

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ**  
**ЧАСТЬ 1**  
Учебное пособие

Рассмотрены простые деформации прямого бруса, анализ напряженного состояния и геометрические характеристики плоских фигур. Изложены различные приемы решения задач по указанным темам, в большей части не нашедших отражения в имеющейся учебно-методической литературе по сопротивлению материалов.

Во 2-й части будут рассмотрены темы: сложное сопротивление, энергетические методы определения перемещений, тонкостенные оболочки, толстостенные цилиндры, устойчивость, усталость, расчеты в упругопластической области, динамические задачи.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс сопротивления материалов, а также готовящихся к участию в олимпиадах от внутривузовского до всероссийского уровня, также пособие может быть полезно и для преподавателей.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие .....	5
<b>Тема 1. Растяжение-сжатие прямого бруса.....</b>	<b>7</b>
1.1. Основные положения.....	7
1.2. Метод сил.....	14
1.2.1. План решения. Понятие об основной и эквивалентной системе.....	14
1.2.2. Влияние монтажного фактора .....	18
1.3. Способ совместности перемещений.....	20
1.3.1. План решения. Способ раскрепления узла. Понятие об условии строгого соответствия .....	21
1.3.2. Несимметричная система сходящихся сил.....	25
1.3.3. Общий случай плоской системы сил .....	26
1.3.4. Влияние температурного фактора.....	28
1.3.5. Выполнение условия строгого соответствия .....	31
1.3.6. Влияние монтажного фактора .....	34
1.3.7. Суммарное влияние силового, температурного и монтажного факторов.....	36
1.3.8. Прием временного отвердевания .....	38
1.3.9. Задачи «Диски».....	41
1.4. Интеграл Мора для определения перемещений.....	44
1.4.1. Решение статически определимых задач.....	44
1.4.2. Статически неопределимые многостержневые системы при растяжении-сжатии (канонические уравнения метода сил) .....	49
1.5. Задачи.....	51
1.6. Решения, указания, ответы.....	56
<b>Тема 2. Анализ напряженного состояния.</b>	
<b>Обобщенный закон Гука.....</b>	<b>68</b>
2.1. Основные положения.....	68
2.2. Задачи.....	76
2.3. Решения, указания, ответы.....	81
<b>Тема 3. Геометрические характеристики плоских фигур (сечений).....</b>	<b>92</b>
3.1. Основные положения.....	92
3.2. Задачи.....	107
3.3. Решения, указания, ответы.....	114

<b>Тема 4. Плоский изгиб прямого бруса</b> .....	133
4.1. Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	133
4.1.1. Предварительные замечания.....	133
4.1.2. Порядок построения эпюр $Q_y$ , $M_z$ .....	140
4.1.3. Проверка правильности построения эпюр $Q_y$ , $M_z$ ..	157
4.1.4. Примеры построения эпюр $Q_y$ и $M_z$ .....	163
4.1.5. Условия «обратных» задач построения эпюр $Q_y$ , $M_z$ .....	183
4.1.6. Решения, указания, ответы .....	185
4.2. Напряжения и расчеты на прочность при плоском изгибе .....	193
4.2.1. Основные положения .....	193
4.2.2. Задачи .....	198
4.2.3. Решения, указания, ответы .....	202
<b>Тема 5. Перемещения в балках при плоском изгибе</b> .....	212
5.1. Предварительные замечания.....	212
5.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.....	213
5.3. Метод начальных параметров (метод Клебша). Универсальное уравнение упругой линии.....	216
5.4. Интеграл Мора .....	225
5.5. Способ Верещагина .....	229
5.6. Задачи.....	240
5.7. Решения, указания, ответы.....	244
<b>Тема 6. Кручение</b> .....	264
6.1. Основные положения.....	264
6.2. Напряжения в валах крутого поперечного сечения .....	265
6.2.1. Напряжения.....	265
6.2.2. Деформации. Условие жесткости.....	267
6.2.3. Работа и потенциальная энергия деформации .....	269
6.3. Кручение брусьев некруглого поперечного сечения .....	269
6.4. Статически неопределимые задачи при кручении.....	270
6.5. К расчету винтовых цилиндрических пружин с малым шагом витка .....	270
6.6. Задачи.....	271
6.7. Решения, указания, ответы.....	276
<b>Список литературы</b> .....	287

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Широкому кругу инженерно-технической и научной общест­венности хорошо понятна важность знания курса сопротивления мате­риалов, как науки о прочности, которая является одной из основных составляющих надежности. Особенно важно умение рационально и наименьшими затратами по времени решать различные задачи проч­ности, с целью обеспечения безопасности работы элементов конст­рукций, а следовательно, и всей конструкции в целом.

Настоящее пособие не является задачником, а именно руково­дством к решению задач обычной и повышенной сложности. В си­лу чего оно может быть использовано не только в учебном процес­се, но и в комплексе с пособием по решению конкурсных задач [10] для подготовки студентов к олимпиадам по сопротивлению мате­риалов всех уровней от внутривузовского до всероссийского.

В пособии рассмотрены методы, приемы не нашедшие доста­точного отражения в большинстве учебников и учебных пособий, при этом некоторые другие вопросы, подробно разработанные в имеющихся учебниках по сопротивлению материалов, изложены в пособии менее подробно.

Содержание данного пособия (часть I) включает темы: простые деформации прямого бруса, анализ напряженного состояния и гео­метрические характеристики плоских фигур, что охватывает при­мерно половину стандартной программы курса.

В каждой теме дано краткое описание положений теории и формулы для расчета без вывода, в предположении, что читатель знаком с темой по лекционному курсу. В конце каждой темы при­ведены задачи для самостоятельного решения, а далее даны указа­ния, решения или ответы в зависимости от уровня сложности зада­чи и возможные варианты решения.

В первой теме основное внимание уделено способу совмести­ости перемещений, который не нашел достаточного отражения в учебно-методической литературе, хотя он в ряде случаев даст бо-

лее простое и менее трудоемкое решение. Именно с этих позиций и формировалось содержание других тем.

При изложении материала пособия авторы стремились излагать наиболее трудные для студентов вопросы в простой, доступной форме для читателя разного уровня подготовки.

Пособие призвано оказать помощь при подготовке студентов к практическим занятиям, выполнении домашних расчетно-графических заданий, помощь при подготовке к зачетам и экзаменам. Пособие может быть полезно и для преподавателей.

## Тема 1

# РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

### 1.1. Основные положения

*Растяжением-сжатием прямого бруса (стержня) называют деформацию, вызванную взаимно уравновешенными силами, действующими вдоль оси бруса.*

В поперечном сечении бруса действует только один внутренний силовой фактор – нормальная сила  $N_x$ . Определение величины  $N_x$  производим, используя метод сечения, который включает четыре действия: мысленно разрезаем стержень на две части по интересующему поперечному сечению, отбрасываем одну из частей, заменяем действие отброшенной части на оставшуюся нормальной силой  $N_x$  и уравниваем, т.е. записываем уравнение равновесия для системы сил, действующих на оставшуюся часть, из которого определяем  $N_x$ . Все действия можно выразить мнемоническим словом РОЗУ. Метод сечений позволяет перевести внутренний силовой фактор  $N_x$  в категорию внешних сил, для которых имеем право записать уравнение статики.

Нормальная сила  $N_x$ , действующая (направленная) от сечения, вызывает деформацию растяжения и ей присваивают знак «+», т.е.  $N_x > 0$ . Построим эпюры  $N_x$ ,  $\sigma_x$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $u_x$  для стержня, изображенного на рис. 1.1, а. Расчетная схема стержня, в которой изображается ось стержня, опорные устройства, заданные нагрузки, представлена на рис. 1.1, б. Реакция  $R_A$  найдена из уравнения  $\sum x = 0$ . Воспользуемся методом сечений и найдем, например,  $N_{x_3}$  на участке  $CD$ .

Запишем уравнение равновесия для отсеченной части стержня

$$\sum x = 0 : -R_A + P_3 - q(x_3 - 2l) + N_{x_3} = 0,$$

откуда

$$N_{x_3} = R_A - P_3 + q(x_3 - 2l). \quad (1.1)$$

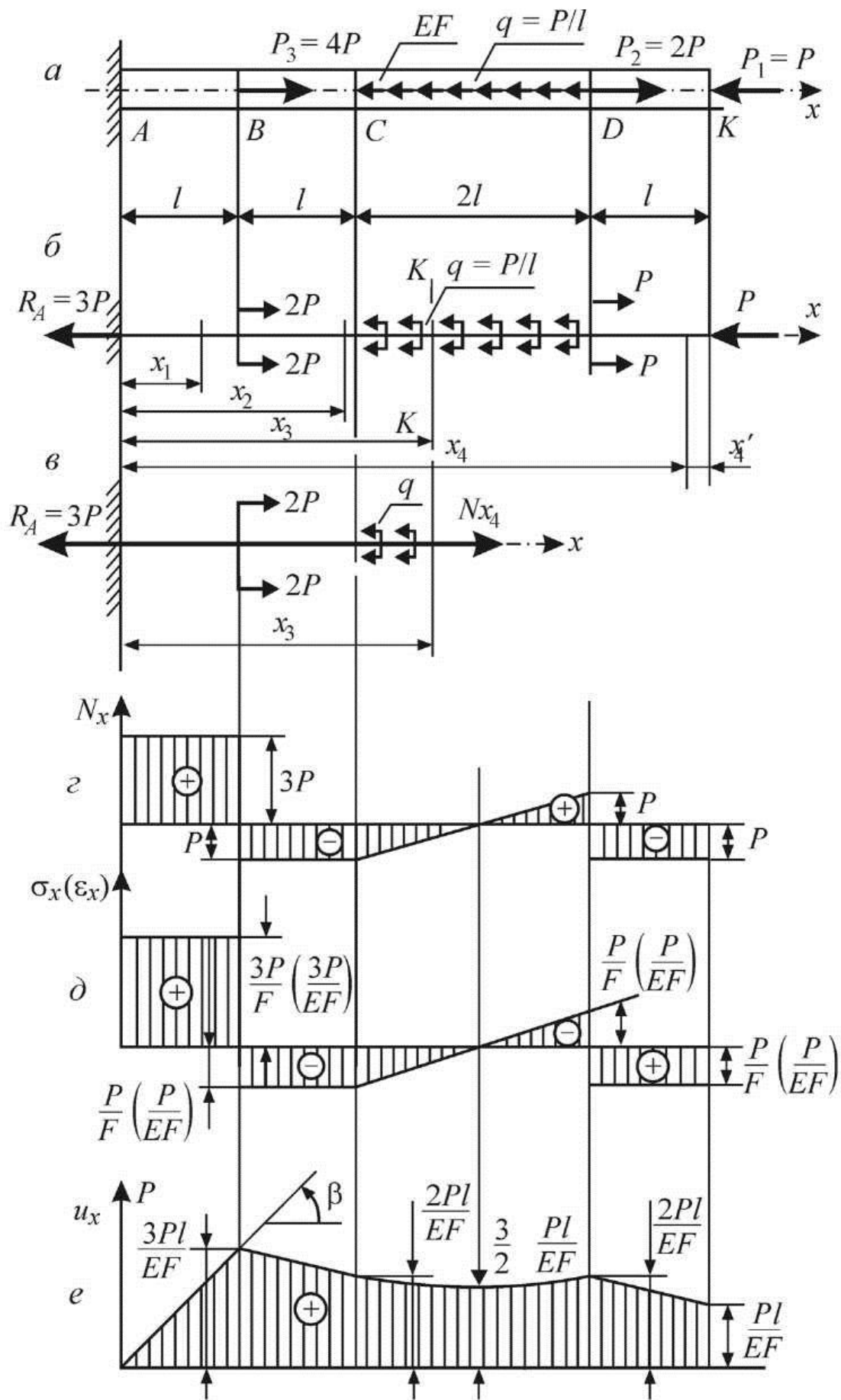


Рис. 1.1

Анализ выражения (1.1) позволяет сократить графическую работу при решении задачи – отказаться от изображения отсеченных частей стержня.

Из (1.1) следует, что *нормальная сила в любом поперечном сечении равна алгебраической сумме сил, действующих по одну сторону от сечения.*

Внешняя сила, направленная в сторону от рассматриваемого сечения, даст в выражении  $N_x$  положительное слагаемое, как, например,  $R_A$  и  $q(x_3 - 2l)$  в выражении (1.1); сила, направленная в сторону к сечению, даст отрицательное слагаемое, как, например,  $P_3$  в выражении (1.1).

$$\begin{aligned} \text{Итак: } N_{x_1} &= R_A = 3P, \quad 0 \leq x_1 \leq l; \\ N_{x_2} &= R_A - P_3 = -P, \quad l \leq x_2 \leq 2l; \\ N_{x_3} &= R_A - P_3 + q(x_3 - l), \quad 2l \leq x_3 \leq 4l; \\ \text{при } x_3 = 2l \quad N_{x_3} &= -P, \quad \text{при } x_3 = 4l \quad N_{x_3} = P; \\ N_{x_4} &= R_A - P_3 + q \cdot 2 \cdot l - P_2 = -P. \end{aligned}$$

Эпюра  $N_x$  показана на рис. 1.1,  $\varepsilon$ .

Можно было откладывать абсциссы  $x_i$  силовых участков справа налево, т.е. от сечения  $K$ , как, например, абсцисса  $x'_4$ , и получили бы такую же эпюру для  $N_x$  ( $N_{x'_4} = -P_1 = -P$ ). Отсчет абсцисс от сечения  $A$  имеет особый смысл при построении эпюры перемещений! Из эпюры  $N_x$  видно, что в сечениях, где приложена сосредоточенная сила, всегда имеем скачок на величину этой силы, а на участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра  $N_x$  имеет линейную зависимость.

Напряжения в поперечных сечениях определяем по формуле:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F}. \quad (1.2)$$

Эпюра  $\sigma_x$  для стержня постоянного поперечного сечения ( $F = \text{const}$ ) представлена на рис. 1.1,  $\delta$ . Из эпюры  $\sigma_x$  находим  $\sigma_{x(\text{max})}$ .

По условию прочности

$$\sigma_{x(\text{max})} = \frac{N_{x(\text{max})}}{F} \leq |\sigma| \quad (1.3)$$



выполняют три расчета: 1) проверочный расчет (сравнение  $\sigma_{x(\max)}$  с  $|\sigma|$ ); 2) проектировочный расчет (определение значения  $l$ ); 3) расчет грузоподъемности (определение допустимых значений внешних нагрузок).

Из закона Гука имеем, что относительная деформация

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (1.4)$$

Эпюра  $\varepsilon_x$  для стержня постоянной жесткости ( $EF = \text{const}$ ) будет иметь такой же вид, как и эпюра  $\sigma_x$  (рис. 1.1, д).

При изменении температуры стержня на  $\Delta t$  градусов относительная деформация будет:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \cdot \Delta t. \quad (1.5)$$

По определению относительная деформация отрезка длиной  $dx$  равна:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{du}{dx} = \text{tg} \beta, \quad (1.6)$$

откуда

$$u = \int_l \varepsilon_x dx. \quad (1.7)$$

Формула (1.7) позволяет построить эпюру  $u_x$ , при этом абсциссы  $x_i$  берут от неподвижного сечения  $A$ , от заделки.

Если необходимо построить только эпюру перемещений  $u_x$ , то достаточно иметь эпюру  $N_x$ , и эпюру перемещений строят, используя закон Гука в форме деформаций:

$$\Delta l = \frac{N_x \cdot l}{EF} \quad \text{или} \quad \Delta l = \int_l \frac{N_x(x) dx}{EF}. \quad (1.8)$$

Так, например, на участке  $AB$  перемещение любого сечения  $x_1$  будет  $\Delta x_1 = \frac{N_{x_1} x_1}{EF} = u_{x_1}$ . При  $x_1 = 0$ :  $\Delta x_1 = 0$ ; при  $x_1 = l$ :

$$\Delta l = \frac{N_{x_1} l}{EF} = \frac{3Pl}{EF} = u_x(B). \quad \text{На участке } BC$$

$$u_{x_2} = u_x(B) + \frac{N_{x_2}(x_2 - l)}{EF}.$$

При  $x_2 = l \Rightarrow u_{x_2} = u_x(B)$ , при  $x_2 = 2l$ :

$$u_x(C) = u_x(B) + \frac{(-P)l}{EF} = \frac{2Pl}{FF} \text{ и т.д.}$$

Из второй формулы (1.8) следует, что при действии равномерно распределенной нагрузки, постоянной интенсивностью  $q$  на длине  $l$ , деформация равна:

$$\Delta l(q) = \frac{ql^2}{2EF}. \quad (1.9)$$

При учете собственного веса деформация вертикально расположенного стержня длиной  $l$  определится по формуле:

$$\Delta l(\gamma) = \frac{\gamma l^2}{2E}, \quad (1.10)$$

где  $\gamma$  – вес единицы объема или (иначе) удельный вес,  $\text{Н/м}^3$ .

На рис. 1.1,  $\delta$  представлена эпюра перемещений поперечных сечений по направлению оси  $x$ . Как видим, эпюра построена в строгом соответствии с дифференциальной зависимостью (1.6), так в сечении  $B$  имеем излом, слева от которого угол наклона касательной  $\beta > 0$ , а справа  $\beta < 0$ ; в сечении  $C$  излом отсутствует, так как здесь имеем только один угол  $\beta < 0$ , определяемый единственным значением  $\varepsilon_x = \frac{P}{EF} < 0$ ; в сечении посередине участка  $CD$  угол  $\beta = 0$ .

Работа при упругом деформировании, совершённая при статическом нагружении силой величиной от нуля до  $P$ , определяется формулой:

$$A = \frac{1}{2}P \cdot \Delta l = \frac{1}{2}P \cdot u, \quad (1.11)$$

где  $u$  – перемещение точки приложения силы, т.е. путь, пройденный силой при выполнении работы.

Потенциальная энергия деформации, накапливаемая в стержне при упругом деформировании,

$$U = \frac{N_x^2 \cdot l}{2EF} = \int_l \frac{N_x^2(x) dx}{2EF(x)}. \quad (1.12)$$

Потенциальная энергия  $U$  численно равна работе  $A$ .

Приступая к решению задачи, необходимо ответить на вопрос: является ли рассматриваемая система (задача) статически определенной или статически неопределимой?

*Статически неопределимыми системами (задачами)* называются системы (задачи), в которых невозможно определить усилия с помощью одних лишь уравнений статики.

В отличие от статически определенных систем, в элементах которых усилия возникают только от действия внешних нагрузок, в элементах статически неопределимых систем они возникают и при отсутствии внешних сил – в результате изменения температуры системы или ее отдельных элементов, неточности изготовления элементов системы и др.

*Степенью статической неопределимости* называется разность между числом неизвестных усилий в системе и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы. Таким образом, для определения типа данной системы необходимо в расчетной схеме грамотно выделить объекты равновесия и составить для них уравнения равновесия.

На рис. 1.2 представлены две плоские системы сходящихся сил. Для каждой из них можно составить только два уравнения равновесия, следовательно, число неизвестных в системе  $a$  на единицу больше числа уравнений равновесия, поэтому говорят, что такая система (задача) один раз статически неопределимая; в системе  $b$  число неизвестных на два превышает число уравнений равновесия – система два раза статически неопределимая.

Для оценки типа системы может быть также рекомендована для многостержневых систем формула:

$$S = 3K - III, \quad (1.13)$$

где  $S$  – число избыточных, так называемых «лишних» связей, которое равно степени статической неопределенности;  $K$  – число *замкнутых независимых* контуров в системе в предположении отсутствия шарнирных соединений. Замкнутый контур представляет собой замкнутую цепь, звеньями которой являются стержни, брусья, стержни опорных устройств и земля (пол, стены, потолок), к которой прикреплена система. *Независимым* называется контур, в котором имеется хотя бы один стержень, не входящий ни в один из остальных контуров.  $III$  – количество простых шарниров, т.е. шарни-

ров, соединяющих два элемента (рис. 1.3). В конструкциях часто встречаются так называемые кратные шарниры (рис. 1.4).

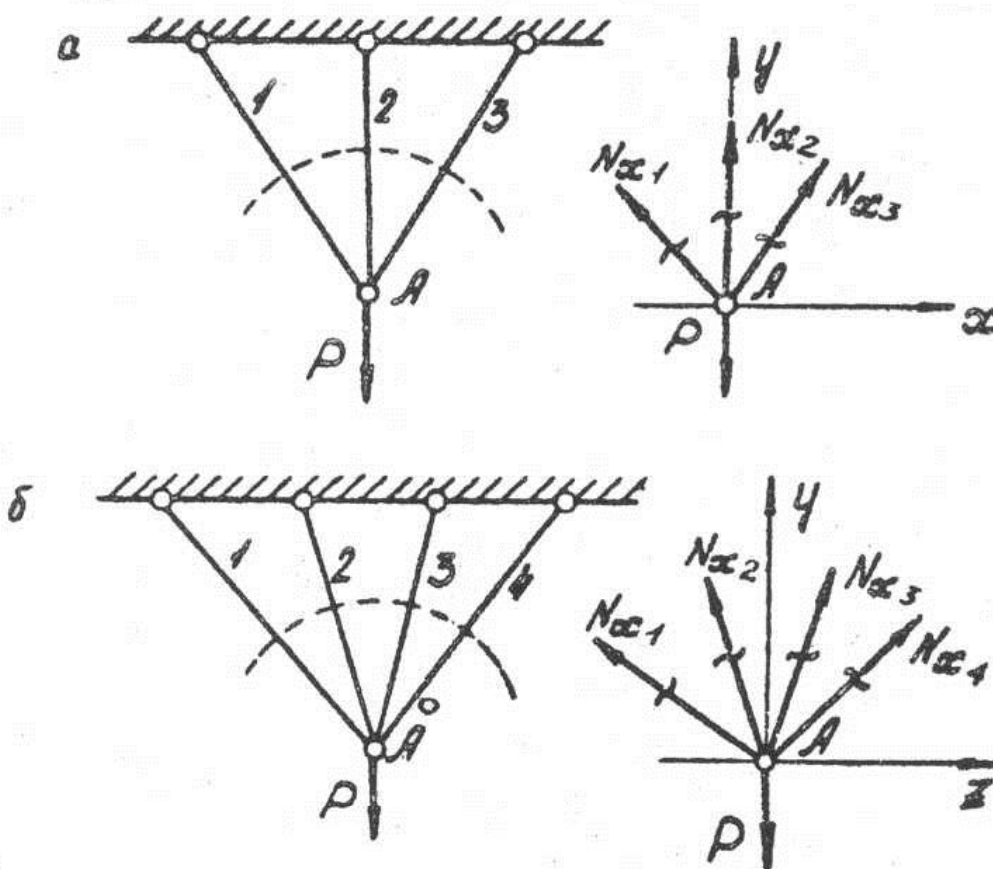


Рис. 1.2

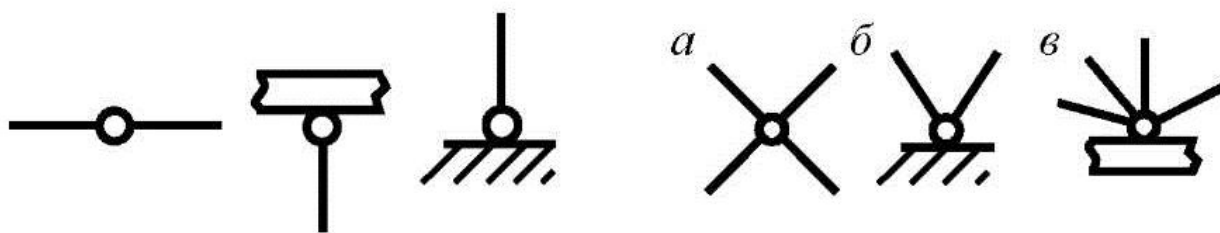


Рис. 1.3

Рис. 1.4

Число простых шарниров, эквивалентных одному кратному, определяется выражением:

$$Ш = C - 1, \quad (1.14)$$

где  $C$  – число стержней (элементов), подходящих к шарниру. Так, для рис. 1.4, *а* число  $Ш = 4 - 1 = 3$ , для рис. 1.4, *б* число  $Ш = 3 - 1 = 2$ , для рис. 1.4, *в* число  $Ш = 5 - 1 = 4$ .

Если  $S = 0$ , то имеем статически определимую, геометрически неизменяемую систему (см. решение задач 1.2, 1.4). Если  $S > 0$ , то

имеем статически неопределимую систему (см. решение задач 1.15, 1.18, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24). Если  $S < 0$ , то имеем геометрически изменяемую систему, т.е. механизм (рис. 1.5).

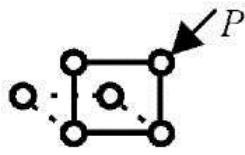


Рис. 1.5

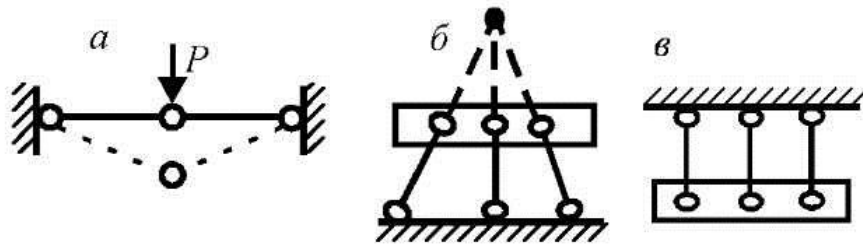


Рис. 1.6

При оценке типа системы следует обращать внимание на то, что система может быть мгновенно изменяемой. Такими системами являются системы, состоящие из двух стержней (рис. 1.6, *a*), оси которых лежат на одной прямой; элемент, прикрепленный к земле тремя стержнями, оси которых пересекаются в одной точке (рис. 1.6, *б*), а также система, в которой три стержня параллельны (рис. 1.6, *в*), оси которых пересекаются в бесконечности. Правильное закрепление в последней системе приведено в задачах 1.10, 1.12.

Для решения статически неопределимых задач используются в основном метод сил и способ совместности перемещений. Оба эти приёма равноправны, но для определённых систем один может дать более простое решение, чем другой.

## 1.2. Метод сил

Сущность метода сил состоит в переходе от заданной статически неопределимой системы к статически определимой удалением «лишних» связей.

В статически неопределимых системах «лишней» связью называется связь, ответственная за возникновение статической неопределимости. Слово «лишняя» поставлено в кавычки, так как эта связь на практике необходима по конструктивным соображениям, условиям эксплуатации, требованиям прочности и т.д., но может быть удалена без нарушения равновесия и геометрической неизменяемости системы. Эта связь «лишняя» с точки зрения возможности решить задачу методами статики. Число «лишних» связей равно степени статической неопределимости.

### 1.2.1. План решения. Понятие об основной и эквивалентной системе

Для изображенного бруса (рис. 1.7, а) необходимо определить реакции в заделках  $A$  и  $B$ , что позволяет найти напряжения на участках  $AC$  и  $CB$  бруса.

По плану решения методом сил выполняем следующие операции.

1. Составляем расчетную схему (рис. 1.7, б).

2. Проводим анализ схемы. Выбрав на объект равновесия целиком весь брус, составим уравнение равновесия в виде

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad -R_A + P - R_B = 0, \quad (1.15)$$

откуда получаем, что задача один раз статически неопределимая (имеем одно уравнение статики и две неизвестных силы  $R_A$  и  $R_B$ ).

3. Выбираем «лишнюю» связь и составляем основную систему.

За «лишнюю» связь принимаем, например, заделку правого крайнего сечения  $B$ . Тогда  $R_B$  будет «лишним» неизвестным.

Основной системой называется статически определимая система, полученная из статически неопределимой путем удаления «лишней» связи (см. рис. 1.7, в).

4. Составляем эквивалентную систему.

Эквивалентной системой называется основная система, нагруженная всеми внешними активными силами, в том числе «лишней» неизвестной (см. рис. 1.7, г). Здесь реакция  $R_B$  переходит в категорию внешних активных сил.

5. Составляем дополнительное уравнение и раскрываем статическую неопределимость.

Для того чтобы эквивалентная система была идентична заданной статически неопределимой, необходимо, чтобы перемещение сечения  $B$  эквивалентной системы равнялось, как и в заданной системе, нулю, т.е.

$$U_x^B = 0.$$

Это выражение является дополнительным уравнением в общем виде, с помощью которого раскрывается статическая неопределимость задачи.

Исходя из принципа независимости действия сил, можно записать, что

$$U_x^B = U_x^B(P) + U_x^B(R_B) = 0, \quad (1.16)$$

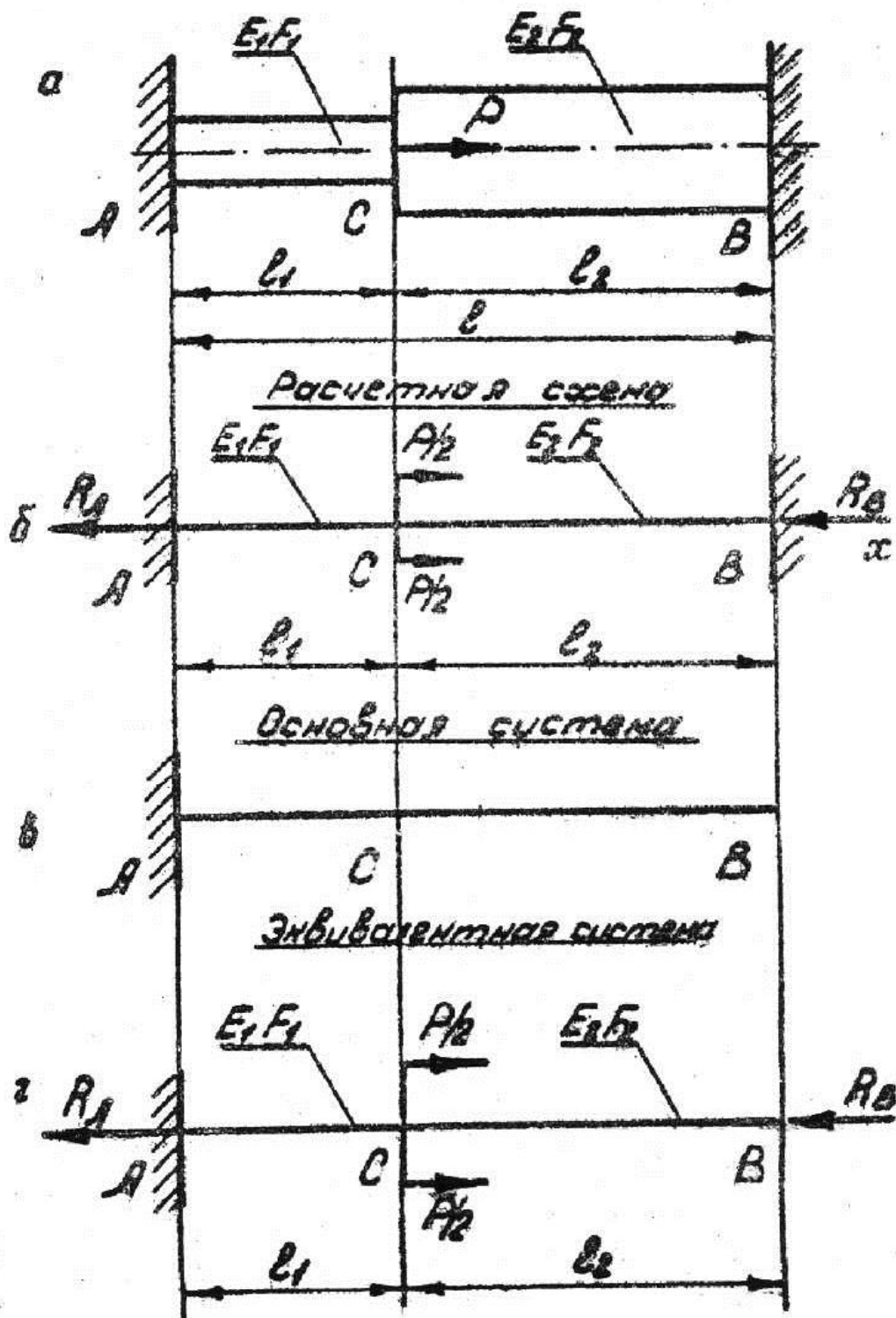


Рис. 1.7

т.е. перемещение сечения  $B$  эквивалентной системы складывается из перемещений, вызванных действием внешних активных сил  $P$  и  $R_B$ . Сила  $P$  растягивает участок  $AC$  бруса, при этом его абсолют-

ное удлинение  $\Delta l_1(P) = \frac{N_{x1} l_1}{E_1 F_1} = \frac{P l_1}{E_1 F_1}$ , так как  $N_{x1} = P$ . На сколько удлинится участок  $AC$  (длина  $l_1$ ), на столько переместится вправо, в положительное направление оси  $x$  сечение  $C$ , т.е.  $U_x^C(P) = \Delta l_1(P)$ . На сколько переместится сечение  $C$ , на столько же переместятся и все другие сечения, лежащие справа от сечения  $C$ , в том числе и сечение  $B$ . Таким образом,  $U_x^B(P) = U_x^C(P) = \frac{P l_1}{E_1 F_1}$ . В значении

$U_x^B(P)$  удерживается знак «+», так как это перемещение определено положительной (растяжение) деформацией стержня, стержень увеличивает свою длину, удлиняется.

Сила  $R_B$  сжимает как участок  $AC$ , так и участок  $CB$  стержня, при этом на сколько сила  $R_B$  сожмет эти участки, на столько и переместится сечение  $B$  влево. Таким образом,

$$U_x^B(R_B) = \Delta l_1(R_B) + \Delta l_2(R_B) = -\frac{R_B l_1}{E_1 F_1} - \frac{R_B l_2}{E_2 F_2},$$

здесь знак «-» поставлен, ввиду того что перемещение определено отрицательной (сжатие) деформацией, стержень уменьшает свою длину, укорачивается. Особо подчеркнем, что знаки в  $U_x^B(P)$  и  $U_x^B(R_B)$  не связаны с направлением оси  $x$ !

Подставляя найденные значения  $U_x^B(P)$  и  $U_x^B(R_B)$  в уравнение (1.16), получаем

$$U_x^B = \frac{P l_1}{E_1 F_1} - R_B \left( \frac{l_1}{E_1 F_1} + \frac{l_2}{E_2 F_2} \right) = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{l_1}{l_1 + l_2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2}}, \quad (1.17)$$

а  $R_A$  определится из уравнения (1.15):

$$R_A = P - R_B = P \frac{l_2}{l_2 + l_1 \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1}}. \quad (1.18)$$



Дальнейшее решение задачи такое же, как и статически определенной задачи на рис. 1.1, т.е. производим построение эпюр  $N_x$ ,  $\sigma_x$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $u_x$ . Но после построения эпюры  $\varepsilon_x$  следует произвести генеральную проверку всего предыдущего решения, исходя из следующего соображения. Так как полная деформация всей длины (смещение сечения  $A$  по отношению к смещению  $B$ ) равно нулю, то, следовательно,

$$U_{x(\text{полное})} = \int_L \varepsilon_x dx = 0, \quad (1.19)$$

где  $\varepsilon_x dx$  – элементарная площадь, а интеграл по всей длине стержня – площадь всей эпюры  $\varepsilon_x$ , следовательно,

$$\Delta = [(\omega^{\oplus} - \omega^{\ominus})/\omega^{\ominus}] \cdot 100 \% = 0.$$

Здесь  $\omega^{\oplus}$  – суммарная положительная площадь эпюры;  $\omega^{\ominus}$  – суммарная отрицательная. При правильном решении  $\Delta$  не может превышать 1 % за счет приближенных вычислений.

### 1.2.2. Влияние монтажного фактора

Как видно из рисунка (рис. 1.8, *a*), участок  $BD$  стержня имеет длину, меньшую чем  $l_3$  на величину  $\delta$ , при этом масштаб  $\delta$  существенно отличается от масштаба элементов стержня;  $\delta$  сопоставимо с деформацией стержня. Найдем реакции в опорах, если деформация участка  $AC$  от силы  $P$   $\Delta l_1(P) > \delta$ . Из этого условия следует, что при действии силы  $P$  правое крайнее сечение  $B$ , перемещаясь вправо на  $U_x^B(P) = U_x^C(P) = \Delta l_1(P)$ , упрется в опорную стенку  $B'$  и будет оказывать на нее определенное давление, в результате чего со стороны опорной стены на стержень будет действовать сила реакции  $R_B$  (см. рис. 1.8, *b*), равная равнодействующей этого давления.

Проведем анализ расчетной схемы. Выбрав за объект равновесия весь стержень в целом, составим уравнение равновесия в виде  $\sum X_i = 0$ , т.е.

$$-R_A + P - R_B = 0, \quad (1.20)$$

откуда следует, что задача один раз статически неопределимая.

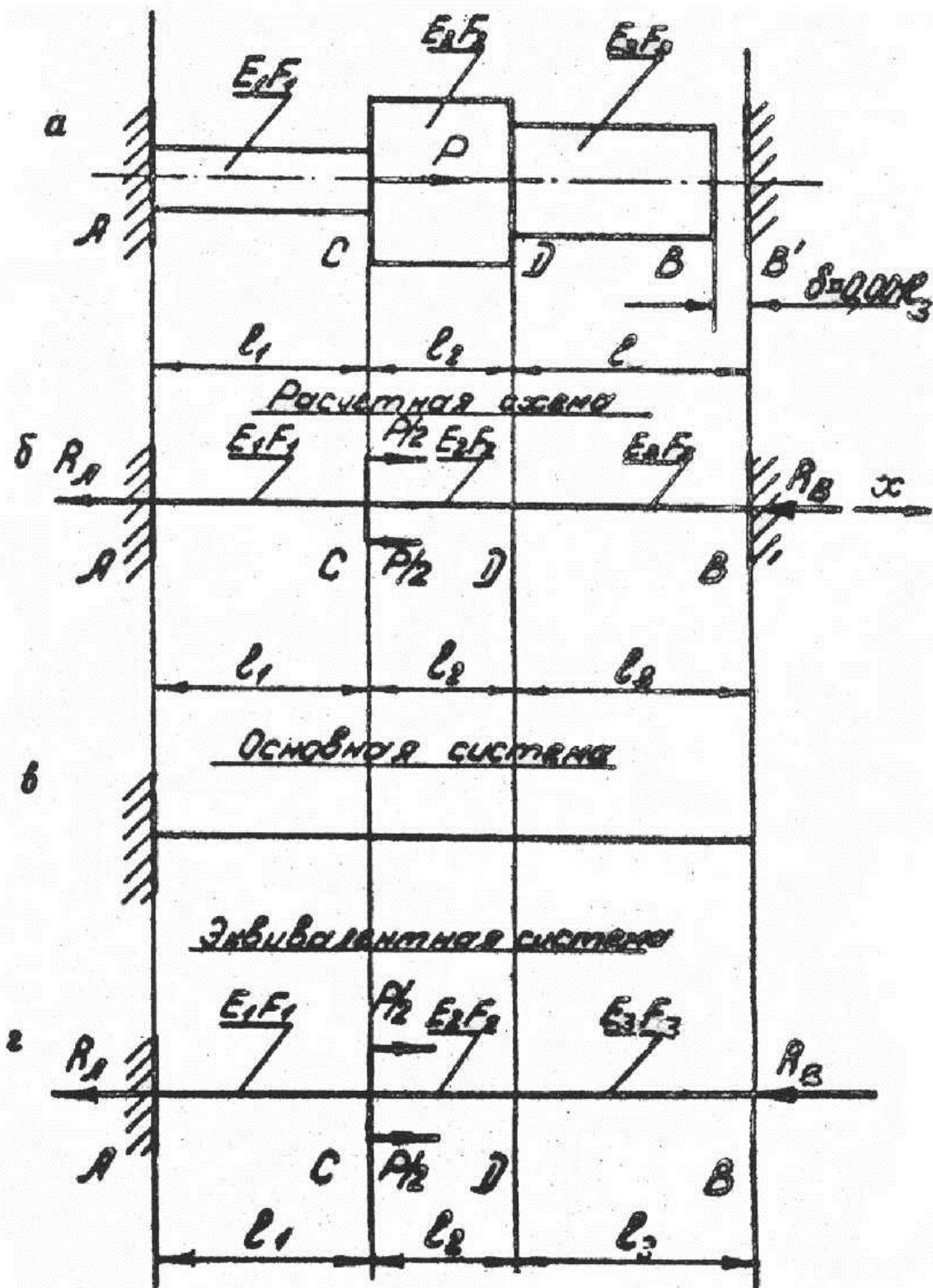


Рис. 1.8

Выбрав за «лишнюю» связь опорную стену  $B'$ , составим основную (см. рис. 1.8, б) и эквивалентную (см. рис. 1.8, в) систему.

Дополнительное уравнение получим из следующих соображений. Правое крайнее сечение  $B$  стержня заданной системы может переместиться вправо только на величину  $\delta$  и, следовательно, для того чтобы эквивалентная система была бы идентична заданной, необходимо, чтобы перемещение сечения  $B$  эквивалентной системы

$$U_x^B = \delta. \quad (1.21)$$

Так как

$$U_x^B = U_x^B(P) + U_x^B(R_B), \quad (1.22)$$

где

$$U_x^B(P) = U_x^C(P) = \Delta l_1(P) = \frac{Pl_1}{E_1F_1}, \quad (1.23)$$

а

$$U_x^B(R_B) = -\frac{R_B l_1}{E_1 F_1} - \frac{R_B l_2}{E_2 F_2} - \frac{R_B l_3}{E_3 F_3}, \quad (1.24)$$

то, следовательно,

$$U_x^B = \frac{Pl_1}{E_1 F_1} - R_B \left( \frac{l_1}{E_1 F_1} + \frac{l_2}{E_2 F_2} + \frac{l_3}{E_3 F_3} \right) = \delta, \quad (1.25)$$

откуда

$$R_B = \frac{Pl_1 - \delta E_1 F_1}{l_1 + l_2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} + l_3 \frac{E_1 F_1}{E_3 F_3}}, \quad (1.26)$$

тогда из- уравнения (1.20)

$$R_A = P - R_B = \frac{P \left( l_2 + l_3 \frac{E_2 F_2}{E_3 F_3} \right) + \delta E_2 F_2}{l_2 + l_1 \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} + l_3 \frac{E_2 F_2}{E_3 F_3}}. \quad (1.27)$$

В последнем члене выражения (1.24)  $-\frac{R_B l_3}{E_3 F_3} = \Delta l_3$  за длину участка  $BD$  принято  $l_3$ , а не  $l_3 - \delta$ , что вполне оправдано, так как  $\delta$  намного (на несколько порядков) меньше длины  $l_3$  и оперировать длиной  $l_3 - \delta$  не имеет смысла. Величина  $\delta$  соизмерима с перемещениями сечений стержня, ввиду чего  $\delta$  и входит полноправным членом в выражения, например (1.21) и (1.25).

### 1.3. Способ совместности перемещений

Способ совместности перемещений заключается в установлении связей между перемещениями отдельных элементов (или их поперечных сечений) статически неопределимых систем в деформированном состоянии. Связь между перемещениями чаще всего находят по так называемым диаграммам перемещений (диаграммам Виллио).

#### 1.3.1. План решения. Способ раскрепления узла. Понятие об условии строгого соответствия

Для симметричной системы (рис. 1.9) необходимо определять усилия в стержнях.

Согласно плану решения выполним следующие операции.

1. Составление расчетной схемы (см. рис. 1.9, *а*).

2. Анализ схемы. Выбираем за объект равновесия узел *A* и мысленно вырезаем его сечением *n – m* (см. пунктир) по стержням 1, 2,

3. Считая, что все стержни растягиваются, направляем усилия  $N_{x_i}$  в стержнях от сечений (см. рис. 1.9, *б*). Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n Z_i = 0, & -N_{x_1} \sin \alpha + N_{x_3} \sin \alpha = 0; \\ \sum_{i=1}^n Y_i = 0, & N_{x_1} \cos \alpha + N_{x_2} + N_{x_3} \cos \alpha - P = 0, \end{cases} \quad (1.28)$$

откуда следует, что задача один раз статически неопределимая, так как имеем два уравнения и три неизвестных усилия, или по формуле (1.13):  $K = 2$ ,  $Ш = 5$ , тогда  $S = 1$ .

3. Построение деформированной системы и диаграммы перемещений.

Так как рассматриваемая система симметрична\* и все стержни растягиваются, то узел *A* переместится вниз по вертикали и займет новое положение  $A_1$ . Стержни, удлинившись, займут положение, показанное штрихпунктиром (см. рис. 1.9, *а*). Напомним, что масштаб перемещений узла *A* и масштаб стержней системы существенно различны!

---

\* Симметричными называются системы, которые обладают как геометрической симметрией, так и симметрией по жесткости поперечных сечений. Так, симметричные стержни 1 и 3 (см. рис. 1.9, *а*) имеют  $E_1 F_1 = E_3 F_3$ .

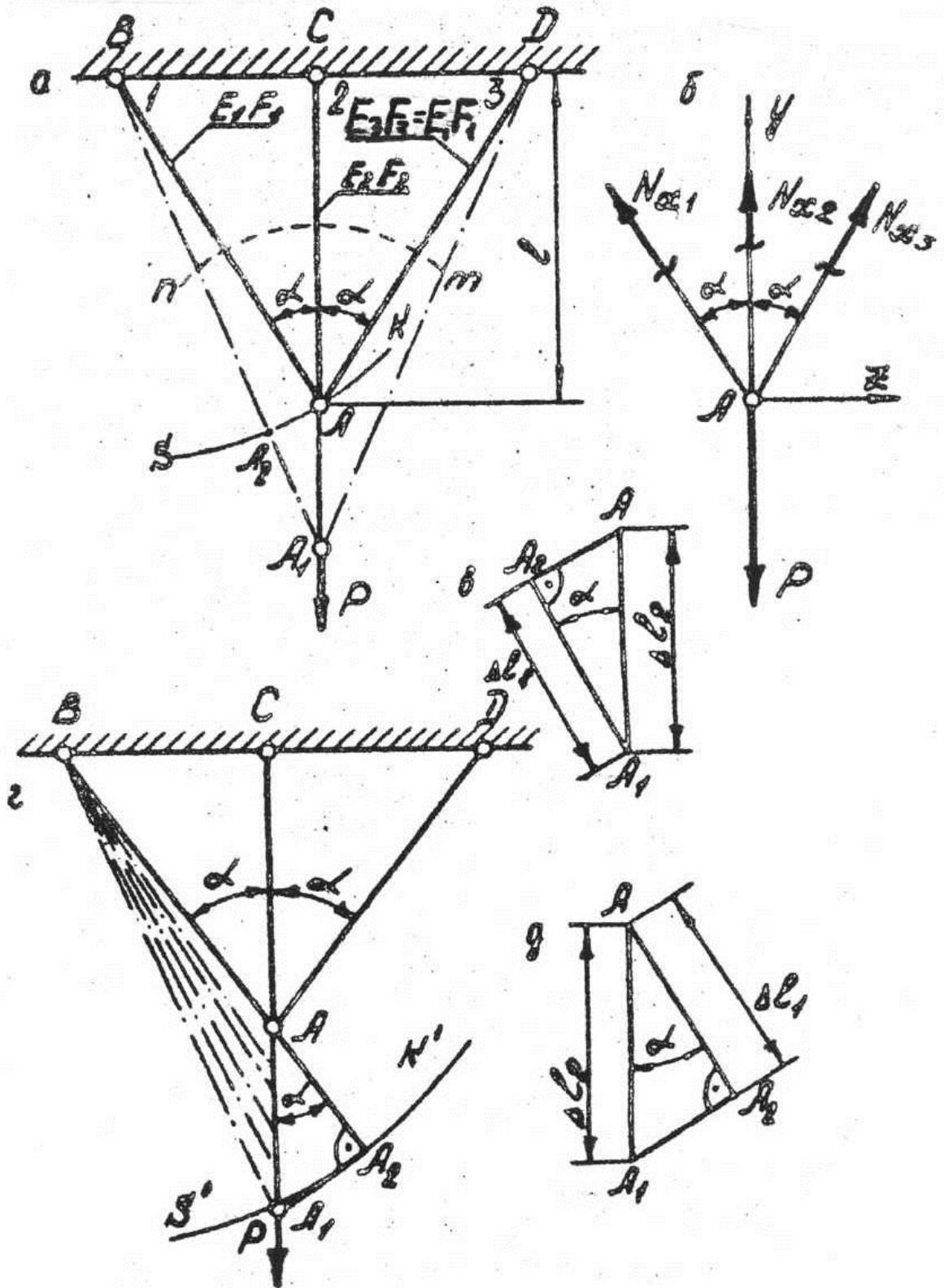


Рис. 1.9

Очевидно, что вертикальное перемещение узла  $A$  равно абсолютному удлинению второго стержня, т.е.  $AA_1 = \Delta l_2$ .

Покажем, чему равна деформация стержня 1, для чего, установив ножку циркуля в точке  $B$ , как в центре, радиусом, равным первоначальной длине стержня  $AB$ , сделаем засечку  $KS$ , тогда отрезок  $A_1A_2$  и будет представлять собой искомую величину удлинения стержня 1 ( $\Delta l_1 = A_1A_2 = A_1B - AB = l_{\text{кон}} - l_{\text{нач}}$ ).

