы  $q_i$  и  $t$  играют роль  $z_\alpha$ . Обратный переход:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Появилась функция Гамильтона, или гамильтониан  $H$ . Из уравнений Лагранжа и соотношений (6.6) следуют канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i. \quad (6.7)$$

Можно заметить, что при сходстве и «равноправии» уравнений обеих групп закон природы выражает лишь первая.

Раньше при решении (6.7) старались найти первые интегралы — такие функции, которые постоянны на каждом движении. Знаменитый интеграл энергии устанавливается так:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

$H = \text{const}$ , если не содержит времени. Другой важный случай — с циклическими координатами, т. е. с такими, которые не входят в  $H$  (и в  $L$ ). Имеем

$$\dot{p}_\alpha = -\partial H / \partial q_\alpha = 0 \Rightarrow p_\alpha = \text{const}.$$

Изолированная система в пространстве имеет 6 циклических координат: три — трансляции, и три — поворота; постоянство шести обобщённых импульсов — это сохранение векторов импульса и момента импульса.

Обобщённые координаты  $q_i$  можно выбирать по-разному, но уравнения всё равно будут иметь канонический вид (6.7). Однако представим себе преобразование более общего характера — от «старых» координат  $q_i$  и импульсов  $p_i$  к «новым»  $Q_i, P_i$ ; оно называется каноническим, если сохранится форма (6.7):

$$\dot{Q}_i = \partial K / \partial P_i, \quad \dot{P}_i = -\partial K / \partial Q_i. \quad (6.8)$$

Для вывода алгоритма преобразования используется модифицированный принцип Гамильтона:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H) dt = 0. \quad (6.9)$$

Здесь имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \delta q_i \right] dt. \quad (6.10)$$

Равенство (6.9) выполняется на прямом пути с закреплёнными на концах координатами.

При каноническом преобразовании соблюдается и аналогичное (6.9) равенство с новыми  $Q_i, P_i, K$ . Обращая внимание на внеинтегральные члены в (6.9), можем утверждать, что модифицированный принцип сохранится при условии

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} S(q_i, Q_i, t) \Rightarrow \\ \Rightarrow p_i = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i}, P_i = -\frac{\partial S}{\partial \dot{Q}_i}, K = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (6.11)$$

«Производящая функция»  $S$  произвольна.

Цель преобразования – упростить уравнения. Предельным упрощением будет

$$K = 0 \Rightarrow Q_i = \text{const}, P_i = \text{const}. \quad (6.12)$$

Приходим к уравнению Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0. \quad (6.13)$$

Это уравнение в частных производных (всегда нелинейное) определяет движение в той же мере, что и система обыкновенных уравнений Лагранжа и Гамильтона.

Но что значит – решить (6.13)? Достаточно найти его полный интеграл – такое аналитическое решение  $S(q_i, \alpha_i, t)$ , которое содержит  $n$  параметров  $\alpha_i$ . Полагая

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (6.14)$$

будем иметь при  $\alpha_i = \text{const}, \beta_i = \text{const}$  общее решение уравнений движения  $q_i = q_i(\alpha_k, \beta_k, t)$ , константы определяются начальными условиями.

Гамильтонова механика имеет большое мировоззренческое значение, но для деформируемых тел она почти не используется – пока.

## 2.7 Статика

В положении равновесия системы со стационарными связями (или свободной)  $\mathbf{r}_k = \text{const}$ ,

$$\sum \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_i = 0. \quad (7.1)$$

Это основа аналитической статики. Уравнений равновесия столько, сколько степеней свободы. Статика не исчерпывается балансом сил и моментов. Эти уравнения баланса являются частью (7.1) и соответствуют виртуальным перемещениям трансляции и поворота:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum \mathbf{F}_k \cdot (\delta \mathbf{u}_0 + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_k) = \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}, \\ \mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k; \\ \delta A = 0 &\Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M} = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Среди всех силовых факторов силы и моменты выделяются потому, что виртуальная работа внутренних сил на «жёстких» перемещениях равна нулю.

Пусть к системе с потенциальной энергией  $\Pi(q_i)$  приложены дополнительные силы  $Q_i^e$ . Тогда

$$\sum Q_i^e \delta q_i - \delta \Pi = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_i^e = \partial \Pi / \partial q_i. \quad (7.3)$$

Это теорема Лагранжа. Её обращение по Лежандру (6.5) называется теоремой Кастильяно:

$$q_i = \partial \hat{\Pi} / \partial Q_i^e, \quad \hat{\Pi}(Q_i^e) = \sum Q_i^e q_i - \Pi \quad (7.4)$$

( $\hat{\Pi}$  — «дополнительная энергия»). (7.4) эффективна для «статически определимых» систем, в которых внутренние силы находятся без анализа деформаций.

В линейной системе энергия является квадратичной формой:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad Q^e = \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (7.5)$$

в матричной записи. Матрица жёсткости  $\mathbf{C}$  всегда симметрична. Линейно упругие конструкции имеют положительную жёсткость, и в положении равновесия будет минимальной «потенциальная энергия системы»  $\mathcal{O}(q) = \Pi - Q^T q$ .

В статике линейно упругих систем большую роль играют *тождество Клапейрона* и *теорема взаимности работ*:

$$Q^T q = 2\Pi, \quad Q_1^T q_2 = Q_2^T q_1 \quad (7.6)$$

«формально вычисленная работа внешних сил равна удвоенной энергии деформации» и «работа сил первого состояния на перемещениях второго  $A_{12}$  равна  $A_{21}$ ». Они очевидны для рассматриваемых здесь дискретных (т. е. с конечным числом степени свободы) систем. Из тождества Клапейрона следует, что минимальное значение энергии  $\mathcal{E}_{\min} = -\Pi$ . Теорема взаимности означает симметрию матрицы жёсткости.

В нелинейных системах энергия не является квадратичной формой; статическое уравнение Лагранжа (7.3), связывающее равновесные координаты  $q$  с нагрузками  $Q^e$ , может иметь несколько решений или не иметь их вовсе. Линейная связь сохраняется для малых приращений

$$\tilde{Q}^e = C\tilde{q}, \quad C \equiv \partial^2 \Pi / \partial q^2. \quad (7.7)$$

Матрица  $C$  определяется состоянием перед варьированием. Естественный алгоритм расчёта в нелинейной статике — задавать малые приращения нагрузки и находить  $\tilde{q}$  с коррекцией  $C$ . Вырождение  $C$  при достаточно большой нагрузке означает потерю устойчивости. В незакреплённой конструкции матрица  $C$  вырождена и в линейном варианте — энергия равна нулю на «жёстких» смещениях. Условие разрешимости системы (7.5) — самоуравновешенность нагрузок.

## 2.8 Колебания

Система со стационарными связями совершает малые колебания около устойчивого положения равновесия  $q = 0$ . Кинетическая и потенциальная энергии — квадратичные формы с постоянными симметричными и положительными матрицами  $A$  и  $C$ , а уравнения Лагранжа имеют вид

$$A\ddot{q} + Cq = Q(t), \quad (8.1)$$

где  $Q$  — столбец возмущающих сил.

При  $Q = 0$  рассматривают главные, или нормальные колебания  $q(t) = U \sin \omega t$ . Собственные частоты  $\omega$  и формы или моды  $U$  находятся из матричной задачи на собственные значения

$$(-\omega^2 A + C)U = 0. \quad (8.2)$$

Корни характеристического уравнения  $\omega_k^2$  вещественны — доказывается от противного. Они положительны:

$$\omega^2 = U^T C U / U^T A U > 0. \quad (8.3)$$

Формы ортогональны:  $U_i^T A U_k = 0$  при  $\omega_i \neq \omega_k$ . Для доказательства можно записать (8.2) для  $U_i$  и  $U_k$ , умножить соответственно на  $U_i^T$  и  $U_k^T$  и вычесть. Нормируя формы, будем иметь

$$U_i^T A U_k = \delta_{ik}, \quad U_i^T C U_k = \omega_i^2 \delta_{ik}. \quad (8.4)$$

Любой столбец можно разложить по формам:

$$q = \sum \alpha_i U_i, \quad \alpha_i = U_i^T A q. \quad (8.5)$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  называются главными или *нормальными координатами*. С ними система является набором несвязанных осцилляторов:

$$T = \frac{1}{2} \sum \dot{\alpha}_i^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum \omega_i^2 \alpha_i^2, \quad \ddot{\alpha}_i + \omega_i^2 \alpha_i = \beta_i = Q^T U_i \Rightarrow$$

$$\alpha_i(t) = \alpha_i(0) \cos \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \dot{\alpha}_i(0) \sin \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \beta_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (8.6)$$

(интеграл Дюамеля). Свободное движение — линейная комбинация форм. Однако заметим, что простота решения в главных координатах становится иллюзорной при большом числе степеней свободы конструкции.

Определение частот и форм считается важной задачей; одним из методов её решения является итерационный. Используя матрицу податливости  $C^{-1}$ , имеем

$$C^{-1} A U_i \equiv K U_i = \frac{1}{\omega_i^2} U_i, \quad K q = \sum \frac{\alpha_i}{\omega_i^2} U_i. \quad (8.7)$$

Оператор  $K$  «поднимает роль»  $U_1$  — только первая форма и остаётся после многих итераций. Очистив  $q$  от  $U_1$ , методом итераций найдём  $U_2$  и т. д. Зная  $U_i$ , можно найти  $\omega_i$  по *отношению Рэлея* (8.3), минимум которого равен  $\omega_1^2$ :

$$\frac{q^T C q}{q^T A q} = \frac{\sum \omega_i^2 \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2} \geq \omega_1^2. \quad (8.8)$$



В реальных системах свободные колебания затухают из-за сил сопротивления. Рассмотрим простейшую линейную модель сопротивления с малой симметричной положительной матрицей  $\lambda B$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} A\ddot{q} + \lambda B\dot{q} + Cq &= 0; \quad q = V e^{pt}, \quad (Ap^2 + \lambda Bp + C)V = 0, \\ V &= V_0 + \lambda V_1 + \dots, \quad p = p_0 + \lambda p_1 + \dots, \\ (Ap_0^2 + C)V_0 &= 0 \Rightarrow p_0 = i\omega, \quad V_0 = U; \\ (-A\omega^2 + C)V_1 + i\omega(2Ap_1 + B)U &= 0 \Rightarrow p_1 = -U^T B U / 2. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Поправка  $p_1$  вещественна и отрицательна — колебания затухают. Мы использовали условие разрешимости системы с вырожденной матрицей и нормировку форм.

Асимптотический метод позволяет решать и намного более сложные задачи — например, о резонансных нелинейных колебаниях:

$$A\ddot{q} + \lambda f(q, \dot{q}) + Cq = \lambda Q \sin \omega t, \quad (8.10)$$

где  $\omega$  — одна из собственных частот,  $Q$  — постоянный столбец. Решение (с периодом  $T = 2\pi/\omega$ ) строится следующим образом

$$\begin{aligned} q &= q_0(t) + \lambda q_1(t) + \dots, \quad A\ddot{q}_0 + Cq_0 = 0, \quad q_0 = aU \sin(\omega t - \alpha), \\ A\ddot{q}_1 + Cq_1 &= Q \sin \omega t - f(q_0, \dot{q}_0), \quad q_1 = \sum a_i U_i, \\ U^T \left( Q - \frac{2}{T} \int_0^T f(q_0, \dot{q}_0) \sin \omega t dt \right) &= 0, \quad U^T \int_0^T f \cos \omega t dt = 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Главный член  $q_0$  совпадает с формой  $U$ , но на первом шаге невозможно определить амплитуду  $a$  и фазовый сдвиг  $\alpha$ . Они находятся на втором шаге из условий существования периодического  $q_1$  — в правой части уравнения для соответствующей главной координаты ( $a_i$ ) не должно быть первой гармоники.

## 2.9 Неавтономные системы

Этот вопрос всегда рассматривается в курсах механики, но в области деформируемого тела возникает редко — например, в задачах динамики колеса на мягких шинах.

До сих пор связи считались голономными — в виде (4.2). Неголономными называются ограничения со скоростями, не допускающие интегрирование (в отличие от (4.3)):

$$\sum_k \mathbf{b}_{\alpha k} \cdot \dot{\mathbf{r}}_k + c_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m), \quad (9.1)$$

где  $\mathbf{b}_{\alpha k}$  и  $c_\alpha$  могут зависеть от координат и времени. Виртуальные перемещения должны удовлетворять условиям

$$\sum_k \mathbf{b}_{\alpha k} \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (9.2)$$

Число степеней свободы меньше числа координат на количество неголономных связей.

Из принципа виртуальной работы легко выводятся уравнения Лагранжа первого рода — с множителями:

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = F_k + \sum_\alpha \lambda_\alpha \mathbf{b}_{\alpha k}. \quad (9.3)$$

Но для неголономных систем могут быть более эффективны уравнения Анпеля в квазикоординатах:

$$\partial U / \partial \dot{\pi}_s = \Pi_s. \quad (9.4)$$

Здесь  $U$  — «энергия ускорения»

$$U = \frac{1}{2} \sum m_k |\dot{\mathbf{r}}_k|^2, \quad (9.5)$$

$\pi_s$  — квазикоординаты,  $\Pi_s$  — соответствующие им обобщённые силы. Величины  $\pi_s$  нуждаются в особом разъяснении.

Благодаря связям (9.1) в пространстве скоростей  $\dot{\mathbf{r}}_k$  независимы лишь  $n(3N - m)$ ; квазискорости  $\dot{\pi}_s$  — это просто базис:

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \sum_s \mathbf{e}_{ks} \dot{\pi}_s, \quad (9.6)$$

Выражения  $\pi_s$  не могут быть получены интегрированием в общем виде и потому не существуют, первичными являются  $\dot{\pi}_s$ . Аналогично в пространстве вариаций

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_s \mathbf{e}_{ks} \delta \pi_s. \quad (9.7)$$

В уравнении виртуальной работы имеем

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_k &= \sum e_{ks} \ddot{\pi}_s + \dots \Rightarrow \partial \ddot{\mathbf{r}}_k / \partial \ddot{\pi}_s = \mathbf{e}_{ks}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k &= \sum_s \ddot{\mathbf{r}}_k \cdot \partial \ddot{\mathbf{r}}_k / \partial \ddot{\pi}_s \delta \pi_s, \quad \sum \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum \pi_s \delta \pi_s \Rightarrow (9.4).\end{aligned}$$

Важнейший пример применения уравнений Аппеля — в динамике твёрдого тела. Вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  является квазискоростью. Для тела с неподвижной точкой  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ,

$$\begin{aligned}|\dot{\mathbf{v}}|^2 &= |\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}|^2 + 2(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \dots = \\ &= |\dot{\boldsymbol{\omega}}|^2 r^2 - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dots, \\ U &= \frac{1}{2} \int |\dot{\mathbf{v}}|^2 dm = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dots, \\ \frac{\partial U}{\partial \dot{\boldsymbol{\omega}}} &= \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}\end{aligned}\tag{9.8}$$

(в энергии ускорения отбрасываются слагаемые без  $\ddot{\pi}_s$ ). В роли  $\delta \pi_s$  выступает вектор малого поворота  $\delta \boldsymbol{\theta}$ , не являющийся «вариацией  $\boldsymbol{\theta}$ », работа активных сил равна  $\mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}$ .

## Библиография

Механика деформируемого тела не может рассматриваться без предварительного изучения общей механики — например, по книгам [51, 13]. Но автор считает обязательным и знание основ аналитической механики, изложенных у А. И. Лурье [52], Ф. Р. Гантмахера [20], Г. Гольдстейна [23] и других авторов [1, 47, 72, 76, 94].

Механика абсолютно твёрдых тел рассмотрена, в частности, И. Виттенбургом [15]. Много очень интересных книг посвящено теории колебаний и её применениям: Л. И. Мандельштама [59], В. В. Бидермана [7], С. П. Тимошенко [98] — а также [55, 74].

## Глава 3

# Основы механики деформируемого тела

### 3.1 Модель сплошной среды. Дифференцирование

Будем считать, что вещество непрерывно заполняет пространство; в объёме  $dV$  содержится масса  $dm = \rho dV$ , где  $\rho$  — плотность. Континуальные модели полезны и необходимы. Представления об атомах и полях взаимодействия не всегда самые эффективные.

Частицы среды являются материальными точками. Но есть более сложная «моментная» модель, состоящая из элементарных твёрдых тел. Ещё сложнее модели «с внутренними степенями свободы», частицы которых могут быть сложными конструкциями...

В механике деформируемого тела необходимо рассмотрение двух конфигураций — начальной (отсчётной) и конечной (актуальной). Начальным обычно считается состояние без нагрузки и внутренних напряжений. Радиус-векторы одной и той же частицы до и после деформации —  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$ , объёмы тела —  $\hat{V}$  и  $V$ , плотности  $\hat{\rho}$  и  $\rho$ . При движении конфигурация меняется по закону

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t). \quad (1.1)$$

Вместо начального  $\mathbf{r}$  можно использовать любую тройку координат:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i)$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^i, t)$ . Эти координаты называются *материальными или лагранжевыми* — как и описание вида (1.1).

Допустимо и другое описание процессов в движущейся среде — *про-*

странственное или эйлерово:

$$\rho = \rho(\mathbf{R}, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) \quad (1.2)$$

(плотность и вектор скорости в жидкости). Но ясно, что понять процесс в частице проще, чем в фиксированной точке пространства.

Рассмотрим операции дифференцирования при материальном описании. Скорость  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} \equiv \partial_t \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ . Оператор Гамильтона

$$\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{r}^i \partial_i \quad (\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_k = \delta_k^i, \quad \mathbf{r}_i = \partial_i \mathbf{r} \equiv \partial \mathbf{r} / \partial q^i). \quad (1.3)$$

Важнейшую роль играет тензор «градиент деформации»

$$\underline{\mathbf{F}} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^T = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i \quad (\mathbf{R}_i = \partial_i \mathbf{R}). \quad (1.4)$$

Заметим, что  $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}_i = \underline{\mathbf{E}}$ . Для любого поля  $d\varphi(\mathbf{r}, t) = d\mathbf{r} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \varphi + \dot{\varphi} dt$ .

При пространственном описании оператор Гамильтона

$$\nabla = \mathbf{R}^i \partial_i \quad (\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}_k = \delta_k^i) \quad - \quad (1.5)$$

отличается от  $\overset{\circ}{\nabla}$ , но связан с ним:

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{R}^i \cdot \underline{\mathbf{F}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \mathbf{R}^i \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{\nabla} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \nabla, \quad \nabla = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-T} \cdot \overset{\circ}{\nabla}. \quad (1.6)$$

«Локальная» производная по времени  $\partial_t \varphi(\mathbf{R}, t)$  — отличается от «материальной»  $\dot{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\dot{\varphi} = \partial_t \varphi + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi, \quad (1.7)$$

поскольку  $d\varphi(\mathbf{R}, t) = \partial_t \varphi dt + d\mathbf{R} \cdot \nabla \varphi$ ,  $d\mathbf{R} = \mathbf{v} dt$ .

## 3.2 Деформация и поворот

Сравнивая начальное состояние с деформированным, имеем

$$d\mathbf{R} = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.1)$$

Это линейное преобразование бесконечно малых материальных векторов. По теореме о полярном разложении (1.33, гл. 1) имеем произведение преобразований: сначала  $\underline{\mathbf{U}}$ , затем поворот  $\underline{\mathbf{P}}$  или наоборот —  $\underline{\mathbf{P}}$  и далее  $\underline{\mathbf{V}}$ . Представим себе в начальном состоянии бесконечно малый кубик, ребра

которого направлены по собственным векторам (главным осям) тензора  $\underline{U}$ . Преобразование  $\underline{U} \cdot dr$  превращает его в прямоугольный параллелепипед с тем же направлением ребер. Далее — поворот  $\underline{P} \cdot (\underline{U} \cdot dr)$  без деформации. Вариант  $\underline{V} \cdot \underline{P}$  по существу то же самое.

Ясно, что тензор  $\underline{U}$  вполне определяет деформации «в точке». Однако чаще используется «мера деформации Коши — Грина»

$$\underline{G} = \underline{F}^{Tt} \cdot \underline{F} = \underline{U}^2 = G_{ik} r^i r^k, \quad G_{ik} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_k. \quad (2.2)$$

Исходя из закона  $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ , находим  $\underline{F}$ , далее  $\underline{G}$  и лишь потом  $\underline{U}$ . Отметим, что мера  $\underline{G}$  имеет те же компоненты, что и  $\underline{E} = G_{ik} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^k$  по в другом базисе (!).

Без деформации  $\underline{G} = \underline{E}$ , поэтому вводится «тензор деформации Коши — Грина»

$$\underline{C} = \frac{1}{2}(\underline{G} - \underline{E}) = \frac{1}{2}(G_{ik} - g_{ik}) r^i r^k = (g_{ik} - r_i \cdot r_k). \quad (2.3)$$

Через вектор перемещения  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{R} - \mathbf{r}$  он выражается так:

$$\underline{F}^{Tt} - \underline{E} \mid \nabla \mathbf{u} \Rightarrow \underline{C} = \underline{\epsilon} \mid \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T, \quad \underline{\epsilon} \equiv \nabla \mathbf{u}^S. \quad (2.4)$$

Хрестоматийным является рассуждение о компонентах  $\underline{C}$  в декартовом базисе. Бесконечно малые отрезки  $d\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{r}'$  превращаются в  $d\mathbf{R}$  и  $d\mathbf{R}'$ . Имеем

$$\begin{aligned} d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}' - d\mathbf{r} \cdot \underline{F}^{Tt} \cdot \underline{F} \cdot d\mathbf{r}' &= d\mathbf{r} \cdot (\underline{E} \mid 2\underline{C}) \cdot d\mathbf{r}'; \\ d\mathbf{r} - d\mathbf{r}' = \mathbf{e}_1 ds : d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}' - dS^2 &= (1 \mid 2C_{11}) ds^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dS}{ds} - 1 &= \sqrt{1 \mid 2C_{11}} - 1 = C_{11} \mid \dots, \\ d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 ds, \quad d\mathbf{r}' = \mathbf{e}_2 ds : d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}' &= dS_1 dS_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) - \\ &= 2C_{12} ds^2 - \gamma_{12} ds^2 \mid \dots \Rightarrow 2C_{12} - \gamma_{12} \mid \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Диагональные компоненты  $\underline{C}$  — это относительные удлинения соответствующих отрезков, а удвоенные недиагональные равны углам сдвига (при малых деформациях).

Мера  $\underline{G}$  и тензор  $\underline{C}$  — не единственные варианты представления деформации. Используются также мера Фингера

$$\underline{\Phi} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T = \underline{V}^2 = g^{ik} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_k, \quad (2.6)$$

мера Альманзи

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\Phi}^{-1} = \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1} = g_{ik} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^k \quad (2.7)$$

и соответствующие им тензоры деформации.

Особую известность приобрел тензор Генки:

$$\underline{\mathbf{H}} = \ln \underline{\mathbf{V}} = \ln [\underline{\mathbf{E}} + (\underline{\mathbf{V}} - \underline{\mathbf{E}})] \equiv - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\underline{\mathbf{V}} - \underline{\mathbf{E}})^k. \quad (2.8)$$

Функция определена посредством известного степенного ряда. В главных осях имеем

$$\underline{\mathbf{V}} = \sum V_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \quad \underline{\mathbf{H}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (V_i - 1)^k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \sum \ln V_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i. \quad (2.9)$$

Однако распространённое название «истинная» для логарифмической деформации не очень удачно. Деформация Коши не хуже.

### 3.3 Поле скоростей

Рассмотрим его в пространственном описании (1.2). Градиент скорости разложим на симметричную и антисимметричную части:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{W}}, \quad \underline{\mathbf{D}} = \nabla \mathbf{v}^S, \\ \underline{\mathbf{W}} &\equiv \nabla \mathbf{v}^A = -\mathbf{w} \times \underline{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\underline{\mathbf{D}}$  называется *тензором скоростей деформаций*,  $\mathbf{w}$  – вектором вихря.

Убедимся, что  $\underline{\mathbf{D}}$  соответствует своему названию:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{R}^i \dot{\mathbf{R}}_i, \quad \underline{\mathbf{D}} = D_{ik} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^k, \\ D_{ik} &= \mathbf{R}_i \cdot \frac{1}{2} \left( \mathbf{R}^S \dot{\mathbf{R}}_s + \dot{\mathbf{R}}_s \mathbf{R}^S \right) \cdot \mathbf{R}_k = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{R}}_i \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{R}}_k \right) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{G}_{ik} = \dot{C}_{ik} = \mathbf{r}_i \cdot \dot{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{r}_k \Rightarrow \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \dot{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь использовано не только пространственное, но и материальное описание:  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \partial_t \mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\partial_i \mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_i$ . Компоненты  $D_{ik}$  равны скоростям деформаций  $\dot{C}_{ik}$  – но в разных базисах (!).

В малой области поле  $\mathbf{v}$  имеет следующую структуру:

$$d\mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}^T \cdot d\mathbf{R} = \underline{\underline{D}} \cdot d\mathbf{R} + \mathbf{w} \times d\mathbf{R}. \quad (3.3)$$

Второе слагаемое — как в твёрдом теле с угловой скоростью  $\mathbf{w}$ . Однако вопрос об угловой скорости деформируемой частицы не имеет однозначного ответа. Выше введён тензор поворота  $\underline{\underline{P}}(\mathbf{r}, t)$ , ему соответствует угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  (2.3, гл. 2) — но она не равна  $\mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{U}} = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i, \quad \dot{\underline{\underline{F}}} = \boldsymbol{\omega} \times \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{P}} \cdot \dot{\underline{\underline{U}}} = \dot{\mathbf{R}}_i \mathbf{r}^i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \mathbf{r}^i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_i + \underline{\underline{P}} \cdot \dot{\underline{\underline{U}}} \cdot \mathbf{r}_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^i \times \dot{\mathbf{R}}_i = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \underline{\underline{R}}^i \times \underline{\underline{P}} \cdot \dot{\underline{\underline{U}}} \cdot \mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подчёркнутое слагаемое обращается в нуль при постоянной деформации.

Рассмотрим ускорение при пространственном описании:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}; \nabla \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}^T - 2\mathbf{w} \times \underline{\underline{E}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{v}} = \partial_t \mathbf{v} + \nabla (v^2/2) + 2\mathbf{w} \times \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Это равенство используется в гидромеханике при выводе уравнения Бернулли. Применяв к обеим частям операцию  $(\nabla \times)$ , получим

$$\frac{1}{2} \nabla \times \dot{\mathbf{v}} = \partial_t \mathbf{w} + \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}), \quad (3.6)$$

что важно в случае идеальной жидкости.

## 3.4 Объёмное расширение и баланс массы

При линейном преобразовании (2.1) соотношение объёмов таково

$$dV = J d\overset{\circ}{V}, \quad J = \det \underline{\underline{F}}. \quad (4.1)$$

Масса при этом сохраняется:

$$dm = \rho dV = \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{V} \Rightarrow \rho J = \overset{\circ}{\rho} \quad (4.2)$$

алгебраическое уравнение баланса массы.



Едва ли не во всех книгах по механике сплошной среды приводится следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.3)$$

Оно получается дифференцированием (4.2):

$$\dot{\rho} J + \rho \dot{J} = 0; \quad \dot{J} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}} = J \mathbf{r}_i \mathbf{R}^i \cdot \dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{r}^k = J \mathbf{R}^i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i = J \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.4)$$

Использовано правило дифференцирования детерминанта (2.28, гл. 1).

К (4.3) ведут и другие рассуждения. В объёме  $V$  масса

$$m = \int_V \rho dV;$$

материальный объём  $V$  движется, и меняется  $\rho$  под интегралом. Имеем

$$\dot{m} = \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} dV + \int_V \partial_t \rho dV = \int_V [\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] dV = 0 \quad \Rightarrow \quad (4.3).$$

Отметим важное общее *правило дифференцирования* интегралов по материальному объёму:

$$\left( \int_V \rho \varphi dV \right) \dot{\phantom{x}} = \int_V \rho \dot{\varphi} dV. \quad (4.5)$$

Для доказательства достаточно перейти к начальному объёму по правилу (4.2). В однородной среде  $\dot{\rho}(\mathbf{r}) = \text{const}$ , и в (4.5) вместо  $\rho$  можно взять  $J^{-1}$ .

## 3.5 Напряжения и баланс импульса

Внешние силы, действующие на тело, бывают объёмные и поверхностные. На малый материальный объём действует сила  $\mathbf{f} dV$  или  $\rho^{-1} \mathbf{f} dm$  — тогда  $\rho^{-1} \mathbf{f}$  называется массовой силой. Примеры: сила тяжести, переносные и кориолисовы силы в неинерциальных системах, сила Лоренца в среде с зарядами и токами.

На поверхности на малый элемент  $dO$  действует сила  $\mathbf{p} dO$ . В гидростатике  $\mathbf{p} = -p \mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  — орг внешней нормали). На шероховатой поверхности действует сила трения в касательной плоскости. Реакции связи на закреплённой поверхности — тоже поверхностные силы.

Каждая частица тела вообще-то действует на все другие частицы — но это допускается лишь в особой нелокальной теории. Обычно же считают внутренние силы поверхностными: на элементы  $\mathbf{n} dO$  действует (со стороны  $\mathbf{n}$ ) сила  $\boldsymbol{\tau}_n dO$ , где  $\boldsymbol{\tau}_n$  есть вектор напряжения на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ .

В каждой точке имеем бесконечно много напряжений, но они все содержатся в знаменитой *формуле Коши*

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}, \quad (5.1)$$

где  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$  — тензор напряжений. Простой, но не самый убедительный вывод (5.1) основан на балансе сил для малого тетраэдра, три грани которого параллельны координатным плоскостям  $x_i = \text{const}$ , а наклонная четвертая грань имеет нормаль  $\mathbf{n}$ :

$$\boldsymbol{\tau}_i dO_i = \boldsymbol{\tau}_n dO \quad (5.2)$$

(суммировать!). Здесь введены векторы напряжений  $\boldsymbol{\tau}_i$  на площадках с нормальми  $\mathbf{e}_i$  и площадями  $dO_i$ ; учтено правило действия и противодействия

$$\boldsymbol{\tau}_{-\mathbf{n}} = -\boldsymbol{\tau}_n \quad (5.3)$$

и отброшены малые высшего порядка. Учитывая геометрические соотношения

$$\int_{\partial V} \mathbf{n} dO = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_i dO_i = \mathbf{n} dO \Rightarrow dO_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i dO,$$

из (5.2) получаем (5.1) с представлением тензора напряжений

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{e}_i \boldsymbol{\tau}_i. \quad (5.4)$$

Компоненты тензора:  $\tau_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{e}_k = \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{e}_k$  (первый индекс — «номер» площадки, второй — направление силы). Диагональные компоненты называются нормальными напряжениями, недиагональные — касательными. При  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  обозначают  $\tau_{11} = \sigma_x$ ,  $\tau_{12} = \tau_{xy}$  и т. д.

Рассмотрим *баланс импульса* для материального объема  $V$ :

$$\left( \int_V \rho \mathbf{v} dV \right)' = \int_V \mathbf{f} dV + \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} dO. \quad (5.5)$$

Используя правило дифференцирования (4.5), теорему о дивергенции и учитывая произвольность объёма, придём к локальному соотношению

$$\nabla \cdot \underline{\tau} + \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (5.6)$$

Напомним: ускорение при пространственном описании имеет непростой вид (3.5). Мы ещё вернёмся к (5.1) и (5.5), рассматривая вариационную постановку.

### 3.6 Баланс моментов и его следствия

Скорость изменения момента импульса материального объёма равна суммарному моменту внешних сил:

$$\left( \int_V \mathbf{R} \times \rho \mathbf{v} dV \right)' = \int_V \mathbf{R} \times \mathbf{f} dV + \int_{\partial V} \mathbf{R} \times (\mathbf{n} \cdot \underline{\tau}) dO. \quad (6.1)$$

Дивергенция для последнего слагаемого

$$\nabla \cdot (\underline{\tau} \times \mathbf{R}) = \nabla \cdot \underline{\tau} \times \mathbf{R} - \underline{\tau}_\times, \quad (6.2)$$

так что локальная форма (6.1) такова

$$\mathbf{R} \times (-\rho \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\tau}) + \underline{\tau}_\times = 0. \quad (6.3)$$

Учитывая (5.6), оставляем лишь подчёркнутое. Векторный инвариант равен нулю, тензор напряжений симметричен.

Первым следствием симметрии  $\underline{\tau}$  является представление

$$\underline{\tau} = \sum \sigma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \quad (6.4)$$

существуют три взаимно перпендикулярных площадки без касательных напряжений. Собственные значения  $\sigma_i$  называются главными,  $\mathbf{e}_i$  — орты главных осей. Полагают  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Второе следствие — *круговая диаграмма Мора* (рис. 6). Вектор касательного напряжения  $\mathbf{t}_n = \underline{\tau}_n - \sigma_n \mathbf{n}$ . Точка с координатами  $(\sigma_n, \mathbf{t}_n)$  должна лежать в заштрихованной области между тремя полуокружностями. Известное остроумное доказательство этого связано с равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= \sum n_i^2 = 1, & \mathbf{n} \cdot \underline{\tau} \cdot \mathbf{n} &= \sigma_n = \sum \sigma_i n_i^2, \\ \mathbf{n} \cdot \underline{\tau}^2 \cdot \mathbf{n} &= t_n^2 + \sigma_n^2 = \sum \sigma_i^2 n_i^2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Формально это система линейных алгебраических уравнений для  $n_i^2$  (с определителем Вандермонда). Неравенства  $n_i^2 \geq 0$  задают области внутри или вне кругов Мора.

Заметим: максимум  $\sigma_n$  равен  $\sigma_1$ , минимум —  $\sigma_3$ , а максимум  $t_n$  равен  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ .

С учётом симметрии имеем шесть компонент  $\underline{\tau}$ . Трёх уравнений баланса (5.6) явно недостаточно для расчёта — задача является «статически неопределимой» и не может быть решена без рассмотрения деформаций.

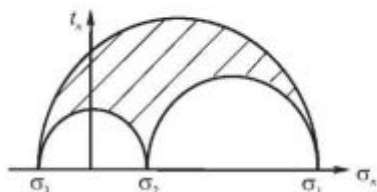


Рис. 6

### 3.7 Виртуальная работа

Методами аналитической механики можно вывести почти все основные соотношения. Для материального объёма имеем следующую очевидную формулировку принципа виртуальной работы

$$\int_V [(\mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \cdot \delta \mathbf{R} + \delta A^i] dV + \int_{\partial V} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0, \quad (7.1)$$

где  $\delta A^i$  — работа внутренних сил на единицу объёма. На виртуальных перемещениях без деформации  $\delta \mathbf{R} = \text{const} + \delta \theta \times \mathbf{R}$  будет  $\delta A^i = 0$ . При этом из (7.1) следуют уравнения сил моментов для всего тела. Но можно рассуждать более изощрённо:

$$\delta A^i = 0 \quad \text{при} \quad \nabla \delta \mathbf{R}^S = 0 \quad (7.2)$$

и рассматривать (7.1) как задачу с подчёркнутым ограничением. По известному правилу вводим симметричный тензор множителей Лагранжа  $\underline{\tau}$ :

$$\begin{aligned} & \int_V [(\mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \cdot \delta \mathbf{R} - \underline{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S] dV + \int_{\partial V} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_V (\mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \underline{\tau}) \cdot \delta \mathbf{R} dV + \int_{\partial V} (\mathbf{p} - \mathbf{n} \cdot \underline{\tau}) \cdot \delta \mathbf{R} dO = 0. \quad (7.3) \end{aligned}$$

По основной лемме вариационного исчисления отсюда следуют уравнение импульса (5.6) и формула Коши (5.1).

Заметим, что связанная с моментами симметрия  $\underline{\tau}$  у нас явилась следствием симметрии тензорного ограничения (7.2).

Далее можно вернуться к (7.1) с равенством  $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \underline{\tau}$ . Результатом будет

$$\delta A^i = -\underline{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^S = -\underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \delta \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1} = -\underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \delta \underline{\mathbf{C}} \quad (7.4)$$

если учесть (3.2). Для тела с произвольными механическими свойствами развить успех невозможно.

Исключением является упругое тело — в нём внутренние силы потенциальны,

$$\delta A^i = -J^{-1} \delta \Pi, \quad (7.5)$$

где  $\Pi$  — энергия деформации на единицу объёма (в начальном состоянии).

Из (7.4) и (7.5) следует закон состояния нелинейно упругого тела

$$\underline{\tau} = J^{-1} \underline{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \quad (7.6)$$

важнейшее, давно известное и остающееся малоизвестным соотношение.

Осталось задать потенциал  $\Pi(\underline{\mathbf{C}})$  — это отдельный сложный вопрос.

### 3.8 Законы термодинамики

До сих пор рассматривались чисто механические явления. Но известно, что деформация тела связана с тепловыми эффектами. При быстром сжатии среда нагревается, неравномерный нагрев вызывает внутренние напряжения. Теоретической основой описания таких явлений служат два закона термодинамики.

Знаменитый *первый закон*: скорость подвода тепла к системе плюс мощность внешних сил равны скорости изменения энергии системы —

$$\begin{aligned} \int_{\dot{V}} b \, dV - \int_{\partial \dot{V}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \, dO + \int_{\dot{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial \dot{V}} \mathbf{n} \cdot \underline{\tau} \cdot \mathbf{v} \, dO = \\ = \left( \int_{\dot{V}} \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \right)^{\cdot} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Скорость подвода тепла в единицу объёма  $b$  и вектор теплового потока  $\mathbf{h}$  встречались в 1.3. Величина  $e$  — некая внутренняя энергия на единицу

массы — остальное в (8.1) очевидно. Применяя правило (4.5) и теорему о дивергенции, а также учитывая произвольность объёма  $V$ , придём к локальному соотношению

$$(\mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} - \rho \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} + \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{D}} - \nabla \cdot \mathbf{h} + b - \rho \dot{\epsilon} = 0. \quad (8.2)$$

Неподчёркнутое слагаемое исчезает по закону импульса.

Важно отметить, что (8.2) отличается от уравнения теплопроводности из 1.3 слагаемым  $\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{D}}$ . Отличие пропадает при отсутствии деформации.

*Второй закон термодинамики* на элементарном уровне излагается так. Подведённое к телу тепло  $dQ$  не является полным дифференциалом. Таковым будет  $dQ/T = dS$ , где  $T$  — абсолютная температура,  $S$  — энтропия. В обратимых (медленных) процессах имеем равенство, в необратимых  $dS > dQ/T$ .

Для деформируемого тела с неоднородным полем температуры эти соображения формализуются в неравенстве Клаузиуса — Дюгема

$$\left( \int_V \rho s \, dV \right)' \geq \int_V b/T \, dV - \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}/T \, dO, \quad (8.3)$$

где  $s$  — энтропия на единицу массы. Эквивалентное локальное соотношение

$$\rho \dot{s} \geq (b - \nabla \cdot \mathbf{h})/T + \mathbf{h} \cdot \nabla T/T^2. \quad (8.4)$$

Некоторые авторы отбрасывают последнее слагаемое и ставят равенство. Это не очень хорошо — теплопроводность необратима и  $\mathbf{h} \cdot \nabla T < 0$ .

В записи обоих законов присутствует комбинация  $b - \nabla \cdot \mathbf{h}$ . Она исчезает в «приведённом диссипативном неравенстве»

$$\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{D}} - \mathbf{h} \cdot \nabla T/T \geq \rho(\dot{\epsilon} - T\dot{s}), \quad (8.5)$$

Часто вводят «свободную энергию»:

$$a \equiv \epsilon - Ts, \quad \dot{\epsilon} - T\dot{s} = \dot{a} + s\dot{T}. \quad (8.6)$$

Чтобы законы эффективно работали в математической модели среды, необходимо задать конкретный вид функций состояния  $\epsilon$  и  $s$ .

### 3.9 Определяющие уравнения

Они несут информацию о свойствах среды, связи напряжений с деформацией и температурой, о представлении  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{e}$  и  $s$ . Без них неполна система уравнений термомеханики деформируемого тела.

Определяющие уравнения не могут быть установлены без экспериментов. Но до постановки опытов необходимы некоторые представления — которые требуется лишь уточнить (например, найти численные значения параметров).

Определяющие уравнения не должны противоречить основным законам — и прежде всего диссипативному неравенству (8.5). Первый и второй законы по отдельности ещё не накладывают ограничений, поскольку содержат внешний фактор  $b$ .

В литературе представлены и другие априорные требования к определяющим уравнениям — принципы детерминизма, локальности и материальной индифферентности. Состояние в данный момент определяется всей историей изменения конфигурации и температуры. Но достаточно знать эту историю лишь в малой окрестности рассматриваемой точки. Не столь очевиден принцип индифферентности — остановимся на нём. Наряду с движением (1.1) рассматривается и другое, отличающиеся лишь трансляцией и поворотом:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_0, t) &= \underline{\mathbf{Q}}(t) \cdot [\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{R}(\mathbf{r}_0, t)], \\ \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_0, t) &= \mathbf{R}(\mathbf{r}_0, t) + \mathbf{u}(t).\end{aligned}\quad (9.1)$$

Тензор поворота  $\underline{\mathbf{Q}}$ , полюс  $\mathbf{r}_0$  и вектор трансляции  $\mathbf{u}$  произвольны. Новому « $\underline{\mathbf{Q}}$ -движению» соответствуют и новые скорости, деформации, напряжения и пр. В частности, имеем

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{R}_i, \quad \dot{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{F}}, \quad \dot{\underline{\mathbf{G}}} = \underline{\mathbf{G}}, \quad \dot{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\mathbf{U}}, \quad \dot{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{P}}, \quad \dot{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\mathbf{C}}. \quad (9.2)$$

Принцип индифферентности напряжений состоит в том, что

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T. \quad (9.3)$$

Закон состояния упругого тела (7.6) этому удовлетворяет.

Диссипативное неравенство (8.5) является не просто ограничением; для термоупругой среды из него можно вывести закон состояния. В этом случае свободная энергия и энтропия — функции от  $\underline{\mathbf{C}}$  и  $T$  (а не функционалы). Имеем

$$\left( \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-T} - \rho \frac{\partial a}{\partial \underline{\mathbf{C}}} \right) \cdot \dot{\underline{\mathbf{C}}} - \rho \left( \frac{\partial a}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \mathbf{h} \cdot \nabla T / T \geq 0. \quad (9.4)$$

### 3.10 Переход к отсчётной конфигурации

Левая часть — линейная функция скоростей  $\underline{\dot{C}}$  и  $\dot{T}$ , поэтому

$$\underline{\tau} = \rho \underline{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial a}{\partial \underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T, \quad s = -\frac{\partial a}{\partial T}, \quad \mathbf{h} \cdot \nabla T \leq 0. \quad (9.5)$$

Выражение  $\underline{\tau}$  отличается от (7.6) лишь тем, что место энергии деформации занимает свободная энергия.

Рассмотрим ещё **пример** — идеальную жидкость с уравнениями состояния

$$\underline{\tau} = -p \underline{\mathbf{E}}, \quad a = a(\rho, T), \quad s = s(\rho, T). \quad (9.6)$$

Используя (4.3), будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{D}} &= -p \nabla \cdot \mathbf{v} = p \dot{\rho} / \rho, \\ \left( \frac{p}{s} - \rho \frac{\partial a}{\partial \rho} \right) \dot{\rho} - \rho \left( \frac{\partial a}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \mathbf{h} \cdot \nabla T / T &\geq 0. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Подчёркнутые выражения равны нулю.

## 3.10 Переход к отсчётной конфигурации

Закон движения (1.1) задан в отсчётной конфигурации, в ней же определяются  $\underline{\mathbf{F}}$  и  $\underline{\mathbf{C}}$  — с оператором  $\hat{\nabla}$ . Но баланс импульса рассматривается в актуальной конфигурации с оператором  $\nabla$ .

Переход к геометрии начального состояния основан на *формуле Хаусона*, связывающей векторы материальной площадки до и после деформации:

$$\mathbf{n} \, dO = J(\mathbf{n} \, dO)^\circ \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}. \quad (10.1)$$

Для доказательства достаточно рассмотреть материальный параллелограмм с вектором

$$(\mathbf{n} \, dO)^\circ = d\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_k \, dq^i \, dq^k;$$

после деформации:  $d\mathbf{R} \times d\mathbf{R} = \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_k \, dq^i \, dq^k$ . Но

$$\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{R}_s = J \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_s \Rightarrow \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_k = J \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_k \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1} \Rightarrow (10.1).$$

Для внутренних сил теперь имеем

$$\mathbf{n} \, dO \cdot \underline{\tau} = (\mathbf{n} \, dO)^\circ \cdot \underline{\mathbf{S}}, \quad \underline{\mathbf{S}} \equiv J \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \underline{\tau} \quad (10.2)$$



это тензор напряжений Пиола. Баланс сил представляется в виде

$$\int_{\overset{\circ}{V}} J \mathbf{f} d\overset{\circ}{V} + \int_{\partial\overset{\circ}{V}} [(\mathbf{n} dO)^\circ \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}] = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{\nabla} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} + J \mathbf{f} = 0. \quad (10.3)$$

Аналогично можно преобразовать к начальной геометрии и другие уравнения баланса. В упругом теле из (7.6) и (10.3) следует

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{C}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \quad - \quad (10.4)$$

формально проще  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ .

### 3.11 Линеаризация уравнений

Термин «деформируемое твёрдое тело» содержит противоречие. Поэтому введено понятие абсолютно твёрдого тела. Но нельзя понять, как тело держит нагрузку, не рассматривая деформацию — от неё возникают внутренние силы.

Конструкционные материалы «справляются с нагрузкой» уже при малых деформациях. Энергию упругой деформации при этом можно считать квадратичной формой. Однако для линейности задачи необходима ещё малость поворотов. В тонких телах (стержни, пластины, оболочки) при малых локальных деформациях изменение формы может быть очень значительным, задача нелинейна из-за больших поворотов.

Геометрически линейными называются задачи, в которых перемещения малы вместе со своими производными:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \mathbf{u}, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (11.1)$$

Формальный малый параметр полезен при линеаризации, но затем приравнивается единице. Имеем

$$\overset{\circ}{\nabla} = \overset{\circ}{\nabla} + O(\lambda), \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \lambda \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + O(\lambda^2), \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda \boldsymbol{\omega} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}} + O(\lambda^2), \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}. \quad (11.2)$$

Можно отождествить  $\overset{\circ}{\nabla}$  и  $\nabla$ ,  $\overset{\circ}{\rho}$  и  $\rho$  и рассматривать задачу в геометрии начального состояния. Основные соотношения примут вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^S, \quad \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + b - \nabla \cdot \mathbf{h} = \rho \dot{c}, \quad \delta A^t = -\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \quad (11.3)$$

Определяющие уравнения замыкают систему; для упругого тела

$$\delta A^i = -\delta \Pi, \quad \underline{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\epsilon}} = {}^4 \underline{C} \cdot \underline{\epsilon}, \quad (11.4)$$

где  ${}^4 \underline{C}$  – тензор жесткостей. Квадратичная форма от шести компонент  $\underline{\epsilon}$  имеет 21 коэффициент – столько независимых компонент у  ${}^4 \underline{C}$ .

Наряду с геометрической нелинейностью выделяют «физическую» – когда связь напряжений и деформаций нелинейна. Так будет, например, при пластической деформации. Закон Гука (11.4) линеен и геометрически, и физически.

Линеаризация возможна не только вблизи начального состояния. В задачах устойчивости используются «уравнения в вариациях» для малых отклонений:

$$y' = f(c, y) \Rightarrow \tilde{y}' = \partial_y f \tilde{y},$$

где вариация  $\tilde{y}$  бесконечно мала. Рассмотрим уравнения в вариациях для нелинейно упругого тела. Из (10.3) и (10.4) имеем

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla} \cdot \tilde{\underline{S}} + (\tilde{J} \underline{f}) &= 0, \quad \tilde{\underline{S}} = \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \underline{C}^2} \cdot \tilde{\underline{C}} \right) \cdot \underline{F}^T + \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{C}} \cdot \tilde{\underline{F}}^T, \\ \tilde{\underline{F}} &= \nabla \tilde{\underline{R}}^T \cdot \underline{F}, \quad \tilde{\underline{C}} = \underline{F}^T \cdot \underline{\epsilon} \cdot \underline{F}, \quad \underline{\epsilon} \equiv \nabla \tilde{\underline{R}}^S. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Заметим, что  $J \underline{f} \equiv \underline{f}_0$  есть сила на единицу начального объёма.

Может быть полезно в проварьированных уравнениях перейти к актуальной конфигурации – с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\overset{\circ}{V}} \left( \overset{\circ}{\nabla} \cdot \tilde{\underline{S}} + \tilde{\underline{f}}_0 \right) d\overset{\circ}{V} = \int_{\overset{\circ}{O}} \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\underline{S}} d\overset{\circ}{O} + \int_V J^{-1} \tilde{\underline{f}}_0 dV, \\ (\mathbf{n} dO)^\circ &= J^{-1} \mathbf{n} dO \cdot \underline{F} \Rightarrow \overset{\circ}{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\underline{S}} d\overset{\circ}{O} = \mathbf{n} \cdot \underline{\Theta} dO, \quad \underline{\Theta} \equiv J^{-1} \underline{F} \cdot \tilde{\underline{S}}; \\ \nabla \cdot \underline{\Theta} + J^{-1} \tilde{\underline{f}}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Введённый здесь тензор  $\underline{\Theta}$  связан с  $\tilde{\underline{S}}$  как  $\underline{\tau}$  с  $\underline{S}$ . Учитывая вид  $\tilde{\underline{S}}$  из (11.5) и выражение  $\underline{\tau}$  (7.6), получим

$$\underline{\Theta} = J^{-1} \underline{F} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \underline{C}^2} \cdot \tilde{\underline{C}} \right) \cdot \underline{F}^T + \underline{\tau} \cdot \nabla \tilde{\underline{R}} \quad \left( \tilde{\underline{C}} = \underline{F}^T \cdot \nabla \tilde{\underline{R}}^S \cdot \underline{F} \right). \quad (11.7)$$

Это линейная тензорная функция от  $\nabla \tilde{R}$ .

Уравнения в вариациях можно использовать для решения нелинейных задач «шаг за шагом». Мы не пропустим при этом возможную бифуркацию равновесия.

## Библиография

Основы механики деформируемого тела изложены во многих книгах — Ю. Н. Работнова [81], А. И. Лурье [53] и других авторов [86, 34, 32]. Своеобразный, но очень интересный аксиоматический подход представлен К. Труделлом [103]. Автор рекомендует также книги В. Л. Бердичевского [8] и Я. Г. Пановко [74].

## Глава 4

# Классическая линейная упругость

### 4.1 Полная система уравнений

Она включает в себя *три группы соотношений*: баланс силовых факторов, выражения деформаций через перемещения, закон состояния —

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{f}} = \rho \ddot{\underline{\underline{u}}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla \underline{\underline{u}}^S, \quad \underline{\underline{\tau}} = \partial \Pi / \partial \underline{\underline{\varepsilon}} = {}^4 \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (1.1)$$

В компонентах 15 уравнений и столько же неизвестных.

Граничные условия разнообразны. Могут быть заданы перемещения  $\underline{\underline{u}}|_O = \underline{\underline{u}}_0$  (первого рода). При заданных нагрузках  $\underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{\tau}}|_O = \underline{\underline{p}}$  — второго рода. И есть много вариантов смешанных условий с обязательным правилом: по заданным величинам нельзя вычислить работу. Если, например, задано  $u_x$ , то нельзя задавать  $\sigma_x$  (но можно  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ ). Безошибочный вариант — естественные граничные условия в вариационной постановке.

Сразу отметим, что смешанные задачи — самые сложные, причём не только из-за трудности построения решений, но и объективно, от возникающих эффектов. Если, например, на части  $O_1$  поверхности заданы условия первого рода, а на остальной части  $O_2$  — второго, то на разделяющей линии может возникнуть сингулярность с неограниченным ростом напряжений.

В динамике (1.1) требует начальных условий. Как всегда в механике, задаются начальные положения и скорости.

Важнейшее свойство (1.1) — линейность. Следовательно, справедливо *правило суперпозиции*: сумме воздействий соответствует сумма «парциальных» решений.

Остановимся на *законе Гука*, связывающем  $\underline{\underline{\tau}}$  и  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Обычно материал обладает некой внутренней симметрией, и тогда число «упругих констант»

$C_{ijkl}$  становится меньше 21. Для изотропного материала имеем лишь две константы:

$$\underline{\underline{\tau}} = \lambda \theta \underline{\underline{E}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \theta \equiv \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \mu \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (1.2)$$

В самом деле, энергия изотропного материала может зависеть лишь от инвариантов  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ; будучи квадратичной формой, она должна иметь вид (1.2). Постоянные  $\lambda$  и  $\mu$  носят имя Ляме, причём  $\mu$  называется модулем сдвига.

Закон Гука записывается в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= 2\mu \left( \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \underline{\underline{E}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2\mu} \left( \underline{\underline{\tau}} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \underline{\underline{E}} \right), \quad (\sigma \equiv \text{tr } \underline{\underline{\tau}}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона. В соотношении первых инвариантов

$$\sigma = K\theta, \quad K = E/(1-2\nu), \quad E = 2\mu(1+\nu), \quad (1.4)$$

$K$  называется объёмным модулем, а  $E$  — модулем Юнга. Смысл  $E$  и  $\nu$  ясен из математического эксперимента:

$$\underline{\underline{\tau}} = \sigma \mathbf{ii} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E} [\mathbf{ii} - \nu(\mathbf{jj} + \mathbf{kk})]. \quad (1.5)$$

Энергия деформации  $\Pi$  должна быть положительной. Ряд авторов связывает это с минимумом свободной энергии в положении термодинамического равновесия. В механике это принимается как очевидное «дополнительное неравенство». При этом

$$E > 0, \quad \mu > 0, \quad K > 0, \quad \nu < 1/2. \quad (1.6)$$

В предельном случае  $\nu \rightarrow 1/2$  имеем  $K \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$  — несжимаемый материал.