Ввиду того, что деформации малы по сравнению с длинами стержней, дугу  $AA_2$  можно заменить прямой, перпендикулярной  $A_1B$ , и считать, что  $\angle AA_1A_2 = \alpha$ .

Полученная фигура (в данном случае прямоугольный треугольник  $AA_1A_2$ ), см. рис. 1.9, в, называется диаграммой перемещений.

4. Составление дополнительного уравнения совместности перемещений и раскрытие статической неопределенности. В способе совместности перемещений дополнительные уравнения составляют на основании установления соотношений между элементами диаграммы перемещений.

В настоящем примере, исходя из соотношений между элементами прямоугольного треугольника, можно записать, что

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha. \quad (1.29)$$

Выразив в дополнительном уравнении (1.29)  $\Delta l$  через  $N_x$  согласно закону Гука, получим третье уравнение, связывающее между собой неизвестные усилия в стержнях:

$$\frac{N_{x_1} l_1}{E_1 F_1} = \frac{N_{x_2} l_2}{E_2 F_2} \cos \alpha. \quad (1.30)$$

Решая совместно уравнения (1.28) и (1.30), заменив  $l_1 = \frac{l}{\cos \alpha}$  и

$l_2 = l$ , получаем, что

$$\begin{cases} N_{x_1} = N_{x_3} = P \frac{\cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1}}, \\ N_{x_2} = P \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2}}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Вышеприведенный способ построения диаграммы перемещений не оптимальный, так как иногда приводит к ошибкам, когда приходится допускать равенство углов в заданной и деформированной системе. Поэтому для построения диаграммы перемещений следует рекомендовать так называемый способ раскрепления узла.

Сущность способа следующая. В системе (см. рис. 1.9, а) в процессе деформирования, например, стержень 1, испытывая растяжение силой  $N_{x_1}$ , удлиняется и одновременно поворачивается, пока не приобретет новую длину и не займет положение  $A_1B$  (штрихпунктир на рис. 1.9, з). Мысленно разъединим стержни в узле  $A$ , удалив соединяющий их шарнир. Тогда одновременное удлинение и поворот стержня заменяем двумя простейшими трансформациями.

1. С помощью растягивающего усилия  $N_{x_1}$  удлиним стержень 1 по направлению первоначального положения его оси (линии  $BA$ ) на величину  $\Delta l_1 = AA_2$  (см. рис. 1.9, з).

2. Поворачивая деформированный стержень 1 новой длины  $BA_2$  вокруг шарнира  $B$ , переместим его конец  $A_2$  в точку  $A_1$ .

При повороте перемещение  $A_2$  будет происходить не по дуге окружности  $K'S'$ , а по касательной, т.е. по прямой  $A_1A_2$ , перпендикулярной к  $BA_2$  (допущение Виллио). Таким образом, в конечном итоге, при второй трансформации из точки, определяющей новое положение узла, опускают перпендикуляр на первоначальное положение подвижного радиуса.

В полученной способом раскрепления узла диаграмме перемещений (см. рис. 1.9, д) равенство углов  $\angle BAC = \angle A_1AA_2 = \alpha$  не вызывает сомнения. Из диаграммы перемещений имеем, что  $\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha$ , т.е. то же дополнительное уравнение (1.29).

При решении задач способом совместности перемещений должно соблюдаться условие строгого соответствия силовой и деформированной системы. Так как в силовой схеме (см. рис. 1.9, б) принято, что все стержни растягиваются, то узел  $A$  сместится вниз.

Если бы, например, в силовой схеме было решено, что в стержне 2 действует сжимающее усилие, то мы не могли бы переместить его нижнее сечение, прикрепленное к шарниру  $A$ , вниз, так как стержень удлинялся бы под действием сжимающей силы.

Для выполнения условия строгого соответствия в отдельных задачах вначале изображают вероятную, предполагаемую деформированную систему и затем соответственно ей строят силовую.

При невыполнении условия строгого соответствия полученный положительный знак перед искомым неизвестным усилием не свидетельствует о том, что оно (усилие) на силовой схеме направлено верно, а знак минус не обязательно говорит о том, что усилие нужно направить в противоположную сторону.

### 1.3.2. Несимметричная система сходящихся сил

Рассмотрим несимметричную систему из трех стержней, расчетная схема которой представлена на рис. 1.10, а. Найдем усилия в стержнях. Выбрав за объект равновесия узел  $A$  и вырезав его сечением  $n - m$  по стержням, запишем уравнения равновесия для силовой схемы (см. рис. 1.10, б), приняв, что все стержни испытывают растяжение:

$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0, \quad -N_{x_1} \sin \alpha + N_{x_3} \sin \beta = 0, \quad (1.32)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad N_{x_1} \cos \alpha + N_{x_2} + N_{x_3} \cos \beta - P = 0. \quad (1.33)$$

Откуда следует, что система один раз статически неопределимая.

Построим деформированную систему. Пусть новое положение узла будет  $A'$ . Применяв способ раскрепления узла, построим диаграмму перемещений (см. рис. 1.10, а). Отдельно диаграмма изображена на рис. 1.10, в. Для того чтобы установить связь между элементами диаграммы, соединим точки  $A$  и  $A'$  прямой и обозначим  $\angle A'AA_2 = \gamma$ , тогда

$$AA' = \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha - \gamma)} = \frac{\Delta l_2}{\cos \gamma} = \frac{\Delta l_3}{\cos(\beta + \gamma)},$$

откуда

$$\Delta l_1 \cos \gamma = \Delta l_2 \cos(\alpha - \gamma), \quad (1.34)$$

$$\Delta l_1 \cos(\beta + \gamma) = \Delta l_3 \cos(\alpha - \gamma), \quad (1.35)$$

где  $\Delta l_i = \frac{N_{x_i} l_i}{E_i F_i}$ .

Таким образом, имеем четыре уравнения (1.32) – (1.35), из которых легко определить неизвестные  $N_{x_1}$ ,  $N_{x_2}$ ,  $N_{x_3}$  и  $\gamma$ .



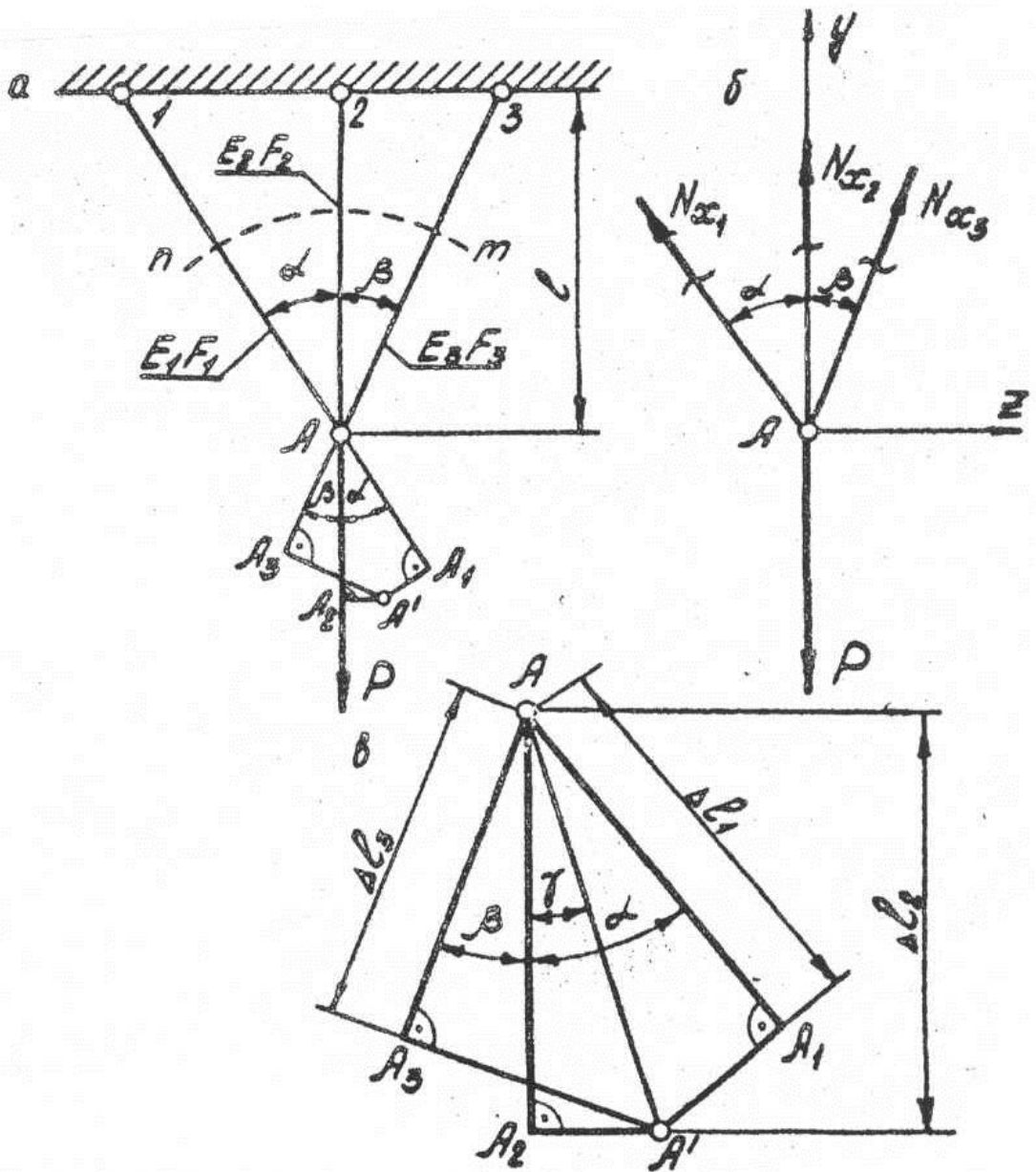


Рис. 1.10

### 1.3.3. Общий случай плоской системы сил

Найдем усилия в стержнях 1, 2, 3, на которых подвешена балка  $AB$ , прикрепленная шарнирно-неподвижной опорой к стенке в точке  $A$  и нагруженная силой  $P$  (рис. 1.11). Балку  $AB$  считаем абсолютно твердым телом по сравнению со стержнями. Весом балки по сравнению с силой  $P$  пренебрегаем.

Выбрав за объект равновесия балку  $AB$ , выделим ее сечением  $n-t$  по стержням 1, 2, 3 (см. рис. 1.11, б). Запишем уравнения равновесия, принимая, что все стержни испытывают растяжение:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad R_A + N_{x_1} + N_{x_2} - P + N_{x_3} \cos \alpha = 0, \quad (1.36)$$

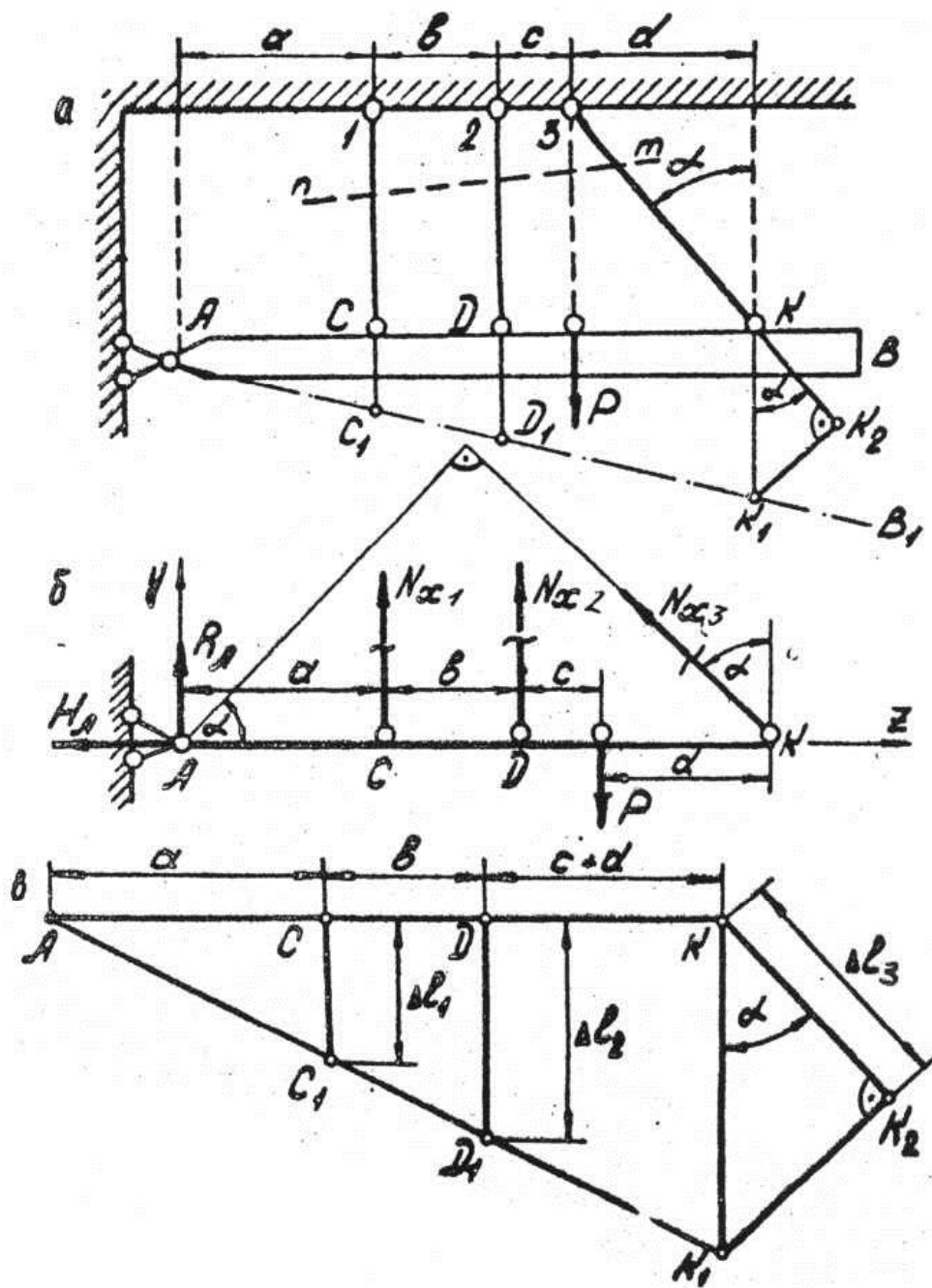


Рис. 1.11

$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0, \quad -H_A - N_{x3} \sin \alpha = 0, \quad (1.37)$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0,$$

$$-N_{x1} a - N_{x2} (a+b) + P(a+b+c) - N_{x3} (a+b+c+d) \cos \alpha = 0, \quad (1.38)$$

откуда следует, что задача два раза статически неопределимая. Заметим, что уравнения (1.36) и (1.37) можно было и не составлять,

так как в них входят силы  $R_A$  и  $H_A$ , которые определять не нужно. Согласно (1.13) имеем  $K = 4$  (четвертый контур образуют стержни шарнирно-неподвижной опоры у сечения  $A$ ),  $Ш = 10$ , тогда  $S = 12 - 10 = 2$ .

Построим деформированную систему. Под действием силы  $P$  балка  $AB$  повернется вокруг шарнира  $A$  и займет положение  $AB_1$  (штрихпунктир на рис. 1.11, *а*). Величина поворота балки определяется деформациями стержней; ввиду малости деформаций можно считать, что любая точка балки перемещается по вертикали вниз. Это допущение соответствует рассмотренному в разд. 1.3.2 допущению о замене дуги окружности (засечки) прямой, перпендикулярной к первоначальному положению подвижного радиуса. В данном случае подвижной радиус – балка  $AB$ .

Применив способ раскрепления узла, изобразим деформацию стержня 3.

Из диаграммы перемещений (см. рис. 1.11, *в*) запишем:

$$\frac{CC_1}{a} = \frac{DD_1}{a+b} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{a+b}, \quad (1.39)$$

$$\frac{CC_1}{a} = \frac{KK_1}{a+b+c+d} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_3}{\cos \alpha (a+b+c+d)}. \quad (1.40)$$

Заменив в дополнительных уравнениях (1.39) и (1.40)

$\Delta l_i = \frac{N_{x_i} l_i}{E_i F_i}$ , получаем еще два уравнения, связывающих неизвестные усилия.

### 1.3.4. Влияние температурного фактора

Найдем усилия в стержнях, на которых подвешен абсолютно жесткий брус  $KS$  (рис. 1.12), весом которого можно пренебречь, если в процессе эксплуатации стержень 2 нагревается на  $\Delta t$  градусов.

При нагревании стержень 2, удлиняясь, будет давить на брус  $KS$ , стремясь сместить его вниз. Так как брус  $KS$  подвешен на стержнях 1 и 3, которые не позволяют ему свободно перемещаться вниз, он будет сопротивляться этому давлению, и со стороны бруса на стержень 2 будет действовать реакция, вызывающая в стержне напряжения сжатия. В стержнях 1 и 3 возникают растягивающие напряжения.

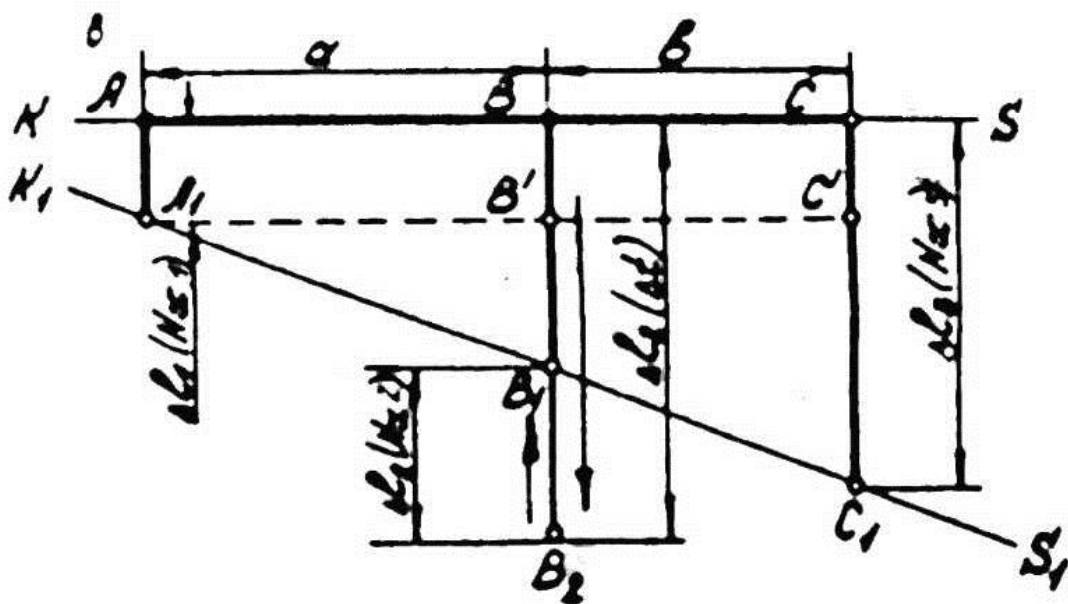
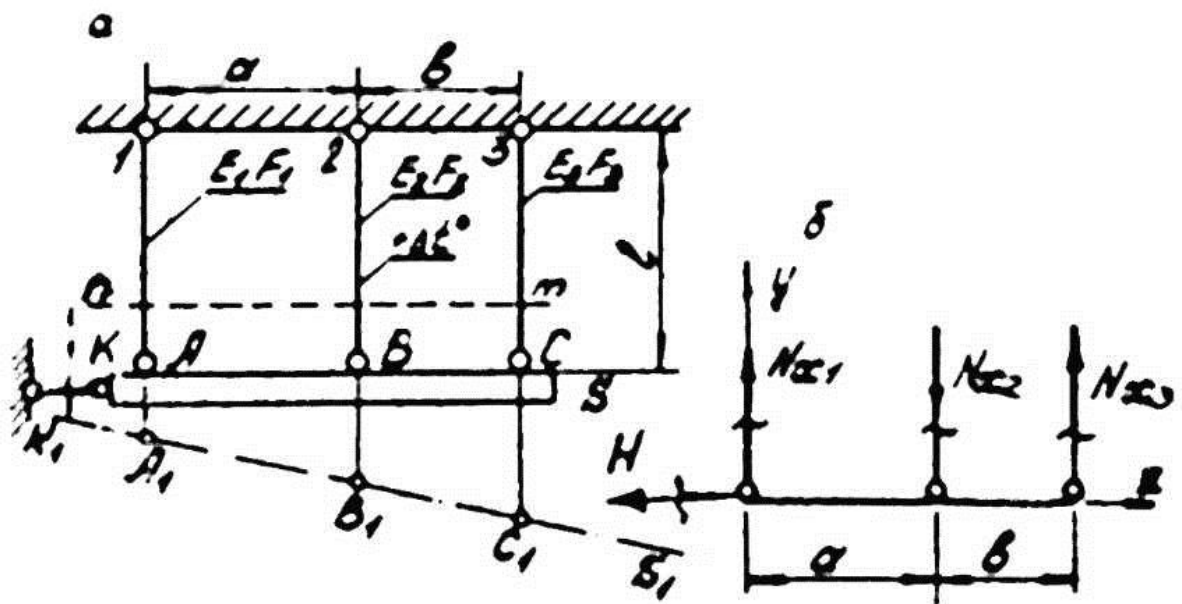


Рис. 1.12

Приняв за объект равновесия брус  $KS$ , мысленно отрежем его сечением  $n-t$  по стержням и рассмотрим условия равновесия для силовой схемы (см. рис. 1.12, б):

$$\sum Z = 0, \quad H = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad N_{x_1} - N_{x_2} + N_{x_3} = 0, \quad (1.41)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{A_i} = 0, \quad N_{x_2} a - N_{x_3} (a+b) = 0, \quad (1.42)$$

Откуда получаем, что задача один раз статически неопределимая.

Изобразим деформированную систему. Пусть брус  $KS$  в связи с деформацией стержней займет положение  $K_1S_1$  (штрихпунктир на рис. 1.12, а). Ввиду малости деформаций можно считать, что точки  $A, B, C$  бруса переместятся по вертикали вниз.

Отрезки  $AA_1$  и  $CC_1$  представляют собой удлинения соответственно стержням 1 и 3, обусловленные только лишь действием растягивающих усилий  $N_{x_1}$  и  $N_{x_3}$ , как показано на диаграмме перемещений (см. рис. 1.12, в). Что же касается отрезка  $BB_1$ , то он будет представлять собой разность удлинения стержня, обусловленного его нагреванием, и укорочения, вызванного сжимающей силой  $N_{x_2}$ . Действительно, если бы стержень 2 был бы свободен, его удлинению от нагрева не препятствовал бы брус  $KS$ , стержень удлинился бы на величину большую, чем  $BB_1$ , например на  $BB_2$ ; возникающее же в стержне сжимающее усилие (реакция со стороны бруса вызывает сжатие в стержне) сокращает это удлинение на величину отрезка  $B_1B_2$ , т.е.  $B_1B_2$  и представляет собой величину абсолютного укорочения стержня 2, обусловленного действием сжимающей силы  $N_{x_2}$ , а поэтому

$$BB_1 = \Delta l_2 = BB_2 - B_1B_2 = \Delta l_2(\Delta t) - \left| \Delta l_2(N_{x_2}) \right|. \quad (1.43)$$

Следует особое внимание обратить на то, что в выражение (1.43) входит модуль деформации, вызванной силовым фактором  $N_{x_2}$ , так как здесь имеет место простое арифметическое вычитание длин отрезков.

Для установления зависимости между деформациями стержней проведем в диаграмме перемещений вспомогательную прямую  $A_1B'C'$  и из подобия треугольников запишем, что

$$\frac{B'B_1}{a} = \frac{C'C_1}{a+b} \quad \text{или} \quad \frac{BB_1 - AA_1}{a} = \frac{CC_1 - AA_1}{a+b},$$

тогда дополнительное уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\left[ \Delta l_2(\Delta t) - \left| \Delta l_2(N_{x_2}) \right| \right] - \Delta l_1(N_{x_1})}{a} = \frac{\Delta l_3(N_{x_3}) - \Delta l_1(N_{x_1})}{a+b}, \quad (1.44)$$

где

$$\Delta l_i(N_{x_i}) = \frac{N_{x_i} l_i}{E_i F_i}; \quad \Delta l_2(\Delta t) = \alpha \Delta t l_2.$$

Как видно из приведенной диаграммы, при решении задачи выдержано условие строгого соответствия. Действительно, стержни 1 и 3 испытывают растяжение и длина каждого увеличилась на величину  $\Delta l_i(N_{x_i})$ , а стержень 2 сжимается силой  $N_{x_2}$ , что и определило уменьшение его удлинения, вызванного нагревом на  $\Delta t$  градусов, на величину отрезка  $B_1B_2 = \left| \Delta l_2(N_{x_2}) \right|$ .

### 1.3.5. Выполнение условия строгого соответствия

Составим уравнения, с помощью которых можно определить усилия в стержнях 1, 2 и 3 (рис. 1.13).

Система такая же, как и в разд. 1.3.4, но в процессе эксплуатации стержень 3 охлаждается на  $\Delta t^\circ$ , что должно укоротить его длину. Этому укорочению препятствует брус  $KS$ , в результате чего в стержне возникает растягивающее усилие  $N_{x_3}$ .

Пусть отрезок  $CC_2 = \Delta l_3$  и представляет собой деформацию стержня (см. рис. 1.13, б). Исходя из вышесказанного следует, что

$$CC_2 = CC_1 - C_1C_2$$

или

$$\left| \Delta l_3 \right| = \left| \Delta l_3(\Delta t) \right| - \Delta l_3(N_{x_3}), \quad (1.45)$$

где  $\Delta l_3(\Delta t) = \alpha \Delta t l_3$  – укорочение стержня от охлаждения, если бы

он был свободен;  $\Delta l_3(N_{x_3}) = \frac{N_{x_3} l_3}{E_3 F_3}$  – величина, на которую стержень

удлиняется от действия реакции со стороны бруса  $KS$ , вызывающей в стержне растяжение.

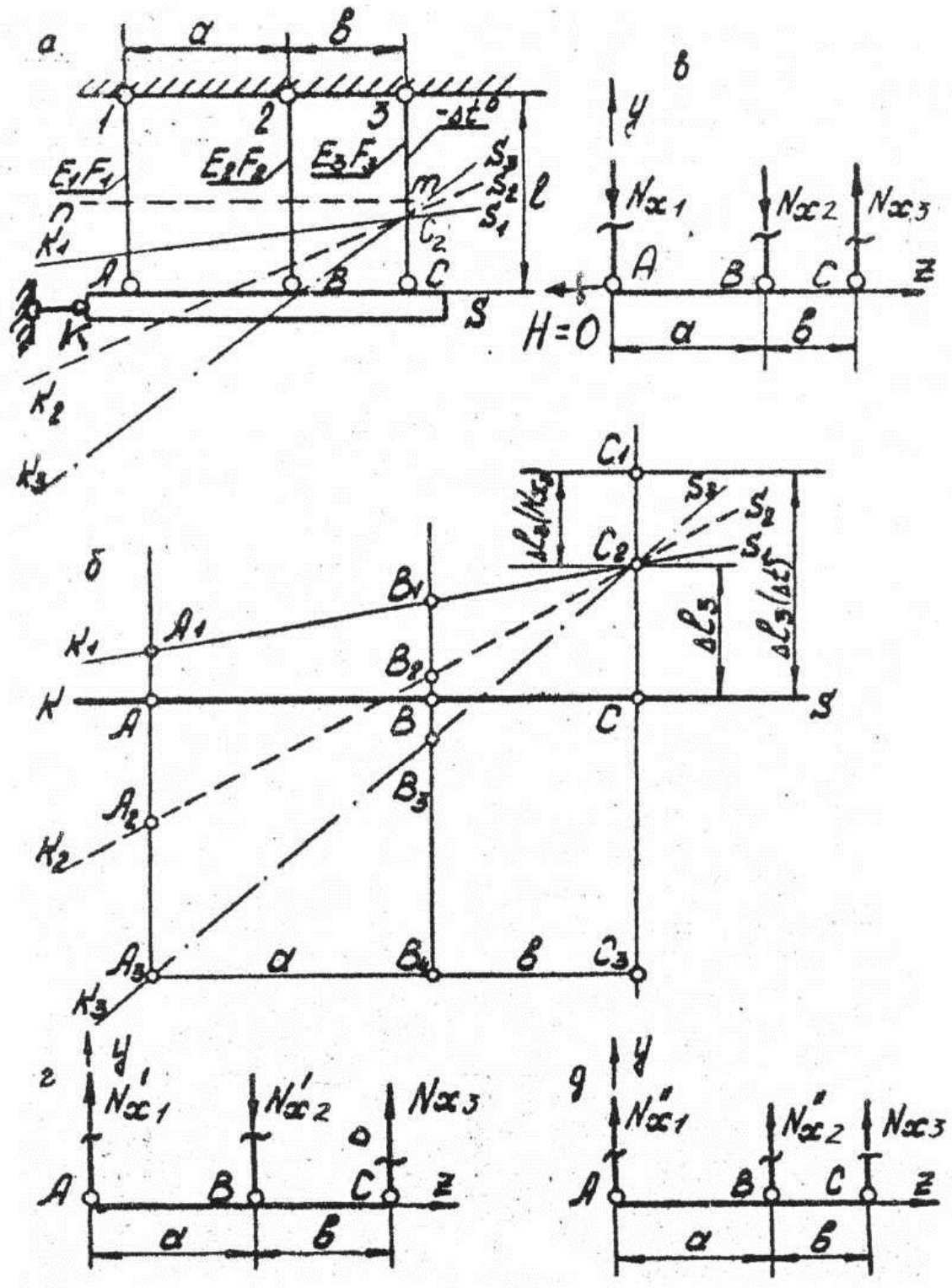


Рис. 1.13

Какие же усилия возникают при этом в стержнях 1 и 2? На этот вопрос отвечаем, построив диаграмму перемещений.

Рассмотрим три возможных варианта.

1. Если принять, что стержни 1 и 2 укорачиваются, т.е. ось бруса пройдет выше точек  $A$  и  $B$  (тонкая сплошная линия  $K_1S_1$  на рис. 1.13), то в этом случае в стержнях 1 и 2 возникают сжимающие усилия (см. рис. 1.13, в), а отрезки

$$AA_1 = |\Delta l_1| = \left| \frac{N_{x_1} l_1}{E_1 F_1} \right| \quad \text{и} \quad BB_1 = |\Delta l_2| = \left| \frac{N_{x_2} l_2}{E_2 F_2} \right|$$

представляют собой укорочения этих стержней.

2. Если принять, что стержень 2 укорачивается, а стержень 1 удлиняется, т.е. ось бруса после их деформации пройдет выше точки  $B$ , но ниже  $A$  (штриховая линия  $K_2S_2$ ), то в этом случае в стержне 1 возникает растягивающее усилие, а в 2 – сжимающее, что отображено на силовой схеме (см. рис. 1.13, г), при этом отрезок  $AA_2$  представляет собой удлинение стержня 1, а отрезок  $BB_2$  – укорочение стержня 2, вызванные, соответственно, силами  $N'_{x_1}$  и  $N'_{x_2}$ .

3. Если принять, что стержни 1 и 2 удлиняются, т.е. ось бруса пройдет ниже точек  $A$  и  $B$  (штрихпунктирная линия  $K_3S_3$ ), то в стержнях возникают растягивающие усилия (см. рис. 1.13, д), а отрезки  $AA_3$  и  $BB_3$  представляют собой удлинения стержней, вызванные, соответственно, силами  $N''_{x_1}$  и  $N''_{x_2}$ .

Как видим, во всех вариантах предполагаемая деформированная система определяет силовую схему.

Хотя второй вариант наиболее логичен, любой из приведенных трех вариантов может быть использован при решении, так как в каждом выдержано условие строгого соответствия силовой и деформационной системы, а знаки в конечном результате укажут, правильно ли были выбраны направления сил.

При решении, например, по третьему варианту уравнения равновесия (см. рис. 1.13, д) имеют вид:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad N''_{x_1} + N''_{x_2} + N_{x_3} = 0, \quad (1.46)$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0, \quad -N''_{x_2} a - N_{x_3} (a+b) = 0, \quad (1.47)$$



а дополнительное уравнение получим из диаграммы перемещений (см. рис. 1.13, б). Проведем параллельно  $KS$  вспомогательную прямую  $A_3B_4C_3$ . Рассмотрев подобные треугольники,  $\triangle A_3B_3B_4 \sim \triangle A_3C_2C_3$ , можно записать, что

$$\frac{C_2C_3}{a+b} = \frac{B_3B_4}{a} \quad \text{или} \quad \frac{C_2C + AA_3}{a+b} = \frac{AA_3 - BB_3}{a},$$

а заменив отрезки соответствующими деформациями, имеем

$$\frac{[\Delta l_3(\Delta t) - \Delta l_3(N_{x_3})] + \Delta l_1(N''_{x_1})}{a+b} = \frac{\Delta l_1(N''_{x_1}) - \Delta l_2(N''_{x_2})}{a}, \quad (1.48)$$

которое и представляет собой третье дополнительное уравнение.

### 1.3.6. Влияние монтажного фактора

В статически определимых системах неточности изготовления не вызывают каких-либо усилий в элементах системы. Действительно, если длина стержня 2 (рис. 1.14, а) на величину  $\delta^{*}$  меньше проектного размера  $l_2$ , то это приведет при сборке к смещению узла из проектной точки  $A$  в  $A_1$ .

В статически неопределимых системах неточность изготовления элементов приводит к возникновению при сборке так называемых начальных или монтажных напряжений. Так, для того чтобы в симметричной системе (рис. 1.14, б) соединить точку  $A$  с узлом  $A'$ , необходимо к стержню 2 приложить растягивающее усилие и удлинить его, а к стержням 1 и 3 – сжимающие усилия, несколько укоротить их. При этом узел  $A$  сместится вверх, узел  $A'$  – вниз в некоторую точку  $A_1$ . В стержнях возникнут усилия  $N_{x_i}$  (рис. 1.14, в). Как известно, для плоской системы сходящихся сил можно составить только два уравнения равновесия в виде:

---

<sup>\*</sup> Еще раз напомним, что для удобства изображения  $\delta$ , как и деформации  $\Delta l$ , перемещения  $U_x$  на других рисунках показаны в существенно большем масштабе, чем другие элементы схемы. Действительные значения абсолютных деформаций, неточностей в изготовлении стержней и т.п. имеют величину 1/1000 и меньше от длины стержней.

$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \sum_{i=1}^n Z_i = 0$ , следовательно, задача будет один раз статически неопределимой.

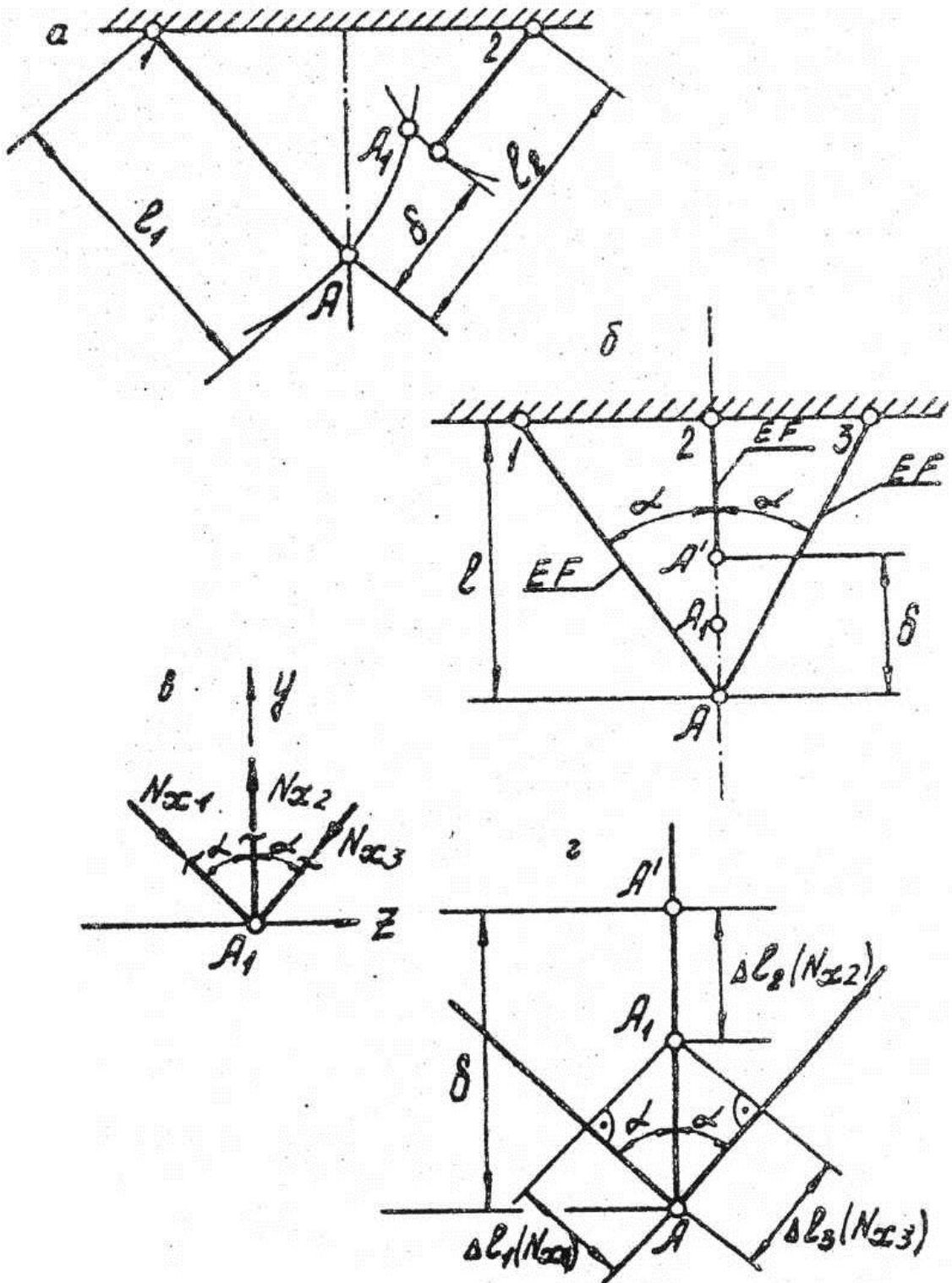


Рис. 1.14

Дополнительное уравнение составим из рассмотрения диаграммы перемещений (рис. 1.14, *з*). При построении диаграммы применен способ раскрепления узла *A*; каждый из крайних стержней был сначала сжат на величину абсолютного укорочения, а затем нижняя точка стержня перемещена в точку  $A_1$ , т.е. из нее на первоначальное положение подвижного радиуса (первоначальное положение крайнего стержня) опущен перпендикуляр (см. разд. 1.3.1).

Тогда

$$\delta - \Delta l_2(N_{x_2}) = \frac{|\Delta l_1(N_{x_1})|}{\cos \alpha}, \quad (1.3.1)$$

где  $\Delta l_2(N_{x_2}) = \frac{N_{x_2} l}{EF}$  – удлинение стержня 2, а  $\Delta l_1(N_{x_1}) = \frac{N_{x_1} l}{EF \cos \alpha}$  – укорочение стержня 1.

### 1.3.7. Суммарное влияние силового, температурного и монтажного факторов

Абсолютно жесткий брус, собственным весом которого пренебрегаем, загружен силой *P* (рис. 1.15, *а*). Стержень 2, изготовленный на величину  $\delta$  длиннее необходимого размера, должен быть при сборке присоединен к точке *C*. Стержень 1 в процессе эксплуатации нагревается на  $\Delta t^\circ$ . Требуется найти усилие в стержнях.

Решение задачи удобно начать с построения деформированной системы.

Предположим, что в результате действия всех факторов ось бруса займет новое положение  $AK_1$ . При этом пусть отрезок  $BB_1$  будет больше увеличения длины стержня 1 за счет нагрева, т.е. допустим, что  $BB_1 > \Delta l_1(\Delta t) = \alpha \Delta t l = BB'$ , как показано на диаграмме перемещений (рис. 1.15, *б*), тогда отрезок  $B_1B'$  будет представлять собой удлинение стержня, вызванное силой  $N_{x_1}$ , следовательно,  $N_{x_1}$  – также растягивающая. Деформацию стержня 3 найдем, применив способ раскрепления узла *D*, т.е. удлиняем стержень на величину  $DD' = \Delta l_3(N_{x_3})$ , затем поворачиваем стержень и помещаем

его конец  $D'$  в точку  $D_1$ . Иначе говоря, опускаем из точки  $D_1$  перпендикуляр на первоначальное положение подвижного радиуса (на первоначальное направление оси стержня 3). Таким образом, и стержень 3 также испытывает растяжение.

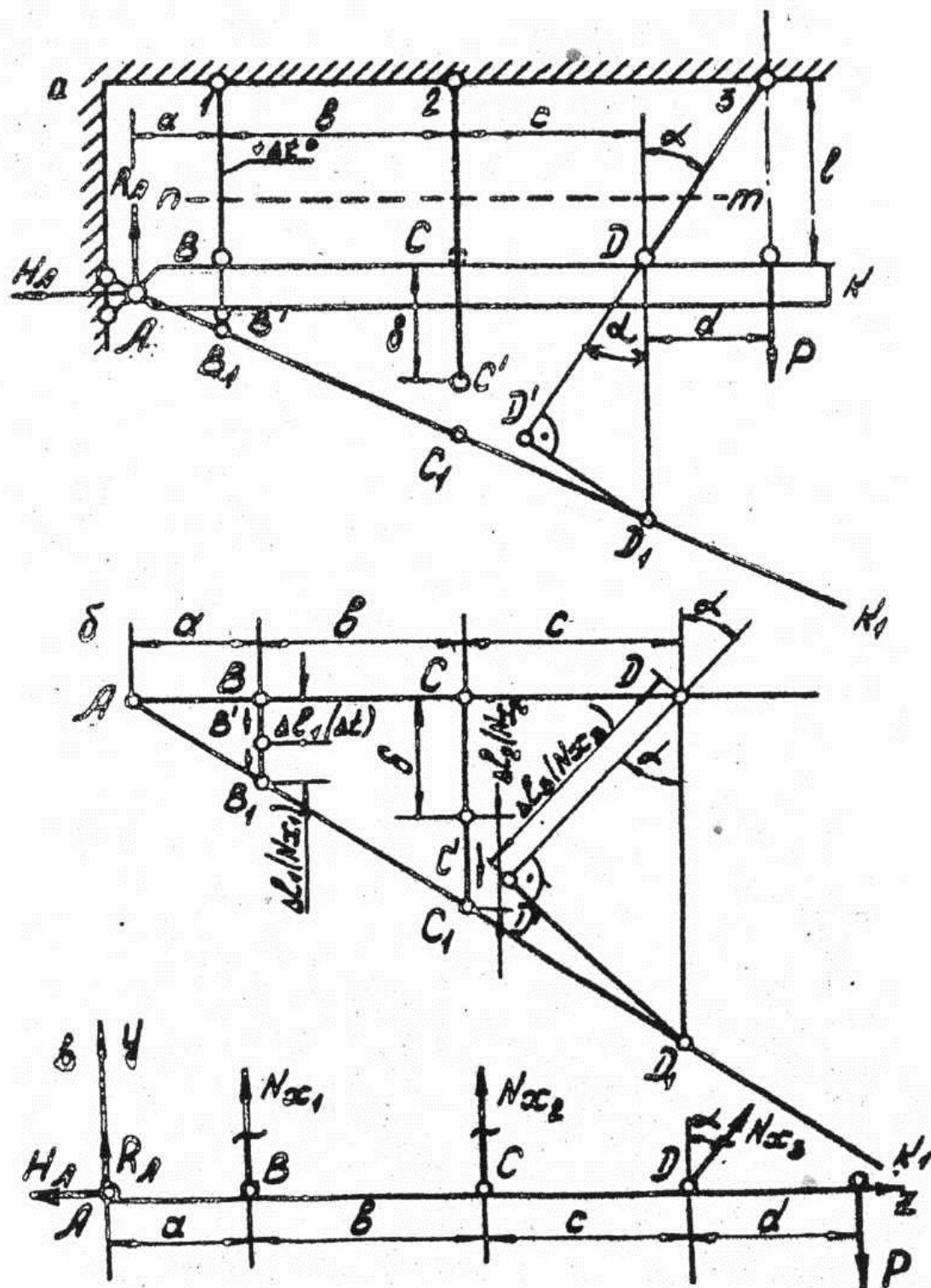


Рис. 1.15

В строгом соответствии с диаграммой перемещений изобразим силовую схему (рис. 1.15, в), приняв за объект равновесия брус  $AK$  и выделив его сечением  $n - m$  по стержням.

Тогда уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n Z_i = 0, & -H_A + N_{x_3} \sin \alpha = 0; \\ \sum_{i=1}^n Y_i = 0, & R_A + N_{x_1} + N_{x_2} + N_{x_3} \cos \alpha - P = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_A = 0, & -N_{x_1} a - N_{x_2} (a+b) - N_{x_3} (a+b+c) \cos \alpha + \\ & + P(a+b+c+d) = 0, \end{cases} \quad (1.50)$$

Следовательно, задача два раза статически неопределимая.

Дополнительные уравнения запишем из рассмотрения диаграммы перемещений, из которой следует, что

$$\frac{BB_1}{a} = \frac{CC_1}{a+b} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_1(\Delta t) + \Delta l_1(N_{x_1})}{a} = \frac{\delta + \Delta l_2(N_{x_2})}{a+b}, \quad (1.51)$$

$$\frac{BB_1}{a} = \frac{DD_1}{a+b+c} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_1(\Delta t) + \Delta l_1(N_{x_1})}{a} = \frac{\Delta l_3(N_{x_3})}{\cos \alpha (a+b+c)}, \quad (1.52)$$

где  $\Delta l(N_{x_i}) = \frac{N_{x_i} l_i}{E_i F_i}$ .

Очевидно, что в рассмотренной задаче усилия в стержнях могут быть определены и отдельно от каждого воздействия (от силы  $P$ , изменения температуры, влияния  $\delta$ ), а затем на основании принципа независимости действия сил можно получить значение суммарного усилия для каждого стержня.

### 1.3.8. Прием временного отвердевания

Найдем усилия в стержнях 1, 2 и 3 (рис. 1.16, а), принимая брус  $KS$  за абсолютно жесткий, весом которого можно пренебречь.

В результате действия вдоль оси стержня 1 силы  $P$ , приложенной в сечении  $D$  стержня, в участке  $DH$  возникает растягивающее усилие, а в участке  $AD$  – сжимающее. Действие последнего передается через узел  $A$  на брус  $KS$  и точка  $A$  сместится вниз. Предположим, что и точки  $B$  и  $C$  также сместятся вниз, т.е. ось бруса займет положение  $K_1 S_1$ .

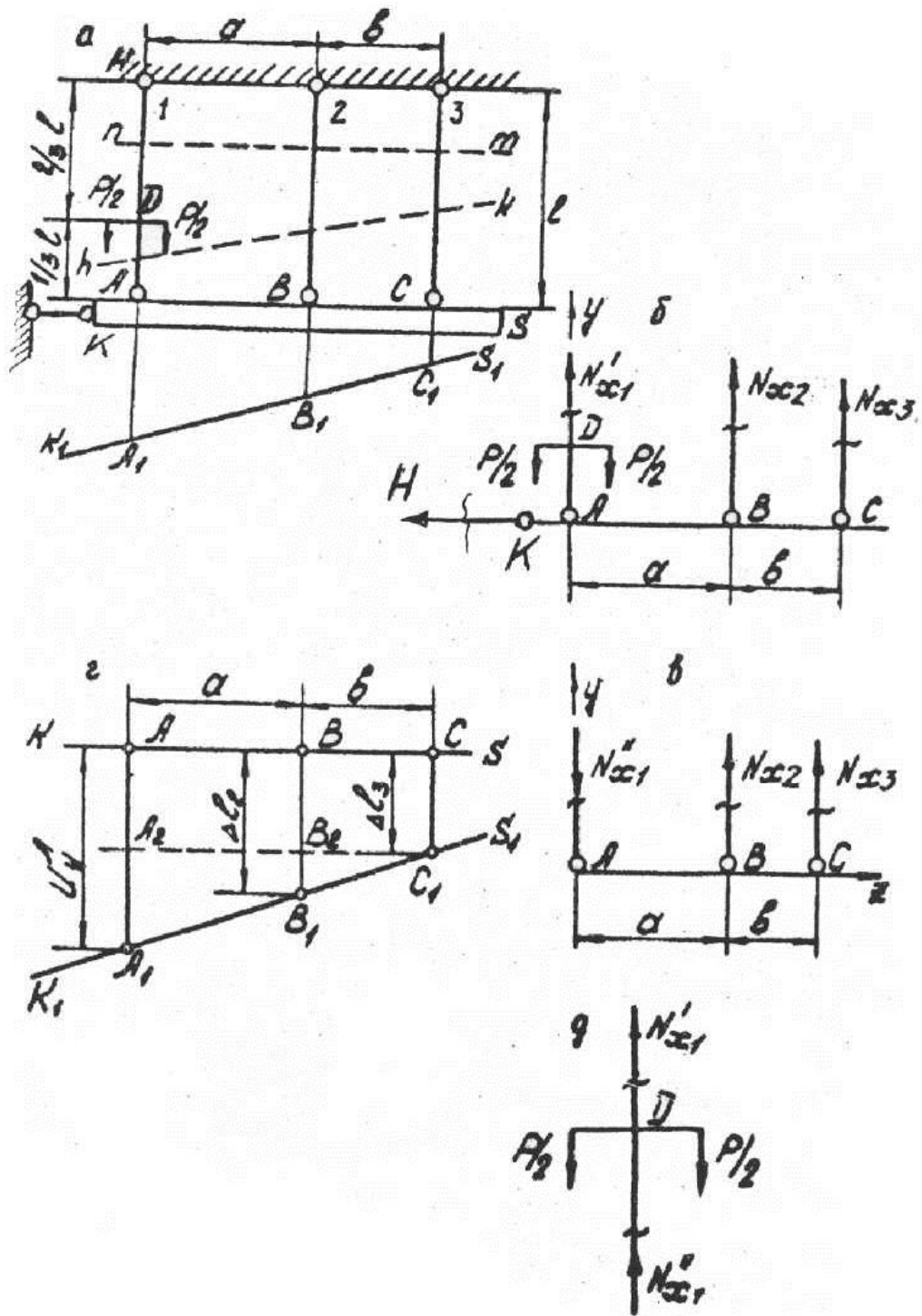


Рис. 1.16

Смещение точек  $B$  и  $C$  вниз свидетельствует об удлинении стержней 2 и 3, следовательно, в этих стержнях действуют растягивающие усилия.