## 4.2 Общие теоремы статики

**Тождество Клапейрона.** Формально вычисленная работа внешних сил равна удвоенной энергии деформации:

$$\int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_O \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dO = 2 \int_V \Pi dV. \quad (2.1)$$

Для доказательства достаточно положить  $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}$  и использовать теорему о дивергенции с законом баланса сил.

При отсутствии нагрузки

$$\int_V \Pi dV = 0 \Rightarrow \Pi = 0 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}. \quad (2.2)$$

Здесь мы опираемся на положительность  $\Pi$ .

**Единственность решения** легко доказывается от противного. Допустив наличие двух решений  $\mathbf{u}_{1,2}$ , получим для разностей  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ ,  $\tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2, \dots$  однородную постановку — с нулевыми нагрузками. Из (2.2) следует  $\tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = 0, \tilde{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = 0$ . При закреплённой границе будет  $\tilde{\mathbf{u}} = 0$ .

Эта, доказанная Кирхгофом, теорема не распространяется на случай неодносвязного тела — в котором существуют трубчатые полости, замкнутые или выходящие на поверхность. В таком теле возможно напряжённое состояние без внешних силовых воздействий, если «создана дислокация» — об этом ниже.

В нелинейной статике единственность теряется: прямой стержень при большой сжимающей продольной силе может иметь несколько равновесных форм.

**Теорема взаимности работ.** Работа сил первого состояния на перемещениях второго  $A_{12}$  равна  $A_{21}$ :

$$A_{12} \equiv \int_V \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{u}_2 dV + \int_O \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_2 dO = A_{21}. \quad (2.3)$$

Преобразуя поверхностный интеграл, слева получим  $\int \underline{\boldsymbol{\tau}}_1 \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 dV$ . Это равно правой части благодаря закону Гука.

Теорема взаимности очень эффективна, причём не только в статике — в динамике объёмная сила  $\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}$ .

**Принцип виртуальной работы.** Уже отмечалось, что это едва ли не самая общая форма постановки задачи статики:

$$\int_V (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi) dV + \int_O \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dO = 0. \quad (2.4)$$

Действительно,

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \delta \mathbf{u}) - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \delta \mathbf{u}; \quad (2.5)$$

после применения теоремы о дивергенции получим уравнение сил в объёме и естественное граничное условие  $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ .

### 4.3 Уравнения в перемещениях

Из полной системы (1.1) следует

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.1)$$

(симметрирование  $\nabla \mathbf{u}$  излишне из-за тройной симметрии  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ ).

Для однородного тела из изотропного материала в статике

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-2\nu} \nabla \theta + \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\mu} \mathbf{f} = 0. \quad (3.2)$$

Рассмотрим последнее уравнение. Частное решение неоднородного уравнения легко находится при потенциальных нагрузках:

$$\mathbf{f} = -\nabla W, \quad \mathbf{u} = \nabla \Phi, \quad \Delta \Phi = \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)} W. \quad (3.3)$$

Общее решение однородного уравнения Папкович и Нейбер нашли в следующем виде

$$\mathbf{u} = 4(1-\nu) \mathbf{B} - \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + B_0), \quad \Delta \mathbf{B} = 0, \quad \Delta B_0 = 0. \quad (3.4)$$

В компонентах здесь четыре гармонических функции, обычно добавляют какие-либо соотношения между ними.

Поясним вывод (3.4). Сначала полагаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \nabla \chi \quad \Rightarrow \quad \theta = \nabla \cdot \mathbf{B} + \Delta \chi, \quad \nabla[\nabla \cdot \mathbf{B} + 2(1-\nu) \Delta \chi] = 0.$$

Затем смотрим

$$\begin{aligned} \chi &= C \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}, \\ \Delta \chi &= C(\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{e}_i \cdot \partial_i \mathbf{B} + \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{B}) = 2C \nabla \cdot \mathbf{B}, \quad C = -1/4(1-\nu), \end{aligned}$$

и далее приходим к (3.4).

В качестве примера рассмотрим решения со сферической симметрией

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{r}, \quad B_0 = 0 &\quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{r}; \\ \mathbf{B} = 0, \quad B_0 = \frac{1}{r} &\quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{1}{r^3} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Преимущество (3.4) — в хорошей изученности уравнения Лапласа, в доступности большого набора гармонических функций.

Однако изопрѣнные аналитические методы решения уравнений в перемещениях теряют актуальность, уступая численным процедурам. Для дифференциального вариационного принципа (2.4) уравнениями Эйлера являются (3.2). Огромную популярность приобрел метод Ритца с финитными координатными функциями в форме МКЭ — метода конечных элементов.

## 4.4 Определение перемещений по деформациям. Уравнения совместности

Для вектора малого поворота имеем

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad \nabla \omega^T = \nabla \times \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \omega = \omega_0 + \int \nabla \times \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.1)$$

Интеграл не должен зависеть от пути, поэтому

$$\text{inc } \underline{\underline{\varepsilon}} \equiv \nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{\varepsilon}})^T = 0 \quad - \quad (4.2)$$

это очень важное *уравнение совместности деформаций*. Оно является необходимым следствием определения  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  через  $\mathbf{u}$ :

$$\nabla \times \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \nabla \times (\nabla \mathbf{u})^T = \nabla \omega^T \quad \Rightarrow \quad (4.2).$$

Зная  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  и  $\omega$ , можно найти перемещения:

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} &= \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot d\mathbf{r} + \omega \times d\mathbf{r}, \quad \int_0^1 \omega \times d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Big|_0^1 - \\ &- \int_0^1 (d\omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)) = \omega_0 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + \int_0^1 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\nabla \times \underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot d\mathbf{r}, \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_0 + \omega_0 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + \int_0^1 [\underline{\underline{\varepsilon}} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\nabla \times \underline{\underline{\varepsilon}})] \cdot d\mathbf{r} \quad - \quad (4.3) \end{aligned}$$

формулы Чезаро.



Интеграл в (4.3) не должен зависеть от пути между точками 0 и 1. Применяв теорему Стокса (в равенстве  $\oint f = 0$ ), придём после некоторых преобразований опять к (4.2).

Записав (4.2) в компонентах, обнаружим симметрию «тензора несовместности»  $\text{inc } \underline{\underline{\epsilon}}$ . С помощью равенства (1.5) гл. 1 можно преобразовать (4.2) к виду

$$\Delta \underline{\underline{\epsilon}} + \nabla \nabla \theta = 2 (\nabla \nabla \cdot \underline{\underline{\epsilon}})^S. \quad (4.4)$$

Немного странно, что шесть уравнений для шести деформаций не определяют их и являются чисто геометрическим законом. Распространено пояснение: в начальном состоянии тело состоит из малых кубиков, деформирующихся в косоугольные параллелепипеды; чтобы не было пустот, деформации кубиков должны быть согласованы. Но математические выкладки, производимые со смыслом, более убедительны.

Установив необходимость уравнений совместности, рассмотрим вопрос о достаточности. Оказывается, они обеспечивают однозначность перемещений (и поворотов) в односвязном теле. Отсутствие сквозных или замкнутых трубчатых полостей позволяет на замкнутый контур натянуть поверхность без выхода из тела, применить теорему Стокса и убедиться в однозначности.

Иная ситуация в неодносвязном теле. Могут быть не равны нулю интегралы вокруг трубчатой полости

$$\oint \nabla \times \underline{\underline{\epsilon}} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{a}, \quad \oint [\underline{\underline{\epsilon}} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \underline{\underline{\epsilon}})] \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{b}. \quad (4.5)$$

Тогда из (4.1) и (4.3) следует

$$\oint d\omega = \mathbf{a}, \quad \oint d\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{r} \quad (4.6)$$

формулы Вейнгартена. Решения с отличными от нуля  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называются дислокационными. В них теряется однозначность перемещений и поворотов (аналогия с ветвлением функций комплексного переменного). Для практического создания дислокации можно сделать разрез, сдвинуть его берега в соответствии с (4.6) и затем восстановить сплошность. Получим напряжённое состояние без внешних силовых воздействий, причём место разреза обнаружить невозможно. Таковы монтажные напряжения, возникающие в конструкции при сборке из частей.

Уравнения совместности можно переписать в напряжениях, если выразить деформации по закону Гука (1.3). В (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} &= -\frac{1}{2\mu} \left( \mathbf{f} + \frac{\nu}{1+\nu} \nabla \sigma \right), \quad \nabla \nabla \theta = \frac{1-2\nu}{2\mu(1+\nu)} \nabla \nabla \sigma, \\ \Delta \underline{\underline{\tau}} - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta \sigma \underline{\underline{E}} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \nabla \nabla \sigma &= -2\nabla \mathbf{f}^S - \frac{2\nu}{1+\nu} \nabla \nabla \sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta \sigma = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla \cdot \mathbf{f}, \\ \Delta \underline{\underline{\tau}} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \sigma + 2\nabla \mathbf{f}^S + \frac{\nu}{1-\nu} \nabla \cdot \mathbf{f} \underline{\underline{E}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Это — *уравнения Бельтрами — Мичелла*.

В компонентах для шести напряжений имеем девять (с балансом сил) уравнений. Но система не переопределена. В некотором смысле баланс сил следует из (4.7); применив операцию  $(\nabla \cdot)$ , получим

$$\Delta (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \mathbf{f}) = 0. \quad (4.8)$$

Если уравнение баланса выполнено на границе, то оно будет выполнено и в объёме (единственность решения задачи Дирихле).

Уравнения в напряжениях при внешней сложности часто позволяют быстрее найти решение, чем уравнения в перемещениях.

## 4.5 Сосредоточенная сила в неограниченной среде

В точке  $\mathbf{r} = 0$  приложена сила  $\mathbf{F}$ . При  $\mathbf{r} \rightarrow 0$  напряжения должны иметь особенность  $O(r^{-2})$ , что следует из условия равновесия

$$\int \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} dO + \mathbf{F} = 0 \quad (5.1)$$

сферы радиусом  $r$  с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . По закону Гука такого же порядка будут и деформации, а тогда перемещения  $\mathbf{u} = O(r^{-1})$ .

*Найденное Кельвиным и Сомильяной решение* имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \underline{\underline{K}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}, \quad \underline{\underline{K}} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu) \underline{\underline{E}} + \frac{1}{r^2} \mathbf{r}\mathbf{r} \right]. \quad (5.2)$$

Для вывода этой формулы используем решение Папковича – Нейбера:

$$\begin{aligned} B &= \frac{A}{r} \mathbf{F}, \quad B_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \frac{A}{r} \left[ (3 - 4\nu) \mathbf{F} + \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \right], \\ \nabla \mathbf{u} &= \frac{A}{r^3} \left[ \underline{\underline{\mathbf{E}}} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \mathbf{r} - (3 - 4\nu) \mathbf{r} \mathbf{F} - \frac{3}{r^2} \mathbf{r} \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \right], \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} &= \frac{2\mu A}{r^3} \left[ (1 - 2\nu) (\underline{\underline{\mathbf{E}}} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{r} \mathbf{F} - \mathbf{F} \mathbf{r}) - \frac{3}{r^2} \mathbf{r} \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Осталось определить константу  $A$  из условия (5.1). При интегрировании выносится множитель  $r^{-3} = \text{const}$  и применяется теорема о дивергенции.

Зная тензор  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}(\mathbf{r})$ , можно строить решение для любой нагрузки

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int \underline{\underline{\mathbf{K}}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}_1) dV_1. \quad (5.4)$$

Рассмотрим систему сосредоточенных сил  $\mathbf{F}_i$  в точках  $\mathbf{r}_i \rightarrow 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= \sum \underline{\underline{\mathbf{K}}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{F}_i = \\ &= \underline{\underline{\mathbf{K}}}(\mathbf{r}) \cdot \left( \sum \mathbf{F}_i \right) - \left( \sum \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i \right) \cdot \nabla \underline{\underline{\mathbf{K}}}(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

Каждое следующее слагаемое убывает быстрее предыдущих. Первое слагаемое определяется главным вектором  $\sum \mathbf{F}_i$ . Второе – «нагрузочным тензором»  $\sum \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i$ ; симметричная часть  $\sum \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i^S$  не менее важна, чем связанная с главным моментом антисимметричная. Поэтому несправедливо распространённое утверждение, что «вдали от места нагрузки важны лишь главные вектор и момент». Принцип Сен-Венана в такой формулировке справедлив для стержней.

Вне области нагрузки (5.4) удовлетворяет однородным уравнениям в перемещениях. Рассматривая различные локальные нагрузки, можно получать решения большой общности – на этом основаны методы потенциала в теории упругости.

## 4.6 Вариационные принципы

Наиболее важным является принцип минимума потенциальной энергии системы: функционал

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_V [\Pi(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}] dV - \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dO \quad (\mathbf{u}|_{O_1} = \mathbf{u}_0) \quad (6.1)$$

принимает наименьшее значение на истинных перемещениях. Уравнениями Эйлера оказываются (3.1), естественными граничными условиями —  $\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}|_{O_2} = \mathbf{p}$ . Вариационное уравнение  $\delta \mathcal{E} = 0$  выражает принцип виртуальной работы (2.4). Вид второй вариации

$$\delta^2 \mathcal{E} = \int \delta \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = 2 \int \Pi(\delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV > 0 \quad (6.2)$$

означает минимум.

Принцип можно обосновать и без варьирования:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}') - \mathcal{E}(\mathbf{u}) &= \int_V (\Pi' - \Pi - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u})) dV - \int_O \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{u}) dO = \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\underline{\boldsymbol{\tau}}' - \underline{\boldsymbol{\tau}}) \cdot (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}' - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV > 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Преобразуя поверхностный интеграл, учли равенства  $\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}|_{O_2} = \mathbf{p}$ ,  $(\mathbf{u}' - \mathbf{u})|_{O_1} = 0$ .

Отметим, что по теореме Клапейрона (2.1)

$$\mathcal{E}_{\min} = - \int_V \Pi(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV. \quad (6.4)$$

В принципе минимума дополнительной работы рассматривается функционал над напряжениями

$$A(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = \int_V \hat{\Pi}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) dV - \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{u}_0 dO \quad \left( \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = -\mathbf{f}, \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}|_{O_2} = \mathbf{p} \right), \quad (6.5)$$

где  $\hat{\Pi} = (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Pi)$  — дополнительная энергия ( $\partial \hat{\Pi} / \partial \underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ) и подчеркнуты ограничения на  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ . На истинных напряжениях функционал минимален, уравнениями Эйлера служат уравнения совместности в напряжениях.

Без варьирования имеем

$$\begin{aligned} A' - A &= \int_V (\hat{\Pi}' - \hat{\Pi}) dV - \int_O \mathbf{n} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}}' - \underline{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \mathbf{u} dO = \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\underline{\boldsymbol{\tau}}' - \underline{\boldsymbol{\tau}}) \cdot (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}' - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV > 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

$(\nabla \cdot (\underline{\tau}' - \underline{\tau}) = 0)$ .

Но представляет интерес и процедура с варьированием. Характер ограничений в объёме позволяет ввести векторное поле множителей Лагранжа  $\lambda(\mathbf{r})$ :

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \underline{\tau}} \cdot \delta \underline{\tau} + \nabla \cdot \delta \underline{\tau} \cdot \lambda \right) dV - \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \delta \underline{\tau} \cdot \mathbf{u}_0 dO - \\ & - \int_V \left( \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \underline{\tau}} - \nabla \lambda^S \right) \cdot \delta \underline{\tau} + \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \delta \underline{\tau} \cdot (\lambda - \mathbf{u}_0) dO. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Приравняв нулю, получим

$$\lambda|_{O_1} = \mathbf{u}_0, \quad \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \underline{\tau}} - \nabla \lambda^S \Rightarrow \text{inc} \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \underline{\tau}} = 0. \quad (6.8)$$

Множители Лагранжа оказались перемещениями.

Функционал **принципа Рейсснера** имеет вид

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}, \underline{\tau}) &= \int_V \left( \underline{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S - \hat{\Pi}(\underline{\tau}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) dV - \\ & - \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \underline{\tau} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dO - \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dO. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Перемещения и напряжения свободны и независимы в объёме и на поверхности. Вариация такова

$$\begin{aligned} \delta R &= \int_V \left[ \left( \nabla \mathbf{u}^S - \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \underline{\tau}} \right) \cdot \delta \underline{\tau} - (\nabla \cdot \underline{\tau} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} \right] dV - \\ & - \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \delta \underline{\tau} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dO + \int_{O_2} (\mathbf{n} \cdot \underline{\tau} - \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{u} dO. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Вариационное уравнение  $\delta R = 0$  эквивалентно системе уравнений и граничных условий.

Однако, функционал  $R$  не имеет экстремума — перед нами принцип стационарности. Использование принципа для построения приближённых

решений требует осторожности — можно получить большую погрешность при достаточно представительной, казалось бы, аппроксимации.

Смешанным принципом стационарности является и следующий с функционалом Василду:

$$\delta W = 0, \quad W(\mathbf{u}, \underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\tau}}) = \int_V [\underline{\underline{\tau}} \cdot (\nabla \mathbf{u}^S - \underline{\underline{\epsilon}}) + \Pi(\underline{\underline{\epsilon}}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}] dV - \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dO - \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dO. \quad (6.11)$$

Уравнениями Эйлера оказываются (1.1).

Между принципами нет тождества, они оказываются полезными с разных сторон. Иллюстрацией этому может служить вопрос об эффективных модулях в механике композитов. Рассматриваются две замечательные задачи для представительного объёма с равновесием без объёмных сил; в первой  $\mathbf{u}|_O = \underline{\underline{\epsilon}}_0 \cdot \mathbf{r}$ , во второй  $\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}}|_O = \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}}_0$ , где  $\underline{\underline{\epsilon}}_0$  и  $\underline{\underline{\tau}}_0$  — заданные постоянные тензоры. В однородном материале в обоих случаях имели бы однородные поля  $\underline{\underline{\epsilon}}$  и  $\underline{\underline{\tau}}$ . Можно доказать, что

$$1: \underline{\underline{\epsilon}}_0 = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{\epsilon}} dV, \quad 2: \underline{\underline{\tau}}_0 = \langle \underline{\underline{\tau}} \rangle. \quad (6.12)$$

Эффективные модули находятся из равенства энергий:

$$\begin{aligned} 1: \quad & \langle \underline{\underline{\tau}} \rangle \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_0 \equiv \underline{\underline{\epsilon}}_0 \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}^* \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_0 = \langle \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \rangle, \\ 2: \quad & \underline{\underline{\tau}}_0 \cdot \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle = \underline{\underline{\tau}}_0 \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^* \cdot \underline{\underline{\tau}}_0 = \langle \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \rangle \end{aligned} \quad (6.13)$$

(в законе Гука  $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\underline{S}}}^* \cdot \underline{\underline{\tau}}$ ).

Используя в задаче 1 функционал  $\mathcal{E}(\mathbf{u})$  с аппроксимацией  $\mathbf{u}' = \underline{\underline{\epsilon}}_0 \cdot \mathbf{r}$ , получим

$$\underline{\underline{\epsilon}}_0 \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}^* \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_0 \leq \underline{\underline{\epsilon}}_0 \cdot \langle \underline{\underline{\underline{C}}} \rangle \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_0 \Rightarrow \underline{\underline{\underline{C}}}^* \leq \langle \underline{\underline{\underline{C}}} \rangle. \quad (6.14)$$

Принцип же с  $A(\underline{\underline{\tau}})$  в задаче 2 при аппроксимации  $\underline{\underline{\tau}}' = \underline{\underline{\tau}}_0$  даёт

$$\underline{\underline{\tau}}_0 \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^* \cdot \underline{\underline{\tau}}_0 \leq \underline{\underline{\tau}}_0 \cdot \langle \underline{\underline{\underline{S}}} \rangle \cdot \underline{\underline{\tau}}_0 \Rightarrow \underline{\underline{\underline{S}}}^* \leq \langle \underline{\underline{\underline{S}}} \rangle. \quad (6.15)$$

Оценка податливости  $\underline{\underline{\underline{S}}}^*$  сверху означает оценку жёсткости снизу — имеем двустороннюю оценку  $\underline{\underline{\underline{C}}}^*$  (вилка Хилла).

## 4.7 Антиплоская деформация

Это самый простой из разделов теории упругости с нетривиальными эффектами. В декартовых осях  $x_\alpha, x_3$  ( $\alpha = 1, 2$ ) антиплоская деформация означает следующее

$$\mathbf{u} = u(x_\alpha) \mathbf{k} \Rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} = \nabla u \mathbf{k}^S \Rightarrow \underline{\underline{T}} = 2\tau \mathbf{k}^S, \quad \underline{\underline{\tau}} = \mu \nabla u. \quad (7.1)$$

Вектор перемещения параллелен оси  $x_3$  (с ортом  $\mathbf{k}$ ), а его единственная компонента  $u$  зависит лишь от поперечных координат  $x_\alpha$ . Тензоры деформаций  $\underline{\underline{\epsilon}}$  и напряжений  $\underline{\underline{T}}$  имеют лишь по две компоненты и связаны подчёркнутым равенством.

Векторы объёмных и поверхностных сил имеют по одной компоненте, а силовые соотношения таковы

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + f = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} = p. \quad (7.2)$$

Рассмотрим равновесие при  $f = 0$ . Однородное уравнение (7.2) позволяет ввести функцию напряжений:

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \nabla \varphi \times \mathbf{k} \quad (\mu = \text{const}). \quad (7.3)$$

Из (7.1) и (7.3) следует, что  $u$  и  $\varphi$  — сопряжённые гармонические функции, связанные условиями Коши — Римана (4.5 гл. 1), а их комплексная комбинация регулярна:

$$\nabla u = \nabla \varphi \times \mathbf{k}, \quad u + i\varphi = g(z), \quad z = x_1 + ix_2. \quad (7.4)$$

Перемещения и напряжения определяются функцией  $g$ :

$$u = \text{Re } g, \quad \tau_1 - i\tau_2 = \mu g'(z). \quad (7.5)$$

Любая регулярная  $g(z)$  является решением некоторой антиплоской задачи. **Рассмотрим функцию**

$$g(z) = \frac{-i\tau}{\mu} \sqrt{z^2 - l^2}; \quad (7.6)$$

она имеет две точки ветвления  $z = \pm l$  и регулярна в плоскости с прямым разрезом между этими точками (рис. 7).

## 4.8 Кручение стержней

При  $x_2 = 0$  имеем

$$u = \operatorname{Re} g = \begin{cases} 0, & |x_1| > l \\ \pm \frac{\tau}{\mu} \sqrt{l^2 - x_1^2}, & |x_1| < l \end{cases}, \quad (7.7)$$

где знак (+) относится к верхнему берегу разреза, а (-) — к нижнему. Разрыв  $u$  означает, что разрез существует реально.

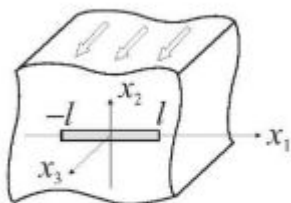


Рис. 7

Напряжения таковы:

$$\tau_1 - i\tau_2 = -i\tau \frac{z}{\sqrt{z^2 - l^2}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} -i\tau. \quad (7.8)$$

На бесконечности  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = \tau$ . Итак, имеем сдвиг (в плоскости  $x_2x_3$ ) пространства с разрезом (трещиной). На фронте трещины ( $z = \pm l$ ) напряжения неограниченно возрастают — это нельзя объяснить так элементарно, как в случае сосредоточенной силы.

Рассмотрим другой пример:

$$g(z) = \frac{\tau}{\mu} \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \Rightarrow \tau_1 - i\tau_2 = \tau \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right). \quad (7.9)$$

Здесь тоже сдвиг пространства с напряжением  $\tau$  — но в плоскости  $x_1x_3$ . На окружности  $|z| = a$

$$z = ae^{i\theta}, \quad \tau_1 - i\tau_2 = \tau (1 - e^{-2i\theta}), \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \tau_1 \cos \theta + \tau_2 \sin \theta = 0 -$$

вместо трещины на рис. 7 имеем окружность радиусом  $a$ . Максимум модуля напряжения  $\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$  равен  $2\tau$  и достигается при  $\theta = \pm \pi/2$ .

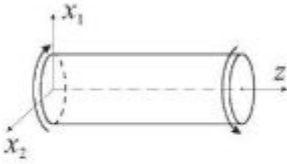
В заключение отметим, что перемещение  $u$  удовлетворяет тому же уравнению, что и двумерное стационарное температурное поле:

$$\nabla \cdot (\mu \nabla u) + f = 0. \quad (7.10)$$

## 4.8 Кручение стержней

Сен-Венан рассмотрел задачу о равновесии цилиндра с нагрузкой на торцах (рис. 8). Поверхностные силы в граничных условиях





$$\begin{aligned} z = z_1 : \quad \mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{T}} &= \mathbf{p}(x_\alpha), \\ z = 0 : \quad -\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{T}} &= \mathbf{p}_0(x_\alpha) \end{aligned} \quad (8.1)$$

имеют следующие главные вектор и момент

**Рис. 8** 
$$\mathbf{Q} = \int \mathbf{p} dF, \quad \mathbf{M} = \int \mathbf{x} \times \mathbf{p} dF \quad - \quad (8.2)$$

интегралы по сечению стержня.

Закон суперпозиции позволяет выделить четыре задачи: 1)  $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{M} = 0$  — о растяжении; 2)  $\mathbf{Q} = 0$ ,  $\mathbf{M} \perp \mathbf{k}$  — о «чистом» изгибе; 3)  $\mathbf{Q} = 0$ ,  $\mathbf{M} = M\mathbf{k}$  — о кручении; 4)  $\mathbf{Q} \perp \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{M} = 0$  — об изгибе силой. Задачи расположены в порядке возрастания сложности. Во всех книгах по теории упругости представлена задача кручения — достаточно простая, но уже нетривиальная.

Ясно, что при кручении в сечениях  $z = \text{const}$  возникают касательные напряжения. Попробуем в тензоре напряжений оставить только их:

$$\underline{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} + \mathbf{k} \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \tau_\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (8.3)$$

Из условий равновесия части стержня в промежутке  $(z, z_1)$  следует

$$\int \boldsymbol{\tau} dF = 0, \quad \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} dF = \mathbf{M}. \quad (8.4)$$

Оператор Гамильтона представим далее в виде  $\nabla_3 = \nabla + \mathbf{k} \partial_z$ , где  $\nabla = \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha$  — «двумерный». Используем уравнение баланса сил

$$\nabla_3 \cdot \underline{\mathbf{T}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}). \quad (8.5)$$

Далее по уравнению Бельтрами

$$\Delta_3 \underline{\mathbf{T}} + \frac{1}{1+\nu} \nabla_3 \nabla_3 \sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (8.6)$$

Из (8.5) и (8.6) следует

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \varphi \times \mathbf{k}, \quad \Delta \varphi = \text{const} \equiv -2\mu\alpha. \quad (8.7)$$

Введена функция напряжений  $\varphi$ , осталось поставить граничное условие на контуре сечения  $\partial F$  и определить константу  $\alpha$ .

#### 4.8 Кручение стержней

Орт  $\mathbf{n}$  на  $\partial F$  является нормалью и на контуре, и на боковой цилиндрической поверхности. Имеем

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{T}}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 = \nabla \varphi \cdot \mathbf{l} = \partial_l \varphi, \quad \mathbf{l} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}, \quad (8.8)$$

где  $l$  — дуговая координата на  $\partial F$ ,  $\mathbf{l}$  — орт касательной.

Для односвязного сечения границей  $\partial F$  является только наружный контур. Без ущерба для общности можно считать  $\varphi|_{\partial F} = 0$  ( $\varphi$  определена с точностью до аддитивной константы).

Осталось рассмотреть крутящий момент. Из (8.4) и (8.7) имеем

$$M = - \int \mathbf{x} \cdot \nabla \varphi dF = 2 \int \varphi dF - \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \varphi dl. \quad (8.9)$$

Контурный интеграл пропадает благодаря граничному условию. Можем найти  $\alpha$ , поскольку  $\varphi$  ей пропорциональна.

Полученные результаты перепишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \mu \alpha \Phi, \quad \Delta \Phi = -2, \quad \Phi|_{\partial F} = 0, \\ M &= \mu \alpha C, \quad C = 2 \int \Phi dF, \quad \boldsymbol{\tau} = \mu \alpha \nabla \Phi \times \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Здесь вся информация о напряжениях при кручении.  $C$  называется геометрической жёсткостью.

Обратимся к перемещениям. Они определяются интегрированием соотношений Гука

$$\begin{aligned} \nabla_3 \mathbf{u}^S &= (\nabla + \partial_z \mathbf{k}) (\mathbf{u}_\perp + u_z \mathbf{k})^S = \frac{1}{2\mu} \left( \underline{\underline{T}} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \underline{\underline{E}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\mu} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{k} + \mathbf{k} \boldsymbol{\tau}) \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{u}_\perp^S = 0 \quad (\text{a}), \quad \partial_z u_z = 0 \quad (\text{b}), \\ \nabla u_z + \partial_z \mathbf{u}_\perp &= \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\tau} = \alpha \nabla \Phi \times \mathbf{k} \quad (\text{c}). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Из (a,b) имеем

$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{U}(z) + \omega(z) \mathbf{k} \times \mathbf{x}, \quad u_z = \alpha W(\mathbf{x}), \quad (8.12)$$

что позволяет переписать (8.11):

$$\alpha (\nabla W - \nabla \Phi \times \mathbf{k}) + \mathbf{U}' + \omega' \mathbf{k} \times \mathbf{x} = 0. \quad (8.13)$$

Применим операцию  $(\nabla \times)$ :

$$\alpha \nabla \times (\nabla \Phi \times \mathbf{k}) = \omega' \nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{x}) \Rightarrow -\alpha \Delta \Phi = 2\omega' \Rightarrow \alpha = \omega'. \quad (8.14)$$

Найден геометрический смысл  $\alpha$  — это угол закручивания на единицу длины. Можем представить (8.13) в виде

$$\alpha \left[ \nabla W - \nabla \left( \Phi + \frac{x^2}{2} \right) \times \mathbf{k} \right] = -U' \quad (8.15)$$

это равно некоторой константе  $\alpha$ , поскольку слева функция от  $\mathbf{x}$ , а справа — от  $z$ . При  $\alpha = 0$

$$U = \text{const}, \quad \nabla W = \nabla \left( \Phi + \frac{x^2}{2} \right) \times \mathbf{k} \quad (8.16)$$

условия Коши — Римана. Если же  $\alpha \neq 0$ , получим дополнительные слагаемые перемещения твёрдого тела — они всегда появляются при определении перемещений по деформациям.

Гармоническая «функция деформации»  $W$  определяется по «функции Прандтля»  $\Phi$  посредством (8.16). Прандтль обнаружил аналогию задач для  $\Phi$  и для прогиба мембраны.

Рассмотрим **примеры**. Для эллиптического сечения имеем

$$\begin{aligned} \partial F: \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad \Phi = A \left( 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right), \quad A = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \\ \tau_1 = -2\mu\alpha \frac{a^2}{a^2 + b^2} x_2, \quad \tau_2 = 2\mu\alpha \frac{b^2}{a^2 + b^2} x_1, \\ C = 2 \int \Phi dF = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

При вычислении  $C$  ввели новые координаты:  $x_1 = a\rho \cos \theta$ ,  $x_2 = b\rho \sin \theta$  с якобианом  $J = ab\rho$ . Отметим, что максимум напряжения — на концах короткого диаметра.

Деформация находится из (8.16):

$$\partial_1 W = \partial_2 \Phi + x_2, \quad \partial_2 W = -\partial_1 \Phi - x_1 \quad \Rightarrow \quad W = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2. \quad (8.18)$$

В круге ( $a = b$ ) деформации нет, подтверждается элементарная теория из сопротивления материалов.

Более сложный **пример** — *круговое сечение с выточкой* (рис. 9). На большой окружности  $r = 2R \cos \theta$ , на малой  $r = a$ . Функция

$$\Phi = \frac{1}{2} \left( r - \frac{a^2}{r} \right) (2R \cos \theta - r) \quad (8.19)$$

является решением. Она содержит гармонические слагаемые — реальные части функций комплексного переменного:  $r \cos \theta = \operatorname{Re} z$ ,  $\cos \theta / r = \operatorname{Re} 1/z$ .

Определив касательное напряжение

$$\tau = \mu\alpha \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \partial_\theta \right) \Phi \times \mathbf{k},$$

обнаружим максимум при  $\theta = 0$ ,  $r = a$ ; при малой выточке он примерно вдвое больше, чем без неё.

Вернёмся к теории и отметим *теорему о циркуляции напряжений*:

$$\frac{1}{\mu\alpha} \oint \tau \cdot d\mathbf{r} = \oint \partial_n \Phi dl = -2F \quad (8.20)$$

для любого замкнутого контура с площадью  $F$  внутри. Доказательство основано на (8.15):

$$\begin{aligned} \nabla \Phi \times \mathbf{k} &= \frac{1}{\mu\alpha} \tau = \nabla W - \mathbf{x} \times \mathbf{k}, & \oint \nabla W \cdot d\mathbf{r} &= 0, \\ \mathbf{k} \times d\mathbf{r} &= -\mathbf{n} dl, & \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} dl &= 2F. \end{aligned}$$

Для односвязного сечения теорема является тождеством и не даёт новой информации:

$$\oint \partial_n \Phi dl = \int \Delta \Phi dF = -2F. \quad (8.21)$$

Иное — в случае *многосвязного сечения* (рис. 10). На каждом из граничных контуров  $\Gamma_k$ :  $\Phi = \operatorname{const} = C_k$ , но эти постоянные различны. Можно принять  $\Phi|_{\Gamma_0} = 0$  и представить решение в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \sum C_k \Phi_k, \\ \Delta \Phi_0 &= -2, \quad \Phi_0|_{\partial F} = 0, \quad \Delta \Phi_k = 0, \quad \Phi_k|_{\Gamma_k} = \delta_{ks}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

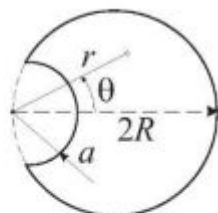


Рис. 9

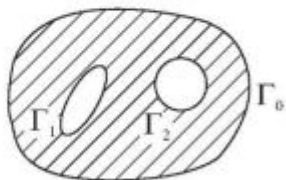


Рис. 10

Теорема о циркуляции позволяет найти  $C_k$ . Записав (8.20) для каждого из контуров  $\Gamma_k$ , получим линейную алгебраическую систему

$$\oint_{\Gamma_s} \partial_n \Phi_0 dl + \sum_k C_k \oint_{\Gamma_s} \partial_n \Phi_k dl = -2F_s. \quad (8.23)$$

Почему случай многосвязного сечения потребовал особого рассмотрения? Потому, что здесь возможны дислокационные воздействия. Теорема о циркуляции выражает их отсутствие. В противном случае  $\oint du = b$  — «вектор Бюргерса винтовой дислокации».

В задаче о кручении применяются и *вариационные методы*. Краевой задаче (8.10) для  $\Phi$  соответствует вариационное уравнение

$$\int_F (\Delta \Phi + 2) \delta \Phi dF = 0, \quad \Phi|_{\partial F} = 0. \quad (8.24)$$

Можно использовать процедуру Рунца

$$\Phi = \sum a_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k|_{\partial F} = 0, \quad \int (\Delta \Phi + 2) \varphi_k dF = 0.$$

Но для вытянутых сечений более эффективен метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям (Л. В. Канторовича). Для прямоугольного сечения  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b \ll a$  будем искать приближённое решение

$$\Phi = \varphi(x_1) (b^2 - x_2^2), \quad (8.25)$$

где  $\varphi$  — неизвестная варьируемая функция;  $\varphi(\pm a) = 0$ . Из (8.24) получаем одномерную вариационную постановку

$$\int_{-a}^a \left( \frac{2}{5} b^2 \varphi'' - \varphi + 1 \right) \delta \varphi dx_1 = 0 \quad (8.26)$$

с решением

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x_1}{b}}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}} \Rightarrow \\ \Rightarrow C &= 2 \int \Phi dF = \frac{16}{3} ab^3 \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{b}{a} \operatorname{th} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b} \right). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Найденные значения  $C$  практически совпадают с точными, полученными методом собственных функций.

## 4.9 Плоская задача

*Плоской деформацией* называются решения со следующим полем перемещений

$$\mathbf{u}(x_\alpha, z) = u_\alpha(x_\beta) \mathbf{e}_\alpha \equiv \mathbf{u}_\perp(\mathbf{x}), \quad (9.1)$$

перпендикулярным оси  $z$  и независимым от  $z$ . Так будет в длинном цилиндре с нагрузками  $\mathbf{f}_\perp(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{p}_\perp(\mathbf{x})$ .

Оператор Гамильтона и тензор деформации «двумерный», но у напряжений есть компонента  $\sigma_z$ :

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_\perp + \sigma_z \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad \sigma_z = \nu \sigma_\perp \quad (E\varepsilon_z = 0 = \sigma_z - \nu \sigma_\perp). \quad (9.2)$$

Ограничимся решениями без объёмных сил. В этом случае вводится функция напряжений Эри:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau}}_\perp = -\mathbf{k} \times \nabla \nabla \Phi \times \mathbf{k}. \quad (9.3)$$

Для обоснования рассмотрим уравнения в компонентах

$$\begin{aligned} \partial_1 \tau_{11} + \partial_2 \tau_{21} = 0 &\Rightarrow \tau_{11} = \partial_2 \Phi_1, \quad \tau_{21} = -\partial_1 \Phi_1; \\ \partial_1 \tau_{12} + \partial_2 \tau_{22} = 0 &\Rightarrow \tau_{22} = \partial_1 \Phi_2, \quad \tau_{12} = -\partial_2 \Phi_2; \\ \tau_{12} = \tau_{21} &\Rightarrow \Phi_1 = \partial_2 \Phi, \quad \Phi_2 = \partial_1 \Phi \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau_{11} = \partial_2^2 \Phi, \quad \tau_{22} = \partial_1^2 \Phi, \quad \tau_{12} = -\partial_1 \partial_2 \Phi. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Знаменитое *бигармоническое уравнение*

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \quad (9.5)$$

следует из уравнения Бельтрами:

$$\Delta \underline{\underline{\tau}} + \nabla \nabla \sigma_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \partial_2^2 \Phi + \partial_1^2 \Delta \Phi = 0, \dots$$

Отметим некоторые общие правила построения бигармонических функций. Если  $g(\mathbf{x})$  — гармоническая, то будут бигармоническими

$$\Phi: x_1 g, \quad x_2 g, \quad x^2 g. \quad (9.6)$$

Однако необходимо поставить *граничные условия* к (9.5). В каждой точке граничного контура (рис. 11) их два. Сначала имеем

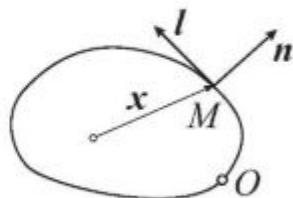


Рис. 11

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} = -\mathbf{n} \times \mathbf{k} \cdot \nabla \nabla \Phi \times \mathbf{k} = \partial_l \nabla \Phi \times \mathbf{k} = \mathbf{p}. \quad (9.7)$$

Далее выбираем какую-либо точку  $O$  на контуре за начальную ( $l = 0$ ) и находим главный вектор нагрузок на участке  $OM$ :

$$\mathbf{P} = \int_0^l \mathbf{p} dl = \nabla \Phi|_0^l \times \mathbf{k}. \quad (9.8)$$

По  $\Phi$  определена с точностью до произвольного линейного слагаемого ( $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \text{const}$ ,  $\mathbf{a} = \text{const}$ ), поэтому можно  $\nabla \Phi|_0 = 0$ . Тогда

$$\partial_n \Phi = -P_l. \quad (9.9)$$

Второе условие связано с моментом (относительно «крайней» точки):

$$\Phi = M \equiv \int_0^l (\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \times \mathbf{p} dl \cdot \mathbf{k} \quad (9.10)$$

(интегрируется по частям).

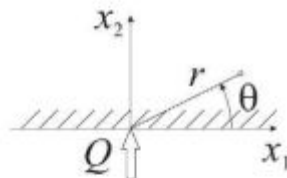


Рис. 12

Для примера рассмотрим задачу Фламана о полуплоскости  $x_2 \geq 0$  с сосредоточенной нормальной силой на границе (рис. 12). В качестве начальной точки примем  $x_1 \rightarrow -\infty$ . Тогда  $\mathbf{P} = 0$  при  $x_1 < 0$  и  $\mathbf{P} = Q\mathbf{e}_2$  для  $x_1 > 0$ , на всей оси  $x_1$ :  $\partial_n \Phi = -\partial_2 \Phi = 0$ . Второе условие

$$\Phi = \begin{cases} 0, & x_1 < 0 \\ -Qx_1, & x_1 > 0 \end{cases} \quad (9.11)$$

Учитывая соображения размерности, решение ищем в виде

$$\Phi = Qrf(\theta) \quad (9.12)$$

(безразмерная  $f$  не может зависеть от размерного  $r$ ). Для  $f(\theta)$  можно вывести обыкновенное дифференциальное уравнение. Но с помощью (9.6) легко строится общее решение

$$f = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + C_3 \theta \cos \theta + C_4 \theta \sin \theta. \quad (9.13)$$

Четыре постоянные находятся из граничных условий  $f(0) = -1$ ,  $f(\pi) = f'(0) = f'(\pi) = 0$ . В итоге получим

$$\Phi = \frac{1}{\pi} Qr\theta \cos \theta + \dots, \quad (9.14)$$

где отброшены линейные по  $x$  слагаемые. Напряжения таковы

$$\begin{aligned} \underline{\tau} &= -\mathbf{k} \times \left( \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \partial_\theta \right)^2 \Phi \times \mathbf{k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_r &= \left( \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \right) \Phi = -\frac{2Q}{\pi r} \sin \theta, \\ \sigma_\theta &= \partial_r^2 \Phi = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_\theta \Phi \right) = 0. \end{aligned} \quad (9.15)$$

При  $r \rightarrow 0$   $\underline{\tau} = O(r^{-1})$ , что связано с балансом сил. Линии уровня  $\sigma_r = \text{const}$  — окружности, касающиеся оси  $x_1$  в точке  $\mathbf{x} = 0$ .

Обратимся к *перемещениям*. Чтобы получить их общее представление, заметим, что гармоническая функция  $\Delta \Phi$  является реальной частью некоторой регулярной функции  $S'(z)$  ( $z = x_1 + ix_2$ ):

$$\begin{aligned} S &= S_1 + iS_2, \quad S' = \partial_1 S_1 + i\partial_1 S_2 = \partial_2 S_2 - i\partial_2 S_1, \\ \Delta \Phi &= \partial_1 S_1 = \partial_2 S_2. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Тогда легко интегрируются соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} 2\mu \partial_1 u_1 - \tau_{11} - \nu \sigma &= -\partial_1^2 \Phi + (1 - \nu) \partial_1 S_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\mu u_1 &= -\partial_1 \Phi + (1 - \nu) S_1 + f_1(x_2), \\ 2\mu u_2 &= -\partial_2 \Phi + (1 - \nu) S_2 + f_2(x_1); \\ \mu (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) &= \tau_{12} \Rightarrow f_1'(x_2) = -f_2'(x_1) = -\omega = \text{const}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Последнее означает:  $f_1$  и  $f_2$  определяют перемещение твёрдого тела и могут быть отброшены. Итоговая формула имеет вид

$$2\mu \mathbf{u} = -\nabla \Phi + (1 - \nu) \mathbf{S} \quad (9.18)$$

с вектором, соответствующим комплексному числу  $S$ .

В задаче Фламана

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = -\frac{2Q}{\pi r} \sin \theta = \text{Re} \left( -\frac{2iQ}{\pi z} \right) \Rightarrow S &= -\frac{2iQ}{\pi} \ln z = \frac{2Q}{\pi} (\theta - i \ln r), \\ \nabla \Phi &= \frac{Q}{\pi} [\mathbf{e}_r \theta \cos \theta + \mathbf{e}_\theta (\cos \theta - \theta \sin \theta)], \\ 2\mu u_1 &= \frac{Q}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta + (1 - 2\nu) \theta \right], \\ 2\mu u_2 &= -\frac{Q}{\pi} [\cos^2 \theta + 2(1 - \nu) \ln r]. \end{aligned} \quad (9.19)$$



Эти выражения удивляют:  $u_1$  постоянно на лучах  $\theta = \text{const}$  и имеет разрыв при  $r = 0$ ,  $u_2$  неограниченно растёт при  $r \rightarrow \infty \dots$  Естественно лишь то, что  $\mathbf{u} = O(\ln r)$  при  $r \rightarrow 0$ . Но заметим, что подобные странные явления встречаются и в двумерных задачах вне теории упругости: электростатический потенциал бесконечной прямой равномерно заряженной линии тоже содержит  $\ln r$ .

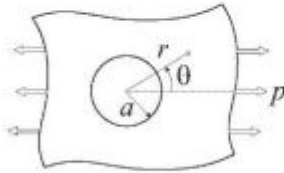


Рис. 13

Рассмотрим далее известную задачу **Кирша** о растяжении плоскости с круговым отверстием (рис. 13). Выделим возмущения, вносимые отверстием:

$$\underline{\tau} = p \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{\underline{\tau}}, \quad \Phi = \frac{1}{2} p x_2^2 + \tilde{\Phi}. \quad (9.20)$$

Поскольку  $x_2^2 = r^2(1 - \cos 2\theta)/2$ , решение ищем в виде

$$\tilde{\Phi} = f_0(r) + f_2(r) \cos 2\theta. \quad (9.21)$$

С помощью правила (9.6) находим

$$\begin{aligned} f_0 &= A_0 + B_0 \ln \frac{r}{a} + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln \frac{r}{a}, \\ f_2 &= A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^2} + C_2 r^4 + D_2. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Напряжения от  $\tilde{\Phi}$  затухают на бесконечности, поэтому отбрасываем  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $A_2$  и  $C_2$ . При  $r = a$  равны нулю  $\Phi$  и  $\partial_r \Phi$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} p a^2 + f_0(a) &= -\frac{1}{4} p a^2 + f_2(a) = \frac{1}{2} p a + f_0'(a) = \\ &= -\frac{1}{2} p a + f_2'(a) = 0. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Определив отсюда  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $B_2$  и  $D_2$ , найдём напряжения:

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma_r}{p} &= 1 - \eta^2 + (1 - 4\eta^2 + 3\eta^4) \cos 2\theta, \quad \eta \equiv \frac{a}{r}, \\ \frac{2\sigma_\theta}{p} &= 1 + \eta^2 - (1 + 3\eta^4) \cos 2\theta, \\ \frac{2\tau_{r\theta}}{p} &= (-1 - 2\eta^2 + 3\eta^4) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (9.24)$$

При  $r = a$ ,  $\theta = \pm\pi/2$  имеем  $\sigma_\theta = 3\rho$ .

Для плоской задачи разработаны изощрённые методы с функциями комплексного переменного. Функция Эри представляется в виде  $\Phi(z, \bar{z})$ ; запись  $\Phi(z)$  ошибочна, т. к.  $\Phi$  не является гармонической. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \partial_z + \partial_{\bar{z}}, & \partial_2 &= i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}), \\ \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), & \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2). \end{aligned} \quad (9.25)$$

При этом уравнение Лапласа решается так:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 4\partial_z\partial_{\bar{z}}u = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= f_1(z) + f_2(\bar{z}) = \frac{1}{2} [f(z) + \overline{f(z)}] = \operatorname{Re} f(z) \end{aligned} \quad (9.26)$$

( $u$  вещественна). Известная формула Гурса для бигармонической функции выводится так

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 4\partial_z\partial_{\bar{z}}\Phi = \operatorname{Re} S' = 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \quad (S \equiv 4\varphi) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\Phi &= \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} - \end{aligned} \quad (9.27)$$

с комплексными потенциалами Колосова – Мухелишвили. Напряжения и перемещения представляются тремя формулами

$$\begin{aligned} \tau_{11} + \tau_{22} &= 4 \operatorname{Re} \varphi'(z), \\ \tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12} &= 2 [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (\psi \equiv \chi'), \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= (3 - 4\nu)\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Вторая формула – результат операции  $\partial_z^2$  над (9.27); третья – это (9.18). Сопряжённые выражения строятся так

$$\varphi(z) = a_0 + a_1z + \dots, \quad \overline{\varphi(z)} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1z + \dots, \quad \overline{\overline{\varphi(z)}} = \varphi(\bar{z}).$$

Полезны выражения главного вектора (9.8)

$$P_1 + iP_2 = \partial_2\Phi - i\partial_1\Phi = -2i\partial_z\Phi = -i [\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}] \quad (9.29)$$

и главного момента относительно начала координат

$$m_0 = M + x_1P_2 - x_2P_1 = \Phi - 2 \operatorname{Re} z \partial_z\Phi. \quad (9.30)$$

Рассмотрим **пример** — бесконечную плоскость с сосредоточенной силой  $e_1$  в точке  $z = 0$ . Обозначим  $\Delta_c f$  приращение величины  $f$  при обходе  $z = 0$ . По характеру воздействий имеем

$$\Delta_c(P_1 + iP_2) + 1 = 0, \quad \Delta_c m_0 = 0, \quad \Delta_c(u_1 + iu_2) = 0. \quad (9.31)$$

Решение ищем в виде

$$\varphi(z) = a \ln z, \quad \psi(z) = b \ln z \Rightarrow \chi(z) = bz(\ln z - 1). \quad (9.32)$$

Из (9.27) – (9.32) получим

$$a = -1/8\pi(1 - \nu), \quad b = (3 - 4\nu)/8\pi(1 - \nu), \quad (9.33)$$

так что перемещения будут такими

$$u_1 + iu_2 = \frac{1}{8\pi\mu(1 - \nu)} \left[ -(3 - 4\nu) \ln r + \frac{1}{2} e^{2i\theta} \right] - \quad (9.34)$$

аналог формулы Кельвина – Сомильяны (5.2).

*Плоское напряжённое состояние* формально почти не отличается от плоской деформации, но реально означает совсем иное — это состояние бесконечно тонкого плоского листа при нагрузке в своей плоскости. В «плоском двумерном мире»

$$\begin{aligned} \underline{\tau} &= \underline{\tau}_\perp(\mathbf{x}), \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_\perp, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp, \quad \nabla = \nabla_\perp, \\ \nabla \cdot \underline{\tau} + \mathbf{f} &= 0, \quad \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left( \underline{\tau} - \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma \underline{\mathbf{E}} \right) \quad (\underline{\mathbf{E}} = e_\alpha e_\alpha), \\ \Delta\theta &= \nabla \cdot \nabla \cdot \underline{\varepsilon}, \quad \Delta\sigma + (1 + \nu)\nabla \cdot \mathbf{f} = 0. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Вместо шести уравнений совместности (в компонентах) имеем лишь одно, соответственно упростились и уравнения Бельтрами – Мичелла. Теперь

$$\begin{aligned} \omega &= \omega \mathbf{k}, \quad \omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}, \quad \nabla \omega = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \underline{\varepsilon}, \quad \nabla \times (\mathbf{k} \cdot \nabla \times \underline{\varepsilon}) \cdot \mathbf{k} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \epsilon_{\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\lambda} \partial_\alpha \partial_\beta \varepsilon_{\gamma\lambda} &= (\delta_{\beta\alpha} \delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\beta\lambda} \delta_{\gamma\alpha}) \partial_\alpha \partial_\beta \varepsilon_{\gamma\lambda} = \Delta\theta - \nabla \cdot \nabla \cdot \underline{\varepsilon} \end{aligned} \quad (9.36)$$

( $\epsilon_{\alpha\beta} \equiv e_\alpha \times e_\beta \cdot \mathbf{k} = \epsilon_{\alpha\beta 3}$ ).

Возвращаясь в трёхмерный мир, следует отметить, что  $\varepsilon_z \neq 0$  из-за эффекта Пуассона. Изложение плоского напряжённого состояния обычно

сопровождается гипотезами и приближёнными равенствами (в отличие от плоской деформации):

$$\underline{\tau} \approx \underline{\tau}_\perp \approx \langle \underline{\tau}_\perp \rangle \equiv \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\tau}_\perp(\mathbf{x}, z) dz$$

( $h$  — толщина листа). Точные формулы получаются «прямым подходом» в двумерном мире или же асимптотическим расщеплением пространственной задачи при  $h \rightarrow 0$  (об этом в главе 5).

Единственное формальное отличие плоского напряжённого состояния — в коэффициенте Пуассона: в формулах плоской деформации достаточно заменить  $\nu$  на  $\nu/(1+\nu)$ .

## 4.10 Контактные задачи

Это сложные смешанные задачи, им посвящена специальная литература. Усилия ряда авторов были направлены и на упрощения решений.

Рассмотрим **двумерную задачу о давлении штампа на полуплоскость** (рис. 14). На границе  $x_2 = 0$  везде  $\tau_{12} = 0$ , т. к. штамп гладкий. Вне зоны контакта  $\tau_{11} = 0$ , а в зоне  $w_2 = v(x_1)$  (чётная) — определяемое формой штампа заданное перемещение. Контактное давление  $p(x_1) = -\tau_{11}$  — одна из основных неизвестных.

Для плоского штампа  $v = \text{const}$  и на границе контакта ( $|x_1| = l$ ) обнаруживается неограниченный рост давления. При параболическом очертании координата края неизвестна и находится из условия ограниченности давления.

Используем результаты из задачи Фламана (9.19). При единичной сосредоточенной силе на границе имеем

$$w_2(x_1, 0) = -\beta \ln |x_1|, \quad \beta \equiv (1-\nu)/\pi\mu. \quad (10.1)$$

Суперпозиция в зоне контакта даёт

$$v(x_1) = -\beta \int_{-l}^l p(\xi) \ln |x_1 - \xi| d\xi \quad - \quad (10.2)$$

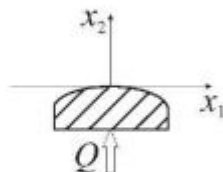


Рис. 14

сингулярное уравнение Фредгольма первого рода. Для решения введём гармоническую функцию – логарифмический потенциал

$$\omega(x_\alpha) = \int_{-l}^l p(\xi) \ln \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2} d\xi. \quad (10.3)$$

Это решение задачи Дирихле для плоскости с разрезом  $x_2 = 0$ ,  $|x_1| \leq l$ , на котором

$$\omega(x_1, 0) = -v(x_1)/\beta. \quad (10.4)$$

Для простейшего потенциала имеем

$$\omega = C \ln r \quad (r^2 = x_\alpha x_\alpha), \quad \oint \partial_n \omega dl = 2\pi C, \quad (10.5)$$

если контур охватывает источник интенсивности  $C$ . Из этого следует граничное условие на верхнем берегу разреза ( $x_2 = +0$ )

$$\partial_2 \omega = \pi p, \quad (10.6)$$

а также условие на бесконечности

$$\omega = Q \ln r + \dots, \quad Q \equiv \int_{-l}^l p(\xi) d\xi. \quad (10.7)$$

Определив  $\omega(x_\alpha)$ , найдём  $p(\xi)$  из (10.6) – таков план действий.

Гармоническую функцию  $\omega$  можно считать вещественной частью регулярной функции  $f(z)$ :

$$f = \omega + i\varphi, \quad f'(z) = \partial_1 \omega + i\partial_1 \varphi = \partial_2 \varphi - i\partial_2 \omega. \quad (10.8)$$

Учитывая (10.7), решение ищем в виде

$$f'(z) = \frac{g(z)}{\sqrt{z^2 - l^2}}, \quad g(\infty) = Q. \quad (10.9)$$

Воспользуемся интегральной формулой Коши

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (10.10)$$

где контур интегрирования состоит из окружности большого радиуса  $M$  и обоих берегов разреза ( $x_2 = \pm 0$ ,  $|x_1| \leq l$ ):

$$2\pi ig(z) = Q \oint_{|\zeta|=M} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{-l}^l i \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - z} (f'_+ + f'_-) d\xi. \quad (10.11)$$

Но согласно (10.8) и (10.4)

$$f'_+ + f'_- = 2\partial_1 \omega = -2v'(\xi)/\beta. \quad (10.12)$$

Подставив это в (10.11), сможем далее найти контактное давление

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\pi} \partial_2 \omega = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} f' \Big|_{x_2=+0} \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}} \left( Q - \frac{1}{\pi \beta} \int_{-l}^l v'(\xi) \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi \right). \end{aligned} \quad (10.13)$$

В случае плоского штампа  $v' = 0$ ,

$$p(x) = \frac{Q}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}}. \quad (10.14)$$

Для параболической формы имеем [54, 81]

$$\begin{aligned} v(x) &= \operatorname{const} - ax^2, \quad p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}} \left( Q + \frac{a}{\beta} (l^2 - 2x^2) \right), \\ Q &= \frac{a}{\beta} l^2, \quad p(x) = \frac{2Q}{\pi l^2} \sqrt{l^2 - x^2}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Учтено требование ограниченности  $p(\pm l)$ . Формулы (10.15) можно использовать для анализа контакта плоских фигур с гладкой границей при параболической аппроксимации малой зоны контакта.

Обратимся к **пространственной задаче**. Сначала рассматриваем полупространство  $z \geq 0$  с нормальной нагрузкой  $p(x_\alpha) = -\sigma_z$  на границе. Нагрузка действует только на площадке контакта  $\Omega$  и является неизвестной; задано определяемое формой штампа перемещение  $u_z(x_\alpha, 0) = v(x_\alpha)$ . На всей гладкой границе  $\tau_{z\alpha} = 0$ .

Важнейшее отличие пространственной задачи от плоской в том, что она позволяет найти контактную жёсткость, т. к. перемещения ведут себя как  $O(r^{-1})$  при  $r \rightarrow \infty$ , а не  $O(\ln r)$ .

Решение для полупространства с нормальной нагрузкой построил Буссинеск. Можно использовать решение Папковича – Нейбера (3.4):

$$\begin{aligned} u_z &= 4(1 - \nu)B_z - \partial_z S, \\ u_\alpha &= 4(1 - \nu)B_\alpha - \partial_\alpha S, \quad S \equiv zB_z + x_\alpha B_\alpha + B_0. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Для четырех гармонических функций  $B_z, B_\alpha, B_0$  мы вправе задать некоторые связи. Они вытекают из граничного условия  $\tau_{z\alpha}|_{z=0} = 0$ :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{z\alpha} &= \partial_z u_\alpha + \partial_\alpha u_z = 2[(1 - 2\nu)\partial_\alpha B_z + 2(1 - \nu)\partial_z B_\alpha - \\ &\quad - \partial_\alpha(z\partial_z B_z + x_\beta \partial_z B_\beta + \partial_z B_0)]. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Полагаем

$$\partial_z B_\alpha = -\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \partial_\alpha B_z, \quad (10.18)$$

а на границе  $z = 0$

$$-x_\alpha \partial_z B_\alpha = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} x_\alpha \partial_\alpha B_z = \partial_z B_0. \quad (10.19)$$

Далее замечаем, что функция  $\mathbf{r} \cdot \nabla B_z$  – гармоническая:

$$\Delta(\mathbf{r} \cdot \nabla B_z) = \Delta \mathbf{r} \cdot \nabla B_z + 2\nabla \mathbf{r}^T \cdot \nabla \nabla B_z + \mathbf{r} \cdot \Delta \nabla B_z = 0.$$

Условие (10.19) означает равенство двух гармонических функций на границе; в силу единственности решения задачи Дирихле функции равны всюду:

$$\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \mathbf{r} \cdot \nabla B_z = \partial_z B_0. \quad (10.20)$$

Уже можем выразить  $u_z$  через  $B_z$ :

$$\begin{aligned} u_z &= 4(1 - \nu)B_z - B_z - z\partial_z B_z + x_\alpha \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \partial_\alpha B_z - \partial_z B_0 = \\ &= (3 - 4\nu)(B_z - z\partial_z B_z) = 2(1 - \nu)\omega - z\partial_z \omega, \\ \omega &\equiv \frac{3 - 4\nu}{2(1 - \nu)} B_z. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Для определения остальных величин используем следствие из (10.18)

$$B_z = \frac{2(1 - \nu)}{3 - 4\nu} \partial_z \omega^*, \quad B_\alpha = -\frac{1 - 2\nu}{3 - 4\nu} \partial_\alpha \omega^*; \quad \omega^* = -\int_z^\infty \omega dz. \quad (10.22)$$

Тогда согласно (10.20)

$$\begin{aligned} \frac{1-2\nu}{3-4\nu} (z\partial_z^2\omega^* + x_\alpha\partial_\alpha\partial_z\omega^*) &= \partial_z B_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow B_0 &= \frac{1-2\nu}{3-4\nu} (\mathbf{r} \cdot \nabla\omega^* - \omega^*). \end{aligned} \quad (10.23)$$

Приходим к итоговым выражениям перемещений и напряжений

$$\begin{aligned} u_\alpha &= -z\partial_\alpha\omega - (1-2\nu)\partial_\alpha\omega^*, \quad \tau_{z\alpha} = -2\mu z\partial_\alpha\partial_z\omega, \\ \sigma_z &= 2\mu (\partial_z\omega - z\partial_z^2\omega), \dots \end{aligned} \quad (10.24)$$

Задача Буссинеска сведена к отысканию гармонической в полупространстве функции  $\omega$  по граничному условию

$$\partial_z\omega|_{z=0} = -p(x_\alpha)/2\mu. \quad (10.25)$$

Задача легко решается с использованием *теории потенциала*. Скалярное поле  $\varphi = 1/r$  удовлетворяет уравнению Лапласа вне точечного источника и интегральному условию

$$\int_O \partial_n \varphi dO = -4\pi \quad (10.26)$$

при источнике единичной интенсивности внутри. Потенциалом простого слоя называется поверхностный интеграл

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dO_1, \quad (10.27)$$

где  $\rho$  — поверхностная плотность источников. Из теоремы Гаусса (10.26) следует, что скачок нормальной производной на слое

$$\partial_n \Phi \Big|_{-}^{+} = -4\pi\rho. \quad (10.28)$$

Искомое поле  $\omega$  можно продолжить чётным образом в полупространство  $z \leq 0$ . Сопоставляя (10.25) и (10.28), заключаем

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mu} \int \frac{p(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dO_1 - \quad (10.29)$$

интеграл по бесконечной плоскости  $z = 0$ .



Но в контактной задаче задано не  $p$ , а перемещение  $u_z = v(x_\alpha)$  (в области контакта  $\Omega$ ). Учитывая (10.21), приходим к интегральному уравнению

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \int \frac{p(\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} dO_1. \quad (10.30)$$

В литературе представлены два конкретных случая: плоский эллиптический в плане штамп и такой же в плане параболический. Распределение контактного давления похоже на (10.14) и (10.15). По предложению Герца формулы для параболического штампа используются в расчёте контакта произвольных тел с гладкой границей. При этом суммарная сила давления пропорциональна сближению в степени  $3/2$ , что связано с расширением области контакта.

## 4.11 Температурные деформации и напряжения

До сих пор в этой главе рассматривались изотермические процессы. Но хорошо известно, что деформация возникает и от изменения температуры. И наоборот: быстрое сжатие вызывает нагрев.

В статике влияние изменения температуры  $\tilde{T} = T - T_0$  на деформации и напряжения определяется следующей постановкой

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0, \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla \mathbf{u}^S, \quad \underline{\boldsymbol{\tau}} = {}^4\underline{\mathbf{C}} \cdot \cdot (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\boldsymbol{\alpha}} \tilde{T}) \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{\alpha}} \tilde{T} + {}^4\underline{\mathbf{S}} \cdot \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}, \\ \mathbf{u}|_{O_1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}|_{O_2} = 0, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где  $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$  — тензор коэффициентов теплового расширения. Дополнительные слагаемые в законе Гука понятны. Формально они следуют из равенства  $\underline{\boldsymbol{\tau}} = \partial a / \partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , где  $a(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{T})$  — свободная энергия на единицу объёма, являющаяся квадратичной формой в линейной модели.

Соотношения в перемещениях

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ({}^4\underline{\mathbf{C}} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot ({}^4\underline{\mathbf{C}} \cdot \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}} \tilde{T}) = 0, \\ \mathbf{n} \cdot {}^4\underline{\mathbf{C}} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}|_{O_2} = \underline{\mathbf{n}} \cdot {}^4\underline{\mathbf{C}} \cdot \cdot \underline{\boldsymbol{\alpha}} \tilde{T} \end{aligned} \quad (11.2)$$

выглядят как чисто механические при подчёркнутых объёмных и поверхностных нагрузках. Вариационная постановка:

$$\delta \int_V a(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{T}) dV = 0, \quad \mathbf{u}|_{O_1} = 0. \quad (11.3)$$

Из (11.2), в частности, следует, что в однородном теле, закреплённом на всей границе, при постоянной температуре будет  $\mathbf{u} = 0$ .

Температурные *напряжения* в свободном ненагруженном теле определяются из задачи

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = 0, \quad \text{inc}(\underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}) = -\text{inc}(\underline{\underline{\alpha}} \tilde{T}), \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}|_O = 0. \quad (11.4)$$

Подчёркнутая несовместность температурной деформации является источником напряжений. В однородном теле ( $\underline{\underline{\alpha}} = \text{const}$ ) она равна нулю при  $\nabla \tilde{T} = \text{const}$ , т. е. при линейном распределении температуры – в этом случае нет напряжений, но есть деформация. Если же тело неоднородно ( $\nabla \underline{\underline{\alpha}} \neq 0$ ), напряжения будут и при  $\tilde{T} = \text{const}$ . Конструкции всегда имеют какую-то неоднородность, и следует минимизировать перепад коэффициентов теплового расширения.

Рассмотрим элементарный **пример** – полый шар со сферически симметричным температурным полем  $\tilde{T} = T(r)$  ( $r = |\mathbf{r}|$ ). Тензор напряжений

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \sigma_r(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \sigma_\varphi(r) (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r) \quad (\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r)$$

«содержит лишь две компоненты», и так же выглядит  $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$ . Имеем

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_r' + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \quad (11.5)$$

Уравнения совместности упрощаются чрезвычайно:

$$\varepsilon_r = u', \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \quad (\mathbf{u} = u(r) \mathbf{e}_r) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r = (r \varepsilon_\varphi)'. \quad (11.6)$$

Используя закон состояния

$$E(\varepsilon_r - \alpha T) = \sigma_r - 2\nu\sigma_\varphi, \quad E(\varepsilon_\varphi - \alpha T) = \sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi), \quad (11.7)$$

придём к уравнению

$$r\sigma_r'' + 4\sigma_r' + \frac{2E\alpha}{1-\nu} T r' = 0 \quad (11.8)$$

( $E, \nu, \alpha$  – постоянны). Умножив на  $r^3$ , получим интегрируемое соотношение. Учитывая граничные условия на внутреннем и внешнем радиусах  $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$ , найдём

$$\sigma_r = \frac{2E\alpha}{1-\nu} \left[ \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \frac{1}{b^3 - a^3} \int_a^b r^2 T dr - \frac{1}{r^3} \int_a^r r^2 T dr \right],$$

$$\sigma_\varphi = \frac{r}{2} \sigma_r' + \sigma_r. \quad (11.9)$$

Выше температурное поле считалось известным. Его можно определить из задачи теплопроводности — но это не вполне корректно. Обычное *уравнение теплопроводности* выражает «баланс тепла». Но правильнее рассматривать баланс энергии (11.3, гл. 3):

$$\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + b - \nabla \cdot \mathbf{h} = \dot{\epsilon} = \frac{\partial a}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \frac{\partial a}{\partial T} \dot{T} + T \dot{s}. \quad (11.10)$$

Но в линейной термоупругости

$$\underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial a}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}, \quad s = -\frac{\partial a}{\partial T} \Rightarrow \dot{s} = -\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial T} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \dot{T}, \quad (11.11)$$

и тогда (11.10) примет вид

$$b - \nabla \cdot \mathbf{h} = \underline{\underline{-T_0 \alpha \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \cdot \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}} + c \dot{T}, \quad c \equiv -T_0 \frac{\partial^2 a}{\partial T^2}. \quad (11.12)$$

Подчёркнутое слагаемое определяет тепловой эффект деформации. В изотропном материале

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} &= \alpha \tilde{T} \mathbf{E} + 2\mu \left( \underline{\underline{\tau}} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \mathbf{E} \right) \Rightarrow \underline{\underline{\tau}} = 2\mu \left( \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \mathbf{E} \right) - K \alpha \tilde{T} \mathbf{E}, \\ -\underline{\underline{\alpha}} \cdot \cdot \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \cdot \cdot \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} &= K \alpha \dot{\theta} \quad \left( K \equiv \frac{E}{1-2\nu} \right). \end{aligned} \quad (11.13)$$

Скорректированное уравнение теплопроводности получается из (11.12), если выразить вектор теплового потока  $\mathbf{h}$  через  $\nabla T$ . Обычно принимают

$$\mathbf{h} = -\underline{\underline{\kappa}} \cdot \nabla T, \quad (11.14)$$

где  $\underline{\underline{\kappa}}$  — тензор коэффициентов теплопроводности. Но при высоких скоростях используется более сложное соотношение

$$t_* \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} = -\underline{\underline{\kappa}} \cdot \nabla T, \quad (11.15)$$

учитывающее инерцию установления теплового потока с постоянной времени  $t_*$ .

Связанные уравнения термоупругости и теплопроводности применяются лишь для быстрых процессов со значительными деформациями [69].

## 4.12 Моментная среда Коссера

Этот вопрос несправедливо не считается классическим — пока. С большой для своего времени полнотой он был изложен в книге братьев Коссера в 1909 г. Они рассматривали среду, частицами которой являются элементарные твёрдые тела. Движение линейной модели определяется двумя векторами: перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и поворота  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r}, t)$ . Соответственно, силовыми факторами служат силы и моменты:  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{m}$  — на единицу объёма и  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{\hat{m}}$  — на единицу площади внешней поверхности.

Уравнения выводятся из принципа виртуальной работы в следующей очевидной формулировке

$$\int_V (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \Pi) dV + \int_O (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{\hat{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}) dO = 0. \quad (12.1)$$

Потенциальная энергия не меняется при «жёстких» смещениях:  $\delta \Pi = 0$  при

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} = \text{const} + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}, \quad \delta \boldsymbol{\theta} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \delta \underline{\boldsymbol{\gamma}} = 0, \quad \delta \underline{\boldsymbol{\kappa}} = 0, \\ \underline{\boldsymbol{\gamma}} \equiv \nabla \mathbf{u} + \underline{\mathbf{E}} \times \boldsymbol{\theta}, \quad \underline{\boldsymbol{\kappa}} \equiv \nabla \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Нетрудно догадаться, что  $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$  и  $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$  — это тензоры деформации (несимметричные). Отбрасывая  $\delta \Pi$  в (12.1), получаем задачу с ограничениями (12.2), решаемую с множителями Лагранжа:

$$\begin{aligned} \int_V \left( \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} - \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\gamma}}^T - \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\kappa}}^T \right) dV + \\ + \int_O (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{\hat{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}) dO = 0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Используя тождества

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\boldsymbol{\gamma}}^T = \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \boldsymbol{\theta}, \\ \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \underline{\boldsymbol{\kappa}}^T = \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (12.4)$$

и теорему о дивергенции, получим уравнения и естественные граничные условия

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{f} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \boldsymbol{\tau}_\times + \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{\hat{m}}. \quad (12.5)$$

Множители Лагранжа оказались напряжениями — силовыми и моментными.

Далее легко показать, что подчёркнутое в (12.3) выражение равно  $(-\delta\Pi)$ . Следовательно, соотношения упругости таковы

$$\underline{\tau} = \partial\Pi/\partial\underline{\gamma}, \quad \underline{\mu} = \partial\Pi/\partial\underline{\kappa}. \quad (12.6)$$

Осталось задать энергию как квадратичную форму своих аргументов. Но в общем случае анизотропии она содержит чудовищное число констант — 171. Можно упростить картину, выделяя симметричные и антисимметричные части:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \underline{\varepsilon} - \frac{1}{2} \gamma_{\times} \times \underline{E} \quad (\underline{\varepsilon} = \underline{\gamma}^S = \nabla \mathbf{u}^S), \quad \underline{\kappa} = \underline{\kappa}^S - \frac{1}{2} \kappa_{\times} \times \underline{E}, \\ \delta\Pi &= \underline{\tau}^S \cdot \delta\underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} \tau_{\times} \cdot \delta\gamma_{\times} + \underline{\mu}^S \cdot \delta\underline{\kappa}^S + \frac{1}{2} \mu_{\times} \cdot \delta\kappa_{\times} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\tau}^S &= \frac{\partial\Pi}{\partial\underline{\varepsilon}}, \quad \tau_{\times} = 2 \frac{\partial\Pi}{\partial\gamma_{\times}}, \quad \underline{\mu}^S = \frac{\partial\Pi}{\partial\underline{\kappa}^S}, \quad \mu_{\times} = 2 \frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_{\times}}. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Для изотропного материала используется выражение с шестью константами

$$2\Pi = a_1 \kappa^2 + a_2 \underline{\kappa}^S \cdot \underline{\kappa}^S + a_3 \kappa_{\times}^2 + b_1 \varepsilon^2 + b_2 \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon} + b_3 \gamma_{\times}^2 \quad (12.8)$$

( $\kappa \equiv \text{tr } \underline{\kappa}$ ,  $\varepsilon \equiv \text{tr } \underline{\varepsilon}$ ).

Далее важно отметить, что константы имеют разную размерность. Например,  $a_1/b_1 \equiv h^2$  — некая длина в квадрате. Малая величина  $h$  является, по-видимому, характерным размером частиц среды. . . Присутствие малого параметра в уравнениях среды Коссера «включает» процесс асимптотического анализа, на первом шаге которого остаётся обычная безмоментная среда. Это упрощённая картина, надо добавить возникновение пограничных слоев и процедуру сращивания.

Распространена моментная «модель со стеснённым вращением», в которой принимается внутренняя связь

$$\gamma_{\times} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}. \quad (12.9)$$

В этом случае соотношение упругости для  $\tau_{\times}$  не может быть написано. Исключая  $\boldsymbol{\theta}$ , придём к уравнению в перемещениях более высокого порядка, чем в безмоментной модели (с малым параметром при старших производных).

Изложенное важно для понимания механики деформируемого тела; практическое значение теории Коссера не столь велико.

## Библиография

Будучи важной частью теоретической физики, классическая теория упругости представлена в многотомном курсе Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица [49]. Значительное место занимает теория упругости в книге Ю. Н. Работнова [81].

Фундаментальный курс А. И. Лурье [54] всегда был примером для автора [32]. Мировую известность имеют книги С. П. Тимошенко [97], Н. И. Мусхелишвили [66], В. В. Новожилова [70]. Математическая сторона предмета выделяется в книгах [78, 89].

Дислокационные решения и собственные напряжения рассматриваются в монографиях [27, 93]. Механика упругих композитов представлена в [42, 114].

О вариационных принципах можно прочесть у К. Васидзу [14], а также в книгах [54, 81, 5, 32].

Плоская задача занимает значительную часть монографии Н. Ф. Морозова [64] и уже отмеченных курсов [54, 66].

Контактным задачам посвящены книги [18, 3], но эта область представлена и в [54, 81].

Температурные деформации и напряжения рассматриваются у Б. Боли и Дж. Уэйнера [11], В. Новацкого [69], Э. Мелана и Г. Паркуса [60].

О моментной теории упругости можно получить представление по книгам [69, 64, 32].

# Глава 5

## Тонкие тела

### 5.1 Особенности механики тонких тел

Стержни, пластины и оболочки распространены и в природе, и в человеческой практике. Представляется ошибочным считать их обычными трёхмерными телами. Малость относительной толщины качественно меняет задачу. Происходит асимптотическое расщепление задачи на «вдоль» и «поперек». Возможность упрощения задачи для тонких тел была ясна классикам, а сегодня используется в курсах сопротивления материалов.

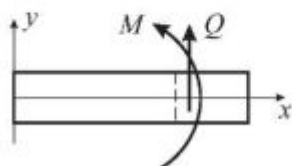


Рис. 15

Особенности тонких тел можно рассмотреть на примере статического изгиба балки при плоском напряжённом состоянии. В декартовой плоскости  $xy$  балка является прямоугольником  $0 \leq x \leq l$ ,  $|y| \leq h/2$ ,  $h \ll l$ . Действуют «объёмные» силы  $f$ , а граница свободна и не нагружена (рис. 15). В задаче изгиба чётны по  $y$   $u_y$ ,  $\tau_{xy}$  и  $f_y$ , а прочие перемещения, напряжения и нагрузки нечётны. Вводятся погонная нагрузка,

перерезывающая сила и изгибающий момент как интегралы по толщине

$$q = \int q_y dy, \quad Q = \int \tau_{xy} dy, \quad M = - \int \sigma_{xy} dy. \quad (1.1)$$

Из условий равновесия любой части балки между сечениями  $x = \text{const}$  следует  $((\dots)' = d/dx)$

$$Q' + q = 0, \quad M' + Q = -m \equiv \int f_{xy} dy. \quad (1.2)$$

Далее возможны различные (но не равноценные) подходы.

*Метод гипотез* наиболее распространён и уязвим. Принимаются «кинематические» гипотезы о распределении перемещений по толщине и «статические» гипотезы о порядках напряжений:

$$u_y \approx v(x), \quad u_x \approx -v'y, \quad |\sigma_x| \gg |\tau_{xy}| \gg |\sigma_y|. \quad (1.3)$$

Затем используются некоторые (!) из уравнений теории упругости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \partial_x u_x &\approx -v''y, & \varepsilon_x - \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) &\approx \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_x &\approx -E v''y, & M &\approx av'', \quad a \equiv \frac{Eh^3}{12}, \quad Q \approx M' \approx -av'''. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пришли к уравнению Бернулли – Эйлера, но строгость вывода оставляет желать лучшего.

Первое явное противоречие – сдвиговая деформация равна нулю, а с ней и перерезывающая сила:

$$2\varepsilon_{xy} - \partial_x u_y + \partial_y u_x = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = 0 \Rightarrow Q = 0 \quad (?),$$

но тогда равновесие с нагрузкой  $q$  невозможно. Второе противоречие – между кинематическими и статическими гипотезами:

$$\varepsilon_y - \partial_y u_y = 0 - \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \Rightarrow \sigma_y - \nu\sigma_x \quad (?).$$

Для оправдания таких изъянов появилась специальная философия. «Должны быть обеспечены соотношения лишь между основными (т. е. большими) величинами». «Теория балки – приближённая и невязки в уравнениях нормальны».

Но всё не так. Дальше мы увидим, что механику тонких тел можно строить как точную науку с безупречной логикой.

*Вариационный метод* основан на вариационной постановке «трёхмерной» задачи с аппроксимацией решения по толщине. Подход логически строг, допускает разнообразные обобщения и уточнения. Единственный недостаток – мы навязываем структуру решения по толщине, а не исследуем её.

Для плоской балки имеем двумерную вариационную постановку:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{D} &= \int_0^l dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}) dy = 0, \\ \underline{\boldsymbol{\tau}} &= 2\mu \left( \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$



Задаём аппроксимацию

$$u_x = -\theta(x)y, \quad u_y = v(x). \quad (1.6)$$

с независимыми прогибом и поворотом, что соответствует балке Тимошенко. Из (1.5) получим одномерную вариационную постановку

$$\int_0^l (M\delta\theta' + Q\delta(v' - \theta) - q\delta v - m\delta\theta) dx = 0, \\ M \equiv a\theta', \quad a \equiv \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad Q \equiv b(v' - \theta), \quad b \equiv \mu h. \quad (1.7)$$

Отсюда следуют уравнения и естественные граничные условия

$$Q' + q = 0, \quad M' + Q + m = 0; \\ x = 0, l: \quad Q = 0, \quad M = 0. \quad (1.8)$$

Аналогичная процедура для балки Бернулли – Эйлера такова:

$$u_x = -v'y, \quad u_y = v(x), \\ \int_0^l (M\delta v'' - q\delta v - m\delta v') dx = 0, \quad M \equiv av'', \\ \int_0^l (M'' - q + m') \delta v dx = 0, \\ x = 0, l: \quad M = 0, \quad M' + m = 0. \quad (1.9)$$

Обратим внимание на «исчезновение» перерезывающей силы  $Q$  и сокращение числа уравнений. Заметим также, что изгибная жёсткость  $a$  отличается от таковой в (1.4).

Задавая более сложные аппроксимации перемещений, можно строить и более сложные модели. Например, учесть поперечную деформацию от эффекта Пуассона:

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \quad \Rightarrow \quad u_y = v(x) + \nu\theta'(x)y^2/2. \quad (1.10)$$

Аппроксимируя перемещения, можно получить значительную погрешность в напряжениях. Поэтому представляет интерес вариационная поста-

новка Рейсснера с независимыми  $\mathbf{u}$  и  $\underline{\tau}$ :

$$\begin{aligned} \delta R(\mathbf{u}, \underline{\tau}) &= 0, \\ R &= \int_0^l dx \int_{h/2}^{h/2} \left( \underline{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}^S - \hat{\Pi}(\underline{\tau}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) dy, \\ \hat{\Pi} &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2) + \frac{1}{2\mu} \tau_{xy}^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Простейший вариант для балки Тимошенко таков

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{12M(x)}{h^3}y, \quad \tau_{xy} = \frac{Q(x)}{b}, \quad \sigma_y = 0, \\ u_x &= -\theta(x)y, \quad v_y = v(x); \\ R &= \int_0^l \left( M\theta' + Q(v' - \theta) - \frac{M^2}{2a} - \frac{Q^2}{2b} - qv - m\theta \right) dx \\ &\quad (a = Eh^3/12, b = \mu h); \\ \delta R = 0 &\Rightarrow \theta' - \frac{M}{a}, v' - \theta - \frac{Q}{b}, Q' + q = 0, M' + Q + m = 0; \\ x = 0, l: \quad Q &= 0, \quad M = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Однако истинные уравнения тонких тел выводятся иначе.

*Прямой подход* использовал Эйлер, рассматривая стержни как деформируемые материальные линии (до появления теории упругости!). Главное при этом — определить вид частиц тела: это просто точки, или же это элементарные твёрдые тела, или это более сложные объекты с внутренними степенями свободы. Возможности прямого подхода невелики, поскольку мы не пытаемся проникнуть в структуру частиц. Но для тонких тел этот подход очень эффективен.

Балка — это линия Коссера. Степень свободы вращения вводится из-за важности изгибающего момента. Очевидна следующая формулировка принципа виртуальной работы

$$\int_{x_1}^{x_2} (q\delta v + m\delta\theta - \delta\Pi) dx + (Q\delta v + M\delta\theta) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (1.13)$$

Но здесь возможны варианты. Можно рассматривать любой отрезок  $(x_1, x_2)$  или же сразу всю балку — тогда нагрузки на концах  $Q_2, -Q_1, M_2$  и

–  $M_1$  заданы. Можно о работе внутренних сил ( $-\delta\Pi$ ) предположить равенство нулю на перемещениях твёрдого тела ( $\delta v = \text{const} + x\delta\theta$ ,  $\delta\theta = \text{const}$ ) и ввести множители Лагранжа для снятия ограничений ( $\delta\theta' = 0$ ,  $\delta v' - \delta\theta = 0$ ). Другой вариант – сразу объявить  $\Pi = \Pi(\theta', v' - \theta)$  – функция двух деформаций (изгибной и сдвиговой). Во всех случаях из (1.13) следует система уравнений и граничных условий балки Тимошенко. Модель Бернулли – Эйлера – это вариант «со стеснённым вращением» ( $v' = \theta$ ).

Прямой подход прост, логически строен и почти не вызывает сомнений. Однако вопрос о степенях свободы частиц остаётся открытым. И за рамками подхода остаётся определение жесткостей (коэффициентов  $\Pi$  как квадратичной формы).

**Асимптотическое расщепление.** Только этот подход действительно соответствует специфике тонких тел. Идея была изложена в п. 1.6. Начать следует с системы уравнений с малым параметром  $\lambda \rightarrow 0$ . Источником  $\lambda$  является геометрия:

$$\mathbf{r}(x, y) = \lambda^{-1}x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \Rightarrow \nabla = \lambda\mathbf{i}\partial_x + \mathbf{j}\partial_y. \quad (1.14)$$

Уравнения теории упругости существуют в трёх формах: полной системы (а), в перемещениях (б) и в напряжениях (с). Простота варианта (б) – кажущаяся, для асимптотического анализа лучше подходит (с):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} + \mathbf{f} = 0, \quad \Delta\sigma + (1 + \nu)\nabla \cdot \mathbf{f} = 0. \quad (1.15)$$

В компонентах с учётом (1.14) имеем

$$\begin{aligned} \lambda\partial_x\sigma_x + \partial_y\tau + f_x &= 0, & \lambda\partial_x\tau + \partial_y\sigma_y + f_y &= 0, \\ (\lambda^2\partial_x^2 + \partial_y^2)(\sigma_x + \sigma_y) + (1 + \nu)(\lambda\partial_x f_x + \partial_y f_y) &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Решение ищем в виде

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = \lambda^m(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(0)} + \lambda\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(1)} + \dots). \quad (1.17)$$

Варианты  $m = 0$  и  $m = -1$  не проходят, остановимся на  $m = -2$ . На первом шаге имеем

$$\begin{aligned} \partial_y\tau^{(0)} = \partial_y\sigma_y^{(0)} = \partial_y^2(\sigma_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau^{(0)} = \sigma_y^{(0)} = 0, & \quad \sigma_x^{(0)} = b_0(x)y. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Учтены граничные условия  $\tau = \sigma_y = 0$  при  $y = \pm h/2$ , а также характер чётности величин. Функция  $b_0$  пока произвольна.

Второй шаг:

$$\begin{aligned} b_0' + \partial_y \tau^{(1)} &= \partial_y \sigma_y^{(1)} = \partial_y^2 (\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_y^{(1)} &= 0, \quad \tau^{(1)} = \frac{1}{2} b_0' \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad \sigma_x^{(1)} = b_1(x)y. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Цель последующих шагов — найти главный член асимптотики, т. е. функцию  $b_0$ . Не представит интереса  $b_1$  как малая поправка к  $b_0$ . На третьем шаге имеем, в частности, условие разрывности

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\partial_x \tau^{(1)} + f_y) dy = -\sigma_y^{(2)} \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0 \Rightarrow \frac{h^3}{12} b_0'' + q = 0. \quad (1.20)$$

Это итог анализа напряжений. Граничные условия  $b_0(0) = b_0(l) = 0$ . Далее находим перемещения из соотношений закона Гука

$$\begin{aligned} \lambda \partial_x u_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \partial_y u_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \lambda \partial_x u_y + \partial_y u_x &= \frac{1}{\mu} \tau. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Степенное разложение  $u$  типа (1.17) пройдет при  $m = -4$ . Для главных членов будет

$$\partial_y u_y^{(0)} = \partial_y u_x^{(0)} = 0 \Rightarrow u_y^{(0)} = v(x), \quad u_x^{(0)} = 0. \quad (1.22)$$

( $u_y$  — чётные по  $y$ ,  $u_x$  — нечётные). Следующий шаг:

$$\begin{aligned} \partial_x u_x^{(0)} &= 0, \quad \partial_y u_y^{(1)} = 0, \quad \partial_x u_y^{(0)} + \partial_y u_x^{(1)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u_y^{(1)} &= v_1(x), \quad u_x^{(1)} = -v'y. \end{aligned} \quad (1.23)$$

На последнем, третьем шаге потребуется лишь равенство

$$\partial_x u_x^{(1)} = \frac{1}{E} \sigma_x^{(0)} \Rightarrow -v'' = \frac{b_0}{E}, \quad (1.24)$$

что в сочетании с (1.20) даёт уравнение Бернулли — Эйлера для прогиба  $v$ .

Асимптотический анализ подтвердил все положения теории балки, но мы писали лишь точные равенства и ничего не отбрасывали. Понятно, чем труден анализ в перемещениях — пришлось бы делать пять (!) шагов.

Сложность асимптотики повышает роль прямого подхода — он предсказывает результаты. К тому же, он «легко справляется» с большими деформациями.

## 5.2 Нелинейная теория стержней

Стержень считается линией Коссера, каждая частица — элементарное твёрдое тело с лагранжевой (материальной) координатой  $s$ . Обычно в качестве  $s$  берут дуговую координату в начальном состоянии. Движение определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}(s, t)$  и тензором поворота  $\underline{\mathbf{P}}(s, t)$ ; в начальном состоянии  $\mathbf{r}(s, 0) = \mathbf{r}_0(s)$ ,  $\underline{\mathbf{P}}(s, 0) = \underline{\mathbf{E}}$ . На единицу «длины»  $s$  действуют силовая  $\mathbf{q}$  и моментная  $\mathbf{m}$  нагрузки. Внутренние сила  $\mathbf{Q}$  и момент  $\mathbf{M}$  задают воздействие в точке  $s$  «справа налево»; по закону действия и противодействия при смене направления отсчёта  $s$  векторы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$  меняют знак.

Для отрезка стержня уравнение виртуальной работы таково

$$\int_{s_1}^{s_2} (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \Pi) ds + (\mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}) \Big|_{s_1}^{s_2} = 0. \quad (2.1)$$

Нагрузки содержат инерционные добавки — о них в главе 6. Вид плотности энергии  $\Pi$  будет определён из (2.1). Преобразуя двойную подстановку в интеграл и учитывая произвольность  $s_{1,2}$ , получим локальное вариационное уравнение

$$(\mathbf{q} + \mathbf{Q}') \cdot \delta \mathbf{r} + (\mathbf{m} + \mathbf{M}') \cdot \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r}' + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}' = \delta \Pi. \quad (2.2)$$

На «жёстких» смещениях  $\delta \mathbf{r} = \text{const} + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$ ,  $\delta \boldsymbol{\theta} = \text{const}$  должно быть  $\delta \Pi = 0$ , что ведёт к уравнениям баланса сил и моментов

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0. \quad (2.3)$$

Второе уравнение нелинейно, поскольку  $\mathbf{r}'$  — в деформированном состоянии. В (2.2) останется

$$\delta \Pi = \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{Q} \cdot (\delta \mathbf{r}' - \delta \boldsymbol{\theta}' \times \mathbf{r}'). \quad (2.4)$$

Векторы деформации и формулы Клебша. Деформация стержня определяется векторами  $\boldsymbol{\kappa}$  и  $\boldsymbol{\Gamma}$ :

$$\underline{\mathbf{P}}' = \boldsymbol{\kappa} \times \underline{\mathbf{P}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa} = -\frac{1}{2} \left( \underline{\mathbf{P}}' \cdot \underline{\mathbf{P}}^T \right)_{\times}; \quad \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r}' - \underline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{r}'_0. \quad (2.5)$$

При отсутствии деформации

$$\underline{\mathbf{P}}(s) = \text{const} \Rightarrow \boldsymbol{\kappa} = 0; \quad \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_1) = \underline{\mathbf{P}} \cdot (\mathbf{r}_0(s) - \mathbf{r}_0(s_1)) \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma} = 0.$$

Для вариаций ( $\delta \underline{P} = \delta \theta \times \underline{P}$ ) справедливы формулы Клебша

$$\delta \underline{\kappa} - \delta \theta \times \underline{\kappa} = \delta \theta', \quad \delta \underline{\Gamma} - \delta \theta \times \underline{\Gamma} = \delta r' - \delta \theta \times r'. \quad (2.6)$$

Вывод первой:

$$\delta \underline{P}' = \delta \theta' \times \underline{P} + \delta \theta \times (\underline{\kappa} \times \underline{P}) = \delta \underline{\kappa} \times \underline{P} + \underline{\kappa} \times (\delta \theta \times \underline{P}),$$

$$\delta \theta \times (\underline{\kappa} \times \underline{P}) - \underline{\kappa} \times (\delta \theta \times \underline{P}) = (\delta \theta \times \underline{\kappa}) \times \underline{P},$$

вторая выводится ещё проще.

Далее полезно для задания угловой ориентации связать с каждой частицей по некоторому правилу ортогональную тройку ортов  $e_k$ , так что  $e_k(s, t) = \underline{P}(s, t) \cdot e_{k0}(s)$ ,  $e_{k0} \equiv e_k(s, 0)$ . Важной геометрической характеристикой стержня является вектор кривизны-кручения  $\Omega$ :

$$e'_k = \Omega \times e_k \Rightarrow \Omega = \frac{1}{2} e_k \times e'_k = \Omega_k e_k. \quad (2.7)$$

Если орты  $e_{1,2}$  получаются поворотом нормали  $n$  и бинормали  $b$  на угол  $\varphi(s)$  вокруг касательной, то по правилу сложения угловых скоростей

$$\Omega = D + \varphi'(s) e_3, \quad (2.8)$$

где  $D$  – вектор Дарбу ((2.2), гл. 1). Можно доказать, что вектор деформации

$$\underline{\kappa} = \Omega - \underline{P} \cdot \Omega_0 = \kappa_k e_k, \quad \kappa_k = \Omega_k - \Omega_{k0}. \quad (2.9)$$

В формулах (2.6) теперь имеем

$$\delta \theta' = e_k \delta \kappa_k, \quad \delta r' - \delta \theta \times r' = e_k \delta \Gamma_k, \quad (2.10)$$

что для (2.4) означает

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= M \cdot e_k \delta \kappa_k + Q \cdot e_k \delta \Gamma_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow M = \frac{\partial \Pi}{\partial \kappa_k} e_k, \quad Q = \frac{\partial \Pi}{\partial \Gamma_k} e_k. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Получили *соотношения упругости*. Необходимо иметь зависимость  $\Pi(\underline{\kappa}, \underline{\Gamma})$ . Для стержней из конструкционных материалов (где деформации обычно малы) можно принять квадратичную форму

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} (\underline{\kappa} \cdot \underline{a} \cdot \underline{\kappa} + \underline{\Gamma} \cdot \underline{b} \cdot \underline{\Gamma} + 2 \underline{\kappa} \cdot \underline{c} \cdot \underline{\Gamma}) \Rightarrow \\ M &= \underline{a} \cdot \underline{\kappa} + \underline{c} \cdot \underline{\Gamma}, \quad Q = \underline{b} \cdot \underline{\Gamma} + \underline{\kappa} \cdot \underline{c}, \quad \underline{a} = a_{ik} e_i e_k, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тензор  $\underline{a}$  определяет жёсткость на кручение и изгиб, тензор  $\underline{b}$  — на растяжение и сдвиг; оба тензора симметричны и положительны. Несимметричный тензор перекрёстных связей  $\underline{c}$  определяет, например, кручение от поперечной или продольной силы. При деформации тензоры поворачиваются вместе с  $e_k$ . Если  $e_k$  — главные оси тензора  $\underline{a}$ , то

$$\underline{a} = \sum a_k e_k e_k, \quad \underline{a}'(s) = \Omega \times \underline{a} - \underline{a} \times \Omega. \quad (2.13)$$

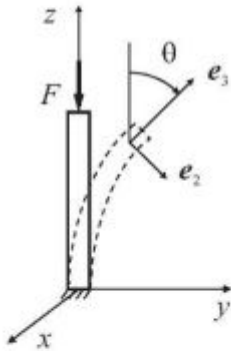


Рис. 16

Полную систему уравнений нелинейной теории упругих стержней составляют законы баланса сил и моментов (2.3), выражения векторов деформации (2.5), (2.9) и соотношения упругости (2.12).

Рассмотрим **пример**: прямой стержень закреплён на конце  $s = 0$  и нагружен постоянной продольной силой  $F$  на свободном конце  $s = l$  (рис. 16). В начальном состоянии  $e_{10} = i$ ,  $e_{20} = j$ ,  $e_{30} = k$ . На свободном конце постоянно  $Q(l) = -Fk$ . Считаем

$$\underline{a} = \sum a_k e_k e_k, \quad \underline{b} = \sum b_k e_k e_k, \quad \underline{c} = 0. \quad (2.14)$$

Ограничимся деформацией в плоскости  $yz$ , тогда поворот определяется углом  $\theta(s)$  и тензор  $\underline{P}$  не нужен. По закону баланса сил

$$Q' = 0 \Rightarrow Q = \text{const} = -Fk. \quad (2.15)$$

Для векторов деформации имеем

$$\begin{aligned} \kappa &= \Omega = -\theta' i \quad (i = e_1), \\ \Gamma &= r' - \underline{P} \cdot e_{30} = r' - e_3 = \underline{b}^{-1} \cdot Q = \\ &= F (b_2^{-1} e_2 \sin \theta - b_3^{-1} e_3 \cos \theta). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Остались соотношения для моментов

$$\begin{aligned} M &= \underline{a} \cdot \kappa = -a_1 \theta' i, \quad M' + r' \times Q = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1 \theta'' - (\Gamma + e_3) \cdot Q \times i = a_1 \theta'' + F \sin \theta + \\ &\quad + \frac{1}{2} F^2 (b_2^{-1} - b_3^{-1}) \sin 2\theta = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Такие уравнения интегрируются в квадратурах:

$$\begin{aligned} \theta'' + \varphi'(\theta) = 0 &\Rightarrow \theta'^2 + 2\varphi = \text{const} = C_1, \\ \pm \int \frac{d\theta}{\sqrt{C_1 - 2\varphi(\theta)}} &= s + C_2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Постоянные  $C_{1,2}$  находятся из граничных условий  $\theta(0) = \theta'(l) = 0$ . Эйлер проделал это в случае  $\underline{b}^{-1} = 0$ , используя эллиптические функции.

Заметим теперь, что жёсткости  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  и  $\underline{c}$  имеют разную размерность:  $[\underline{a}] = H \cdot m^2$ ,  $[\underline{b}] = H$ ,  $[\underline{c}] = H \cdot m$ . Возникает эффективная толщина  $h$ :  $b/a = O(h^{-2})$ ,  $c/a = O(h^{-1})$ . При малой  $h$  достаточно *классической модели*, в которой

$$\Gamma = 0 \Rightarrow \mathbf{r}' = \underline{P} \cdot \mathbf{r}'_0 \quad (2.19)$$

и соотношение упругости пишется только для  $M$ . Эта модель обычно связывается с именем Кирхгофа, он обнаружил аналогию между статикой стержней и динамикой твёрдого тела. Для первоначально прямого стержня  $\Omega_0 = 0$ ,  $\mathbf{r}'_0 = \text{const}$ ,

$$M = \underline{a} \cdot \Omega, \quad \underline{a} \cdot \Omega' + \Omega \times \underline{a} \cdot \Omega = -\mathbf{r}' \times Q, \quad \mathbf{r}'' = \Omega \times \mathbf{r}'. \quad (2.20)$$

Но таковы и уравнения динамики твёрдого тела с тензором инерции  $\underline{a}$ , угловой скоростью  $\Omega$  и силовой нагрузкой  $(-Q)$  в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}'$ . В (2.17) при  $\underline{b}^{-1} = 0$  получаем уравнение маятника — проявление аналогии Кирхгофа.

Известно, что уравнения динамики твёрдого тела аналитически интегрируются лишь в некоторых случаях: Эйлера, Лагранжа, Ковалевской... Возможностей аналитического решения в нелинейной статике стержней ещё меньше.

Обратимся к **примеру**: стержень на рис. 16 нагружен на свободном конце  $s = l$  постоянным моментом  $M_0$ . При этом  $Q(s) = 0$ ,  $M(s) = M_0$ . Решение оказывается простым при равных жёсткостях на изгиб:

$$\underline{a} = a(e_1 e_1 + e_2 e_2) + a_3 e_3 e_3. \quad (2.21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Omega &= \underline{a}^{-1} \cdot M = a^{-1} M + (a_3^{-1} - a^{-1}) \mathbf{r}' \mathbf{r}' \cdot M \quad (e_3 = \mathbf{r}'), \\ \mathbf{r}'' &= \Omega \times \mathbf{r}' = a^{-1} M \times \mathbf{r}' - \end{aligned} \quad (2.22)$$



линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Для упрощения интегрирования введём декартовы оси  $x_k$  с осями  $i_k$ , полагая  $i_1 = i$ ,  $M = Mi_3$  – повернут на угол  $\alpha$  от  $z$  к  $y$ . Согласно (2.22)

$$\begin{aligned} x_3'' &= 0, & \alpha x_1'' &= -Mx_2', & \alpha x_2'' &= Mx_1'; \\ u \equiv x_1 + ix_2: & \quad \alpha u'' = iMu' \Rightarrow & x_3 &= A_3 + B_3s, \\ & & u &= A + Be^{iMs/\alpha}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

Вещественные постоянные  $A_3, B_3$  и комплексные  $A, B$  находятся из условий при  $s = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= 0, & \mathbf{r}'(0) &= \mathbf{k} \Rightarrow \\ \Rightarrow & u(0) = 0, & x_3(0) &= 0, & u'(0) &= -i \sin \alpha, & x_3'(0) &= \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Прямой стержень превратился в винтовую линию; её проекция на плоскость  $x_1x_2$  ( $\perp M$ ) – окружность радиусом  $|B| = a \sin \alpha / M$ .

Заметим, что рассмотренный пример соответствует случаю Эйлера в динамике твёрдого тела. Не используя развитые там методы, мы пошли более простым путём.

Характерная для классической модели внутренняя связь (2.19) означает отсутствие растяжения и поперечных сдвигов. Но ряд задач без растяжения теряет смысл (прямой стержень с продольными силами, круговое кольцо под равномерным давлением). Поэтому распространена модель с *растяжением без сдвига*, в которой

$$\Gamma = \Gamma e_3 \Rightarrow \mathbf{r}' = (1 + \Gamma) \mathbf{e}_3 \quad (\mathbf{r}'_0 = \mathbf{e}_{30}). \quad (2.25)$$

Тогда вариация энергии (2.11) и соотношения упругости таковы

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= M \cdot \mathbf{e}_k \delta\kappa_k + Q_3 \delta\Gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= \frac{\partial\Pi}{\partial\kappa_k} \mathbf{e}_k = \underline{\mathbf{a}} \cdot \boldsymbol{\kappa} + c\Gamma, & Q_3 &= \frac{\partial\Pi}{\partial\Gamma} = b\Gamma + c \cdot \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Вместо тензора  $\underline{\mathbf{b}}$  имеем лишь скаляр  $b > 0$  (жёсткость на растяжение), а перекрёстные связи определяются вектором  $c$ . Для перерезывающей силы  $Q_\perp = Q_\alpha e_\alpha$  соотношения упругости нет.

Объектом более простым, чем стержень, является *нить*. Это материальная линия, состоящая из обычных точек. Движение задаётся одним вектором  $\mathbf{r}(s, t)$ , распределённые нагрузки – силой  $\mathbf{q}$ , инерционные свойства

### 5.3 Линейная теория стержней

— погонной массой  $\rho(s)$ . Уравнение виртуальной работы имеет более простой, чем (2.1), вид:

$$\int_{s_1}^{s_2} [(\mathbf{q} - \rho\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta\mathbf{r} - \delta\Pi] ds + \mathbf{Q} \cdot \delta\mathbf{r} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0. \quad (2.27)$$

Переходя к локальному вариационному уравнению и учитывая, что  $\delta\Pi = 0$  при  $\delta\mathbf{r} = \text{const} + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$ ,  $\delta\boldsymbol{\theta} = \text{const}$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' + \mathbf{q} &= \rho\ddot{\mathbf{r}}; & \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{Q} &= Q\mathbf{r}'; & \delta\Pi &= Q\mathbf{r}' \cdot \delta\mathbf{r}' = Q\delta\varepsilon, \\ \varepsilon &\equiv \frac{1}{2}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' - 1) \quad (|\mathbf{r}'_0| = 1), & Q &= \frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

При квадратичной аппроксимации энергии

$$\Pi = Q_0\varepsilon + \frac{1}{2}b\varepsilon^2 \quad (2.29)$$

придём к уравнению для  $r(s, t)$

$$\left[ \left( Q_0 + \frac{1}{2}b(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' - 1) \right) \mathbf{r}' \right]' + \mathbf{q} = \rho\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.30)$$

обобщению классического соотношения для струны.

Заметим, что для нити обязательен учёт начального натяжения  $Q_0 > 0$  — чтобы было реально возможно  $\varepsilon < 0$ . Нить возникает из стержня при большом  $Q_0$ ; но в зонах значительной кривизны стержневая модель проявится. Здесь имеем уравнения с малым параметром при старших производных и разделение решения на внешнее безмоментное и краевой эффект.

### 5.3 Линейная теория стержней

Считаются малыми одного порядка перемещения ( $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ), повороты ( $\boldsymbol{\theta} : \underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\theta} \times \underline{\mathbf{E}} + \dots$ ) и нагрузки. Полная система примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' + \mathbf{q} &= 0, & \mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} &= 0, \\ \boldsymbol{\theta}' &= \frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{M} + \underline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{Q}, \\ \boldsymbol{\gamma} \equiv \mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}' &= \frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{C}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Соотношения упругости записаны в обращённой форме с дополнительной энергией  $\hat{\Pi}$  (в линейной модели численно равна  $\Pi$ ). Тензоры податливости  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$  и вектор  $\mathbf{r}'$  соответствуют начальному состоянию и потому известны.

Уравнения (3.1) интегрируются в квадратурах:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_0 - \int \mathbf{q} \, ds, & \mathbf{M} &= \mathbf{M}_0 - \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{m}) \, ds, \\ \boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{\theta}_0 + \int \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{M}} \, ds, & \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \int \left( \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}' + \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{Q}} \right) \, ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Константы  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{u}_0$  находятся из граничных условий. В «статически определимых» задачах  $\mathbf{Q}_0$  и  $\mathbf{M}_0$  определяются нагрузками на концах — без рассмотрения деформаций. «Статически неопределима» задача с закреплёнными концами; для неё

$$\boldsymbol{\theta} \Big|_0^l = \int_0^l \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{M}} \, ds, \quad (\mathbf{u} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) \Big|_0^l = \int_0^l \left( \mathbf{r} \times \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{M}} + \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{Q}} \right) \, ds. \quad (3.3)$$

Левые части известны, так что имеем два векторных уравнения для  $\mathbf{Q}_0$  и  $\mathbf{M}_0$ . В случае замкнутого стержня левые части равны нулю.

Представляемая простая картина может усложниться в деталях. Толщина стержня всегда мала, и потому в линейной задаче с растяжением и сдвигом обычно возникают асимптотические явления. Часто при  $h \rightarrow 0$  имеем переход к модели Кирхгофа с  $\underline{\underline{B}} = 0$  и  $\underline{\underline{C}} = 0$ .

Рассмотрим **пример**: круговое кольцо с двумя сосредоточенными силами на концах диаметра (рис. 17). Тензор податливости примем в упрощённом виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= A_k \mathbf{k} \mathbf{k} + A_t \mathbf{t} \mathbf{t} + A_n \mathbf{n} \mathbf{n}, \\ \underline{\underline{B}} &= B \mathbf{t} \mathbf{t}, \quad \underline{\underline{C}} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

(податливости на кручение  $A_t$  и изгиб  $A_n$  при этом не сыграют роли). Используем симметрию и ограничимся первой четвертью  $0 < \varphi < \pi/2$ . В

этом промежутке

$$\begin{aligned}
 Q &= -\frac{1}{2}i, \quad M = M\mathbf{k}, \quad M = M_0 - \frac{1}{2}R \sin \varphi \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{k}, \quad \theta' = AM; \\
 \int_0^l \theta' ds &= 0 \quad (l = \pi R/2) \Rightarrow M_0 = R/\pi.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Найдём перемещения концов:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \Big|_0^l &= \int_0^l (\mathbf{r} \times AM\mathbf{k} + BtQ_t) ds = -U\mathbf{i} - V\mathbf{j}, \\
 U &\equiv u_x(0) = AR^3 \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \right) + BR \frac{\pi}{8}, \\
 V &\equiv -u_y(l) = AR^3 \left( \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4}BR.
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

В линейной статике стержней часто используются *теоремы Лагранжа и Кастильяно*. Пусть стержень нагружен лишь в точках  $s_k$  сосредоточенными силами  $\mathbf{F}_k$  и моментами  $\mathbf{M}_k$ . Состояние пролёта  $(s_k, s_{k+1})$  полностью определяется перемещениями и поворотами концов, поэтому полная энергия деформации стержня есть функция  $W(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_k)$ . По теореме Лагранжа (7.3, гл. 2)

$$\mathbf{F}_k = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}_k}, \quad \mathbf{M}_k = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\theta}_k}. \quad \text{Рис. 17} \quad (3.7)$$

Обращая, приходим к теореме Кастильяно (7.4, гл. 2)

$$\mathbf{u}_k = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}_k}, \quad \boldsymbol{\theta}_k = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{M}_k} \quad (3.8)$$

но для этого необходимо выражение энергии через нагрузки, легко находимое лишь для статически определимых систем.