Для построения силовой схемы и составления уравнений равновесия выберем за объект равновесия брус  $K'S$  и выделим его сечением  $n - m$  по стержням (рис. 1.16, б), тогда

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0: \quad N'_{x_1} - P + N_{x_2} + N_{x_3} = 0, \quad (1.53)$$

$$\sum Z = 0: \quad H = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{A_i} = 0, \quad -N_{x_2} a - N_{x_3} (a+b) = 0. \quad (1.54)$$

Третье независимое уравнение равновесия получим, выделив объект равновесия (брус) сечением  $h - k$  (рис. 1.16, а, в), тогда

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad -N''_{x_1} + N_{x_2} + N_{x_3} = 0. \quad (1.55)$$

Вместо уравнения (1.55) можно составить третье независимое уравнение равновесия, рассмотрев в качестве объекта равновесия часть стержня 1, выделенную сечением  $n$  и  $h$  (рис. 1.16, д), тогда

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad N'_{x_1} - P + N''_{x_1} = 0. \quad (1.56)$$

Следует обратить внимание, что формула (1.56) не является четвертым независимым уравнением, так как представляет собой следствие уравнений (1.53) и (1.55) (или уравнение (1.55) – следствие уравнений (1.53) и (1.56)).

Таким образом, данная задача один раз статически неопределимая. Такой же результат получим по формуле (1.13):  $K = 3$ ,  $Ш = 8$ ,  $S = 3 \cdot 3 - 8 = 1$ .

Рассмотрим диаграмму перемещений (рис. 1.16, з). Перемещение по вертикали точки  $C$  равно деформации третьего стержня

$$U_y^C = CC_1 = \Delta l_3 = \frac{N_{x_3} l}{E_3 F_3}, \quad \text{а перемещение точки } B - U_y^B = BB_1 = \\ = \Delta l_2 = \frac{N_{x_2} l}{E_2 F_2}.$$

Очевидно, что перемещение точки  $A$  ( $U_y^A$ ) складывается из деформации участка  $AD$  и  $DH$  стержня 1. Для того чтобы избежать ошибки в оценке вклада участков в перемещение точки  $A$ , воспользуемся приемом временного отвердевания. Пусть участок  $AD$  стержня 1 превратился в абсолютно твердое тело. Сечение  $D$  стержня переместится вниз настолько, насколько растянется участок  $DH$ , т.е.

$$U_y^D = \Delta l_1' = \frac{N_{x_1}' \cdot \frac{2}{3}l}{E_1 F_1},$$

на столько же (так как участок  $AD$  абсолютно твердый) переместится вниз и точка  $A$ . Очевидно, что в действительности точка  $A$  сместится вниз на меньшую величину, так как участок  $AD$  упругий

и под действием  $N_{x_1}''$  сожмется на  $\Delta l_1'' = \frac{N_{x_1}'' \cdot \frac{1}{3}l}{E_1 F_1}$ .

Таким образом,

$$U_y^A = AA_1 = \Delta l_1' - |\Delta l_1''|. \quad (1.57)$$

Для составления дополнительного уравнения проведем вспомогательную прямую  $A_2C_1 \parallel AC$ , тогда

$$\frac{AA_1 - CC_1}{a+b} = \frac{BB_1 - CC_1}{b} \quad \text{или} \quad \frac{[\Delta l_1' - |\Delta l_1''|] - \Delta l_3}{a+b} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_3}{b}. \quad (1.58)$$

Выражая согласно закону Гука  $\Delta l_i$  через  $N_{x_i}$  в уравнении (1.58) и решая совместно с уравнениями (1.53), (1.54) и (1.55), найдем искомые усилия в стержнях.

### 1.3.9. Задачи «Диски»

Пусть требуется определить усилия в стержнях 1, 2, 3, поддерживающих абсолютно жесткий брус  $AK$ , весом которого по сравнению с величиной  $P$  пренебрегаем (рис. 1.17, а).

Начнем решение задачи с изображения деформированной системы, для чего мысленно заменим брус  $AK$  диском (рис. 1.17, б). В диске проводим радиусы  $r_B$  и  $r_C$  из точки  $K$ , вокруг которой диск



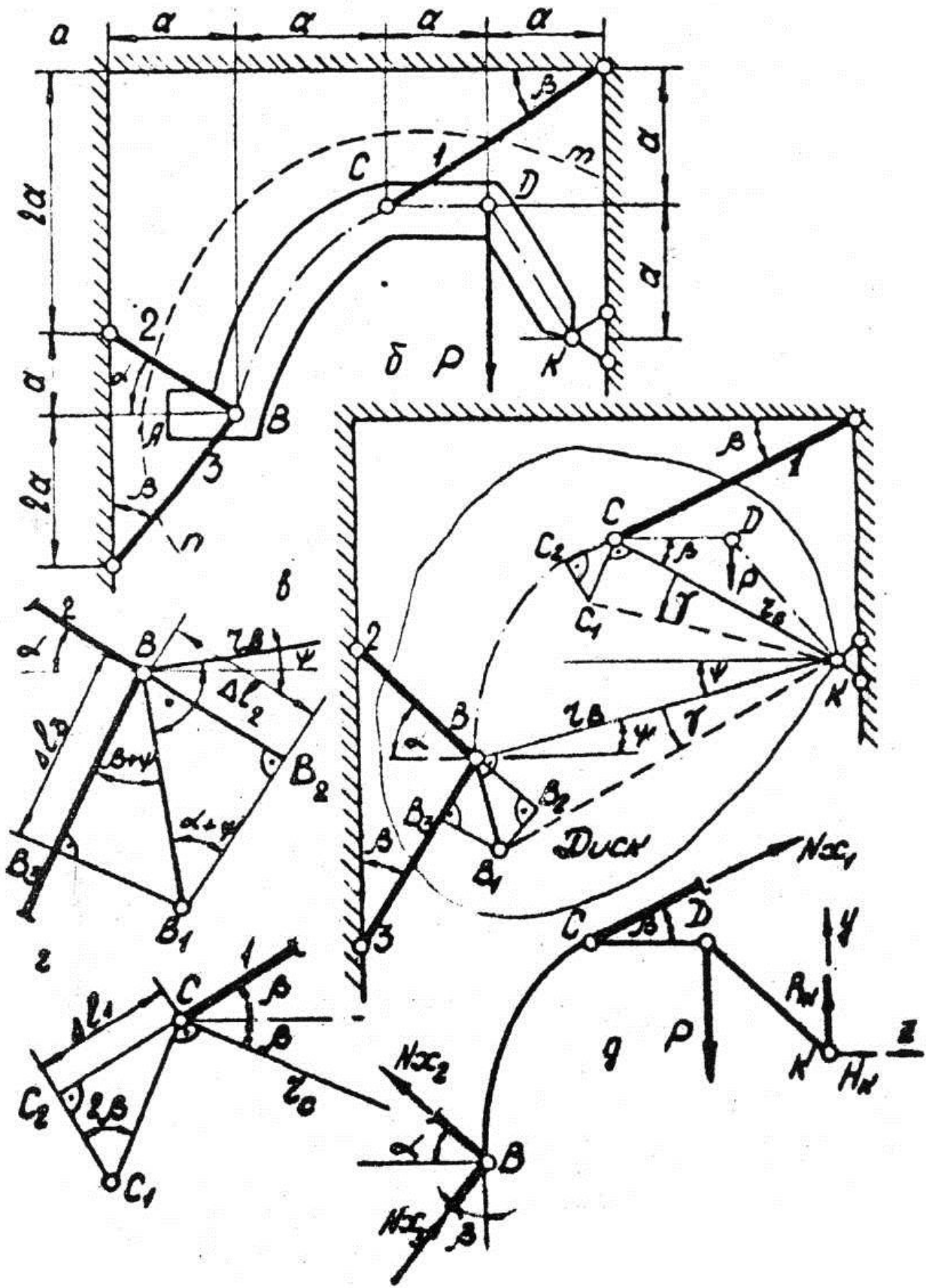


Рис. 1.17

поворачивается на некоторый небольшой угол  $\gamma$  (величина угла поворота диска определяется деформациями стержней). Любой радиус в диске, проведенный из точки  $K$ , повернется на угол  $\gamma$ . Новое положение точек  $B$  и  $C$  найдем, проведя  $BB_1 \perp BK$  и  $CC_1 \perp CK$  – перпендикуляры к первоначальному положению подвижных радиусов. Способом раскрепления узла строим у шарниров  $B$  и  $C$  диаграммы перемещений (рис. 1.17, в, г), откуда следует, что стержни 1 и 2 испытывают растяжение, а стержень 3 – сжатие.

Принимая за объект равновесия брус  $AK$  и выделяя его сечением  $n - m$  по стержням, получаем силовую схему (рис. 1.17, д), для которой можно составить три уравнения равновесия, а именно:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_K = 0. \quad (1.59)$$

В них войдут пять неизвестных  $N_{x_1}$ ,  $N_{x_2}$ ,  $N_{x_3}$ ,  $R_K$  и  $H_K$ , т.е. задача два раза статически неопределимая.

Дополнительные уравнения получим из диаграммы перемещений (рис. 1.17, в)

$$BB_1 = \frac{\Delta l_2}{\sin(\alpha + \psi)} = \frac{|\Delta l_3|}{\cos(\beta + \psi)}, \quad (1.60)$$

а также из подобия треугольников  $BKB_1 \sim CKC_1$  (две пары углов соответственно равны) в деформированной системе (см. рис. 1.17, б)

$$\frac{CC_1}{r_C} = \frac{BB_1}{r_B} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l_1}{\cos 2\beta r_C} = \frac{\Delta l_2}{\sin(\alpha + \psi) r_B}, \quad (1.61)$$

где

$$\Delta l_i = \frac{N_{x_i} l_i}{E_i F_i}.$$

Очевидно, что разд. 1.3.3 – 1.3.7 – частные случаи задач «дисков», в которых все стержни прикреплены к одному подвижному радиусу диска (отрезок прямой  $AK$  на рис. 1.11 и 1.15).

## 1.4. Интеграл Мора для определения перемещений

Использование интеграла Мора в большинстве случаев рассматривается в темах изгиба, сложного сопротивления и т.д., хотя он вполне применим для темы растяжения.

### 1.4.1. Решение статически определимых задач

При наличии только одного внутреннего силового фактора  $N_x$  интеграл Мора имеет вид

$$\delta = \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{N_{x_j} \bar{N}_{i_j} dx}{E_j F_j}, \quad (1.62)$$

где  $N_{x_j}$  – выражение внутреннего силового фактора на  $j$ -м участке (стержне) от заданной нагрузки;  $\bar{N}_{i_j}$  – выражение внутреннего силового фактора на  $j$ -м участке от единичной (безразмерной) силы, приложенной в  $i$ -м сечении в направлении искомого перемещения;  $l_j$  и  $E_j F_j$  – длина и жесткость поперечного сечения  $j$ -го участка (стержня) соответственно.

Для стержневых систем, элементы которых испытывают только деформацию растяжения-сжатия от сосредоточенных сил, формула (1.62) имеет вид

$$\delta = \sum \frac{N_{x_j} \bar{N}_{i_j} l_j}{E_j F_j}, \quad (1.63)$$

которая была предложена Максвеллом. Верещагином был предложен графоаналитический способ вычисления интеграла Мора в случае, если оси стержней прямолинейны и жесткость  $EF$  постоянна или кусочно-постоянна. Согласно способу Верещагина интеграл Мора может быть вычислен по формуле

$$\delta = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j \bar{N}_{i_j}^C}{E_j F_j}, \quad (1.64)$$

где  $\omega_j$  – площадь так называемой грузовой эпюры, т.е. эпюры  $N_x$  от действующих нагрузок;  $\bar{N}_{i_j}^C$  – ордината эпюры нормальной силы  $\bar{N}_x$

на  $j$ -м участке от единичной силы, под центром тяжести грузовой площади  $\omega_j$ ; единичная сила приложена в  $i$ -м сечении, перемещение которого определяется и в направлении искомого перемещения.

Операцию в числителе формулы (1.64) принято называть «перемножением» эшюр.

Покажем как для стержня, изображенного на рис. 1.18, а, определяется перемещение, например, сечения  $K$  в направлении оси  $x$  с помощью способа Верещагина. Покажем именно *возможность*, а не как рекомендацию к рациональному решению (см. вариант 2 к данному примеру). Расчетная схема представлена на рис. 1.18, б; жесткость поперечного сечения на участке  $AB$  равна  $2EF$ , а на участке  $BK - EF$ . Из уравнения равновесия в виде  $\sum x = 0$ , получим, что  $R_A = ql$ . На рис. 1.18, в изображена эшюра  $N_x$  (грузовая площадь). На рис. 1.18, г дана единичная система. В сечении  $K$  (сечение  $i$ -е перемещение которого будем определять) приложена единичная сила  $P^0 = 1$  по направлению  $x$  (по направлению искомого перемещения).

На рис. 1.16, в показаны положения центров тяжести  $C_1, C_2, C_3$  грузовых площадей. Отметим, что для этой задачи определять положения центров тяжести нет смысла, так как где бы они не находились, ординаты на эшюре  $\bar{N}_x$  везде одинаковы, т.е.  $\bar{N}_{C_1} = \bar{N}_{C_2} = \bar{N}_{C_3} = 1$ .

По формуле (1.64)

$$\begin{aligned} U_K &= \frac{1}{2EF} \omega_1 \bar{N}_{C_1} + \frac{1}{EF} (\omega_2 \bar{N}_{C_1} + \omega_3 \bar{N}_{C_2}) = \\ &= \frac{1}{2EF} \cdot \frac{3}{2} ql^2 \cdot 1 + \frac{1}{EF} \left( \frac{5}{2} ql^2 \cdot 1 + 3ql^2 \cdot 1 \right) = \frac{25}{4} \frac{ql^2}{EF}. \end{aligned}$$

Знак «+» в результате указывает, что направление перемещения сечения  $K$  совпадает с направлением единичной силы  $P^0 = 1$ .

*Вариант 2 решения.* Исходя из принципа суперпозиции (принципа независимости действия сил) и учитывая формулы (1.8) и (1.9) определим  $U_K$ :

$$U_K = -\frac{ql^2}{2 \cdot 2EF} - \frac{(ql) \cdot l}{2EF} - \frac{ql^2}{2EF} + \frac{P \cdot l}{2EF} + \frac{P \cdot 2l}{EF} = \frac{25}{4} \frac{ql^2}{EF}.$$

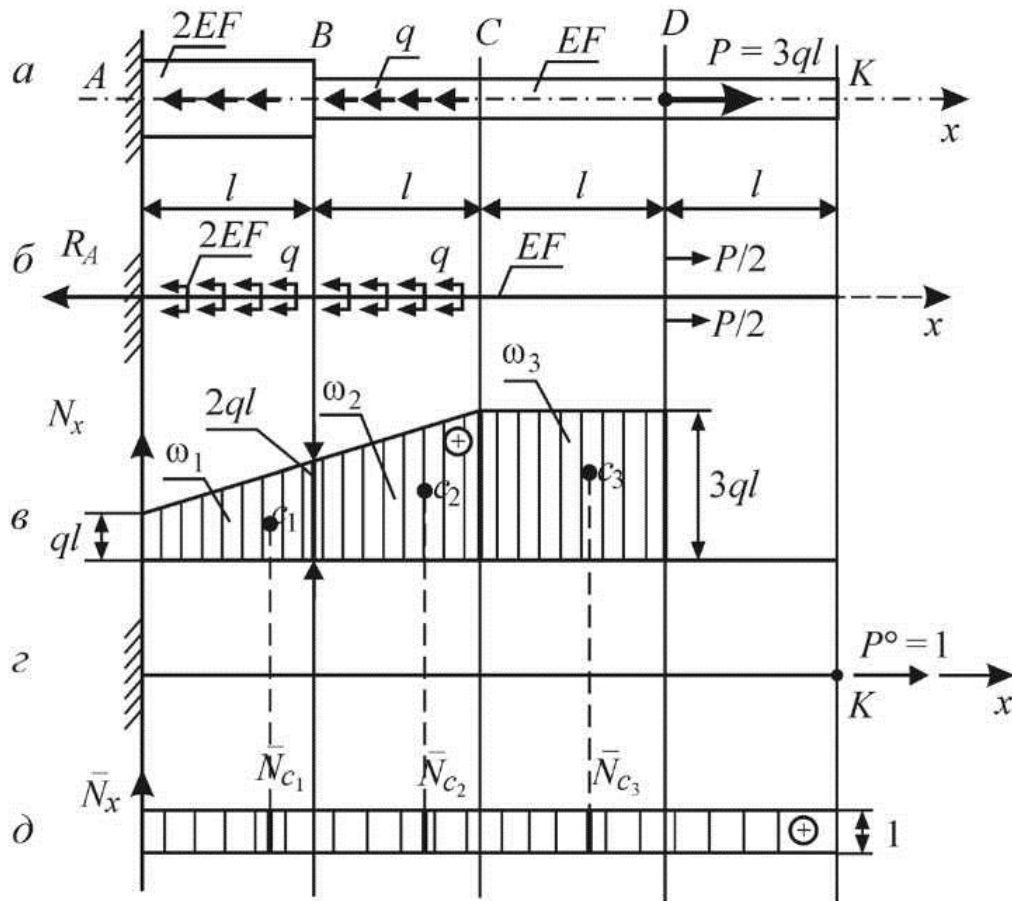


Рис. 1.18

Откуда делаем вывод, что при решении задачи нужно выбирать менее трудоемкий и более компактный способ решения.

Для стержневой системы в виде кронштейна (рис. 1.19, а) необходимо определить вертикальное и горизонтальное перемещения узла В.

*Вариант 1.* При решении воспользуемся способом Верещагина.

Из рассмотрения равновесия узла В (рис. 1.19, б) в виде уравнений  $\sum Z = 0$ ,  $\sum Y = 0$  получим, что  $N_{x_1} = \sqrt{3}P$ ,  $N_{x_2} = 2P$ . Эпюры  $N_x$  (грузовые площади) представлены на рис. 1.19, в. Для определения вертикального перемещения узла В изобразим единичную систему (рис. 1.19, з) с силой  $P^o = 1$ , приложенной к узлу В по вертикали; эпюры  $\bar{N}_x$  представлены на рис. 1.19, д.

По способу Верещагина

$$\delta_B = \frac{1}{EF} (\omega_1 \bar{N}_{C_1} + \omega_2 \bar{N}_{C_2}) = \frac{1}{EF} \left( \sqrt{3}P \cdot l \cdot \sqrt{3} + 2P \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} l \cdot 2 \right) =$$

$$= \left( 3 + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \frac{Pl}{EF}.$$

Для определения горизонтального перемещения изобразим единичную систему, нагруженную силой  $P^\circ = 1$  по горизонтали (рис. 1.19, е). Из рассмотрения равновесия узла  $B$  (рис. 1.19, ж) получим, что  $\bar{N}'_{x_1} = P^\circ = 1$ , а  $\bar{N}'_{x_2} = 0$ . Эпюра  $\bar{N}_x$  для этой единичной системы представлена на рис. 1.19, з.

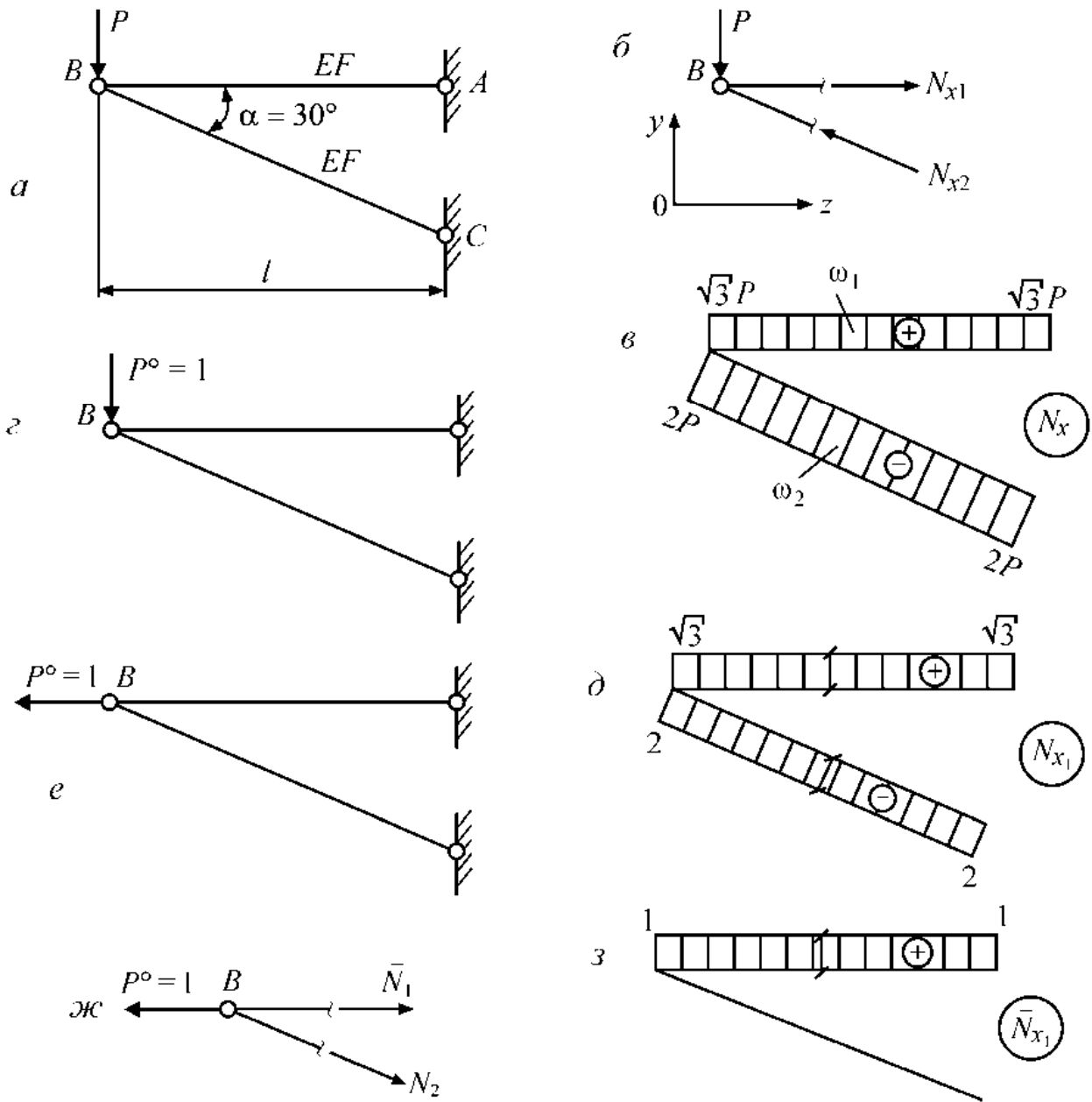


Рис. 1.19

$$\delta_{\Gamma} = \frac{1}{EF} \omega_1 \bar{N}'_{C_1} = \frac{\sqrt{3}Pl}{EF}.$$

Вариант 2. Из условий равновесия узла  $B$  имеем, что  $N_{x_1} = \sqrt{3}P$ ,  $N_{x_2} = 2P$ . Тогда

$$\Delta l_1 = \frac{N_{x_1} \cdot l_1}{EF} = \frac{\sqrt{3}P \cdot l}{EF}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_{x_2} \cdot l_2}{EF} = \frac{2P \cdot l}{\cos 30^\circ EF} = \frac{4Pl}{\sqrt{3}EF}.$$

Изобразим деформационную систему и построим диаграмму перемещений (рис. 1.20).

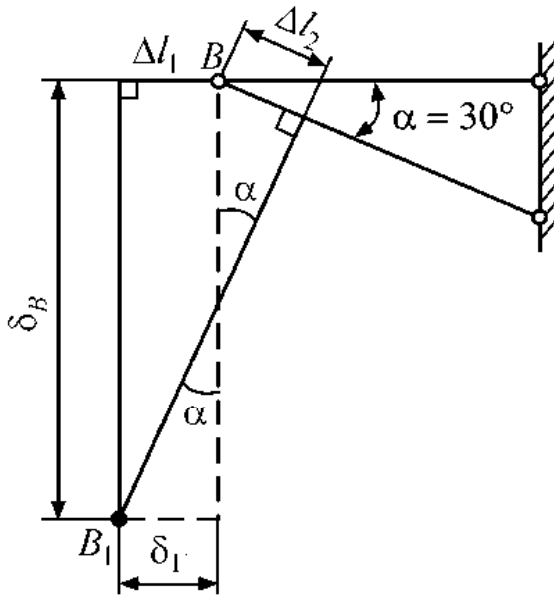


Рис. 1.20

Из диаграммы перемещений имеем, что

$$\delta_{\Gamma} = \Delta l_1 = \frac{\sqrt{3}Pl}{EF};$$

$$\delta_B = \frac{\Delta l_1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}P \cdot l \cdot \sqrt{3}}{EF \cdot 1} + \frac{4Pl \cdot 2}{\sqrt{3}EF \cdot 1} = \left( 3 + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \frac{Pl}{EF}.$$

#### 1.4.2. Статически неопределенные многостержневые системы при растяжении-сжатии (канонические уравнения метода сил)

План решения состоит из следующих операций.

1. Отбрасывая «лишние» связи, стоим основную систему.
2. Загрузив основную систему всеми внешними нагрузками, в том числе «лишними» неизвестными, которые заменили «лишние»

связи, получаем эквивалентную систему. При этом «лишние» неизвестные переходят в категорию внешних активных сил.

3. Записываем канонические уравнения метода сил.

Для  $n$  раз статически неопределимой системы уравнения имеют вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0; \quad (1.65)$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0; \quad (1.66)$$

$$\dots$$

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0.$$

Уравнение (1.65) представляет собой перемещение точки приложения силы  $X_1$  в направлении этой силы. Аналогично уравнение (1.66) – перемещение точки приложения силы  $X_2$  в направлении этой силы и т.д.

В уравнениях:  $\Delta_{ip}$  – грузовое перемещение только от *заданной* внешней нагрузки в эквивалентной системе, определенной в точке приложения и в направлении неизвестной силы  $X_i$ ;  $\delta_{ii}$  – главное единичное перемещение (главные коэффициенты канонического уравнения), которое представляет собой перемещение  $i$ -й точки от единичной силы в направлении  $X_i$  силы;  $\delta_{ij}$  – побочные единичные перемещения (побочные коэффициенты канонического уравнения), которые представляют собой перемещения  $i$ -й точки (точки приложения силы  $X_j$  и в направлении  $X_i$  от единичной силы, направленной так же, как и  $X_j$ ). Отметим, что  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ .

Для определения  $\Delta_{ip}$ ,  $\delta_{ii}$ ,  $\delta_{ij}$  необходимо построить эпюры  $N_x$  от только заданной нагрузки для эквивалентной системы, т.е. построить грузовые площади; построить эпюры  $\bar{N}_x$  от единичных усилий для основной системы, загруженной только единичными силами, приложенными в  $(i, j)$  точке по направлениям  $i, j, \dots, n$ . Далее следует произвести, например, по способу Верещагина перемножение эпюр, т.е. для получения  $\Delta_{ip}$  перемножить грузовую эпюру  $N_x$  с эпюрой  $\bar{N}_{x_i}$  от  $i$ -й единичной силы; для получения  $\delta_{ii}$  – перемножить эпюру  $\bar{N}_{x_i}$  от  $\bar{X}_1 = 1$  саму на себя; а  $\delta_{ij}$  полу-



чим, перемножив эпюру  $\bar{N}_{x_i}$  на эпюру  $\bar{N}_{x_j}$ . Подчеркнем, что все эпюры  $\bar{N}_{x_j}$  относятся к эпюрам от единичных усилий. При перемножении следует учитывать знаки эпюр.

В самом общем виде канонические уравнения записываются так [15]:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_k + \Delta_{jp} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.67)$$

Если в системе температура изменяется на  $\Delta T$ , то канонические уравнения принимают вид

$$\sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_k + \Delta_{jT} = 0, \quad (1.68)$$

где  $\Delta_{jT}$  – температурное перемещение в основной системе в направлении  $X_j$ , и может быть вычислено по формуле:

$$\Delta_{jT} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta T_i \bar{N}_{jj} l_i, \quad (1.69)$$

где  $\alpha_i$  – температурный коэффициент линейного расширения на  $j$ -м участке (в  $i$ -м стержне);  $\Delta T_i$  – изменение температуры;  $\bar{N}_{jj}$  – нормальная сила  $\bar{N}_x$  от действия единичной силы  $\bar{X}_j = P^0 = 1$ , приложенной в направлении действия «лишней» неизвестной;  $l_i$  – длина участка, на котором происходит изменение температуры.

При наличии монтажного зазора  $\Delta_j$  в направлении  $X_j$  каноническое уравнение запишется:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_k = -\Delta_j. \quad (1.70)$$

Пример решения с использованием канонических уравнений показан в задаче 1.14, в которой можно убедиться, что решения с помощью канонического уравнения менее трудосемко. Более подробно применение канонических уравнений метода сил будет рассмотрено при решении рамных систем.

## 1.5. Задачи

**Задача 1.1.** При креплении швеллера к абсолютно жёсткой ( $EF = \infty$ ) плите, в болте, при затяжке гайкой, вызвано растягивающее усилие  $N_x = N_0$ . Как будет меняться усилие в болте, если швеллер будет нагружаться силой  $0 \leq P \leq 4N_0$  (рис. 1.21)? Построить график  $N_x = f(P)$ .

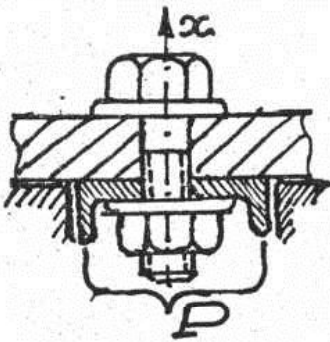


Рис. 1.21

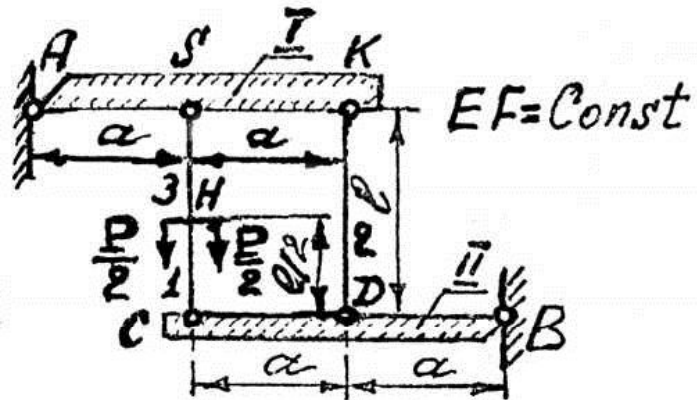


Рис. 1.22

**Задача 1.2.** Доказать, что работа силы  $P$  (при статическом нагружении от 0 до  $P$ ) численно равна потенциальной энергии деформации стержневой системы (рис. 1.22). Дано  $P, l, E, F$ . Деформацией и весом балок I, II пренебречь.

**Задача 1.3.** Построить эпюру  $N_x$  с учётом массы стержня (рис. 1.23). Дано  $P, l, m$  – масса стержня.

**Задача 1.4.** Абсолютно жёсткий ( $EF = \infty$ ) брус  $AB$  подвешен на упругом тросе, пропущенном через блоки  $C$  и  $D$  (рис. 1.24). Дано  $P, EF$  для троса,  $a$ . Определить положение сечения троса, которое останется неподвижным при действии силы  $P$ . Силами трения, размерами блоков и весом бруса  $AB$  пренебречь.

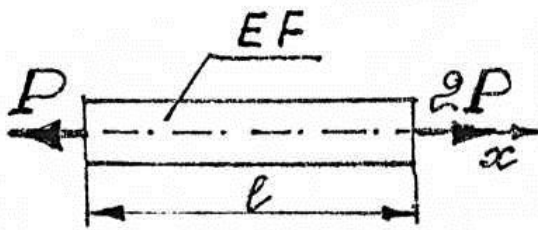


Рис. 1.23

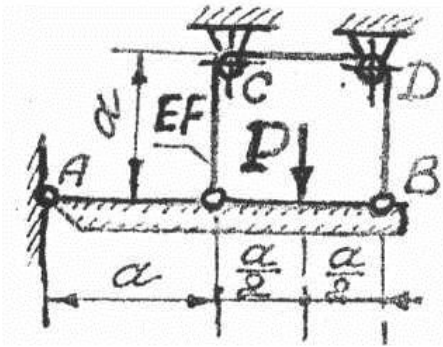


Рис. 1.24

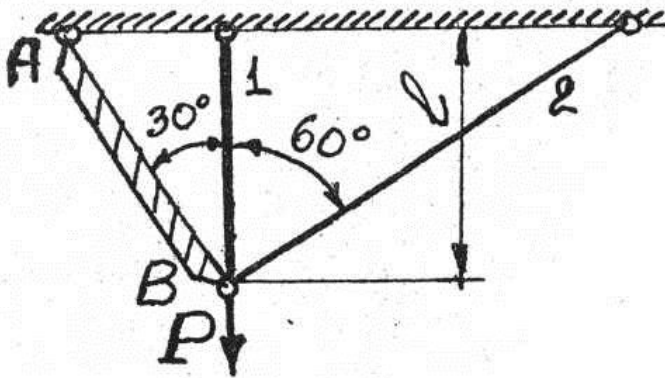


Рис. 1.25

**Задача 1.5.** Брус  $AB$  (рис. 1.25) абсолютно жесткий, весом которого пренебрегаем. Стержни  $1$  и  $2$  упругие ( $EF = 2 \cdot 10^4$  кН),  $l = 1$  м. Определить силу  $P$ , если при её приложении узел  $B$  переместился по вертикали на  $0,08$  см.

**Задача 1.6.** Стержень круглого поперечного сечения (рис. 1.26,  $a$ ) имеет

по любому диаметру поперечного сечения переменный модуль  $E(\rho)$  (эпюра приведена на рис. 1.26,  $b$ ). Построить эпюру нормальных напряжений при справедливости гипотезы плоских сечений.  $P$  и  $r$  заданы.

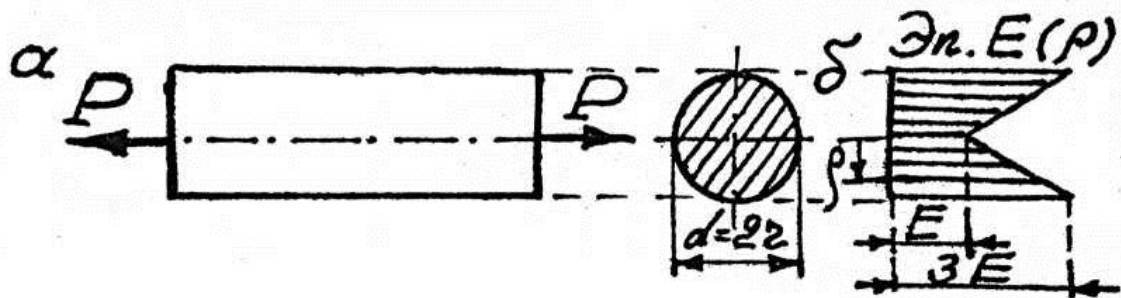


Рис. 1.26

**Задача 1.7.** Колонна сжимается под действием силы  $P$ , равномерно распределённой по верхнему сечению, и собственного веса (рис. 1.27). Требуется подобрать закон изменения площади поперечного сечения колонны из условия равнопрочности.  $P, \gamma, [\sigma]$  заданы.

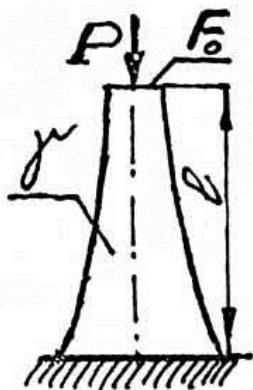


Рис. 1.27

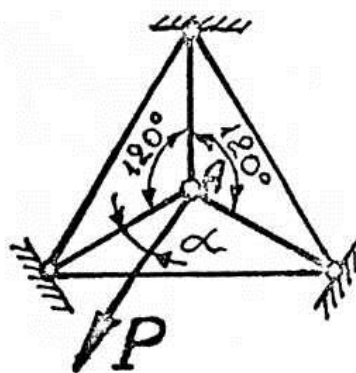


Рис. 1.28

**Задача 1.8.** Доказать, что в стержневой системе (рис. 1.28) узел  $A$  перемещается в направлении силы  $P$ , если жесткости всех стержней одинаковы.

**Задача 1.9.** Шарнир  $A$  может перемещаться по желобу свободно, но только по вертикали (рис. 1.29). Жесткости стержней одинаковы. При каком соотношении  $\alpha$  и  $\beta$  в стержнях не возникают напряжения при их нагревании на  $\Delta t$ .

**Задача 1.10.** Абсолютно жесткая балка, весом которой пренебрегаем, подвешена на упругих стержнях одинаковой жесткости (рис. 1.30). Определить монтажные напряжения, возникающие в стержнях при сборке – при присоединении точечного шарнира  $A$  к  $A_1$  ( $\delta \ll a$ ).

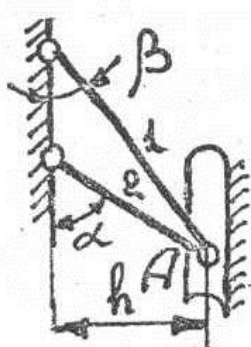


Рис. 1.29

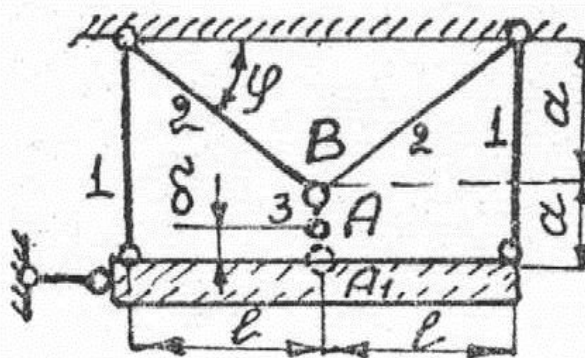


Рис. 1.30

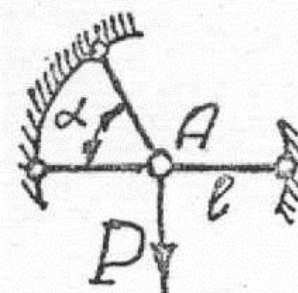


Рис. 1.31

**Задача 1.11.** В системе (рис. 1.31) все три стержня имеют одинаковую длину и жесткость. Найти горизонтальное и вертикальное перемещение узла  $A$ .

**Задача 1.12.** На какую величину  $\delta$  надо укоротить правый стержень, состоящий из двух частей, с помощью стяжной гайки  $A$ , чтобы абсолютно жёсткий брус весом  $P$ , подвешенный на трех одинаковых стержнях, оставался бы горизонтальным (рис. 1.32)? Известны  $P, l, \alpha$  и  $EF$  стержней.

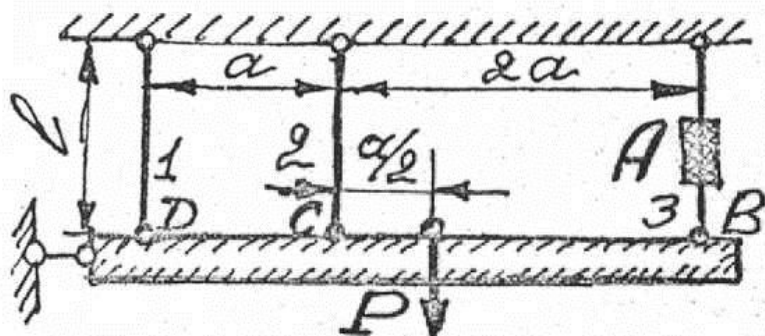


Рис. 1.32

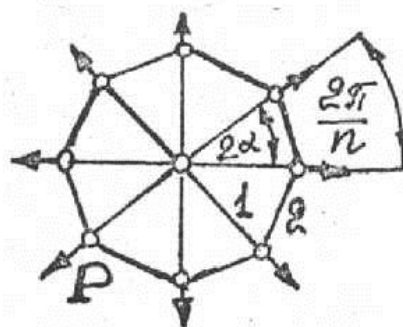
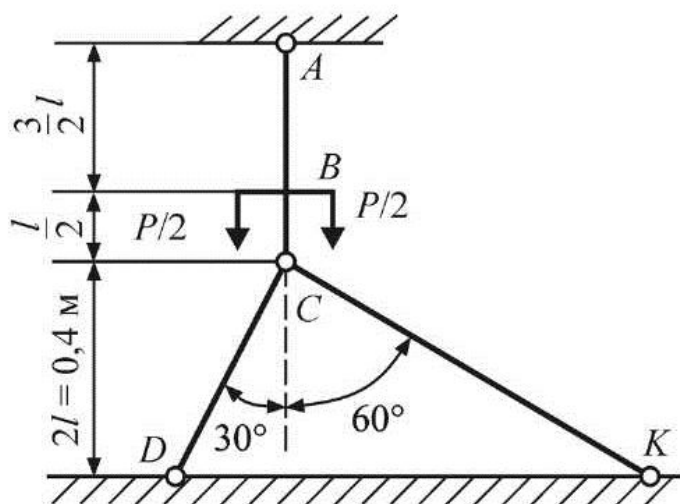


Рис. 1.33

**Задача 1.13.** Определить напряжения в стержнях плоской фермы в виде правильного многоугольника, загруженной в узлах радиальными силами  $P$  (рис. 1.33). Жесткость всех стержней одинакова. Длина каждого радиального стержня  $l$ .

Рис. 1.34



**Задача 1.14.** Для стержневой системы (рис. 1.34), линейные и угловые размеры которой известны, определить, как и насколько градусов нужно изменить температуру стержня  $AC$ , чтобы на участке  $AB$  напряжения стали бы равны нулю. Устойчивость стержней

считать обеспеченной. Известно:  $P = 50 \text{ кН}$ , для всех стержней  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $F = 16 \text{ см}^2$ ,  $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$ .

**Задача 1.15.** Стержень постоянного поперечного сечения жестко заделан правым и левым крайними сечениями (рис. 1.35). Стержень равномерно нагревается по всей длине на  $\Delta t$ . Показать без вычислений, что в стержне не возникают перемещения сечений по направлению оси  $x$ .

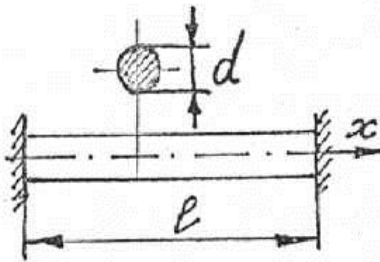


Рис. 1.35

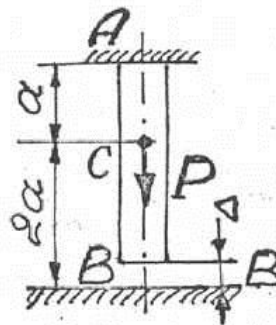


Рис. 1.36

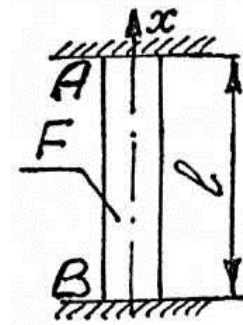


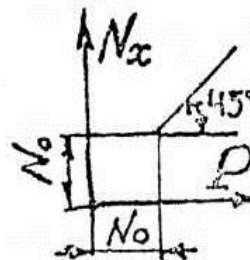
Рис. 1.37

**Задача 1.16.** Упругий стержень  $AK$  жесткостью  $EF$  жестко заделан верхним сечением. Между нижним сечением  $K$  и поверхностью  $B - B$  имеется зазор  $\Delta \ll a$  (рис. 1.36). Стержень в сечении  $C$  статически нагружается силой до величины  $P$ , при достижении которой  $P$ , сечение  $K$  коснется поверхности  $B - B$ . В момент касания сечение  $K$  приваривается к поверхности  $B - B$ , после чего стержень разгружают. Определить остаточные напряжения в стержне.

**Задача 1.17.** Для стержня  $AB$ , защемленного крайними сечениями (рис. 1.37), построить эпюры напряжений  $\sigma_x$  по длине и перемещений  $u_x$  сечений, вызванных действием собственного веса.  $\gamma, F, l, E_{сж} = 2E_{раст}$  известны.

## 1.6. Решения, указания, ответы

1.1. График имеет вид:



1.2. 1. Определяем тип задачи по формуле (1.13):  $S = 3 \cdot 2 - 6 = 0$ , так как  $K = 2$ ,  $Ш = 6$ , т.е. задача статически определимая.

2. Выделяем объекты равновесия (рис. 1.38).

3. Составляем уравнения равновесия для первой, второй и третьей схемы рис. 1.38:  $\sum m_A = 0$ ;  $\sum m_B = 0$ ;  $\sum x = 0$ ; откуда  $N_{x_1} = -\frac{1}{3}P$  (нужно поменять направление  $N_{x_1}$  на обратное, т.е. в стержне имеет место растяжение),  $N_{x_2} = \frac{2}{3}P$  (сжатие),  $N_{x_3} = \frac{4}{3}P$  (растяжение).

4. Определяем перемещения и деформации (рис. 1.39).  $\delta_C > \delta_S$ , так как стержни 1 и 3 растягиваются, т.е.  $\delta_C - \delta_S = \Delta l_1 + \Delta l_3$ ;  $\delta_K > \delta_D$ , так как стержень 2 сжимается, т.е.  $\delta_K - \delta_D = |\Delta l_2|$ .  $\Delta l_i = \frac{N_{x_i} \cdot l_i}{EF}$ . С учетом, что  $\frac{\delta_K}{\delta_S} = \frac{2a}{a}$ ,  $\frac{\delta_C}{\delta_D} = \frac{2a}{a}$ , найдем, что  $\delta_S = \frac{13}{9} \frac{Pl}{EF}$ .

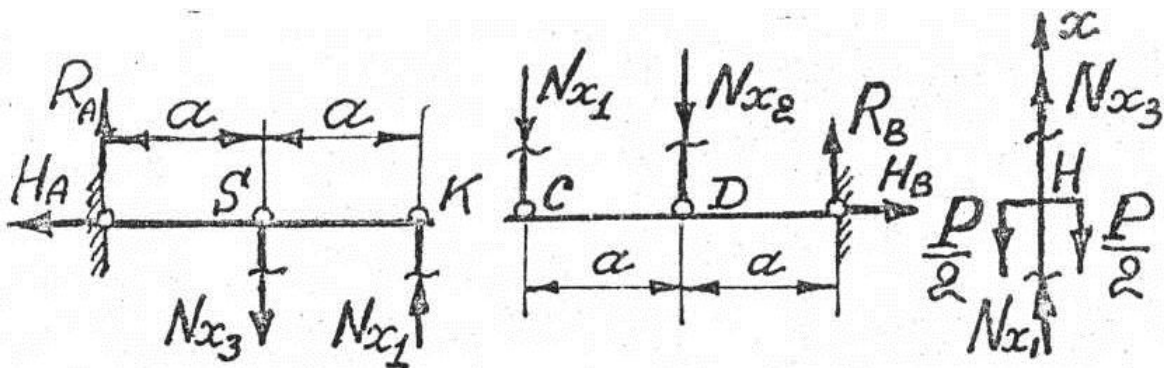


Рис. 1.38

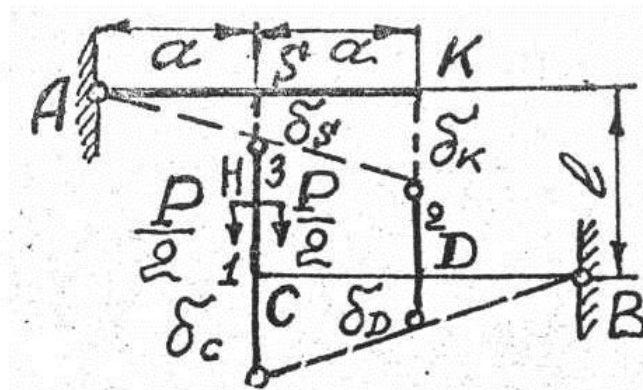


Рис. 1.39

5. Определяем работу силы  $P$  и потенциальную энергию деформации. Работа  $A = \frac{1}{2}P \cdot u_H = \frac{1}{2}P \cdot (\delta_S + \Delta l_3) = \frac{25 P^2 l}{18 EF}$ , где

$u_H = \delta_S + \Delta l_3$  – перемещение точки приложения силы, т.е. путь, пройденный силой. Потенциальная энергия деформации стержневой системы

$$U = \frac{N_{x_1}^2 l_1}{2EF} + \frac{N_{x_2}^2 l_2}{2EF} + \frac{N_{x_3}^2 l_3}{2EF} = \frac{25 P^2 l}{18 EF}.$$

1.3. 1. Сила, вызывающая ускорение, равна  $2P - P = P$ ; ускорение  $a = P/m$ ; интенсивность распределенной по длине силы инерции  $q_i = ma/l$ .