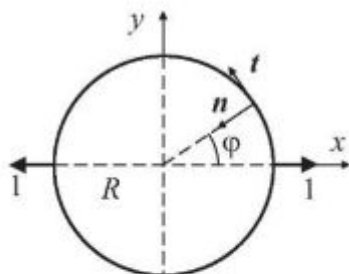


Рис. 17

Популярный в механике стержней *интеграл Мора* следует из теоремы Кастильяно. Пусть внешние нагрузки заданы обобщёнными силами  $P_k$ , соответствующими обобщённым координатам  $q_k$ . Согласно (3.8),  $q_k = \partial \hat{W} / \partial P_k$ . Но

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \int \hat{\Pi}(M, Q) ds, \\ M(s) &= \sum P_k M_k(s), \quad Q(s) = \sum P_k Q_k(s), \\ q_k &= \int \left[ M_k \cdot (\underline{A} \cdot M + \underline{C}Q) + Q_k \cdot (\underline{B} \cdot Q + \underline{C}^T \cdot M) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь  $M_k$  и  $Q_k$  – «парциальные» моменты и силы при единичных обобщённых нагрузках, а  $M$  и  $Q$  – моменты и силы при всей системе нагрузок.

**Пример:** стержень произвольной формы закреплён на конце  $s = 0$  и свободен на конце  $s = l$ ; это статически определимая система, силы  $Q(s)$  и моменты  $M(s)$  находятся без рассмотрения деформаций. Перемещение  $u_1$  в точке  $s_1$  в направлении единичного вектора  $e$

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^{s_1} [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} \times (\underline{A} \cdot M + \underline{C} \cdot Q) + \\ &\quad + \mathbf{e} \cdot (\underline{B} \cdot Q + \underline{C}^T \cdot M)] ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

*Вариационные принципы* теории упругости имеют одномерные аналоги в теории стержней. Принцип Лагранжа для стержня с закреплённым концом  $s = 0$  и свободным  $s = l$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) &\rightarrow \min, \\ \mathcal{E} &= \int_0^l [\Pi(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}] ds - Q_l \cdot \mathbf{u}(l) - M_l \cdot \boldsymbol{\theta}(l); \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Геометрические условия при  $s = 0$  обеспечиваются нами.

Принцип типа Рейсснера в этом случае таков

$$\begin{aligned} \delta R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{M}, \mathbf{Q}) = 0, \quad R = \int_0^l \left[ \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \right. \\ \left. - \hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} \right] ds - \mathbf{Q}_l \cdot \mathbf{u}(l) - \mathbf{M}_l \cdot \boldsymbol{\theta}(l) + \\ + \mathbf{Q}(0) \cdot (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0) + \mathbf{M}(0) \cdot (\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из этого принципа следуют и условия при  $s = 0$ .

В моделях с внутренними связями ( $\boldsymbol{\gamma} = 0$  или  $\boldsymbol{\gamma}_\perp = 0$ ) изложение усложнится, появятся множители Лагранжа.

В компонентной записи простота уравнений исчезает:

$$\mathbf{Q}' = Q'_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}, \quad Q'_i + \epsilon_{ijk} \Omega_j Q_k + q_i = 0. \quad (3.13)$$

Но в случае кругового кольца (рис. 17) переход к компонентам полезен. Пусть  $\underline{\mathbf{C}} = 0$ , а направления  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_z$  являются главными для  $\underline{\mathbf{a}}$  и  $\underline{\mathbf{b}}$ . Тогда 12 уравнений в компонентах разделяется на две группы по 6:

$$\begin{aligned} Q'_t - kQ_n + q_t = 0, \quad Q'_n + kQ_t + q_n = 0, \quad M'_z + Q_n + m_z = 0, \\ M_z = a_z \theta'_z, \quad Q_t = b_t(u'_t - ku_n), \quad Q_n = b_n(u'_n + ku_t - \theta_z) \end{aligned} \quad (3.14)$$

для деформации в плоскости кольца ( $k = 1/R$  — кривизна) и

$$\begin{aligned} Q'_z + q_z = 0, \quad M'_t - kM_n + m_t = 0, \quad M'_n + kM_t - Q_z + m_n = 0, \\ M_t = a_t(\theta'_t - k\theta_n), \quad M_n = a_n(\theta'_n + k\theta_t), \quad Q_z = b_z(u'_z + \theta_n) \end{aligned} \quad (3.15)$$

для выхода из плоскости.

У прямого стержня  $k = 0$ , и выделяются четыре группы уравнений: растяжения-сжатия (2), кручения (2), изгиба в одной плоскости (4) и изгиба в другой (4).

## 5.4 Задача Сен-Венана

Частично мы уже рассмотрели её в п. 4.8 (кручение). Осталась более сложная задача об изгибе силой, но вернёмся к началу. Для напряжений имеем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}} = \sigma_z \mathbf{k}\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{k} + \mathbf{k}\boldsymbol{\tau}, \\ \int (\sigma_z \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}) dF = \mathbf{Q}, \quad \int \mathbf{x} \times (\sigma_z \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}) dF = \mathbf{M} \end{aligned} \quad (4.1)$$

(сила и момент в сечении  $z = \text{const}$ ). Из уравнений баланса сил и совместности получим

$$\sigma_z = a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}, \quad \Delta \boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{1+\nu} \mathbf{b}', \quad (4.2)$$

причём  $a$  и  $\mathbf{b}$  — линейные функции  $z$  (тогда  $\mathbf{b}'(z) = \text{const}$ ); вектор касательного напряжения  $\boldsymbol{\tau}$  не зависит от  $z$ ,  $\nabla$  и  $\Delta$  — двумерные. Сразу можно выразить  $a$  и  $\mathbf{b}$  через продольную силу  $Q_z$  и изгибающий момент:

$$\begin{aligned} \int \sigma_z dF = aF = Q_z, \quad \int \mathbf{x} \sigma_z dF \times \mathbf{k} = \mathbf{M}_\perp = \mathbf{b} \cdot \underline{\mathbf{J}} \times \mathbf{k}, \\ \int \mathbf{x} dF = 0, \quad \int \mathbf{x} \mathbf{x} dF = \underline{\mathbf{J}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

(ось  $z$  проходит через центры тяжести сечений, компонентами  $\underline{\mathbf{J}}$  являются моменты инерции). Заметим, что

$$\begin{aligned} Q(z) = \text{const}, \\ \mathbf{M}(z) = \mathbf{M}(z_1) + (z_1 - z)\mathbf{k} \times Q, \quad \mathbf{M}' = Q \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{b} = \underline{\mathbf{J}}^{-1} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_\perp, \quad \mathbf{b}' = \underline{\mathbf{J}}^{-1} \cdot Q_\perp. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Такие же по сути формулы для  $\sigma_z$  — в курсах сопротивления материалов.

Уравнения (4.2) для  $\boldsymbol{\tau}$  решаются посредством введения потенциалов:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = \nabla \varphi + \nabla \psi \times \mathbf{k}, \\ \Delta \varphi = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}, \quad \Delta \psi = -\frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{b}' \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - 2\mu\alpha; \end{aligned} \quad (4.5)$$

константа  $\alpha$  пока произвольна. Граничное условие  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$  на контуре  $\partial F$  будет удовлетворено при

$$\left. \partial_n \varphi \right|_{\partial F} = 0, \quad \left. \partial_t \psi \right|_{\partial F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \psi \right|_{\partial F} = 0; \quad (4.6)$$

последний переход — для односвязного сечения.

Значение  $\alpha$  определяется крутящим моментом

$$\mathbf{M}_z \mathbf{k} = \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} dF = \int \mathbf{x} \times \nabla \varphi dF - \mathbf{k} \left( \oint \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \psi dl - 2 \int \psi dF \right). \quad (4.7)$$

Контурный интеграл исчезает, а для интегралов по сечению имеем формулы

$$\begin{aligned}
 2 \int u dF &= - \int \Phi \Delta u dF - \oint u \partial_n \Phi dl \quad \left( \Delta \Phi = -2, \Phi \Big|_{\partial F} = 0 \right), \\
 \int \mathbf{x} \times \nabla u \cdot \mathbf{k} dF &= - \oint W \partial_n u dl + \int W \Delta u dF \\
 &\quad \left( \Delta W = 0, \partial_n W \Big|_{\partial F} = \mathbf{n} \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} \right)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

( $\Phi$  и  $W$  — функции напряжений и депланации из задачи кручения). Они вытекают из тождества

$$\int (u \Delta v - v \Delta u) dF = \oint (u \partial_n v - v \partial_n u) dl \tag{4.9}$$

при  $v = \Phi$  и  $v = W$  (доказывается посредством теоремы о дивергенции:  $u \partial_n v = \mathbf{n} \cdot u \nabla v$  и т. д.). Формулы (4.8) позволяют придать (4.7) вид

$$\begin{aligned}
 M_z &= \int (W \Delta \varphi - \Phi \Delta \psi) dF - \oint (W \partial_n \varphi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \psi + \psi \partial_n \Phi) dl = \\
 &= \mathbf{b}' \cdot \left( \int \mathbf{x} W dF + \frac{\nu}{1 + \nu} \int \mathbf{x} \phi dF \times \mathbf{k} \right) + \mu \alpha C \\
 &\quad \left( C = 2 \int \Phi dF \right).
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Пусть нагрузка на торце — сосредоточенная сила в точке  $\mathbf{x}^*$ . Будет  $\alpha = 0$  при

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^* &= \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta}), \\
 \boldsymbol{\eta} &\equiv \underline{\mathbf{J}}^{-1} \cdot \int \mathbf{x} W dF, \quad \boldsymbol{\zeta} \equiv \frac{\nu}{1 + \nu} \underline{\mathbf{J}}^{-1} \cdot \int \mathbf{x} \Phi dF \times \mathbf{k}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Такую точку часто называют *центром изгиба*; но дальше мы увидим, что это не совсем справедливо.

*Перемещения* определяются интегрированием соотношений закона Гу-



ка — несколько сложнее, чем в п. 4.8. Результат таков [32]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\perp &= U_\perp(z) + \alpha z \mathbf{k} \times \mathbf{x} - \frac{\nu}{E} \left( a\mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{b}x^2 \right), \\ U_\perp' &= -\frac{1}{E} \left[ \mathbf{b}(z_1)z - \left( z_1z - \frac{1}{2}z^2 \right) \mathbf{b}' \right]; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{a}{E}z - \mathbf{U}'_\perp \cdot \mathbf{x} + U_z(x), \\ \nabla \left( U_z - \frac{\nu}{4E} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}x^2 - \frac{1}{\mu} \varphi \right) &= \\ &= \nabla \left( \frac{1}{\mu} \psi + \frac{\nu}{4E} \mathbf{b}' \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}x^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 \right) \times \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Вектор  $U_\perp(z)$  — это прогиб в элементарной теории балки. Деформация  $U_z$  при изгибе определяется условиями Коши — Римана (4.13). Вклад добавок к элементарной теории мал при  $z_1 \rightarrow \infty$ .

Решение Сен-Венана можно использовать для *определения жесткостей по энергии*:

$$2\hat{\Pi}(M, Q) = 2 \int \hat{\Pi}(\underline{T}) dF = \int \left( \frac{1}{E} \sigma_z^2 + \frac{1}{\mu} \tau^2 \right) dF. \quad (4.14)$$

При этом не возникает спорный вопрос о связи перемещений и поворотов в одномерной модели с перемещениями трёхмерной. Вычислив интеграл [32], придём к соотношениям упругости стержня

$$\begin{aligned} \gamma_z &= (EF)^{-1} Q_z, \quad \boldsymbol{\theta}'_\perp = (E\underline{I})^{-1} \cdot M_\perp, \\ \boldsymbol{\theta}'_z &= (\mu C)^{-1} (M_z + \mathbf{Q}_\perp \cdot \boldsymbol{\eta}), \\ \boldsymbol{\gamma}_\perp &= (\mu F \underline{\boldsymbol{\beta}})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_\perp + (\mu C)^{-1} \boldsymbol{\eta} M_z, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где обозначено  $\underline{I} = -\mathbf{k} \times \underline{J} \times \mathbf{k}$ ,

$$\begin{aligned} (F \underline{\boldsymbol{\beta}})^{-1} &= \underline{J}^{-1} \cdot \left( - \int \varphi \mathbf{x} dF + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \mathbf{k} \times \int \boldsymbol{\psi} \mathbf{x} dF \times \mathbf{k} \right) \cdot \underline{J}^{-1} + C^{-1} (\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta} - \zeta \zeta), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\varphi, \boldsymbol{\psi}: \quad \Delta \varphi = \Delta \boldsymbol{\psi} = \mathbf{x}, \quad \partial_n \varphi \Big|_{\partial F} = 0, \quad \boldsymbol{\psi} \Big|_{\partial F} = 0. \quad (4.17)$$

В соотношениях (4.15) присутствуют обычные жёсткости на растяжение, изгиб и кручение. Перекрёстные связи представлены лишь вектором  $\eta$ ; определяя положение центра изгиба по условию  $\theta_z' = 0$ , найдём

$$\mathbf{x}^{**} = \mathbf{k} \times \eta, \quad (4.18)$$

что отличается от (4.11). Некоторые авторы использовали (4.18) как приближённую формулу — а она точна (!).

В жёсткости на сдвиг  $\mu F \underline{\underline{\beta}}$  содержится *тензор коэффициентов сдвига*  $\underline{\underline{\beta}}$ . Определяющие его интегралы содержат  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Phi$  и  $W$ . Для кругового сечения

$$\underline{\underline{\beta}}^{-1} = \left[ \frac{7}{6} + \frac{\nu^2}{6(1+\nu)^2} \right] \underline{\underline{E}}_{\perp}; \quad (4.19)$$

для прямоугольника, вытянутого в направлении оси  $x_1$ ,  $\beta_{11} \rightarrow 5/6$ .

В случае *многосвязного сечения* неизвестные постоянные значения  $\psi$  на внутренних контурах находятся из теорем о циркуляции  $\tau$  — обобщению (8.20, гл. 4) [33]. Из результатов вычисления жёсткостей по энергии приведем лишь коэффициенты сдвига для кругового кольца с отношением  $\rho$  внутреннего и наружного радиусов:

$$\underline{\underline{\beta}} = \frac{6(1+\rho^2)^2}{7(1+\rho^4) + 34\rho^2 + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 (1-\rho^2)^2} \underline{\underline{E}}_{\perp}. \quad (4.20)$$

В заключение отметим, что рассмотренная задача Сен-Венана относится только к цилиндру с нагрузкой на торцах. Её обобщение на слабо искривлённые стержни содержится в [33].

## 5.5 Асимптотическое расщепление трёхмерной задачи

В современном изложении механики стержней это главный вопрос — и уже в значительной мере решённый. Результаты расщепления оказываются в согласии и с прямым подходом, и с задачей Сен-Венана.

Стержень как тонкое длинное трёхмерное тело определяется осью — линией с уравнением  $\mathbf{r}(s)$  и фигурой нормального сечения в каждой точке оси (рис. 18). Вводится ортогональная тройка ортов  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{t} = \mathbf{r}'(s)$ ;

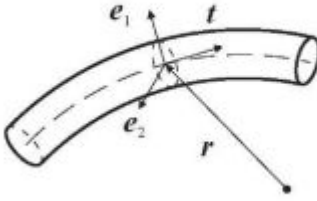


Рис. 18

сечения и расположение  $e_\alpha$  в них считаются независимыми от дуговой координаты  $s$ . Вектор кривизны-кручения  $\Omega$  соответствует (2.7).

Малый параметр  $\lambda \rightarrow 0$  появляется в представлении радиус-вектора

$$\mathbf{R}(x_\alpha, s) = \lambda^{-1} \mathbf{r}(s) + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \equiv x_\alpha \mathbf{e}_\alpha(s). \quad (5.1)$$

Определив базис и кобазис ( $\mathbf{R}_i = \partial \mathbf{R} / \partial q^i$ ,  $\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}_k = \delta_k^i$ ), придём к выражению оператора Гамильтона

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{R}^i \frac{\partial}{\partial q^i} = \nabla_\perp + v^{-1} \mathbf{t} (\partial_s - \Omega_t D), \\ \nabla_\perp &\equiv \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad D \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{x} \times \nabla_\perp, \\ v &\equiv \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_3 = \lambda^{-1} + \mathbf{t} \cdot \Omega \times \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Тензор напряжений

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}} + \sigma_t \mathbf{t} \mathbf{t} + 2\tau \mathbf{t}^S, \quad \underline{\mathbf{T}}_\perp = T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta, \quad \tau = T_{3\alpha} \mathbf{e}_\alpha \quad (5.3)$$

должен удовлетворять уравнениям баланса

$$\begin{aligned} \nabla_\perp \cdot \underline{\mathbf{T}}_\perp + v^{-1} [\dot{\tau} - \Omega_t (D\tau + \tau \times \mathbf{t}) + \\ + \mathbf{t} \cdot \Omega \times \underline{\mathbf{T}}_\perp - \sigma_t \mathbf{t} \times \Omega] + \mathbf{f}_\perp = 0, \\ \nabla_\perp \cdot \tau + v^{-1} (\dot{\sigma}_t - \Omega_t D\sigma_t + 2\mathbf{t} \cdot \Omega \times \tau) + f_t = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $(\dots)^{\dot{}}$  — оператор дифференцирования по  $s$  в подвижном базисе ( $\dot{\sigma} = \partial_s \sigma$ ,  $\dot{\tau} = \partial_s \tau - \Omega \times \tau$ , ...).

Боковую поверхность будем считать свободной и ненагруженной. На ней  $\Phi(x_\alpha) = 0$ ,  $\mathbf{N} = \nabla \Phi / |\nabla \Phi|$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \underline{\mathbf{T}} = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}}_\perp = v^{-1} \Omega_t \mathbf{x} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \tau, \quad \mathbf{n} \cdot \tau = v^{-1} \Omega_t \mathbf{x} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \sigma_t, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{n} = \nabla_\perp \Phi / |\nabla_\perp \Phi|$  — нормаль к контуру сечения  $\partial F$  в его плоскости.

В случае неоднородного анизотропного материала вместо уравнений Бельтрами обращаемся непосредственно к уравнениям совместности:

$$\begin{aligned} \text{inc } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\perp + \varepsilon_t \mathbf{t} \mathbf{t} + \gamma \mathbf{t}^S &\Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta_\perp \varepsilon_\perp = \nabla_\perp \cdot \nabla_\perp \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\perp + \dots \quad (\varepsilon_\perp = \text{tr } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\perp), \\ \Delta_\perp \gamma = \nabla_\perp \nabla_\perp \cdot \gamma + \dots, \quad \nabla_\perp \nabla_\perp \varepsilon_t = \underline{\mathbf{E}}_\perp \Delta_\perp \varepsilon_t + \dots; \end{aligned} \quad (5.6)$$

выписаны лишь главные при  $\lambda \rightarrow 0$  члены.

Материал будем считать трансверсально-изотропным с материальной симметрией относительно любой плоскости, параллельной  $\mathbf{t}$ . Закон Гука в этом случае содержит пять констант:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp} &= \frac{1}{2\mu_{\perp}} \underline{\underline{T}}_{\perp} - \left( \frac{\nu_{\perp}}{E_{\perp}} \sigma_{\perp} + \frac{\nu_t}{E_t} \sigma_t \right) \underline{\underline{E}}_{\perp}, \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E_t} (\sigma_t - \nu_t \sigma_{\perp}), \quad \gamma = \frac{1}{\mu_t} \tau \quad (E_{\perp} = 2\mu_{\perp}(1 + \nu_{\perp})). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Решение будем искать в виде  $\underline{\underline{T}} = \lambda^{-2}(\underline{\underline{T}}^{(0)} + \lambda \underline{\underline{T}}^{(1)} + \dots)$ . Для главных членов получим

$$\nabla_{\perp} \cdot \underline{\underline{T}}_{\perp}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{T}}_{\perp}^{(0)} \Big|_{\partial F} = 0, \quad \Delta_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{(0)} = \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp}^{(0)}; \quad (5.8)$$

$$\nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_t^{(0)} = \underline{\underline{E}}_{\perp} \Delta_{\perp} \varepsilon_t^{(0)}; \quad (5.9)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \underline{\underline{\tau}}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}}^{(0)} \Big|_{\partial F} = 0, \quad \Delta_{\perp} \gamma^{(0)} = \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \gamma^{(0)}. \quad (5.10)$$

Из (5.9) следует

$$\nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_t^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_t^{(0)} = A(s) + \mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{x} \quad (5.11)$$

важный результат: осевая деформация линейно распределена по сечению даже в неоднородном анизотропном материале.

Получив из (5.7) выражение

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp}^{(0)} = \frac{1}{2\mu_{\perp}} \underline{\underline{T}}_{\perp}^{(0)} - \left( \frac{\nu_{\perp}}{E_{\perp}} + \frac{\nu_t^2}{E_t} \right) \sigma_{\perp}^{(0)} \underline{\underline{E}}_{\perp} - \nu_t (A + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}) \underline{\underline{E}}_{\perp}, \quad (5.12)$$

приходим в (5.8) к плоской задаче для  $\underline{\underline{T}}_{\perp}^{(0)}$  с подчёркнутой начальной деформацией. Её решение

$$\underline{\underline{T}}_{\perp}^{(0)} = A \underline{\underline{T}}_0 + B_{\alpha} \underline{\underline{T}}_{\alpha} \quad (5.13)$$

отлично от нуля лишь при непостоянстве  $\nu_t$ .

Обращаясь далее к (5.10), положим  $\nabla_{\perp} \times \gamma^{(0)} = 2C\mathbf{t}$ . Пока  $C = C(x_{\alpha}, s)$ , но

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \times \left( \nabla_{\perp} \times \gamma^{(0)} \right) &= 2\nabla_{\perp} C \times \mathbf{t} = \\ &= \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \gamma^{(0)} - \Delta_{\perp} \gamma^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = C(s). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из (5.10) имеем также

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = C \nabla_{\perp} g \times \mathbf{t}, \quad \nabla_{\perp} \cdot (\mu_{\perp}^{-1} \nabla_{\perp} g) = -2, \quad g|_{\partial P} = 0. \quad (5.15)$$

Осталось найти  $A$ ,  $\mathbf{B}$  и  $C$  — тогда  $\underline{\mathbf{T}}^{(0)}$  будет определено. Достаточно рассмотреть силы, моменты и их баланс:

$$\begin{aligned} \sigma_t^{(0)} &= E_t(A + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}) + \nu_t \sigma_{\perp}^{(0)} = A \sigma_0 + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ Q_t &= \int \sigma_t dF = \lambda^{-2} \left( A \int \sigma_0 dF + \mathbf{B} \cdot \int \boldsymbol{\sigma} dF \right) + \dots, \\ M_{\perp} &= \int \mathbf{x} \sigma_t dF \times \mathbf{t} = \\ &= \lambda^{-2} \left( A \int \sigma_0 \mathbf{x} dF + \mathbf{B} \cdot \int \boldsymbol{\sigma} \mathbf{x} dF \right) \times \mathbf{t} + \dots, \\ M_t &= \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} dF \cdot \mathbf{t} = \lambda^{-2} 2C \int g dF + \dots, \\ Q' &= -q = - \int \mathbf{f} v dF, \\ M' + \lambda^{-1} \mathbf{t} \times \mathbf{Q} &= -\mathbf{m} = - \int \mathbf{x} \times \mathbf{f} v dF. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Но можно действовать и более формально — со следующими членами разложений и условиями разрешимости задач для них. Результат будет тем же. Из (5.16) на первом шаге

$$\mathbf{Q}^{(0)'} = 0, \quad \mathbf{t} \times \mathbf{Q}^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^{(0)} = 0, \quad (5.17)$$

поскольку стержень не прямой. Можем исключить  $A$ :

$$Q_t^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\mathbf{B} \cdot \int \boldsymbol{\sigma} dF / \int \sigma_0 dF, \quad (5.18)$$

теперь  $\mathbf{B}$  пропорционален изгибающему моменту  $M_{\perp}^{(0)}$ . Следующий шаг в (5.16) даёт

$$Q^{(1)'} + \int \mathbf{f} dF = 0, \quad M^{(0)'} + \mathbf{t} \times \mathbf{Q}^{(1)} = 0. \quad (5.19)$$

Обратим внимание на вид « $q$ » и исчезновение « $m$ ».

Перемещения определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\perp}^S - \underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp}, \quad v^{-1} (\dot{u}_t - \Omega_t D u_t + \mathbf{t} \cdot \Omega \times \mathbf{u}_{\perp}) = \varepsilon_t, \\ \nabla_{\perp} u_t + v^{-1} (\dot{u}_{\perp} - \Omega_t D \mathbf{u}_{\perp} + \Omega_t \mathbf{t} \times \mathbf{u} + \Omega \times t u_t) = \gamma. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Полагая  $\mathbf{u} = \lambda^{-4} \mathbf{u}^{(0)} + \dots$ , на первом шаге найдём

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(s), \quad \mathbf{u}^{(0)'} \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (5.21)$$

Результаты второго шага

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)} = U^{(1)}(s) + \boldsymbol{\theta}^{(1)}(s) \times \mathbf{x}, \quad \left( \mathbf{u}^{(0)'} \right)_1 = \boldsymbol{\theta}^{(1)} \times \mathbf{t}, \\ U^{(1)'} \cdot \mathbf{t} = A, \quad \mathbf{t} \times \boldsymbol{\theta}^{(1)'} = B. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Третий шаг позволит найти

$$C = \boldsymbol{\theta}^{(1)'} \cdot \mathbf{t}. \quad (5.23)$$

Получили соотношения упругости с конкретным выражением жесткостей:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(0)} = \underline{\underline{a}} \cdot \boldsymbol{\theta}^{(1)'}, \quad \underline{\underline{a}} = a_t \mathbf{t} \mathbf{t} + \underline{\underline{a}}_{\perp}, \quad a_t = 2 \int g dF, \\ \underline{\underline{a}}_{\perp} = -\mathbf{t} \times \int \mathbf{x} \left( \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \frac{\int \boldsymbol{\sigma} dF}{\int \sigma_0 dF} \right) dF \times \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Теория Кирхгофа — не единственный результат расщепления; найдена также структура решения по толщине.

## 5.6 Изгиб пластин

Пластина как тонкое трёхмерное тело ограничена плоскостями  $z = \pm h/2$  и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси  $z$ . В случае однородного изотропного материала общая задача делится на две — о плоском напряжённом состоянии и об изгибе — в зависимости от чётности функций по  $z$ . В задаче изгиба чётны  $u_z, f_z, \tau_{z\alpha}$  и нечётны  $u_{\alpha}, f_{\alpha}, \sigma_z, \tau_{\alpha\beta}$ . Деление сохраняется и в случае материальной симметрии относительно плоскостей  $z = \text{const}$  и чётности упругих модулей по  $z$ .

Двумерные модели пластин можно строить вариационным методом, аппроксимируя зависимости от  $z$ ; например:

$$\mathbf{u}(x_\alpha, z) = w(x_\alpha)\mathbf{k} + \boldsymbol{\theta}(x_\alpha) \times \mathbf{k}z \quad (6.1)$$

с независимым прогибом  $w$  и поворотом  $\boldsymbol{\theta}$ . Однако безусловного *предпочтения достоин асимптотический анализ* при  $h \rightarrow 0$ . В ряде работ показано, что результатом расщепления является классическая теория Кирхгофа [32].

Для изложения хорош *прямой подход* к пластине как материальной плоскости. В модели типа Тимошенко прогиб и поворот независимы, уравнение виртуальной работы имеет вид

$$\int (q\delta w + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \Pi) dO + \oint (\overset{\circ}{Q}\delta w + \overset{\circ}{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}) dl = 0, \quad (6.2)$$

где  $q$  и  $\mathbf{m}$  — силы и моменты на единицу площади,  $\overset{\circ}{Q}$  и  $\overset{\circ}{\mathbf{m}}$  — на единицу длины контура. На жёстких смещениях

$$\begin{aligned} \delta w = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + \text{const}, \quad \delta \boldsymbol{\theta} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \delta \underline{\boldsymbol{\kappa}} = 0, \\ \boldsymbol{\gamma} \equiv \nabla w + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}, \quad \underline{\boldsymbol{\kappa}} \equiv \nabla \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

работа внутренних сил ( $-\delta \Pi$ ) равна нулю. Вводя множители Лагранжа — вектор  $\mathbf{Q} = Q_\alpha \mathbf{e}_\alpha$  и тензор  $\underline{\mathbf{M}} = M_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$ , получим

$$\begin{aligned} \int (q\delta w + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{Q} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} - \underline{\mathbf{M}} \cdot \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\kappa}}^T) dO + \\ + \oint (\overset{\circ}{Q}\delta w + \overset{\circ}{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}) dl = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \int [(\nabla \cdot \mathbf{Q} + q)\delta w + (\nabla \cdot \underline{\mathbf{M}} + \mathbf{Q} \times \mathbf{k} + \mathbf{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}] dO + \\ + \oint [(\overset{\circ}{Q} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q})\delta w + (\overset{\circ}{\mathbf{m}} - \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{M}}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}] dl = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Деформация определяется вектором сдвига  $\boldsymbol{\gamma}$  и тензором кривизны  $\underline{\boldsymbol{\kappa}}$ . Силовые факторы — вектор перерезывающих сил  $\mathbf{Q}$  и тензор моментов  $\underline{\mathbf{M}}$  должны удовлетворять уравнениям и граничным условиям — выражения в круглых скобках в (6.4) равны нулю.

В упругой пластине энергия является функцией деформаций

$$\Pi = \Pi(\underline{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \underline{\mathbf{M}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\boldsymbol{\kappa}}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \quad - \quad (6.5)$$

закон состояния. В линейной модели изотропной пластины простейшим является вариант

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} (a_1 \kappa^2 + a_2 \underline{\kappa}^S \cdot \underline{\kappa}^S + a_3 \kappa_x^2 + b \gamma^2), \\ \underline{M}^S &= a_1 \kappa \underline{E} + a_2 \underline{\kappa}^S, \quad M_x = 2a_3 \kappa_x, \quad Q = b \gamma. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Однако для тонких пластин достаточно более простой *классической модели Кирхгофа* без поперечного сдвига:

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = \nabla w \times \mathbf{k}. \quad (6.7)$$

Она возникает в предельном переходе  $b \rightarrow \infty$ , но стоит рассмотреть её как самостоятельную. Деформация теперь определяется одним симметричным тензором  $\nabla \nabla w$ , а уравнение виртуальной работы таково

$$\begin{aligned} \int (q \delta w + \mathbf{m}' \cdot \nabla \delta w - \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \nabla \nabla \delta w) dO + \\ + \oint (\hat{Q} \delta w + \hat{\mathbf{m}}' \cdot \nabla \delta w) dl = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где введены «повёрнутые» моменты  $\mathbf{m}' = \mathbf{k} \times \mathbf{m}$ . Симметричный тензор  $\underline{\boldsymbol{\mu}}$  можно считать множителем Лагранжа или же – в упругой пластине –

$$\underline{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \nabla \nabla w}. \quad (6.9)$$

Используя преобразования

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \nabla \nabla w &= \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\mu}} \cdot \nabla w) + \mathbf{Q} \cdot \nabla w, \quad \mathbf{Q} \equiv -\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}, \\ \mathbf{Q} \cdot \nabla w &= \nabla \cdot (\mathbf{Q} w) - \nabla \cdot \mathbf{Q} w, \end{aligned} \quad (6.10)$$

перепишем (6.8) в виде

$$\begin{aligned} \int (\nabla \cdot \mathbf{Q} + q - \nabla \cdot \mathbf{m}') \delta w dO + \\ + \oint [(\hat{Q} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}) \delta w + (\hat{\mathbf{m}}' - \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}) \cdot \nabla \delta w] dl = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Подчёркнутое выражение равно нулю. С контурным интегралом связаны граничные условия.



Представляя энергию квадратичной формой, будем иметь (в случае изотропии)

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} [D_1(\Delta w)^2 + D_2 \nabla \nabla w \cdot \nabla \nabla w], \\ \underline{\mu} &= D_1 \Delta w \underline{E} + D_2 \nabla \nabla w, \quad \underline{Q} = -D \nabla \Delta w, \\ D &\equiv D_1 + D_2, \quad D \Delta \Delta w = q - \nabla \cdot \underline{m}' \quad - \end{aligned} \quad (6.12)$$

знаменитое уравнение Жермен – Лагранжа.

Коэффициенты жёсткости  $D_{1,2}$  определяются упругими свойствами и структурой. Для однородного изотропного материала

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_1 = \nu D, \quad D_2 = (1-\nu)D. \quad (6.13)$$

Это следует из асимптотического анализа трёхмерной задачи [32], а также из соотношений

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_\perp &\approx -z \nabla \nabla w \approx \frac{1}{2\mu} \left( \underline{\tau} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \underline{E} \right), \\ \Pi &= \frac{1}{2} \int \underline{\tau} \cdot \underline{\varepsilon} dz = \frac{1}{2} \underline{\mu} \cdot \nabla \nabla w, \\ \underline{\mu} &= - \int \underline{\tau} dz = D [(1-\nu) \nabla \nabla w + \nu \Delta w \underline{E}], \end{aligned} \quad (6.14)$$

Граничные условия заслуживают особого внимания, поскольку были предметом дискуссий. Напомним: при вариационной постановке каждое соотношение связано с некой независимой вариацией. На контуре

$$\nabla = \mathbf{n} \partial_n + l \partial_l, \quad \oint \Phi \partial_l w dl = - \oint \partial_l \Phi w dl,$$

поэтому контурный интеграл в (6.11) равен

$$\oint \left[ \left( \overset{\circ}{Q} - \mathbf{n} \cdot \underline{Q} - \partial_l \Phi_l \right) \delta w + \Phi_n \partial_n \delta w \right] dl = 0, \quad \Phi \equiv \overset{\circ}{m}' - \mathbf{n} \cdot \underline{\mu}. \quad (6.15)$$

Подынтегральное выражение равно нулю – такова общая постановка условий. В заделке  $w = 0$  и  $\delta w = 0$ ; на свободном крае

$$\mu_{nn} = \overset{\circ}{m}'_n = -\overset{\circ}{m}_l, \quad Q_n = \overset{\circ}{Q} + \partial_l (\mu_{nl} - \overset{\circ}{m}_n). \quad (6.16)$$

Заданный на контуре крутящий момент  $\hat{m}_n$  трансформировался в добавку к перерезывающей силе. Более удивительно другое — появление «сосредоточенных сил» в точках разрыва  $\Phi_l(l)$ ; таковы угловые точки, где  $\mathbf{n}$  и  $l$  разрывны.

Рассмотрим **пример**: осесимметричный изгиб круглой пластины. Имеем  $w = w(r)$ ,  $\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + r^{-1} \mathbf{e}_\varphi \partial_\varphi$ ,  $\mathbf{Q} = Q(r) \mathbf{e}_r$ ,

$$\begin{aligned} Q &= -D \left( w'' + \frac{1}{r} w' \right)', \quad \underline{\mu} = \mu_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \mu_\varphi \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \\ \mu_r &= D \left( w'' + \frac{\nu}{r} w' \right), \quad \mu_\varphi = D \left( \frac{1}{r} w' + \nu w'' \right) \\ &\left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right)^2 w = \frac{q(r)}{D} \Rightarrow \\ \Rightarrow w &= \frac{1}{D} \int \frac{dr}{r} \int r dr \int \frac{dr}{r} \int q r dr. \end{aligned} \quad (6.17)$$

В случае  $q = \text{const}$

$$w = \frac{q}{64D} r^4 + B_1 + B_2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 r^2 \ln r, \quad (6.18)$$

а для сплошной пластины с заделкой при  $r = a$

$$w = \frac{q(r^2 - a^2)^2}{64D}. \quad (6.19)$$

## 5.7 Линейная теория оболочек

*Геометрия оболочек* определяется срединной поверхностью ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha)$ ) и толщиной  $h$ . Радиус-вектор в теле оболочки

$$\mathbf{R}(q^\alpha, n) = \mathbf{r}(q^\alpha) + n \mathbf{n}(q^\alpha), \quad |n| \leq h/2, \quad (7.1)$$

орт нормали задан формулой (2.3, гл. 1). На срединной поверхности имеем базис, кобазис и оператор Гамильтона:

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \equiv \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad \nabla = \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha. \quad (7.2)$$

Первый метрический тензор

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}} &= \nabla \mathbf{r} = \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}_\alpha = a_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta = a^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta; \\ a_{\alpha\beta} &= \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}^\beta. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Он играет роль единичного тензора в касательной плоскости:

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{r}_\alpha = \underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{v}, \quad \underline{\mathbf{a}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \mathbf{nn}. \quad (7.4)$$

Компоненты  $a_{\alpha\beta}$  определяют длины, углы и площади:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} - a_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta, \quad |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2 - a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \equiv a, \\ dO = \sqrt{a} dq^1 dq^2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Информация об этом содержится и в  $a^{\alpha\beta}$ , поскольку  $a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$ , но отсутствует в смешанных компонентах  $\delta_\alpha^\beta$  — и самом  $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$  (!). Отметим, что  $a$  не является инвариантом.

Второй метрический тензор

$$\underline{\underline{\mathbf{b}}} = -\nabla \mathbf{n} - \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha \mathbf{n} \quad (7.6)$$

обусловлен кривизной. Его инвариантами являются средняя и гауссова кривизны:

$$2H - \text{tr} \underline{\underline{\mathbf{b}}} - b_\alpha^\alpha, \quad K = \det b_\alpha^\beta. \quad (7.7)$$

Не только техническую роль играют «деривационные» формулы

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \mathbf{r}_\beta &\equiv \mathbf{r}_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \mathbf{r}_\lambda + b_{\alpha\beta} \mathbf{n}, \quad \partial_\alpha \mathbf{n} = -b_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda &\equiv \mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r}^\lambda - \Gamma_{\alpha\beta\sigma} a^{\sigma\lambda}, \\ \Gamma_{\alpha\beta\sigma} &\equiv \mathbf{r}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{r}_\sigma - \frac{1}{2} (\partial_\alpha a_{\beta\sigma} + \partial_\beta a_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma a_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Из них следует, что компоненты  $a_{\alpha\beta}$  и  $b_{\alpha\beta}$  как функции  $q^\alpha$  определяют форму поверхности — через коэффициенты дифференциальных уравнений.

Эти функции не могут быть произвольными. Равенство  $\partial_\gamma \mathbf{r}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \mathbf{r}_{\gamma\beta}$  ведёт к уравнениям совместности (Гаусса — Петерсона — Кодацци), позволяющим выразить гауссову кривизну  $K$  через  $a_{\alpha\beta}$ . Отсюда важный вывод:  $K$  не меняется при изгибаниях — деформациях с неизменными длинами и углами. Плоскость можно изогнуть в цилиндрическую или коническую поверхность ( $K = 0$ ), но нельзя — в сферическую.

Обзор сведений из геометрии поверхностей закончим теоремой о дивергенции

$$\oint_{\partial O} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, dl = \int_O (\nabla \cdot \mathbf{u} + 2H \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, dO, \quad (7.9)$$

где  $\nu$  — орг нормали к контуру в касательной плоскости, а  $\mathbf{u}$  может быть тензором любого ранга. Доказательство можно построить на обычной теореме о циркуляции с представлением (7.1) [32].

При *прямом подходе* к оболочкам как материальным поверхностям важнейшим является вопрос о степенях свободы частиц. В классической модели Кирхгофа — Арона — Лява это материальные нормали с пятью степенями свободы. Вектор поворота  $\theta$  лежит в касательной плоскости, как и все моменты. Малое изменение нормали и работа момента таковы

$$\dot{\mathbf{n}} = \theta \times \mathbf{n} \equiv \varphi, \quad \mathbf{m} \cdot \theta = \mathbf{m}' \cdot \varphi, \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} \times \mathbf{n}. \quad (7.10)$$

В основе построений лежит уравнение виртуальной работы

$$\int (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}' \cdot \delta \varphi - \delta \Pi) dO + \oint (\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}' \cdot \delta \varphi) dl = 0. \quad (7.11)$$

При смещении без деформации неизменны  $a_{\alpha\beta}$  и  $b_{\alpha\beta}$ :

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = 0, \quad \delta \underline{\underline{\kappa}} = 0, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \dot{a}_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta, \quad \underline{\underline{\kappa}} \equiv \dot{b}_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta. \quad (7.12)$$

При этом работа внутренних сил ( $-\delta \Pi$ ) равна нулю. Вводим множители Лагранжа — симметричные тензоры  $\underline{\underline{\tau}}$  и  $\underline{\underline{\mu}}$  в касательной плоскости с формальным равенством

$$\delta \Pi = \underline{\underline{\tau}} \cdot \delta \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\mu}} \cdot \delta \underline{\underline{\kappa}}. \quad (7.13)$$

Для упругой оболочки существует потенциал  $\Pi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\kappa}})$  и тогда

$$\underline{\underline{\tau}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad \underline{\underline{\mu}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{\kappa}}}. \quad (7.14)$$

Установим *связи между перемещениями* ( $\mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ ), *поворотами и деформациями*. Имеем

$$\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \partial_\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r}_\alpha \cdot \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}; \quad (7.15)$$

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_\beta + \mathbf{r}_\alpha \cdot \partial_\beta \mathbf{u} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = (\nabla \mathbf{u})_\perp^S; \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\beta &\Rightarrow \dot{b}_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \varphi \cdot \mathbf{r}_\beta - \partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \partial_\beta \mathbf{u} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{\underline{\kappa}} = -(\nabla \varphi)_\perp + \underline{\underline{b}} \cdot \nabla \mathbf{u}^T = (\nabla \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_\perp. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Знак ( $\perp$ ) выделяет составляющую в касательной плоскости:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\perp &= \underline{\underline{a}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} - v_n \mathbf{n}, \\ \underline{\underline{T}}_\perp &= \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{T}} - T_n \mathbf{n} \mathbf{n} - T_{\alpha n} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{n} - T_{n\alpha} \mathbf{n} \mathbf{r}^\alpha. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Тензоры деформаций  $\underline{\varepsilon}$  и  $\underline{\kappa}$  такие же, как в пластине при плоском напряжённом состоянии и изгибе.

Перепишем (7.11), вводя ещё множитель Лагранжа  $Q$  от связи (7.15):

$$\int (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}' \cdot \delta \varphi - \underline{\tau} \cdot \delta \underline{\varepsilon} - \underline{\mu} \cdot \delta \underline{\kappa} - Q \cdot (\delta \varphi + \nabla \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) dO + \oint (F \cdot \delta \mathbf{u} + M' \cdot \delta \varphi) dl = 0. \quad (7.19)$$

Используя тождества

$$\begin{aligned} \underline{\tau} \cdot \underline{\varepsilon} &= \nabla \cdot (\underline{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \underline{\tau} \cdot \mathbf{u}, \\ \underline{\mu} \cdot \underline{\kappa} &= \nabla \cdot (-\underline{\mu} \cdot \varphi + \underline{\mu} \cdot \underline{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \underline{\mu} \cdot \varphi - \nabla \cdot (\underline{\mu} \cdot \underline{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{u}, \\ Q \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \nabla \cdot (Q \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot (Q \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

и теорему о дивергенции (7.9), преобразуем (7.19) к форме

$$\begin{aligned} \int [(\mathbf{q} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{m}' - (\nabla \cdot \underline{\mu})_{\perp} - Q) \cdot \delta \varphi] dO + \delta A = 0, \\ \underline{\mathbf{T}} \equiv \underline{\tau} + \underline{\mu} \cdot \underline{\mathbf{b}} + Q \mathbf{n}, \\ \delta A = \oint [(P - \nu \cdot \underline{\mathbf{T}}) \cdot \delta \mathbf{u} + (M' + \nu \cdot \underline{\mu}) \cdot \delta \varphi] dl. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Подчёркнутые выражения равны нулю — это уравнения баланса сил и моментов. Тензор сил  $\underline{\mathbf{T}}$  содержит и перерезывающие силы  $Q$ . С интегралом  $\delta A$  связаны все граничные условия.

В компонентах имеем пять уравнений баланса. По правилам элементарной механики их было бы шесть. «Шестое уравнение» моментов по нормали при нашем подходе оказывается тождеством (!). Однако без представлений лагранжевой механики нельзя строить теорию оболочек.

Соотношения упругости (7.14) в сущности такие же, как в пластине. Для однородного изотропного материала

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}(C_1 \varepsilon^2 + C_2 \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon} + D_1 \kappa^2 + D_2 \underline{\kappa} \cdot \underline{\kappa}), \\ \underline{\tau} &= C_1 \varepsilon \underline{\mathbf{a}} + C_2 \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\mu} = D_1 \kappa \underline{\mathbf{a}} + D_2 \underline{\kappa}, \\ \left( \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} \nu \\ 1 - \nu \end{array} \right) \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

а  $D_{1,2}$  имеют вид (6.13). Определение упругих констант — вне рамок прямого подхода и требует асимптотического анализа трёхмерной задачи — более сложного, чем для пластин.

Граничные условия выводятся из (7.21) посредством интегрирования по частям. На контуре

$$\begin{aligned} \nabla &= \nu \partial_\nu + l \partial_l, \quad \varphi = -\nu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{u} - l \mathbf{n} \cdot \partial_l \mathbf{u}, \\ &- \oint \Phi \cdot l \mathbf{n} \cdot \partial_l \mathbf{u} \, dl = \oint \partial_l (\Phi_l \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, dl, \\ [\mathbf{P} - \nu \cdot \underline{\underline{T}} + \partial_l (\Phi_l \mathbf{n})] \cdot \delta \mathbf{u} - \Phi_\nu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \delta \mathbf{u} &= 0, \\ \Phi &\equiv \mathbf{M}' + \nu \cdot \underline{\underline{\mu}}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

В компонентах всегда четыре условия. В заделке  $\mathbf{u} = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{u} = 0$ , а на свободном крае  $[\dots] = 0$  и  $\Phi_\nu = 0$ . Формулы Коши, связывающие нагрузки с тензорами сил и моментов, не имеют места — как при изгибе пластин Кирхгофа.

Тензоры деформации должны удовлетворять уравнениям совместности. Логика их вывода та же, что в п. 4.4. Опираемся на теорему о циркуляции

$$\begin{aligned} \oint (d\mathbf{r} \cdot \underline{\underline{V}}) &= \int \mathbf{n} \cdot \nabla \times \underline{\underline{V}} \, dO \quad (\partial_n \underline{\underline{V}}(q^\alpha, n) \equiv 0); \\ \underline{\underline{V}} &= \nabla \mathbf{u}: \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \times \underline{\underline{V}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\mathbf{n} \times \underline{\underline{V}}) = 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Представив градиент перемещения

$$\nabla \mathbf{u} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{a}} \times \Omega, \quad \Omega \equiv \nabla \times \mathbf{u} \cdot \left( \underline{\underline{a}} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \mathbf{n} \right) = \Omega_n \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \varphi, \quad (7.25)$$

из (7.24) получим

$$\nabla \Omega \cdot \mathbf{n} = -(\nabla \cdot (\mathbf{n} \times \underline{\underline{\varepsilon}}))_\perp. \quad (7.26)$$

Весь тензор  $\nabla \Omega$  найдём с учётом равенства

$$\underline{\underline{\kappa}} = (\nabla \nabla U \cdot \mathbf{n})_\perp = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - \nabla \Omega \times \mathbf{n}, \quad (7.27)$$

после чего условие (7.24) однозначности  $\Omega$  запишется в виде

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\kappa}}^* - \underline{\underline{b}}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^* + \Lambda \mathbf{n}) = 0, \quad \Lambda = (\nabla \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^*)_\perp, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^* \equiv -\mathbf{n} \times \underline{\underline{\varepsilon}} \times \mathbf{n}. \quad (7.28)$$

Формально это не отличается от уравнений баланса сил и моментов — имеем «статику-геометрическую аналогию». Уравнения (7.28) тождественно удовлетворяются выражениями  $\underline{\underline{\kappa}}$  и  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  через  $\mathbf{u}$ ; аналогичные выражения  $\underline{\underline{\tau}}$  и  $\underline{\underline{\mu}}$  через «вектор функций напряжений» позволяют удовлетворить уравнениям баланса.

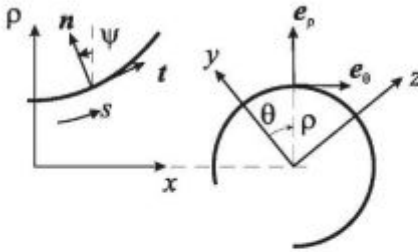


Рис. 19

Обратимся к *оболочкам вращения*. Образующий меридиан (рис. 19) определяется зависимостью цилиндрических координат от длины дуги

$$x = x(s), \quad \rho = \rho(s). \quad (7.29)$$

Положение самого меридиана задаётся углом  $\theta$ . Полагая  $q^1 = \theta$ ,  $q^2 = s$ , имеем

$$\mathbf{r}(q^\alpha) = x(s)\mathbf{i} + \rho(s)\mathbf{e}_\rho(\theta), \quad \mathbf{e}_\rho = \mathbf{j} \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta. \quad (7.30)$$

Орт касательной к меридиану

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}_2 = x'(s)\mathbf{i} + \rho'(s)\mathbf{e}_\rho, \quad x' = \cos \psi, \quad \rho' = \sin \psi, \quad (7.31)$$

а орт касательной к параллели  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}'_\rho(\theta)$ . Кривизна меридиана  $\omega = \psi'(s)$ , а параллели —  $\rho^{-1}$ . Орт нормали к меридиану в его плоскости  $\mathbf{n} = -\mathbf{i} \sin \psi + \mathbf{e}_\rho \cos \psi$ . Дифференциальные формулы:

$$\begin{aligned} \partial_\theta \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_\rho = -\mathbf{t} \sin \psi - \mathbf{n} \cos \psi, \\ \partial_\theta \mathbf{t} &= \sin \psi \mathbf{e}_\theta, \quad \partial_\theta \mathbf{n} = \cos \psi \mathbf{e}_\theta, \\ \partial_s \mathbf{e}_\theta &= 0, \quad \partial_s \mathbf{t} = \omega \mathbf{n}, \quad \partial_s \mathbf{n} = -\omega \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Построим базис, кобазис, набла-оператор и метрические тензоры:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \partial_\theta \mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{t} = \mathbf{r}^2, \quad \mathbf{r}^1 = \rho^{-1} \mathbf{e}_\theta; \\ \nabla &= \rho^{-1} \mathbf{e}_\theta \partial_\theta + \mathbf{t} \partial_s; \\ \underline{\mathbf{a}} &= \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \mathbf{t} \mathbf{t} = \underline{\mathbf{E}} - \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad \sqrt{a} = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = \rho, \\ \underline{\mathbf{b}} &= -\rho^{-1} \cos \psi \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \omega \mathbf{t} \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Рассмотрим дифференцирование вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_t \mathbf{t} + u_n \mathbf{n}; \\ \nabla \mathbf{u} &= [\rho^{-1}(\partial_\theta u_\theta + u_t \sin \psi + u_n \cos \psi) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \\ &+ (\partial_s u_t - \omega u_n) \mathbf{t} \mathbf{t} + \rho^{-1}(\partial_\theta u_t - u_\theta \sin \psi) \mathbf{e}_\theta \mathbf{t} + \partial_s u_\theta \mathbf{t} \mathbf{e}_\theta] + \\ &+ (\rho^{-1}(\partial_\theta u_n - u_\theta \cos \psi) \mathbf{e}_\theta + (\partial_s u_n + \omega u_t) \mathbf{t}) \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Квадратными скобками выделена  $(\nabla \mathbf{u})_{\perp}$ ; подчеркнута  $\mathbf{u}_{\rho} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\rho}$ . Ясен вид тензора  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Поворот

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + \varphi_t \mathbf{t}, \\ \varphi_{\theta} &= \rho^{-1}(u_{\theta} \cos \psi - \partial_{\theta} u_n), \quad \varphi_t = -\partial_s u_n - \omega u_t. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Чрезвычайно сложен и ненадежен вывод подобных соотношений без формального аппарата, а из чертежа с элементами до и после деформации.

Необходимы и выражения дивергенции тензоров:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= T_{\theta} \mathbf{e}_{\theta} \mathbf{e}_{\theta} + T_t \mathbf{t} \mathbf{t} + T_{\theta t} \mathbf{e}_{\theta} \mathbf{t} + T_{t\theta} \mathbf{t} \mathbf{e}_{\theta}, \\ \nabla \cdot \underline{\underline{T}} &= [\rho^{-1}(\partial_{\theta} T_{\theta} + (T_{\theta t} + T_{t\theta}) \sin \psi) + \partial_s T_{t\theta}] \mathbf{e}_{\theta} + \\ &\quad + [\rho^{-1}((T_t - T_{\theta}) \sin \psi + \partial_{\theta} T_{\theta t}) + \partial_s T_t] \mathbf{t} + \\ &\quad + (-\rho^{-1} T_{\theta} \cos \psi + \omega T_t) \mathbf{n}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{Qn}) &= \rho^{-1} Q_{\theta} \cos \psi \mathbf{e}_{\theta} - \omega Q_t \mathbf{t} + \\ &\quad + [\rho^{-1}(\partial_{\theta} Q_{\theta} + Q_t \sin \psi) + \partial_s Q_t] \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Имеем достаточно соотношений для записи всей системы в компонентах.