2. Исходя из принципа Даламбера, составим уравнение равновесия для части стержня длиной  $x$  (рис. 1.40, а):  $-N_x - q_i x + 2P = 0$ , откуда  $N_x = 2P - q_i x$ . При  $x = 0$   $N_x = 2P$ , при  $x = l$   $N_x = P$  (рис. 1.40, б).

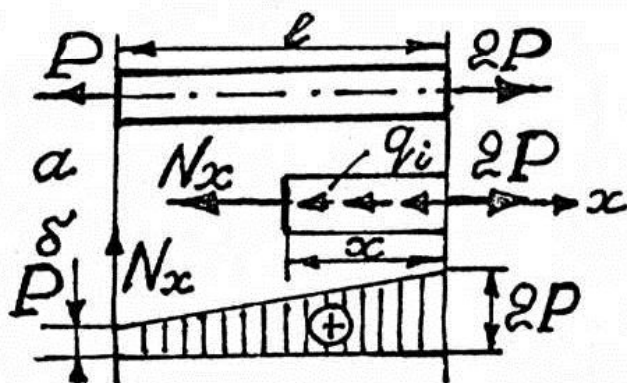


Рис. 1.40

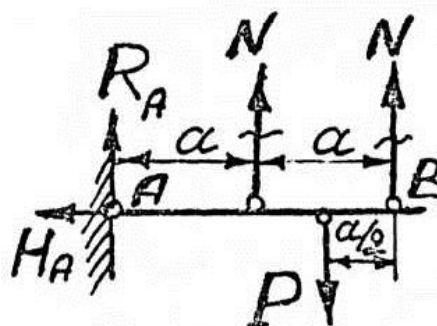
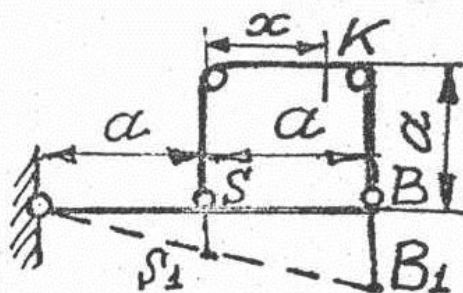


Рис. 1.41

1.4. 1. Выделяем объект равновесия с учетом того, что во всех участках троса  $N_x = N$  – растягивающие (рис. 1.41).

Рис. 1.42





2. Из уравнения равновесия  $\sum m_A = 0 \Rightarrow N = \frac{P}{2}$ .

3. Рассмотрим деформированную систему (рис. 1.42). Пусть сечение  $K$  неподвигно, тогда отрезок  $SS_1 = \Delta_{SK} = \frac{N(a+x)}{EF}$ , отрезок

$$BB_1 = \Delta_{BK} = \frac{N(a+a-x)}{EF}, \quad \text{а так как} \quad \frac{SS_1}{BB_1} = \frac{\Delta_{SK}}{\Delta_{BK}} =$$

$$= \frac{N(a+x) \cdot EF}{EF \cdot N(a+a-x)} = \frac{a}{2a}, \quad \text{то } 2a-x = 2a+x \Rightarrow x=0.$$

4. Проверяем  $\Delta_{SK} = \frac{N \cdot a}{EF}$ ;  $\Delta_{BK} = \frac{N \cdot 2a}{EF} \Rightarrow \frac{\Delta_{SK}}{\Delta_{BK}} = \frac{a}{2a}$ .

1.5. 1. Выделяем объект равновесия (рис. 1.43).

2. Составляем уравнение равновесия в виде суммы проекций сил на ось, проведенную так, чтобы в уравнение вошли только интересующие нас силы в упругих элементах (т.е. на ось, перпендикулярную к  $AB$ ),  $\sum y=0: -P \sin 30 + N_{x_2} + N_{x_1} \sin 30 = 0$ .



Рис. 1.43

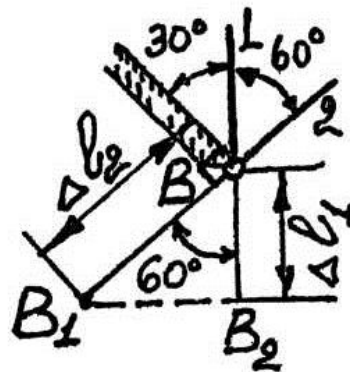


Рис. 1.44

3. Строим диаграмму перемещений для узла  $B$  (рис. 1.44).  $l_1 = l$ ,  $l_2 = l / \sin 30$ ,  $B_1$  – новое положение узла  $B$ ,  $BB_1 = \Delta l_2$ ,

$$BB_2 = \Delta l_1 = \frac{N_{x_1} \cdot l_1}{EF} = 0,08 \text{ см} \Rightarrow N_{x_1} = 16 \text{ кН.}$$

4. Из диаграммы перемещений  $\Delta l_1 = \Delta l_2 \sin 30 \Rightarrow N_{x_1} = N_{x_2}$ .

5. Подставляя значения  $N_{x_i}$  в уравнение п.2, найдем:  $P = 48$  кН.

1.6. *Вариант 1.* Так как справедлива гипотеза плоских сечений, т.е.  $\varepsilon = \text{const}$ , то эпюра  $\sigma_x(\rho)$  согласно закону Гука  $\sigma_x(\rho) = \varepsilon \cdot E(\rho)$  будет иметь вид, представленный на рис. 1.45.

*Вариант 2.* Для случая, если необходимо указать значения  $\sigma_x$  на эпюре, выраженные через заданные  $P$  и  $r$ .

1. Из эпюры  $E(\rho)$  следует, что  $E(\rho) = E \left( 1 + \frac{2\rho}{r} \right)$ .

2.  $\sigma_x(\rho) = \varepsilon \cdot E(\rho)$ . Тогда  $P = \int_F \sigma_x(\rho) \cdot dF = \frac{7}{3} \pi \cdot \varepsilon \cdot E \cdot r^2$  (где

$dF = 2\pi\rho \cdot d\rho$ ), откуда  $\varepsilon = \frac{3P}{7\pi E r^2}$ ,  $\sigma_x(\rho) = \frac{3P}{7\pi \cdot r^2} \cdot \left( 1 + \frac{2\rho}{r} \right)$ . При

$\rho = 0 \Rightarrow \sigma_x(\rho) = \sigma_0 = \frac{3P}{7\pi r^2}$ ; при  $\rho = r \Rightarrow \sigma_x(r) = 3\sigma_0 = \frac{9P}{7\pi r^2}$ .

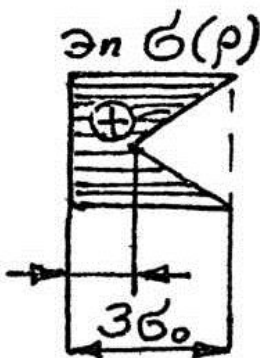


Рис. 1.45

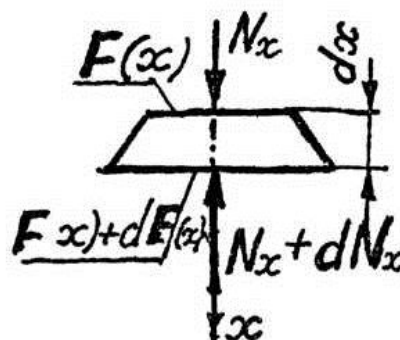


Рис. 1.46

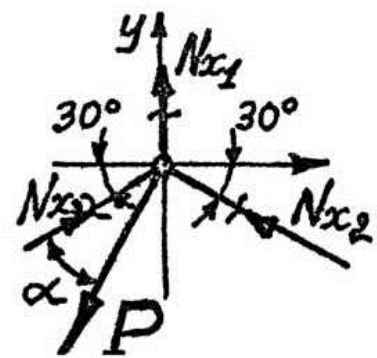


Рис. 1.47

1.7. 1. Воспользуемся методом сечений и выделим элемент на расстоянии  $x$  от верхнего сечения, высотой  $dx$  (рис. 1.45).

2.  $\sum x = 0: N_x - (N_x + dN_x) + \gamma \cdot F(x) \cdot dx = 0$ , откуда  $dN_x =$

$= \gamma F(x) \cdot dx = [\sigma] \cdot dF(x)$ , так как в любой точке  $\sigma_x = \frac{dN_x}{dF(x)} = [\sigma]$ .

3. Разделив переменные и проинтегрировав, получим  $\ln F(x) = \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot x + C$ . Так как при  $x=0$   $F(x) = F_0 = \frac{P}{[\sigma]}$ , тогда

$$F(x) = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{[\sigma]}}$$

1.8. 1. Под действием силы  $P$  усилия  $N_x$  возникают **только** в стержнях, прикрепленных к узлу  $A$  (рис. 1.47). Уравнения равновесия запишем в виде  $\sum z = 0$ ,  $\sum y = 0$ . Задача один раз статически неопределимая.

2. Изобразим диаграмму перемещений (рис. 1.48). При ее построении выдержано условие строгого соответствия силовой схемы и деформированной системы.

3. Составим дополнительные уравнения  $AA_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos(\beta - \gamma)} = \frac{\Delta l_2}{\cos(2\beta - \gamma)} = \frac{\Delta l_3}{\cos \gamma}$ . Из дополнительных уравнений найдем угол  $\gamma$ ,

значения которого сравним с углом  $\alpha$ , полученным из уравнения равновесия п. 1. Доказательством послужат равенства этих углов.

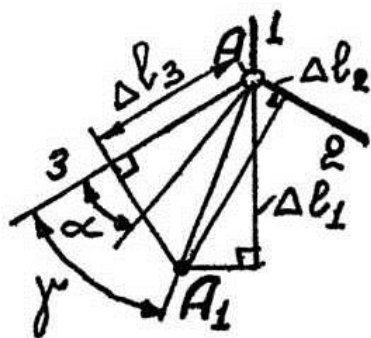


Рис. 1.48

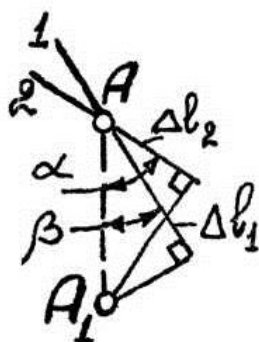


Рис. 1.49

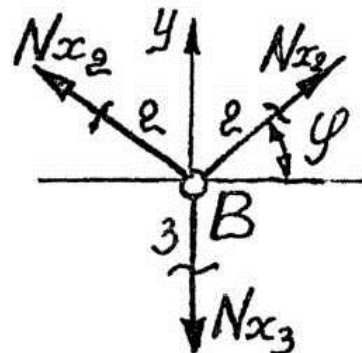


Рис. 1.50

1.9. Из условия следует, что изменение длины стержней зависит только от температуры, т.е.  $\Delta l = \alpha \cdot \Delta t \cdot l_i$ . Построим диаграмму перемещений шарнира  $A$  (рис. 1.49).  $A_1$  – новое положение шарнира

А. Из диаграммы  $AA_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos \beta} = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha}$ ;  $l_1 = \frac{h}{\sin \beta}$ ,  $l_2 = \frac{h}{\sin \alpha}$ , откуда  $\sin 2\alpha = \sin 2\beta \Rightarrow \alpha = 90 - \beta$  ( $\alpha = \beta$  не имеет смысла).

1.10. 1. Определим тип задачи по формуле (1.13):  $S = 3K - III = 1$ , так как  $K = 4$ ,  $III = 11$ , т.е. задача один раз статически неопределимая.

2. Выделяем объекты равновесия (рис. 1.50, 1.51) и составляем для них уравнения равновесия в виде  $\sum y = 0$ , т.е. получаем два уравнения.

3. Изобразим деформационную схему (рис. 1.52). На схеме  $A'_1$  – положение шарнира А после сборки (после присоединения к  $A_1$ ). Отрезок  $BB_1 = u_B$  – перемещение шарнира В. Дополнительное уравнение будет иметь вид:

$$\delta = \Delta l_1 + u_A = \Delta l_1 + (u_B + \Delta l_3) = \Delta l_1 + \frac{\Delta l_2}{\sin \varphi} + \Delta l_3,$$

где  $\Delta l_i = \frac{N_{x_i} \cdot l_i}{EF}$ .

4. Решая совместно уравнения п.2 и 3, найдем монтажные усилия  $N_{x_i}$ , а напряжения по выражению  $\sigma_{x_i} = \frac{N_{x_i}}{F}$ .

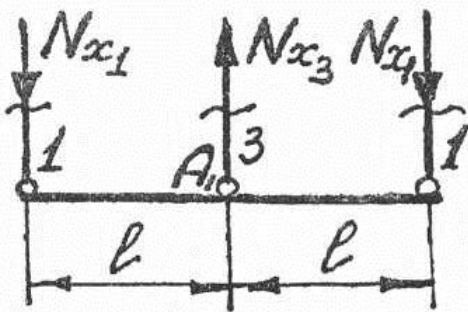


Рис. 1.51

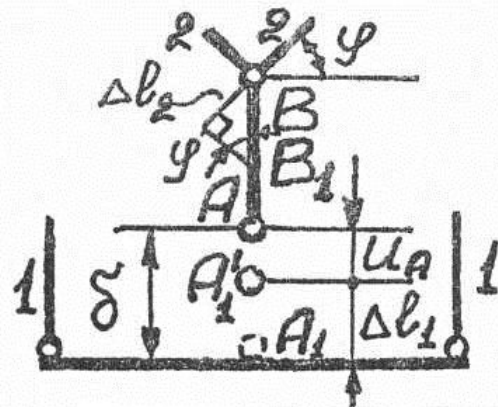


Рис. 1.52

1.11. 1. Определяем тип задачи по формуле (1.13):  $S = 3K - III = 1$  (так как  $K = 2$ ,  $III = 5$ ) – задача один раз статически неопределимая.

2. Построим диаграмму перемещений (рис. 1.53).  $A_1$  – новое положение узла  $A$ . Запишем дополнительные уравнения:  $\Delta l_1 = |\Delta l_3|$ ,  $AA_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \gamma} = \frac{\Delta l_2}{\sin(\alpha + \gamma)}$ , где  $\Delta l_i = \frac{N_{x_i} \cdot l_i}{EF}$ .

3. Выделим объект равновесия – узел  $A$  (рис. 1.54) и направим усилия в строгом соответствии с деформационной схемой (см. рис. 1.53); составим уравнение равновесия в виде  $\sum y = 0$ ,  $\sum z = 0$ .

4. Совместное решение уравнений п.2 и 3 дадут  $N_{x_1}$ ,  $N_{x_2}$ ,  $N_{x_3}$ ,  $\gamma$ .

5. Определим  $u_{\text{гор}} = \Delta l_1$ ,  $u_{\text{вер}} = \Delta l_1 / \text{tg} \gamma$ .

1.12. 1. Из условия задачи  $\Delta l_1 = \Delta l_2 \Rightarrow N_{x_1} = N_{x_2}$ .

2. Изобразим силовую схему (рис. 1.55). Уравнения равновесия для нее  $\sum y = 0$ ,  $\sum m_c = 0$ , откуда  $N_{x_1} = N_{x_2} = 0,3P$ ,  $N_{x_3} = 0,4P > N_{x_1}$ .

3. Величина, на которую нужно стяжной гайкой поднять сечение  $B$  стержня 3, будет равна  $\delta = \Delta l_3 - \Delta l_1 = \frac{l}{EF}(N_{x_3} - N_{x_1}) = 0,1 \frac{Pl}{EF}$ .

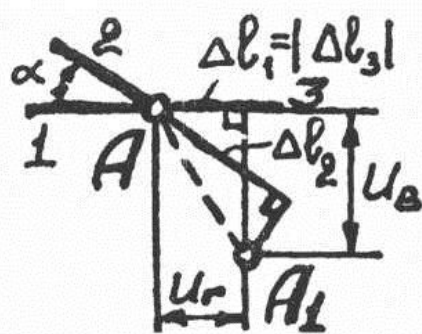


Рис. 1.53

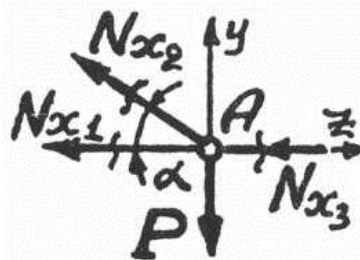


Рис. 1.54

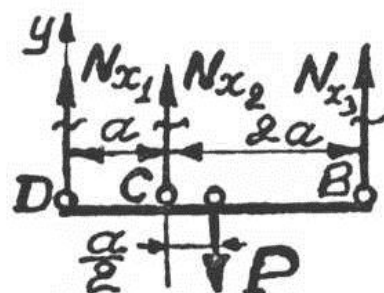


Рис. 1.55

1.13. 1. Введем обозначения:  $l_1 = l$ ,  $l_2 = 2l$ ,  $\sin \alpha = 2l \cdot \sin \frac{\pi}{n}$ , где  $n$  – число сторон многоугольника.

2. Определим тип задачи по формуле (1.13):  $S = 3K - Ш = 1$ , так как  $K = 8$ ,  $Ш = (8 - 1) + (3 - 1)8 = 23$ , т.е. задача один раз статически неопределимая.

3. Выделим объект равновесия – узел  $A$  (рис. 1.56) и составим уравнение равновесия в виде  $\sum y = 0$ :  $P - N_{x_1} - 2N_{x_2} \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 0$ .

4. Построим диаграмму перемещений (рис. 1.57) и составим дополнительное уравнение:  $\frac{\Delta l_2}{2} = \Delta l_1 \sin \frac{\pi}{n}$ , где  $\Delta l_i = \frac{N_{x_i} \cdot l_i}{EF}$ , откуда  $N_{x_1} = N_{x_2}$ ; тогда из уравнения равновесия  $N_{x_1} = N_{x_2} = \frac{P}{1 + 2 \sin \frac{\pi}{n}}$ .

5. Такой же результат можно получить, воспользовавшись феноменологическим приемом:

$$\frac{l_1 + \Delta l_1}{l_2 + \Delta l_2} = \frac{l_1}{l_2}, \quad \text{или} \quad \frac{l_1 + \Delta l_1}{l_1} = \frac{l_2 + \Delta l_2}{l_2},$$

$$\text{или} \quad 1 + \varepsilon_1 = 1 + \varepsilon_2, \quad \text{или} \quad \frac{N_{x_1}}{EF} = \frac{N_{x_2}}{EF},$$

откуда  $N_{x_1} = N_{x_2}$ .

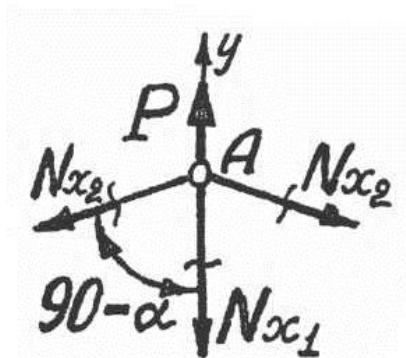


Рис. 1.56

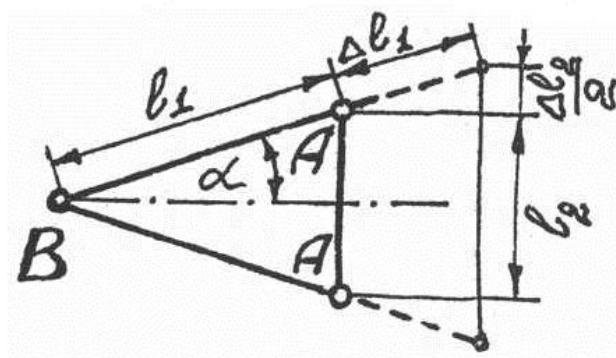


Рис. 1.57

1.14. Вариант 1. Из равновесия узла  $C$  (рис. 1.58, а)

$$\sum Z = 0; \quad N_3 \cdot \sin \beta - N_4 \cdot \sin \varphi = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad -P + N_3 \cdot \cos \beta + N_4 \cdot \cos \varphi = 0$$

получаем  $N_3 = \frac{P\sqrt{3}}{3}$ ,  $N_4 = \frac{P}{2}$ .

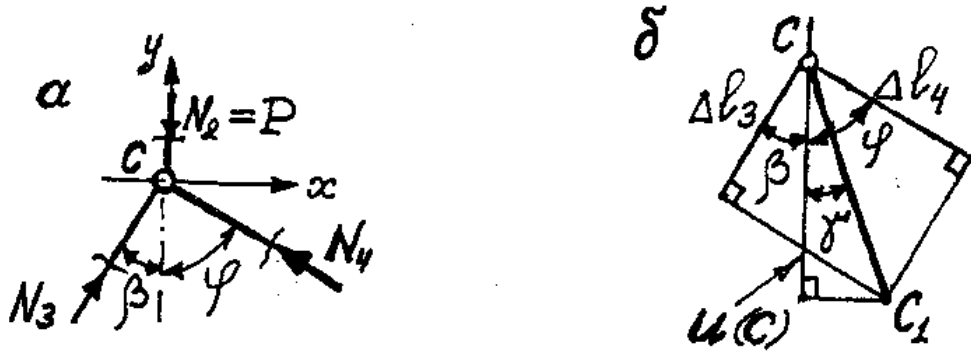


Рис. 1.58

Из диаграммы перемещений (рис. 1.58, б) имеем:

$$CC_1 = \frac{U(C)}{\cos \gamma} = \frac{\Delta l_3}{\cos(\beta + \gamma)} = \frac{\Delta l_4}{\cos(\varphi - \gamma)},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{U(C) \cos \beta - \Delta l_3}{U(C) \sin \beta} = \frac{\Delta l_4 - U(C) \cos \varphi}{U(C) \sin \varphi}.$$

С учетом значений синусов и косинусов, указанных в условии задачи углов, получаем из последнего уравнения

$$2 \cdot U(C) = \Delta l_3 \sqrt{3} + \Delta l_4$$

или

$$2 \cdot \left( \alpha \cdot \Delta t \cdot (l_1 + l_2) - \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F} \right) = \frac{N_3 \cdot l_3 \cdot \sqrt{3}}{E \cdot F} + \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot F}, \quad (*)$$

где  $l_1 = l_{AB} = \frac{3}{2}l$ ,  $l_2 = l_{BC} = \frac{l}{2}$ ,  $l_3 = l_{CD} = \frac{4l}{\sqrt{3}}$ ,  $l_4 = l_{CK} = 4l$  (см.

рис. 1.34 на с.54). Тогда из (\*) получим

$$\Delta t = \frac{1,6 \cdot P}{\alpha \cdot E \cdot F} = \frac{1,6 \cdot 50000}{12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 20^\circ \text{ (нагрев).}$$

*Вариант 2.* Воспользуемся методом сил. Система один раз статически неопределимая. Выберем основную систему путем замены неподвижного шарнира  $A$  на подвижную шарнирную опору, дающую возможность перемещаться концу  $A$  верхнего стержня в вертикальном направлении. Тогда эквивалентная система будет иметь вид, показанный на рис. 1.59,  $a$ . Запишем каноническое уравнение

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} = 0.$$

Так как в конечном состоянии системы  $X_1 = 0$ , то это уравнение примет вид

$$\Delta_{1P} + \Delta_{1t} = 0,$$

где  $\Delta_{1P}$  и  $\Delta_{1t}$  – перемещения в направлении  $X_1$  для основной системы соответственно при нагружении силой  $P$  и нагреве стержня  $AC$ . Для их определения строим эпюры нормальных сил при нагружении основной системы единичной силой (рис. 1.59,  $b$ ) и внешней нагрузкой  $P$  (рис. 1.59,  $\delta$ ). Находим значения коэффициентов:

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EF} \left( P \cdot \frac{l}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} P \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{P}{2} \cdot 4l \cdot \frac{1}{2} \right) = -3,2 \frac{Pl}{EF};$$

$$\Delta_{1t} = 2\alpha l \Delta t.$$

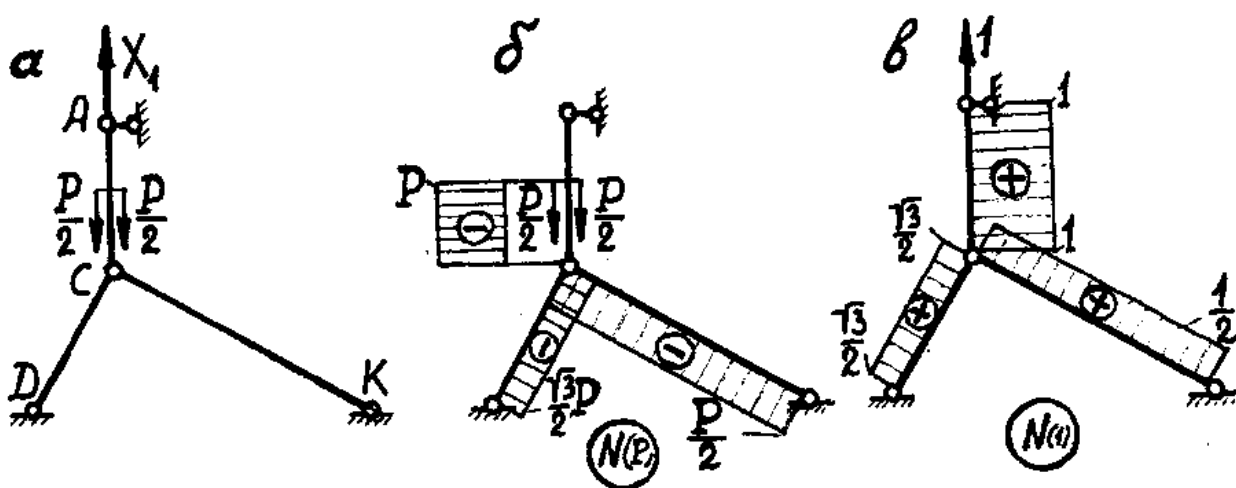


Рис. 1.59



Подставив  $\Delta_{1P}$  и  $\Delta_{1t}$  в каноническое уравнение и решив его относительно  $\Delta t$ , получим

$$\Delta t = \frac{1,6P}{\alpha EF} = \frac{1,6 \cdot 50 \cdot 10^3}{1,25 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 20^\circ \text{ (нагрев)}.$$

1.15. Очевидно, что сечение посередине длины  $l$  не перемещается, т.е.  $u_x\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ . Тогда сечение посередине  $\frac{l}{2}$  также не перемещается, т.е.  $u_x\left(\frac{l}{4}\right) = 0$  и т.д.

1.16. 1. Из условия  $\Delta = \frac{Pa}{EF}$  (рис. 1.60, а) получаем  $P = \frac{\Delta EF}{a}$ .

2. После приварки сечения  $K$  к  $B-B$  и разгрузки (равносильно приложению силы  $P$  в противоположном направлении) будем иметь один раз статически неопределимую систему (рис. 1.60, б), решение которой даёт  $R_A = \frac{2}{3} \cdot P$ ;  $R_B = \frac{1}{3} \cdot P$ .

3. Сложив обе эпюры, получили остаточные усилия (рис. 1.60, в) и  $\sigma_x = \frac{N_x}{F}$  (остаточные).

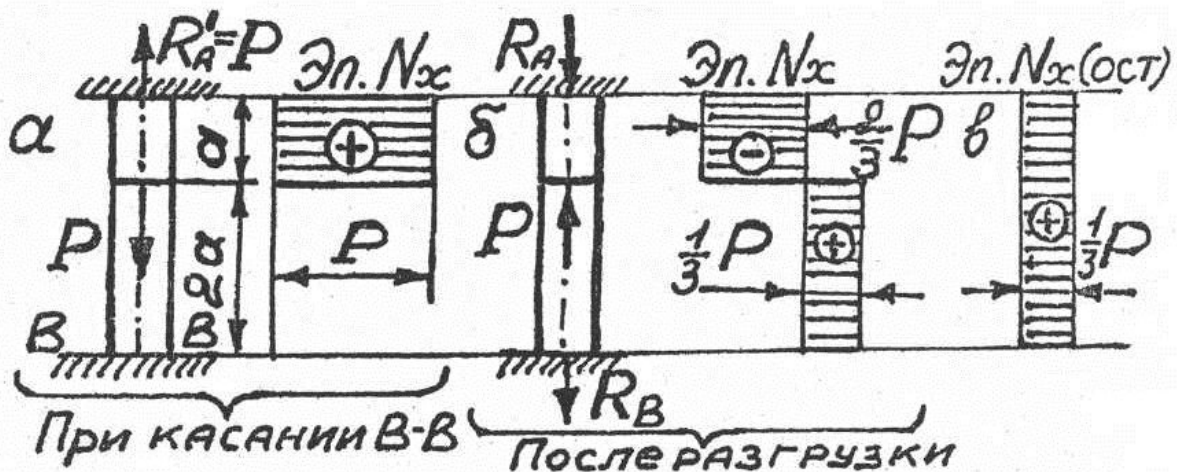


Рис. 1.60

1.17. 1. Обозначим через  $q = F \cdot \gamma \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}} \right]$  – интенсивность равномерно распределенной нагрузки вдоль оси стержня (рис. 1.61, а).

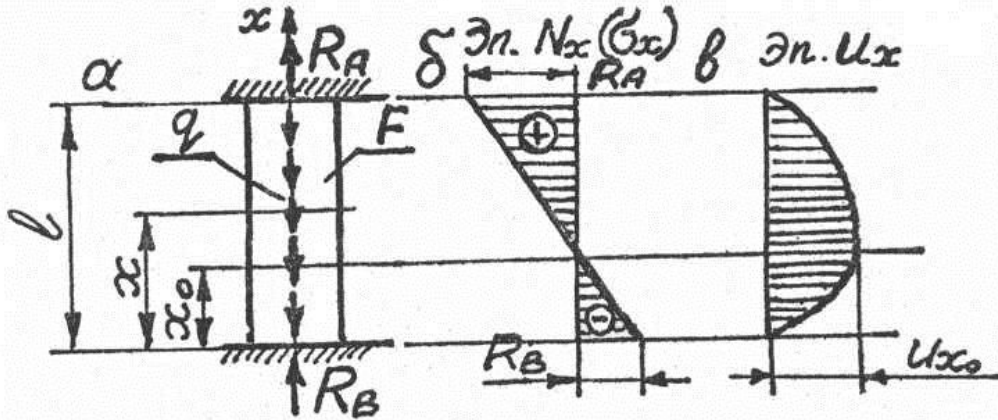


Рис. 1.61

2. Пусть  $x_0$  – координата сечения, отделяющая зону сжатия от зоны растяжения.  $x_0$  определяется из равенства  $\Delta l_{\text{сж}} = \Delta l_{\text{раст}}$ , т.е.

согласно формуле (1.9)  $\frac{q x_0^2}{2 E_c F} = \frac{q (l - x_0)^2}{2 E_p F}$ , откуда  $x_0 = l (2 - \sqrt{2})$ .

Тогда эпюра  $N_x(\sigma_x)$  будет иметь вид (рис. 1.61, б), откуда  $R_A = q(l - x_0)$ ,  $R_B = q x_0$ . Значения нормальных сил в области сжатия  $N_{x \text{ сж}} = R_B - q x$ , в области растяжения  $N_{x \text{ раст}} = R_A - q(l - x)$ .

3. Перемещения по направлению оси  $x$  в области сжатия

$$u_{x \text{ сж}} = \int_0^x \frac{N_{x \text{ сж}} \cdot dx}{E_c F} = \frac{R_B \cdot x}{E_c F} - \frac{q x^2}{2 E_c F}, \quad \text{в области растяжения}$$

$$u_{x \text{ раст}} = \int_0^{l-x} \frac{N_{x \text{ раст}} \cdot dx}{E_p F} = \frac{R_A (l-x)}{E_p F} - \frac{q (l-x)^2}{2 E_p F}. \quad \text{При } x = x_0 \text{ имеем}$$

$$u_{x_0 \text{ сж}} = u_{x_0 \text{ раст}} = \frac{\gamma l^2 (\sqrt{2} - 1)^2}{2 E_p}.$$

## Тема 2

# АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

### 2.1. Основные положения

Определение главных напряжений осуществляется с использованием характеристического уравнения, называемого иногда «вековым уравнением»:

$$\sigma^3 - \sigma^2 I_I + \sigma I_{II} - I_{III} = 0, \quad (2.1)$$

где инварианты напряженного состояния:

$$I_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}, \quad (2.2)$$

$$I_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \\ = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \text{const}, \quad (2.3)$$

$$I_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \text{const}. \quad (2.4)$$

Корни уравнения (2.1) являются главными напряжениями  $\sigma_i$ ,  $\sigma_j$ ,  $\sigma_k$ , при этом наибольшему по алгебраической величине присваивается индекс 1 ( $\sigma_1$ ), наименьшему по алгебраической величине – индекс 3 ( $\sigma_3$ ), промежуточному – индекс 2 ( $\sigma_2$ ).

Индексы у напряжений, действующих на произвольных площадках, имеют следующий смысл: при нормальном напряжении – обозначение нормали к площадке, на которой действует напряжение. Так,  $\sigma_x$  – напряжение, действующее на площадке, нормаль к которой – ось  $x$  (параллельна оси  $x$ ); индексы при касательном

напряжении, например,  $\tau_{xy}$ : первый индекс – это так называемый адрес, т.е. площадка, на которой действует напряжение, имеет нормалью ось  $x$  (или параллельна оси  $x$ ); второй индекс обозначает ось, по направлению которой действует касательное напряжение.

В табл. 2.1 приведены виды напряженных состояний.

Таблица 2.1

Вид напряженного состояния	Значение главных напряжений	Значение инвариантов		
		$I_I$	$I_{II}$	$I_{III}$
Линейное (одноосное)	$\sigma_i \neq 0, \sigma_j = \sigma_k = 0$	$\neq 0$	0	0
Плоское (двухосное)	$\sigma_i \neq 0, \sigma_j \neq 0, \sigma_k = 0$	Любое	$\neq 0$	0
Объемное (трехосное)	$\sigma_i \neq 0, \sigma_j \neq 0, \sigma_k \neq 0$	Любое	Любое	$\neq 0$

Определение направления главных напряжений получаем из решения системы уравнений (2.5) относительно направляющих косинусов  $l, m, n$ :

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0; \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0; \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0; \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

При использовании в задачах формул (2.1)÷(2.5) следует придерживаться следующего правила знаков для напряжений. Нормальные напряжения положительны, если они направлены от площадки. На площадке, внешняя нормаль к которой направлена в положительном (или отрицательном) направлении соответствующей оси,  $\tau$  считается положительным, если оно также направлено в положительном (или отрицательном) направлении соответствующей оси.

Определение напряжений на наклонных площадках в случае плоского напряженного состояния, если исходные площадки произвольные, производится по формулам (2.6); (2.6а); (2.7); (2.10) при выполнении следующих правил знаков:

- нормальное напряжение положительно, если оно направлено от площадки, т.е. вызывает растяжение, и отрицательно, если направлено к площадке;

- касательное напряжение положительно, если оно стремится повернуть элемент по часовой стрелке, и отрицательно, если – против часовой; угол  $\alpha$  положителен, если направлен против часовой стрелки, и отрицателен – по часовой стрелке (рис. 2.1).

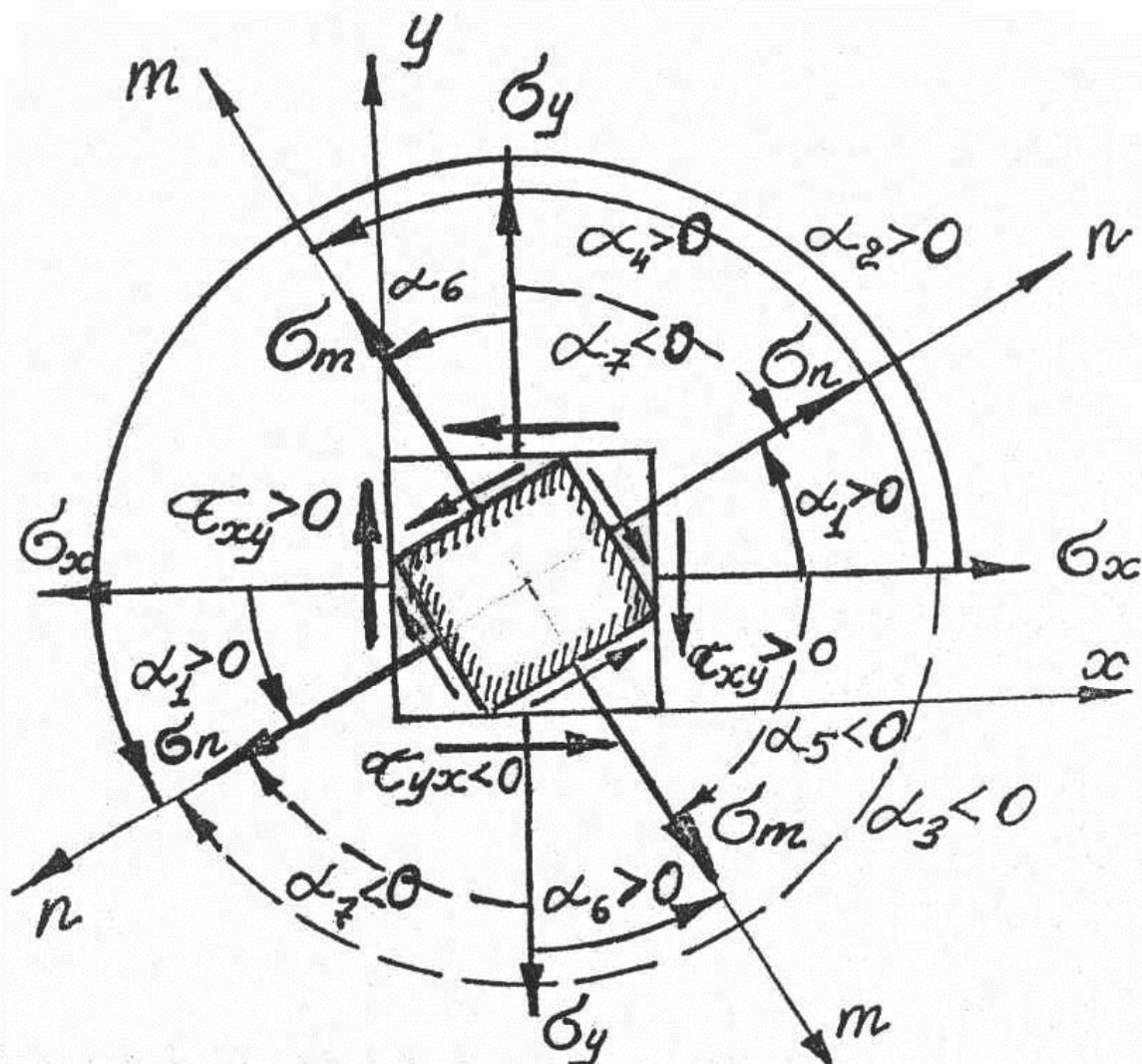


Рис. 2.1

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (2.6)$$

где  $\alpha$ , с учетом вышеприведенного правила знаков, отсчитывается от того исходного нормального напряжения, которое стоит на **первом месте** в членах формулы; так, для определения  $\sigma_n$  можно взять угол  $\alpha = \alpha_1 = \angle(\sigma_x, n) > 0$ ,  $\alpha = \alpha_2 = 180 + \alpha_1 > 0$ ,  $\alpha = \alpha_3 = -(180 - \alpha_1) < 0$ ; для определения  $\sigma_m$  можно взять угол

$\alpha = \alpha_4 > 0$ ,  $\alpha = \alpha_5 < 0$ . При отсчете угла от направления  $\sigma_y$  нужно записать формулу (2.6) в виде:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha, \quad (2.6a)$$

где для определения  $\sigma_m$  угол  $\alpha = \alpha_6 = \angle(\sigma_y, m) > 0$ , а для определения  $\sigma_n$  угол  $\alpha = \alpha_7 = \angle(\sigma_y, n) < 0$ .

Обращаем особое внимание на индексы у  $\tau_{yx}$  в формуле (2.6a).

Сумма  $\sigma_n + \sigma_m = \sigma_x + \sigma_y = I_1 = \text{const}$  для плоского напряженного состояния.

Касательное напряжение на наклонной площадке определяется с учетом всех указаний к формуле (2.6) по формуле:

$$\tau_{nm} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha, \quad (2.7)$$

где  $\alpha = \alpha_1 = \angle(\sigma_x, n) > 0$ .

Если исходные площадки – главные, то последний член в формулах (2.6), (2.7) обращается в нуль, так как  $\tau$  на главных площадках равно нулю.

Формулы (2.6), (2.7) могут быть использованы и при исходном объемном напряженном состоянии, если одна из площадок – главная, так как на площадках, параллельных главному напряжению (перпендикулярных к главной площадке), последнее не вызывает никаких напряжений, ни нормальных, ни касательных (при растяжении-сжатии продольные волокна не надавливают друг на друга и не сдвигаются друг относительно друга).

Для любого напряженного состояния

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad (2.8)$$

где  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  – наибольшее и наименьшее по алгебраической величине исходные главные напряжения.  $\tau_{\max}$  действует на площадке, расположенной под углом  $45^\circ$  к направлению  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ .

Для плоского напряженного состояния для определения  $\tau_{\max}$  можно, кроме формулы (2.8), пользоваться формулой:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (2.8a)$$

Определение главных напряжений при плоском напряженном состоянии по исходным напряжениям на произвольных площадках (рис.2.2) проводится по формуле (2.9), в которой знак «+» перед радикалом дает значение  $\sigma_{\max}$ , а знак «-» – значение  $\sigma_{\min}$ .

$$\sigma_i (\sigma_j) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (2.9)$$

Направление главных напряжений (положение главных площадок) определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (2.10)$$

В формуле (2.10) индекс  $x$  в качестве «адреса» стоит на первом месте у  $\tau$ , в силу чего **обязательно**  $\sigma_x$  должно стоять на первом месте в знаменателе. Отсчет угла  $\alpha_0$  производим от направления  $\sigma_x$  (от оси  $x$ ), т.е.  $\alpha_0 = \angle(\sigma_x, \sigma_i)$ . Если же у  $\tau$  будет «адресом»  $y$ , то на первое место в знаменателе нужно поставить  $\sigma_y$ . Отсчет углов  $\alpha_0$  будет производиться от направления  $\sigma_y$  (от оси  $y$ ).

Если в знаменателе  $\sigma_x - \sigma_y > 0$ , то получаем  $\alpha_{0\max} = \angle(\sigma_x, \sigma_{\max})$ , и наоборот, если  $\sigma_x - \sigma_y < 0$ , то получаем  $\alpha_{0\min} = \angle(\sigma_x, \sigma_{\min})$ .

Главное напряжение  $\sigma_{\max}$  всегда лежит в пределах угла  $45^\circ$  между главной диагональю касательных напряжений и направлением наибольшего по алгебраической величине исходного нормального напряжения: так если  $\sigma_x > \sigma_y$ , то  $\sigma_i = \sigma_{\max}$ , как показано на рис. 2.2, и  $\alpha_0 = \alpha_{0\max}$ . Если  $\sigma_y > \sigma_x$ , то  $\sigma_{\max}$  будет располагаться между главной диагональю и направлением напряжения  $\sigma_y$ .

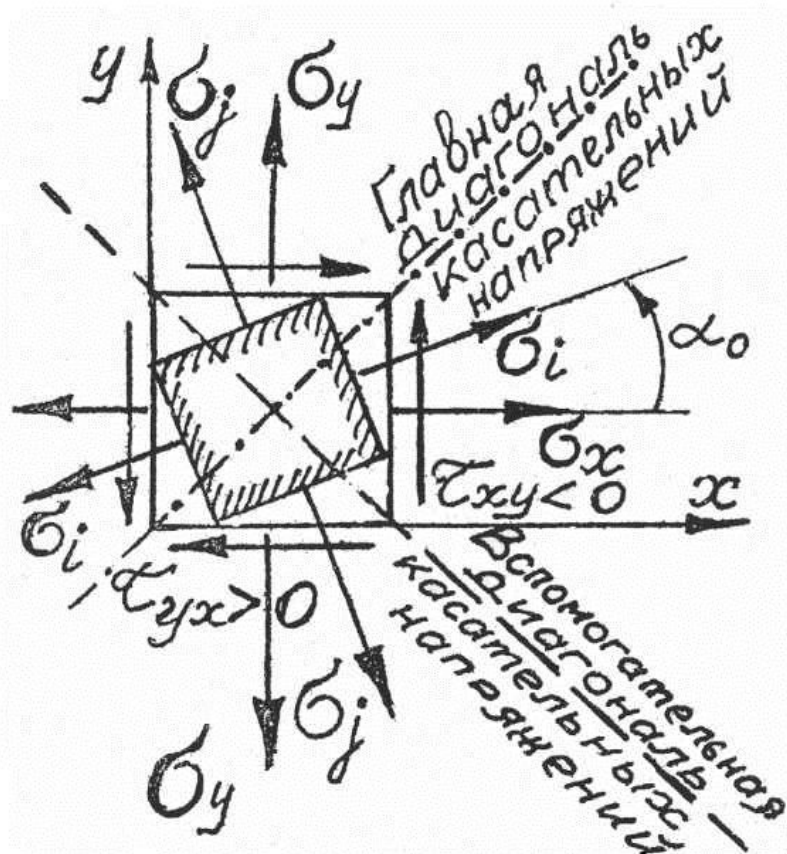


Рис. 2.2

Относительная деформация в случае объемного напряженного состояния определяется по формулам обобщенного закона Гука:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{cases} \quad (2.11)$$

Если помимо механического воздействия имеет место одинаковое изменение температуры во всем объеме тела на  $\Delta t$ , то к каждому выражению  $\varepsilon$  формулы (2.11) нужно добавить слагаемое  $\alpha \cdot \Delta t$ , где  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения. Это следует

из того, что, например,  $\varepsilon_x(t) = \frac{\Delta l(t)}{l} = \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot l}{l} = \alpha \cdot \Delta t$ .



Аналогично формуле (2.11),  $\varepsilon$  выражается и через главные напряжения, так, например, по направлению действия  $\sigma_i$  будем иметь

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} \left[ \sigma_i - \mu(\sigma_j + \sigma_k) \right]. \quad (2.11a)$$

Формулами (2.12) представлен закон Гука при сдвиге:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (2.12)$$

где  $\gamma$  – угол сдвига, знак которого определяется знаком касательного напряжения. Как и угол  $\alpha$  в формулах (2.6) и (2.7), положительный угол  $\gamma$  откладывается против часовой стрелки, а отрицательный – по часовой стрелке. Так как угол  $\gamma$  представляет собой угол поворота грани элемента, то он и откладывается от соответствующей грани, определяемой нормалью к этой грани (рис. 2.3).

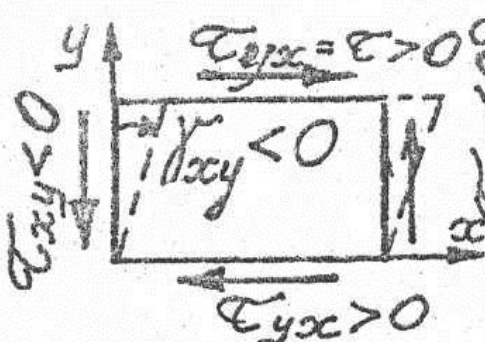


Рис. 2.3

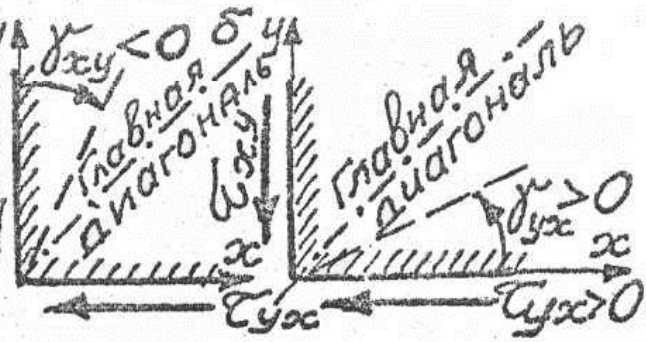


Рис. 2.4

Рассмотрим изменение прямого угла у главной диагонали касательных напряжений. При фиксированной грани  $y$   $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} < 0$ , как показано на рис. 2.4, а; или при фиксированной грани  $x$   $\gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G} > 0$ , как показано на рис. 2.4, б. Изменение прямого угла у вспомогательной диагонали показано на рис. 2.5, а при фиксированной грани  $y$ , и на рис. 2.5, б при фиксированной грани  $x$ .

Обращаем внимание на выделенный союз **или**, которым подчеркиваем, что прямой угол у главной диагонали уменьшается на

угол  $\gamma = |\gamma_{xy}| = |\gamma_{yx}|$ , а прямой угол у вспомогательной диагонали увеличивается на  $\gamma$ . Таким образом, у элементарной призмы с квадратным основанием последнее превращается в ромб в результате действия касательных напряжений (рис. 2.6, а). Это соответствует и результату действия главных напряжений при чистом сдвиге (рис. 2.6, б).

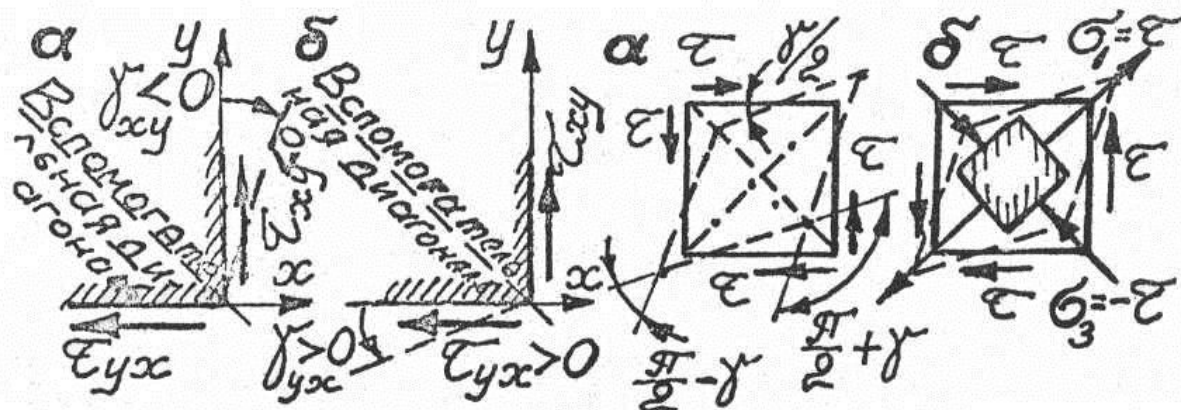


Рис. 2.5

Рис. 2.6

Относительное изменение объема вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \\ &= \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{E} I_1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $V$  – объем до деформации.

Если имеется и изменение температуры, то к формуле (2.12) нужно добавить слагаемое  $3\alpha \Delta t$ .

Относительное изменение площади в плоскости действия пары главных напряжений  $\sigma_i, \sigma_j$  определяется равенством:

$$\varepsilon_F = \varepsilon_i + \varepsilon_j, \quad (2.13)$$

где  $\varepsilon_i, \varepsilon_j$  определяются по формулам вида (2.11а).

С учетом значения  $\varepsilon_V$  можно представить обобщенный закон Гука в форме напряжений, выраженных через деформации (2.14):

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda \cdot \varepsilon_V + 2G\varepsilon_x; \\ \sigma_y = \lambda \cdot \varepsilon_V + 2G\varepsilon_y; \\ \sigma_z = \lambda \cdot \varepsilon_V + 2G\varepsilon_z, \end{cases} \quad (2.14)$$

где  $\lambda = \frac{E \cdot \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$  – постоянная Ламе.

Удельная потенциальная энергия деформации:

$$\begin{aligned} u = \frac{U}{V} &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] = \\ &= G \left( \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \varepsilon_V^2 \right) = \\ &= u_V + u_\Phi = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \\ &+ \frac{1 + \mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $u_V$  – удельная потенциальная энергия изменения объема, а  $u_\Phi$  – удельная потенциальная энергия изменения формы.

## 2.2. Задачи

**Задача 2.1.** Определить вид напряженного состояния и значения главных напряжений (рис. 2.7).

**Задача 2.2.** Определить величину и направление наибольшего главного напряжения (рис. 2.8).

**Задача 2.3.** Найти соотношение между  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , при котором будет иметь место линейное напряженное состояние (рис. 2.9).

**Задача 2.4.** Как изменится первоначально прямой угол  $ABC$  при приложении к стержню осевой растягивающей силы  $P$  (рис. 2.10). Даны  $P$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $\mu$ .

**Задача 2.5.** Определить напряжения в наклонных площадках бруса квадратного поперечного сечения при осевом растяжении силой  $P$  (рис. 2.11).

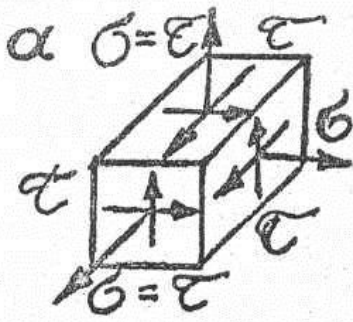


Рис. 2.7

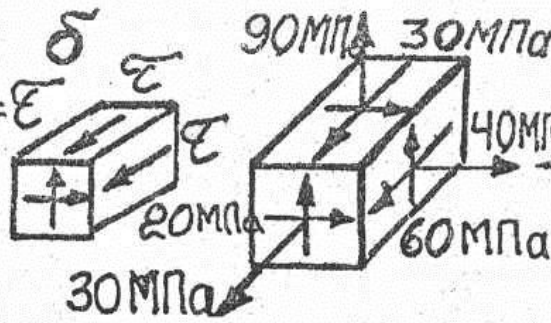


Рис. 2.8

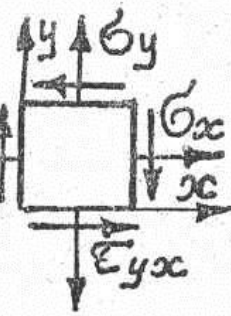


Рис. 2.9

Рис. 2.10

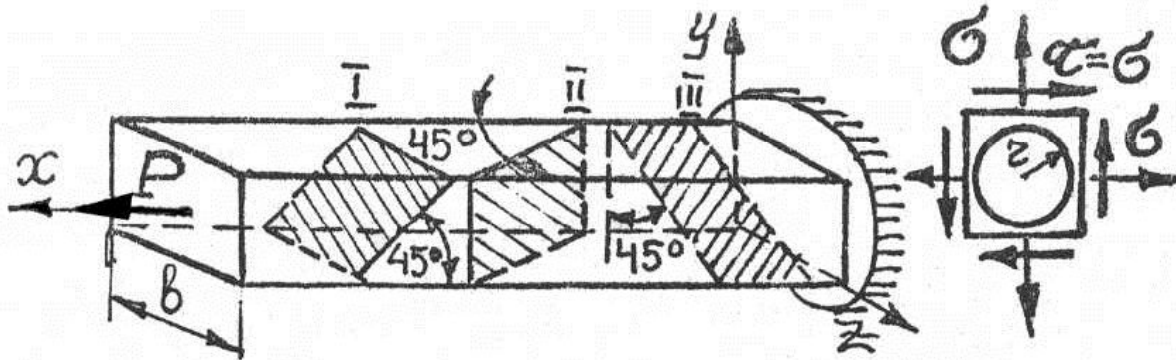
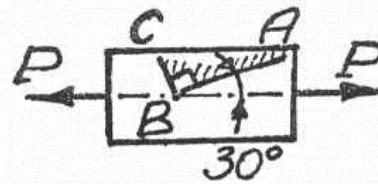


Рис. 2.11

Рис. 2.12

**Задача 2.6.** Найти размеры и направления полуосей эллипса, в который превращается начерченная окружность (рис. 2.12) при деформации элемента, если  $\sigma$ ,  $E$ ,  $\mu$  известны.

**Задача 2.7.** Определить  $\tau_{\max}$  в изображенном элементе (рис. 2.13) и указать положение площадки, на котором оно действует.

**Задача 2.8.** Брус в форме правильной трапеции и толщиной  $t = \text{const}$  (рис. 2.14) сжимается силой  $P$ , равномерно распределенной по верхней площадке бруса. Показать, что, кроме  $\sigma_x$ , возникают напряжения  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в сечениях бруса.

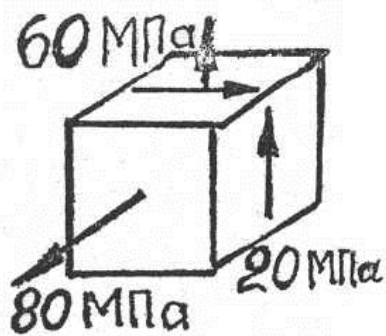


Рис. 2.13

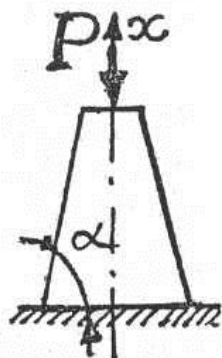


Рис. 2.14

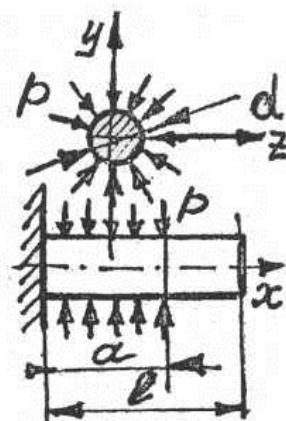


Рис. 2.15

**Задача 2.9.** Определить изменение длины упругого стержня, на левую часть которого длиной  $a$  действует всестороннее давление  $p$  (рис. 2.15). Размеры и упругие постоянные известны.

**Задача 2.10.** Длинная резиновая лента, имеющая в свободном состоянии длину  $l$ , ширину  $b$  и толщину  $\delta$ , наматывается с постоянным натяжением силой  $P$  на жесткий валик диаметром  $d$ . Выяснить, какой диаметр  $D$  получится после того, как вся лента будет намотана на валик? Принять для резины  $\mu = 0,5$ ; значения  $E, P, l, b, \delta$  известны.

**Задача 2.11.** Доказать, что при сжатии стержня вдоль оси абсолютное изменение объема не зависит от площади поперечного сечения.

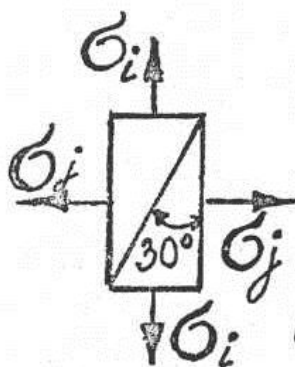


Рис. 2.16

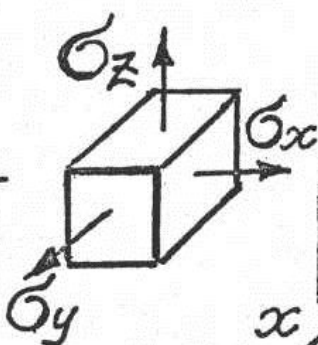


Рис. 2.17

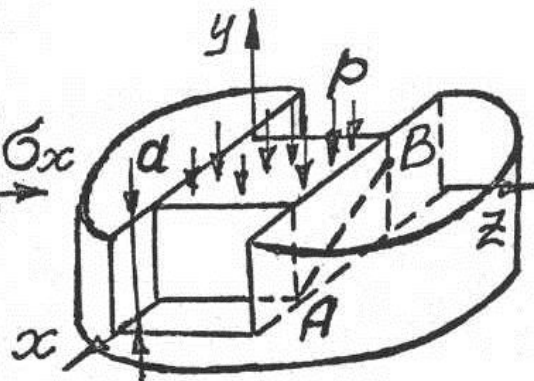


Рис. 2.18

**Задача 2.12.** Определить соотношение между главными напряжениями, при котором длины диагоналей прямоугольного элемента (рис. 2.16) не изменяются в случаях, если материал элемента – сплав ниобия ( $\mu = 0,39$ ), или ковкий чугун ( $\mu = 0,36$ ). Изобразить напряженные состояния.

**Задача 2.13.** При каком соотношении между  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  возникнет одноосная деформация в изображенном элементе (рис. 2.17)?

**Задача 2.14.** В паз абсолютно жесткой плиты (рис. 2.18) вставлен упругий кубик с ребром  $a$ . Под действием равномерно распределенного по верхней грани давления  $p$  верхняя грань опускается на  $\delta = k \cdot a$ , где  $k = 3 \cdot (1 - \mu^2) \cdot 10^{-4}$ . Определить  $p$  и положение волокна  $AB$  на боковой грани кубика, в котором отсутствует продольная деформация.  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,25$ .

**Задача 2.15.** К упругому кубику задачи 2.14 приложено по верхней грани сжимающее давление  $p$ , а на свободных вертикальных гранях растягивающее равномерно распределенное усилие  $P = 3pa^2$ . Найти изменение размеров ребер кубика.

**Задача 2.16.** В гнездо, имеющее вид прямоугольного параллелепипеда, в абсолютно жесткой плите вставлены три упругих одинаковых кубика  $A$ ,  $B$ ,  $C$  с ребром  $a$ . Кубик  $B$  сверху нагружен силой  $P$ , равномерно распределенной по его верхней грани, аналогично нагружен кубик  $A$ , но силой, равной  $2P$  (рис. 2.19). До нагружения кубиков зазор  $\Delta a \ll \frac{P \cdot \mu}{E \cdot a}$ . Определить напряжения на гранях всех кубиков, если  $E$ ,  $\mu$ ,  $a$ ,  $P$ ,  $\Delta a$  известны.

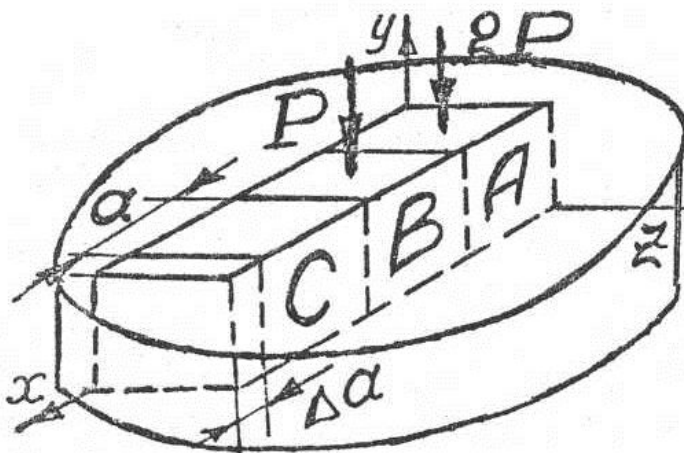


Рис. 2.19

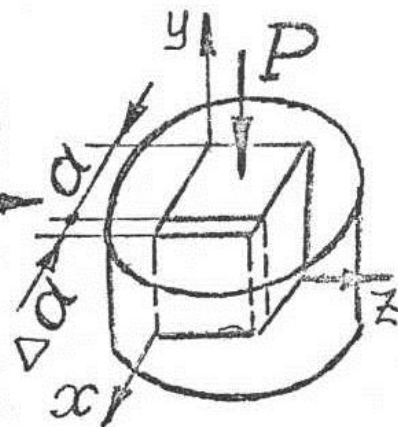


Рис. 2.20

**Задача 2.17.** В гнездо абсолютно жесткой плиты вставлен упругий кубик с ребром  $a$ . На верхнюю грань кубика действует сила  $P$ ,

равномерно распределенная по грани, под действием которой верхняя грань опускается на  $3 \cdot \Delta a$ . До нагружения имелся зазор размером  $\Delta a$  (рис. 2.20). Определить  $P$ , если  $E, \mu, a, \Delta a$  заданы.

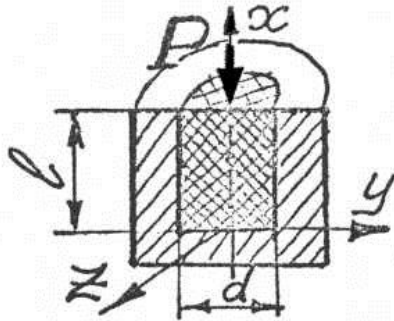


Рис. 2.21

**Задача 2.18.** В стакан, стальной толстостенный ( $EF = \infty$ ), (рис. 2.21) помещен без зазора упругий материал, сверху положена абсолютно жесткая крышка диаметром  $d$ , через которую силой  $P$  материал сжат. Определить, насколько поднимется (опустится) крышка, если материал нагреть до температуры  $t$ . Известны  $P, l, d, E, \mu, t$ , коэффициент линейного расширения  $\alpha$ .

**Задача 2.19.** Брусек квадратного поперечного сечения ( $a = 4$  см) жестко заделан сечениями  $A$  и  $D$  (рис. 2.22). На участке  $BC$  испытывает всестороннее давление  $p = 100$  МПа. Определить перемещение  $u_x(B)$ .  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0,3$ .

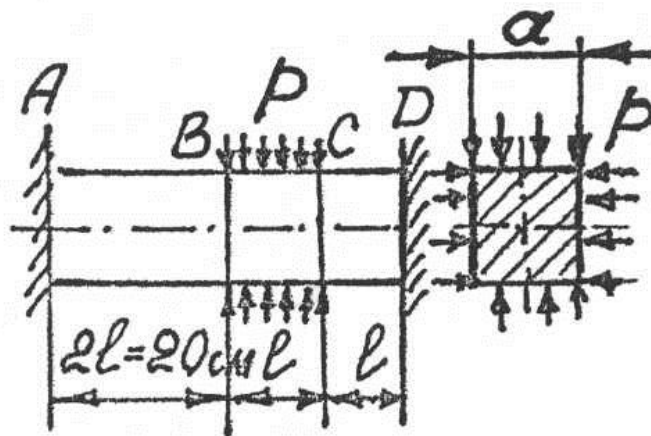


Рис. 2.22

**Задача 2.20.** Полый куб сделан из листового металла и подвержен внутреннему и внешнему давлению  $p$ . Определить изменение внутреннего объема куба, если дано  $E, \mu, p, a$  – размер ребра куба. Толщина листа намного меньше размера  $a$ .

### 2.3. Решения, указания, ответы

2.1. Для напряженного состояния (рис. 2.7, а)  $I_I \neq 0$ ,  $I_{II} = I_{III} = 0$ , т.е. имеем линейное напряженное состояние. По формуле (2.1) найдем  $\sigma_i = 3\tau = \sigma_1 = \sigma_x$ ;  $\sigma_j = \sigma_k = 0$  (рис. 2.23). Для напряженного состояния (см. рис. 2.7, б) имеем  $I_I = 0$ ,  $I_{II} \neq 0$ ,  $I_{III} = 0$ , т.е. элемент испытывает двухосное напряженное состояние. По формуле (2.1) получим  $\sigma_i = 0$ ,  $\sigma_j = \tau \cdot \sqrt{2}$ ,  $\sigma_k = -\tau \cdot \sqrt{2}$ , т.е.  $\sigma_1 = \sigma_j = \tau \cdot \sqrt{2}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_i = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau \cdot \sqrt{2}$  – напряженное состояние, эквивалентное чистому сдвигу (рис. 2.24).

2.2. 1. Отнесем элемент к осям  $x, y, z$  (рис. 2.25), тогда  $\sigma_x = 40$  МПа,  $\sigma_y = 90$  МПа,  $\sigma_z = 30$  МПа,  $\tau_{xy} = 60$  МПа,  $\tau_{yz} = 30$  МПа,  $\tau_{zx} = 20$  МПа.

2. Определим инварианты  $I_I = 40 + 90 + 30 = 160$  МПа,  $I_{II} = 2600$  МПа<sup>2</sup>,  $I_{III} = 0$ , т.е. имеем двухосное напряженное состояние. Из уравнения (2.1) получим  $\sigma_i = 0$ ,  $\sigma_j = 141,6$  МПа,  $\sigma_k = 18,4$  МПа. Итак, имеем:  $\sigma_1 = \sigma_j$ ,  $\sigma_2 = \sigma_k$ ,  $\sigma_3 = 0$ .

3. Для определения направления  $\sigma_1$  подставим в формулу (2.5) вместо  $\sigma = \sigma_1 = \sigma_j$  и найдем направляющие косинусы  $l = 0,53$ ;  $m = 0,8$ ;  $n = 0,3$  (рис. 2.26).

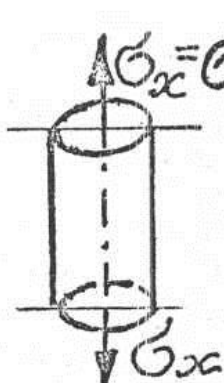


Рис. 2.23

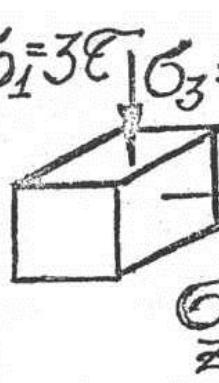


Рис. 2.24

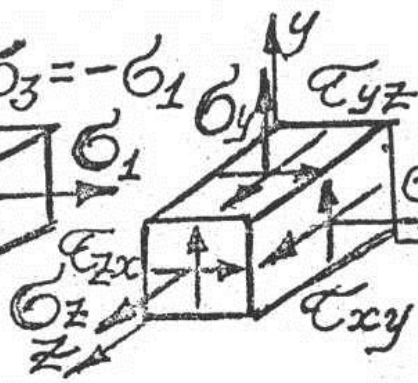


Рис. 2.25

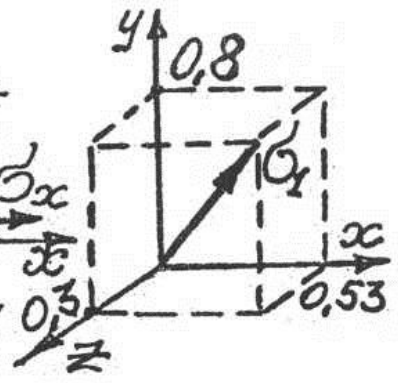


Рис. 2.26



2.3. *Вариант 1.* Для того чтобы элемент испытывал одноосное напряженное состояние, необходимо второе главное напряжение по формуле (2.9) приравнять к нулю, т.е.

$$\sigma_j = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \Rightarrow \sigma_x \cdot \sigma_y = \tau_{xy}^2.$$

*Вариант 2.* Нулю должен быть равен второй инвариант

$$I_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} = 0, \text{ откуда } \sigma_x \cdot \sigma_y = \tau_{xy}^2.$$

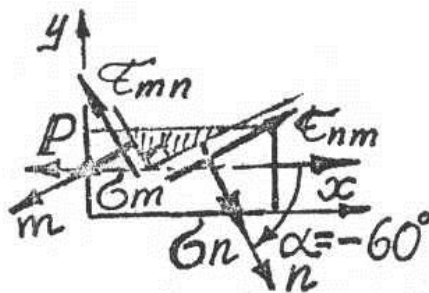


Рис. 2.27

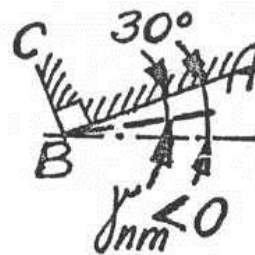


Рис. 2.28

2.4. Отнесем стержень к координатным осям  $x, y$  (рис. 2.27). Тогда  $\sigma_x = \frac{P}{F}$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$ , и по формуле (2.7)

$$\tau_{nm} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = \frac{P}{2F} (-\cos 30) = -\frac{P \cdot \sqrt{3}}{4F} < 0,$$

т.е.  $\tau_{nm}$  на площадке  $n$  направлено против часовой стрелки. По формуле (2.12)  $\gamma_{nm} = \frac{\tau_{nm}}{G} = -\frac{P \cdot \sqrt{3}}{4GF} < 0$ , т.е. площадка  $AB$  поворачивается на угол  $\gamma_{nm}$  по часовой стрелке и, следовательно, прямой угол  $ABC$  увеличивается на  $|\gamma_{nm}|$  (рис. 2.28).

2.6. В поперечном сечении действует только  $\sigma_x = \sigma_1 = \frac{P}{F}$ . На площадке I и II, для которых  $\alpha = \angle(x, n) = -45^\circ$ , напряжения определим по формулам (2.6) и (2.7):  $\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_x}{2}$ ,

$\tau_{nt} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = -\frac{\sigma_x}{2}$ . На площадке III  $\sigma_n = 0$  и  $\tau_{nt} = 0$ , так как она  $\parallel \sigma_x$ .

2.6. Отнесем элемент к осям  $x, y$  (рис. 2.29). Главные напряжения определяются по формуле (2.9):  $\sigma_i = 2\sigma$ ,  $\sigma_j = 0$ , т.е. имеем одноосное напряженное состояние при  $\sigma_1 = \sigma_i = 2\sigma$ . Направление  $\sigma_1$

определим по формуле (2.10):  $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2 \cdot (-\sigma)}{\sigma - \sigma} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha_0 = 90^\circ$ ,  $\alpha_0 = 45^\circ$  (рис. 2.30, а). Круг превращается в эллипс

(рис. 2.30, б), для которого  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{2\sigma}{E}$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1 = -\mu \frac{2\sigma}{E}$ .

Размеры полуосей эллипса:  $a = r + r \cdot \varepsilon_1$ ,  $b = r + r \cdot \varepsilon_2$ .

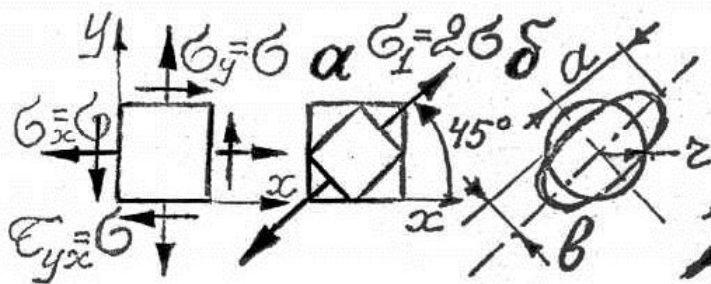


Рис. 2.29

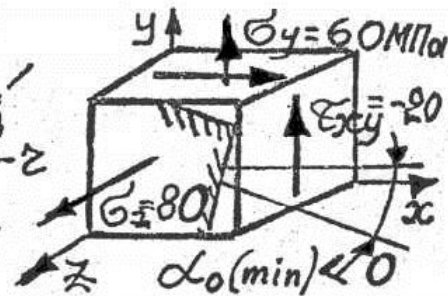


Рис. 2.30

Рис. 2.31

2.7. Отнесем элемент к координатным осям  $x, y, z$  (рис. 2.31), тогда  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 60$  МПа,  $\sigma_z = 80$  МПа,  $\tau_{xy} = -20$  МПа. Одно главное напряжение известно:  $\sigma_z = \sigma_k = 80$  МПа. Для определения двух других главных напряжений воспользуемся формулой (2.9):

$$\sigma_i (\sigma_j) = \frac{\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{4} + \tau_{xy}^2} = 30 \pm 36. \quad \text{Таким образом, имеем:}$$

$\sigma_1 = \sigma_z = 80$  МПа,  $\sigma_2 = \sigma_i = 66$  МПа,  $\sigma_3 = \sigma_j = -6$  МПа. Из формулы (2.10) получим положение главной площадки:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{0 - \sigma_y} \Rightarrow \alpha_{0(\min)} = \angle(x, \sigma_j) = -16^\circ 50'. \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} =$$

= 43,0 МПа и действует на площадке  $\parallel \sigma_2 = \sigma_i$  и расположенной под углом  $45^\circ$  к направлению  $\sigma_1 = \sigma_z$  и  $\sigma_3 = \sigma_j$ .

2.8. В любом поперечном сечении бруса по формулам сопротивления материалов действует нормальное напряжение

$\sigma_x = \frac{P}{F(x)} < 0$ . Выделим у боковой грани бруса элемент  $ABC$  раз-

мерами  $dx \times dy \times 1$  (толщина бруса принята за единицу), как показана на рис. 2.32. На грани  $BC$ , как в поперечном сечении, действует

напряжение  $\sigma_x$  (рис. 2.33, а). Сила  $dN_x = \sigma_x \cdot 1 \cdot dy$  может быть

уравновешена только силой  $dT = \tau_{yx} \cdot 1 \cdot dx$  от действия  $\tau_{yx}$  на грани  $AB$  (рис. 2.33, б). Тогда, согласно закону парности касательных

напряжений, на грани  $BC$  будет действовать  $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$

(рис. 2.33, в). Сила  $dT_1 = \tau_{xy} \cdot 1 \cdot dy$  может быть уравновешена только силой  $dN_y = \sigma_y \cdot 1 \cdot dx$  от действия  $\sigma_y$  на грани  $AB$  (рис. 2.33, г).

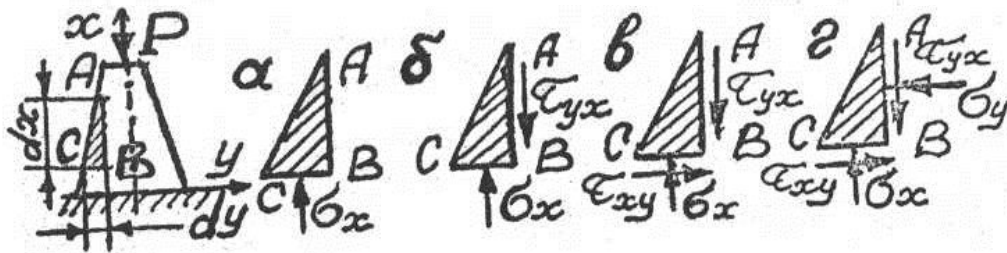


Рис. 2.32

Рис. 2.33

2.9. На участке длиной  $a$  в каждой точке имеем двухосное напряженное состояние:  $\sigma_x = 0$ ;  $\sigma_y = -p$ ,  $\sigma_z = -p$ . Тогда

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{2p \cdot \mu}{E} = \frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \Delta l = \Delta a = \frac{2p\mu a}{E}$$

2.10. В ленте имеет место линейное напряженное состояние:

$\sigma_x = \sigma_1 = \frac{N_x}{F} = \frac{P}{F}$ , где  $F = b\delta$ . Так как  $\mu = 0,5$ , то согласно форму-

ле (2.12)  $\epsilon_y = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_x = 0$ , т.е. объем ленты до и после наматыва-

ния на валик будет один и тот же (рис. 2.34):

$$V = bl\delta = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} b_1,$$

где  $b_1$  – ширина ленты после деформирования. Новую ширину  $b_1$  найдем из следующего:  $b_1 = b + \Delta b$ ,  $\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b}$ , откуда  $\Delta b = b\varepsilon_y$ , а так как  $\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E} = -\mu \frac{P}{EF}$ , то  $\Delta b = -\frac{\mu P}{\delta E}$ . Тогда

$b_1 = \frac{b\delta E - \mu P}{\delta E}$ . Подставляя значение  $b_1$  в  $V$ , получим

$$D = \sqrt{d^2 + \frac{4lb\delta^2 E}{\pi(b\delta E - \mu P)}}.$$

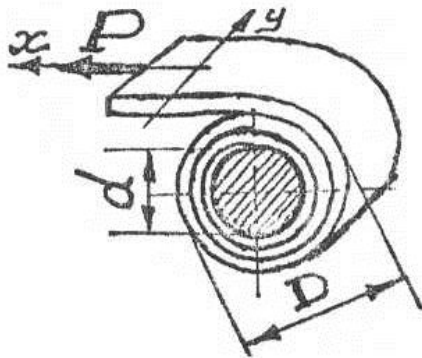


Рис. 2.34

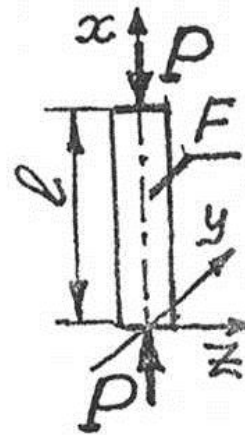


Рис. 2.35

**2.11.** Для стержня (рис. 2.35) напряжения в поперечном сечении

$$\sigma_x = -\frac{P}{F}; \quad \text{относительное изменение объема} \quad \varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} =$$

$$= \frac{1-2\mu}{E} \sigma_x = -\frac{P}{EF} (1-2\mu), \quad \text{откуда}$$

$$\Delta V = V\varepsilon_V = Fl\varepsilon_V = -\frac{Pl(1-2\mu)}{E}.$$

2.12. Из чертежа (рис. 2.36, а) имеем, что  $\alpha = 60^\circ$ , тогда  $\cos 2\alpha = \cos 120 = -0,5$ . По формуле (2.6)  $\sigma_n(\sigma_m) = \frac{\sigma_j + \sigma_i}{2} \pm \frac{\sigma_j - \sigma_i}{2}(-0,5)$ , откуда

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_m} = \frac{\sigma_j + 3\sigma_i}{3\sigma_j + \sigma_i} \quad (*)$$

Из условия задачи  $\varepsilon_n = \frac{1}{E}(\sigma_n - \mu\sigma_m) = 0$ , получим, что  $\frac{\sigma_n}{\sigma_m} = \mu$ ; и,

обозначая  $\frac{\sigma_j}{\sigma_i} = k$ , из формулы (\*)  $k = \frac{3 - \mu}{3\mu - 1}$ .

Для сплава ниобия  $k = \frac{3 - 0,39}{3 \cdot 0,39 - 1} = 15,4$ , т.е. если  $\sigma_i = \sigma$ , то  $\sigma_j = 15,4\sigma$  (рис. 2.36, б).

Для чугуна  $k = \frac{3 - 0,36}{3 \cdot 0,36 - 1} = 33,4$ , т.е. если  $\sigma_i = \sigma$ , то  $\sigma_j = 33,4\sigma$  (рис. 2.36, в).

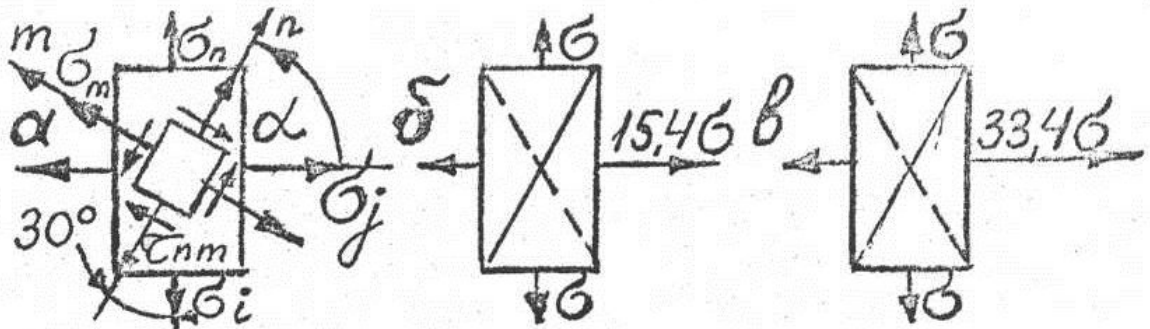


Рис. 2.36

2.13. Одноосная деформация будет в том случае, если  $\varepsilon_x \neq 0$ ,  $\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] = 0$ ;  $\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$ . Выражая  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  через  $\sigma_x$ , получим  $\sigma_y = \sigma_z = \sigma_x \frac{\mu}{1 - \mu}$ .

2.14. 1. На верхней грани кубика  $\sigma_y = -p$ , а на свободной грани  $\sigma_x = 0$ . Из условия деформирования кубика имеем, что

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z) = -\frac{\delta}{a} = -3(1 - \mu^2) \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_y) = 0,$$

откуда  $\sigma_y = -60$  МПа, т.е.  $p = 60$  МПа, а  $\sigma_z = -15$  МПа, так как  $\sigma_z = \mu\sigma_y$ .

2. Найдем по формуле (2.6) нормальные напряжения, действующие вдоль волокна  $AB$  и перпендикулярно ему и лежащие в плоскости  $xy$  (рис. 2.37, а, б):

$$\sigma_n(\sigma_m) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\text{откуда } \sigma_n = \frac{\sigma_y}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \sigma_m = \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

3. По условию  $\varepsilon_n = \frac{1}{E}[\sigma_n - \mu(\sigma_m + \sigma_z)] = 0$ ; выражая все напряжения через  $\sigma_y$ , получим  $1 - \mu - 2\mu^2 - \cos 2\alpha - \mu \cos 2\alpha = 0$ . Тогда

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{1 + \mu} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ (рис. 2.37, в).}$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{A_1B_1} = 0!$$

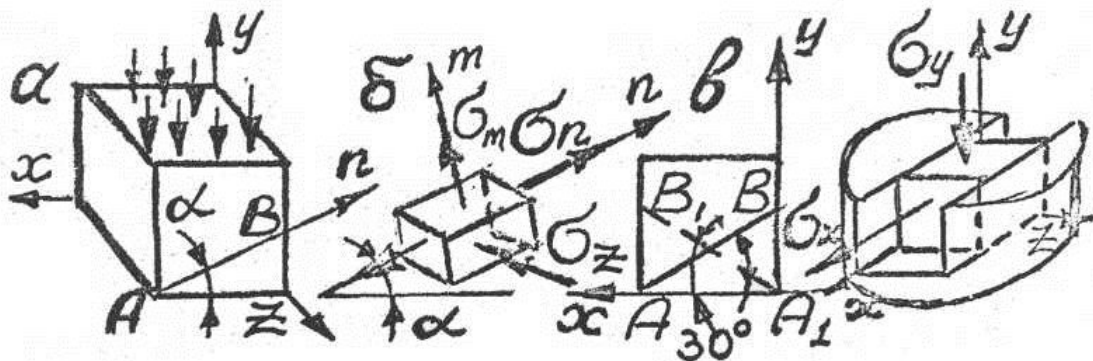


Рис. 2.37

Рис. 2.38

2.15. По условию задачи  $\sigma_y = -p$ ,  $\sigma_x = \frac{P}{a^2} = 3p$  (рис. 2.38).

Пользуясь обычной схемой решения предыдущих задач, из условия деформирования  $\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$ , откуда  $\sigma_z = 2\mu \cdot p$ . Результат «парадоксальный», так как  $\sigma_z > 0$ , т.е. растягивающее. Это возможно только в том случае, если боковая грань кубика прикреплена (приклеена, приварена) к боковой стенке паза плиты, чего нет. Таким образом, предпосылка, что  $\varepsilon_z = 0$ , ошибочна. Это подтверждается определением деформации ребра  $z$  кубика отдельно от действия  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ :  $\Delta a_z(\sigma_x) = -\mu \frac{\sigma_x}{E} a = -3\mu \frac{P}{E} a$ ,  $\Delta a_z(\sigma_y) = -\mu \frac{\sigma_y}{E} a = \mu \frac{P}{E} a$ , откуда суммарная деформация ребра равна  $-2\mu \frac{P}{E} a$ , т.е. ребро укорачивается, между стенкой паза и кубиком образуется зазор величиной  $2\mu \frac{P}{E} a$ , напряжение  $\sigma_z = 0$ , а сам кубик испытывает двухосное напряженное состояние. Изменение размеров ребер кубика определим из

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta a_x}{a} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{P}{E} (3 + \mu);$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta a_y}{a} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) = -\frac{P}{E} (1 - 3\mu);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta a_z}{a} = \frac{1}{E} [0 - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = -2\mu \frac{P}{E}.$$

2.16. 1. Из условия задачи  $\sigma_y(A) = -\frac{2P}{a^2}$ ,  $\sigma_y(B) = -\frac{P}{a^2}$ ,

$$\sigma_y(C) = 0, \quad \sigma_x(A) = \sigma_x(B) = \sigma_x(C) = \sigma_x!$$

2. Запишем дополнительные уравнения из условия деформирования:

$$\varepsilon_z(A) = \frac{1}{E} [\sigma_z(A) - \mu(\sigma_x + \sigma_y(A))] = 0;$$

$$\varepsilon_z(B) = \frac{1}{E} \left[ \sigma_z(B) - \mu(\sigma_x + \sigma_y(B)) \right] = 0;$$

$$\varepsilon_z(C) = \frac{1}{E} \left[ \sigma_z(C) - \mu(\sigma_x + \sigma_y(C)) \right] = 0;$$

$$\Delta a = \Delta a_x(A) + \Delta a_x(B) + \Delta a_x(C), \quad (*)$$

где  $\Delta a_x(i) = a \cdot \varepsilon_x(i) = \frac{a}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y(i) + \sigma_z(i)) \right]$ , при  $i = A, B, C$ .

Решая совместно уравнения п.2, найдем  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z(A)$ ,  $\sigma_z(B)$ ,  $\sigma_z(C)$ .

Обращаем внимание на часто совершаемую **грубую** ошибку, когда четвертое уравнение (\*) представляют в виде

$$\varepsilon_x(A) + \varepsilon_x(B) + \varepsilon_x(C) = \frac{\Delta a}{3a} !$$

2.17. Силу определим через напряжение на верхней грани:  $P = \sigma_y \cdot a^2$ . Напряжение  $\sigma_y$ , как и  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  найдем из совместных

решений дополнительных уравнений:  $\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right] = 0$ ,

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) \right] = -\frac{3\Delta a}{a}, \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{\Delta a}{a}.$$

Обращаем внимание на знак « $\leftarrow$ » перед величиной  $\frac{3\Delta a}{a}$ .

2.18. *Вариант 1. 1.* Только от действия силы  $P$ :  $\sigma_x = -\frac{P}{F}$ ,

$\sigma_y(P) = \sigma_z(P) = -\frac{P}{F} \frac{\mu}{(1-\mu)}$ . Тогда смещение крышки по направле-

нию оси  $x$  будет:

$$u_x(P) = \varepsilon_x \cdot l = l \cdot \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y(P) + \sigma_z(P)) \right] = -\frac{P(1-2\mu)l(1+\mu)}{EF(1-\mu)}.$$



2. Только от действия температуры:  $\sigma_x(t) = 0$ , из условия деформирования  $\varepsilon_y(t) = \varepsilon_z(t) = \frac{1}{E} [\sigma_y(t) - \mu(\sigma_z(t) + \sigma_x(t))] + \alpha t = 0$ , откуда  $\sigma_y(t) = \sigma_z(t) = -\frac{\alpha t E}{1 - \mu}$ . Тогда:

$$u_x(t) = \varepsilon_x(t) \cdot l = l \cdot \frac{1}{E} [\sigma_x(t) - \mu(\sigma_y(t) + \sigma_z(t))] = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \alpha \cdot t \cdot l.$$

3. С учетом суммарного действия  $P$  и  $t$  крышка поднимется на  $u_x = u_x(t) - |u_x(P)| = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot l \left[ \alpha t - \frac{P(1 - 2\mu)}{EF} \right]$ .

*Вариант 2.* Учитываем как действие силы, так и действие температуры одновременно. При этом  $\sigma_x = -\frac{P}{F}$ ; из условия деформирования  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha t = 0$ , откуда

$$\sigma_y = \sigma_z = -\frac{P\mu}{F(1 - \mu)} - \frac{\alpha t E}{1 - \mu}.$$

Крышка поднимется на:

$$u_x = \varepsilon_x \cdot l = l \cdot \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha t \right\} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot l \left[ \alpha t - \frac{P(1 - 2\mu)}{EF} \right].$$

**2.19.** 1. Отнесем брусок к координатным осям  $x, y, z$  (рис. 2.39, а). Из уравнения равновесия  $\sum x = 0: R_A - R_D = 0$ , следует, что задача один раз статически неопределимая. На участке  $BC$ :  $\sigma_y = -p$ ,  $\sigma_z = -p$ .

2. Для эквивалентной системы (рис. 2.39, б) дополнительное уравнение будет иметь вид:  $u_x(D) = u_x^P(D) - u_x^{R_D}(D) = 0$ .

$$u_x^P(D) = u_x^P(C) = \int_{l_{BC}} \varepsilon_x dx = \int_0^l \varepsilon_x dx, \quad \text{где} \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] =$$

$$= \frac{1}{E} [0 - \mu(-p - p)]. \quad u_x^p(D) = \frac{2\mu l p}{E}, \quad u_x^{R_D}(D) = -\frac{R_D 4l}{EF}, \text{ тогда из}$$

дополнительного уравнения получим, что  $R_A = R_D = \frac{1}{2} \mu p \cdot a^2$ .

3. Так как на участке  $AB$ :  $N_x = -R_A$ , то  $u_x(B) = \Delta L_{AB} = -\frac{\mu p l}{E} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$

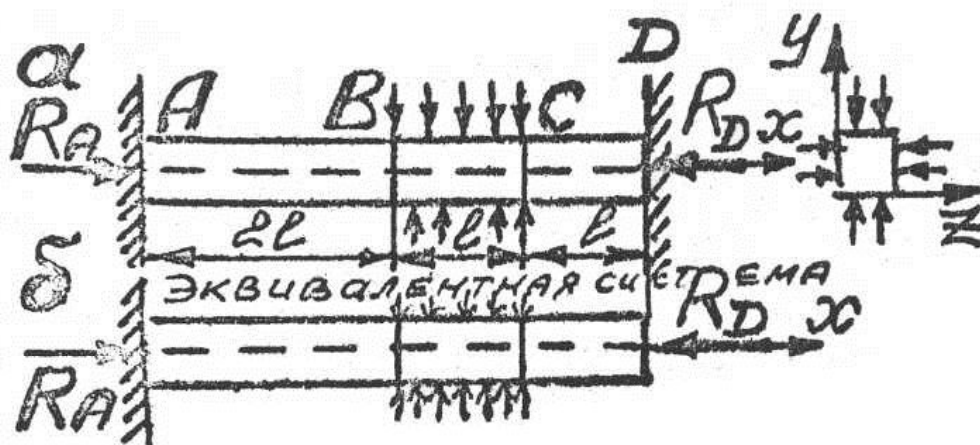


Рис. 2.39

**2.20.** Изменение объема  $\Delta V = (a + \Delta a)^3 - a^3 = a^3 + 3a^2 \cdot \Delta a - 3a(\Delta a)^2 + (\Delta a)^3 - a^3 = 3a^2 \cdot \Delta a$ .

Любой элементарный объем листового металла испытывает все-стороннее равное (чистое) трехосное сжатие, т.е.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p, \quad \text{и, следовательно,} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\Delta a}{a} =$$

$$= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = -\frac{p}{E}(1 - 2\mu), \quad \text{откуда} \quad \Delta a = -\frac{p \cdot a}{E}(1 - 2\mu).$$

Тогда  $\Delta V = -3a^3 \cdot \frac{(1 - 2\mu)}{E} \cdot p$ .

## Тема 3

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР (СЕЧЕНИЙ)

### 3.1. Основные положения

К геометрическим характеристикам плоской фигуры (рис. 3.1) относятся:

площадь фигуры

$$F = \int_F dF > 0, [\text{м}^2]; \quad (3.1)$$

статический момент площади фигуры относительно оси

$$S_z = \int_F y dF \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad S_y = \int_F z dF \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, [\text{м}^3]; \quad (3.2)$$

осевой момент инерции

$$I_z = \int_F y^2 dF > 0, \quad I_y = \int_F z^2 dF > 0, [\text{м}^4]; \quad (3.3)$$

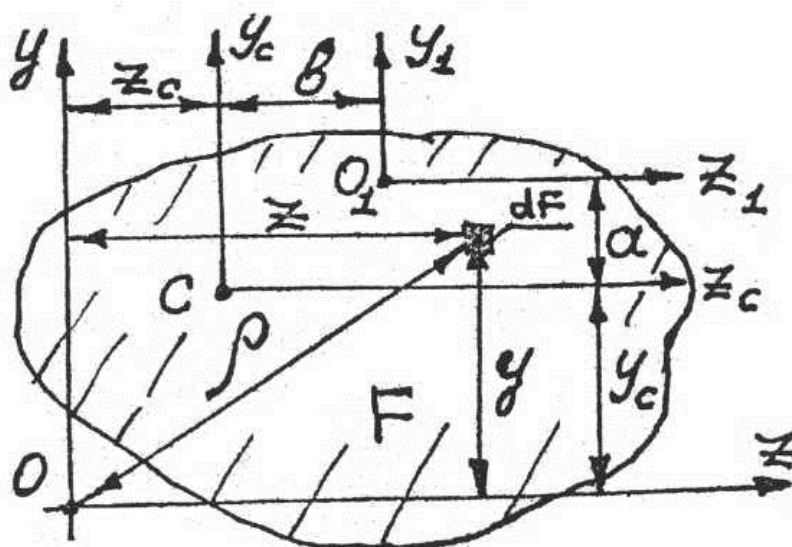


Рис.3.1

полярный момент инерции

$$I_p = \int_F \rho^2 dl' > 0, [M^4]; \quad (3.4)$$

центробежный момент инерции

$$I_{zy} = \int_F zy dl' \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, [M^4]. \quad (3.5)$$

Все геометрические характеристики обладают свойством аддитивности.

При рассмотрении плоских фигур оперируют понятием центра тяжести, который совпадает с центром масс бесконечно тонкой однородной пластинки постоянной толщины, имеющей то же очертание и размеры, что и данная плоская фигура.