В *осесимметричной задаче* компоненты не зависят от  $\theta$  — уравнения становятся обыкновенными. Равны нулю  $u_{\theta}$ ,  $q_{\theta}$ ,  $m'_{\theta}$ ,  $\varphi_{\theta}$ ,  $\tau_{\theta t}$ ,  $\mu_{\theta t}$ ,  $Q_{\theta}$ . Сводка равенств такова:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \rho^{-1} u_{\rho}, \quad \varepsilon_t = u'_t - \omega u_n, \quad \varphi_t = -u'_n - \omega u_t, \\ \kappa_{\theta} &= -\rho^{-1} \varphi_t \sin \psi - \rho^{-2} u_{\rho} \cos \psi, \quad \kappa_t = -\varphi'_t + \omega(u'_t - \omega u_n), \\ \mu_{\theta} &= D \kappa_{\theta} + D_1 \kappa_t \quad (D = D_1 + D_2), \quad \mu_t = D \kappa_t + D_1 \kappa_{\theta}, \\ T_{\theta} &= C \varepsilon_{\theta} + C_1 \varepsilon_t - \rho^{-1} \mu_{\theta} \cos \psi \quad (C = C_1 + C_2); \\ T'_t &= C \varepsilon_t + C_1 \varepsilon_{\theta} + \omega \mu_t, \\ \rho^{-1}(T_t - T_{\theta}) \sin \psi + T'_t - \omega Q_t + q_t &= 0, \\ -\rho^{-1} T_{\theta} \cos \psi + \omega T_t + \rho^{-1} Q_t \sin \psi + Q'_t + q_n &= 0, \\ \rho^{-1}(\mu_t - \mu_{\theta}) \sin \psi + \mu'_t + Q_t - m'_t &. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Первый интеграл

$$\rho(T_t \cos \psi - Q_t \sin \psi) + \int \rho q_x ds = \text{const} \quad (7.38)$$

выражает баланс сил для частиц оболочки между параллелями.



Об особенностях расчёта оболочек с различной формой меридиана (цилиндрических, конических, сферических, торообразных) написано много книг [71, 113, 21, 6].

В системе уравнений теории оболочек присутствует малый параметр от отношения жесткостей ( $D/C = h^2/12$ ). Отбрасывая формально малые члены, приходим к уравнениям *безмоментной теории*:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{q}} = 0, \quad \underline{\underline{T}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = C_1 \varepsilon \underline{\underline{a}} + C_2 \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = (\nabla \mathbf{u})_{\perp}^S. \quad (7.39)$$

Безмоментное состояние оптимально для оболочечной конструкции, поскольку напряжения равномерно распределены по толщине. Но такое состояние возможно не при любых нагрузках внутри и на краю. По терминологии метода сращивания это внешнее разложение. Внутреннее разложение — краевые эффекты — необходимы для удовлетворения всем произвольным граничным условиям.

Для трёх компонент  $T_{\alpha\beta}$  имеем три уравнения баланса сил. Можно показать [21, 32], что эта система является эллиптической при положительной гауссовой кривизне ( $K > 0$ ) и гиперболической при  $K < 0$ . Рис. 19 соответствует  $K < 0$ . Характеристиками в этом случае оказываются «асимптотические линии»; на них

$$d\mathbf{r} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (7.40)$$

Известно (п. 1.3), что для гиперболических уравнений нельзя ставить граничные условия на характеристиках. Значит, край безмоментной оболочки не может быть асимптотической линией. На цилиндрической поверхности это прямая образующая.

## 5.8 Нелинейно-упругие оболочки

В начальном (ненапряжённом) состоянии  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^\alpha)$ , в деформированном  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^\alpha)$  — радиус-векторы одной и той же частицы — материальной нормали ( $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{N}$ ). Различаем операторы Гамильтона и метрические тензоры:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla} &= \mathbf{r}^\alpha \partial_{\alpha}, & \nabla &= \mathbf{R}^\alpha \partial_{\alpha}, \\ \underline{\underline{a}} &= \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}, & \underline{\underline{A}} &= \nabla \mathbf{R}, & \underline{\underline{b}} &= -\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{n}, & \underline{\underline{B}} &= -\nabla \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Для элементов площади имеем

$$\begin{aligned} d\hat{O} &= \sqrt{a} dq^1 dq^2, \quad \sqrt{a} = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|, \\ dO &= J d\hat{O}, \quad J = \sqrt{A/a}, \quad \sqrt{A} = |\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2|. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Как и в случае трёхмерной среды, важнейшую роль играет градиент деформации

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^T = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{r}^\alpha. \quad (8.3)$$

Обратный к  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  тензор не существует. Но можно ввести

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{G}}} &\equiv \nabla \mathbf{r}^T = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{R}^\alpha; \quad \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{a}}}, \\ \nabla &= \underline{\underline{\mathbf{G}}}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla}, \quad \overset{\circ}{\nabla} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \nabla. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Обобщая (7.12), определим *тензоры деформации*

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{C}}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{a}}}) = C_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}); \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}} &= \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{b}}} = K_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta, \quad K_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Вариация нормали и работа момента таковы:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{N} &= \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{N}, \quad \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{m}' \cdot \delta \mathbf{N}, \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} \times \mathbf{N}; \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}_\alpha &= 0 \Rightarrow \delta \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}_\alpha = -\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{R}_\alpha \Rightarrow \delta \mathbf{N} = \nabla \delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Очевидна формулировка принципа виртуальной работы

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{m}' \cdot \delta \mathbf{N} - \delta \Pi) J^{-1} dO + \\ + \oint (\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{R} + \mathbf{M}' \cdot \delta \mathbf{N}) dl = 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

с нагрузками  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{m}'$  и плотностью энергии  $\Pi$  (на единицу площади в начальном состоянии) и контурными нагрузками  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}'$ . Поскольку энергия — функция деформаций  $\Pi(\underline{\underline{\mathbf{C}}}, \underline{\underline{\mathbf{K}}})$ , то

$$\begin{aligned} J^{-1} \delta \Pi &= \tau^{\alpha\beta} \delta C_{\alpha\beta} + \mu^{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta}; \\ \tau^{\alpha\beta} &= J^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial C_{\alpha\beta}}, \quad \mu^{\alpha\beta} = J^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial K_{\alpha\beta}}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Иной путь — принять в (8.7)  $\delta\Pi = 0$  и ввести множители Лагранжа.

Подставляя (8.8) в (8.7), положим

$$\begin{aligned}\underline{\tau} &= \tau^{\alpha\beta} \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta = J^{-1} \underline{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T, \\ \underline{\mu} &= \mu^{\alpha\beta} \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta = J^{-1} \underline{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \quad -\end{aligned}\quad (8.9)$$

соотношения упругости — и введём множитель Лагранжа  $\mathbf{Q} = Q^\alpha \mathbf{R}_\alpha$  для связи (8.6). Используя тождества

$$\begin{aligned}\tau^{\alpha\beta} \delta C_{\alpha\beta} &= \underline{\tau} \cdot (\nabla \delta \mathbf{R})_{\perp}^S = \underline{\tau} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}^T = \nabla \cdot (\underline{\tau} \cdot \delta \mathbf{R}) - \nabla \cdot \underline{\tau} \cdot \delta \mathbf{R}, \\ \mu^{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta} &= \nabla \cdot (\underline{\mu} \cdot \underline{\mathbf{B}} \cdot \delta \mathbf{R} - \underline{\mu} \cdot \delta \mathbf{N}) + \nabla \cdot \underline{\mu} \cdot \delta \mathbf{N} - \nabla \cdot (\underline{\mu} \cdot \underline{\mathbf{B}}) \cdot \delta \mathbf{R}, \\ \mathbf{Q} \cdot \nabla \delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} &= \nabla \cdot (\mathbf{Q} \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{R}) - \nabla \cdot (\mathbf{Q} \mathbf{N}) \cdot \delta \mathbf{R}\end{aligned}\quad (8.10)$$

и теорему о дивергенции, преобразуем (8.7) к виду

$$\begin{aligned}\int [(J^{-1} \mathbf{q} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}}) \cdot \delta \mathbf{R} + (J^{-1} \mathbf{m}' - (\nabla \cdot \underline{\mu})_{\perp} - \mathbf{Q}) \cdot \delta \mathbf{N}] dO + \\ + \oint [(\mathbf{P} - \nu \cdot \underline{\mathbf{T}}) \cdot \delta \mathbf{R} + (\mathbf{M}' + \nu \cdot \underline{\mu}) \cdot \delta \mathbf{N}] dl = 0, \\ \underline{\mathbf{T}} \equiv \underline{\tau} + \underline{\mu} \cdot \underline{\mathbf{B}} + \mathbf{Q} \mathbf{N}.\end{aligned}\quad (8.11)$$

По форме почти всё как в линейной теории. После интегрирования по частям на контуре получим четыре условия в компонентах.

Подобно построениям п. 3.10 можно связать элементы границ и ввести тензоры Пиола. В начальном состоянии линейный элемент имеет длину  $\hat{dl}$  и нормали  $\hat{\nu}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$ , а в деформированном  $dl$ ,  $\nu$ ,  $\mathbf{N}$ . Согласно (8.2)

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\alpha \times \mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{N} &= J r_\alpha \times r_\beta \cdot \mathbf{n} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow d\mathbf{R} \times \mathbf{N} &= \nu dl = J(\nu dl)^\diamond \cdot \underline{\mathbf{G}} \quad -\end{aligned}\quad (8.12)$$

аналог формулы Нансона (10.1, гл. 3).

Тензоры Пиола возникают из равенств

$$\begin{aligned}\nu \cdot \underline{\tau} dl &= \hat{\nu} \cdot \hat{\underline{\tau}} \hat{dl} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\underline{\tau}} &= J \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T; \quad \hat{\underline{\mu}} = J \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\mu}.\end{aligned}\quad (8.13)$$

С такими тензорами легко перейти к начальному состоянию в уравнении баланса сил:

$$\oint \boldsymbol{\nu} \cdot \underline{\underline{T}} \, dl + \int J^{-1} \mathbf{q} \, dO = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} + \mathbf{q} = 0,$$

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} - J \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{T}} - \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} + \overset{\circ}{\underline{\underline{\mu}}} \cdot \underline{\underline{B}} + \overset{\circ}{\underline{\underline{Q}}} \mathbf{N}, \quad \overset{\circ}{\underline{\underline{Q}}} - J \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{Q}} - \overset{\circ}{\underline{\underline{Q}}}^\alpha r_\alpha. \quad (8.14)$$

Чтобы сделать подобное для уравнения баланса моментов, запишем его в интегральной форме с тензором  $\underline{\underline{\mu}}' - \underline{\underline{\mu}} \times \mathbf{N}$ :

$$\int \boldsymbol{\nu} \cdot (\underline{\underline{\mu}}' - \underline{\underline{T}} \times \mathbf{R}) \, dl + \int J^{-1} (\mathbf{N} \times \mathbf{m}' + \mathbf{R} \times \mathbf{q}) \, dO = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mu}}' + \underline{\underline{T}}_\times + J^{-1} \mathbf{N} \times \mathbf{m}' = 0 \Rightarrow (\nabla \cdot \underline{\underline{\mu}})_\perp + \underline{\underline{Q}} - J^{-1} \mathbf{m}'; \quad (8.15)$$

$$\int \boldsymbol{\nu} \cdot (\overset{\circ}{\underline{\underline{\mu}}}' - \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} \times \mathbf{R}) \, dl + \int (\mathbf{N} \times \mathbf{m}' + \mathbf{R} \times \mathbf{q}) \, dO = 0 \Rightarrow$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{\mu}}}' + J \underline{\underline{T}}_\times + \mathbf{N} \times \mathbf{m}' = 0 \Rightarrow (\overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{\mu}}})_\perp + \underline{\underline{F}} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{Q}}} = \mathbf{m}'. \quad (8.16)$$

Отметим, что знак ( $\perp$ ) относится к деформированному состоянию ( $\mathbf{N} \perp \mathbf{0}$ ).

Положение малой деформации на конечную удобнее рассматривать с тензорами Пиола, поскольку операции  $\delta$  и  $\overset{\circ}{\nabla}$  переставимы, а  $\delta$  и  $\nabla$  нет.

**Пример:** осесимметричная деформация круглой пластины. Используем полярные координаты  $q^1 = r$ ,  $q^2 = \theta$ ; орты касательных к координатным линиям  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$ , причём  $\mathbf{e}'_r(\theta) = \mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}'_\theta(\theta) = -\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k}$ . В начальной конфигурации

$$\mathbf{r}(q^\alpha) = r \mathbf{e}_r(\theta), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_2 = r \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta,$$

$$\overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \partial_\theta, \quad \underline{\underline{a}} = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}, \quad \underline{\underline{b}} = \mathbf{0}. \quad (8.17)$$

В деформированном состоянии

$$\mathbf{R}(q^\alpha) = R(r) \mathbf{e}_r(\theta) + w(r) \mathbf{k}, \quad \mathbf{R}_1 = R' \mathbf{e}_r + w' \mathbf{k},$$

$$\mathbf{R}_2 = R \mathbf{e}_\theta, \quad A_{11} = R'^2 + w'^2 \equiv s^2,$$

$$A_{12} = 0, \quad A_{22} = R^2, \quad \mathbf{N} = \frac{1}{s} (R' \mathbf{k} - w' \mathbf{e}_r),$$

$$B_{11} = \mathbf{R}_{11} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{s} (-R'' w' + w'' R'), \quad B_{12} = 0,$$

$$B_{22} = \frac{R w'}{s}, \quad \mathbf{R}^1 = \frac{1}{s R} \mathbf{R}_2 \times \mathbf{N} = \frac{1}{s^2} \mathbf{R}_1,$$

$$\mathbf{R}^2 = \frac{1}{R} \mathbf{e}_\theta, \quad \underline{\mathbf{B}} = B_{11} \mathbf{R}^1 \mathbf{R}^1 + B_{22} \mathbf{R}^2 \mathbf{R}^2. \quad (8.18)$$

Градиент и тензоры деформации:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}} &= (R' \mathbf{e}_r + w' \mathbf{k}) \mathbf{e}_r + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta, \\ \underline{\mathbf{C}} &= \frac{1}{2} \left[ (A_{11} - 1) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \left( \frac{A_{22}}{r^2} - 1 \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta \right], \\ \underline{\mathbf{K}} &= B_{11} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{B_{22}}{r^2} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Тензоры Пиола

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\mathbf{T}}} &= \hat{\underline{\mathbf{T}}}_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{rz} \mathbf{e}_r \mathbf{k} + \hat{\underline{\mathbf{T}}}_\theta \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta, \\ \hat{\underline{\mathbf{T}}}_r &= \frac{\partial \Pi}{\partial C_r} R', \quad \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{rz} = \frac{\partial \Pi}{\partial C_r} w', \quad \hat{\underline{\mathbf{T}}}_\theta = \frac{\partial \Pi}{\partial C_\theta} \frac{R}{r}; \\ \hat{\underline{\mathbf{T}}} &= \hat{\underline{\mathbf{T}}}_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \dots, \quad \hat{\underline{\mathbf{T}}}_r = \hat{\underline{\mathbf{T}}}_r + \frac{B_{11}}{s^4} R' (\hat{\underline{\mu}}_r R' + \hat{\underline{\mu}}_{rz} w') - Q(r) \frac{w'}{s}, \\ \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{rz} &= \hat{\underline{\mathbf{T}}}_{rz} + \frac{B_{11}}{s^4} w' (\hat{\underline{\mu}}_r R' + \hat{\underline{\mu}}_{rz} w') + Q \frac{R'}{s}, \\ \hat{\underline{\mathbf{T}}}_\theta &= \hat{\underline{\mathbf{T}}}_\theta + \hat{\underline{\mu}}_\theta \frac{B_{22}}{R^2} \quad (\hat{\underline{\mathbf{Q}}} = Q(r) \mathbf{e}_r). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Из уравнения баланса сил (8.14) получим

$$\hat{\underline{\mathbf{T}}}'_r + \frac{1}{r} (\hat{\underline{\mathbf{T}}}'_r - \hat{\underline{\mathbf{T}}}'_\theta) + q_r = 0, \quad \hat{\underline{\mathbf{T}}}'_{rz} + \frac{1}{r} \hat{\underline{\mathbf{T}}}'_{rz} + q_z = 0, \quad (8.21)$$

а (8.16) преобразуем к виду

$$(\mathbf{m}' - \hat{\nabla} \cdot \hat{\underline{\mu}}) \cdot \mathbf{R}_1 = s^2 Q. \quad (8.22)$$

Осталось задать энергию  $\Pi(\underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{K}})$ ; это проблема, поскольку квадратичная аппроксимация годится только при малых деформациях.

## 5.9 Тонкостенные стержни

Сечения таких стержней — узкие криволинейные полоски (рис. 20). Имеем нечто промежуточное между обычными стержнями и оболочками. Для тонкостенных стержней важны не только силы и моменты, но и «бимоменты».

Уравнения можно вывести вариационным методом с аппроксимацией

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, z) = U(z) + \boldsymbol{\theta}(z) \times \mathbf{x} + \alpha(z)W(\mathbf{x})\mathbf{k}. \quad (9.1)$$

В теории без сдвига  $U'_\perp = \boldsymbol{\theta}_\perp \times \mathbf{k}$ . В задаче Сен-Венана  $\alpha = \theta'_z$ , а функция деформации  $W$  находится из условий (8.16, гл. 4). Примем

$$\mathbf{u} = U(z) + \theta_z \mathbf{k} \times \mathbf{x} + (-U'_\perp \cdot \mathbf{x} + \theta'_z W) \mathbf{k} \quad (9.2)$$

и рассмотрим постановку

$$\int_0^{z_1} dz \int_F (\mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi_3) dF + \int_F \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, z_1) dF = 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \Pi_3 = \mu \left( \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon^2 \right) \quad (9.3)$$

(конец  $z = 0$  закреплён, а  $z = z_1$  — свободен и нагружен силами  $\mathbf{p}$ ).

Перемещениям (9.2) соответствует деформация

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_z \mathbf{k}\mathbf{k} + \theta'_z (\nabla \Phi \times \mathbf{k}\mathbf{k})^S, \quad \varepsilon_z \equiv U'_z - U'_\perp \cdot \mathbf{x} + \theta''_z W \quad (9.4)$$

с функцией напряжений  $\Phi$  из п. 4.8:

$$\nabla W = (\nabla \Phi + \mathbf{x}) \times \mathbf{k}. \quad (9.5)$$

Найдём «одномерную» энергию:

$$2 \int \Pi_3 dF = \int \left( \hat{E} \varepsilon_z^2 + \mu \theta_z'^2 |\nabla \Phi|^2 \right) dF = \\ = \hat{E} \left( F U_z'^2 + U'_\perp \cdot \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot U'_\perp + I \theta_z''^2 - 2 \theta_z'' U'_\perp \cdot \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \boldsymbol{\eta} \right) + \mu C \theta_z'^2 = \\ = 2 \Pi_1 (U_z', U'_\perp, \theta_z', \theta_z''), \\ \hat{E} = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad I \equiv \int W^2 dF, \quad (9.6)$$

а прочие интегралы — как в п. 5.4.

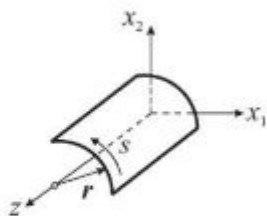


Рис. 20

Работы нагрузок в объёме и на торце:

$$\int \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dF = \mathbf{q} \cdot \delta U + \mathbf{m} \cdot (\mathbf{k} \times \delta U'_\perp + \mathbf{k} \delta \theta_z) + b \delta \theta'_z,$$

$$\mathbf{q} = \int \mathbf{f} dF, \quad \mathbf{m} = \int \mathbf{x} \times \mathbf{f} dF, \quad b = \int f_z W dF; \quad (9.7)$$

$$\int \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dF = \mathbf{Q}_1 \cdot \delta U + \mathbf{M}_1 \cdot (\mathbf{k} \times \delta U'_\perp + \mathbf{k} \delta \theta_z) + B_1 \delta \theta'_z. \quad (9.8)$$

Подставив (9.6) – (9.8) в (9.3), придём к одномерной задаче со следующими уравнениями Эйлера и естественными условиями

$$Q'_z + q_z = 0, \quad Q_z = \frac{\partial \Pi_1}{\partial U'_z} = \hat{E} F U'_z; \quad z = z_1: \quad Q_z = Q_{1z};$$

$$\mathbf{Q}'_\perp + \mathbf{q}_\perp = 0, \quad \mathbf{M}'_\perp + \mathbf{k} \times \mathbf{Q}_\perp + \mathbf{m}_\perp = 0,$$

$$\mathbf{M}_\perp = \mathbf{k} \times \frac{\partial \Pi_1}{\partial \mathbf{U}'_\perp} = \hat{E} \mathbf{k} \times \underline{\mathbf{J}} \cdot (\mathbf{U}'_\perp - \boldsymbol{\eta} \theta''_z);$$

$$z = z_1: \quad \mathbf{Q}_\perp = \mathbf{Q}_{1\perp}, \quad \mathbf{M}_\perp = \mathbf{M}_{1\perp};$$

$$M'_z + m_z = 0, \quad M_z = \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta'_z} - B' - b, \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta'_z} = \mu C \theta'_z,$$

$$B = \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta''_z} = \hat{E} (I \theta''_z - \mathbf{U}'_\perp \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\eta});$$

$$z = z_1: \quad M_z = M_{1z}, \quad B = B_1. \quad (9.9)$$

Здесь обычные уравнения растяжения-сжатия. Изгиб связан с кручением из-за вектора  $\boldsymbol{\eta}$ . Все качественные особенности тонкостенного стержня – в задаче кручения с уравнением четвертого (а не второго) порядка и двумя силовыми факторами – моментом и бимоментом ( $B$ ).

Сложный асимптотический анализ трёхмерной задачи подтверждает вышеизложенное (но вместо  $\hat{E}$  будет  $E$ ) [32]. В качестве  $W$  выступает *секториальная площадь*  $\omega(s)$  (это характерно и для технических расчётов):

$$\omega(s) = \int_{s_0}^s (d\mathbf{r} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) \quad - \quad (9.10)$$

удвоенная площадь, «заметаемая» вектором  $\mathbf{r}$  при возрастании дуговой координаты  $s$ . Такое выражение  $W$  следует из (9.5), если пренебречь слагаемым  $\nabla \Phi$ . Решая задачу кручения асимптотическим методом, можно это

обосновать. Начало отсчёта  $s_0$  находится из условия

$$\int W dF = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \omega ds = 0 \quad - \quad (9.11)$$

всегда выполнимого, поскольку  $W$  определена с точностью до аддитивной постоянной.

## Библиография

Прикладная сторона механики тонких тел представлена в книгах В. Л. Бидермана [6] и Л. Г. Доннела [31].

Асимптотическое происхождение моделей стержней, пластин и оболочек описано А. Л. Гольденвейзером [21], В. Л. Бердичевским [5] и автором [32].

Множество конкретных вопросов теории оболочек рассмотрено В. С. Черниной [113], В. В. Новожиловым, К. Ф. Черных и Е. М. Михайловским [71] и С. П. Тимошенко с С. Войновским-Кригером [96]. Интересна и книга А. П. Филина [107].

О тонкостенных стержнях можно прочесть у В. З. Власова [16].



# Глава 6

## Динамика упругих тел

### 6.1 Колебания упругих тел

Общие законы теории колебаний (п. 2.8) справедливы и для систем с распределёнными параметрами. Рассмотрим задачу динамики линейно упругого тела, содержащую уравнения (1.1, гл. 4), начальные условия и соотношения на границе

$$\mathbf{u}|_{O_1} = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}|_{O_2} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t). \quad (1.1)$$

Применяя преобразование Лапласа (4.14, гл. 1), можно получить задачу статики для изображений, но такой подход не всегда эффективен.

При свободных колебаниях анализ начинают с решения  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \sin \omega t$ . Это главные, или нормальные колебания,  $U$  — форма или мода,  $\omega$  — собственная частота. Имеем задачу на собственные значения:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} + \omega^2 \rho U = 0, \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}} = {}^4 \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \nabla U, \quad U|_{O_1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}|_{O_2} = 0; \quad (1.2)$$

нетривиальные решения  $U_k(\mathbf{r})$  существуют лишь для собственных частот  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Заметим, что если тело «плохо закреплено» и может перемещаться как твёрдое, спектр содержит  $\omega = 0$  соответствующей кратности (свободное тело имеет 6 нулевых частот в пространственной задаче и 3 — в плоской).

С помощью теорем статики линейно упругого тела (п. 4.2) можно доказать, что  $\omega^2$  вещественны и неотрицательны, а формы ортогональны в следующем смысле:

$$\omega_i \neq \omega_k : \int \rho U_i \cdot U_k dV = 0 \quad -$$

ведь согласно теоремам Клапейрона и взаимности работ

$$\omega^2 \int \rho |U|^2 dV = 2 \int \Pi dV, \quad (\omega_i^2 - \omega_k^2) \int \rho U_i \cdot U_k dV = 0. \quad (1.3)$$

Нормируя формы, получим

$$\int \rho U_i \cdot U_k dV = \delta_{ik}. \quad (1.4)$$

Вместо разложений (8.5, гл. 2) в конечномерном пространстве теперь имеем бесконечные ряды

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k U_k(\mathbf{r}), \quad \alpha_k = \int \rho \mathbf{u} \cdot U_k dV \quad - \quad (1.5)$$

главные координаты. Для равномерной сходимости необходимо  $\mathbf{u}|_{O_1} = 0$ . Произвольное свободное движение является суперпозицией главных колебаний — как в (8.6, гл. 2).

*Вынужденные колебания* при закреплении на  $O_1$  могут быть представлены разложением (1.5) с коэффициентами  $\alpha_k(t)$ . Обыкновенные уравнения для  $\alpha_k$  следуют из теоремы взаимности:

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot U_k dV + \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot U_k dO &= \int \omega_k^2 \rho U_k \cdot \mathbf{u} dV \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{\alpha}_k + \omega_k^2 \alpha_k &= \beta_k(t) \equiv \int \mathbf{f} \cdot U_k dV + \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot U_k dO. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В случае «кинематического» возбуждения на  $O_1$  полагаем  $\mathbf{u} = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{u}}$ , где заданное нами  $\hat{\mathbf{u}}$  удовлетворяет условию на  $O_1$  — тогда для  $\tilde{\mathbf{u}}$  имеем всё вышеизложенное.

Заметим, что форма  $U_k$  в разложении (1.5) не возбуждается, если обобщённая сила  $\beta_k = 0$  — при этом не будет и резонанса. Так можно объяснить эффект динамического гашения колебаний — рассматривая перемещения на границе части конструкции как заданные (кинематические) воздействия на неё.

Классические построения внешне безупречны, однако при их реализации возникают осложнения. Неизбежное демпфирование связывает формы, система перестаёт быть набором невзаимодействующих осцилляторов.

Это сильно проявляется при высокой плотности собственных частот, когда соседние резонансные пики на амплитудно-частотной характеристике сливаются. При этом возрастает роль погрешностей: длины, углы, массы, жёсткости и др. в действительности являются случайными величинами, и многие собственные частоты теряют определённую.

*Вариационный подход* позволяет обойтись без определения  $\omega_k$  и  $U_k$ . Имеем вариационное уравнение

$$\int [(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi] dV + \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dO = 0, \quad \mathbf{u}|_{O_1} = \mathbf{u}_0. \quad (1.7)$$

приближённое решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} + \sum a_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}), \quad \delta \mathbf{u} = \sum \varphi_k \delta a_k, \\ \int [(\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \varphi_k - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \varphi_k] dV + \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \varphi_k dO &= 0 \quad - \quad (1.8) \end{aligned}$$

система обыкновенных дифференциальных уравнений для  $a_k(t)$ . В методе конечных элементов используются финитные координатные функции  $\varphi_k$ , и матрицы коэффициентов разрежены.

## 6.2 Волны в упругой среде

Рассмотрим свободное движение однородной изотропной среды. Уравнение в перемещениях

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.1)$$

не является волновым. Однако оно имеет решение в виде продольных волн:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = u(x, t) \mathbf{i}, \quad c_1^2 u'' = \ddot{u}, \quad c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho. \quad (2.2)$$

Существуют и поперечные волны – с иной скоростью  $c_2$ :

$$\mathbf{u} = u(x, t) \mathbf{j}, \quad c_2^2 u'' = \ddot{u}, \quad c_2^2 = \mu / \rho. \quad (2.3)$$

Однако, это весьма частные случаи.

Более общие положения: волновыми процессами являются объёмное расширение ( $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ ) – со скоростью  $c_1$  и поворот ( $\omega = \nabla \times \mathbf{u}/2$ ) – со скоростью  $c_2$ . Это следует из (2.1) при операциях  $(\nabla \cdot)$  и  $(\nabla \times)$ .

Но самое глубокое утверждение таково: *любое решение (2.1) представимо в виде*

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \quad c_1^2 \Delta\varphi = \ddot{\varphi}, \quad c_2^2 \Delta\boldsymbol{\psi} = \ddot{\boldsymbol{\psi}}. \quad (2.4)$$

Доказательство можно найти в [88]. Скалярный потенциал  $\varphi$  связан с объёмным расширением, а векторный потенциал  $\boldsymbol{\psi}$  — с вращением:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta\varphi = \theta, \quad \nabla \times \mathbf{u} = -\Delta\boldsymbol{\psi} = 2\boldsymbol{\omega}. \quad (2.5)$$

Общий случай есть суперпозиция волн расширения и вращения.

Этих представлений недостаточно при наличии границ. Однородные граничные условия ( $\mathbf{u} = 0$ , или  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ , или иные) не удовлетворяются в бегущих от некоего источника волнах. На границе возникают новые волны — отражённые. Суперпозиция падающих и отраженных волн может дать сложную интерференционную картину.

Вдоль границы распространяются *поверхностные волны*. Рассмотрим плоскую динамическую деформацию полупространства  $y \geq 0$ . Потенциалы таковы:  $\varphi = \varphi(x, y, t)$ ,  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x, y, t)\mathbf{e}_z$ . Для гармонических волн с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  имеем

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(y) \\ \Psi(y) \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)}, \quad \Phi'' = \nu_1^2 \Phi, \quad \Psi'' = \nu_2^2 \Psi, \quad \nu_\alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_\alpha^2}. \quad (2.6)$$

Отношение  $\omega/k = c$  называется фазовой скоростью. Предполагаем  $c < c_2 (< c_1)$  — тогда  $\nu_\alpha^2 > 0$ , и функции  $\Phi$  и  $\Psi$  затухают при  $y \rightarrow \infty$ :

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\nu_1 y}, \quad \Psi = \Psi_0 e^{-\nu_2 y}. \quad (2.7)$$

Константы  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$  пока произвольны.

Граница  $y = 0$  свободна от напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_y = 0 &\Rightarrow (c_1^2 - 2c_2^2) \Delta\varphi + 2c_2^2 \partial_y (\partial_y \varphi - \partial_x \boldsymbol{\psi}) = 0, \\ \tau_{xy} = 0 &\Rightarrow 2\partial_x \partial_y \varphi + (\partial_y^2 - \partial_x^2) \boldsymbol{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда следует линейная алгебраическая однородная система для  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$ ; приравняв нулю её определитель, получим

$$(2 - \eta)^2 = 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)}, \quad \eta \equiv c^2/c_2^2, \quad \theta \equiv c_2^2/c_1^2. \quad (2.9)$$

Это уравнение определяет скорость поверхностных волн Рэлея. При изменении коэффициента Пуассона от 0 до 0.5 отношение  $c/c_2$  находится в промежутке (0.874; 0.955) [86].

Независимость фазовой скорости от длины волны означает отсутствие дисперсии. В данном случае это следует и из соображений размерности: безразмерная величина  $\eta$  не может зависеть от размерного  $k$ .

Поверхностные волны являются причиной разрушений при землетрясениях вдали от эпицентра, поскольку затухают медленнее «объёмных» волн расширения и вращения.

### 6.3 Динамика стержней

Инерционными характеристиками стержня служат плотность  $\rho(s)$ , вектор эксцентриситета  $\underline{\epsilon}(s, t)$  и тензор инерции  $\underline{I}(s, t)$ . Выражение (2.8, гл. 2) определяет кинетическую энергию стержня на единицу «длины»  $s$ . В линейной модели Коссера уравнения динамики таковы

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = \rho(\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\underline{\theta}} \times \underline{\epsilon}), \quad \mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = \underline{I} \cdot \ddot{\underline{\theta}} + \rho \underline{\epsilon} \times \ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.1)$$

При этом  $\underline{\epsilon}$  и  $\underline{I}$  соответствуют начальному состоянию — как и тензоры в соотношениях упругости.

Для криволинейных стержней обычно достаточно предельно упрощённой классической модели:

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}', \quad \mathbf{M} = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\theta}', \quad \mathbf{u}' = \underline{\theta} \times \mathbf{r}'. \quad (3.2)$$

Но для прямого стержня при растяжении-сжатии и кручении это не годится.

Представления о *главных колебаниях*, собственных частотах, ортогональных формах и главных координатах справедливы и в линейной динамике стержней. При главных колебаниях для амплитуд имеем

$$\mathbf{Q}' + \omega^2 \rho(\mathbf{U} + \underline{\Theta} \times \underline{\epsilon}) = 0, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \omega^2(\underline{I} \cdot \underline{\Theta} + \rho \underline{\epsilon} \times \mathbf{U}) = 0 \quad (3.3)$$

выглядит как в статике. По теореме взаимности

$$\omega_i^2 \int [\rho(\mathbf{U}_i + \underline{\Theta}_i \times \underline{\epsilon}) \cdot \mathbf{U}_k + (\underline{I} \cdot \underline{\Theta}_i + \rho \underline{\epsilon} \times \mathbf{U}_i) \cdot \underline{\Theta}_k] ds \equiv A_{ik} = A_{ki}, \quad (3.4)$$

так что условие ортогональности с нормировкой таково

$$\int [\rho(\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_k + \underline{\epsilon} \cdot (\mathbf{U}_i \times \underline{\Theta}_k + \mathbf{U}_k \times \underline{\Theta}_i)) + \underline{\Theta}_i \cdot \underline{I} \cdot \underline{\Theta}_k] ds = \delta_{ik}. \quad (3.5)$$

Разложение по формам

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} = \sum_k \alpha_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \boldsymbol{\Theta}_k \end{pmatrix},$$

$$\alpha_k = \int [\rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{U}_k + \boldsymbol{\Theta}_k \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\theta} \cdot (\rho \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{U}_k + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\Theta}_k)] ds \quad (3.6)$$

позволяет легко рассчитать *вынужденные колебания*. Из теоремы взаимности при закреплённых или свободных ненагруженных концах следует

$$\ddot{\alpha}_k + \omega_k^2 \alpha_k = \int (\mathbf{q} \cdot \mathbf{U}_k + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Theta}_k) ds. \quad (3.7)$$

Выражение справа есть обобщённая сила для координаты  $\alpha_k$ .

Уравнения в компонентах могут быть полезны для кругового кольца или прямого стержня. Рассмотрим подробнее прямой стержень на оси  $x$ , считая оси  $x, y, z$  главными для тензоров  $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{I}}$  и принимая  $\underline{\mathbf{c}} = 0, \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ . Первые две пары уравнений описывают *растяжение-сжатие и кручение*:

$$Q'_x + q_x = \rho \ddot{u}_x, \quad Q_x = b_x u'_x; \quad M'_x + m_x = I_x \ddot{\theta}_x, \quad M_x = a_x \theta'_x. \quad (3.8)$$

Пары отличаются лишь обозначениями, имеем волновые уравнения со скоростями  $\sqrt{b_x/\rho}$  и  $\sqrt{a_x/I_x}$ .

Четверка уравнений описывает *изгиб* в плоскости  $x, y$ :

$$Q'_y + q_y = \rho \ddot{u}_y, \quad M'_z + Q_y + m_z = I_z \ddot{\theta}_z, \quad M_z = a_z \theta'_z, \quad Q_y = b_y (u'_y - \theta_z) \quad (3.9)$$

и почти также выглядят уравнения изгиба в плоскости  $x, z$ .

Исключая  $Q_y$  и  $M_z$ , из (3.9) получим (без индексов)

$$b(u' - \theta)' + q = \rho \ddot{u}, \quad a\theta'' + b(u' - \theta) + m = I\ddot{\theta}. \quad (3.10)$$

Разрешим это уравнение с операторными коэффициентами:

$$[ab\partial_x^4 + \rho I\partial_t^4 - (bI + a\rho)\partial_x^2\partial_t^2 + b\rho\partial_t^2] u = (-a\partial_x^2 + I\partial_t^2 + b) q - b\partial_x m. \quad (3.11)$$

Несравненно проще классическое уравнение балки Бернулли – Эйлера:

$$au^{IV} + \rho\ddot{u} = q. \quad (3.12)$$

«На подходах» к нему имеем

$$Q' + q = \rho\ddot{u}, \quad M' + Q = 0, \quad M = a\theta', \quad u' = \theta. \quad (3.13)$$

При малой толщине балки и медленном изменении решения по координате и времени (3.11) переходит в (3.12).

Уравнения Тимошенко (3.10) – (3.11) используются для моделирования локальных и быстрых процессов. Они относятся к гиперболическому типу и имеют семейства характеристик со скоростями  $\sqrt{a/I}$ ,  $\sqrt{b/\rho}$ . Уравнение Бернулли – Эйлера (3.12) – параболического типа.

Указанные отличительные свойства проявляются при рассмотрении *гармонических волн* без нагрузки. Для (3.12) имеем

$$u = u_0 e^{i(kx - \omega t)} : ak^4 = \rho\omega^2 \Rightarrow \frac{\omega}{k} \equiv c = \sqrt{\frac{a}{\rho}} k. \quad (3.14)$$

Таково *дисперсионное уравнение* классической балки; странно неограниченное возрастание фазовой скорости  $c$  на коротких волнах ( $k \rightarrow \infty$ ). Но ведь модель Бернулли точна лишь при  $k \rightarrow 0$ ...

Дисперсионное уравнение модели Тимошенко следует из (3.11):

$$\rho I c^4 - (bI + a\rho)c^2 + ab = b\rho \frac{c^2}{k^2}. \quad (3.15)$$

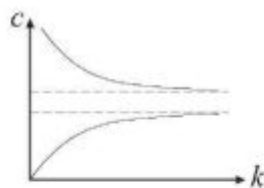


Рис. 21

В плоскости  $k, c$  имеем две ветви с асимптотами на уровнях  $\sqrt{a/I}$  и  $\sqrt{b/\rho}$ . Начальный участок первой ветви касается прямой (3.14), а для второй ветви  $c \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow 0$  (рис. 21). Заметим, что предельные ( $k \rightarrow \infty$ ) скорости изгибных волн вовсе не равны  $c_{1,2}$  для среды.

Для стержней в виде цилиндров из однородного изотропного материала возможен *точный анализ гармонических волн*. Полагая в (2.1)

$$u(x, y, z, t) = U(y, z) e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.16)$$

и учитывая однородные условия ( $\mathbf{n} \cdot \underline{\tau} = 0$ ) на боковой поверхности, получим задачу на собственные значения с дисперсионным уравнением  $f(k, \omega) = 0$ . Это легко сделать для полосы в двумерной постановке – с соотношениями (2.6) и (2.8). Для кругового цилиндра задачу решили Поггаммер и Кри в конце 19 в.

Однако результаты анализа с (3.16) во многом не соответствуют рис. 21. Дисперсионных ветвей не две, а бесконечно много, все имеют общую асимптоту при  $k \rightarrow \infty$  – скорость волн Рэлея, и лишь начальный участок первой ветви воспроизводится одномерной моделью. Но ценность

последних от этого не снижается — у них другие назначения и возможности.

Рассмотрим **пример**: изгибные колебания консольной балки с массой на свободном конце. Граничные условия (для амплитуд):

$$U(0) = 0, \quad \Theta(0) = 0, \quad b[U'(l) - \Theta(l)] = m\omega^2 U(l), \quad \Theta'(l) = 0 \quad (3.17)$$

в модели Тимошенко и

$$U(0) = 0, \quad U'(0) = 0, \quad -aU'''(l) = m\omega^2 U(l), \quad U''(l) = 0 \quad (3.18)$$

в модели Бернулли — Эйлера. Для последней

$$aU^{IV} = \omega^2 \rho U, \quad U = \sum_{i=1}^4 c_i K_i(\lambda x), \quad \lambda \equiv (\omega^2 \rho / a)^{1/4},$$

$$2K_1(x) = \operatorname{ch} x + \cos x, \quad 2K_2(x) = \operatorname{sh} x + \sin x,$$

$$2K_3(x) = \operatorname{ch} x - \cos x, \quad 2K_4(x) = \operatorname{sh} x - \sin x; \quad K'_{i+1}(x) = K_i(x).$$

Функции Крылова  $K_i$  упрощают расчёт, в случае (3.18) сразу находим  $c_1 = c_2 = 0$ .

Самый простой случай — балка на двух шарнирных опорах:

$$U(0) = U(l) = 0, \quad U''(0) = U''(l) = 0, \quad U = C \sin \lambda x,$$

$$\lambda l = n\pi, \quad \omega = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.19)$$

Обратим внимание на разреженность спектра. Но не забудем, что при больших  $n$  связь с реальностью теряется.

Одномерные модели высокой точности с хорошим воспроизведением дисперсионных кривых, частот и форм можно построить вариационным методом с «богатой» аппроксимацией по сечению. Уточнённая теория продольных колебаний в двумерной постановке получится при аппроксимации

$$u_x = u(x, t), \quad u_y = v(x, t)y$$

(модель Геррманна-Миндлина). Но такие построения если и приближают нас к действительности, то не прямым путём.

## 6.4 Метод возмущений для линейных систем

**Влияние малых возмущений на главные колебания.** Начнём с дискретной системы:

$$[-\omega^2(A_0 + \lambda A_1) + C_0 + \lambda C_1] U = 0, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (4.1)$$



Решение имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\lambda\omega_0\omega_1 + \dots, \quad U = U_0 + \lambda U_1 + \dots, \quad (4.2)$$

и на первом шаге получаем частоты и формы невозмущённой системы,  $[-\omega_0^2 A_0 + C_0] = 0$ . Система с вырожденной матрицей на втором шаге

$$(-\omega_0^2 A_0 + C_0) U_1 = (2\omega_0\omega_1 A_0 + \omega_0^2 A_1 - C_1) U_0$$

разрешима лишь при ортогональности правой части решениям однородной сопряжённой системы:

$$\begin{aligned} U_0^T (2\omega_0\omega_1 A_0 + \omega_0^2 A_1 - C_1) U_0 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\omega_0\omega_1 &= U_0^T (C_1 - \omega_0^2 A_1) U_0 / U_0^T A_0 U_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

(знаменатель равен единице при соответствующей нормировке). Из (4.3) следует теорема Рэлея: дополнительная жёсткость увеличивает частоты, а дополнительная инерция снижает их.

Для трёхмерных тел имеем, в сущности, то же самое:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [({}^4\underline{C}_0 + \lambda {}^4\underline{C}_1) \cdot \nabla U] + \omega^2 (\rho_0 + \lambda \rho_1) U &= 0, \\ U|_{O_1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot ({}^4\underline{C}_0 + \lambda {}^4\underline{C}_1) \cdot \nabla U|_{O_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Разложения (4.2) сохраняются, и первый шаг очевиден. На втором шаге используем связанное с теоремой взаимности условие разрешимости. Теорема применяется к телу без возмущений; в первом состоянии действует лишь объёмная нагрузка  $\omega_0^2 \rho_0 U_0$ . Во втором состоянии имеем поверхностную нагрузку  $(-\mathbf{n} \cdot {}^4\underline{C}_1 \cdot \nabla U_0)$  и объёмную

$$\nabla \cdot ({}^4\underline{C}_1 \cdot \nabla U_0) + \omega_0^2 (\rho_0 U_1 + \rho_1 U_0) + 2\omega_0\omega_1 \rho_0 U_0. \quad (4.5)$$

Равенство работ даёт выражение поправки

$$2\omega_0\omega_1 = \int (\nabla U_0 \cdot {}^4\underline{C}_1 \cdot \nabla U_0 - \omega_0^2 \rho_1 U_0^2) dV \Big/ \int \rho_0 U_0^2 dV \quad (4.6)$$

аналог (4.3).

Для стержней такая методика не менее эффективна. Однако теорема взаимности работ потребует обобщения. Если

$$Q' + q = 0, \quad M' + \mathbf{r}' \times Q + \mathbf{m} = 0, \quad \theta' = \underline{A} M + \alpha, \quad \mathbf{u}' = \theta \times \mathbf{r}' + \beta \quad (4.7)$$

и на концах  $\mathbf{u} = 0$ ,  $\boldsymbol{\theta} = 0$ , то

$$\int (q_1 \cdot \mathbf{u}_2 + m_1 \cdot \boldsymbol{\theta}_2 + \alpha_1 \cdot M_2 + \beta_1 \cdot Q_2) ds \equiv A_{12} = A_{21}. \quad (4.8)$$

При учёте растяжения, сдвига и инерции вращения имеем

$$\begin{aligned} Q' + \omega^2 \rho U &= 0, & M' + \mathbf{r}' \times Q + \lambda \omega^2 \underline{I} \cdot \boldsymbol{\Theta} &= 0, \\ \boldsymbol{\Theta}' &= \underline{A} \cdot M, & \mathbf{u}' &= \boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{r}' + \lambda \underline{B} \cdot Q. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Решение ищем в виде (4.2), на первом шаге находим спектр классической модели. На втором

$$\begin{aligned} Q'_1 + \rho (\omega_0^2 U_1 + 2\omega_0 \omega_1 U_0) &= 0, & M'_1 + \mathbf{r}' \times Q_1 + \omega_0^2 \underline{I} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 &= 0, \\ \boldsymbol{\Theta}'_1 &= \underline{A} \cdot M_1, & \mathbf{u}'_1 &= \boldsymbol{\Theta}_1 \times \mathbf{r}' + \underline{B} \cdot Q_0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Согласно (4.8)

$$\begin{aligned} &\int \omega_0^2 \rho U_0 \cdot U_1 ds = \\ &= \int [\rho (\omega_0^2 U_1 + 2\omega_0 \omega_1 U_0) \cdot U_0 + \omega_0^2 \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \underline{I} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 + Q_0 \cdot \underline{B} \cdot Q_0] ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\omega_0 \omega_1 = - \int (Q_0 \cdot \underline{B} \cdot Q_0 + \omega_0^2 \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \underline{I} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0) ds \Big/ \int \rho U_0^2 ds. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Подынтегральная функция положительна – частоты снижаются.

**Вынужденные резонансные колебания.** В этом случае обязательен учёт демпфирования – иначе амплитуды не будут ограничены.

Рассмотрим уравнение для комплексных амплитуд дискретной системы

$$(-\omega^2 A + \lambda i \omega B + C)u = \lambda F, \quad (4.12)$$

причём  $|-\omega^2 A + C| = 0$  – резонанс. Решение строится просто:

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \dots; \quad (-\omega^2 A + C)u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = \alpha U \quad (4.13)$$

соответствующая частоте форма, но  $\alpha$  пока произвольно. На втором шаге

$$(-\omega^2 A + C)u_1 = F - i\omega B u_0,$$

и по условию разрешимости находим амплитуду

$$\alpha = U^T F / i\omega U^T B U. \quad (4.14)$$

Получили подтверждение трёх известных правил: форма резонансных колебаний — собственная, сдвиг фазы равен  $\pi/2$ , а работа внешних сил ( $F'$ ) равна рассеиваемой энергии.

Эта методика переносится на континуальные системы. Для классического стержня (с закреплёнными концами) при линейном внешнем трении имеем следующие уравнения для комплексных амплитуд

$$Q' + \lambda q + (\omega^2 \rho - i\omega b)u = 0, \quad M' = Q \times r', \quad M = \underline{a} \cdot \theta', \quad u' = \theta \times r'. \quad (4.15)$$

Действуя как в (4.13), находим  $u_0 = \alpha U$ ,  $\theta_0 = \alpha \Theta$ . На втором шаге

$$Q'_1 + q + \omega^2 \rho u_1 - i\omega b u_0 = 0, \quad M'_1 = Q_1 \times r', \dots \quad (4.16)$$

По теореме взаимности с величинами первого шага

$$\begin{aligned} \int \omega^2 \rho u_0 \cdot u_1 ds &= \int (q + \omega^2 \rho u_1 - i\omega b u_0) \cdot u_0 ds \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= \int q \cdot U ds / i\omega \int b U^2 ds - \end{aligned} \quad (4.17)$$

похоже на (4.14).

Все представленные асимптотические решения уязвимы в том, что неизвестна их реальная точность (т. е. насколько мало должно быть  $\lambda$ ). По этот вопрос остаётся без ответа и в любой линеаризованной модели.

## 6.5 Нелинейные колебания

В этом случае амплитуды не считаются бесконечно малыми и линеаризации уравнений нет. Не действует правило суперпозиции, свободные и вынужденные колебания не складываются. Частота свободных колебаний зависит от амплитуды. Одно и то же воздействие может вызвать разные вынужденные режимы. Возможны периодические невынужденные колебания с демпфированием (автоколебания).

Эти закономерности можно установить асимптотическим методом Пуанкаре (п. 1.6 и п. 2.8). Рассмотрим простейшую континуальную систему — балку:

$$au^{IV} + \lambda \Phi + \rho \ddot{u} = \lambda p(x) \sin \omega t, \quad (5.1)$$

где  $\Phi$  — диссипативные или нелинейно упругие силы. Правая часть написана для резонансных колебаний. При  $p = 0$  и отсутствии диссипации имеем

свободные колебания с неопределённой частотой – функцией амплитуды. Если же диссипативные силы присутствуют, то при  $p = 0$  возможны автоколебания с определённой частотой и амплитудой. Простейший вариант граничных условий к (5.1) – шарнирное опирание:  $u = 0$ ,  $u''' = 0$  при  $x = 0, l$ .

**Автоколебания.** В (5.1)  $p = 0$ ,

$$u = u_0(x, \tau) + \lambda u_1(x, \tau) + \dots, \quad \tau = t(1 + \lambda \gamma_1 + \dots), \quad (5.2)$$

где  $\gamma_1, \dots$  – неизвестные постоянные, определяющие поправку к частоте. Переписав (5.1) как

$$au^{IV} + \lambda \Phi + \rho(1 + 2\lambda \gamma_1 + \dots) \partial_\tau^2 u = 0, \quad (5.3)$$

на первом шаге получаем суперпозицию главных колебаний с частотами  $\omega_k = (k\pi/l)^2 \sqrt{a/\rho}$  и формами

$$U_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \left( \int_0^l U_k U_n dx = \delta_{kn} \right).$$

Ограничимся первой формой:

$$u_0 = A \cos \omega_1 \tau U_1(x), \quad (5.4)$$

амплитуда  $A$  пока произвольна.

На втором шаге имеем задачу о вынужденных колебаниях:

$$au_1^{IV} + \rho \partial_\tau^2 u_1 = -\Phi_0 - 2\rho \gamma_1 \partial_\tau^2 u_0 \equiv \rho \beta(x, \tau). \quad (5.5)$$

Её решение

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\tau) U_k(x), \quad \partial_\tau^2 \alpha_k + \omega_k^2 \alpha_k = \int_0^l \beta U_k dx \equiv \beta_k(\tau) \quad (5.6)$$

должно быть периодическим – резонанса на первой форме нет:

$$\int_0^{2\pi/\omega_1} \beta_1(\tau) \begin{pmatrix} \cos \omega_1 \tau \\ \sin \omega_1 \tau \end{pmatrix} d\tau = 0. \quad (5.7)$$

Это система двух уравнений для амплитуды  $A$  и сдвига частоты  $\gamma_1$ .

**Резонансные вынужденные колебания.** Приведем лишь математические выкладки:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(x, t) + \lambda u_1(x, t) + \dots, \quad u_0 = A \sin(\omega t - \alpha) U_1(x), \\
 \alpha u_1^{IV} + \rho \ddot{u}_1 &= p(x) \sin \omega t - \Phi_0 \equiv \rho \beta(x, t), \quad u_1 = \sum \alpha_k(t) U_k(x), \\
 \ddot{\alpha}_k + \omega_k^2 \alpha_k &= \beta_k = \rho^{-1} (p_k \sin \omega t - \Phi_{0k}), \\
 p_1 - \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi_{0k} \sin \omega t \, dt &= 0, \quad \int_0^{2\pi/\omega} \Phi_{0k} \cos \omega t \, dt = 0 \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

система уравнений для  $A$  и  $\alpha$ . Решение нулевое, если нагрузка  $p$  ортогональна первой форме ( $p_1 = 0$ ).

## 6.6 Критические скорости роторов

Этот вопрос очень важен для проектирования и эксплуатации машин в энергетике, авиации, судостроении и др. Явление критической скорости вращения ротора, на которой его жёсткость как бы исчезает, наблюдалось в реальности и исследовалось теоретически.

На рис. 22 показан массивный упругий ротор — произвольной формы. Часть границы  $O_1$  закреплена на твёрдой платформе и вращается вокруг оси  $z$  с заданной угловой скоростью  $\Omega$ . Остальная часть  $O_2$  свободна. Нагрузкой являются объёмные силы  $f$ .