На основании теоремы о моменте равнодействующей

$$S_z = \int_F y dF = F \cdot y_c, \quad S_y = \int_F z dF = F \cdot z_c, \quad (3.6)$$

где  $F$  – площадь фигуры;  $y_c, z_c$  – координаты центра тяжести фигуры (ЦТ или С), откуда

$$\left\{ \begin{array}{l} y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_1^n S_z(i)}{\sum_1^n F_i} = \frac{\sum_1^n F_i \cdot y_i}{\sum_1^n F_i}; \\ z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_1^n S_y(i)}{\sum_1^n F_i} = \frac{\sum_1^n F_i \cdot z_i}{\sum_1^n F_i}, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

где  $S_z(i), S_y(i), F_i, y_i, z_i$  – соответственно статические моменты, площади, координаты центра тяжести простых фигур, составляющих данную сложную фигуру.

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называют центральными.

Из (3.6) следует, что если ось  $z$  совпадает с центральной осью  $z_c$ , т.е.  $y_c = 0$ , то  $S_z = S_{z_c} = 0$ , откуда вывод 3.1.1.

3.1.1. Статический момент площади фигуры относительно центральной оси равен нулю. Отсюда следствие 3.1.2.

3.1.2. Ось, относительно которой статический момент равен нулю, является центральной.

Очевидно, что ось симметрии всегда является центральной, а точка пересечения двух осей симметрии фигуры — центром тяжести фигуры.

3.1.3. Если сечение состоит из двух одинаковых фигур, как угодно расположенных по отношению друг к другу (рис. 3.2), то центр тяжести всего сечения лежит на середине отрезка, соединяющего центры тяжести составляющих сечение фигур.

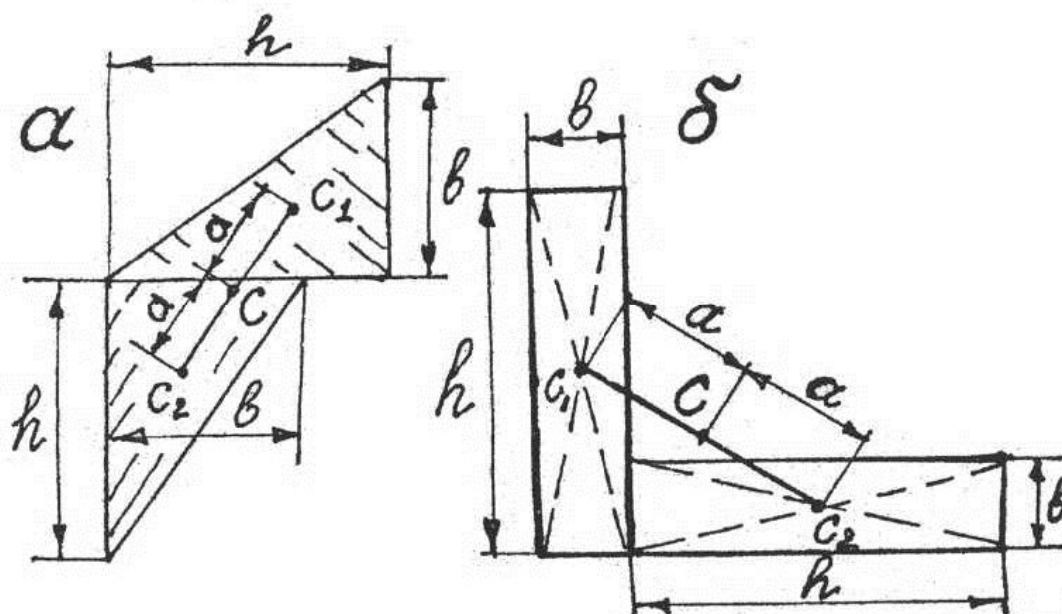


Рис.3.2

Для прямоугольника  $ABCD$  (рис. 3.3) осевой момент инерции  $I_z = \int_F y^2 dF = \int_0^h y^2 b dy$ . Точно такой же вид имеет  $I_z$  для параллелограмма  $AB_1C_1D$ , так как для него элементарная площадка  $dF = b dy$  и пределы интегрирования те же.

3.1.4. При перемещении всей фигуры или отдельных ее частей параллельно оси, относительно которой определяется момент инерции, последний не меняет своей величины.

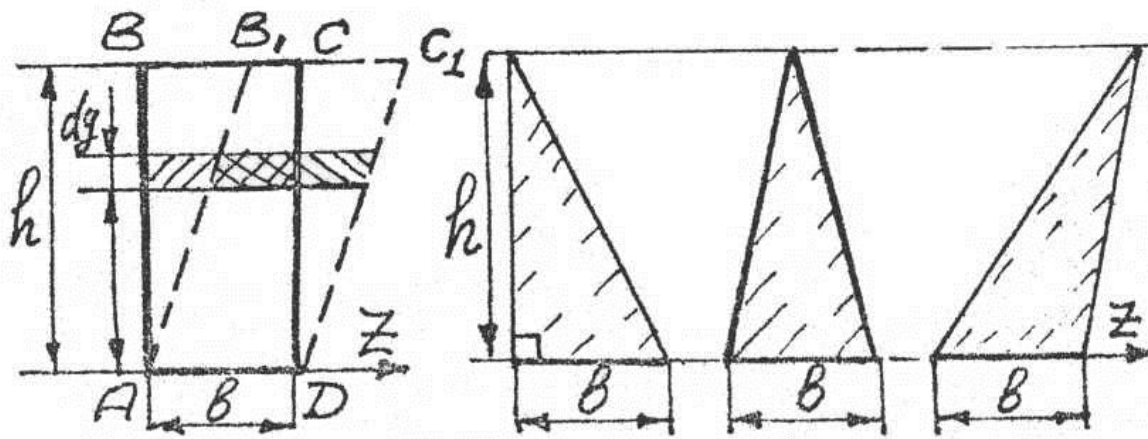


Рис.3.3

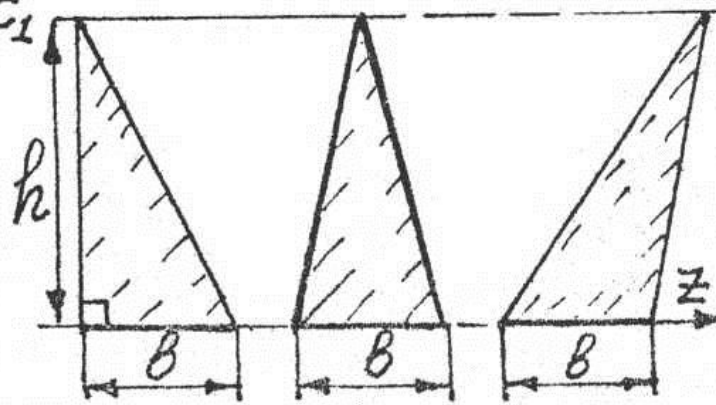


Рис.3.4

Для треугольников рис. 3.4 момент инерции  $I_z$  одинаков, как одинаков  $I_z$  для фигур, представленных на рис. 3.5.

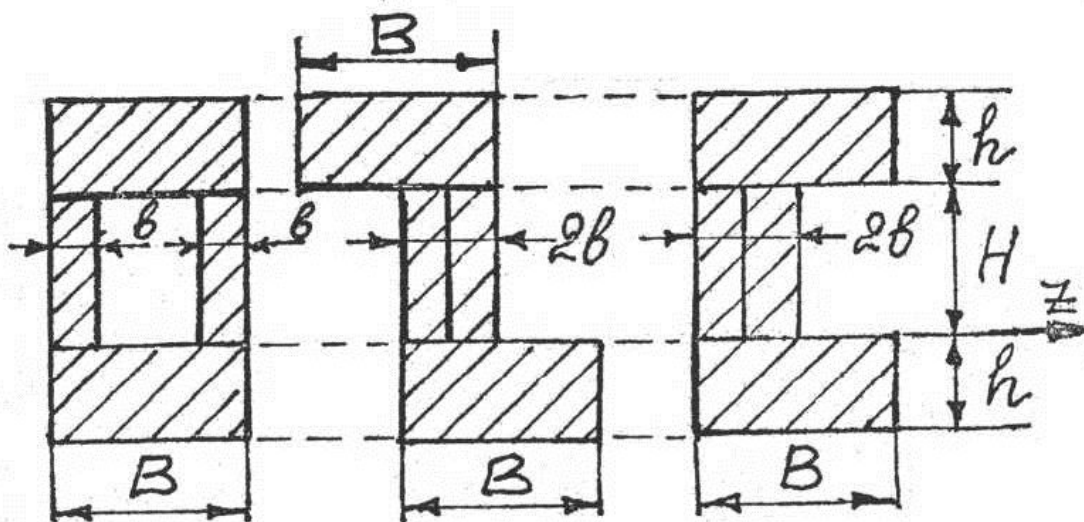


Рис.3.5

Так как квадрат расстояния до начала координат (см. рис. 3.1)  $\rho^2 = z^2 + y^2$ , то, подставляя  $\rho^2$  в (3.4), получим, что

$$I_p = I_z + I_y. \quad (3.8)$$

**3.1.5.** Полярный момент инерции относительно начала координат равен сумме моментов инерции относительно координатных осей.

Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей (см. рис.3.1), одна из которых центральная, имеют вид

$$\begin{cases} I_{z_1} = I_{z_c} + a^2 F; \\ I_{y_1} = I_{y_c} + b^2 F; \end{cases} \quad (3.9)$$

тогда

$$I_{p_1} = I_{p_c} + (a^2 + b^2) F; \quad (3.10)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{z_c y_c} + ab F. \quad (3.11)$$

При известном значении моментов инерции относительно произвольных осей, моменты инерции относительно центральных осей, параллельных произвольным, будут равны:

$$I_{z_c} = I_{z_1} - a^2 F, \quad (3.12)$$

$$I_{z_c y_c} = I_{z_1 y_1} - ab F. \quad (3.13)$$

Знаки отрезков  $a$ ,  $b$  берутся в исходной системе координат, т.е. в формулах (3.9)-(3.11) в системе  $z_c, y_c$ , а в формулах (3.12), (3.13) – в системе  $z_1, y_1$ .

Из рассмотрения вышеприведенных формул можно сделать ряд выводов.

**3.1.6.** При удалении (параллельный перенос) осей от центральных осей осевые и полярный моменты инерции увеличиваются.

**3.1.7.** Осевые моменты инерции относительно центральных осей являются минимальными по сравнению с моментами инерции относительно других осей, им параллельным.

**3.1.8.** При параллельном переносе одной координатной оси ( $a \neq 0, b = 0$ ) центробежный момент инерции не изменяется.

Зависимости между моментами инерции при повороте координатных осей вокруг любой точки сечения (рис. 3.6) имеют вид

$$I_{z_1} (I_{y_1}) = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha \mp I_{zy} \sin 2\alpha, \quad (3.14)$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha, \quad (3.15)$$

где в (3.14) нижние знаки для  $I_{y_1}$ ; угол  $\alpha$  положителен, если направлен против часовой стрелки, и отрицателен – по часовой стрелке.

Из анализа формул (3.14), (3.15) можно сделать следующие выводы.

**3.1.9.** Сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей при повороте их вокруг одного и того же начала координат, есть величина постоянная, т.е.

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y = \text{const}.$$

Вывод этот естественен с учетом формулы (3.8) и положения 3.1.5.

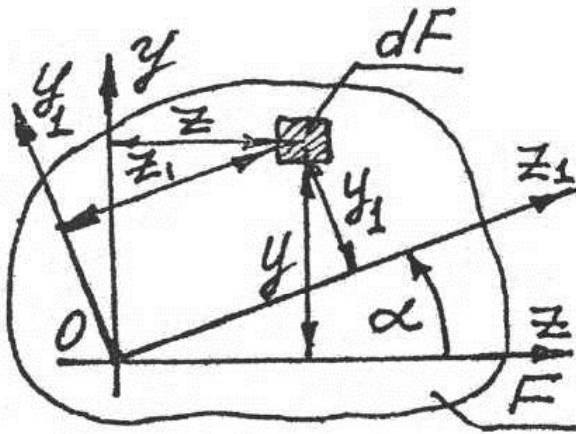


Рис. 3.6

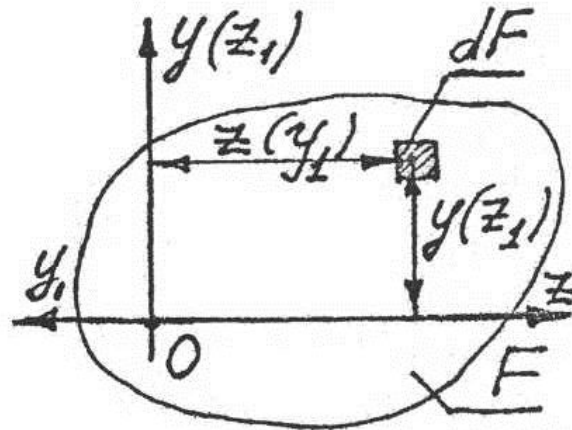


Рис. 3.7

**3.1.10.** При повороте осей на  $90^\circ$  (или, что то же самое, при повороте сечения на  $90^\circ$  относительно первоначальных осей) центробежный момент инерции меняет свой знак на обратный.

Последний вывод получим, подставив в (3.15)  $\alpha = 90^\circ$ , тогда  $I_{z_1 y_1} = -I_{zy}$ . Это же следует и из рис. 3.7, согласно которому при повороте осей на  $90^\circ$  ординаты элементарных площадок  $dF$  сохраняют свой знак, а абсциссы – меняют свой знак на обратный.

Так как центробежный момент инерции является непрерывной функцией от угла  $\alpha$ , то согласно выводу 3.1.10 существует такое значение угла  $\alpha = \alpha_0$ , лежащее в пределах  $0 < \alpha_0 < 90^\circ$ , при котором центробежный момент инерции  $I_{z_1 y_1} = 0$ .



Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, получили название главных осей инерции.

**3.1.11.** Через любую точку фигуры можно так провести, по крайней мере, одну пару взаимно перпендикулярных осей, что центробежный момент инерции относительно этих осей будет равен нулю.

Обозначим главные оси через  $z_0$  и  $y_0$ .

Подставив в (3.15)  $\alpha = \alpha_0$  и приравняв  $I_{z_0 y_0} = I_{z_0 y_0} = 0$ , получим формулу для определения положения главных осей инерции:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2I_{zy}}{I_z - I_y}. \quad (3.16)$$

Этому выражению удовлетворяют два значения  $2\alpha_0$ , отличающиеся на  $180^\circ$ , или два значения  $\alpha_0$ , отличающиеся на  $90^\circ$ , т.е. формула (3.16) даст положение двух главных осей, расположенных под углом  $90^\circ$ .

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными. Их значение получим по формуле (3.14), подставив  $\alpha = \alpha_0$ . Тогда, например,

$$I_{z_0} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha_0 - I_{zy} \sin 2\alpha_0. \quad (3.17)$$

Отметим, что

$$\frac{dI_{z_0}}{d\alpha} = -2 \left( \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{zy} \cos 2\alpha_0 \right) = -2I_{z_0 y_0} = 0,$$

откуда следует, что главные моменты инерции являются экстремальными, которые принято обозначать  $I_{\max} = I_u$ ,  $I_{\min} = I_v$ . Главные оси соответственно обозначают через  $u$  или  $u(\max)$ ,  $v$  или  $v(\min)$ .

Вынесем в формуле (3.17)  $\cos 2\alpha_0$  за скобку, тогда

$$I_{z_0} = \frac{I_z + I_y}{2} + \left( \frac{I_z - I_y}{2} - I_{zy} \operatorname{tg} 2\alpha_0 \right) \cos 2\alpha_0;$$

и заменим  $\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}$ , а  $\operatorname{tg} 2\alpha_0$  его значением из формулы (3.16). В результате получим формулу свободную от  $\alpha_0$ :

$$I_{\frac{\max}{\min}} = I_u(I_v) = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}. \quad (3.18)$$

По формуле (3.16), если  $I_z - I_y > 0$ , получаем  $\alpha_0 = \alpha_0(\max)$ , а если  $I_z - I_y < 0$ , то  $\alpha_0 = \alpha_0(\min)$ .

Определить положение главных осей инерции можно и по формуле (3.19), при условии, что  $I_z > I_y$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_0 \left( \frac{\max}{\min} \right) = \frac{I_{zy}}{I_y - I_{\frac{\max}{\min}}}. \quad (3.19)$$

Угол  $\alpha_0$ , определенный по формулам (3.16) и (3.19), откладывается от оси  $z$  (см. аналогию с теорией напряженного состояния на с. 72).

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями инерции, а моменты инерции относительно этих осей – главными центральными моментами инерции.

**3.1.12.** Ось, относительно которой главный момент инерции максимален, всегда составляет меньший угол с одной из исходных осей, относительно которой момент инерции имеет большее значение.

**3.1.13.** Установить, является ли главная ось инерции осью  $u(\max)$ , легко, если фигуре дать массу, тогда ось, относительно которой момент количества движения

$$L = \left( \sum \Delta m_i \cdot r_i^2 \right) \omega$$

будет большим, и будет осью  $u(\max)$ .

Положения 3.1.12 и 3.1.13 проиллюстрированы на рис. 3.8.

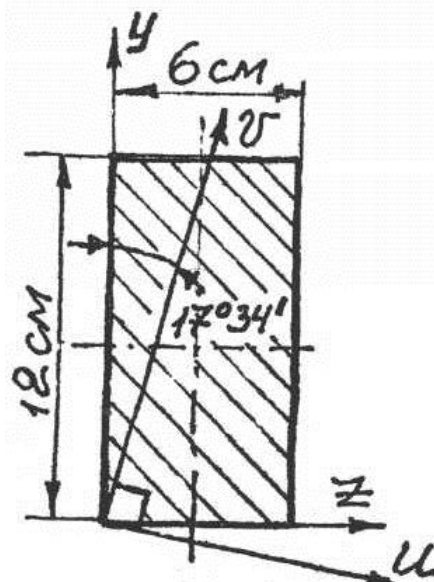


Рис. 3.8

Здесь  $I_z > I_y$  и ось  $u$  составляет меньший угол с осью  $z$ ; момент количества движения  $L_u > L_v$ .

**3.1.14.** Ось симметрии всегда является главной центральной осью инерции; второй главной осью является любая другая ось, перпендикулярная к оси симметрии.

Доказательство положения 3.1.14 следует из рассмотрения рис. 3.9, где ось  $y_0$  – ось симметрии фигуры. Здесь для любой элементарной площадки  $dF$  справа от оси  $y_0$  центробежный момент инерции  $dI_{zy_0}^{\text{прав}} = zy dF$ . В левой части фигуры будет существовать симметричная элементарная площадка  $dF$ , для которой  $dI_{zy_0}^{\text{лев}} = -zy dF$ .

Сумма двух элементарных центробежных моментов инерции равна нулю, поэтому и для всего сечения  $I_{zy_0}$  будет равен нулю.

Главной центральной осью инерции является и ось симметрии в интегральном смысле, как показано на рис. 3.10.

Для сечения имеющего одну или более пары взаимно перпендикулярных осей симметрии удобно пользоваться понятием «полуфигура».

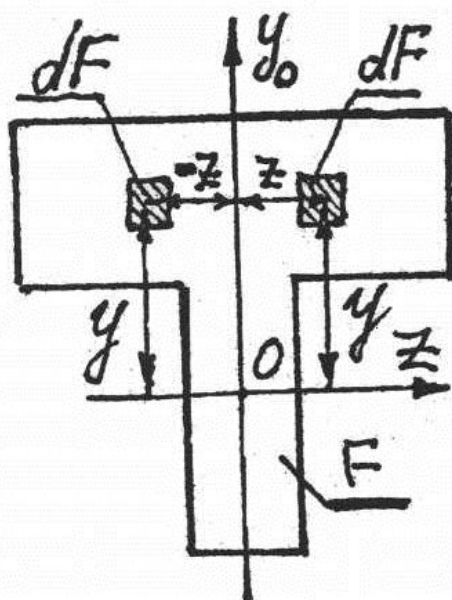


Рис. 3.9

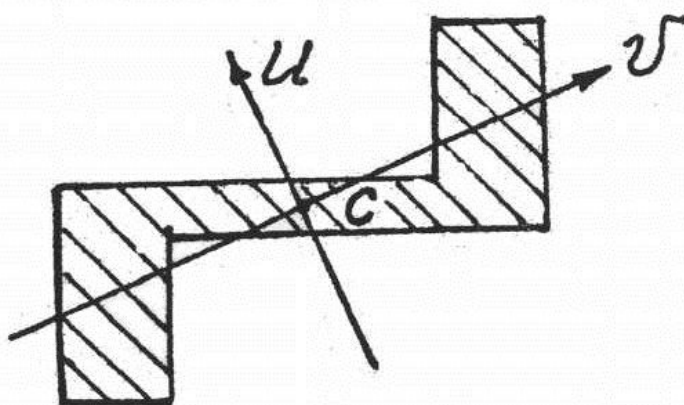


Рис. 3.10

Полуфигурой называют фигуру, полученную путем рассечения плоской фигуры линией любой формы обратно симметричной к

осей симметрии; при этом при повороте полуфигуры на  $180^\circ$  вокруг центра тяжести всей фигуры она (полуфигура) совпадает со второй полуфигурой (рис. 3.11).

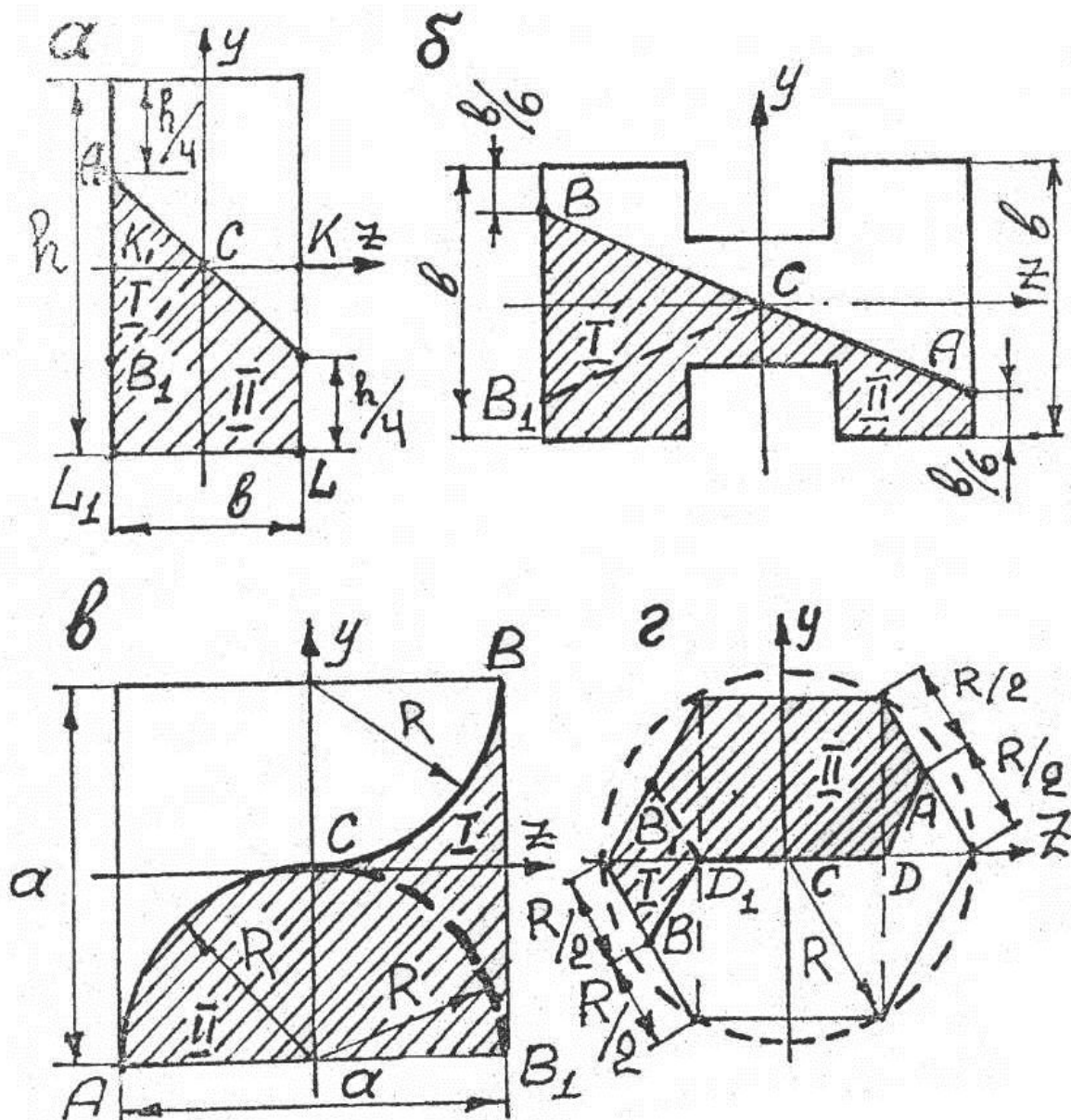


Рис. 3.11

**3.1.15.** Главные центральные оси фигур типа рис. 3.11 являются главными осями их полуфигур.

Этот вывод будет очевиден, если провести дополнительную линию  $B_1C$  (пунктир на рис. 3.11, а, б, в), симметричную  $BC$ , дополнительную линию  $B_1D_1$  (пунктир на рис. 3.11, г), симметричную

$BD_1$ . У полученных частей I и II полуфигуры ось  $z$  для I части и ось  $y$  для II части являются осями симметрии и, следовательно, для всей полуфигуры — главными осями.

**3.1.16.** Моменты инерции полуфигуры относительно осей, являющихся главными центральными осями всей фигуры типа рис. 3.11, равны половине величины моментов инерции относительно соответствующих главных центральных осей всей фигуры.

Этот вывод получим из рассмотрения, например, прямоугольника на рис. 3.11, *a*:

$$I_z(\text{полуфигуры } ACBLL_1A) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh^3}{12} + I'_z(\text{части } ACK_1) - I''_z(\text{части } BCK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh^3}{12},$$

так как  $I'_z = I''_z$ .

Итак, для полуфигуры рис. 3.11, *a*  $I_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh^3}{12}$ ,  $I_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{hb^3}{12}$ ; для полуфигуры рис. 3.11, *в*  $I_z = I_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{12}$ ; для полуфигуры рис. 3.11, *г*  $I_z = I_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{16} \cdot a^4$ .

**3.1.17.** Если фигура имеет две (см. рис. 3.11, *в*) и более (см. рис. 3.11, *г*) пары взаимно перпендикулярных осей симметрии, то любые две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести всей фигуры, являются главными осями полуфигуры.

**3.1.18.** Сечения, имеющие более двух осей симметрии, т.е. все правильные многоугольники, начиная с равностороннего треугольника и заканчивая, в пределе, кругом, имеют бесконечное множество главных центральных осей инерции, относительно которых моменты инерции равны между собой.

Действительно, для равностороннего треугольника (рис. 3.12) моменты инерции относительно осей  $z$ ,  $y$  равны

$$I_z = \frac{bh^3}{36} = \frac{a \left( a \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3}{36} = \frac{\sqrt{3}}{96} a^4.$$

$$I_y = 2 \frac{h \left( \frac{a}{2} \right)^3}{12} = \frac{2a \frac{\sqrt{3}}{2} a^3}{8 \cdot 12} = \frac{\sqrt{3}}{96} a^4, \quad I_{zy} = 0.$$

Тогда для осей, проходящих под углом  $\alpha$  ( $\alpha + 90$ ) к осям  $z, y$ , согласно формуле (3.15)  $I_{z_1 y_1} = 0$ , т.е. оси  $z_1, y_1$  – главные; согласно формуле (3.14)  $I_{z_1} = I_{y_1} = I_z = I_y$ , т.е. их значение не зависит от угла  $\alpha$ .

**3.1.19.** Если моменты инерции относительно главных осей, проходящих через любую точку сечения (например, точку  $A$  сечения на рис. 3.13), равны, то все оси, проходящие через эту точку, являются главными осями и моменты инерции относительно их равны.

С учетом того, что

$$I_{z_0} = \frac{4a(2a)^3}{3} = \frac{32}{3} a^4 \quad \text{и} \quad I_{y_0} = \frac{2a(4a)^3}{12} = \frac{32}{3} a^4,$$

а  $I_{z_0 y_0} = 0$  ( $y_0$  – ось симметрии), по формуле (3.14) получим, что независимо от угла  $\alpha$  для осей, проходящих через точку  $A$ ,

$$I_i = \frac{32}{3} a^4.$$

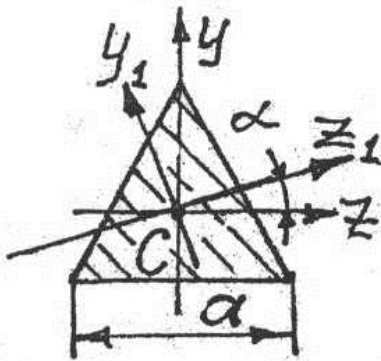


Рис. 3.12

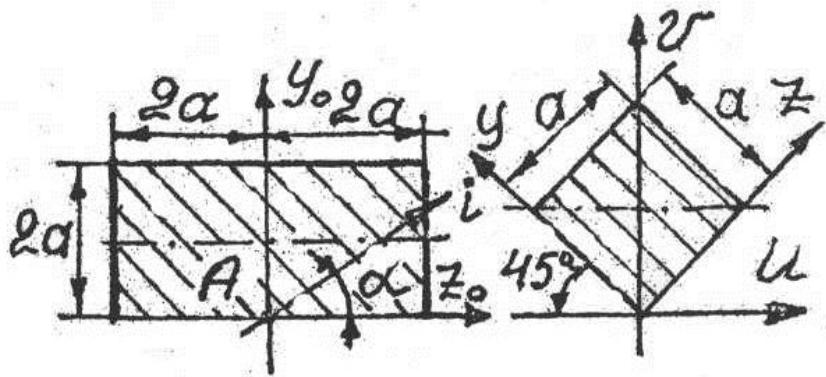


Рис. 3.13

Рис. 3.14

**3.1.20.** Если относительно двух произвольных взаимно перпендикулярных осей, проходящих через данную точку сечения, моменты инерции равны, то главные оси проходят через эту точку сечения под углом в  $45^\circ$  к исходным осям (рис. 3.14).

Вывод следует из анализа формулы (3.16). При  $I_z = I_y$ ,  $2\alpha_0 = 90^\circ$ , а  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

Для определения знака центробежного момента инерции  $I_{z_c y_c}$  для уголков равнобоких и неравнобоких, прямоугольных треугольников относительно центральных осей, параллельных полкам (катетам), которые не являются главными осями, удобно пользоваться схемой, представленной на рис. 3.15, согласно которой знак  $I_{z_c y_c}$  обратный знаку тангенса угла для каждого квадранта.

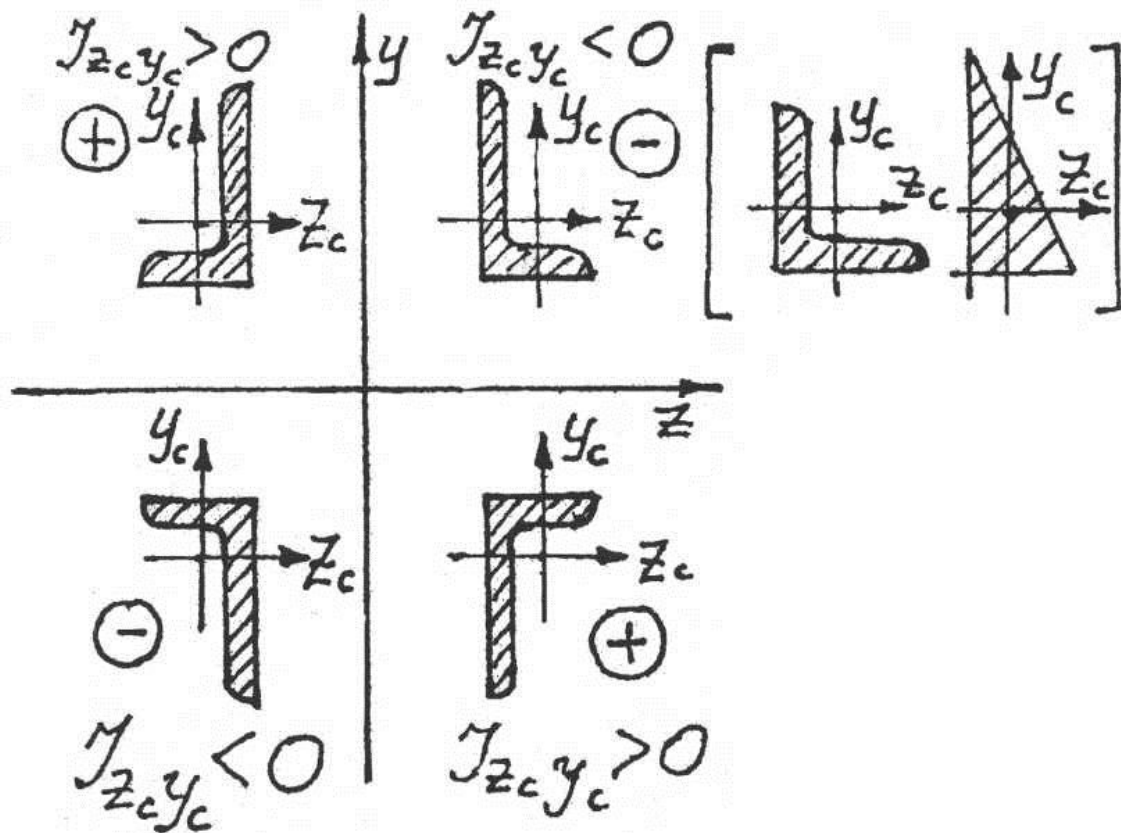


Рис. 3.15

К геометрическим характеристикам плоских фигур относятся также неинтегральные характеристики:

радиус инерции сечения относительно центральных осей

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} > 0, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} > 0, \quad [\text{м}]; \quad (3.20)$$

осевые моменты сопротивления сечения относительно главных центральных осей

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} > 0, [\text{м}^3], \quad (3.21)$$

где  $y_{\max}$  – ордината наиболее удаленных от оси  $z$  точек сечения (рис. 3.16);

полярный момент сопротивления круглого сечения

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} > 0, [\text{м}^3], \quad (3.22)$$

где  $\rho_{\max} = r$  – расстояние до наиболее удаленной точки от центра круглого сечения (рис. 3.17).

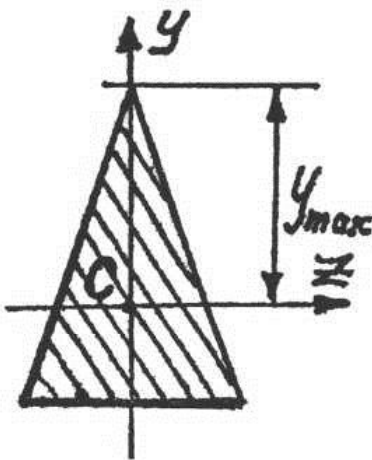


Рис. 3.16

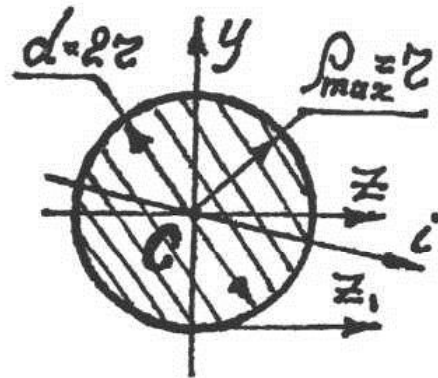


Рис. 3.17

Если геометрическая характеристика есть величина переменная, например, зависящая от угла поворота  $\alpha$ , то ее экстремальные значения найдем, если возьмем производную по  $\alpha$  и исследуем на экстремум.

Приведем значения моментов инерции для простейших фигур, часто встречающихся в задачах.

Для квадрата со стороной  $a$  (рис. 3.18)

$$I_z = I_y = I_i = \frac{a^4}{12}, \quad (3.23)$$

$$I_{z_1} = I_{y_1} = \frac{a^4}{3}, \quad (3.24)$$

$$I_u = \frac{7}{12}a^4. \quad (3.25)$$



Для прямоугольника размерами  $b \times h$  (рис. 3.19)

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{hb^3}{12}, \quad (3.26)$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{3}, \quad I_{y_1} = \frac{hb^3}{3}. \quad (3.27)$$

Для прямоугольного треугольника с катетами  $b, h$  (рис. 3.20)

$$I_z = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{hb^3}{36}, \quad (3.28)$$

$$I_{z_1} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{y_1} = \frac{hb^3}{12}, \quad (3.29)$$

$$I_{z_2} = \frac{bh^3}{4}, \quad (3.30)$$

$$I_{zy} = -\frac{b^2h^2}{72}, \quad (3.31)$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{b^2h^2}{24}, \quad (3.32)$$

$$I_{z_2y_1} = -\frac{b^2h^2}{8}. \quad (3.33)$$

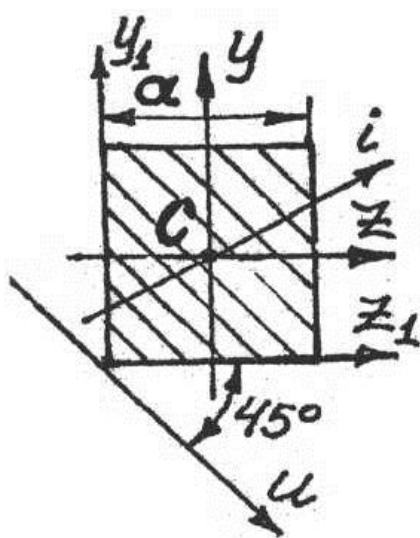


Рис. 3.18

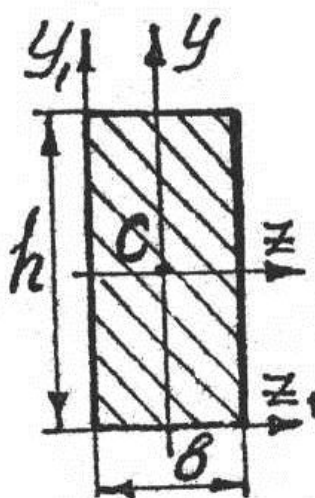


Рис. 3.19

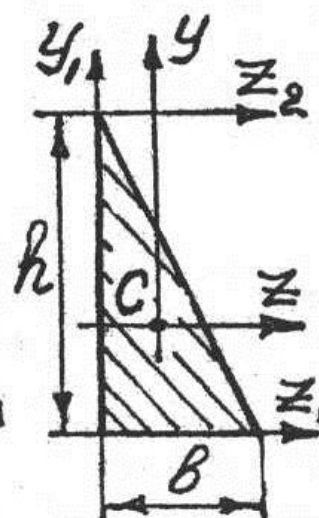


Рис. 3.20

Для круга радиусом  $r$  (см. рис. 3.17)

$$I_z = I_y = I_i = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}, \quad (3.34)$$

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (3.35)$$

$$I_{z_1} = \frac{5}{4} \pi r^4. \quad (3.36)$$

**3.1.21.** Учитывая свойство аддитивности геометрических характеристик, во многих задачах при их определении удобно достроить заданное сечение до такой простой фигуры, для которой геометрические характеристики известны.

### 3.2. Задачи

**Задача 3.1.** Для фигуры (рис. 3.21), ограниченной осью абсцисс и параболой  $y = \alpha \cdot z^n$ , определить площадь, статический момент площади относительно оси  $y$  и положение центра тяжести – абсциссу  $z_c$ .

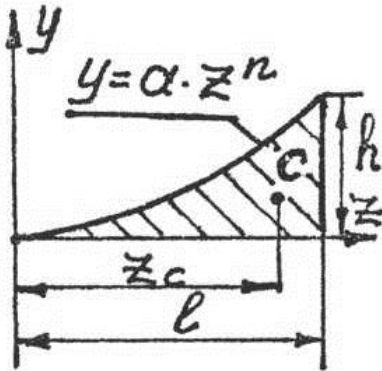


Рис. 3.21

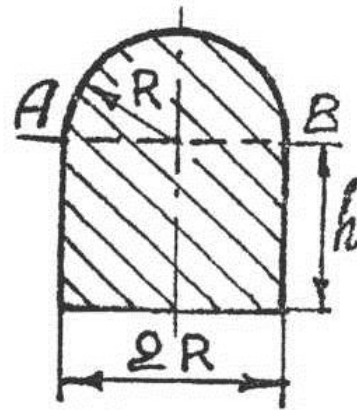


Рис. 3.22

**Задача 3.2.** Определить величину размера  $h$  для фигуры (рис. 3.22), при котором центр тяжести ее будет находиться на прямой  $AB$ .

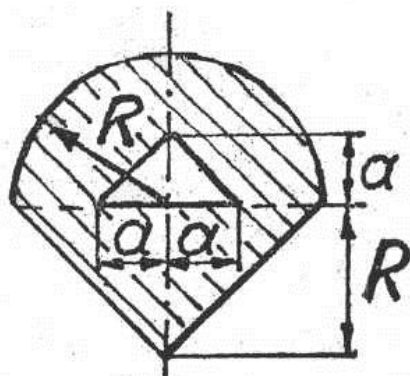


Рис. 3.23

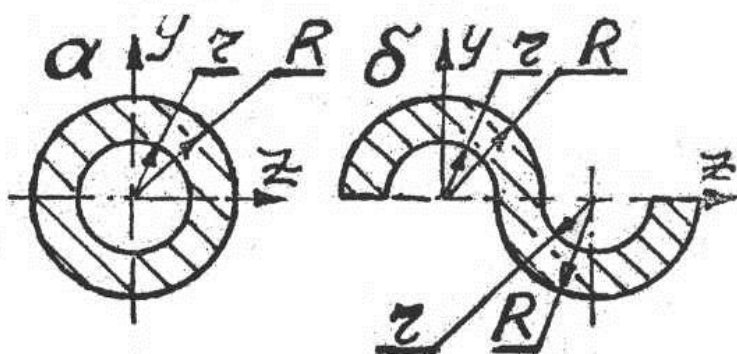


Рис. 3.24

**Задача 3.3.** Чему равен размер  $a$ , если главные центральные моменты инерции сечения (рис. 3.23) равны между собой? При полученном значении  $a$  записать выражение для определения главных центральных моментов инерции.

**Задача 3.4.** Определить моменты инерции относительно осей  $z$  и  $y$  для плоских фигур (рис. 3.24).

**Задача 3.5.** Для треугольника  $ADC$  (рис. 3.25) определить осевой момент инерции относительно медианы  $OC$ , если  $h, b, \alpha$  заданы.

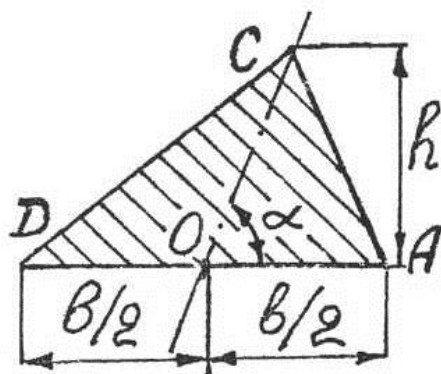


Рис. 3.25

**Задача 3.6.** Определить момент инерции относительно оси  $z$  для фигуры, изображенной на рис. 3.26.

**Задача 3.7.** Найти момент инерции относительно оси  $z$  круга, имеющего  $n$  одинаковых вырезов, равномерно расположенных по окружности (рис. 3.27), если  $R_1 = 0,5R$ ;  $R_2 = 0,75R$ .

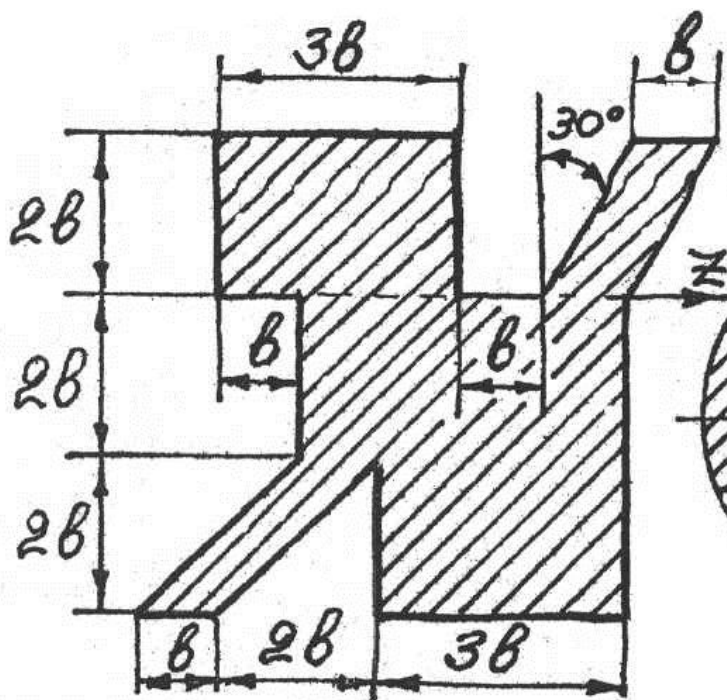


Рис. 3.26

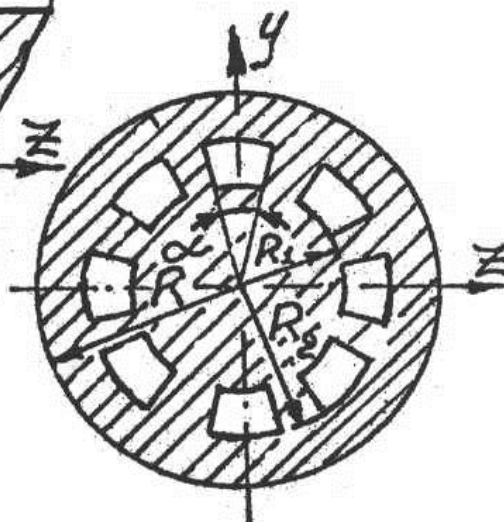


Рис. 3.27

**Задача 3.8.** Сторона квадрата выреза равна  $na$  (рис. 3.28). Чему равно  $n$ , если  $I_z / I_y = 5$ .

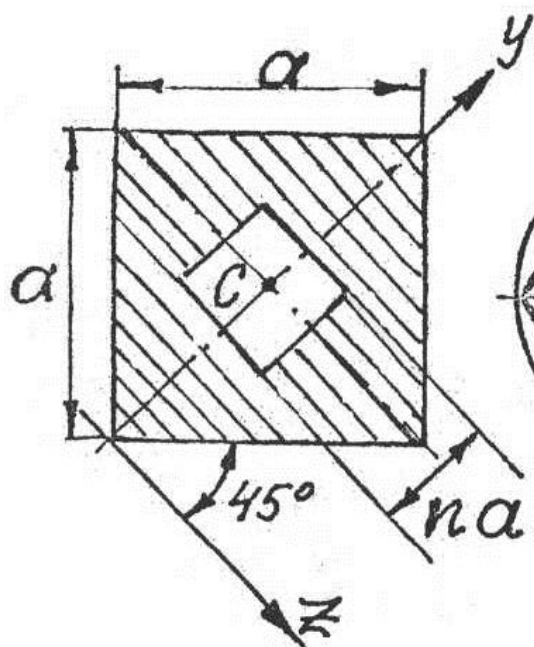


Рис. 3.28

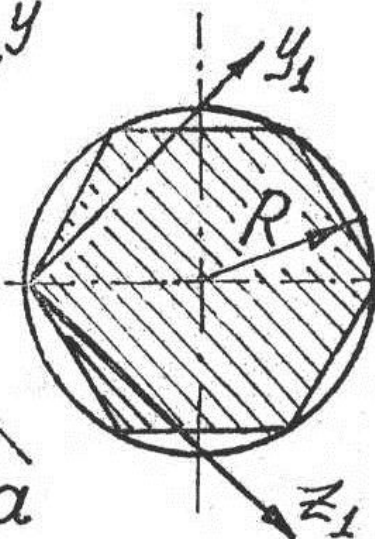


Рис. 3.29

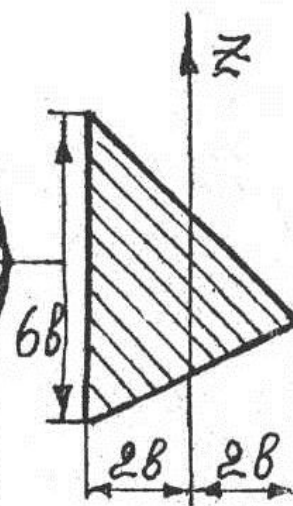


Рис. 3.30

**Задача 3.9.** В окружность радиуса  $R$  вписан правильный шестиугольник (рис. 3.29). Определить центробежный момент инерции площади шестиугольника относительно осей  $z_1, y_1$ .

**Задача 3.10.** Для сечения (рис. 3.30) вычислить момент инерции относительно оси  $z$ .

**Задача 3.11.** Координаты вершин треугольника (рис. 3.31) приведены в сантиметрах. Определить момент инерции относительно оси  $y$ .