Связанная с основанием  $O_1$  система отчёта неинерциальна, в ней действуют силы инерции переносного движения и Кориолиса (п. 2.3). Поэтому объёмной силой в (1.1, гл. 4) является

$$f = -\rho [\ddot{u} + \Omega^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{R}) + 2\Omega \mathbf{k} \times \dot{u}] \quad (6.1)$$

( $\mathbf{k}$  — орг оси  $z$ ). Радиус-вектор  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ , двойное векторное произведение равно  $\mathbf{k}z - \mathbf{R} = -\mathbf{R}_\perp$  — имеем постановку

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho (\Omega^2 \mathbf{u}_\perp - 2\Omega \mathbf{k} \times \dot{u} - \ddot{u}) &= -\Omega^2 \rho \mathbf{r}_\perp \equiv -\mathbf{f}_0, \\
 \underline{\underline{\tau}} &= {}^4\mathbf{C} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla \mathbf{u}^S, \quad \mathbf{u}|_{O_1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}}|_{O_2} = 0. \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

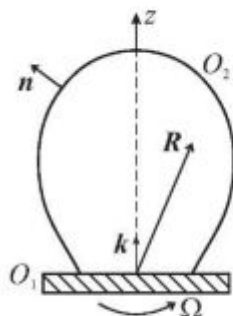


Рис. 22

Справа в уравнении баланса — центробежные силы ( $\mathbf{f}_0$ ) недеформированного ротора, а слева — обусловленные деформацией реакции: упругие, центробежные, кориолисовы и инерционные ( $\dot{\mathbf{u}}$ ). Центробежные реакции содержат некую отрицательную жёсткость, пропорциональную  $\Omega^2$ . На критической скорости она нейтрализует положительную жёсткость упругой конструкции.

Эти простые представления усложняются кориолисовыми и инерционными силами, а также демпфированием (его пока нет в модели). Роль демпфирования важна, оно может вызвать неустойчивость [61]. Но в номинальном, желаемом режиме  $\dot{\mathbf{u}} = 0$  — имеем статику.

*Однородная задача статики*

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} + \Omega^2 \rho \mathbf{u}_\perp = 0, \quad \mathbf{u}|_{O_1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}|_{O_2} = 0 \quad (6.3)$$

имеет нетривиальные решения  $U_i(\mathbf{r})$  лишь при некоторых  $\Omega_i$  — критических скоростях. Неоднородная же задача с нагрузкой  $\mathbf{f}_0$  разрешима (при  $\Omega = \Omega_i$ ) только если

$$\int \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{U}_i dV = 0, \quad (6.4)$$

что следует из теоремы взаимности работ. Полагая  $\mathbf{f}_0 = \rho \mathbf{r}_\perp$ , получим условие сбалансированности ротора (для  $\Omega_i$ ).

При невыполнении (6.4) равновесие невозможно, необходимо динамическое рассмотрение с учётом инерционных, кориолисовых и диссипативных сил. Но этот учёт нужен и при исследовании устойчивости равновесия на любой скорости. Можно ожидать устойчивости до первой критической скорости ( $\Omega < \Omega_1$ ).

Проверим эти соображения на предельно упрощённой модели в виде массы с пружиной и демпфером:

$$m\ddot{\mathbf{u}} = -c\mathbf{u} - b\dot{\mathbf{u}} + m(\Omega^2\mathbf{u} - 2\Omega\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{u}}), \quad (6.5)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp = u_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ . Вводя комплексную комбинацию  $u = u_1 + iu_2$ , получим

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= (\Omega^2 - p^2)u - 2(n + i\Omega)\dot{u}, \quad p^2 \equiv c/m, \quad 2n = b/m; \\ u &= e^{\Lambda t} : \quad \Lambda^2 + 2(n + i\Omega)\Lambda + p^2 - \Omega^2 = 0, \\ \Lambda_{1,2} &= -n(1 \pm \Omega/p) - i(\Omega \pm p) + O(n^2) \quad (n \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (6.6)$$

По вещественной части  $\Lambda$  видно, что при  $\Omega < p$  — асимптотическая устойчивость, а при  $\Omega > p$  — неустойчивость.

В действительности картина намного сложнее — от влияния внешнего трения. На опыте установлено, что устойчивость возможна и при  $\Omega > \Omega_1$ .

Задача на собственные значения для критических скоростей (6.3) отличается от задачи для частот ( $\omega_i$ ) и форм колебаний лишь тем, что в нагрузке нет  $u_z$ . Инерция от этого снижается, и по теореме Рэлея

$$\Omega_i \geq \omega_i. \quad (6.7)$$

Для выяснения глубины этого неравенства С. Г. Орлов рассмотрел численные решения для ротора из двух коаксиальных цилиндров: радиус равен  $R_1$  при  $z \in [0, l_1]$  и  $R_2$  при  $z \in [l_1, l_1 + l_2]$ . Значениям параметров  $R_1 = 0.05$  м,  $R_2 = l_1 = l_2 = 1$  м,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup> соответствует

$$\begin{aligned} \Omega_1 = 5.89 (c^{-1}), \quad \Omega_2 = 80.2, \quad \Omega_3 = 2718; \\ \omega_1 = 5.37, \quad \omega_2 = 44.1, \quad \omega_3 = 2707. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Различие  $\Omega_2$  и  $\omega_2$  обусловлено сравнительно большими  $u_z$  в этих решениях.

Обратимся далее к модели, где часть  $V_1$  объёма ротора — жёсткая, а остальная часть  $V_2$  — упругая и безынерционная. В объёме  $V_1$

$$\nabla \mathbf{u}^S = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}_C + \theta \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_C, \quad (6.9)$$

точка  $C$  есть центр массы ( $V_1$ ). Имеем интегралы

$$\int \mathbf{x} dm = 0, \quad dm \equiv \rho dV, \quad \int dm = m, \quad \int \mathbf{x} \mathbf{x} dm \equiv \underline{\underline{\mathbf{J}}}; \quad (6.10)$$

обычный тензор инерции  $\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{J}}}$ . Массовая сила, её главный вектор и момент таковы

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' &= \Omega^2 \mathbf{u}_\perp - 2\Omega \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{F} &= \int \mathbf{f}' dm = m (\Omega^2 \mathbf{u}_{C\perp} - 2\Omega \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{u}}_C - \ddot{\mathbf{u}}_C), \\ \mathbf{M} &= \int \mathbf{x} \times \mathbf{f}' dm = \Omega^2 (\mathbf{k} J_\perp \theta_z + J_z \theta_\perp) + 2\Omega J_z \dot{\theta} \times \mathbf{k} - \underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \ddot{\theta} \quad - \end{aligned} \quad (6.11)$$

если  $\underline{\underline{\mathbf{J}}} = \underline{\underline{\mathbf{J}}}_\perp + J_z \mathbf{k} \mathbf{k}$ .

Реакции упругой части  $V_2$  — линейные функции  $\mathbf{u}_C$  и  $\theta$ . Связывая их с  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{M}$ , получим систему дифференциальных уравнений для  $\mathbf{u}_C(t)$ ,  $\theta(t)$ . В

«статике» это будет линейная алгебраическая однородная система; приравняв нулю определитель, получим уравнение для критических скоростей.

В примере (6.8) часть  $V_1$  — это цилиндр:  $\underline{J}_\perp = \underline{E}_\perp mR^2/4$ ,  $J_z = mh^2/3$  ( $R = R_2 = 2h$ ). Упругая часть  $V_2$  — это балка. Обозначив  $(\dots)_0$  перемещение, поворот, силу и момент на конце балки ( $z = l = l_1$ ), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_C &= \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\theta} \times h\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \mathbf{Q}_0 = \mathbf{F}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{M} + h\mathbf{k} \times \mathbf{F}, \\ \boldsymbol{\theta} &= \frac{l^2}{2a} \mathbf{k} \times \mathbf{Q} + \frac{b}{a} \mathbf{M}_{0\perp} + \frac{l}{a_z} M_{0z} \mathbf{k}, \\ \mathbf{u}_0 &= \left( \frac{l^3}{3a} + \frac{l}{b} \right) \mathbf{Q}_\perp + \frac{l^2}{2a} \mathbf{M}_0 \times \mathbf{k} + \frac{l}{b_z} Q_z \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где  $a$ ,  $a_z$ ,  $b$ ,  $b_z$  — жёсткости на изгиб, кручение, сдвиг и растяжение. Вычисления дают те же значения  $\Omega_{1,2}$ , что и в (6.8). Совпадение обнаруживается и в расчёте частот колебаний  $\omega_{1,2}$ .

Разумеется, в модели с жёсткой и безынерционной частями нет  $\Omega_3$  и  $\omega_3$ .

## Библиография

Общие положения теории колебаний изложены во многих книгах: В. Л. Бидермана [7], Я. Г. Пановко [73], Ф. Р. Гаитмахера [20], С. П. Тимошенко [98] и других. О колебаниях оболочек написано в [22].

Волновые процессы рассматриваются у Л. И. Слепяна [88], В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [26]. Нелинейные волны — в книгах Дж. Уизема [104], Ю. К. Энгельбрехта и У. К. Нигула [116].

Представления о критических скоростях роторов изложены у А. Тондла [101].



# Глава 7

## Устойчивость равновесия

### 7.1 Основы теории устойчивости

Явления потери устойчивости разнообразны и часто очень опасны. Например, обдуваемая ветром постоянной интенсивности конструкция может непонятным образом раскачаться до катастрофических деформаций. Расчёты критических состояний — едва ли не самые важные.

Очень эффективен подход А. М. Ляпунова: процесс устойчив, если при достаточно малых возмущениях начальных условий отклонения остаются малыми. Для линейной системы корни характеристического уравнения не должны выходить в правую полуплоскость:

$$\begin{aligned} A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0, \quad q = \sum \alpha_i V_i e^{\lambda_i t}; \\ V_i, \lambda_i : (A\lambda^2 + B\lambda + C)V = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_i \leq 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Заметим, что в линейной системе все процессы устойчивы или неустойчивы вместе — поэтому говорят об устойчивости системы. Но при наличии нелинейности рассматривают процессы: одни устойчивы, а другие — нет. Линейные постановки описывают малые отклонения и получаются линеаризацией — варьированием.

Достаточно общей является следующая модель

$$A\ddot{q} = Q(q, p), \quad (1.2)$$

где  $p$  — параметр нагрузки,  $A$  — симметричная и положительная матрица инерции. В статике  $Q = 0 \Rightarrow q = \overset{\circ}{q}(p)$ , а для малых отклонений ( $\tilde{q} = q - \overset{\circ}{q}$ )

$$C\tilde{q} = \tilde{p} \frac{\partial Q}{\partial p}, \quad C \equiv -\frac{\partial Q}{\partial q}. \quad (1.3)$$

Положение равновесия перестает быть изолированным при  $\det C = 0$  — тогда однородные линейризованные уравнения статики приобретают нетривиальное решение. В этом суть предложенного Эйлером статического подхода к определению критических нагрузок ( $p_*$ ). Этот подход вполне согласуется с динамическими представлениями для консервативных систем, в которых матрица  $C = \partial^2 \Pi / \partial q^2$  симметрична. При этом в задаче

$$(A\lambda^2 + C)U = 0 \quad (1.4)$$

$\lambda_i^2$  вещественны; потеря устойчивости наступает при  $\lambda = 0$ , что означает статику.

Присущее реальным системам трение превращает устойчивость в асимптотическую ( $\text{Re } \lambda_i < 0$ ), причём не только по Ляпунову, но и при постоянно действующих возмущениях [61]. Применение специального «метода несовершенств» для расчёта критических нагрузок не представляется необходимым.

Динамический подход (1.1) обязателен в системах с циркуляционными силами, т. е. при  $C^A = (C - C^T)/2 \neq 0$ . Роль демпфирования здесь усложняется — она может быть дестабилизирующей. Подробнее об этом — в п. 7.3.

Напомним, что система консервативна, если связи стационарны и все силы имеют независимый от времени потенциал. Для консервативности упругой системы такой потенциал должен быть у внешних нагрузок — как у сил тяготения или электростатических. В задачах устойчивости необходимо точное описание изменения нагрузок при деформации.

## 7.2 Устойчивость стержней

Потере устойчивости более подвержены тонкие тела — стержни, пластины и оболочки. Задачи о стержнях проще, ряд точных решений был получен ещё Эйлером. Уравнения устойчивости стержней выводятся из точных нелинейных уравнений п. 5.2 путём варьирования. Символ  $(\tilde{\cdot})$  означает вариацию величины: нагрузки  $\tilde{q}$ , радиус-вектора  $\tilde{r} = \mathbf{u}$ , тензора поворота  $\tilde{\underline{P}} = \boldsymbol{\theta} \times \underline{P}$  и т. д.

Из (2.3, гл. 5) имеем

$$\tilde{Q}' + \tilde{q} = 0, \quad \tilde{M}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}' \times \tilde{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{m}} = 0. \quad (2.1)$$

Немного сложнее варьировать соотношения упругости (2.12, гл. 5). Ограничимся случаем  $\underline{C} = 0$  и учтём (2.10, гл. 5):

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \tilde{\underline{a}} \cdot \underline{\kappa} + \underline{a} \cdot \tilde{\underline{\kappa}}, \quad \tilde{\underline{a}} = \underline{\theta} \times \underline{a} - \underline{a} \times \underline{\theta}, \quad \tilde{\underline{\kappa}} = \underline{\theta}' + \underline{\theta} \times \underline{\kappa} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{M} = \underline{\theta} \times M + \underline{a} \cdot \underline{\theta}'; \quad \tilde{Q} = \underline{\theta} \times Q + \underline{b} \cdot \underline{\gamma}, \quad \underline{\gamma} \equiv \underline{u}' - \underline{\theta} \times \underline{r}'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При варьировании из ненапряжённого состояния покоя (2.1), (2.2) переходят в уравнения линейной теории (п. 5.3). Коэффициенты уравнений вообще определяются состоянием перед варьированием.

Соотношения (2.2) упрощаются в классической модели (без растяжения и сдвига) — вместо  $\tilde{Q}$  пишут  $\underline{\gamma} = 0$ . Большинство задач решено именно для этого случая. Рассмотрим примеры.

**Прямой консольный стержень с «мёртвой» продольной силой на свободном конце** (рис. 16, п. 5.2). Перед варьированием имеем недеформированное напряжённое состояние:  $\underline{r}' = \underline{k}$ ,  $Q = -F\underline{k}$ ,  $M = 0$ ,  $\underline{a} = a_1 \underline{i}\underline{i} + a_2 \underline{j}\underline{j} + a_3 \underline{k}\underline{k}$ . На свободном конце  $\tilde{Q} = 0$ ,  $\tilde{M} = 0$ . Согласно (2.1), (2.2),

$$\tilde{Q} = \text{const} = 0, \quad \tilde{M}' + (\underline{\theta} \times \underline{k}) \times Q = 0 \Rightarrow \tilde{M}' = -F\underline{\theta}_\perp = \underline{a} \cdot \underline{\theta}''. \quad (2.3)$$

Приходим к задаче на собственные значения:

$$a_1 \underline{\theta}_x'' + F\underline{\theta}_x = 0, \quad \underline{\theta}_x(0) = 0, \quad \underline{\theta}'_x(l) = 0. \quad (2.4)$$

Критической является та минимальная нагрузка, при которой существует нетривиальное решение —

$$F_* = \frac{\pi^2 a_1}{4l^2}. \quad (2.5)$$

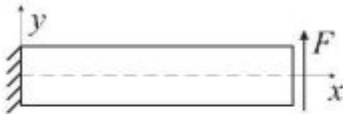


Рис. 23

**Опрокидывание балки** (рис. 23).

Сечением балки является вытянутый прямоугольник — жёсткость на изгиб  $a_3 \rightarrow \infty$ , состояние перед варьированием  $M = \underline{k}(l-x)F$ . На свободном конце  $\tilde{Q} = 0$ ,  $\tilde{M} = 0$ . В (2.1) имеем  $\tilde{Q} = 0$ ,  $\tilde{M}' = -F\underline{\theta}_y \underline{i}$ . В компонентах далее получим

$$\begin{aligned} \tilde{M}_x &= \underline{\theta}_y M_z + a_1 \underline{\theta}'_x, \quad \tilde{M}_y = -\underline{\theta}_x M_z + a_2 \underline{\theta}'_y = 0, \\ a_1 a_2 \underline{\theta}_x'' + F^2 (l-x)^2 \underline{\theta}_x &= 0, \quad \underline{\theta}_x(0) = 0, \quad \underline{\theta}'_x(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение уравнения выражается через функции Бесселя [32]; критическая комбинация параметров

$$\frac{Fl^2}{\sqrt{a_1 a_2}} = 4.012 \quad (2.7)$$

(поскольку первый корень функции  $J_{-1/4}$  равен 2.006).

**Кольцо с внешним давлением.** Геометрия показана на рис. 17, п. 5.3, направления  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_z$  являются главными для тензора  $\underline{\underline{a}}$ , нагрузка  $\mathbf{q} = p\mathbf{n}$  сохраняет величину ( $p$ ), но поворачивается вместе с  $\mathbf{n}$ :  $\tilde{\mathbf{q}} = p\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}$ . Можно показать, что такая нагрузка консервативна при деформации в плоскости кольца. Перед варьированием имеем недеформированное кольцо радиусом  $k^{-1}$ ,  $\mathbf{Q} = -pk^{-1}\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{M} = 0$ . Уравнения в компонентах похожи на (3.14, п. 5.3):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}'_t - k\tilde{Q}'_n - p\theta = 0, \quad \tilde{Q}'_n + k\tilde{Q}'_t = 0, \quad \tilde{M}' + \tilde{Q}'_n + pk^{-1}\theta = 0, \\ \tilde{M} = a_3\theta', \quad u'_t - ku_n = 0, \quad u'_n + ku_t = \theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Решение должно иметь период  $2\pi k^{-1}$ , поэтому в экспоненциальных решениях  $(\tilde{Q}_t, \dots) = (\tilde{Q}_t, \dots)e^{\lambda s}$  будет  $\lambda = ikN$  с целым  $N$ . Дифференциальные уравнения (2.8) превратятся в алгебраические для  $\tilde{Q}_t, \dots$ . Равенство нулю определителя даст критическую величину нагрузки как функцию  $N$ . Минимум при  $N = 2$

$$p_* = 3ak^3. \quad (2.9)$$

В литературе можно найти множество подобных решений, хотя уравнения (2.1), (2.2) остаются малоизвестными.

«Неклассические» решения с растяжением и сдвигом строятся несколько сложнее. Используя (2.17, гл. 5), получим обобщение (2.5):

$$F + F^2 (b_2^{-1} - b_3^{-1}) = \frac{\pi^2 a_1}{4l^2}. \quad (2.10)$$

Анализ этого квадратного уравнения показывает, во-первых, снижение критической нагрузки от сдвига. Во-вторых, возможна неустойчивость при растяжении. В третьих, критического состояния при сжатии может не быть. Эти выводы формально безупречны, но квадратичное выражение энергии (в их основе) не годится при больших деформациях.

### 7.3 Неконсервативные задачи

В постановке (1.1) матрица позиционных сил  $C$  несимметрична. Связанные с антисимметричной частью  $C^A$  циркуляционные силы возникают от источника энергии: двигателя, воздушного потока и др. При потере устойчивости энергия расходуется на катастрофически растущие колебания (флаттер).

В задаче (1.4) значения  $\lambda^2$  теперь не обязаны быть вещественными, критическое состояние не связано с  $\lambda = 0$  — статический подход не работает. Корни характеристического уравнения образуют четверки:  $\lambda$ ,  $-\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $-\bar{\lambda}$ ; поэтому устойчивость в постановке (1.4) будет лишь при чисто мнимых  $\lambda = i\omega$ . Без нагрузки ( $p = 0$ ) имеем частоты главных колебаний  $\omega_i$ ; с ростом  $p$  точки  $\lambda_i$  движутся по мнимой оси до слияния в критическом состоянии и последующего расхождения вправо и влево. Критическим ( $p_*$ ) является минимальное (по модулю) решение системы

$$f(\omega, p) \equiv |C - \omega^2 A| = 0, \quad \partial_\omega f = 0. \quad (3.1)$$

Не только необходимость динамического подхода усложняет неконсервативные задачи. Становится обязательным учёт трения — оно может вызвать неустойчивость. Установлен *парадокс Циглера*: критические параметры без трения могут отличаться от таковых при бесконечно малом трении [75, 111]. Но силы трения известны несравненно менее упругих, так что достоверность расчётного определения  $p_*$  снижается.

И ещё одну сложность следует отметить — в случае *кратных корней*, когда точки  $\lambda_i$  слиты уже при  $p = 0$ . Нет «запаса устойчивости» — расстояния между  $\lambda_i$ , которое должно быть пройдено до потери устойчивости. . . Пример — прямой консольный стержень (рис. 16, п. 5.2) с равными жёсткостями на изгиб (но для неконсервативности нужна другая нагрузка — например,  $Q = -Fr'$  при  $s = l$ ).

Иллюстрацией могут служить «*Парадоксы Николаю*» [75] в задаче о консольном стержне с крутящим моментом и продольной силой на конце. Здесь статический подход не работает, а в динамике обнаруживается неустойчивость при сколь угодно малой нагрузке.

Роль консервативности нагрузки рассмотрим на *примере изгиба балки с «высоким сечением»* (рис. 23). В отличие от решения (2.6), на конце  $x = l$  приложен момент. Допустим сначала, что

$$M(l) = Hk = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \tilde{M}(l) = 0 \quad (3.2)$$

(«мёртвый» момент). Имеем  $Q = 0$ ,  $\tilde{Q} = 0$ ,  $M = Hk$ ,

$$\tilde{M}' = 0 \Rightarrow \tilde{M} = \theta \times M + \underline{a} \cdot \theta' = 0; \quad \theta(0) = 0. \quad (3.3)$$

Для функции  $\theta(x)$  имеем однородную задачу Коши с тривиальным решением при любой нагрузке  $H$ . Статический подход здесь недопустим из-за неконсервативности постоянного момента.

Консервативен момент от двух «мёртвых» сил:

$$M(l) = H\mathbf{i} \times \mathbf{e}_2 \Rightarrow \tilde{M}(l) = H\mathbf{i} \times (\theta \times \mathbf{j}) = -H\theta_x \mathbf{j}. \quad (3.4)$$

Перед потерей устойчивости  $M = Hk$ ,  $Q = 0$ . Изменения в (3.3):

$$a_x \theta'_x + H\theta_y = 0, \quad a_y \theta'_y - H\theta_x = -H\theta_x(l); \quad H_* = \frac{\pi}{2l} \sqrt{a_x a_y} \quad (3.5)$$

такова критическая нагрузка.

## 7.4 Уравнения в вариациях для нелинейных оболочек

Используем соотношения с тензорами Пиола из п. 5.8 и действуем как в п. 3.10. Для краткости вариации будем обозначать точкой:  $\tilde{a} \equiv \dot{a}$ . Начнём с (8.14, гл. 5):

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\underline{T}} + \hat{q} = 0, \quad \hat{\underline{T}} = \hat{\underline{r}} + \hat{\underline{\mu}} \cdot \underline{B} + \hat{\underline{\mu}} \cdot \underline{B} + \hat{\underline{Q}} \underline{N} + \hat{\underline{Q}} \underline{N}. \quad (4.1)$$

Целью выкладок являются линейные соотношения с вектором перемещения  $\underline{R} \equiv \mathbf{u}$ . Согласно (8.6, гл. 5),

$$\underline{\dot{N}} = -\nabla \mathbf{u} \cdot \underline{N}. \quad (4.2)$$

Сохраняются равенства

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} &= \mathbf{r}^\alpha \partial_\alpha, \quad \nabla = \mathbf{R}^\alpha \partial_\alpha, \quad \underline{\underline{F}} = \hat{\nabla} \underline{\underline{R}}^T = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{r}^\alpha, \quad \underline{\underline{G}} = \nabla \mathbf{r}^T = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{R}^\alpha, \\ \hat{\nabla} &= \underline{\underline{F}}^T \cdot \nabla, \quad \nabla = \underline{\underline{G}}^T \cdot \hat{\nabla}, \quad \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}}, \quad \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{a}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Проварьируем векторы базиса и градиенты деформации:

$$\underline{\dot{R}}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{u} \Rightarrow \underline{\underline{F}} = \hat{\nabla} \mathbf{u}^T. \quad (4.4)$$

Для «обратного» тензора  $\underline{\underline{G}}$  и кобазиса  $\mathbf{R}^\alpha$  имеем

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{F}}^i &= 0, \quad \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{N}} + \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{N}}^i = 0 \quad \Rightarrow \\ \underline{\underline{G}}^i &= -\underline{\underline{G}} \cdot (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}}) = -\underline{\underline{G}} \cdot (\nabla \mathbf{u}^T - \nabla \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}}) = r_\alpha \dot{\mathbf{R}}^\alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{R}}^\alpha = -\mathbf{R}^\alpha \cdot (\nabla \mathbf{u}^T - \nabla \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Вариация второго метрического тензора

$$\underline{\underline{B}}^i = -\dot{\mathbf{R}}^\alpha \partial_\alpha \underline{\underline{N}} - \mathbf{R}^\alpha \partial_\alpha \underline{\underline{N}}^i = -2(\nabla \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{B}})^S + \underline{\underline{B}} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{N}} \underline{\underline{N}} + \nabla \nabla \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{N}}. \quad (4.6)$$

Обратимся к соотношениям упругости (8.13, гл. 5):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{r}}^i &= \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{C}}} \right)^i \cdot \underline{\underline{F}}^T + \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T, \quad \underline{\underline{C}}^i = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{F}}^{iT} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \right) = \\ &= \underline{\underline{F}}^T \cdot \nabla \mathbf{u}^S \cdot \underline{\underline{F}}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\nu(\text{tr } \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{a}} + (1-\nu) \underline{\underline{C}}] \quad - \end{aligned} \quad (4.7)$$

для квадратичного потенциала (7.22, гл. 5). При варьировании последнего выражения достаточно заменить  $\underline{\underline{C}}$  на  $\underline{\underline{C}}^i$ . Для моментов

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\underline{m}}}^i &= \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{K}}} \right)^i \cdot \underline{\underline{F}}^T + \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{K}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T, \\ \underline{\underline{K}}^i &= \left( \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}} \right)^i = 2 \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}} \right)^S + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\underline{K}}} &= D [\nu(\text{tr } \underline{\underline{K}}) \underline{\underline{a}} + (1-\nu) \underline{\underline{K}}] \end{aligned} \quad (4.8)$$

(с цилиндрической жёсткостью  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ).

Осталось проварьировать выражение (8.16, гл. 5) перерезывающей силы  $\overset{\circ}{\underline{\underline{Q}}}$ . Считая  $\mathbf{m}' = 0$ , перепишем его:

$$\underline{\underline{G}} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{m}}} \right) + \overset{\circ}{\underline{\underline{Q}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{G}} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{m}}} \right) + \underline{\underline{G}} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{m}}} \right) = -\overset{\circ}{\underline{\underline{Q}}}. \quad (4.9)$$

Заметим, что знак ( $\perp$ ) здесь не нужен.

Из (4.1) – (4.9) следует одно векторное уравнение для  $\mathbf{u}$ . Граничные условия к нему просты лишь при заданных на краю перемещении и повороте.

*Линейная теория* получается при варьировании от ненапряжённого состояния. В этом случае  $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ ,  $\nabla = \overset{\circ}{\nabla}$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{n}$ ,  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{G}}$ ,  $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{b}}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= -\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \underline{\mathbf{C}}' = (\nabla \mathbf{u}^S)_{\perp}, \quad \underline{\mathbf{K}}' = (\nabla \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{\perp}, \\ \underline{\mathbf{T}}' &= \underline{\boldsymbol{\tau}}' + \underline{\boldsymbol{\mu}}' \cdot \underline{\mathbf{b}} + \overset{\circ}{\mathbf{Q}}' \mathbf{n}, \quad \underline{\boldsymbol{\tau}}' = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \underline{\mathbf{C}}'^2} \cdot \underline{\mathbf{C}}', \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}' &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \underline{\mathbf{K}}'^2} \cdot \underline{\mathbf{K}}', \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{T}}' + \underline{\mathbf{q}}' = 0, \quad (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}')_{\perp} = -\overset{\circ}{\mathbf{Q}}'. \end{aligned} \quad (4.10)$$

От уравнений п. 5.7 это отличается лишь некоторыми обозначениями.

## 7.5 Устойчивость пластин

Как иллюстрацию к выведенным уравнениям рассмотрим пластину, находящуюся до потери устойчивости в плоском напряжённом состоянии. Будем считать жёсткости  $C_{1,2}$  в (8.22, гл. 5) бесконечно большими, так что докритической деформации нет. Имеем

$$\mathbf{N} = \text{const}, \quad \underline{\mathbf{B}} = 0, \quad \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{G}}, \quad \nabla = \overset{\circ}{\nabla}. \quad (5.1)$$

Допустим далее, что перемещение представлено лишь прогибом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = w\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N}' &= -\nabla w, \quad \underline{\mathbf{F}}' = \mathbf{N}\nabla w, \quad \underline{\mathbf{B}}' = \nabla\nabla w, \\ \underline{\mathbf{C}}' &= 0, \quad \underline{\mathbf{K}}' = \nabla\nabla w. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для напряжений из (4.7) и (4.8) следует

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}' = \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla w \mathbf{N}, \quad \underline{\boldsymbol{\tau}} \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\mathbf{C}}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}}' = D [\nu \Delta w \underline{\mathbf{a}} + (1 - \nu) \nabla \nabla w]. \quad (5.3)$$

Очевидно,  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$  есть напряжение в плоскости перед варьированием, а момент  $\underline{\boldsymbol{\mu}} = 0$ .

Перерезывающие силы находим из (4.9):

$$\overset{\circ}{\mathbf{Q}}' = -\underline{\mathbf{a}} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}') = -D \nabla \Delta w, \quad (5.4)$$

после чего обращаемся к (4.1):

$$\underline{\mathbf{T}}' = \left( \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla w + \overset{\circ}{\mathbf{Q}}' \right) \mathbf{N}, \quad \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla w) - D \Delta \Delta w + \overset{\circ}{q}'_N = 0. \quad (5.5)$$

Пришли к «основному уравнению теории устойчивости пластин». Множество примеров есть в [4, 17, 95].



## 7.6 Вращение гибкого вала в трубке-оболочке

Своеобразная потеря устойчивости возникает при передаче вращения посредством гибкого вала [75]. Упругий стержень вставлен в жёсткую трубку-оболочку и приводится во вращение от одного конца (рис. 24). Внутренняя поверхность трубки идеально гладкая, но вращение ведомого конца может быть резко неравномерным, с остановками и скачками. Плавно возрастающий поворот ведущего конца  $\phi_0$  является параметром нагрузки; при потере устойчивости



Рис. 24

Из п. 5.2 используем следующие уравнения

$$M' + t \times Q + m = 0 \quad (t \equiv r'), \quad M = \underline{a} \cdot \kappa, \quad \kappa = (\Omega_i - \Omega_{i0})e_i. \quad (6.2)$$

Направления  $e_i$  — главные для тензора жёсткости  $\underline{a}$ . Обратимся к рис. 1 (п. 1.2) и примем, что  $e_3 = t$  (орт касательной), а  $e_1$  и  $e_2$  получаются из  $n$  и  $b$  поворотом на угол  $\varphi(s)$  — как при выводе (2.8, гл. 5). Учитывая (2.2, гл. 1), получим

$$\Omega_1 = k \sin \varphi, \quad \Omega_2 = k \cos \varphi, \quad \Omega_3 = \tau + \varphi', \quad (6.3)$$

а в начальном состоянии  $\Omega_{10} = k_0 \sin \varphi_0$  и т. д. Проекция уравнения моментов на касательную:

$$\begin{aligned} M_t' - kM_n + m_t = 0 &\Rightarrow a_3(\varphi' + \tau - \varphi_0' - \tau_0)' = \\ &= k [a_1(k \sin \varphi - k_0 \sin \varphi_0) \cos \varphi - a_2(k \cos \varphi - k_0 \cos \varphi_0) \sin \varphi] - m_t. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Вращение медленное, трения нет —  $m_t = 0$ .

Основное для данной задачи уравнение (6.4) имеет вид

$$\varphi'' + g(\varphi, s) = 0$$

и в общем случае интегрируется лишь численно. Однако в случае  $g = g(\varphi)$  проходит решение в квадратурах по схеме (2.18, гл. 5). Граничные условия:

$$\varphi(0) = \phi_0, \quad M_t(l) = 0 \Rightarrow \varphi' = \varphi_0' + \tau_0 - \tau. \quad (6.5)$$

Отметим, что кривизна  $k$  и кручение  $\tau$  полностью определяются формой трубки согласно (2.2, гл. 1), а  $k_0$  и  $\tau_0$  — начальным состоянием. Основным результатом является зависимость  $\varphi(l) = \phi_l(\phi_0)$  — для проверки (6.1).

**Пример:** форма трубки — дуга окружности, начальная форма вала — дуга окружности другого радиуса, жёсткости на изгиб равны. В этом случае  $\tau = \tau_0 = 0$  (всегда для плоской кривой),  $\varphi_0 = 0$ ,  $k$  и  $k_0 = \text{const}$ ,  $a_1 = a_2 = a$ , и задача принимает вид

$$\varphi'' = p^2 \sin \varphi, \quad \varphi(0) = \phi_0, \quad \varphi'(l) = 0 \quad (p^2 \equiv k_0 k a / a_3). \quad (6.6)$$

Решим по схеме (2.18, гл. 5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi'^2 + p^2 \cos \varphi &= p^2 \cos \phi_l \Rightarrow \varphi'^2 = 4p^2 \left( \cos^2 \frac{\phi_l}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right); \\ \cos \frac{\varphi}{2} &= q \sin \psi, \quad q \equiv \cos \frac{\phi_l}{2} \Rightarrow \varphi' = -2pq \cos \psi, \\ q\psi' \cos \psi &= -\frac{\varphi'}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = pq \cos \psi \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \psi} \Rightarrow \\ &\frac{\psi'}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \psi}} = p; \\ ps &= \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \psi}} = F(\psi, q) - F(\psi_0, q). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Введение переменной  $\psi$  — известный прием интегрирования «уравнения обращённого маятника». При возрастании  $s$  от 0 до  $l$  угол  $\varphi$  убывает от  $\phi_0$  до  $\phi_l$ ,  $\cos \varphi/2$  соответственно возрастает, а  $\psi$  возрастает от  $\psi_0 = \arcsin(q^{-1} \cos \phi_0/2)$  до  $\pi/2$ . Появляются эллиптические интегралы первого рода — неполный и полный [45]:

$$F(\psi, q) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \psi}}, \quad K(q) = F\left(\frac{\pi}{2}, q\right). \quad (6.8)$$

Параметр  $q$  пока неизвестен. Но он определяется из (6.7) при  $s = l$ :

$$pl = K(q) - F(\psi_0, q) \Rightarrow q(\phi_0). \quad (6.9)$$

Чтобы найти  $\varphi(s)$ , необходимы эллиптические функции (Якоби) амплитуды и синуса:

$$F = F(\psi, q) \Rightarrow \psi = \text{am}(F, q); \quad \sin \psi = \text{sn}(F, q). \quad (6.10)$$

Из (6.7) и (6.9) получим

$$\psi = \operatorname{am} [K(q) - p(l-s), q], \quad \varphi = 2 \arccos(q \sin \psi). \quad (6.11)$$

Искомая связь поворотов:

$$\phi_0 = 2 \arccos(q \operatorname{sn} [K(q) - pl, q]), \quad q = \cos \phi_l / 2 \quad (6.12)$$

параметрическое задание функции  $\phi_l(\phi_0)$ .

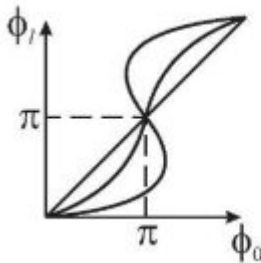


Рис. 25

Эти зависимости<sup>1</sup> представлены на рис. 25 — для различных значений  $pl$ . При  $pl < \pi/2$  имеем однозначную нелинейную зависимость, вращение ведомого конца более или менее плавное. Но в случае  $pl > \pi/2$  зависимость неоднозначна, плавное возрастание  $\phi_l$  вместе с  $\phi_0$  заканчивается перескоком, вращение становится резко неравномерным.

Если в начальном состоянии вал прямой, то  $k_0 = 0$ ,  $p = 0$  и  $\phi_l = \phi_0$  — идеальная равномерность. Но реально это недостижимо, всегда есть искривленность.

## Библиография

Необходимые сведения из общей теории устойчивости содержатся в книге Д. Р. Меркина [61].

Очень интересные детали и парадоксы описаны В. И. Феодосьевым [106], Я. Г. Пановко и И. И. Губановой [75]. Нельзя не отметить книги Г. Циглера [111], С. П. Тимошенко [95], а также А. С. Вольмира [17] и Н. А. Алфуртова [4].

Сложные вопросы устойчивости оболочек рассмотрены П. Е. Товстиком [100], Э. И. Григолоком и В. В. Кабановым [25].

Особенности неконсервативных задач раскрыты у В. В. Болотина [12].

<sup>1</sup> Построены Т. В. Зиновьевой

## Глава 8

# Малые пластические деформации

### 8.1 Экспериментальные данные

Прекрасная модель упругого тела построена умозрительно, без ссылки на опыт. При описании же пластических деформаций ссылки на эксперимент обязательны — и прежде всего на *диаграмму деформирования* малоуглеродистой стали.

Имеется в виду цилиндрический образец с деформацией растяжения  $\varepsilon$  и соответствующим напряжением  $\sigma$ . В некоей испытательной машине задаётся  $\varepsilon(t)$  (т. е. функция времени) и измеряется  $\sigma(t)$ . На рис. 26 сплошной линией  $OABCD$  показан процесс при заданном монотонном возрастании  $\varepsilon$  от нуля (это не график  $\sigma(\varepsilon)$ !). Прямой (почти «вертикальный») участок  $OA$  соответствует линейной упругости. Далее — «*площадка текучести*»  $AB$ : деформация растёт при неизменном  $\sigma$ . Затем начинается «*участок упрочнения*»  $BD$ .

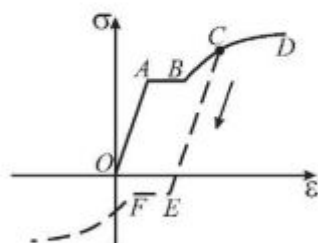


Рис. 26

Пунктирная линия  $CEF$  получается при разгрузке: в точке  $C$  становится  $\dot{\varepsilon} < 0$ . *Участок разгрузки*  $CE$  параллелен  $OA$ , за ним следует площадка текучести при сжатии  $EF$ , и далее упрочнение.

На рис. 26 не показаны результаты повторной нагрузки: если разгрузку закончить где-то между  $C$  и  $E$ , то нагрузка «пойдет» по линии  $ECD$ . В роли «предела текучести» выступит напряжение в точке  $C$  — а не в  $A$ , как сначала.

Очень важно, что диаграмма 26 не зависит от скорости деформирования — линия  $OABCD$  одинакова для всех монотонно возрастающих функций  $\varepsilon(t)$ . Разумеется, это идеализация. Но без подобных упрощений моделирование невозможно.

Следует отметить эффект Баушингера:  $|\sigma_E| < \sigma_A$  — предел текучести при разгрузке меньше, чем первоначальный при нагрузке.

С параллельностью участков  $OA$  и  $EC$  связано правило сложения деформаций:  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ , где упругая деформация  $\varepsilon^e$  связана с напряжением законом Гука, а пластическая деформация  $\varepsilon^p$  начинается лишь за пределом упругости.

Для пластичности металлов найдено объяснение на микроуровне. В идеальных монокристаллах с периодической структурой решетки пластичности нет — для сдвига по кристаллической плоскости на период потребовалось бы напряжение на два порядка выше предела текучести. Пластичность возникает от движения дислокаций — дефектов решетки в виде краев незаконченных плоскостей и других особых линий [49, 93]. В состоянии текучести дислокации легко перемещаются до остановки на границах зерен. Заметим, что в теории упругости дислокации были описаны на четверть века раньше, чем их нашли физики-экспериментаторы.

При описании пластичности изотропных материалов полезно выделить в напряжениях и деформациях шаровые части и девиаторы:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{3}\theta\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{e}}, \quad \underline{\underline{e}} \equiv \text{Dev } \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{\underline{\tau}} = \frac{1}{3}\sigma\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}}, \quad \underline{\underline{S}} \equiv \text{Dev } \underline{\underline{\tau}}. \quad (1.1)$$

Первый инвариант (след) девиатора равен нулю. В опытах обнаружено, что эффекты пластичности проявляются лишь в девиаторах. Шаровые же части связаны как в упругом теле:  $\sigma = \theta E / (1 - 2\nu)$ .

Начало пластического течения при нагрузке определяется условием текучести

$$F(\underline{\underline{\tau}}) = k, \quad (1.2)$$

где  $k$  — константа материала. В случае изотропии опытным путём найдены два варианта:

$$F_1(\underline{\underline{\tau}}) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \max t_n, \quad F_2(\underline{\underline{\tau}}) = \sqrt{\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}} / 2}, \quad (1.3)$$

нормы Треска и Мизеса. Сопоставим их для напряжённых состояний одно-

осного растяжения и чистого сдвига:

$$\begin{aligned}
 1^\circ. \quad \underline{\underline{\tau}} &= \sigma \mathbf{ii}, \quad \sigma = \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad F_1 = \sigma/2, \\
 \underline{\underline{S}} &= \underline{\underline{\tau}} - \frac{1}{3}\sigma \underline{\underline{E}} = \frac{1}{3}\sigma(2\mathbf{ii} - \mathbf{jj} - \mathbf{kk}), \quad F_2 = \sigma/\sqrt{3}; \\
 2^\circ. \quad \underline{\underline{\tau}} &= \tau(\mathbf{ij} + \mathbf{ji}) = \underline{\underline{S}}, \quad F_1 = F_2 = \tau.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Расхождение лишь в первом случае, но незначительное. Оба варианта приемлемы.

## 8.2 Определяющие уравнения

В теории пластичности связь напряжений и деформаций много сложнее, чем в теории упругости. Для *идеально-пластического тела* общепризнано следующее

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e + \underline{\underline{\epsilon}}^p, \quad \underline{\underline{\epsilon}}^e = {}^4\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\tau}}, \quad \underline{\underline{\epsilon}}^p = \begin{cases} 0, & F(\underline{\underline{\tau}}) < k \\ \lambda \partial F / \partial \underline{\underline{\tau}}, & F = k \end{cases}. \tag{2.1}$$

Упругая деформация  $\underline{\underline{\epsilon}}^e$  связана с напряжением законом Гука (с тензором податливости  ${}^4\underline{\underline{S}}$ ;  $\underline{\underline{\tau}} = {}^4\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^e$ ). Пластическая деформация  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$  развивается лишь при достижении  $F$  предела текучести  $k$ . Формула для  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$  выражает *ассоциированный закон течения*, в нём содержится та же функция  $F(\underline{\underline{\tau}})$ , что и в условии текучести. Скаляр  $\lambda$  является самостоятельной неизвестной (это некий множитель Лагранжа). Появление новой неизвестной  $\lambda$  компенсируется условием  $F = k$ .

К (2.1) необходимо добавить *принцип максимума Мизеса*: при заданной  $\underline{\underline{\epsilon}}^p$

$$D(\underline{\underline{\tau}}) \equiv \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^p \rightarrow \max. \tag{2.2}$$

Отсюда следует ассоциированный закон течения. Ведь имеем задачу на условный экстремум с решением по методу Лагранжа:

$$\hat{D}(\underline{\underline{\tau}}) = D - \lambda F, \quad \frac{\partial \hat{D}}{\partial \underline{\underline{\tau}}} = 0 \quad \Rightarrow \tag{2.1}.$$

Другим следствием (2.2) является *выпуклость поверхности текучести*:

$$(\underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}}') \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^p > 0. \tag{2.3}$$

«Концы векторов  $\underline{\tau}$  и  $\underline{\tau}'$  лежат на поверхности текучести, вектор  $\underline{\varepsilon}^P$  направлен по нормали, поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости» — но эта геометрическая интерпретация необязательна.

Выясним смысл величины  $D$ , рассматривая баланс энергии. Мощность внешних сил

$$\int_O \mathbf{n} \cdot \underline{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} dO + \int_V \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV = \int_V [(\nabla \cdot \underline{\tau} + \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{u}} + \underline{\tau} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}] dV$$

превышает скорость изменения механической энергии

$$\int_V \left( \Pi + \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 \right) dV = \int_V (\underline{\tau} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} + \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV$$

на величину  $\int D dV - D$  есть скорость диссипации энергии в единице объёма. К заключению о максимуме  $D$  можно прийти, рассматривая обычные силы сухого трения — их направление обеспечивает максимум диссипации.

Принцип (2.2) раскрывает связь  $\underline{\tau}$  с  $\underline{\varepsilon}^P$  и является одним из важнейших положений теории пластичности.

При условии текучести Мизеса с  $F_2(\underline{\tau})$  (1.3) ассоциированный закон сводится к следующему

$$\underline{\varepsilon}^P = \dot{\underline{\varepsilon}}^P = \lambda \underline{\mathbf{S}}, \quad (2.4)$$

поскольку

$$\begin{aligned} \delta F_2 &= \frac{1}{2F_2} \underline{\mathbf{S}} \cdot \delta \underline{\mathbf{S}} = \frac{\partial F_2}{\partial \underline{\tau}} \cdot \left( \delta \underline{\mathbf{S}} + \frac{1}{3} \delta \sigma \underline{\mathbf{E}} \right) = \\ &= \text{Dev} \frac{\partial F_2}{\partial \underline{\tau}} \cdot \delta \underline{\mathbf{S}} + \frac{1}{3} \text{tr} \frac{\partial F_2}{\partial \underline{\tau}} \delta \sigma \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial \underline{\tau}} = \frac{1}{2F_2} \underline{\mathbf{S}}. \end{aligned}$$

Если же принять условие Треска, закон течения усложнится.

Модель идеально-пластического тела соответствует на диаграмме деформирования (рис. 26) участку  $OAB$ . Для описания упрочнения ( $BCD$ ) необходимо заменить условие текучести *условием упрочнения*. В простейшем случае можно считать  $k$  функцией некоторого параметра упрочнения:

$$k = k(A^P), \quad A^P \equiv \int \underline{\tau} \cdot d\underline{\varepsilon}^P \quad (2.5)$$

*энергетическое условие*. Пластическая деформация начинается при  $F(\underline{\tau}) = k(0)$ . Далее имеем подвижную *поверхность нагружения*, на которой

$$F = k, \quad \underline{\varepsilon}^P = \begin{cases} 0, & \dot{F} \leq 0 \\ \lambda \partial F / \partial \underline{\tau}, & \dot{F} > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Эта поверхность служит для разграничения нагрузки и разгрузки — по знаку  $\dot{F}$ .

При идеальной пластичности  $k = \text{const}$ , и в состоянии течения  $\dot{F} = 0$ . В случае упрочнения это равенство означает остановку течения («нейтральное нагружение»).

В модели с упрочнением можно получить универсальное выражение  $\lambda$ , продифференцировав условие текучести:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\tau}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\tau}}} = k'(A^p) \underline{\underline{\tau}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \Rightarrow \lambda = \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \dot{\underline{\underline{\tau}}}, \quad \underline{\underline{\Lambda}} \equiv \frac{\partial F / \partial \underline{\underline{\tau}}}{k'(A^p) \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\tau}}} \cdot \underline{\underline{\tau}}}. \quad (2.7)$$

Ничего подобного нет при идеальной пластичности — там получается неопределённость  $0/0$ . Учитывая правило сложения деформаций, получим

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \left( \lambda \underline{\underline{S}} + \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\tau}}} \underline{\underline{\Lambda}} \right) \cdot \dot{\underline{\underline{\tau}}} \quad (2.8)$$

как в линейно упругой среде с переменной податливостью.

Энергетическое условие упрочнения (2.5) означает изотропное расширение поверхности текучести в пространстве напряжений и потому не описывает эффект Баушингера. Для учёта последнего необходимы более сложные условия.

При идеальной пластичности изотропного материала

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2\mu} \dot{\underline{\underline{S}}} + \begin{cases} 0, & \tau(\underline{\underline{S}}) \equiv F_2 < k \\ \lambda \underline{\underline{S}}, & \tau = k \end{cases} \quad (2.9)$$

это соотношение *Прандтля* будем часто использовать.

В качестве примера рассмотрим **растяжение и кручение тонкостенной трубки**. При осевой силе  $P$  и крутящем моменте  $M$  тензор напряжений

$$\underline{\underline{\tau}} \approx \sigma_z e_z e_z + \tau_{z\varphi} (e_z e_\varphi + e_\varphi e_z), \quad \sigma_z = \frac{P}{2\pi R h}, \quad \tau_{z\varphi} = \frac{M}{2\pi R^2 h}, \quad (2.10)$$

где  $z$  и  $\varphi$  — цилиндрические координаты,  $R$  — радиус трубки,  $h$  — толщина стенки. По удлинению  $W$  и углу поворота торца  $\Phi$  находятся деформации  $\varepsilon_z = W/l$ ,  $\varepsilon_{z\varphi} = \Phi R/2l$  ( $l$  — длина трубки). Задаём программу мысленного эксперимента: сначала только кручение с растущим  $\Phi$  до появления пластических деформаций, затем растяжение с постоянным  $\Phi$ . Из (2.10) и



(2.9) находим  $\underline{S}$ ,

$$S_z = \frac{2}{3}\sigma_z, \quad S_{z\varphi} = \tau_{z\varphi}, \quad \tau(\underline{S}) = \sqrt{\frac{1}{3}\sigma_z^2 + \tau_{z\varphi}^2},$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{1}{3}\dot{\theta} + \frac{1}{2\mu}\dot{S}_z + \lambda S_z = \frac{1}{E}\dot{\sigma}_z + \lambda S_z, \quad \dot{\varepsilon}_{z\varphi} = \frac{1}{2\mu}\dot{\tau}_{z\varphi} + \lambda \tau_{z\varphi}. \quad (2.11)$$

На этапе растяжения имеем  $\dot{\varepsilon}_{z\varphi} = 0$ ,  $\tau_{z\varphi}^2 + \sigma_z^2/3 = k^2$ ,

$$\tau_{z\varphi}\dot{\tau}_{z\varphi} + \frac{1}{3}\sigma_z\dot{\sigma}_z = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2\mu} \frac{\sigma_z\dot{\sigma}_z}{3k^2 - \sigma_z^2},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z + \frac{1}{3\mu} \int_0^{\sigma_z} \frac{\sigma_z^2}{3k^2 - \sigma_z^2} d\sigma_z =$$

$$= \frac{1}{6\mu} \left( \frac{1-2\nu}{1+\nu}\sigma_z + \frac{k}{\sqrt{3}} \ln \frac{k\sqrt{3} + \sigma_z}{k\sqrt{3} - \sigma_z} \right) - \quad (2.12)$$

плавная зависимость с асимптотой на уровне  $\sigma_z = k\sqrt{3}$ . При этом  $\tau_{z\varphi}$  убывает до нуля.

Вернёмся к (2.9) и допустим, что  $\dot{\underline{S}} \equiv 0$ . Тогда

$$\underline{\varepsilon} = \Psi \underline{S} \quad \left( \Psi = \frac{1}{2\mu} + \int \lambda dt \right). \quad (2.13)$$

Такое соотношение (без скоростей) характерно для *деформационной теории* пластичности. Некоторые авторы считают её верной и при непостоянстве  $\underline{S}$ . В примере с (2.10)

$$\varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{3E}\sigma_z + \Psi \frac{2}{3}\sigma_z, \quad \varepsilon_{z\varphi} = \Psi \tau_{z\varphi} \Rightarrow \Psi = \frac{\varepsilon_{z\varphi}}{\sqrt{k^2 - \sigma_z^2/3}}, \quad (2.14)$$

и кривая растяжения  $\sigma_z(\varepsilon_z)$  отличается от (2.13).

### 8.3 Полый шар под действием внутреннего давления

Задача линейной термоупругости со сферической симметрией была рассмотрена в п. 4.11. Вид тензора напряжений, уравнения баланса сил и совместности (11.5, 11.6, гл. 4) сохраняются. Граничные условия:

$$\sigma_r(a) = -p, \quad \sigma_r(b) = 0; \quad (3.1)$$

давление  $p$  монотонно возрастает от нуля. Имеем

$$\begin{aligned}\sigma &= \text{tr } \underline{\tau} = \sigma_r + 2\sigma_\varphi, \quad \underline{S} = S_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + S_\varphi (\underline{E} - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r), \\ S_r &= \frac{2}{3}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = -2S_\varphi, \quad \tau(\underline{S}) = \frac{|\sigma_\varphi - \sigma_r|}{\sqrt{3}}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Очевидно  $\sigma_r < 0$ ,  $\sigma_\varphi > 0$  – знак модуля в  $\tau$  не нужен (ссылки на очевидность характерны для задач теории пластичности).

*Упругое поведение* будет при  $p < p_0$ , где  $p_0$  пока неизвестно; везде  $\tau < k$ . Можем воспользоваться уравнением (11.8, гл. 4) – без температурного слагаемого. Решаем уравнение Эйлера:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= r^n, \quad n(n-1) + 4n = 0 \Rightarrow n_1 = 0, \quad n_2 = -3; \\ \sigma_r &= A - \frac{B}{r^3} = -p \frac{1-b^3/r^3}{1-b^3/a^3}; \quad \sigma_\varphi = \frac{r}{2} \sigma_r' + \sigma_r = A + \frac{B}{2r^3}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Пластическая деформация начнется на внутреннем радиусе, поскольку  $\tau = B\sqrt{3}/2r^3$ . Найдём  $p_0$ :

$$\frac{B\sqrt{3}}{2a^3} = k \Rightarrow p_0 = \frac{2k}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right).\quad (3.4)$$

В *упруго-пластической стадии* ( $p > p_0$ ) естественно предположить наличие двух зон: пластичности ( $r < \rho$ ) и упругости ( $r > \rho$ ). Радиус  $\rho$  неизвестен, на нём непрерывны  $\sigma_r$  и  $\tau$ . В зоне упругости

$$\sigma_r = B \left( \frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3} \right); \quad \frac{B\sqrt{3}}{2\rho^3} = k.\quad (3.5)$$

В пластической зоне решение оказывается на удивление простым:

$$\sigma_r' = 2 \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{r} = \frac{2k\sqrt{3}}{r} \Rightarrow \sigma_r = -p + 2k\sqrt{3} \ln \frac{r}{a}.\quad (3.6)$$

Осталось найти  $\rho$  из условия непрерывности  $\sigma_r$ :

$$-p + 2k\sqrt{3} \ln \frac{\rho}{a} = \frac{2k}{\sqrt{3}} \left( \frac{\rho^3}{b^3} - 1 \right) \Rightarrow \rho(p).\quad (3.7)$$

Функция  $\rho(p)$  возрастает до значения  $b$  при давлении

$$p_* = 2k\sqrt{3} \ln \frac{b}{a}.\quad (3.8)$$

Такова несущая способность модели, равновесие с  $p > p_*$  невозможно (только течение с ускорением).

Заметим, что  $p_*$  можно найти очень просто, если в (3.6) потребовать и  $\sigma_r(b) = 0$  — т. е. по условию разрешимости уравнения первого порядка с двумя граничными условиями. Это математическое явление позднее рассмотрим в общей постановке.

*Перемещение*  $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_r$  можно определить двумя способами. Первый связан с определяющими уравнениями (2.13) — условие  $\underline{\dot{S}} = 0$  выполняется. Неизвестную функцию  $\Psi(r)$  можно найти из уравнения совместности. Но проще другой способ, основанный на законе Гука для первых инвариантов:

$$u' + 2\frac{u}{r} = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_r + 2\sigma_\varphi). \quad (3.9)$$

Правая часть известна,  $u(r)$  находится интегрированием (после умножения на  $r^2$ ).

*Разгрузка* описывается уравнениями линейной упругости. Они связывают разности  $p - p^1$ ,  $\underline{\tau} - \underline{\tau}^1, \dots$ , где  $(\dots)^1$  — значения в начале разгрузки. В частности,

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma_r^1 &= -(p - p^1) \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) / \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right), \\ \sigma_r^1 &= -p^1 + 2k\sqrt{3} \ln \frac{r}{a} \quad (r < \rho(p^1)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Полагая  $p = 0$ , получим выражение *остаточного напряжения*.

## 8.4 Балки и диски

Рассмотрим элементарную теорию упруго-пластического *изгиба балки* Бернулли — Эйлера. Ось  $x$  направлена вдоль балки через центры тяжести сечений; в плоскости  $y, z$  сечение занимает область  $|y| \leq h/2$ ,  $|z| \leq b(y)/2$ . При изгибе в плоскости  $xy$  имеем силовые факторы

$$Q = \int \tau_{xy} dF = \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{xy} dz, \quad M = - \int y \sigma_x dF$$

с уравнениями баланса (1.2, гл. 5):  $Q' = -q$ ,  $M' = -Q$ .

Гипотезы (1.3, гл. 5) сохраняются при пластических деформациях. Поперечному  $\varepsilon_x = -v''y$ . В упругой зоне  $\sigma_x = E\varepsilon_x$ , а в пластической

$|\sigma_x| = \sigma_0$  — предел текучести. Пластическая деформация начинается при  $y = \pm h/2$ , когда  $M = M_0$ . С ростом нагрузки будет ( $M > M_0$ )

$$\sigma_x = -\sigma_0 \cdot \begin{cases} 1, & y > \eta \\ y/\eta, & |y| \leq \eta \\ -1, & y < -\eta \end{cases}, \quad \frac{E v'' \eta = \sigma_0,}{M = 2\sigma_0 \left( \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} b y^2 dy + \int_{\eta}^{h/2} b y dy \right) \equiv \hat{M}(\eta).} \quad (4.1)$$

Координата  $\eta$  границы упругой зоны находится по изгибающему моменту обращением функции  $\hat{M}$ . Тогда подчеркнутое равенство определит  $v''$ .

Несущая способность в сечении исчерпывается при  $M = M_* \equiv \hat{M}(0)$ . В этом предельном случае  $v'' \rightarrow \infty$  — образуется излом, «пластический шарнир».

**Пример:** консольная балка прямоугольного сечения с силой  $P$  на свободном конце ( $x = l$ ). Имеем  $Q = P$ ,  $M = P(l - x)$ ,  $b = \text{const}$ ,

$$\hat{M}(\eta) = \sigma_0 b \left( \frac{h^2}{4} - \frac{\eta^2}{3} \right), \quad M_0 = \frac{2}{3} M_*, \quad M_* = \frac{1}{4} \sigma_0 b h^2.$$

Пластическое течение начнется в заделке ( $x = 0$ ,  $y = \pm h/2$ ) при  $Pl = M_0$ . Далее зона пластичности примет (в плоскости  $xy$ ) параболические очертания:

$$\eta = \sqrt{\alpha x + \beta}, \quad \alpha = \frac{3P}{\sigma_0 b}, \quad \beta = \frac{3h^2}{4} - \alpha l. \quad (4.2)$$

По выражению  $v''$  в (4.1) находим прогиб:

$$v' = v'(0) + \frac{\sigma_0}{E} \int_0^x \frac{dx}{\eta(x)}, \quad v'(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v = \int_0^x v' dx.$$

Это — в зоне пластичности  $x < x_0 \equiv l - M_0/P$ . При  $x > x_0$  имеем обычную упругую балку:  $v'' = 12P(l-x)/Ebh^3$ . На границе  $x = x_0$  непрерывны  $v$  и  $v'$ .

Предельная нагрузка  $P_* = M_*/l$  — в заделке образуется пластический шарнир.

Обратимся к другой элементарной задаче — о *вращающемся диске*. Тонкий круглый диск радиусом  $a$ , толщиной  $h$  и плотностью  $\rho$  вращается вокруг центра в своей плоскости с угловой скоростью  $\omega$ . Имеем равновесие

в подвижной системе при плоском напряжённом состоянии с балансом сил

$$(h\sigma_r)' + \frac{h}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \omega^2 \rho h r = 0 \quad (4.3)$$

и уравнением совместности  $\varepsilon_r = (r\varepsilon_\varphi)'$ .

В упругой стадии (при  $\omega < \omega_0$ )  $E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu\sigma_\varphi$ ,  $E\varepsilon_\varphi = \sigma_\varphi - \nu\sigma_r$ , и для  $\sigma_r$  получается уравнение второго порядка с условиями  $\sigma_r(a) = 0$ ,  $\sigma_r(0)$  ограничено. Оно легко интегрируется при степенном законе изменения толщины  $h = h_0 r^n$ . Будет  $\sigma_\varphi > \sigma_r > 0$  с наибольшими напряжениями в центре (для  $h = \text{const}$ ).

Но интереснее пластическая стадия. Норма Мизеса приводит к сложным выкладкам, а норма Треска — к элементарному решению:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_\varphi, \sigma_2 = \sigma_r, \sigma_3 = 0 &\Rightarrow \sigma_\varphi = 2k, \\ r\sigma_r' + (n+1)\sigma_r = 2k - \omega^2 \rho r^2 &\Rightarrow \\ \Rightarrow r^{n+1}\sigma_r = \frac{2k}{n+1}r^{n+1} - \frac{\omega^2 \rho}{n+3}r^{n+3} + \text{const}. &\quad (4.4) \end{aligned}$$

В предельном состоянии это верно и при  $r = a$ . Для  $h = \text{const}$  найдём  $\omega_*^2 = 6k/\rho a^2$ .

## 8.5 Кручение

Стадия линейной упругости при кручении цилиндра описана в п. 4.8. Она продолжается до  $M = M_0$ , пока в некоторой точке на контуре сечения не станет

$$|\tau| \equiv |\nabla\varphi| = k \quad (5.1)$$

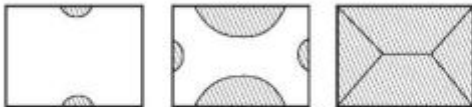


Рис. 27

(орт оси  $z$  обозначим  $e_z$ ). С ростом  $M$  зона пластичности расширяется, могут образоваться новые очаги у других точек контура, в предельном состоянии ( $M = M_*$ ) «упругое ядро» может превратиться в линию

(рис. 27).

Решение в зоне пластичности оказывается неожиданно простым:

$$\varphi = kn, \quad \tau = \nabla\varphi \times e_z = kI, \quad (5.2)$$

где  $n$  – расстояние до границы по нормали,  $l$  – орт касательной – как в (8.8, гл. 4). Докажем справедливость такого решения, рассматривая линии поля  $\nabla\varphi$ :

$$\nabla\varphi = k(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2), \quad \partial_1\partial_2\varphi = \partial_2\partial_1\varphi \Rightarrow \nabla\varphi \cdot \nabla\theta = 0.$$

Это означает постоянство  $\theta$  на линиях поля – они прямые, причём нормально к контуру, т. е.  $\nabla\varphi = -k\mathbf{n}$  (орт  $\mathbf{n}$  направлен наружу).

Выражение крутящего момента (8.9, гл. 4) сохраняется (без  $\phi$ ). Предельное значение вычисляется с функцией (5.2). Для квадратного сечения со стороной  $a$ :  $M_* = ka^3/3$  (соответствует объёму пирамиды высотой  $ka/2$ ).

Рассмотрим *перемещения* в пластической зоне. Для найденных напряжений  $\underline{\dot{\mathbf{S}}} = 0$ , поэтому справедлива деформационная теория с формулой (2.13). Действуя как в (8.11, гл. 4), получим

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{u}_\perp^S &= 0 \Rightarrow \mathbf{u}_\perp = \mathbf{U}(z) + \omega(z)\mathbf{e}_z \times \mathbf{x}; \\ \partial_z u_z &= 0 \Rightarrow u_z = u_z(\mathbf{x}); \\ \nabla u_z + \mathbf{U}' + \omega'\mathbf{e}_z \times \mathbf{x} &= 2\Psi\boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Это верно и в упругом ядре, где  $\Psi = 1/2\mu$ , поэтому  $\omega' = \alpha$  для всего сечения. Можно не искать  $\Psi$ , а просто спроектировать (5.3) на нормаль (ведь  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$ ):

$$\partial_n u_z = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}' + \alpha l \cdot \mathbf{x} \quad (5.4)$$

осталось интегрирование по  $n$ . Для кругового сечения  $l \cdot \mathbf{x} = 0$ .

## 8.6 Плоская деформация

Определение (9.1, гл. 4) сохраняется. Материал будем считать *несжимаемым, жёстко-пластическим и без упрочнения*:

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_z = \begin{cases} 0, & \tau(\underline{\mathbf{S}}) < k \\ \lambda\underline{\mathbf{S}}_z, & \tau = k \end{cases}. \quad (6.1)$$

Обозначим (только в этом п.)  $\text{tr } \underline{\boldsymbol{\tau}} = 3\sigma$ . Имеем

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_z = \partial_z \dot{u}_z = 0 = \lambda S_z \Rightarrow \sigma_z = \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (6.2)$$

Следовательно,

$$S_x = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = -S_y; \quad S_{xy} = \tau_{xy} \Rightarrow \tau(\underline{\mathbf{S}}) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (6.3)$$

Условие текучести тождественно удовлетворено в переменных  $\sigma$  и  $\theta$ :

$$\sigma_x = \sigma - k \sin 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma + k \sin 2\theta, \quad \tau_{xy} = k \cos 2\theta, \quad (6.4)$$

где  $\theta + \pi/4$  есть угол между первой главной осью  $\underline{\tau}$  и осью  $x$ . Для доказательства найдём сначала главные напряжения:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \Lambda & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \Lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma_{1,3} = \sigma \pm k, \quad \sigma_2 = \sigma. \quad (6.5)$$

Плоская часть тензора напряжений

$$\begin{aligned} \underline{\tau}_\perp &= \sigma_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{i} \cos \gamma + \mathbf{j} \sin \gamma, \quad \gamma = \theta + \pi/4, \\ \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{i} \sin \gamma + \mathbf{j} \cos \gamma; \quad \sigma_x = \mathbf{i} \cdot \underline{\tau}_\perp \cdot \mathbf{i} \Rightarrow \quad (6.4). \end{aligned}$$

При равновесии без объёмных сил

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\tau}_\perp &= 0 \Rightarrow \partial_x \sigma - 2k(\cos 2\theta \partial_x \theta + \sin 2\theta \partial_y \theta) = 0, \\ \partial_y \sigma + 2k(\cos 2\theta \partial_y \theta - \sin 2\theta \partial_x \theta) &= 0 \quad - \quad (6.6) \end{aligned}$$

система квазилинейных уравнений.

Введём два семейства «линий скольжения  $\alpha$  и  $\beta$ » с наклоном к оси  $x$  под углами  $\theta$  и  $\theta + \pi/2$  соответственно. Это линии с наибольшими касательными напряжениями, равными  $k$ . Уравнения (6.6) — гиперболического типа, и линии скольжения являются их характеристиками (п. 1.3). Простое, хотя и нестрогое, доказательство: оси  $x, y$  «местной декартовой системы» направим по касательным к линиям  $\alpha$  и  $\beta$ ; тогда  $\theta = 0$ , и (6.6) примут вид

$$\partial_x(\sigma - 2k\theta) = 0, \quad \partial_y(\sigma + 2k\theta) = 0. \quad (6.7)$$

Величины в скобках постоянны на линиях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно — таковы условия на характеристиках.

Поскольку (6.6) нелинейны, характеристики не определяются заранее, а строятся вместе с решением. Без компьютера это можно сделать лишь в простейших задачах — например, о клине под действием одностороннего давления (рис. 28). Угол при вершине  $2\gamma > \pi/2$ . Угадывается поле

линий скольжения из двух прямоугольных треугольников ( $OAB$  и  $OCD$ ) и сектора  $OBC$ . В треугольниках линии прямые; в секторе — радиусы и концентрические окружности. На границах  $OA$  и  $OD$  касательное напряжение равно нулю, поэтому линии скольжения составляют с ними угол  $\pi/4$ .

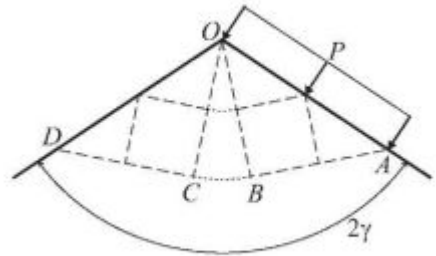


Рис. 28

Необходимо выяснить, какой является линия  $ABCD$  —  $\alpha$  или  $\beta$ . Если имеет место некий изгиб клина, то сторона  $OA$  растянута, а  $OD$  — сжата. Следовательно, на  $OA$   $\sigma_1 = \sigma + k > 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma - k = -p$ . На  $OD$   $\sigma_1 = \sigma + k = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma - k < 0$ . Имеем  $\beta$ -линию, на которой

$$\begin{aligned} \sigma + 2k\theta &= \text{const} \Rightarrow k - p + 2k\theta_A = -k + 2k\theta_D; \\ \theta_A - \theta_D &= 2\gamma - \frac{\pi}{2} \Rightarrow p = 2k \left( 1 + 2\gamma - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Это предельная нагрузка ( $p_*$ ). Однако решение вызывает вопросы и требует комментариев. Предположили, что ниже  $ABCD$  — «жёсткая» зона, где  $\tau(\underline{S}) < k$ . Но в жёсткой зоне принципиально невозможно найти напряжения. . . Всё прояснится далее, когда рассмотрим теоремы о предельной нагрузке.

В случае острого угла ( $2\gamma < \pi/2$ ) вместо сектора  $BOC$  будет линия разрыва, а вместо (6.8) — условия непрерывности  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  на этой линии:

$$\begin{aligned} \sigma_A - k \sin 2\theta_A &= \sigma_D - k \sin 2\theta_D, \quad \cos 2\theta_A = \cos 2\theta_D; \\ \sigma_A &= k - p, \quad \sigma_D = -k, \quad \theta_A = \pi/4 + \gamma = \pi - \theta_D \Rightarrow \\ &\Rightarrow = 2k(1 - \cos 2\gamma). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Рассмотрим теперь *осесимметричное* поле напряжений — например, в цилиндре под действием внутреннего давления. Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  — главные, линии скольжения составляют угол  $\pi/4$  с ортами  $e_r$  и  $e_\varphi$ . При  $\sigma_\varphi > 0$ ,  $\sigma_r < 0$  будет

$$\begin{aligned} \alpha: \quad dr &= r d\varphi \Rightarrow \varphi = \ln r + \text{const} = \theta - \pi/4; \\ \sigma - 2k\theta &= \text{const} \Rightarrow \sigma = 2k \ln r + \text{const}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Это можно получить и другим путём — как в задаче о шаре (п. 8.3).



Заметим, что линии скольжения являются логарифмическими спиралями:  $r = C \exp(\pm\varphi)$ .

Обратимся к скоростям ( $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ ). Согласно (6.1)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \partial_x v_x = -\lambda k \sin 2\theta = -\partial_y v_y, & \partial_x v_y + \partial_y v_x &= 2\lambda k \cos 2\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \partial_x v_x + \partial_y v_y &= 0, & (\partial_x v_y + \partial_y v_x) \operatorname{tg} 2\theta &= \partial_y v_y - \partial_x v_x. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Эта система линейна, поскольку  $\theta$  найдено. Можно показать, что она — гиперболического типа, характеристиками служат линии скольжения, и на них

$$\dot{\varepsilon}_l = \mathbf{l} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \mathbf{l} = 0. \quad (6.12)$$

Рассуждение как при выводе (6.7) не пройдёт, понадобятся криволинейные координаты.

## 8.7 Изгиб жёстко-пластических пластин

Вспомним изгиб линейно упругих пластин как материальных поверхностей (п. 5.7). В классической теории Кирхгофа роль тензора деформации играет  $\underline{\underline{\kappa}} = \nabla \nabla w$ , основным силовым фактором служит тензор  $\underline{\underline{\mu}} = \partial \Pi / \partial \underline{\underline{\kappa}}$ , а условия равновесия при нагрузке силами имеют вид

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mu}} = -\mathbf{Q}, \quad \nabla \cdot \mathbf{Q} = -q. \quad (7.1)$$

В зоне пластичности изменится лишь связь  $\underline{\underline{\mu}}$  и  $\underline{\underline{\kappa}}$ . Не вызывают сомнений аналогичные (2.1) соотношения:

$$\underline{\underline{\kappa}} = \underline{\underline{\kappa}}^e + \underline{\underline{\kappa}}^p, \quad \underline{\underline{\kappa}}^e = \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \underline{\underline{\mu}}}, \quad \underline{\underline{\kappa}}^p = \begin{cases} 0, & f(\underline{\underline{\mu}}) < k \\ \lambda \partial f / \partial \underline{\underline{\mu}}, & f = k \end{cases}. \quad (7.2)$$

Вспомогая элементарную теорию пластического изгиба балки (п. 8.4), следует выбрать модель с упрочнением, где  $k$  меняется по определённому закону. Связь  $\underline{\underline{\mu}}$  и  $\underline{\underline{\kappa}}^p$  определяется принципом Мизеса

$$\underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{\underline{\kappa}}^p \rightarrow \max \quad (f(\underline{\underline{\mu}}) = k). \quad (7.3)$$

Основой по-прежнему является принцип виртуальной работы (7.8, гл. 5), откуда следуют и граничные условия.

Представление  $\underline{\mu}$  как интеграла по толщине (7.14, гл. 5) подсказывает, что функция текучести — та же, что и  $F(\underline{\tau})$  при плоском напряжённом состоянии. Одно из главных напряжений равно нулю, два других обозначим  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$ . Тогда условию Треска соответствует шестиугольник (рис. 29). При  $\sigma_r > \sigma_\varphi > 0$  будет  $\sigma_r = \sigma_1$ ,  $0 = \sigma_3$ ,  $F_1(\underline{\tau}) = \sigma_r/2 = k$  — имеем отрезок  $AB$ ; так же строятся другие отрезки.

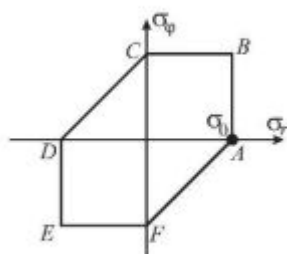


Рис. 29

Посмотрим условие Мизеса:

$$S_r = \sigma_r - (\sigma_r + \sigma_\varphi)/3 = (2\sigma_r - \sigma_\varphi)/3, \quad S_\varphi = (2\sigma_\varphi - \sigma_r)/3, \\ S_z = -(\sigma_r + \sigma_\varphi)/3 \Rightarrow \tau = \sqrt{(\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2)/3}. \quad (7.4)$$

Условие  $\tau = k$  определяет эллипс, вписанный в шестиугольник Треска при  $\sigma_0 = 2k$  — и описанный при  $\sigma_0 = k\sqrt{3}$ .

Далее считаем модель *жёстко-пластической без упрочнения*:  $\kappa_{\underline{\mu}}^e = 0$ ,  $k = \text{const}$ . В «жёстких» зонах  $f(\underline{\mu}) < k$  и напряжённое состояние не определяется. В зонах течения  $f = k$ , и в случае известных перерезывающих сил  $Q$  для трёх компонент  $\mu_{\alpha\beta}$  имеем ещё два дифференциальных уравнения, т. е. полную систему.

Остановимся на *осесимметричной* задаче:

$$\underline{\mu} = \mu_r(r)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \mu_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{Q} = Q(r)\mathbf{e}_r, \quad w = w(r), \\ \kappa_r = w'', \quad \kappa_\varphi = \frac{1}{r}w', \quad \mu_r' + \frac{1}{r}(\mu_r - \mu_\varphi) = -Q, \quad Q' + \frac{1}{r}Q = -q. \quad (7.5)$$

По виду уравнения моментов ясно, что предпочтительнее условие Треска. Для сплошной пластины

$$Q = -\frac{1}{r} \int_0^r r q dr \quad (7.6)$$

элементарное условие баланса сил. Пусть  $q > 0$  — пластина прогибается «вверх», и  $\mu_r, \mu_\varphi$  отрицательны. При  $r = 0$  будет  $\mu_r = \mu_\varphi$  — точка  $E$  на шестиугольнике (рис. 29) — с изменёнными обозначениями. Если на внешнем радиусе шарнирная опора, то  $\mu_r(a) = 0$ , и при изменении  $r$  от 0 до  $a$  «перемещаемся» от  $E$  до  $F$  —

$$(r\mu_r)' = -\mu_0 - rQ \Rightarrow \mu_0 a = \int_0^a (a-r)r q dr \quad (7.7)$$

(после интегрирования по частям). Для постоянной нагрузки

$$q_* = 6\mu_0/a^2. \quad (7.8)$$

Скорость прогиба находится из выражений  $\kappa_r$  и  $\kappa_\varphi$  при ассоциированном законе течения. На участке  $EF$

$$\dot{\kappa}_r = 0 \Rightarrow \dot{w} = C_1 r + C_2 \quad (7.9)$$

форма конуса.

При заделке на внешнем радиусе  $w'(a) = 0 \Rightarrow \kappa_\varphi(a) = 0$ , что возможно лишь на  $AB$  (или  $ED$ ). С возрастанием  $r$  от 0 до  $a$  «движемся» по  $EFA$ :  $EF$  для  $0 < r < \rho$  и  $FA$  при  $r > \rho$ . В случае  $q = \text{const}$   $Q = -qr/2$ . Уравнение моментов интегрируется сначала при  $r < \rho$  по формулам (7.7) ( $\rho$  в роли  $a$ ). Далее  $r > \rho$ :

$$\mu_\varphi = -\mu_0 + \mu_r, \quad \mu'_r + \frac{\mu_0}{r} = \frac{qr}{2} \Rightarrow \mu_0 \left(1 + \ln \frac{a}{\rho}\right) = \frac{a}{4}(a^2 - \rho^2). \quad (7.10)$$

Но  $q = 6\mu_0/\rho^2$  — имеем уравнение для  $a/\rho$  с корнем 1.37. В итоге

$$q_* = 11.3\mu_0/a^2. \quad (7.11)$$

## 8.8 Вариационные принципы для жёстко-пластического тела

Принципы минимума потенциальной энергии и дополнительной работы в теории упругости (п. 4.6) имеют свои аналоги в механике жёстко-пластического тела без упрочнения.

**Экстремальное свойство поля скоростей** ( $v = \dot{u}$ ). Функционал

$$J_1(v) = \int_V (\underline{\tau} \cdot \underline{\dot{\epsilon}} - f \cdot v) dV - \int_{O_2} p \cdot v dO \quad (v|_{O_1} \equiv v_0) \quad (8.1)$$

имеет минимум на истинном поле скоростей. Как и в п. 4.6, рассматривается трёхмерное тело с нагрузкой  $f$  в объёме и  $p$  на части поверхности  $O_2$ ; на остальной части  $O_1$  заданы скорости — это условие должно быть обеспечено. Заметим, что  $\underline{\tau}$  определяется тензором скоростей деформаций  $\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{D} = \nabla v^S$  согласно закону Мизеса

$$\underline{\tau} \cdot \underline{D} \rightarrow \max \Leftrightarrow (\underline{\tau} - \underline{\tau}') \cdot \underline{D} \geq 0 \quad (F(\underline{\tau}) = k). \quad (8.2)$$

Для обоснования принципа достаточно рассмотреть разность

$$J_1(\mathbf{v}') - J_1(\mathbf{v}) = \int_V [\underline{\boldsymbol{\tau}}' \cdot \underline{\mathbf{D}}' - \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{v})] dV - \int_O \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) dO. \quad (8.3)$$

Учтено, что  $(\mathbf{v}' - \mathbf{v})|_{O_1} = 0$  и введено истинное  $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ . Используя теорему о дивергенции и уравнение баланса сил в объёме, получим

$$J_1' - J_1 - \int_V (\underline{\boldsymbol{\tau}}' - \underline{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \underline{\mathbf{D}}' dV \geq 0. \quad (8.4)$$

Принцип установлен. Представляет интерес процедура с варьированием:

$$\begin{aligned} \delta J_1 - \int_V (\delta \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{D}} + \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \delta \underline{\mathbf{D}} - \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v}) dV - \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dO; \\ \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{D}} = \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v}, \quad \delta \mathbf{v}|_{O_1} = 0 \Rightarrow \\ \delta J_1 - \int_V [\delta \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{D}} - (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{v}] dV + \int_{O_2} (\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{p}) \cdot \delta \mathbf{v} dO = 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Подчёркнутое слагаемое тоже равно нулю — ассоциированный закон или жёсткая зона ( $\underline{\mathbf{D}} = 0$ ).

«Поле сравнения»  $\mathbf{v}'$  должно удовлетворять условиям не только на  $O_1$ , но и на поверхностях разрыва — должна быть непрерывна нормальная компонента  $v_n$ .

**Экстремальное свойство поля напряжений.** Функционал с ограничениями

$$J_2(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v}_0 dO, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}|_{O_2} = \mathbf{p}, \quad F(\underline{\boldsymbol{\tau}}) \leq k \quad (8.6)$$

имеет максимум на истинном поле напряжений. Можно увидеть аналогию с принципом дополнительной работы, если поменять знак и учесть, что в идеальной пластичности без упрочнения « $\hat{\Pi}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = 0$ ».

Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned}
 J_2 - J_2' &= \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} - \underline{\boldsymbol{\tau}}') \cdot \mathbf{v}_0 dO = \int_O \mathbf{n} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} - \underline{\boldsymbol{\tau}}') \cdot \mathbf{v} dO = \\
 &= \int_V [\nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} - \underline{\boldsymbol{\tau}}') \cdot \mathbf{v} + (\underline{\boldsymbol{\tau}} - \underline{\boldsymbol{\tau}}') \cdot \underline{\mathbf{D}}] dV \geq 0. \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

Не является необходимой, но представляет интерес вариационная процедура с множителями Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 \delta J_2 &= \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v}_0 dO - \int_V \nabla \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\Lambda} dV = \\
 &= \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot (\mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\Lambda}) dO + \int_V \delta \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \boldsymbol{\Lambda}^S dV = 0. \quad (8.8)
 \end{aligned}$$

Очевидно,  $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{v}$ . В жёсткой зоне («внутри поверхности текучести»)  $\delta \underline{\boldsymbol{\tau}}$  произвольно —  $\nabla \boldsymbol{\Lambda}^S = 0$ . В состоянии текучести  $\nabla \boldsymbol{\Lambda}^S$  «ортогонально»  $\delta \underline{\boldsymbol{\tau}}$  — ассоциированный закон.

## 8.9 Теоремы о предельной нагрузке

Уточним понятие предельной нагрузки. Рассмотрим постановку

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} + m \mathbf{f} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}|_{O_2} = m \mathbf{p}, \quad \mathbf{v}|_{O_1} = 0, \\
 \underline{F}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) &\leq k, \quad (\underline{\boldsymbol{\tau}} - \underline{\boldsymbol{\tau}}') \cdot \underline{\mathbf{D}} \geq 0. \quad (9.1)
 \end{aligned}$$

Коэффициент нагрузки  $m$  монотонно возрастает от нуля. С ним растут и напряжения. Но подчёркнутое неравенство их ограничивает. Точная верхняя граница (супремум)  $m_*$  есть коэффициент предельной нагрузки. Две теоремы позволяют оценить  $m_*$  сверху и снизу.

**Кинематическая теорема** основана на неравенстве (8.4). На истинном поле скоростей  $J_1 = 0$  — благодаря закреплению на  $O_1$ . Поэтому

$$J_1(\mathbf{v}') \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{\int_V \underline{\boldsymbol{\tau}}' \cdot \underline{\mathbf{D}}' dV}{\int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}' dV + \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}' dO} \equiv m_k. \quad (9.2)$$

Отношение  $m_k$  называется кинематическим коэффициентом предельной нагрузки. Он определяется интегралами по заданному полю  $v'$  и даёт оценку сверху.

**Статическая теорема** выражается неравенством

$$m \geq m_s, \quad (9.3)$$

где  $m_s$  называется статическим коэффициентом. В отличие от  $m_k$ , для  $m_s$  нет общего выражения. Он находится по «статически допустимому»  $\underline{\tau}'$ :

$$\nabla \cdot \underline{\tau}' + m_s \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\tau}'|_{O_2} = m_s \mathbf{p}, \quad F(\underline{\tau}') \leq k. \quad (9.4)$$

Для обоснования (9.3) достаточно проинтегрировать неравенство Мизеса:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_V (\underline{\tau} - \underline{\tau}') \cdot \underline{\mathbf{D}} dV = \int_O \mathbf{n} \cdot (\underline{\tau} - \underline{\tau}') \cdot \mathbf{v} dO - \int_V \nabla \cdot (\underline{\tau} - \underline{\tau}') \cdot \mathbf{v} dV = \\ &= (m - m_s) \left( \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dO + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \right) \Rightarrow (9.3), \end{aligned}$$

поскольку мощность нагрузок положительна.

Для иллюстрации рассмотрим консольную балку с опорой на свободном конце при действии равномерной нагрузки  $p$  (рис. 30). Сначала вычислим кинематический коэффициент для скоростей с двумя пластическими шарнирами (при  $x = 0$  и  $\xi$ ):

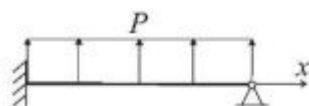


Рис. 30

$$v' = \begin{cases} x/\xi, & x < \xi \\ (l-x)/(l-\xi), & x > \xi \end{cases} \quad (9.5)$$

При этом знаменатель в (9.2) равен

$$\int_0^l p v' dx = pl/2.$$

Вклад в числитель (9.2) дают лишь области течения; в нашем случае это два шарнира. Диссипация в шарнире равна  $M_s \omega$ , где  $\omega$  — соответствующая угловая скорость. В шарнире  $x = 0$  будет  $\omega = \xi^{-1}$ , а при  $x = \xi$  имеем  $\omega = \xi^{-1} + (l - \xi)^{-1}$ . Поэтому

$$m_k = 2M_s (2\xi^{-1} + (l - \xi)^{-1}) / pl. \quad (9.6)$$

Но  $\xi$  — любое от 0 до  $l$ ; наилучшая оценка сверху

$$\min m_k = 2M_*(3 + 2\sqrt{2})/pl^2. \quad (9.7)$$

Совсем иначе определяется статический коэффициент. Шарнирная опора создаёт реакцию  $R$ ; изгибающий момент  $M(x) = -R(l-x) + m_s p(l-x)^2/2$ . Статически возможное состояние будет при

$$|M(x)| \leq M_* \Rightarrow \begin{cases} -Rl + m_s p l^2 / 2 \leq M_* \\ R^2 \leq 2m_s p M_* \end{cases}. \quad (9.8)$$

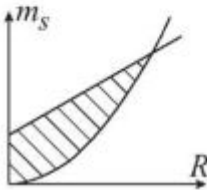


Рис. 31

Эта система неравенств определяет в плоскости параметров  $R$ ,  $m_s$  область между прямой линией и параболой (рис. 31). Любое значение  $m_s$  из этой области является статическим коэффициентом. Но наилучшая оценка снизу —  $\max m_s$  — соответствует пересечению прямой и параболы. Поразительно, что оно совпадает с (9.7) — найдено точное значение  $m_*$ .

Заметим, что ни поле скоростей, ни напряжённое состояние не найдены — но ведь целью является лишь  $m_*$ .

Совпадение коэффициентов  $m_s$  и  $m_k$  характерно для «*волных решений*». Разыскивая  $\underline{u}$  и  $v$ , мы одновременно определяем  $m_s$  и  $m_k$ ; даже если  $\underline{u}$  и  $v$  отличаются от истинных, предельная нагрузка определится точно. Заметим, что если при постановке в напряжениях нашлось несколько значений нагрузки, то ближе к истине большее, а не меньшее.

## Библиография

О дислокационном механизме пластической деформации написано у Ю. Н. Работнова [81] и Н. П. Малинина [57].

Математическая сторона теории пластичности представлена в книгах Л. А. Галина [19], А. Ю. Ишлинского и Д. Д. Ивлева [35], Л. М. Качанова [37], Р. Хилла [110], Р. Темама [92].

Следует рекомендовать и книги В. Прагера и Ф. Ходжа [80], У. Джонсона и П. Меллера [30], В. Д. Клошникова [39] и В. В. Соколовского [90].

Об эффективной в приложениях деформационной теории написано у А. А. Ильюшина [34].

# Глава 9

## Разрушение

### 9.1 О критериях прочности

Механические напряжения являются результатом осреднения межатомных сил. При сближении частиц силы отталкивания могут неограниченно расти. Но когда частицы расходятся, силы притяжения сначала растут, а затем падают до нуля. Возникает понятие теоретической прочности  $\sigma_0$ , но с ним и вопросы: почему реальная прочность может быть в тысячу раз меньше  $\sigma_0$ , почему возможно разрушение при сжатии и др.

Наивны попытки объяснить поведение реальных тел на дискретных моделях с регулярным расположением частиц. Представляющийся однородным и изотропным кусок стали — это ведь поликристаллический композит; каждый кристаллик (зерно) однороден и анизотропен, ориентация зерен хаотична, в кристаллической решетке множество точечных дефектов (вакансий и примесных частиц) и дислокаций... Эти явления интенсивно изучаются не только в физике твёрдого тела, но и в механике [27, 49, 93].

Практический конструктивный взгляд на проблему прочности может быть таким: разрушение наступает, когда некоторая «возрастающая» функция  $F(\underline{\tau})$  достигает предельного значения  $\sigma_*$ , вид  $F$  определяется по множеству разрушающих испытаний ( $\underline{\tau} = \lambda \underline{\tau}_0$ ,  $\underline{\tau}_0$  задано,  $\lambda$  растёт до разрушения — и так для достаточно полного набора  $\underline{\tau}_0$ ). При этом начало пластического течения оказывается частным случаем.

Для анизотропных материалов вид  $F(\underline{\tau})$  бывает причудливым, вклады компонент могут сильно различаться. Например, дерево «бьётся» касательных напряжений вдоль волокон — вклад их в  $F$  значителен. Становятся опасными даже маленькие напряжения, если действуют на площадках со слабым сцеплением.

В случае изотропии  $F$  зависит лишь от инвариантов  $\underline{\tau}$  — или от глав-



ных значений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Допустив, что разрушение наступает лишь от растяжения, принимают  $F = \sigma_1$  при  $\sigma_1 > 0$  и  $F = 0$  для  $\sigma_1 < 0$ . Так не описать возможное разрушение при сжатии, поэтому используют критерий наибольшего удлинения:  $F = \varepsilon_1 (> 0) - \max \varepsilon_n$ . Для пластических материалов в роли  $F$  иногда выступают нормы Мизеса и Треска.

Весьма естественно предложение Мора, связанное с его круговой диаграммой (рис. 6, п. 3.6). Каждому разрушающему испытанию соответствует своя тройка кругов Мора в плоскости  $\sigma_n, t_n$ . Предполагается, что есть некая «точная верхняя граница» с уравнением  $f(\sigma_n, t_n) = \sigma_*$ ; прочность обеспечена, если крути не выходят за границу.

Огромная работа экспериментаторов по определению  $F$  и  $\sigma_*$  в значительной мере обесценивается случайным характером  $\sigma_*$  с большим разбросом. Например, прочность на разрыв образца существенно зависит от состояния его поверхности; шлифовка, растворение поверхностного слоя (соли) повышают прочность. Поэтому в расчётах вводят «коэффициент запаса», снижая  $\sigma_*$ ...

Не отказываясь от этих старых представлений, сейчас следует предпочесть иное: *прочность определяется дефектами, разрушение есть их быстрый рост* [24]. Механика хрупкого разрушения с трещинами развивается интенсивно и превращается в классику [36, 65, 77, 109, 112].

Основоположником механики трещин считается Гриффитс. В 1920 г. (в возрасте 27 лет) он обратил внимание на энергетику роста трещин. Больших сил для разрушения недостаточно, нужна ещё энергетическая поддержка. Энергию растущей трещины даёт само тело — оно разгружается. По Гриффитсу, разрушение происходит, когда рост трещины становится «энергетически выгодным».

## 9.2 Напряжённое состояние у фронта трещины

Двумерные задачи с прямолинейными разрезами более просты — начнём с них. В декартовой плоскости  $x_1, x_2$  трещина является отрезком  $x_2 = \pm 0$ ,  $|x_1| \leq l$ . На свободных берегах разреза

$$\tau_2 = e_2 \cdot \underline{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{22} = \tau_{21} = \tau_{23} = 0. \quad (2.1)$$

Для небольшой трещины внутри тела решение можно считать суммой двух слагаемых. Первое — для тела без трещины; оно не удовлетворяет (2.1):  $\tau_2(x) \neq 0$ . Второе — для бесконечной плоскости с разрезом при нагрузке  $\tau_2$  на берегах. Только второе решение важно в механике трещин.

В нём возникают бесконечные напряжения на фронте ( $x_1 = \pm l$ ), характеризующиеся коэффициентами интенсивности напряжений (КИН).

Это второе решение, в свою очередь, состоит из трёх — по числу компонент в (2.1). Ставятся три задачи — две плоских и антиплоская.

**Антиплоская задача** с однородным состоянием на бесконечности рассмотрена в п. 4.7. Комплексный потенциал (7.6, гл. 4) представим

$$g(z) = -\frac{i\tau}{\mu}z + f(z), \quad f(z) \equiv \frac{i\tau}{\mu} \left( z - \sqrt{z^2 - l^2} \right) = \frac{i\tau l^2}{2\mu z} + \dots \quad (2.2)$$

Представляет интерес лишь слагаемое  $f(z)$  — для нагрузки на берегах. У вершины трещины  $z = l + re^{i\theta}$ ,  $r \rightarrow 0$ ,

$$f(z) = \text{const} - \frac{iK_3}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (z - l) + \dots, \quad K_3 = \tau\sqrt{\pi}l \quad (2.3)$$

таков КИН в этой задаче. Согласно (7.5, гл. 4), при  $r \rightarrow 0$

$$u = \text{const} + \frac{K_3}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

важные асимптотические формулы для перемещений и напряжений.

Обобщим постановку: на берегах разреза  $\tau_2 = \tau(x)$  — произвольная заданная нагрузка. Решение ищем в виде

$$\mu f'(z) = h(z)/\sqrt{z^2 - l^2} \quad (2.5)$$

с той же особенностью, что в (2.3). Функцию  $h(z)$  удаётся найти как интеграл Коши<sup>1</sup>

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (2.6)$$

где контур интегрирования состоит из обоих берегов разреза ( $x_2 = \pm 0$ ,  $|x_1| \leq l$ ) и окружности  $|\zeta| = M \rightarrow \infty$ . В (2.2) имеем  $f'(z) = O(z^{-2})$  при  $z \rightarrow \infty$ ; предполагая это и для (2.5), обнаружим исчезновение интеграла по окружности. Остаётся

$$2\pi i h(z) = \int_{-l}^l \frac{h^+(x)}{x - z} dx + \int_l^{-l} \frac{h^-(x)}{x - z} dx = \int_{-l}^l \frac{h^+ - h^-}{x - z} dx. \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> подобно п. 4.10

Далее используем (7.5, гл. 4):

$$\tau_1 - i\tau_2 = \mu f'(z) = h^\pm(x) / \pm i\sqrt{l^2 - x^2} \quad (x_2 = \pm 0). \quad (2.8)$$

Но  $\tau_1$  нечётно по  $x_2$ , а  $\tau_2^+ = \tau_2^- = -\tau(x)$ ; следовательно,

$$h^+ - h^- = -2\tau\sqrt{l^2 - x^2}, \quad \mu f'(z) = \frac{1}{\pi i\sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{\tau(x)\sqrt{l^2 - x^2}}{z - x} dx. \quad (2.9)$$

Вблизи вершины  $z \rightarrow l$

$$\mu f' = \frac{-iK_3}{\sqrt{2\pi(z-l)}} + \dots, \quad K_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}l} \int_{-l}^l \tau(x)\sqrt{\frac{l+x}{l-x}} dx. \quad (2.10)$$

Асимптотические формулы (2.4) сохраняются, но с другим КИН.

**Плоские задачи**, в общем случае намного более сложные, имеют простые решения для плоскости с трещиной. Потенциалы Мусхелишвили (п. 4.9) выражаются через одну функцию. В задаче о растяжении ( $\tau_{22} = -p(x_1)$ ,  $\tau_{21} = 0$  при  $x_2 = \pm 0$ ,  $|x_1| \leq l$ ) Вестергард предложил

$$\varphi' = \frac{1}{2}w, \quad \psi' = -\frac{1}{2}zw' \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}(W - zw), \quad W \equiv \int w dz. \quad (2.11)$$

Тогда по общим формулам (9.28, гл. 4)

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \operatorname{Re} w - x_2 \operatorname{Im} w', & \tau_{22} &= \operatorname{Re} w + x_2 \operatorname{Im} w', & \tau_{12} &= -x_2 \operatorname{Re} w', \\ 2\mu u_1 &= (1 - 2\nu) \operatorname{Re} W - x_2 \operatorname{Im} w, & 2\mu u_2 &= 2(1 - \nu) \operatorname{Im} W - x_2 \operatorname{Re} w. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Надо найти  $w(z)$  по известной вещественной части на разрезе. Но решение уже есть: мы получили (2.9) по заданной мнимой части;  $w$  имеет вид (2.9), но без  $i$ . У вершины  $w$  выглядит как (2.10), только без  $(-i)$  и с  $K_1$ .

Из (2.12) выводятся асимптотические формулы

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \\ \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{K_1}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \begin{pmatrix} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \\ \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

сложнее (2.4), но с той же особенностью при  $r \rightarrow 0$ .

**Задача о сдвиге** ( $\tau_{22} = 0$ ,  $\tau_{21} = -\tau(x_1)$ ) решается с иной подстановкой Вестергарда:

$$\varphi' = -\frac{i}{2} w_2, \quad \psi' = \frac{i}{2} (2w_2 + z w_2'). \quad (2.14)$$

Однако всё очень похоже на задачу растяжения. КИН  $K_2$  выглядит как  $K_3$  (и  $K_1$ ).

Асимптотические формулы считаются справедливыми не только в плоских задачах, но и в *пространственных*. Трещина является поверхностью ( $\Sigma$ ), фронт — линией ( $\Gamma$ ). В каждой точке фронта направления касательной ( $l$ ) и нормалей ( $\nu$ ,  $n$ ) играют роли  $x_3$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ . Три коэффициента интенсивности — функции дуговой координаты  $l$ .

### 9.3 Силы, действующие на фронт трещины

Этот вопрос невозможно понять без представлений лагранжевой механики. Ясность внесли Райс и Друккер (1967), вычислив изменение энергии при виртуальном продвижении фронта. Пусть каждая точка фронта  $\Gamma$  перемещается на расстояние  $\delta s(l)$  в направлении нормали  $\nu$  в плоскости разреза; если изменение энергии

$$\delta \mathcal{D} = - \int_{\Gamma} G \delta s \, dl, \quad (3.1)$$

то  $G$  есть соответствующая сила на единицу длины.

Рассматривается тело с поверхностными силами  $\mathbf{p}$  на части границы  $O_2$  и с закреплением на остальной части  $O_1$ . Вместо трещины — полость с поверхностью  $\Sigma_0$ . Энергия

$$\mathcal{D} = \int_V \Pi(\underline{\varepsilon}) \, dV - \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dO \quad (\mathbf{u}|_{O_1} = 0) \quad (3.2)$$

это не функционал, а значение на истинном решении. Для виртуально расширившейся полости

$$\mathcal{E} + \delta\mathcal{E} = \int_{V-\delta V} \Pi(\underline{\underline{\varepsilon}} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}) dV - \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) dO. \quad (3.3)$$

объём полости увеличился на  $\delta V$ , а границей стала поверхность  $\Sigma_1$ . Изменение энергии

$$\delta\mathcal{E} = \int_{V-\delta V} (\Pi(\underline{\underline{\varepsilon}} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}) - \Pi(\underline{\underline{\varepsilon}})) dV - \int_{\delta V} \Pi(\underline{\underline{\varepsilon}}) dV - \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u} dO. \quad (3.4)$$

Поверхностный интеграл можно эффектно преобразовать. На  $O_1$   $\delta\mathbf{u} = 0$ , на  $O_2$   $\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} = \mathbf{n} \cdot (\underline{\underline{\tau}} + \delta\underline{\underline{\tau}}) = \mathbf{p}$ , на  $\Sigma_1$   $\mathbf{n} \cdot (\underline{\underline{\tau}} + \delta\underline{\underline{\tau}}) = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{u} dO &= \int_{O+\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot (\underline{\underline{\tau}} + \delta\underline{\underline{\tau}}) \cdot \delta\mathbf{u} dO = \\ &= \int_{V-\delta V} [\nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} + \delta\underline{\underline{\tau}}) \cdot \delta\mathbf{u} + (\underline{\underline{\tau}} + \delta\underline{\underline{\tau}}) \cdot \delta\underline{\underline{\varepsilon}}] dV, \end{aligned} \quad (3.5)$$

причём подчёркнутое выражение равно нулю (равновесие без объёмных сил). В (3.4) получаем

$$\delta\mathcal{E} = \int_{V-\delta V} [\Pi(\underline{\underline{\varepsilon}} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}) - \Pi(\underline{\underline{\varepsilon}}) - (\underline{\underline{\tau}} + \delta\underline{\underline{\tau}}) \cdot \delta\underline{\underline{\varepsilon}}] dV - \int_{\delta V} \Pi dV. \quad (3.6)$$

Отметим, что это написано не по правилам исчисления бесконечно малых. Но всё верно, малые разного порядка здесь смешиваются. Используя формулу Тейлора

$$\Pi(\underline{\underline{\varepsilon}} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}) = \Pi(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \underline{\underline{\tau}} \cdot \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \delta\underline{\underline{\tau}} \cdot \delta\underline{\underline{\varepsilon}} + \dots \quad (\underline{\underline{\tau}} = \partial\Pi/\partial\underline{\underline{\varepsilon}}), \quad (3.7)$$

преобразуем (3.6):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} &= -\frac{1}{2} \int_{V-\delta V} \delta\underline{\underline{\tau}} \cdot \delta\underline{\underline{\varepsilon}} dV - \int_{\delta V} \Pi dV, \\ \int_{V-\delta V} \delta\underline{\underline{\tau}} \cdot \delta\underline{\underline{\varepsilon}} dV &= \int_{O+\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot \delta\underline{\underline{\tau}} \cdot \delta\mathbf{u} dO = - \int_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \delta\mathbf{u} dO \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \delta\mathbf{u} dO - \int_{\delta V} \Pi dV. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Далее — предельный переход от полости к трещине. Равен нулю объём полости между берегами разреза (и его приращение  $\delta V$ ). Поверхность  $\Sigma_1 = \Sigma_0 + \delta\Sigma$ , где  $\delta\Sigma$  есть узкая полоска из виртуальных продвижений фронта — с двумя берегами (+ и -). Вводя нормаль  $\mathbf{N}$  к  $\delta\Sigma$  в обычном смысле, получим

$$\mathbf{n}\Big|_{\delta\Sigma^\pm} = \mp \mathbf{N}, \quad \delta\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \int_{\delta\Sigma} \mathbf{N} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \delta\mathbf{u}\Big|_{-}^{+} dO. \quad (3.9)$$

Учтено, что  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$  — для неподвижного фронта и непрерывен на  $\delta\Sigma$ .

В интеграле по узкой полоске

$$\int_{\delta\Sigma} (\dots) dO = \int_{\Gamma} dl \int_0^{\delta s} (\dots) dx_1 \quad (3.10)$$

можно использовать асимптотические формулы для  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$  и  $\mathbf{u}$ . При этом в  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$  надо считать  $\theta = 0$ , а в  $\delta\mathbf{u} = (\mathbf{u} + \delta\mathbf{u})\Big|_{-} - \theta = \pm\pi$ . Результатом интегрирования будет (3.1), причём

$$G = \frac{1}{2\mu} [K_3^2 + (1-\nu)(K_1^2 + K_2^2)]. \quad (3.11)$$

Это — *трещиновдвижущая сила*. Она положительна — рост трещины всегда «энергетически выгоден» для факторов  $\mathcal{E}$  (внешних сил и упругих внутренних). Любая трещина губительна для упругого тела. К счастью, есть ещё неупругие внутренние силы у фронта трещины, от которых возникает некая сила сопротивления  $G_*$ . *Трещина не растёт при  $G < G_*$* .

Использование этого критерия прочности — большой шаг вперед от старых представлений (п. 9.1). «Трещиностойкость»  $G_*$  важнее прочности на разрыв  $\sigma_*$ ; эти величины напрямую не связаны, материал с большей  $\sigma_*$  может иметь меньшую  $G_*$  [24]. Гриффите в роли  $G_*$  видел поверхностную энергию, но более поздние исследования других авторов выявили преимущественный вклад работы пластической деформации.

Два серьёзных вопроса остаются без ответа. Первый: при замене в задаче о растяжении  $p$  на  $-p$   $K_1$  меняет знак, а  $G$  — нет. Но ведь трещина не должна расти от сжатия... Второй: сдвиговые напряжения ( $K_2$  и  $K_3$ ) дают вклад в  $G$  не меньший, чем растяжение ( $K_1$ ), хотя представляются значительно менее опасными. Возможно, следует выделить в  $G_*$  три слагаемых и формулировать критерий так:

$$K_1 < K_{1*}, \quad |K_2| < K_{2*}, \quad |K_3| < K_{3*}. \quad (3.12)$$

Критерий с  $K_1$  хорошо известен.

## 9.4 Учёт сил сцепления

Сингулярность в напряжениях на фронте трещины получена в рамках линейной теории упругости, где  $\mathbf{u}$  и  $\underline{\tau}$  должны быть малыми. Не стоит преувеличивать масштаб этого противоречия, сингулярности встречаются во всех разделах линейной математической физики.

Г. И. Баренблатт показал (1960 г.), что *сингулярность на фронте исчезает* при учёте сил сцепления между берегами. Нагрузка на берегах в задаче о растяжении равна  $p(x) - q(x)$ , где  $q$  — силы сцепления (локализованы у вершины). Коэффициент интенсивности равен нулю:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l (p - q) \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} dx \equiv K_1 - K_{1*} = 0. \quad (4.1)$$

Имеется в виду предельное состояние, когда  $q$  определяется лишь свойствами материала.

Вместе с КИН исчезает и  $\sqrt{r}$  в выражении перемещений. Это значит, что очертания берегов не параболические, а с плавным переходом в ось  $x_1$ , что естественно.

Сходные соображения представлены Дагдейлом, Леоновым и Панасюком (около 1960 г.). У этих авторов  $q = \text{const}$ , но лишь на участке некоторой длины  $a$  у фронта. Величина  $a$  находится из равенства  $K_1 = 0$ . Предложен особый «деформационный» критерий роста трещины: расхождение берегов на расстоянии  $a$  от фронта должно увеличиться до  $\delta_*$  (const). В результате оказывается, что при бесконечно малой длине трещины разрушающая нагрузка стремится не к  $\infty$  ( $p\sqrt{\pi l} = K_{1*}$ ), а к  $q$ . У Дагдейла  $q$  — это теоретическая прочность, у Леонова и Панасюка — предел текучести. Выкладки этих авторов есть во многих книгах [65, 32].

## 9.5 J-интеграл и определение КИН

В двумерных задачах с трещиной J-интеграл Райса имеет вид

$$J = \int_C (\Pi n_1 - \mathbf{n} \cdot \underline{\tau} \cdot \partial_1 \mathbf{u}) dl. \quad (5.1)$$

Он рассматривается на разомкнутых контурах, начинающихся на одном берегу и заканчивающихся на другом (рис. 32). Это одно из самых известных понятий механики трещин. Оказывается, трещина начинает расти, когда  $J$  достигает критического значения  $J_*$ .

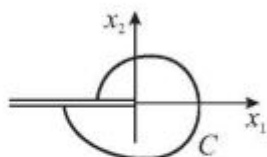


Рис. 32

Для выяснения смысла  $J$  сначала убедимся, что на любом замкнутом контуре  $\partial F$  (не охватывающем вершину), интеграл равен нулю. Используем теорему о дивергенции:

$$J = \oint_{\partial F} (\Pi n_1 - \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \partial_1 \mathbf{u}) dl = \int_F (\partial_1 \Pi - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \partial_1 \mathbf{u} - \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \partial_1 \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) dF;$$

$$\partial_1 \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \partial_1 \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \partial_1 \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0 \Rightarrow J = 0. \quad (5.2)$$

Далее покажем, что на всех разомкнутых контурах как на рис. 32 значения  $J$  одинаковы. Добавим второй контур — больший. Вместе с «горизонтальными» отрезками на берегах получается замкнутый контур, на нём  $\oint = 0$ . Но на берегах  $n_1 = 0$ ,  $\mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = 0$  — вклад в интеграл нет. Учитывая, что в  $\oint$  орт  $\mathbf{n}$  направлен наружу, получаем желаемое.