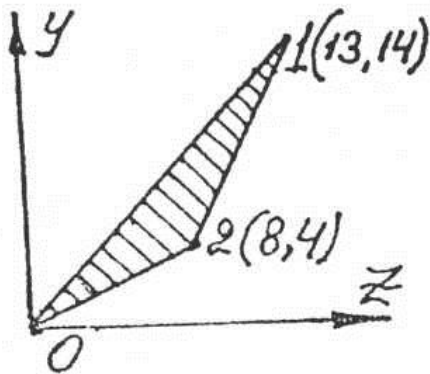


Рис. 3.31

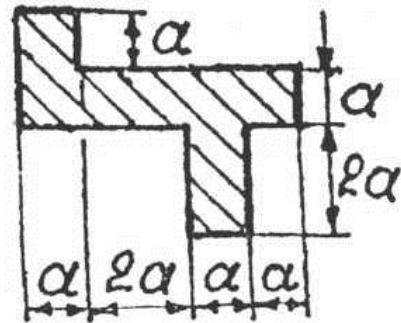


Рис. 3.32

**Задача 3.12.** Для заданной плоской фигуры (рис. 3.32) показать положение главных центральных осей инерции.

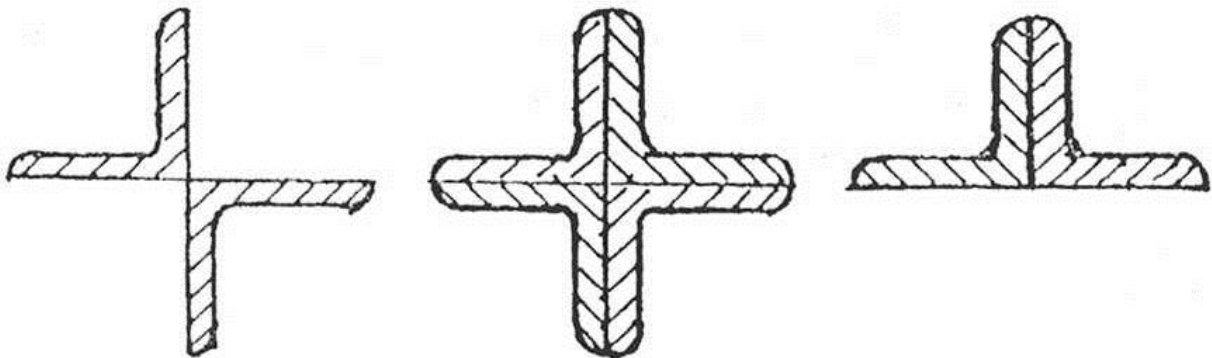


Рис. 3.33

**Задача 3.13.** Сечения (рис. 3.33) составлены из уголков № 3 ( $30 \times 30 \times 3$ ) по ГОСТ 8509-86. Показать, как будут проходить главные центральные оси сечений, и определить  $I_u = I_{\max}, I_v = I_{\min}$ .

**Задача 3.14.** Определить момент инерции фигуры относительно оси  $z$  (рис. 3.34).

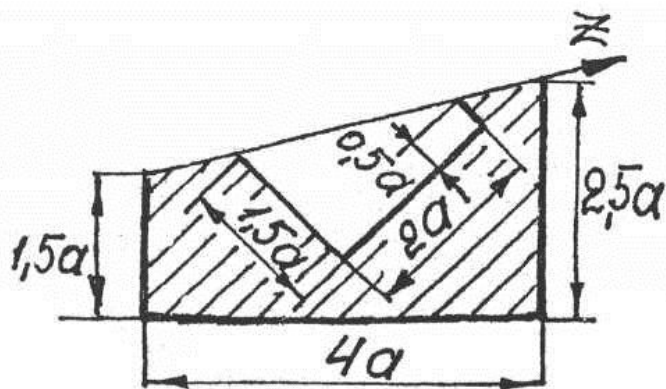


Рис. 3.34

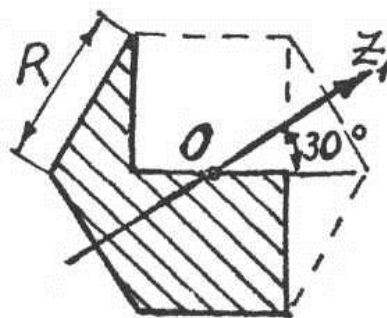


Рис. 3.35

**Задача 3.15.** Найти осевой момент инерции  $I_{z_1}$  заштрихованной площади (рис. 3.35), представляющей собой часть правильного шестиугольника со стороной  $R$ .

**Задача 3.16.** Определить момент инерции относительно оси  $y_1$  для плоской фигуры (рис. 3.36).

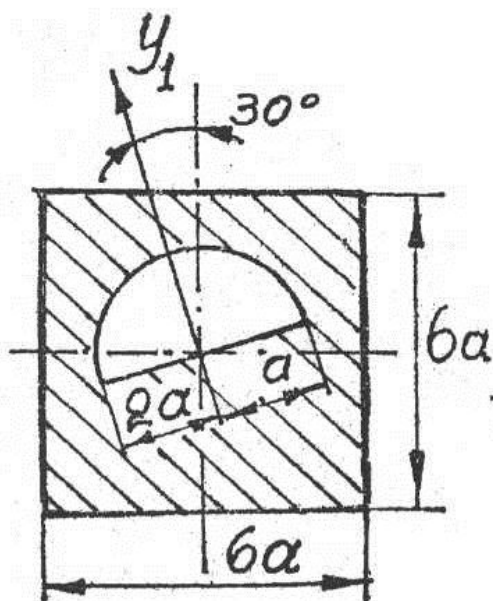


Рис. 3.36

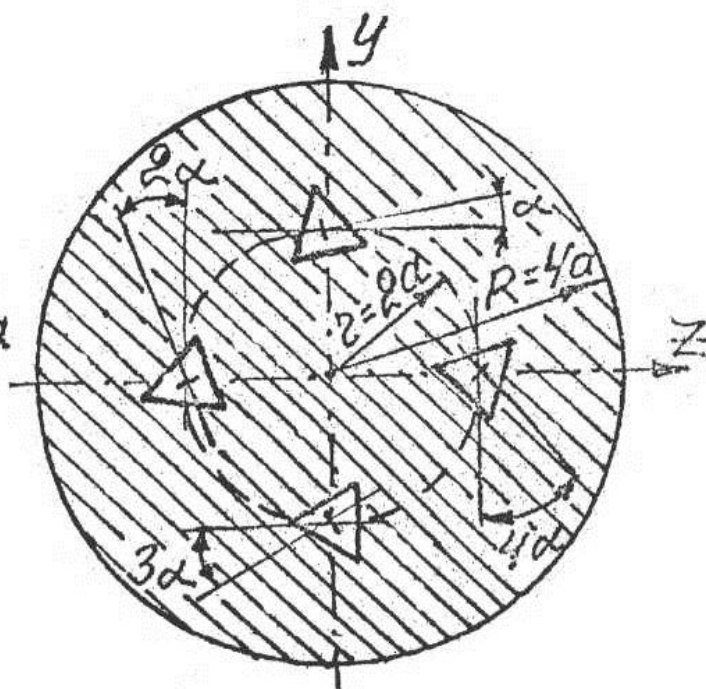


Рис. 3.37

**Задача 3.17.** Найти момент инерции относительно оси  $z$  плоской фигуры (рис. 3.37), если сторона равносторонних треугольников-

вырезов равна  $a$ . Центры тяжести треугольников лежат на окружности радиуса  $r = 2a$ , угол  $\alpha = 10^\circ$ .

**Задача 3.18.** Фигура (рис. 3.38) образована  $n$  вписанными друг в друга квадратами ( $n \rightarrow \infty$ ). Вычислить момент инерции относительно оси  $z_1$ .

**Задача 3.19.** При каком значении  $h$  все оси, проходящие через точку  $A$  трапеции (рис. 3.39), будут главными?

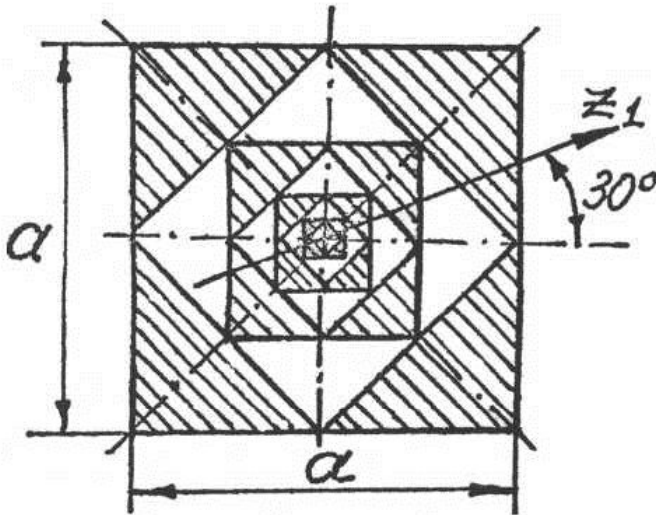


Рис. 3.38

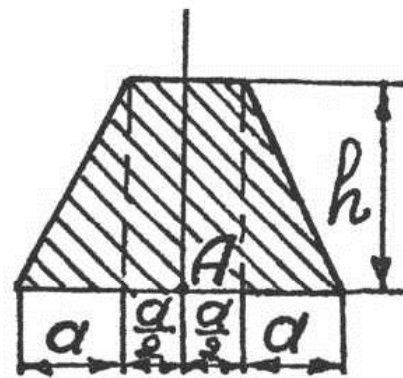


Рис. 3.39

**Задача 3.20.** Установить, при каком значении  $a$  оси  $z, y$  будут главными осями сечения (рис. 3.40).

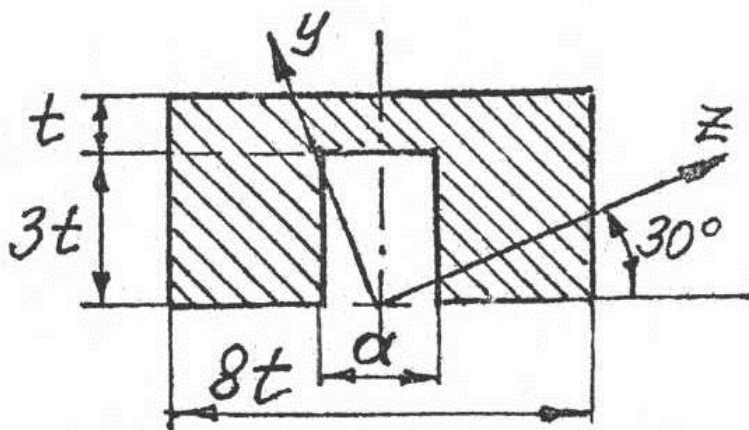


Рис. 3.40

**Задача 3.21.** Для фигуры, вписанной в окружность радиусом  $R$ , образованную двумя диаметрами  $AF$  и  $CD$  и хордами  $AE$ ,  $EC$ ,  $FK$ ,  $KD$  (рис. 3.41), определить угол  $\alpha$ , при котором  $I_z = I_y$ .

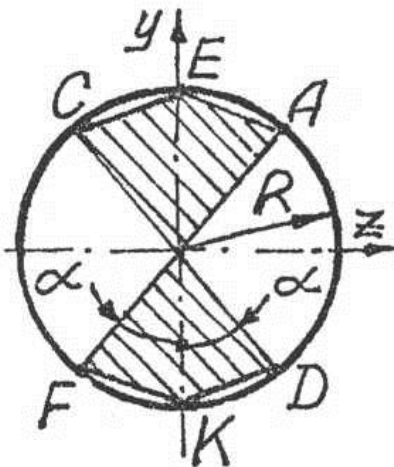


Рис. 3.41

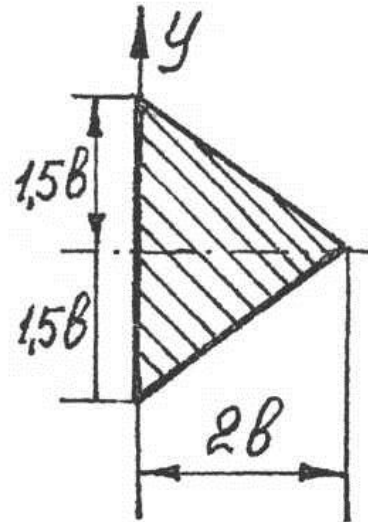


Рис. 3.42

**Задача 3.22.** Для плоской фигуры (рис. 3.42) определить на оси  $y$  положение точки, через которую главные оси проходят под углом  $45^\circ$  к оси  $y$ .

**Задача 3.23.** При каком соотношении  $h/b$  момент инерции и момент сопротивления относительно оси  $z$  будут максимальными для плоской фигуры (рис. 3.43).

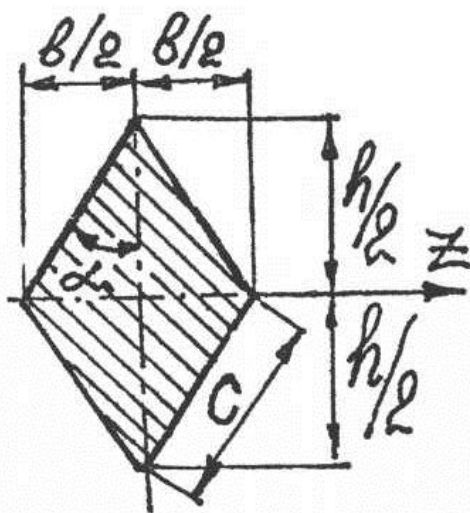


Рис. 3.43

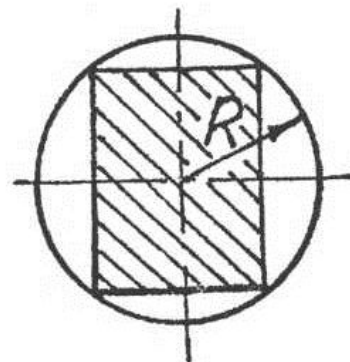


Рис. 3.44



**Задача 3.24.** Как обтесать круглое бревно, чтобы полученный из него брусок прямоугольного поперечного сечения обладал наибольшей прочностью при изгибе (рис. 3.44).

**Задача 3.25.** Найти, при каком значении  $\delta$  момент сопротивления относительно оси  $z$  поперечного сечения балки (рис. 3.45) будет наибольшим. На сколько повысится прочность балки при оптимальном  $\delta$ ?

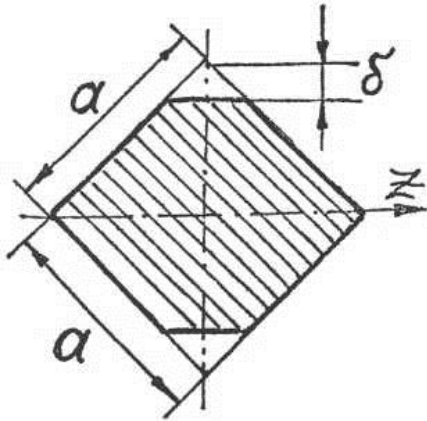


Рис. 3.45

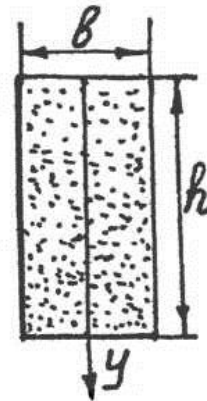


Рис. 3.46

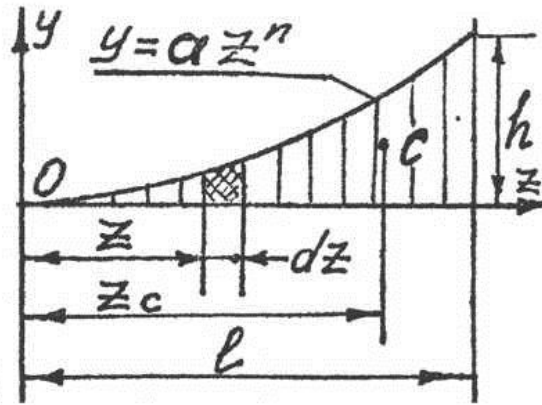
**Задача 3.26.** Стержень прямоугольного сечения (рис. 3.46) сделан из пористого материала. Плотность пор меняется по высоте сечения по закону  $\rho(y) = \rho_0 y / h$ , где  $\rho_0 = \text{const}$ . В целом поры ослабляют сечение на 25 %. Определить момент инерции сечения относительно его центральной горизонтальной оси.

### 3.3. Решения, указания, ответы

3.1. При  $z = l$   $y(l) = h = al^n$ , откуда  $a = \frac{h}{l^n}$  (рис. 3.47). Площадь фигуры  $F = \int dF = \int y dz = \int_0^l \frac{h}{l^n} \cdot z^n dz = \frac{h \cdot l}{n+1}$ . Статический момент площади относительно оси  $y$  найдем по формуле (3.2):

$$S_y = \int_F z dF = \int_F zy dz = \int_0^l \frac{h}{l^n} z^{n+1} dz = \frac{hl^2}{n+2}.$$

Рис. 3.47



Абсциссу центра тяжести фигуры определим по формуле (3.6):

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{n+1}{n+2} l$$

тогда  $l - z_c = \frac{1}{n+2} l$ .

Если  $n=1$ , т.е. фигура представляет собой треугольник, то

$$F = \frac{1}{2} hl, \quad S_y = \frac{hl^2}{3}, \quad z_c = \frac{2}{3} l, \quad l - z_c = \frac{1}{3} l.$$

Если  $n=2$ , т.е. фигура сверху ограничена квадратичной параболой, то

$$F = \frac{1}{3} hl, \quad S_y = \frac{hl^2}{4}, \quad z_c = \frac{3}{4} l, \quad l - z_c = \frac{1}{5} l.$$

Если  $n=3$ , т.е. фигура сверху ограничена кубической параболой, то

$$F = \frac{1}{4} hl, \quad S_y = \frac{hl^2}{5}, \quad z_c = \frac{4}{5} l, \quad l - z_c = \frac{1}{5} l.$$

**3.2.** Для того чтобы центр тяжести находился на прямой  $AB$ , последняя должна совпадать с центральной осью  $z_c$ .

Согласно положению 3.1.1 статический момент всей площади фигуры  $S_{z_c} = S_{AB}$  должен быть равен нулю.

Следовательно, для фигуры (рис. 3.48), состоящей из двух частей 1 и 2:

$$S_{z_c} = F_1 y_{c_1} + F_2 y_{c_2} = \frac{\pi R^2}{2} \frac{4R}{3\pi} + 2Rh \left( -\frac{h}{2} \right) = 0, \quad \text{откуда}$$

$$h = \frac{2}{\sqrt{6}} R.$$

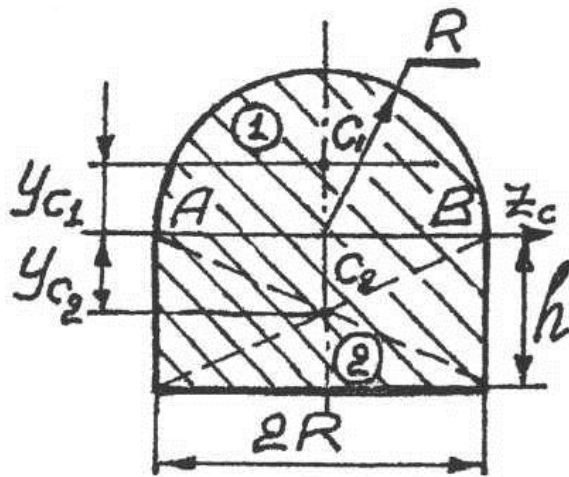


Рис. 3.48

3.3. Представим всю фигуру, состоящую из трех частей, в алгебраическом смысле: 1-я – полукруг; 2-я – треугольник  $ABK$ ; 3-я – треугольник  $A_1B_1K_1$  (рис. 3.49, а).

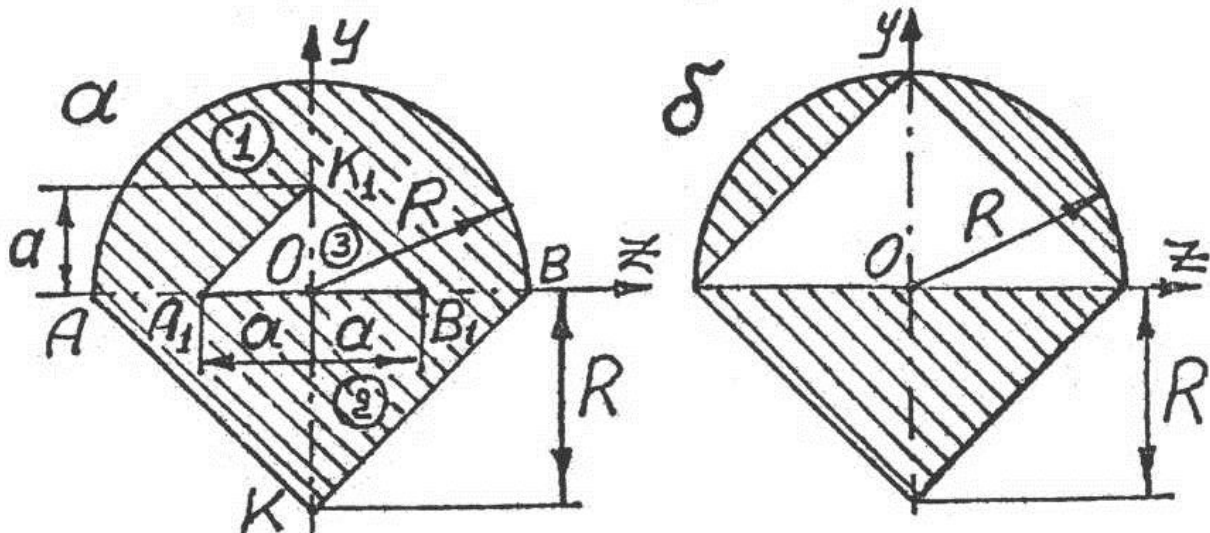


Рис. 3.49

Для каждой из фигур моменты инерции относительно осей  $z$ ,  $y$ , проходящих через точку  $O$ , равны между собой:

$$I_z^{(1)} = I_y^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\pi R^4}{4}; \quad I_z^{(2)} = I_y^{(2)} = \frac{R^4}{6}; \quad I_z^{(3)} = I_y^{(3)} = \frac{a^4}{6}.$$

Следовательно, для всей фигуры оси  $z$ ,  $y$  являются главными, так как  $y$  – ось симметрии, и моменты инерции для всей фигуры относительно этих осей равны, т.е.  $I_z = I_y$ .

Для того чтобы эти оси были бы главными и центральными, необходимо, чтобы центр тяжести всей фигуры совпадал с точкой  $O$ .

Это условие будет выполняться, если статический момент площади всей фигуры относительно оси  $z$  будет равен нулю:

$$S_z = S_z^I + S_z^2 - S_z^3 = \frac{1}{2} \pi R^2 \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} + \frac{1}{2} 2R^2 \left( -\frac{1}{3} R \right) - \frac{1}{2} 2a^2 \frac{1}{3} a = 0,$$

откуда  $a = R$ , т.е. фигура должна иметь вид, показанный на рис. 3.49, б.

Главные центральные моменты инерции будут равны моментам инерции относительно осей  $z$  и  $y$  для полукруга:

$$I_z = I_y = \frac{\pi R^4}{8}.$$

**3.4.** Учитывая свойство аддитивности геометрических характеристик, для фигуры рис. 3.24, а моменты инерции

$$I_z = I_y = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4).$$

Для фигуры рис. 3.24, б, учитывая положение 3.1.4, найдем

$$I_z = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4),$$

а для определения  $I_y$  воспользуемся формулой (3.9):

$$I_y = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) + \left[ \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) + (R + r)^2 \left( \frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 \right) \right].$$

**3.5.** Из вершин  $A$  и  $D$  треугольника (рис. 3.50) опустим перпендикуляры на медиану и ее продолжение. Из рисунка имеем

$$H = \frac{b}{2} \sin \alpha, \quad B = \frac{h}{\sin \alpha}, \quad I_z = 2 \frac{BH^3}{12} = \frac{hb^3}{48} \sin^2 \alpha.$$

**3.6.** Решение основано на положении 3.1.4, формуле (3.26) и (3.9).

Центр тяжести фигуры лежит на высоте  $3b$  от основания фигуры (см. рис. 3.26). Относительно горизонтальной оси  $z_c$ , проходящей через центр тяжести  $I_{z_c} = \frac{BH^3}{12} = 72b^4$ , так как  $B = 4b$ ,

$$H = 6b.$$

$$I_z = I_{z_c} + a^2 F = 72b^4 + b^2 \cdot 4b \cdot 6b = 96b^4.$$

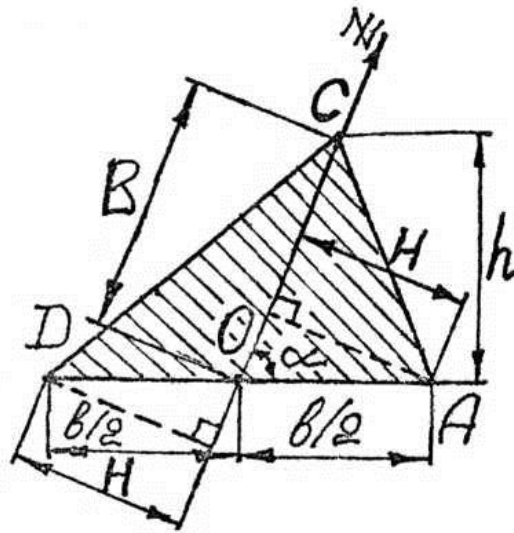


Рис. 3.50

3.7. Для решения задачи воспользуемся формулами (3.8) и (3.35):

$$I_p = I_z + I_y = 2I_z = \frac{\pi R^4}{2} - n \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 (\alpha \rho d\rho),$$
 где  $\alpha \rho d\rho = dF$  — элементарная площадка выреза (см. рис. 3.27).

Проведя интегрирование второго члена выражения для  $I_p$ , получим

$$I_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi R^4}{2} - n\alpha \frac{65}{1024} R^4 \right).$$

3.8. Моменты инерции квадрата с вырезом (см. рис. 3.28) относительно любой центральной оси  $I_{z_c} = I_{y_c} = \frac{a^4}{12} - \frac{(na)^4}{12} = I_y$ .

Для определения момента инерции относительно оси  $z$  воспользуемся формулой (3.9): 
$$I_z = \left[ \frac{a^4}{12} - \frac{(na)^4}{12} \right] + \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 [a^2 - (na)^2].$$

Учитывая, что  $I_z = 5I_y$ , найдем  $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

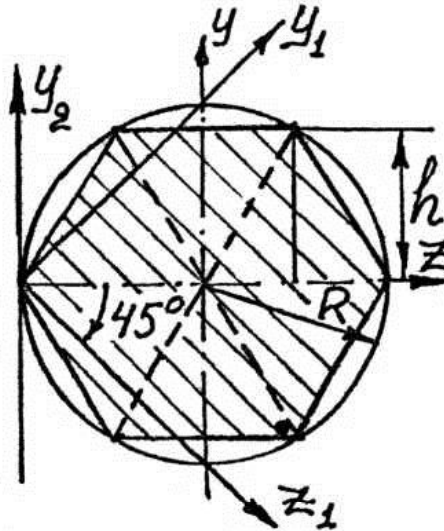
3.9. Из рис. 3.51 имеем, что  $h = R \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Используя формулы (3.29) и (3.30), получим, что

$$I_z = I_y = 4 \frac{Rh^3}{12} + 2 \frac{Rh^3}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4,$$

$$F = 6 \cdot \frac{1}{2} Rh = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 = 2,598R^2.$$

Эти же значения можно взять из [17]. Для определения  $I_{y_2}$  воспользуемся формулой (3.9):  $I_{y_2} = I_y + R^2 F = 3,1393R^4$ .

Рис. 3.51



Так как оси  $z, y_2$  – главные, то  $I_{zy_2} = 0$ , тогда по формуле (3.15) найдем

$$I_{z_1 y_1} = \frac{I_z - I_{y_2}}{2} \sin 2\alpha = \frac{-2,598R^4}{2} (-1) = 1,3R^4,$$

так как  $\alpha = -45^\circ$ ,  $\sin 2\alpha = -1$ .

**3.10. Вариант 1.** Достроив фигуру (рис. 3.52) до параллелограмма, найдем по формуле (3.26)  $I_z = \frac{1}{2} \frac{BH^3}{12} = \frac{1}{2} \frac{6b(4b)^3}{12} = 16b^4$ .

**Вариант 2.** Центральная ось  $z_c$  расположена на расстоянии  $\frac{1}{3}H = \frac{4}{3}b$  от оси  $z_1$ , тогда расстояние от оси  $z_c$  до  $z$

$$a = 2b - \frac{4}{3}b = \frac{2}{3}b.$$

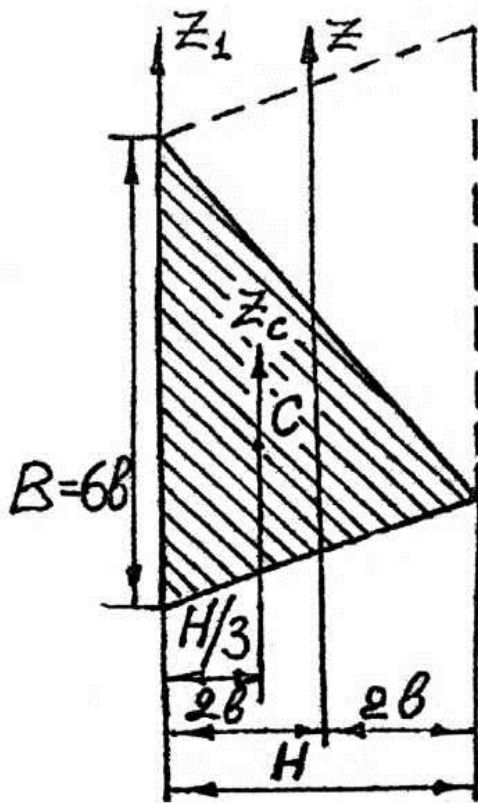


Рис. 3.52

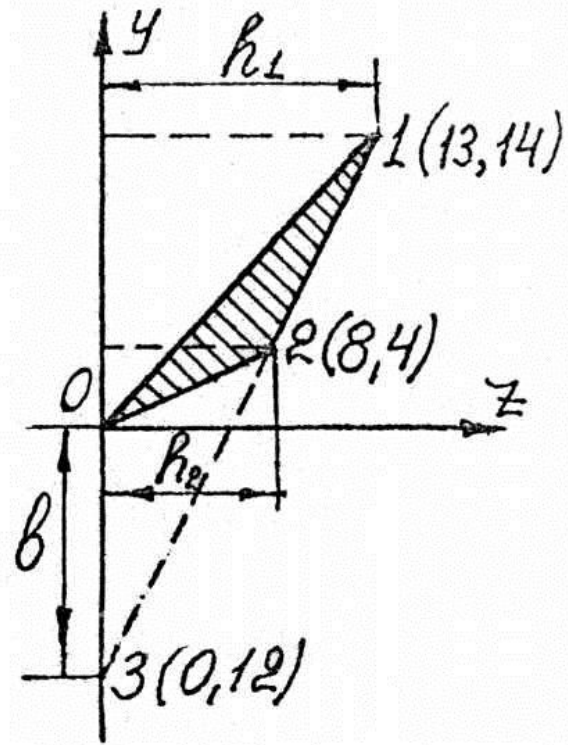


Рис. 3.53

Воспользовавшись формулами (3.28) и (3.9), найдем

$$I_z = \frac{BH^3}{36} + a^2 F = \frac{6b(4b)^3}{36} + \left(\frac{2}{3}b\right)^2 \frac{1}{2} 6b \cdot 4b = 16b^4.$$

В варианте 2 решение более сложное, чем в варианте 1.

3.11. Продлив прямую 1 – 2 (рис. 3.53) до пересечения с осью  $y$ , получим точку 3, координаты которой найдем из уравнения прямой

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Из последнего уравнения  $z_3 = 0$ ,  $y_3 = -12$  см, т.е.

$$b = 12 \text{ см}, h_1 = 13 \text{ см}, h_2 = 8 \text{ см}.$$

Момент инерции относительно оси  $y$  треугольника  $012$  найдем как разность моментов инерции для двух треугольников:

$$I_z = \frac{bh_1^3}{12} - \frac{bh_2^3}{12}.$$

3.12. Разбив всю фигуру на две части (см. пунктир на рис. 3.54 фигуры), замечаем, что она состоит из двух одинаковых уголков,

повернутых по отношению друг к другу на  $90^\circ$ . Все построения по определению центра тяжести всей фигуры и положение главных центральных осей приведены на рис. 3.54. Положение 3.1.13 позволяет установить, что  $u = u(\max)$ ,  $v = v(\min)$ .

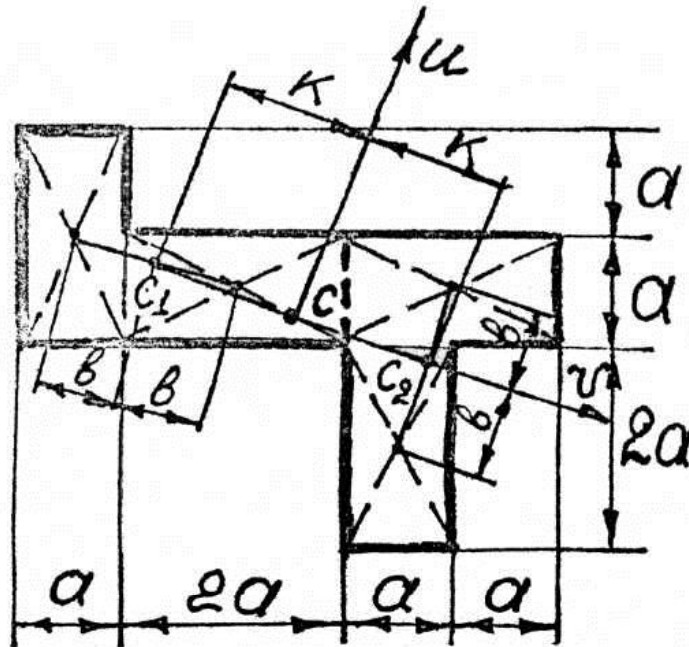


Рис. 3.54

**3.13.** Из таблиц ГОСТа для уголка № 3 ( $30 \times 30 \times 3$ ), изображенного на рис. 3.55, а, имеем  $F = 1,74 \text{ см}^2$ ,  $y_c = z_c = 0,85 \text{ см}$ ,  $I_z = I_y = 1,45 \text{ см}^4$ ,  $I_{z_0} = 2,3 \text{ см}^4$ ,  $I_{y_0} = 0,6 \text{ см}^4$ . Тогда

$$I_{z_1} = I_{y_1} = I_z + y_c^2 F = 1,45 + (0,85)^2 \cdot 1,74 = 2,707 \text{ см}^4,$$

$$S = \frac{y_c}{\sin 45^\circ} = 1,2 \text{ см}.$$

Для сечения (рис. 3.55, б) главными центральными осями инерции (см. положения 3.1.3 и 3.1.13) будут оси  $u$  и  $v$ , для которых

$$I_v = 2I_{z_0} = 4,6 \text{ см}^4 = I_{\min},$$

а воспользовавшись формулой (3.9), получим

$$I_u = 2(I_{y_0} + S^2 F) = 2(0,6 + 1,2^2 \cdot 1,74) = 6,2 \text{ см}^4 = I_{\max}.$$



Для сечения (рис. 3.55, в) главными центральными осями будут любые оси, проходящие через точку  $C$  (см. положение 3.1.18):

$$I_i = I_u = I_v = 4I_{z_1} = 2I_{z_0} + 2(I_{y_0} + S^2F) = 10,82 \text{ см}^4.$$

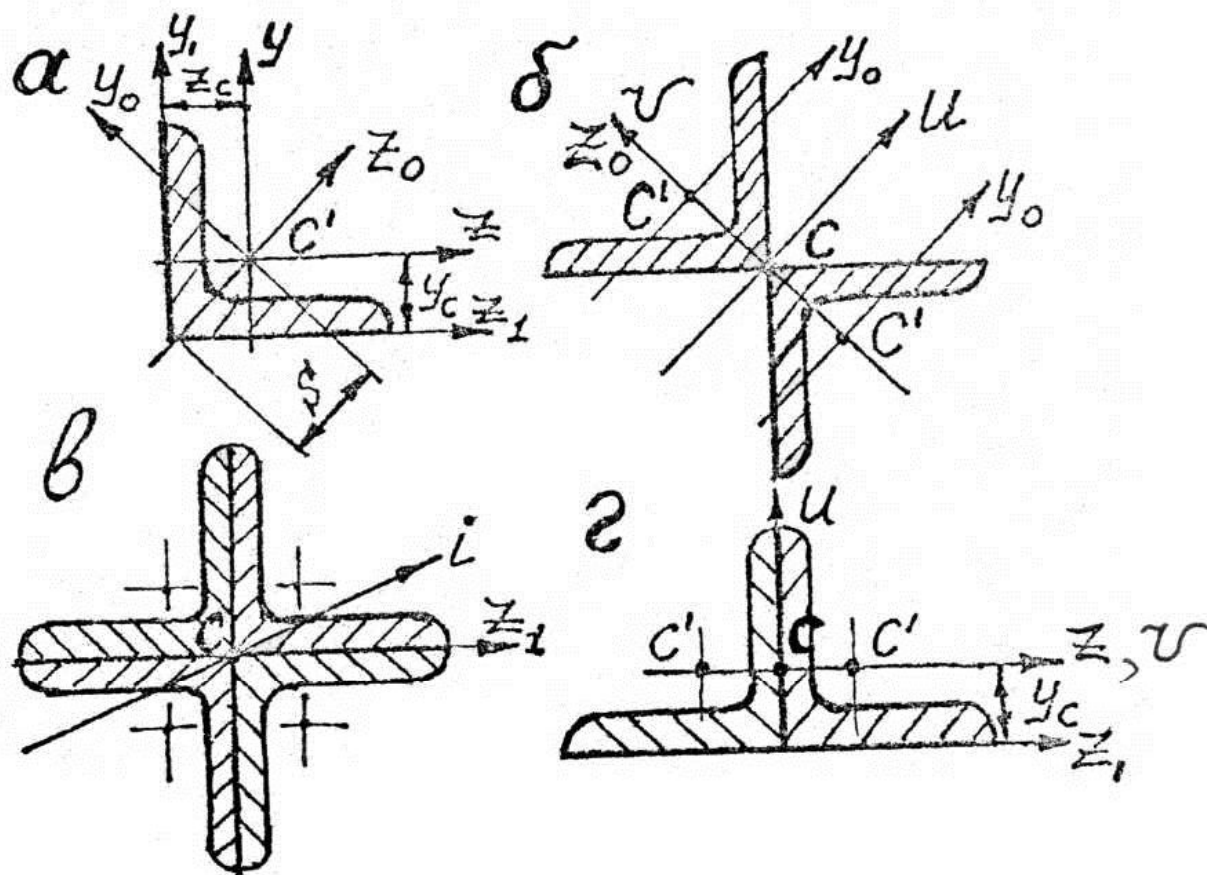


Рис. 3.55

Для сечения (рис. 3.55, г) центр тяжести находится в точке  $C$  (см. положение 3.1.3), а главными центральными являются оси  $u, v$ , для которых

$$I_u = 2I_{y_1} = 5,14 \text{ см}^4 = I_{\max},$$

$$I_v = 2I_z = 2,9 \text{ см}^4 = I_{\min}.$$

**3.14.** Дополнив сечение обратно зеркальной фигурой (рис. 3.56), убеждаемся, что заданное сечение является полуфигурой сечения в виде квадрата с квадратным вырезом, и согласно положениям 3.1.16, 3.1.18, а также формуле (3.23) получим

$$I_z = \frac{1}{2} \left[ \frac{(4a)^4}{12} - \frac{(2a)^4}{12} \right] = 10a^4.$$

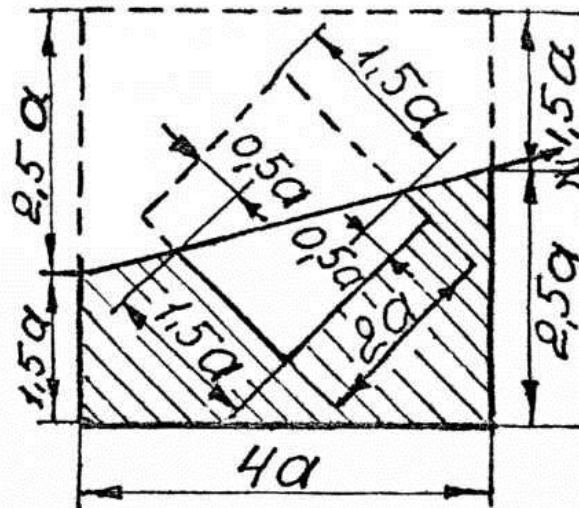


Рис. 3.56

3.15. Сечение, представленное на рис. 3.35, является полуфигурой правильного шестиугольника. Согласно положениям 3.1.6, 3.1.18 и значения момента инерции для шестиугольника (см. решение задачи 3.9) будем иметь, что относительно оси  $z_1$  момент инерции

$$I_{z_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4.$$

3.16. Так как любая центральная ось квадрата является главной центральной осью (см. положение 3.1.18), и любая ось полукруга, проходящая через точку  $O$ , является главной осью (см. положение 3.1.19), то для всей фигуры (см. рис.3.36) момент инерции

$$I_{y_1} = \frac{(6a)^4}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r^4}{4} = \frac{(6a)^4}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi(2a)^4}{4} = 101,72a^4.$$

Таким образом, момент инерции относительно оси  $y_1$  не зависит от значения угла  $\alpha$ .

3.17. Согласно положению 3.1.18 для равностороннего треугольника собственные центральные моменты инерции не зависят

от угла  $\alpha$  и равны  $I_i = bh^3 / 36 = \sqrt{3}a^4 / 288$ , так как  $b = a$ ,  $h = a\sqrt{3} / 2$ . Полярный момент инерции  $I'_p = 2I_i = \sqrt{3}a^4 / 144$ .

Воспользовавшись формулами (3.35) и (3.10), найдем полярный момент фигуры (см. рис. 3.37) относительно ее центра тяжести  $C$ :

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} - 4(I'_p + r^2 I''_p) = \frac{\pi(4a)^4}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}a^4}{144} + (2a)^2 \frac{1}{2} a \frac{a\sqrt{3}}{2}\right),$$

где  $I''_p$  – площадь равностороннего треугольника со стороной  $a$ .

Тогда осевой момент инерции фигуры

$$I_z = I_y = I_p / 2.$$

**3.18.** Согласно положению 3.1.18 для каждого квадрата, независимо от его поворота относительно главных центральных осей, осевой момент инерции  $I_{z_c} = \frac{a_i^4}{12}$ .

Момент инерции наружного самого большого квадрата с квадратным вырезом (см. рис. 3.38)

$$I'_z = \frac{a^4}{12} - \frac{(a')^4}{12} = \frac{a^4}{16},$$

где  $a'$  – сторона квадратного выреза, равная  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Размер стороны каждого последующего квадрата с квадратным вырезом в два раза меньше предыдущего, а осевой момент инерции, следовательно, в 16 раз меньше предыдущего. Суммируя моменты инерции всех квадратов с вырезами, получим для всего сечения

$$I_z = \frac{a^4}{16} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{16^3} + \dots\right) = \frac{a^4}{15}.$$

**3.19.** Проведем через точку  $A$  оси  $z$ ,  $y$  (рис. 3.57). Согласно положению 3.1.19, если  $I_z = I_y$ , то все оси, проходящие через точку  $A$ , будут главными. Представим фигуру, как состоящую из трех

частей: одинаковых прямоугольных треугольников 1 и 3, с катетами  $a$  и  $h$ , и прямоугольника 2 шириной  $a$  и высотой  $h$ .

Найдем моменты инерции относительно осей  $z$  и  $y$  для всей фигуры, воспользовавшись формулами (3.27) – (3.29), (3.9):

$$I_z = \frac{ah^3}{3} + 2 \frac{ah^3}{12} = \frac{ah^3}{2},$$

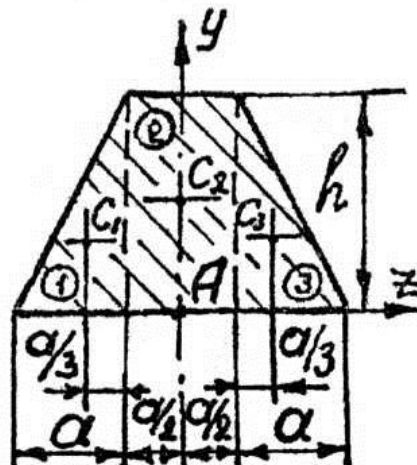
$$I_y = \frac{ha^3}{12} + 2 \left[ \frac{ha^3}{36} + \left( \frac{a}{2} + \frac{a}{3} \right)^2 \frac{ah}{2} \right] = \frac{5}{6} ha^3.$$

Из равенства этих моментов найдем  $h = a \sqrt{\frac{5}{3}}$ .

Проверим полученный результат, подставив вместо  $h$  его значение:

$$I_z = \frac{ah^3}{2} = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{5}{3}} a^4; \quad I_y = \frac{5}{6} ha^3 = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{5}{3}} a^4.$$

Рис. 3.57



**3.20. Вариант 1.** Проведем через точку  $O$  оси  $z_1, y_1$ . Эти оси будут главными, так как  $y_1$  – ось симметрии (рис. 3.58).

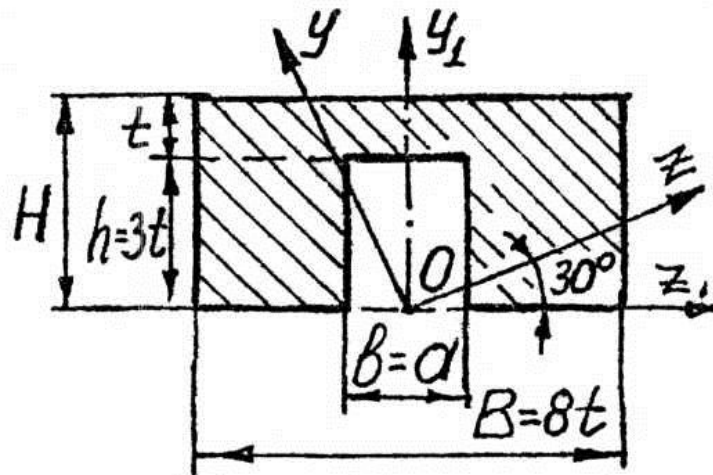


Рис. 3.58

Согласно положению 3.1.19, если  $I_{z_1} = I_{y_1}$  (\*), то все оси (в том числе и оси  $z, y$ ), проходящие через точку  $O$ , будут главными.

Найдем моменты инерции относительно осей  $z_1$  и  $y_1$  по формулам (3.26) и (3.27):

$$I_{y_1} = \frac{HB^3}{12} - \frac{hb^3}{12} = \frac{4t(8t)^3}{12} - \frac{3t \cdot a^3}{12},$$

$$I_{z_1} = \frac{BH^3}{3} - \frac{bh^3}{3} = \frac{8t(4t)^3}{3} - \frac{a(3t)^3}{3}.$$

Из равенства (\*) найдем  $a$ :

$$a = t \sqrt{\frac{108}{3}} = 6t.$$

*Вариант 2.* По формуле (3.15), с учетом того, что оси  $z, y$  должны быть главными,

$$I_{zy} = \frac{I_{z_1} - I_{y_1}}{2} \sin 2\alpha - I_{z_1 y_1} \cos 2\alpha = 0, \quad I_{z_1 y_1} = 0.$$

Так как  $\frac{\sin 2\alpha}{2} \neq 0$ , то, следовательно,  $I_{z_1} - I_{y_1} = 0$ , т.е. приходим к исходному положению (\*) решения варианта 1.

3.21. Оси  $z, y$ , как оси симметрии (рис. 3.59, а), являются главными центральными осями инерции, при этом согласно положению 3.1.13  $z$  – ось  $u(\max)$ , а  $y$  – это  $v(\min)$ . По мере увеличения угла  $\alpha$  величина  $I_v$  будет приближаться к значению  $I_u$ . Равенство  $I_v = I_u$ , т.е.  $I_y = I_z$  (\*), наступит при  $\alpha = 90^\circ$  (рис. 3.59, б).