И самое важное:

$$J = G \quad (5.3)$$

равен трещиноподвижной силе. Для доказательства можно считать контур окружностью и воспользоваться асимптотическими формулами. При антиплоской деформации

$$\Pi = \frac{1}{2\mu} \frac{K_3^2}{2\pi r}, \quad n_1 = \cos \theta, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{k},$$

$$\partial_1 \mathbf{u} = \left( \cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \right) \frac{K_3}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{k} \Rightarrow (5.3).$$

Равенство (5.3) всё проясняет, но некоторые авторы отмечают и другое:  $J$  определяет поток энергии внутрь контура и позволяет оценить роль физической нелинейности (автор этих строк к их числу не относится).

Прикладное значение J-интеграла — в возможности определения КИН (или  $G$ ). Обычный численный метод конечных элементов не позволяет



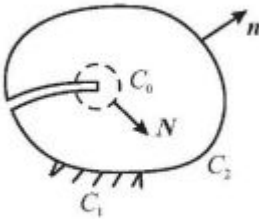


Рис. 33

выявить особенность — аппроксимация не допускает. Однако МКЭ вполне эффективен вдали от фронта, там и надо брать контур интегрирования...

Поскольку КИН являются основными расчётными неизвестными, представляет интерес новый вариационный принцип с независимым варьированием перемещений и коэффициентов интенсивности [32]. В простом случае антиплоской деформации (рис. 33) функционал имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, v, K) &= \int_F (\Pi(\nabla u) - fu) dF - \int_{C_2} pu dl + e(K), \\ u|_{C_1} &= u_1, \quad u|_{C_0} = KU + v. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Варьируется не только поле перемещений  $u$ , но и КИН ( $K$ ), а также перемещения вершины  $v$ . Область интегрирования  $F$  не содержит окрестности вершины с границей  $C_0$ . Энергия этой окрестности представлена слагаемым  $e(K)$ , вычисляемым по асимптотическому выражению  $U$  из (2.4).

Проварьируем (5.4):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E} &= \int_F (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \delta u - f \delta u) dF - \int_{C_2} p \delta u dl + e'(K) \delta K = \\ &= - \int_F (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + f) \delta u dl + \int_{C_2} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} - p) \delta u dl + \\ &+ \left( e' - \int_{C_0} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} U dl \right) \delta K - \int_{C_0} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} dl \delta v. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Вариационное уравнение  $\delta\mathcal{E} = 0$  содержит в себе не только обычные уравнения баланса и силовые граничные условия, но и уравнения

$$e' - \int_{C_0} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} U dl, \quad \int_{C_0} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = 0, \quad (5.6)$$

служащие для определения  $K$  и  $v$ .

Численные решения, а также доступные аналитические показали эффективность принципа. В [32] описана трёхмерная постановка с трещиной произвольной геометрии. Это альтернатива известному подходу с сингулярными конечными элементами [77].

## 9.6 Рост трещин

С продвижением фронта меняются КИН и трещиноподвижущая сила. Если они увеличиваются, рост трещины лавинообразен. Так будет при  $K_1 = p\sqrt{\pi l}$ ,  $K_2 = K_3 = 0$ . Но возможна иная ситуация, когда КИН уменьшаются; при этом *фронт может остановиться*. Например, в плоской задаче о растяжении с сосредоточенными силами на берегах

$$p(x) = T\delta(x), \quad K_1 = T/\sqrt{\pi l} \quad (6.1)$$

согласно (2.10). Трещина начинает расти при  $T = K_{1*}\sqrt{\pi l}$  и сразу останавливается.

Вообще, если в конструкции обнаружена трещина, её можно обезвредить установкой дополнительных упругих элементов ради убывания КИН с продвижением фронта (стяжек, заплаток и др.).

До сих пор считалось, в частности, что трещина не растёт при  $G < G_* = \text{const}$ . Однако в реальности обнаружен и *медленный докритический рост* с меньшими нагрузками. Для моделирования этого предлагается заменить  $G_*$  на «R-кривую» — возрастающую функцию продвижения фронта  $R(\tilde{l})$  [38]. При медленном росте

$$G - R = 0, \quad d(G - R)/dl < 0. \quad (6.2)$$

Если же «производная» положительна, рост лавинообразен.

Много неприятностей доставляет *усталостный рост* при циклической нагрузке. Проведено множество экспериментальных исследований и предложен ряд эмпирических зависимостей для описания роста. Отметим хотя бы уравнение

$$\frac{dl}{dn} = C(\Delta K)^m, \quad (6.3)$$

где  $l(n)$  — размер трещины как функция числа циклов,  $\Delta K$  — перепад КИН,  $C$  и  $m$  — постоянные [36]. При растяжении плоскости с прямым

разрезом

$$\frac{dl}{dn} = D l^{m/2}, \quad D \equiv C (\Delta p \sqrt{\pi})^m \Rightarrow \underline{l^{1-m/2}} - l_0^{1-m/2} = \left(1 - \frac{m}{2}\right) D n, \quad (6.4)$$

где  $l_0$  – начальная длина. Поскольку  $m > 2$ , подчеркнутое слагаемое исчезает при  $l \rightarrow \infty$  – получаем выражение числа циклов до разрушения

$$n_* = l_0^{1-m/2} / D \left(\frac{m}{2} - 1\right). \quad (6.5)$$

## 9.7 Длительная прочность и накопление повреждений

Успешно развивающаяся механика трещин не может описать все виды разрушений. Важны экспериментальные исследования длительной прочности: образец выдерживается в испытательной машине с растягивающим напряжением  $\sigma$  до разрушения через время  $t_*(\sigma)$ . Это монотонно убывающая функция;  $t_*(0) = \infty$ ,  $t_*(\infty) = 0$ .

Сразу возникает вопрос о «времени жизни»  $T_*$  при переменном напряжении  $\sigma(t)$ . Ответ содержится в «формуле накопления повреждений» [36, 40]:

$$\int_0^{T_*} \frac{dt}{t_*(\sigma)} = 1 \quad (7.1)$$

(при  $\sigma = \text{const}$  будет  $T_* = t_*(\sigma)$ ).

Нет удовлетворительного ответа на аналогичный вопрос при сложном напряжённом состоянии. «Эквивалентное напряжение» может быть  $\sigma_e = \sigma_1$  при растяжении и  $\sigma_e = 0$  при сжатии.

Для описания повреждений в точке вводятся *мера повреждённости*  $0 < \psi(\mathbf{r}, t) \leq 1$ : для «нового» материала  $\psi = 1$ , а при полном разрушении  $\psi \rightarrow 0$  (лёд на озере поздней весной). Знающий математическую физику читатель едва ли примет столь неопределённое понятие. Необходимо хотя бы *кинетическое уравнение* [36]

$$\dot{\psi} = f(\psi, \underline{\tau}, \dots) \quad (7.2)$$

для скорости накопления повреждений. Очевидно  $f < 0$ ; не выписаны возможные другие аргументы (не только температура).

При растяжении предложено

$$\dot{\psi} = f(\psi, \sigma) = -A \left( \frac{\sigma}{\psi} \right)^n. \quad (7.3)$$

Немного проясняется смысл  $\psi$ : часть связей в материале рвётся, для оставшихся напряжением будет  $\sigma/\psi$ . Уравнение интегрируется:

$$\frac{1}{n+1} (1 - \psi^{n+1}) = A \int_0^t \sigma^n dt. \quad (7.4)$$

Для  $\sigma(t) = \text{const}$  находим «время жизни»:

$$\psi = 0 \Rightarrow t_*(\sigma) = 1/(n+1) A \sigma^n \quad (7.5)$$

приемлемая аппроксимация кривой длительной прочности. Но тогда при переменном напряжении из (7.4) следует (7.1) – уже успех.

В книге [36] представлено много решённых задач о накоплении повреждений в дисках, балках и др.

## Библиография

Очень интересна и полезна популярная книга Дж. Гордона [24].

Теоретические основы механики трещин изложены у Н. Ф. Морозова [65], Г. П. Черепанова [112], Л. И. Слепяна [87], Л. М. Качанова [36], Т. Хеллана [109], В. З. Партон и Е. М. Морозова [77] и автора [32].

В книге [108] выделены особенности разрушения композитов.

Необходимые сведения об экспериментах изложены в [38].

Все стороны процесса разрушения представлены в книге Дж. Коллинза [40].

Механика рассеянного повреждения рассмотрена в [36, 81].

# Глава 10

## Реология

### 10.1 Реологические модели

Все тела сопротивляются нагрузке посредством деформации, но законы деформации оказываются более сложными, чем в упругом теле. Помимо упругих свойств всегда — в той или иной степени — проявляются свойства вязкости и пластичности. Как отмечалось в гл. 8, эффекты «чистой» пластичности не зависят от скорости деформирования; появление этой зависимости означает вязкость.

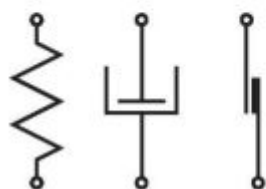


Рис. 34

Сочетание трёх свойств удобно рассматривать на одномерных реологических моделях [83]. Основными являются *три элемента* — упругий (винтовая пружина), вязкий (гидравлический амортизатор) и пластический (пластинки с сухим трением на фрикционной накладке). Схематическое изображение — на рис. 34. Они называются элементами Гука (H), Ньютона (N) и Сен-Венана (StV).

Законы деформирования, т. е. связь напряжения  $\sigma$  с деформацией  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \text{H: } \sigma &= E\varepsilon; & \text{N: } \sigma &= b\dot{\varepsilon} \\ \text{StV: } \sigma &= k \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon} = \begin{cases} k, & \dot{\varepsilon} > 0 \\ -k, & \dot{\varepsilon} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

с модулем Юнга  $E$ , коэффициентом вязкости  $b$  и пределом текучести  $k$ .

Из трёх основных элементов можно создавать комбинации с *последовательным* и *параллельным соединением*. При последовательном соединении двух элементов  $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Для параллельного соединения

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . На рис. 35 представлены модели Кельвина — Фойгта (а), Максвелла (б), Прандтля (с), Бингама (д).

Законы деформирования легко записываются для вязкоупругих материалов:

$$\begin{aligned} \text{a: } \sigma &= E\varepsilon + b\dot{\varepsilon}; \\ \text{b: } \dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{b}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Упруго-пластическому материалу Прандтля соответствует система уравнений

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^p, \quad \sigma = k \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^p. \quad (1.3)$$

Сложнее с материалом Бингама:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_2, \quad \sigma = b\dot{\varepsilon}_2 + k \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}_2. \quad (1.4)$$

Без математических выкладок ясно, что материал Кельвина — Фойгта — твёрдое тело, жёсткость которого возрастает со скоростью деформирования. Материал Максвелла — жидкость, текущая при любой постоянной нагрузке. Материал Прандтля, будучи упругим при малых нагрузках, становится жидкостью при больших. Представляя материал Бингама, часто говорят о жидкой краске: её обязательное свойство текучести должно исчезать при малой нагрузке.

Но как перейти к произвольному напряжённо-деформированному состоянию? Для упруго-пластических материалов это показано в гл. 8. Комбинация трёх свойств выглядит просто лишь в случае изотропии: шаровые части ( $\sigma$  и  $\theta$ ) связаны как в упругом теле, а для девиаторов используются соотношения типа (1.1):

$$\text{H: } \underline{\underline{S}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \text{N: } \underline{\underline{S}} = 2\eta\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \quad \text{StV: } \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \begin{cases} 0, & \tau(\underline{\underline{S}}) < k \\ \lambda\underline{\underline{S}}, & \tau = k \end{cases}. \quad (1.5)$$

Здесь  $\eta$  — коэффициент вязкости, а в модели пластичности использован ассоциированный закон с нормой Мизеса ( $\tau = \sqrt{\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{S}}/2}$ ).

Реологические элементы с последовательными или параллельными соединениями редко можно выделить в реальных телах. Правда, в композиционных материалах вроде армированных пластиков или суглинков это

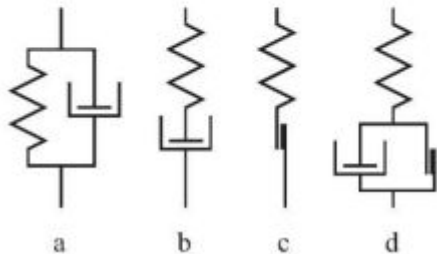


Рис. 35

возможно. Но в любом случае метод реологических моделей позволяет получать приемлемые определяющие уравнения без грубых нарушений законов природы. Параметры элементов ( $\mu$ ,  $\eta$ ,  $k$ ) можно находить по экспериментальным данным.

## 10.2 Линейная вязкоупругость

Комбинируя упругие и вязкие элементы, можно получить множество моделей линейной вязкоупругости. Связь девиаторов напряжений и деформаций выражается линейными дифференциальными операторами. Например, в «стандартном материале»

$$T_\sigma \dot{\underline{S}} + \underline{S} = 2\mu (T_\epsilon \dot{\underline{e}} + \underline{e}). \quad (2.1)$$

Здесь две постоянные времени – ползучести  $T_\epsilon$  и релаксации  $T_\sigma$ .

Соотношение (2.1) описывает две модели на рис. 36. В модели «а»

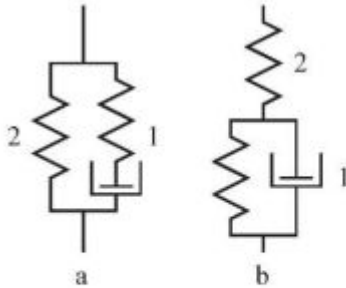


Рис. 36

$$\underline{S} = 2\mu_2 \underline{e} + \underline{S}_1, \quad \dot{\underline{e}} = \frac{1}{2\mu_1} \dot{\underline{S}}_1 + \frac{1}{2\eta} \underline{S}_1,$$

откуда следует (2.1) с параметрами  $\mu = \mu_2$ ,  $T_\sigma = \eta/\mu_1$ ,  $T_\epsilon = \eta(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})$ . Для модели «б»

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \frac{1}{2\mu_2} \underline{S} + \underline{e}_1, \quad \underline{S} = 2\mu_1 \underline{e}_1 + 2\eta \dot{\underline{e}}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu &= \mu_1 \mu_2 / (\mu_1 + \mu_2), \quad T_\sigma = \eta / (\mu_1 + \mu_2), \quad T_\epsilon = \eta / \mu_1. \end{aligned}$$

Заметим, что  $T_\sigma < T_\epsilon$  (релаксация быстрее ползучести).

Рассмотрим ползучесть – рост деформаций при постоянной нагрузке. В (2.1)  $\underline{S} = \underline{S}_0 \mathbf{1}(t)$ ,  $\underline{e} = (\underline{S}_0 / 2\mu) \Pi(t)$ ; функцию ползучести  $\Pi(t)$  найдём операционным методом (п. 1.4):

$$\begin{aligned} T_\sigma + \frac{1}{p} &= (p T_\epsilon + 1) \bar{\Pi}(p) \Rightarrow \bar{\Pi} = \frac{1}{p} - \frac{1 - T_\sigma / T_\epsilon}{p + 1 / T_\epsilon} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Pi(t) &= \mathbf{1}(t) - \left(1 - \frac{T_\sigma}{T_\epsilon}\right) e^{-t/T_\epsilon} - \end{aligned} \quad (2.2)$$

монотонно возрастающая функция,  $\Pi(0) = T_\sigma / T_\epsilon$ ,  $\Pi(\infty) = 1$ .

Аналогично исследуем релаксацию – падение напряжений при заданной постоянной деформации:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{\epsilon}}_0 \mathbf{1}(t), \quad \underline{\underline{S}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}_0 R(t), \quad (pT_\sigma + 1)\bar{R} = T_\epsilon + \frac{1}{p} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R(t) = \mathbf{1}(t) + \left(\frac{T_\epsilon}{T_\sigma} - 1\right) e^{-t/T_\sigma}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Функция монотонно убывает от  $R(0) = T_\epsilon/T_\sigma$  до  $R(\infty) = 1$ .

При произвольном деформировании

$$\underline{\underline{S}}(p) = 2\mu \bar{R}(p) p \underline{\underline{\epsilon}}(p) \Rightarrow \underline{\underline{S}}(t) = 2\mu \int_0^t R(t-\tau) \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

по теореме о свёртке (4.19, гл. 1).

Становится очевидным принцип соответствия: решение задачи линейной вязкоупругости в изображениях получается из решения для обычного упругого тела заменой  $\mu$  на  $\hat{\mu} = \mu p \bar{R}(p)$ . При этом сохраняется объёмный модуль  $K = E/(1 - 2\nu)$ , поэтому в изображениях

$$\hat{E} = 3K\hat{\mu}/(K + \hat{\mu}), \quad \hat{\nu} = (K - 2\hat{\mu})/2(K + \hat{\mu}). \quad (2.5)$$

Например, прогиб консольной балки  $u = Fl^3/3EJ$  ( $F$  – сила на конце,  $l$  – длина,  $J$  – момент инерции сечения). Заменяв  $E$  на  $\hat{E}$  из (2.5), можно получить связь изображений прогиба и силы.

При гармонических колебаниях все величины имеют вид  $u(t) = \tilde{u}e^{i\omega t}$ , где  $\tilde{u}$  – комплексная амплитуда; полагая  $p = i\omega$  и используя принцип соответствия, получим решение для амплитуд. В стандартном материале

$$\tilde{\mu} = \mu(1 + i\omega T_\epsilon)/(1 + i\omega T_\sigma). \quad (2.6)$$

У комплексных жесткостей важны не только модули, но и аргументы. Например, работа деформирования за период при одноосном растяжении-сжатии

$$A = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \dot{\epsilon} dt = \int_0^{2\pi/\omega} |\tilde{\sigma}| \sin(\omega t + \alpha) |\tilde{\epsilon}| \omega \cos \omega t dt = \pi |\tilde{\sigma}| |\tilde{\epsilon}| \sin \alpha \quad (2.7)$$

( $\tilde{\sigma} = \tilde{E}\tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{E} = |\tilde{E}|e^{i\alpha}$ ). Фазовый сдвиг (аргумент  $\tilde{E}$ ) в стандартном материале исчезает на малых и больших частотах.

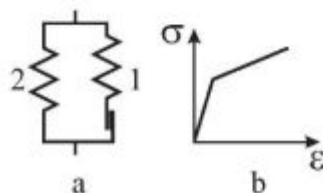


Интегральное соотношение (свёртка) (2.4) характерно для наследственной механики, в которой вообще

$$\underline{\tau}(t) = \int_0^t \underline{C}(t - \theta) \cdot \underline{\epsilon}(\theta) d\theta. \quad (2.8)$$

Принцип соответствия здесь остаётся в силе.

### 10.3 Пластические материалы



Представление о материале Прандтля (с идеальной пластичностью) в п. 10.1 такое же, как в гл. 8. Но в случае упрочнения возникает альтернатива — вместо подвижной поверхности текучести использовать усложнённую реологическую модель.

Одна из таких моделей показана на рис. 37, а. Для неё

Рис. 37

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2\mu_1} (\dot{\underline{S}} - 2\mu_2 \dot{\underline{\epsilon}}) + \begin{cases} 0, & \tau(\underline{S} - 2\mu_2 \underline{\epsilon}) < k \\ \lambda(\underline{S} - 2\mu_2 \underline{\epsilon}), & \tau = k \end{cases}. \quad (3.1)$$

На рис. 37, б — диаграмма растяжения. Имеем материал с линейным упрочнением, причём не изотропным, а трансляционным. Поверхность текучести (в пространстве напряжений) движется как твёрдое тело с центром в точке  $\underline{S} = 2\mu_2 \underline{\epsilon}$ . Соответственно, будет и эффект Баушингера.

Реологическая модель обобщённого материала Прандтля получается параллельным соединением:

$$\underline{S} = \sum \underline{S}_i, \quad \dot{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2\mu_i} \dot{\underline{S}}_i + \begin{cases} 0, & \tau(\underline{S}_i) < k_i \\ \lambda \underline{S}_i, & \tau_i = k_i \end{cases}. \quad (3.2)$$

На рис. 37 — частный случай с  $k_2 \rightarrow \infty$ . Диаграмма растяжения — ломаная. Если число «плеч» велико и параметры  $\mu_i, k_i$  медленно меняются с ростом индекса, то суммирование превратится в интегрирование, а диаграмма растяжения станет гладкой (выпуклой) линией. Такая модель используется для описания внутреннего трения в металлах (но упрочнение за площадкой текучести — вне её рамок).

В приближённых расчётах колебаний упруго-пластических тел применяется метод гармонической линеаризации. Представление о нём даёт следующий пример:

$$m\ddot{u} + h \operatorname{sgn} \dot{u} + cu = p \sin \omega t \quad - \quad (3.3)$$

вынужденные колебания груза на пружине с сухим трением. Нелинейная функция  $f(x)$  заменяется линейной с помощью ряда Фурье:

$$x = a \sin \varphi, \quad f(x) = A_1 \sin(\varphi) + A_2 \sin 2\varphi + \dots \approx Kx, \\ K = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad - \quad (3.4)$$

для нечётной  $f(x)$ . Коэффициент линеаризации  $K$  зависит от амплитуды  $a$ . Для  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  имеем  $K = 4/\pi a$ . Уравнение (3.3) становится линейным по форме и решается методом комплексных амплитуд:

$$m\ddot{u} + hK\dot{u} + cu = p \sin \omega t, \quad u = \operatorname{Im} \frac{p e^{i\omega t}}{c - m\omega^2 + i\omega hK} = \\ = U \sin(\omega t - \alpha), \quad U = \frac{p}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + \omega^2 h^2 K^2}}; \quad K = \frac{4}{\pi \omega U}. \quad (3.5)$$

Подчёркнутое выражение  $U$  – это ещё не ответ, надо учесть зависимость  $K(U)$ . Ответ будет

$$U = \sqrt{p^2 - (4h/\pi)^2} / |c - m\omega^2| \quad (3.6)$$

и  $U = 0$  при  $p < 4h/\pi$ .

Уравнение (3.3) решается точно, поскольку  $h \operatorname{sgn} \dot{u} = \pm h$ . Результат заметно отличается от (3.6), но отказываться от гармонической линеаризации не стоит.

## 10.4 Идеальная жидкость

Свойство текучести, в разной степени присущее всем реальным телам, в этой модели выражено максимально. Касательных напряжений нет – тензор напряжений шаровой:

$$\underline{\tau} = -p \underline{E}. \quad (4.1)$$

В несжимаемой жидкости плотность  $\rho = \text{const}$ , давление  $p$  не выражается через другие величины. В сжимаемой жидкости

$$p = p(\rho, T) \quad (4.2)$$

функция плотности и температуры. Частным случаем является уравнение Клапейрона – Менделеева

$$p\mu = \rho RT \quad (4.3)$$

( $\mu$  – молярная масса,  $R$  – газовая постоянная).

Используется пространственное описание (1.2, гл. 3) с материальной производной по времени (1.7, гл. 3). Уравнение баланса импульса (5.6, гл. 3) принимает вид

$$-\nabla p + \mathbf{f} = \rho(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}). \quad (4.4)$$

Полную систему уравнений механики идеальной жидкости составляют (4.2), (4.4), а также (4.3, гл. 3) (баланс массы) и (8.2, гл. 3) (баланс энергии – для определения температуры). Последнее не нужно при изотермическом процессе.

Используя преобразование (3.5, гл. 3), перепишем (4.4):

$$-\nabla p + \mathbf{f} = \rho(\partial_t \mathbf{v} + \nabla(v^2/2) + 2\mathbf{w} \times \mathbf{v}). \quad (4.5)$$

Считая процесс изотермическим, введём «функцию давления»

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} \Rightarrow \nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4.6)$$

Тогда при потенциальных массовых силах в (4.5) будет

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{f} = -\nabla \Pi, \quad \nabla \left( \frac{v^2}{2} + P + \Pi \right) + \partial_t \mathbf{v} + 2\mathbf{w} \times \mathbf{v} = 0. \quad (4.7)$$

Выражение в скобках – *интеграл Бернулли* – постоянно при стационарном безвихревом течении ( $\partial_t \mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{w} \equiv \nabla \times \mathbf{v}/2 = 0$ ). Если же выполнено лишь условие стационарности, интеграл постоянен на линиях тока ( $d\mathbf{R} \parallel \mathbf{v}$ ) и вихревых линиях ( $d\mathbf{R} \parallel \mathbf{w}$ ).

Возьмём ротор ( $\nabla \times$ ) от обеих частей (4.7):

$$\partial_t \mathbf{w} + \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = 0. \quad (4.8)$$

Это эволюционное уравнение для вектора вихря  $\mathbf{w}$  («угловой скорости» – см. п. 3.3). Из него следует, что *если в некий момент времени везде было  $\mathbf{w} = 0$ , то это сохранится* и в последующем.

Для безвихревого течения можно ввести потенциал скоростей и получить из (4.7) интеграл Лагранжа – Коши:

$$v^2/2 + P + \Pi + \partial_t \varphi = \text{const}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим *акустическое приближение*: малыми одного порядка считаются  $\mathbf{v}$ ,  $\tilde{p} = p - p_0$ ,  $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$ . Поликом обозначены давление и плотность в состоянии покоя; объёмных сил нет. Из (4.2), (4.4) и (4.3, гл. 3) получим

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}, \quad c^2 \equiv \frac{dp}{d\rho}, \quad -\nabla \tilde{p} = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}, \quad \dot{\tilde{\rho}} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \Rightarrow c^2 \Delta \tilde{p} = \ddot{\tilde{p}}. \quad (4.10)$$

Возмущения являются волновыми процессами со скоростью звука  $c$ ; локальную производную ( $\partial_t$ ) можно отождествить с материальной.

Для несжимаемой жидкости при потенциальном течении

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \Delta \varphi = 0. \quad (4.11)$$

Решив это уравнение Лапласа, можно далее найти давление с помощью интеграла Лагранжа – Коши.

С уравнением (4.11) связано классическое представление о *присоединённых массах* для твёрдого тела в жидкости. Скорость на поверхности тела  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , а кинетическая энергия  $T = (mv_c^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})/2$ . Для (4.11) получаем задачу Неймана с условием  $\partial_n \varphi = v_n$ , решение будет линейной функцией  $\mathbf{v}_c$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , а кинетическая энергия жидкости – квадратичной формой от этих аргументов. Увлекаемая телом жидкость просто меняет инерционные характеристики тела (массу, тензор инерции и эксцентриситет). Присоединённые массы тел простой формы давно известны [86].

Однако это представление может соответствовать реальности лишь для достаточно плавных движений, когда не проявляются эффекты сжимаемости.

Проста и очень хорошо развита *теория плоских потенциальных течений* несжимаемой жидкости. В этом случае вводится «функция тока»:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \nabla \psi \times \mathbf{k} \quad (4.12)$$

(орт  $\mathbf{k}$  перпендикулярен плоскости течения). Поскольку  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ , имеем условия Коши – Римана для вещественной и мнимой частей регулярной функции комплексного переменного  $\varphi + i\psi = f(z)$ . Задавая простые выражения  $f$  (дробно-рациональные, логарифмические), можно получить атлас соответствующих течений. Конформное отображение и интегральная формула Коши позволяют строить решения для обтекания тел различной формы.

## 10.5 Вязкая жидкость

Воду обычно считают идеальной жидкостью, и на твёрдой поверхности ставят единственное условие  $v_n = 0$  — нормальная компонента скорости. Но ближе к действительности  $\mathbf{v} = 0$ ; обеспечить это векторное условие можно в модели вязкой жидкости.

Вместо (4.1) принимается

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{E}} + 2\eta \nabla \mathbf{v}^S. \quad (5.1)$$

Вязкость  $\eta$  зависит от температуры, но в изотермическом процессе постоянна. Для несжимаемой жидкости  $p$  является самостоятельной неизвестной, а тензор скоростей деформаций  $\nabla \mathbf{v}^S$  — девиатором. Подстановка (5.1) в (4.4) приводит к уравнению Навье — Стокса

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} = \rho(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}). \quad (5.2)$$

При малой вязкости старшие производные проявляются лишь в тонком пограничном слое (см. п. 1.6 — метод сраживания асимптотических разложений), вне его жидкость ведёт себя как идеальная.

**Пример:** стационарное плоское течение в полосе  $|y| \leq h$  между неподвижными берегами. Естественно предположить, что скорость направлена по оси  $x$ :  $\mathbf{v} = v(x, y)\mathbf{i}$ . Тогда, согласно (4.12) и (5.2),

$$\partial_x v = 0, \quad -\partial_x p + \eta \Delta v = \rho v \partial_x v, \quad \partial_y p = 0. \quad (5.3)$$

Отсюда следует

$$\eta v''(y) = p'(x) = -C = \text{const}, \quad v = \frac{C}{2\eta} (h^2 - y^2), \quad p = -Cx + \text{const}. \quad (5.4)$$

Величина  $C$  есть перепад давления на единицу длины, он связан с «объёмным» расходом жидкости

$$Q = 2 \int_0^h v dy = 4Ch^3/3\eta. \quad (5.5)$$

Распределение скоростей  $v(y)$  называется параболой Пуазейля.

Результаты математического моделирования течений жидкости могут расходиться с реальностью. Поэтому необходимы экспериментальные ис-

следования. Физические модели течений строятся с соблюдением *критериев подобия*: безразмерные комбинации давлений, скоростей и других параметров должны быть равны. Наиболее известно число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho ch}{\eta}. \quad (5.6)$$

Экспериментально обнаружено, что при достаточно большом значении  $\text{Re}$  (порядка  $10^3$ ) течение теряет устойчивость, превращаясь в случайный процесс — наступает *турбулентность*. Объяснение этого остаётся за рамками классической механики сплошной среды. Но разработаны прикладные методы расчёта осреднённых величин в турбулентных течениях.

## 10.6 Ползучесть металлов

Это нелинейное явление, вязкоупругие модели здесь неприменимы. Оно особенно заметно при высоких температурах, ограничивая возможности длительной эксплуатации лопаток и дисков паровых турбин и других агрегатов.

На рис. 38 показана зависимость деформации образца от времени при одноосном растяжении. Скачок  $OA$  — это упругая или упруго-пластическая деформация. Выпуклый вверх участок  $AB$  — первая стадия ползучести. Далее вторая стадия  $BC$  — установившаяся ползучесть,  $\dot{\varepsilon} = \text{const}$ . На третьей стадии  $CD$   $\dot{\varepsilon}$  возрастает (некоторые авторы считают это кажущимся явлением, связанным с ростом напряжения от поперечного сужения) [81].

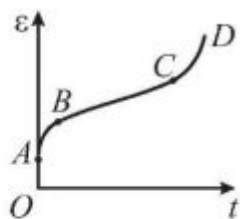


Рис. 38

При установившейся ползучести зависимость  $\dot{\varepsilon}$  от напряжения  $\sigma$  резко нелинейна. Предлагаются варианты [81]:

$$\dot{\varepsilon} = v_1(\sigma) = \varepsilon_n (\sigma/\sigma_n)^n, \quad v_2(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma < \sigma_n \\ \varepsilon_n \left( \frac{\sigma}{\sigma_n} - 1 \right)^n, & \sigma > \sigma_n \end{cases},$$

$$v_3(\sigma) = \varepsilon_e e^{\sigma/\sigma_e}, \quad v_4(\sigma) = 2\varepsilon_e \text{sh } \sigma/\sigma_e. \quad (6.1)$$

Показатель степени  $n = 8 \div 12$ . Параметры  $\varepsilon_n$ ,  $\sigma_n$  и др. зависят от температуры, так что  $\dot{\varepsilon}$  возрастает с  $T$ .

Для описания *одномерной ползучести* предложены три теории: старения, течения и *упрочнения*. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma, t) \text{ (a)}, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\sigma, t) \text{ (b)}, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\varepsilon, \sigma) \text{ (c)}. \quad (6.2)$$

Но явная зависимость от времени означает вмешательство некоего внешнего сильного фактора. Такого нет, поэтому предпочтительнее вариант (с) — упрочнение.

Уточним: в (6.2) следует считать  $\varepsilon = \varepsilon_p$  — за вычетом начальной деформации. Этим пренебрегают, если деформация ползучести значительна.

Для описания первой стадии ползучести полагают [81]

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon^{-\alpha} f(\sigma) \Rightarrow \varepsilon = [f(\sigma)t/m]^m, \quad m = 1/(\alpha + 1). \quad (6.3)$$

В начале 20-го века нашли  $\alpha = 2 \Rightarrow m = 1/3$ . На второй стадии вместо (6.3) имеем более простое  $\dot{\varepsilon} = v(\sigma)$  (смена стадий — при падении  $\dot{\varepsilon}$  до значения  $v$ ).

При *сложном напряжённом состоянии* в стадии установившейся ползучести полагают

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \partial\phi/\partial\underline{\boldsymbol{\tau}}. \quad (6.4)$$

«Потенциал скоростей ползучести»  $\phi$  для изотропного материала зависит от тех же аргументов, что в теории пластичности — норм Мизеса или Треска.

**Пример:** плоская деформация трубы под действием внутреннего давления, несжимаемый материал. Скорость  $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_r$  направлена по радиусу в цилиндрических координатах. Имеем  $\dot{\varepsilon}_r = u'$ ,  $\dot{\varepsilon}_\varphi = u/r$ ,

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = 0 \Rightarrow u = C/r^2. \quad (6.5)$$

Считая потенциал функцией от нормы Мизеса  $\phi(\tau)$ , в (6.4) получим

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \lambda(\tau) \underline{\mathbf{S}}, \quad \lambda \equiv \phi'(\tau)/2\tau. \quad (6.6)$$

При плоской деформации  $\dot{\varepsilon}_z = 0 \Rightarrow S_z = 0$ . Но тогда

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) = \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\boldsymbol{\tau}}, \quad S_r = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = -S_\varphi, \quad \tau = S_\varphi. \quad (6.7)$$

Посредством (6.5) и (6.6) можно далее найти зависимость  $\tau(r)$ :

$$\frac{C}{r^3} = \lambda S_\varphi = \lambda(\tau) \tau \Rightarrow \tau(r). \quad (6.8)$$

Осталось проинтегрировать уравнение равновесия:

$$\sigma'_r + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \Rightarrow \sigma'_r = \frac{2\tau}{r} \Rightarrow p = 2 \int_a^b \frac{\tau(r)}{r} dr \quad (6.9)$$

(при граничных условиях  $\sigma_r(a) = -p$ ,  $\sigma_r(b) = 0$  на внутреннем и наружном радиусах).

Уточним вид  $\lambda(\tau)$ , считая известной зависимость  $\dot{\epsilon} = v(\sigma)$  при одномерной установившейся ползучести. Имеем

$$\underline{\tau} = \sigma \mathbf{ii}, \quad \underline{\mathbf{S}} = \frac{\sigma}{3}(\mathbf{ii} - \mathbf{jj} - \mathbf{kk}), \quad \tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}},$$

$$\dot{\epsilon} = \lambda \left( \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \right) \frac{\sigma}{3} = v(\sigma) \Rightarrow \lambda(\tau) = \sqrt{3} v(\tau\sqrt{3})/\tau. \quad (6.10)$$

В случае степенного закона  $v = v_0 \sigma^n$  в (6.8) и (6.9) будет

$$\tau(r) = Ar^{-3/n}, \quad A \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{C}{v_0 \sqrt{3}} \right)^{1/n}, \quad p = \frac{2}{3} An \left( a^{-3/n} - b^{-3/n} \right). \quad (6.11)$$

По этим соотношениям находится величина  $C$ , определяющая скорость ползучести.

## Библиография

Реология неупругих материалов представлена у М. Рейнера [83] и К. Трусделла [103].

Вязкоупругим материалам посвящены книги Д. Бленда [8] и Р. Кристенсена [43].

Механика идеальной и вязкой жидкости очень хорошо изложена, в частности, у Л. Г. Лойцянского [50], Л. И. Седова [86], Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица [46]. Автор рекомендует и курс Р. Фейнмана [105].

О сложных и не вполне разработанных проблемах теории ползучести можно прочесть в книгах [81, 58].



# Список литературы

- [1] *Айзерман М. А.* Классическая механика. — М.: Наука, 1980. — 367 с.
- [2] *Акивис М. А., Гольдберг В. В.* Тензорное исчисление. — М.: Наука, 1972. — 351 с.
- [3] *Александров В. М., Ромалис Б. А.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. — 174 с.
- [4] *Алфутов И. А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. — 312 с.
- [5] *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. — 448 с.
- [6] *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. — 488 с.
- [7] *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. — 408 с.
- [8] *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. — М.: Мир, 1965. — 199 с.
- [9] *Блехман И. И., Мышкис А. Д., Цановко Я. Г.* Механика и прикладная математика. М.: Наука, 1990. — 360 с.
- [10] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
- [11] *Боли М., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964. — 517 с.
- [12] *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. — 339 с.
- [13] *Бутенин Н. В., Луцц Я. Л., Меркин Л. Р.* Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1985. — Т. 1. — 239 с., Т. 2. — 496 с.

- [14] *Васицзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 543 с.
- [15] *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
- [16] *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. — М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
- [17] *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. — 984 с.
- [18] *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М.: Наука, 1980. — 303 с.
- [19] *Галин Л. А.* Уругопластические задачи. — М.: Наука, 1984. — 232 с.
- [20] *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966. 300 с.
- [21] *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. — 512 с.
- [22] *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
- [23] *Гольдштейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 416 с.
- [24] *Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. М.: Мир, 1980. — 391 с.
- [25] *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. — М.: Наука, 1978. — 359 с.
- [26] *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — Киев: Наук. думка, 1981. — 284 с.
- [27] *Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. — М.: Мир, 1977. — 208 с.
- [28] *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.

- [29] *Джеффрис Г., Свирлс Б.* Методы математической физики. — М.: Мир. — В. 1, 1969 — 424 с., В. 2, 1970 — 352 с., В. 3, 1970 — 344 с.
- [30] *Джонсон У., Меллер П.* Теория пластичности для инженеров. — М.: Машиностроение, 1979. — 567 с.
- [31] *Доннел Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. — М.: Наука, 1982. — 567 с.
- [32] *Елисеев В. В.* Механика упругих тел. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. — 336 с.
- [33] *Елисеев В. В.* Одномерные и трехмерные модели в механике упругих стержней. — Дис... д-ра физ.-мат. наук, ЛГТУ, 1991. — 300 с.
- [34] *Ильющин А. А.* Механика сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 310 с.
- [35] *Ишлтинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. — М.: Физматлит, 2001. — 701 с.
- [36] *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. — М.: Наука, 1974. — 312 с.
- [37] *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
- [38] *Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.* Основы экспериментальной механики разрушения. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 140 с.
- [39] *Ключников В. Д.* Физико-математические основы прочности и пластичности. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 189 с.
- [40] *Коллиз Дж.* Повреждение материалов в конструкциях. — М.: Мир, 1984. — 624 с.
- [41] *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высш. шк., 1970. — 712 с.
- [42] *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. — М.: Мир, 1982. — 336 с.

- [43] *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. — М.: Мир, 1974. — 340 с.
- [44] *Кураит Р., Гильберт Л.* Методы математической физики. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. — Т. 1. — 476 с., Т. 2. — 544 с.
- [45] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
- [46] *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
- [47] *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Механика. — М.: Физматлит, 2001. — 222 с.
- [48] *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1988. — 509 с.
- [49] *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория упругости. — М.: Наука, 1987. — 246 с.
- [50] *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
- [51] *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики. — М.: Наука. — Т. 1. 1982. — 352 с., Т. 2. 1983. — 640 с.
- [52] *Лурье А. И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
- [53] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
- [54] *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
- [55] *Магнус К.* Колебания. — М.: Мир, 1982. — 304 с.
- [56] *Мак Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ. — М.: Физматгиз, 1963. — 412 с.
- [57] *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 399 с.
- [58] *Малинин Н. Н.* Ползучесть в обработке металлов. — М.: Машиностроение, 1986. — 220 с.

- [59] *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. — М.: Паука, 1972. — 470 с.
- [60] *Мелан Э., Паркус Г.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. — М.: Физматгиз, 1958. — 167 с.
- [61] *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
- [62] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.
- [63] *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. — 400 с.
- [64] *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. — 182 с.
- [65] *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. — М.: Паука, 1984. — 256 с.
- [66] *Мухелишвили Н. Н.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
- [67] *Мышкис А. Д.* Математика для вузов. М.: Наука, 1971. — 632 с.
- [68] *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. — 456 с.
- [69] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. — 872 с.
- [70] *Новожилов В. В.* Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
- [71] *Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. М.* Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. — 656 с.
- [72] *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: Изд-во МГУ, 1978. — 575 с.
- [73] *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1971. — 240 с.
- [74] *Пановко Я. Г.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Паука, 1985. — 288 с.

- [75] *Шановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. — М.: Паука, 1979. — 384 с.
- [76] *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. — М.: Паука, 1971. — 635 с.
- [77] *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. — М.: Паука, 1985. — 504 с.
- [78] *Партон В. З., Черлин Ш. И.* Методы математической теории упругости. — М.: Паука, 1981. — 688 с.
- [79] *Цогорелов А. В.* Геометрия. — М.: Наука, 1984. — 288 с.
- [80] *Прагер В., Ходжс Ф.* Теория идеально-пластических тел. — М.: Изд-во ИЛ, 1956. — 398 с.
- [81] *Работнов Ю. И.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 711 с.
- [82] *Рашиевский И. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967. — 664 с.
- [83] *Рейнер М.* Реология. — М.: Паука, 1965. — 223 с.
- [84] *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике. М.: Мир, 1985. — 590 с.
- [85] *Свейшиков А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1999. — 319 с.
- [86] *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1994. Т. 1. 528 с., Т. 2. — 560 с.
- [87] *Слепян Л. И.* Механика трещин. — Л.: Судостроение, 1990. — 295 с.
- [88] *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. — Л.: Судостроение, 1972. — 376 с.
- [89] *Сnedдон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961. — 219 с.
- [90] *Соколовский В. В.* Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969. — 608 с.
- [91] *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. — М.: Наука, 1971. — 376 с.

- [92] *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. — 288 с.
- [93] *Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. М.: Мир, 1985. — 352 с.
- [94] *Тер-Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. М.: Паука, 1974. 223 с.
- [95] *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. — М.: Паука, 1971. 808 с.
- [96] *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Паука, 1966. 635 с.
- [97] *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. — 560 с.
- [98] *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
- [99] *Тихонов А. П., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. 725 с.
- [100] *Товстик П. Е.* Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Паука, 1995. 319 с.
- [101] *Тондл А.* Динамика роторов турбогенераторов. Л.: Энергия, 1971. 387 с.
- [102] *Торн Дж.* Начальные главы дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1982. — 360 с.
- [103] *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [104] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 624 с.
- [105] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1977. Т. 5. 302 с., Т. 7. 288 с.
- [106] *Феодосьев В. И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. — М.: Паука, 1969. — 176 с.

- [107] *Филин А. П.* Элементы теории оболочек. — Л.: Стройиздат, 1987. — 383 с.
- [108] *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
- [109] *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. — М.: Мир, 1988. — 364 с.
- [110] *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеориздат, 1956. — 407 с.
- [111] *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. — М.: Мир, 1971. 192 с.
- [112] *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
- [113] *Чернина В. С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. — 456 с.
- [114] *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
- [115] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
- [116] *Энгельбрехт Ю. К., Цигул У. К.* Нелинейные волны деформации. — М.: Наука, 1981. — 256 с.



# Предметный указатель

- Автоколебания, 157
- Базис  
    общий случай, 13
- Баланс сил и моментов, 110, 134
- Балка  
    Бернулли — Эйлера, 105  
    , опрокидывание, 164  
    колебания, 151  
    Тимошенко, 152
- Балки и диски пластические, 180
- Вал в трубке-оболочке, 170
- Вектор, 7  
    вихря, 56, 212  
    Дарбу, 14  
    площадки, 65  
    собственный, 11  
    теплового потока, 19, 100
- Векторы деформации, 110
- Вилка Хилла, 79
- Волны  
    в стержнях, 152  
    , дисперсия, 152  
    вращения, 148  
    поверхностные, 149  
    расширения, 148
- Вращение стеснённое, 102
- Вычет функции, 25
- Вязкоупругость, 208  
    , принцип соответствия, 209
- Гамильтониан, 45
- Градиент  
    деформации, 54, 139  
    поля, 15
- Депланация, 143
- Детерминант тензора, 58
- Деформация  
    антиплоская, 80  
    плоская  
        пластическая, 183  
        упругая, 87  
    температурная, 98
- Диаграмма  
    деформирования, 173  
    круговая Мора, 60
- Дислокации, 74, 174
- Жёсткости стержня, 122
- Жёсткость геометрическая, 83
- Жидкость  
    вязкая, 214  
    идеальная, 211
- Задача  
    Буссинеска, 97  
    Дирихле, 96  
    Кирша, 90  
    контактная  
        плоская, 93  
        пространственная, 95  
    Сен-Венана, 119

- Фламана, 88
- Штурма – Лиувилля, 21
- Закон
  - баланса
    - импульса, 37, 41, 59
    - кинетической энергии, 37, 41
    - момента импульса, 37, 41, 60
  - Гака, 69
  - состояния, 62
  - сохранения массы, 57
  - суперпозиции, 21
  - термодинамики
    - второй, 63
    - первый, 62
  - течения ассоциированный, 175, 176
- Значение собственное, 11
- Интеграл
  - Бернулли, 212
  - Дюамеля, 22, 49
  - Лагранжа – Коши, 213
  - Мора, 118
  - Райса, 200
  - эллиптический, 171
- Клин под давлением, 184
- Колебания
  - , асимптотический метод, 50
  - главные, 48
  - нелинейные, 156
  - резонансные, 155
  - свободные, 146
  - стержней, 150
- Компоненты
  - ковариантные, 13
  - контравариантными, 13
- Координаты
  - главные, 49, 147
  - криволинейные, 17
  - материальные, 53
- Коэффициент
  - интенсивности, 195
  - , вычисление, 202
  - Пуассона, 70
  - теплового расширения, 98
- Коэффициенты сдвига, 123
- Кривизна поверхности, 132
- Критерии прочности, 193
- Критерий
  - Гриффитса, 199
  - деформационный, 200
  - роста трещины, 203
- Кручение
  - упруго-пластическое, 182
  - упругое, 81
  - функция напряжений, 82
- Лагранжиан, 44
- Лемма основная, вариационного исчисления, 27
- Линеаризация, 66
- Линии
  - асимптотические, 138
  - скольжения, 184
- Масса присоединённая, 213
- Материал
  - изотропный, 70
  - Прандтля, 177, 207
  - трансверсально-изотропный, 125
  - упругий, 62
- Материалы
  - вязкоупругие, 208
  - пластические, 210
- Матрица жёсткости, 47
- Мера
  - деформации

- Альманзи, 56
- Коши, 55
- Фингера, 55
- повреждённости, 204
- Метод
  - возмущений, 153
  - гипотез, 105
  - Ритца, 30
  - собственных функций, 22
  - срачивания, 33
  - Фурье, 21
- Методы
  - асимптотические, 31
  - вариационные, 86, 105
- Множители Лагранжа, 29, 42, 61, 78, 101, 128, 133
- Модели реологические, 206
- Модули эффективные, 79
- Модуль
  - объёмный, 70
  - сдвига, 70
  - Юнга, 70
- Набла-оператор, 15, 131
- Нагрузка предельная, 190
- Напряжения температурные, 99
- Неравенство диссипативное, 63
- Несовместность деформации, 99
- Нить, 114
- Оболочек теория
  - линейная, 131
  - нелинейная, 138
- Оболочки
  - безмоментные, 138
  - вращения, 136
- Объём представительный, 79
- Описание процессов
  - пространственное, 53
- Описание процессов материальное, 53
- Отношение Рэлея, 49
- Парадокс
  - Николаи, 166
  - Циглера, 166
- Пластины
  - пластические, 186
  - упругие, 127
  - , устойчивость, 169
- Пластичность идеальная, 175
- Площадь секториальная, 144
- Поверхность, 14
  - , геометрия, 131
  - нагружения, 176
  - текучести, 175
- Податливость, 79
- Подход
  - прямой, 107, 133
  - статический, 163
- Поле
  - векторное, 15
  - , дивергенция, 15
  - , потенциалы, 16
  - , ротор, 15
  - скалярное, 15
  - скоростей, 56
- Ползучесть, 208, 215
- Постоянные упругие, 69
- Преобразование
  - каноническое, 46
  - Лапласа, 25
  - Лежандра, 44
- Принцип
  - Васидзу, 79
  - вариационный, 30
  - виртуальной работы, 41, 61, 71, 101, 110, 128, 133

- Гамильтона, 44
- дифференциальный вариационный, 31
- индифферентности, 64
- Мизеса, 186
- минимума
  - потенциальной энергии, 76
  - дополнительной работы, 77
- Рейсснера, 78
- Сен-Венана, 76
- Принципы вариационные для жёстко-пластического тела, 188
- Произведение
  - векторное, 7
  - скалярное, 7
  - смешанное, 8
  - тензорное, 9
- Производная
  - интеграла, 58
  - материальная, 54
  - Яуманна, 40
- Разложение
  - полярное, 12, 54
- Расщепление асимптотическое, 32, 108, 123
- Решение
  - Кельвина — Сомильяны, 75
  - Папковича — Нейбера, 72
- Ротор, 15
- Ряд
  - асимптотический, 32
  - Лорана, 24
- Свёртка, 10
- Связи
  - внутренние, 102, 113
  - идеальные, 41
  - неголономные, 50
- Сечение
  - круговое с выточкой, 85
  - многосвязное, 85, 123
  - эллиптическое, 84
- Сила
  - диссипативная, 156
  - инерции, 40
  - Кориолиса, 40
  - обобщённая, 43
  - объёмная, 58
  - поверхностная, 58
  - сосредоточенная, 75
  - трещиноподвижная, 197
  - циркуляционная, 163
- Символы
  - Кронекера, 7
  - Леви-Чивита, 8
- Система
  - неголономная, 50
  - отсчёта, 36
- Скорость
  - критическая, 158
  - угловая, 38, 57
  - фазовая, 149
- Сложение
  - скоростей, 39
  - ускорений, 39
- Соотношения упругости, 111, 127, 134, 140
- Среда Коссера, 101
- Стержней теория
  - классическая, 113
  - линейная, 115
  - нелинейная, 110
- Стержни тонкостенные, 142
- Суперпозиция, 21
- Тело
  - абсолютно твёрдое, 37

- идеально-пластическое, 175
- тонкое, 104
- упругое, 62
- Температура, 63
- Тензор
  - , главные значения, 11
  - , главные оси, 11
  - антисимметричный, 12
  - второго ранга, 9
  - Генки, 56
  - действия, 9
  - деформации, 55
  - единичный, 9
  - жёсткости, 67
  - инерции, 38
  - напряжений, 59
  - Пиола, 66, 140
  - поворота, 12, 38
  - симметричный, 12
  - скоростей деформаций, 56
- Теорема
  - взаимности работ, 47
  - интегральная Коши, 24
  - Кастильяно, 47
  - Лагранжа, 47
  - о вычетах, 25
  - о дивергенции, 15
  - о предельной нагрузке
    - , кинематическая, 190
    - , статическая, 191
  - о циркуляции, 15
- Термоупругость связанная, 100
- Течение
  - Пуазейля, 214
  - потенциальное, 213
- Тип уравнений, 20, 138
- Тождество
  - Клапейрона, 47, 70
  - Кэли — Гамильтона, 12
- Трещина
  - , антиплоская деформация, 81, 195
  - , модель Баренблатта, 200
  - , плоская деформация, 196
- Трещиностойкость, 199
- Трубка, растяжение и кручение, 177
- Уравнение
  - бигармоническое, 87
  - вариационное, 27
  - Гамильтона — Якоби, 46
  - Жермен — Лагранжа, 130
  - струны, 19
  - теплопроводности, 19, 100
- Уравнения
  - Аппеля, 51
  - Бельтрами — Мичелла, 75, 92
  - в вариациях, 67, 167
  - в перемещениях, 72
  - Гамильтона, 44
  - Лагранжа, 42
  - Максвелла, 16
  - Навье — Стокса, 214
  - определяющие, 64, 175
  - совместности, 73, 124, 135
  - Эйлера, 28
- Условие
  - текучности, 174
  - упрочнения, 176
- Условия
  - граничные, 27, 130, 135, 144
  - Коши — Римана, 24, 80, 84, 122
  - на характеристиках, 184
  - разрешимости, 31
- Устойчивость
  - , потеря, 162
  - неконсервативных систем, 166
  - пластин, 169

- стержней, 163
- Флаттер, 166
- Формула
  - Коши для напряжений, 59
  - Коши, интегральная, 25
  - Нансона, 65
  - Римана — Меллина, 26
- Формулы
  - Вейнгартена, 74
  - дериационные, 132, 136
  - Френе, 14
  - Чезаро, 73
- Фронт трещины, упругое поле, 194
- Функции
  - аналитические, регулярные, 23, 80, 91
  - Крылова, 153
  - тензорного аргумента, 18
  - эллиптические, 171
- Функционал, 26
  - вариация, 26
- Функция
  - бигармоническая, 87
  - гармоническая, 17
  - депланации, 84, 143
  - напряжений, 80
  - Эри, 87, 91
- Характеристики, 20, 184
- Центр изгиба, 121
- Шар полый под давлением, 178
- Экстремум, 26
  - условный, 28
- Эксцентриситет, 38
- Энергия
  - внутренняя, 62
  - деформации, 70
  - кинетическая, 37, 42
  - свободная, 63
  - ускорений, 51
- Энтропия, 63