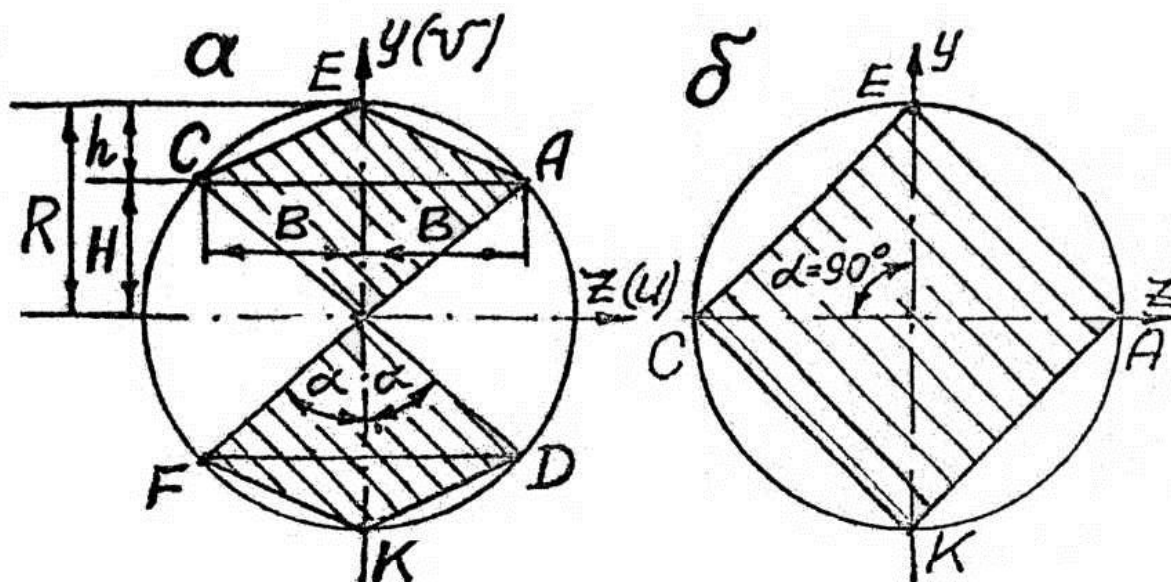


Рис. 3.59

К такому же выводу можно прийти, записав выражение для  $I_y$  и  $I_z$  для фигуры (см. рис. 3.59, а). Воспользуемся формулами (3.28), (3.9), (3.30), (3.29), с учетом, что  $B = R \sin \alpha$ ,  $H = R \cos \alpha$ ,  $h = R(1 - \cos \alpha)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 I_z &= 2 \left[ \frac{2Bh^3}{36} + \left( \frac{h}{3} + H \right)^2 \frac{1}{2} \cdot 2Bh + \frac{2BH^3}{4} \right] = \\
 &= \frac{R^4}{3} \sin \alpha (1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha); \\
 I_y &= 4 \frac{RB^3}{12} = \frac{R^4}{3} \sin^3 \alpha.
 \end{aligned}$$

Приравняв эти значения, согласно (\*) получим

$$\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha) = 0 ,$$

откуда  $\alpha_1 = 90^\circ$  или  $\alpha_2 = 120^\circ$ , что для задачи не имеет смысла.

**3.22.** Пусть искомой точкой на оси  $y$  будет точка  $A$  (рис. 3.60). Тогда согласно положению 3.1.20 моменты инерции  $I_{z_1} = I_y$ , или, воспользовавшись формулами (3.29), (3.9), запишем, что

$$I_{z_1} = 2 \frac{B \left( \frac{H}{2} \right)^3}{12} + a^2 \cdot \frac{1}{2} BH = \frac{9}{8} b^4 + a^2 \cdot 3b^2 = I_y = \frac{HB^3}{12} = 2b^4 ,$$

откуда  $a = b \sqrt{\frac{7}{24}}$ .

Положение главных осей инерции показано на рис. 3.60.

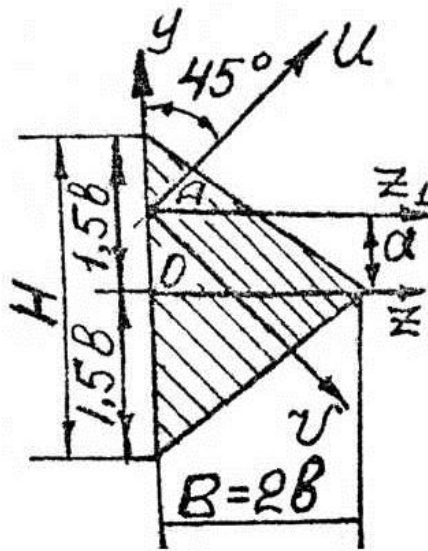


Рис. 3.60

**3.23.** Для фигуры (см. рис. 3.43) имеем, что  $b = 2c \sin \alpha$ ,  $h = 2c \cos \alpha$ ,  $b/h = \operatorname{tg} \alpha$ . Момент инерции относительно оси  $z$  равен

$$I_z = 2 \frac{BH^3}{12} = \frac{c^4 \sin \alpha \cos^3 \alpha}{3}, \text{ где } B = b, H = h/2. \text{ Исследуем } I_z \text{ на}$$

экстремум:  $\frac{dI_z}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{3}$ , то тогда  $\frac{h}{b} = \sqrt{3}$ .

Момент сопротивления относительно оси  $z$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{h/2} = \frac{I_z}{c \cos \alpha} = \frac{c^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{3}.$$

Иследуем  $W_z$  на экстремум:  $\frac{dW_z}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}$ , тогда

$$\frac{h}{b} = \sqrt{2}.$$

3.24. Из рис. 3.61, а имеем, что

$$b^2 + h^2 = D^2 = 4R^2 \Rightarrow h^2 = 4R^2 - b^2.$$

Отнесем сечение к координатным осям  $z, y$ . Брусек прямоугольного сечения будет обладать наибольшей прочностью при изгибе, если момент сопротивления относительно оси  $z$  достигнет максимальной величины.

$$W_z = I_z / y_{\max} = \frac{bh^3}{12h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b}{6}(4R^2 - b^2).$$

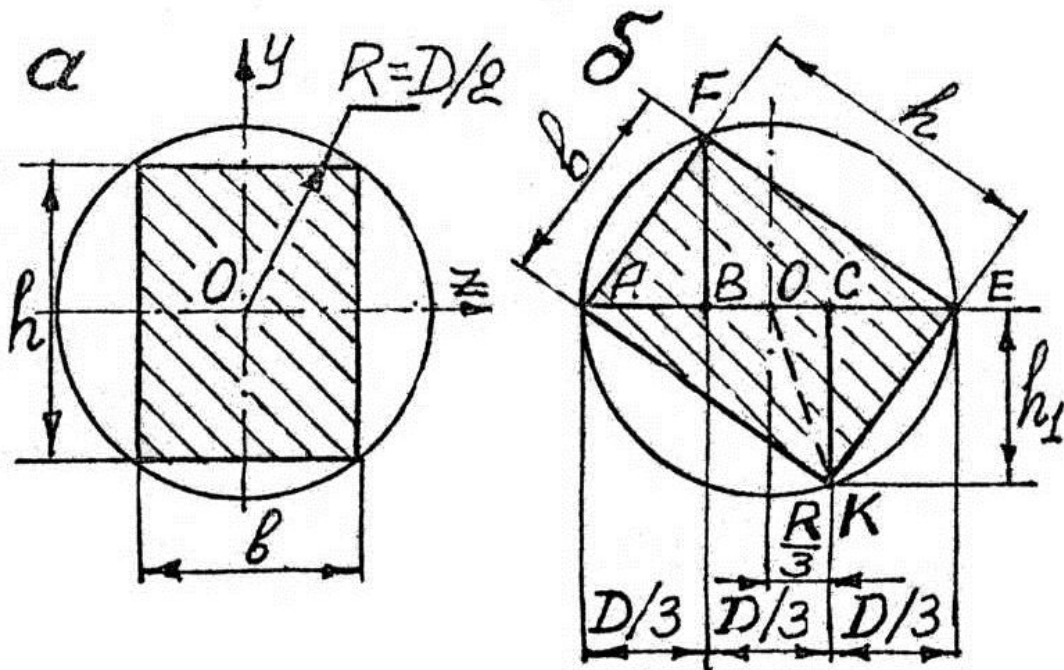


Рис. 3.61



Из условия экстремума  $\frac{dW_z}{db} = \frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{2}b^2 = 0$ , получим, что  $b = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{D}{\sqrt{3}}$ . Тогда  $h = b\sqrt{2} = \frac{D\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

Рассмотренную задачу называют задачей Парана (французский ученый, 1666 – 1716). Паран дал ответ в форме, удобной для мастера, работающего топором. Он предложил разделить диаметр на три равные части (рис. 3.61, б), из точек  $B$  и  $C$  восстановить перпендикуляры  $BF$  и  $CK$ . Прямоугольник  $AFEK$  и будет искомым сечением, так как  $b = \sqrt{h_1^2 + (2R/3)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}R^2 + \frac{4}{9}R^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ .

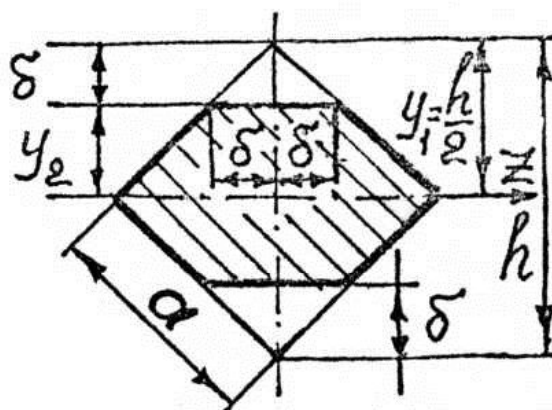


Рис. 3.62

**3.25.** Для квадратного сечения (рис. 3.62) без удаления площади высотой  $\delta$

$$I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}, \quad W_z = \frac{I_z}{y_1} = \frac{h^3}{24}.$$

После удаления площадок высотой  $\delta$

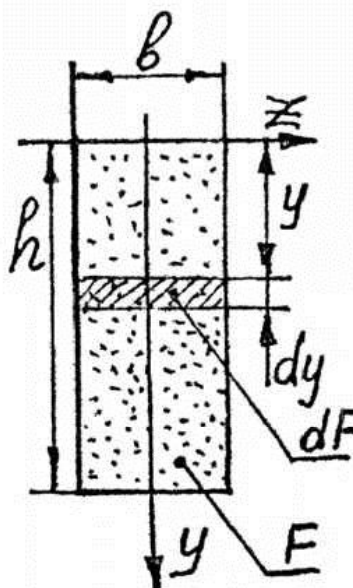
$$I_z^* = \frac{h^4}{48} - 2 \left[ \frac{2\delta \cdot \delta^3}{36} + \left( \frac{h}{2} - \frac{2}{3}\delta \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\delta \cdot \delta \right],$$

$$W_z^* = I_z^* / y_2 = \frac{1}{24} (24\delta^3 - 20h\delta^2 + 2h^2\delta + 2h^3),$$

где  $y_2 = \frac{h}{2} - \delta$ .

Из условия экстремума  $\frac{dW_z^*}{d\delta} = 0$  получим уравнение  $72\delta^2 - 40h\delta + 2h^2 = 0$ , корни которого будут  $\delta_1 = \frac{1}{18}h$  и  $\delta_2 = \frac{h}{2}$  ( $\delta_2$  не имеет смысла). Подставляя  $\delta_1$  в выражение для  $W_z^*$ , получим  $W_z^* = \frac{h^3}{24} \cdot \frac{19}{18} = 1,05 W_z$ , т.е. прочность балки увеличится на 5 %.

Рис. 3.63



**3.26.** Площадь пор в элементарной площадке  $dF = b dy$ , отстоящей на расстоянии  $y$  от оси  $z$  (рис. 3.63),

$$dF_{\text{пор}} = \rho(y) \cdot b dy = \frac{\rho_0}{h} b y dy.$$

Так как поры в целом на 25 % ослабляют сечение, то, следовательно,  $F_{\text{пор}} = \int_F dF_{\text{пор}} = \int_0^h \frac{\rho_0 b}{h} y dy = 0,25 bh$ , откуда  $\rho_0 = 0,5$ .

Найдем положение центра тяжести сечения по формулам (3.6), (3.7):

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\int y(dF - dF_{\text{пор}})}{0,75bh} = \frac{\int_0^h y \left( b - \frac{\rho_0 b}{h} y \right) dy}{0,75bh} = \frac{4}{9} h.$$

По формуле (3.3) момент инерции относительно оси  $z$

$$I_z = \int_F y^2 (dl' - dl'_{\text{пор}}) = \int_0^h y^2 \left( 1 - \frac{\rho_0}{h} y \right) b dy = \frac{5}{24} bh^3 .$$

Тогда по формуле (3.12) найдем момент инерции относительно центральной оси, параллельной оси  $z$ ,

$$I_{z_c} = \frac{5}{24} bh^3 - \left( \frac{4}{9} h \right)^2 0,75bh = \frac{13}{216} bh^3 .$$

## Тема 4

### ПЛОСКИЙ ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

Плоским называется изгиб внешними нагрузками (сосредоточенные силы, распределенные нагрузки, пары сил), лежащими в одной плоскости, проходящей через главную центральную ось поперечного сечения, являющуюся осью симметрии, и осью бруса. Брус (стержень), испытывающий изгиб, принято называть балкой.

#### 4.1. Построение эпюр внутренних силовых факторов

##### 4.1.1. Предварительные замечания

Простейшими балками являются консольная (рис. 4.1) и простая однопролетная (рис. 4.2). Из этих двух балок можно составить самые разнообразные балки. Так, например, на рис. 4.3 изображена двухпролетная балка с правой консолью.

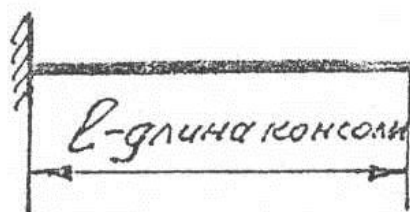


Рис. 4.1

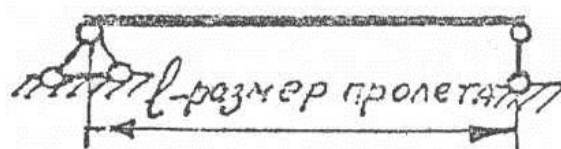


Рис. 4.2

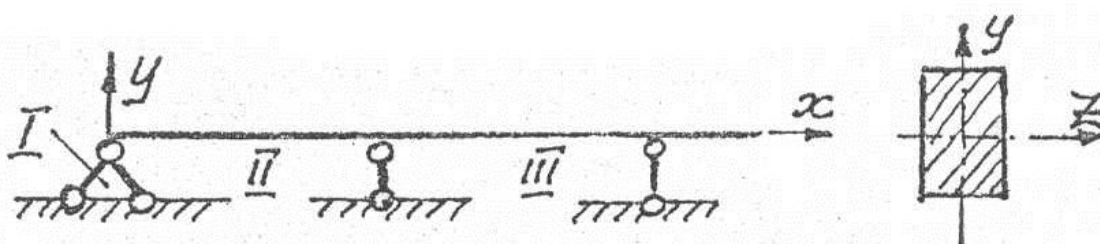


Рис. 4.3

Опоры у балок бывают трех видов.

**1. Шарнирно-подвижная опора.** Ее схематическое изображение, наиболее корректное для осуществления кинематического анализа, представлено на рис. 4.4, *a*. На рис. 4.4, *б* показаны и другие обозначения опоры, встречающиеся в литературе, которые нами использоваться не будут. В такой опоре возникает только одна опорная реакция, перпендикулярная опорной поверхности.

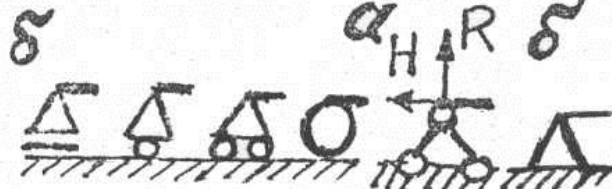
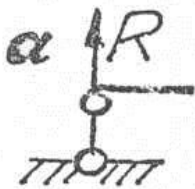


Рис. 4.4

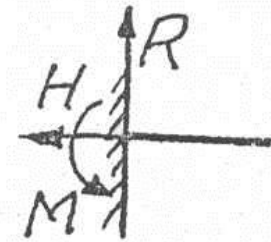


Рис. 4.5

Рис. 4.6

**2. Шарнирно-неподвижная опора** (рис. 4.5, *a*). На рис. 4.5, *б* представлено другое, встречающееся обозначение, которое в настоящем пособии использоваться не будет.

В такой опоре возникают две опорные реакции  $R$  и  $H$ , препятствующие вертикальному и горизонтальному смещению прилегающего к опоре сечения балки. Опора позволяет поворот прилегающего сечения балки.  $R$  и  $H$  являются, по сути, вертикальной и горизонтальной компонентами реакции опоры, направленной под некоторым углом.

**3. Жесткая заделка (защемление)** (рис. 4.6). В такой опоре возникают вертикальная  $R$ , горизонтальная  $H$  опорные реакции и опорный момент  $M$ . Такая опора лишает прилегающее сечение балки всех трех степеней свободы в плоскости.

Принятое в настоящем пособии изображение опорных устройств позволяет устанавливать степень статической неопределенности балки по формуле (1.13):  $S = 3K - Ш$ . Так, для балки рис. 4.3 число замкнутых контуров  $K = 3$  (I, II, III), число шарниров  $Ш = 8$ , тогда  $S = 1$ , т.е. балка один раз статически неопределимая.

В поперечном сечении балки, испытывающей изгиб, возникают в случае поперечного изгиба два внутренних силовых фактора:  $Q_y$  – поперечная (или перерезывающая) сила и  $M_z$  – изгибающий

момент. В случае чистого изгиба  $Q_y = 0$ ,  $M_z \neq 0$ . (Принятое расположение осей представлено на рис. 4.3).

**Правило знаков для  $Q_y$  и  $M_z$ .** Поперечная сила  $Q_y$  положительна, если она стремится повернуть часть балки, к которой приложена по часовой стрелке, и, наоборот, отрицательна – если стремится повернуть против часовой стрелки.

Рис. 4.7 иллюстрирует это правило.

Изгибающий момент положителен, если он стремится так изогнуть балку, чтобы верхние волокна испытывали сжатие, а нижние – растяжение (рис. 4.8, а), отрицательный изгибающий момент вызывает сжатие нижних волокон и растяжение верхних (рис. 4.8, б).

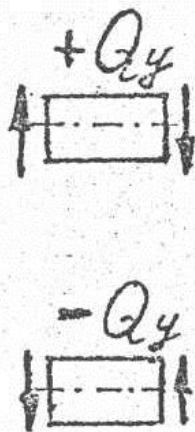


Рис. 4.7

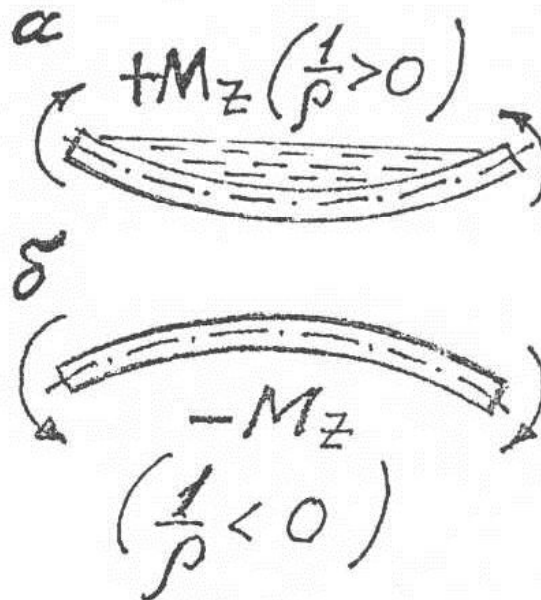


Рис. 4.8

Это же правило можно сформулировать исходя из знака кривизны в принятой системе координат:

изгибающий момент положителен, если его действие приводит к возникновению положительной кривизны  $\frac{1}{\rho} > 0$  (см. рис. 4.8, а), и,

наоборот,  $M_z$  отрицателен, если  $\frac{1}{\rho} < 0$  (см. рис. 4.8, б).

Наиболее удобно определять знак изгибающего момента по мнемоническому «правилу воды»:

изгибающий момент положителен, если «налитая вода» (штриховая линия на рис. 4.8, а) удерживается (не стекает!) на поверхности балки, в противном случае (см. рис. 4.8, б) момент  $M_z$  отрицателен.

Определение величины  $Q_y$  и  $M_z$  в произвольном поперечном сечении рассмотрим на примере сечения  $k-k$  для однопролетной балки (рис. 4.9, а).

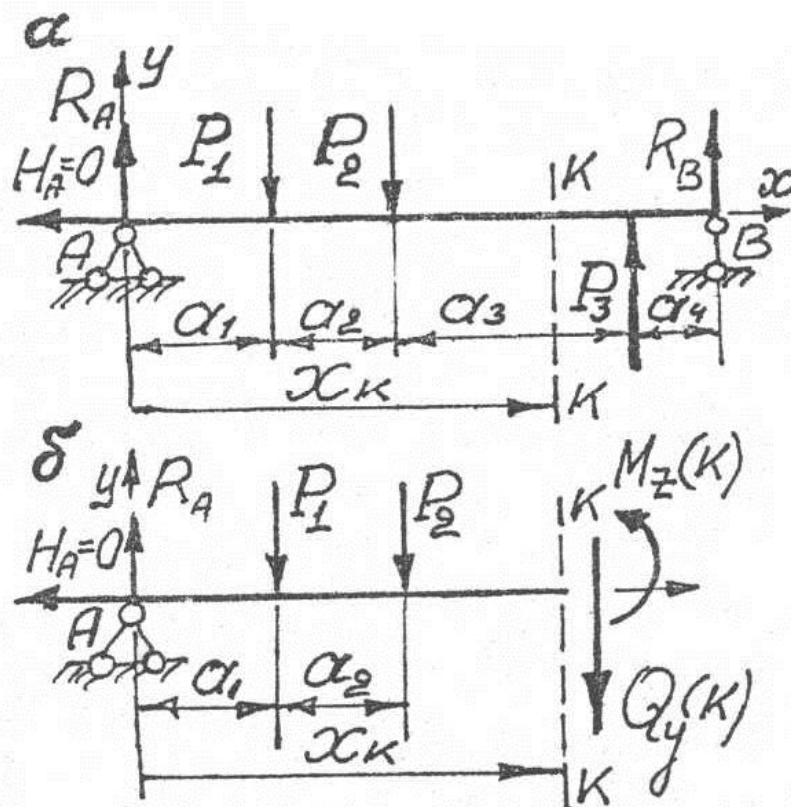


Рис. 4.9

Вспользуемся методом сечений, для чего мысленно разрежем балку по сечению  $k-k$  и отбросим, например, правую часть балки. В сечении  $k-k$  (рис. 4.9, б) приложим положительные, согласно принятому правилу знаков,  $Q_y$ ,  $M_z$  и составим уравнения равновесия:

$$\sum y = 0, R_A - P_1 - P_2 - Q_y(k) = 0 \Rightarrow Q_y(k) = R_A - P_1 - P_2, \quad (4.1)$$

$$\text{или } Q_y = \sum_1^n P_i ; \quad (4.1a)$$

$$\sum m_z = 0, \quad R_A \cdot x_k - P_1(x_k - a_1) - P_2[x_k - (a_1 + a_2)] - M_z(k) = 0,$$

где ось  $z$ , относительно которой берутся моменты, расположена в сечении  $k - k$ , а знак момента в уравнении равновесия  $\sum m_z$  принят положительным по часовой стрелке и отрицательным – против.

Из последнего уравнения равновесия имеем:

$$M_z(k) = R_A \cdot x_1 - P_1(x_k - a_1) - P_2[x_k - (a_1 + a_2)], \quad (4.2)$$

$$\text{или } M_z = \sum_1^n M_i. \quad (4.2a)$$

Анализ выражений (4.1) и (4.2) позволяет сократить графическую работу при решении задачи – отказаться от изображения отсеченных частей балки.

Из (4.1), (4.1a) следует, что:

*перерезывающая сила в любом поперечном сечении равна алгебраической сумме сил, перпендикулярных к оси балки (параллельно оси  $y$ ) и лежащих по одну сторону от сечения.*

Внешняя сила, стремящаяся повернуть часть балки по часовой стрелке по отношению к рассматриваемому сечению, дает в выражении  $Q_y$  положительное слагаемое, как, например, реакцию  $R_A$  в выражении (4.1); сила, стремящаяся повернуть часть балки против часовой стрелки, дает отрицательное слагаемое, как, например, сила  $P_1$  и  $P_2$  в выражении (4.1).

Из (4.2), (4.2a) следует, что:

*изгибающий момент в любом поперечном сечении равен алгебраической сумме моментов внешних сил, лежащих по одну сторону от сечения, относительно рассматриваемого сечения (относительно оси  $z$  рассматриваемого сечения).*

Внешние моменты, создающие положительную кривизну балки, дают в выражении  $M_z$  положительные слагаемые, как, например, момент  $R_A \cdot x$  в выражении (4.2), и, наоборот – отрицательные слагаемые, если создают отрицательную кривизну, как, например,  $P_1(x_k - a_1)$  и  $P_2[x_k - (a_1 + a_2)]$  в выражении (4.2).



Учитывая, что приведенные правила знаков для  $Q_y$  и  $M_z$  не связаны с направлением выбранных осей координат, совершенно безразлично какая часть балки рассматривается лежащая слева или справа от сечения, т.е. можно брать абсциссу  $x$  как от левого конца балки вправо (как на рис. 4.9, а), так и от правого конца балки влево. Важно, чтобы выражения для  $Q_y$  и  $M_z$  были составлены наиболее рационально, т.е. чтобы в них входило возможно меньшее число слагаемых. Так для сечений на участке  $a_4$  и  $a_3$  балки, изображенной на рис. 4.9, а, рационально абсциссы  $x$  взять от опоры  $B$  влево.

При построении эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  пользуются дифференциальными зависимостями между внешними усилиями и внутренними силовыми факторами. Дифференциальные зависимости, полученные из рассмотрения равновесия элемента балки длиной  $dx$  (рис. 4.10), на который действуют усилия с положительным знаком, имеют следующий вид:

$$q = \frac{dQ_y}{dx}, \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y + m, \quad \frac{d^2M_z}{dx^2} = q + \frac{dm}{dx}. \quad (4.3)$$

В большинстве задач интенсивность распределенной моментной нагрузки  $m = 0$ , тогда дифференциальные зависимости принимают вид:

$$q = \frac{dQ_y}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \quad Q_y = \frac{dM_z}{dx} = \operatorname{tg}\beta, \quad q = \frac{d^2M_z}{dx^2}. \quad (4.4)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением оси абсцисс и касательной к графику функции  $Q_y$ ;  $\beta$  – угол между направлением оси абсцисс и касательной к графику функции  $M_z$ .

Обращаем особое внимание, что в формулах (4.3) – (4.5)  $q > 0$  направлено снизу вверх, т.е. совпадает с положительным направлением оси  $y$  на рис. 4.3, 4.10. Положительный угол  $\alpha$  или  $\beta$  наклона касательной – это наименьший угол между направлением оси  $x$  и касательной, отложенный против часовой стрелки, и, наоборот, отрицательный – по часовой стрелке, при направлении оси  $x$  слева направо. Если ось  $x$  направлена справа налево, т.е. рассматривается правая часть балки от сечения, то в формулах (4.3) – (4.4) перед  $q$  и

$Q_y$  нужно проставить знак минус, так как угол наклона касательной меняет знак при изменении направления оси абсцисс.

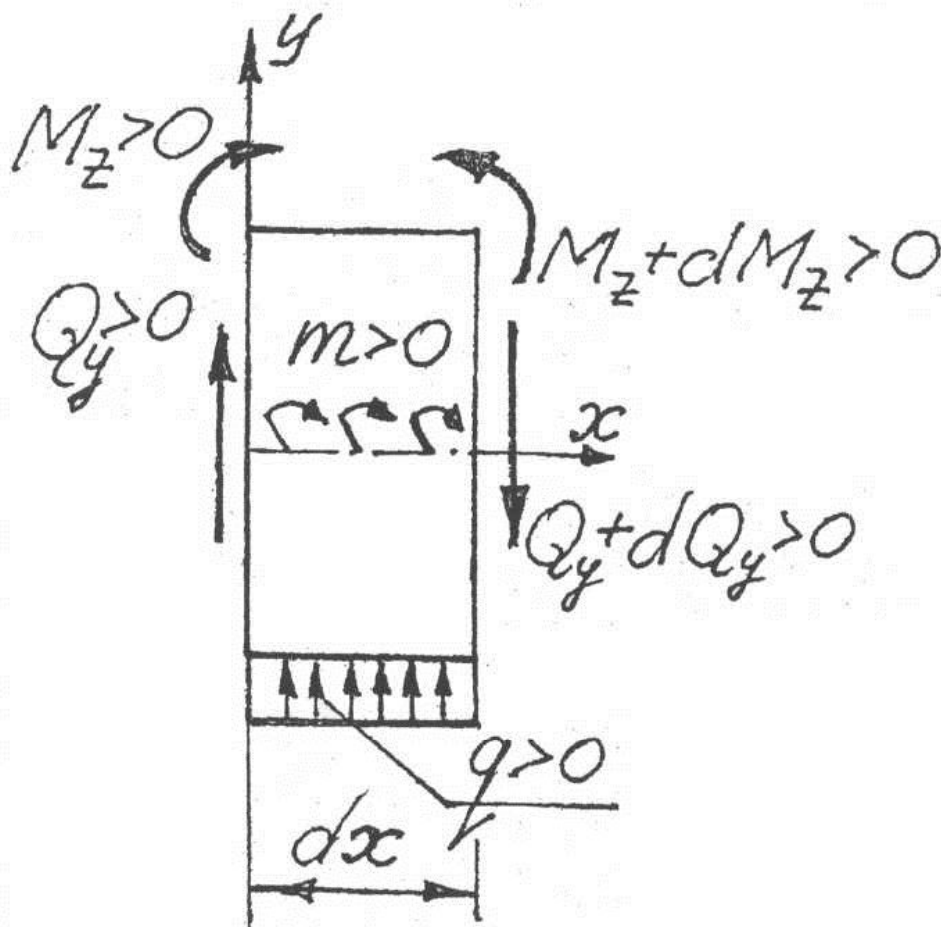


Рис. 4.10

Из выражения (4.4) имеем

$$\begin{cases} Q_y = \int_l q \, dx \pm P_i, \\ M_z = \int_l Q_y \, dx \pm M_i, \end{cases} \quad (4.5)$$

где постоянные  $P_i$  и  $M_i$  – это сосредоточенные силы и моменты, лежащие по одну (рассматриваемую) сторону от данного сечения, при этом знак перед ними проставляется согласно правилу знаков для  $Q_y$  и  $M_z$ . Формулами удобно пользоваться в особенности при построении эпюр от действия распределенной нагрузки  $q$ , изменяющейся по закону степенной или тригонометрической функции.

### 4.1.2. Порядок построения эпюр $Q_y$ , $M_z$

Рассмотрим порядок построения эпюр на ряде примеров для балок, нагруженных наиболее часто встречающимися внешними силами: сосредоточенными силами, сосредоточенными моментами, распределенными по длине нагрузками.

**Пример 1** (рис. 4.11)

**I операция. Изображение расчетной схемы.** Сюда входит изображение оси балки, опорных устройств, активных сил, реакций опор с указанием выбранного их направления, размеров силовых участков.

**II операция. Определение опорных реакций.** Приняв за начало координат точку  $A$ , изобразим координатные оси  $Y$  и  $X$ . Составим уравнения равновесия в виде  $\sum X = 0$ ,  $\sum m_K = 0$ ,  $\sum m_A = 0$ :

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0;$$

$$\sum m_K = 0, R_A \cdot 8a - 2qa \cdot 6a - 8qa \cdot 4a + P \cdot 3a - M = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = 5qa;$$

$$\sum m_A = 0, -R_K \cdot 8a - M - P \cdot 5a + 8qa \cdot 4a + 2qa \cdot 2a = 0,$$

откуда  $R_K = qa$ .

Отметим, что при составлении уравнений действие равномерно распределенной по длине нагрузки заменяется действием ее равнодействующей, приложенной в центре тяжести нагрузки. Так, для нагрузки интенсивностью  $q_2$  равнодействующая равна  $q_2 \cdot 2a = 8qa$  и приложена посередине отрезка  $CD$ .

При составлении уравнения вида  $\sum m_i = 0$  для моментов принимается правило знаков: по часовой стрелке – знак «+», против часовой стрелки – «-», или наоборот. И совершенно неуместно вспоминать о правиле знаков для изгибающих моментов, так как в этом случае имеем дело исключительно с уравнениями статики.

Для проверки правильности определения опорных реакций воспользуемся уравнениями, являющимися следствием вышеприведенных уравнений равновесия. Как известно из курса теоретической механики уравнение вида  $\sum Y = 0$  является следствием уравнений  $\sum m_A = 0$  и  $\sum m_K = 0$ , как сумма проекций на ось, перпендикулярную прямой, соединяющей точки  $A$  и  $K$ . Уравнение вида

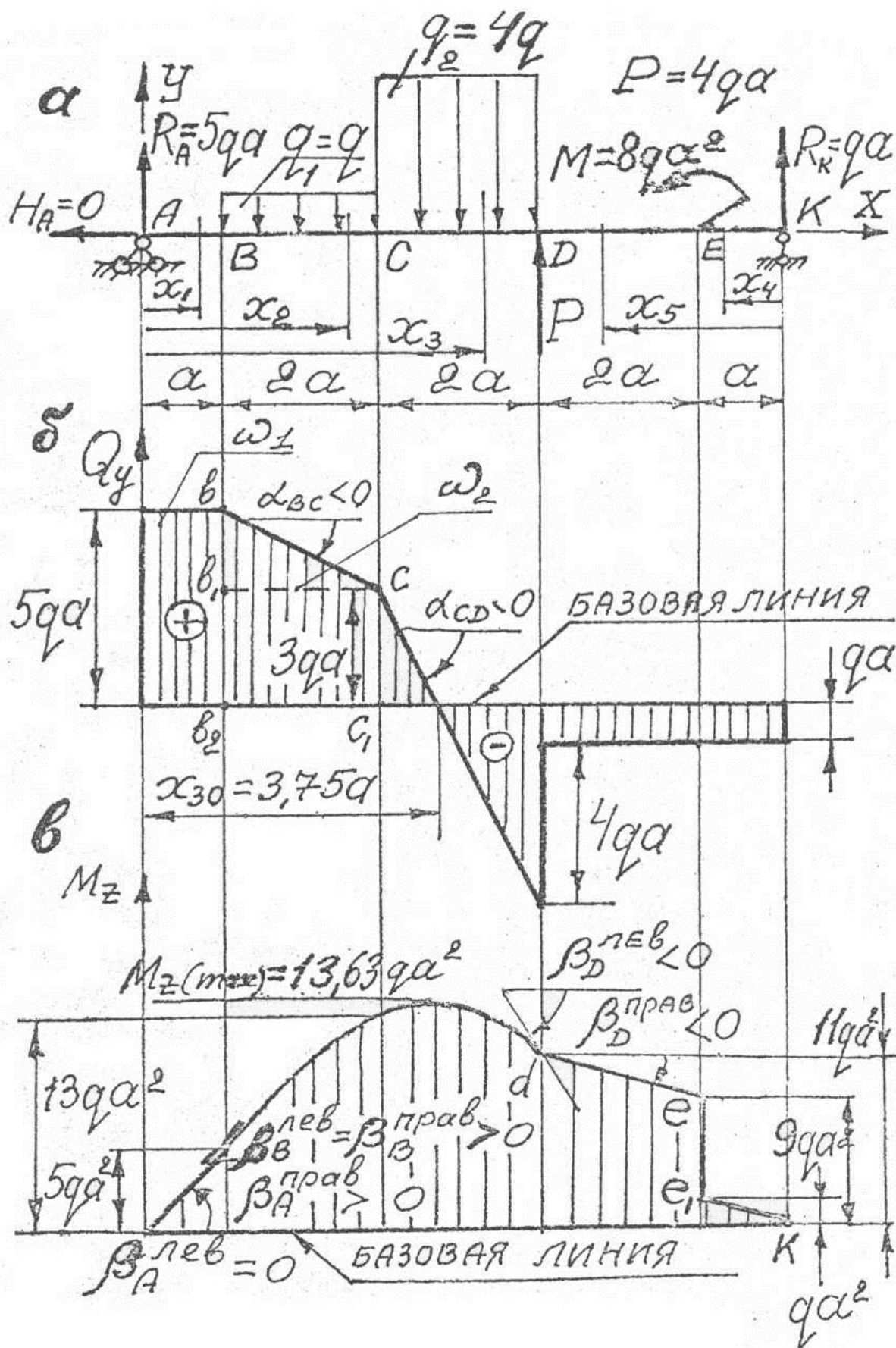


Рис. 4.11

$\sum m_C = 0$  (где  $C$  может быть любой точкой на линии  $AK$ ) является следствием тех же уравнений, как сумма моментов относительно точки, лежащей на прямой, соединяющей точки  $A$  и  $K$ , относительно которых составлены уравнения моментов.<sup>1</sup>

Зачастую для проверки используют уравнение  $\sum Y = 0$ , однако проводить проверку по уравнению  $\sum m_C = 0$  предпочтительнее, хотя и более сложное получается само уравнение, но последнее уравнение учитывает и сосредоточенные моменты, которые не входят в уравнение  $\sum Y = 0$ .

Покажем выполнение проверки при использовании как того, так и другого уравнения:

$$\sum Y = 0; R_A - 2qa - 8qa + P + R_K = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0, \text{ или}$$

$$\sum m_C = 0; R_A \cdot 3a - 2qa \cdot a + 8qa \cdot a - P \cdot 2a - M - R_B \cdot 5a = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

После проведения проверки выносим значения реакций на расчетную схему.

**III операция. Составление выражений для поперечной силы  $Q_y$  и построение эпюры  $Q_y$ .** Определимся с количеством силовых участков, помня, что силовым участком называется такой участок, на котором сохраняется закон изменения внутренних силовых факторов  $Q_y$  и  $M_z$ . Границы участков располагаются в сечениях приложения сосредоточенных сил, сосредоточенных моментов, начала или конца однородной распределенной нагрузки.

Балка  $AK$  (см. рис. 4.11) имеет следующие силовые участки:  $AB$  длиной  $a$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  длинами по  $2a$  и  $EK$  длиной  $a$ , т.е. имеем пять силовых участка.

Для составления выражений для поперечной силы, действующей на том или другом участке балки, следует выбрать точку нача-

<sup>1</sup> В системе трех уравнений равновесия вида  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum m_A = 0$  второе уравнение  $\sum Y = 0$  является независимым уравнением, как и в системе трех уравнений равновесия вида  $\sum m_A = 0$ ,  $\sum m_B = 0$ ,  $\sum m_C = 0$  (если точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не лежат на одной прямой) третье уравнение  $\sum m_C = 0$  также является независимым уравнением равновесия.

ла отсчета абсциссы  $x$  от левого или правого конца балки, при этом нужно стремиться так выбрать точку отсчета, чтобы в выражение  $Q_y$  входило по возможности меньшее количество членов. Текущие абсциссы  $x_i$  для каждого участка показаны на рис. 4.11, а, при этом абсциссы изменяются в пределах:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 &\leq a, \\ a \leq x_2 &\leq 3a, \\ 3a \leq x_3 &\leq 5a, \\ 0 \leq x_4 &\leq a, \\ a \leq x_5 &\leq 3a. \end{aligned}$$

Обратим внимание читателя, что, например, наименьшее значение  $x_2 = a$ , и не может (!) быть меньше, так как в этом случае он ( $x_2$ ) «заберется в чужой участок», участок «окормляемый» абсциссой  $x_1$ . Итак, с учетом правила знаков для  $Q_y$  имеем:

$$Q_{y_1} = R_A = 5qa, \text{ т.е. постоянная на всем участке } AB;$$

$$Q_{y_2} = R_A - q(x_2 - a) \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_2 = a \quad Q_{y_2} = R_A = 5qa,$$

$$\text{при } x_2 = 3a \quad Q_{y_2} = R_A - q \cdot 2a = 3qa;$$

$$Q_{y_3} = R_A - q \cdot 2a - 4q(x_3 - 3a) \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_3 = 3a \quad Q_{y_3} = R_A - 2qa = 3qa,$$

$$\text{при } x_3 = 5a \quad Q_{y_3} = R_A - 2qa - 4q \cdot 2a = -5qa.$$

Найдем абсциссу сечения, в котором  $Q_y = 0$ , для чего приравняем  $Q_{y_3} = 0$ , откуда  $x_{30} = 3,75a$ .

$$Q_{y_4} = Q_{y_5} = -R_K = -qa = \text{const}.$$

По полученным данным построим эпюру  $Q_y$ . Напомним, что эпюра  $Q_y$  представляет собой графическое изображение закона изменения перерезывающей силы по длине балки.

ла отсчета абсциссы  $x$  от левого или правого конца балки, при этом нужно стремиться так выбрать точку отсчета, чтобы в выражение  $Q_y$  входило по возможности меньшее количество членов. Текущие абсциссы  $x_i$  для каждого участка показаны на рис. 4.11, а, при этом абсциссы изменяются в пределах:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq a, \\ a &\leq x_2 \leq 3a, \\ 3a &\leq x_3 \leq 5a, \\ 0 &\leq x_4 \leq a, \\ a &\leq x_5 \leq 3a. \end{aligned}$$

Обратим внимание читателя, что, например, наименьшее значение  $x_2 = a$ , и не может (!) быть меньше, так как в этом случае он ( $x_2$ ) «заберется в чужой участок», участок «окормляемый» абсциссой  $x_1$ . Итак, с учетом правила знаков для  $Q_y$  имеем:

$$Q_{y_1} = R_A = 5qa, \text{ т.е. постоянная на всем участке } AB;$$

$$Q_{y_2} = R_A - q(x_2 - a) \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_2 = a \quad Q_{y_2} = R_A = 5qa,$$

$$\text{при } x_2 = 3a \quad Q_{y_2} = R_A - q \cdot 2a = 3qa;$$

$$Q_{y_3} = R_A - q \cdot 2a - 4q(x_3 - 3a) \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_3 = 3a \quad Q_{y_3} = R_A - 2qa = 3qa,$$

$$\text{при } x_3 = 5a \quad Q_{y_3} = R_A - 2qa - 4q \cdot 2a = -5qa.$$

Найдем абсциссу сечения, в котором  $Q_y = 0$ , для чего приравняем  $Q_{y_3} = 0$ , откуда  $x_{30} = 3,75a$ .

$$Q_{y_4} = Q_{y_5} = -R_K = -qa = \text{const}.$$

По полученным данным построим эпюру  $Q_y$ . Напомним, что эпюра  $Q_y$  представляет собой графическое изображение закона изменения перерезывающей силы по длине балки.

при  $x_1 = 0$   $M_{z_1} = 0$ , при  $x_1 = a$   $M_z = 5qa^2$ ;

$$M_{z_2} = R_A \cdot x_2 - q_1(x_2 - a) \cdot \frac{(x_2 - a)}{2} = 5qa \cdot x_2 - \frac{q(x_2 - a)^2}{2}$$

(квадратная парабола!);

при  $x_2 = a$   $M_{z_2} = 5qa^2$ , при  $x_2 = 3a$   $M_{z_2} = 13qa^2$ .

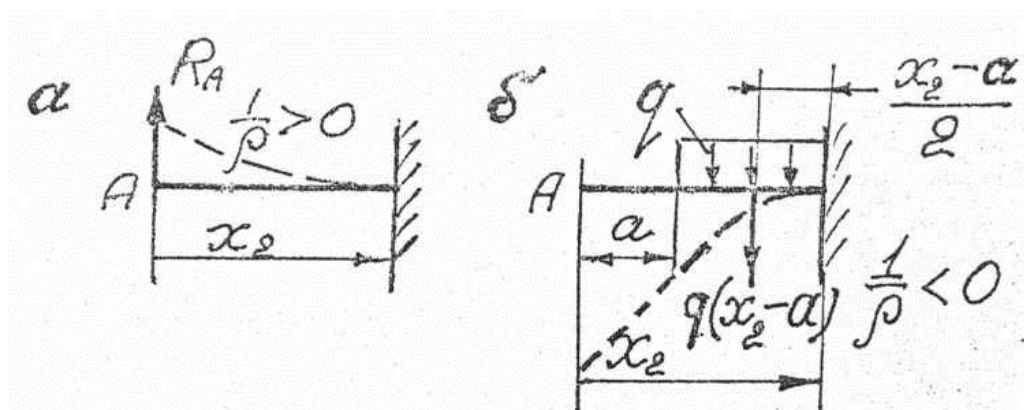


Рис. 4.12

Рассмотрим применение ранее приведенного правила знаков для установления знаков членов вошедших в выражение  $M_{z_2}$ . При определении знака момента от того или другого усилия рассматриваем **только** это усилие, его плечо до сечения, а само сечение мысленно представим себе жесткой заделкой (рис. 4.12). Из рис. 4.12, а ясно, что  $R_A$  вызывает положительную кривизну  $\left(\frac{1}{\rho} > 0\right)$  оси балки («вода не сливается!»), что изображено штриховой линией, и член  $R_A \cdot x_2$  в выражение для  $M_{z_2}$  входит со знаком «+». Из рис. 4.12, б ясно, что распределенная на длине  $(x_2 - a)$  нагрузка интенсивностью  $q$  вызывает отрицательную кривизну  $\left(\frac{1}{\rho} < 0\right)$  оси балки («вода не удерживается на балке, сливается!»), что изображено штриховой линией, и член  $\frac{q(x_2 - a)^2}{2}$  входит в выражение для  $M_{z_2}$  со знаком



«-». Отметим, что при составлении выражения изгибающего момента от распределенной нагрузки, последняя заменяется равнодействующей, приложенной посередине участка длиной  $(x_2 - a)$ , т.е. в центре тяжести площади  $q(x_2 - a)$ , тогда плечо этой равнодействующей до рассматриваемого сечения равно  $\frac{x_2 - a}{2}$ .

$M_{z_3} = R_A \cdot x_3 - q_1 \cdot 2a(x_3 - 2a) - \frac{q_2(x_3 - 3a)^2}{2}$  (квадратная парабола!),

при  $x_3 = 3a$        $M_{z_3} = 3qa^2$ ,

при  $x_3 = 5a$        $M_{z_3} = 11qa^2$ .

Найдем еще одно значение  $M_{z_3}$ , соответствующее абсциссе  $x_{30} = 3,75a$ . В этом сечении  $Q_{y_3} = 0$ , и согласно дифференциальной зависимости (4.4)  $M_{z_3}$  достигает экстремального значения.

При  $x_3 = x_{30}$        $M_{z_3} = 13,63qa^2$ .

$M_{z_4} = R_K \cdot x_4$  (линейная зависимость);

при  $x_4 = 0$                $M_{z_4} = 0$ ,

при  $x_4 = a$                $M_{z_4} = qa$ .

$M_{z_5} = R_K \cdot x_5 + M = qa \cdot x_5 + 8qa^2$  (линейная зависимость!),

при  $x_5 = a$                $M_{z_5} = 9qa^2$ ,

при  $x_5 = 3a$                $M_{z_5} = 11qa^2$ .

Рассмотрим применение принятого правила знаков для определения знаков членов выражения  $M_{z_5}$ . Сечение, лежащее на расстоянии  $x_5$ , представим себе жесткой заделкой (рис. 4.13).  $R_K \cdot x_5$  вошло в выражение  $M_{z_5}$  со знаком «+», так как этот момент создаст положительную кривизну («вода не сливается!»), так же момент  $M = 8qa^2$  создаст положительную кривизну оси балки.

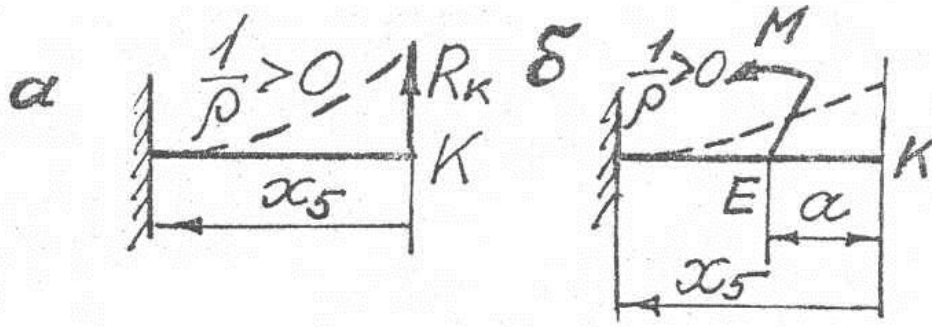


Рис. 4.13

Запомним, что «мысленная жесткая заделка» сечения производится в конце (!) абсциссы  $x_i$ .

По найденным значениям  $M_{z_i}$  строим эпюру  $M_z$  (см. рис. 4.11, в).

Значения ординат эпюры  $M_z$  так же, как ординаты эпюры  $Q_y$ , в характерных сечениях можно легко и быстро определить, используя формулу (4.5). Так в этой формуле, например, для сечения  $C$   $\int_l Q_y dx$  представляет собой площадь эпюры  $Q_y$  на участке слева от сечения  $C$ , т.е.

$$\int_l q dx = \omega_1 + \omega_2 = 5qa \cdot a + \frac{5qa + 3qa}{2} \cdot 2a = 13qa^2 = M_z(C).$$

Слева от сечения  $C$  нет сосредоточенных моментов, поэтому  $M_i$  в формуле (4.5) равно нулю.

**Пример 2** (рис. 4.14)

**I операция.** Изображение расчетной схемы. Реакции  $R_A$  и  $R_C$  направим вверх (см. рис. 4.14, а).

**II операция.** Определение опорных реакций

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0;$$

$$\sum m_C = 0: \quad R_A \cdot 2l - M_1 - M_2 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3M}{l};$$

$$\sum m_A = 0: \quad R_C \cdot 2l - M_2 - M_1 = 0 \Rightarrow R_C = -\frac{3M}{l}.$$

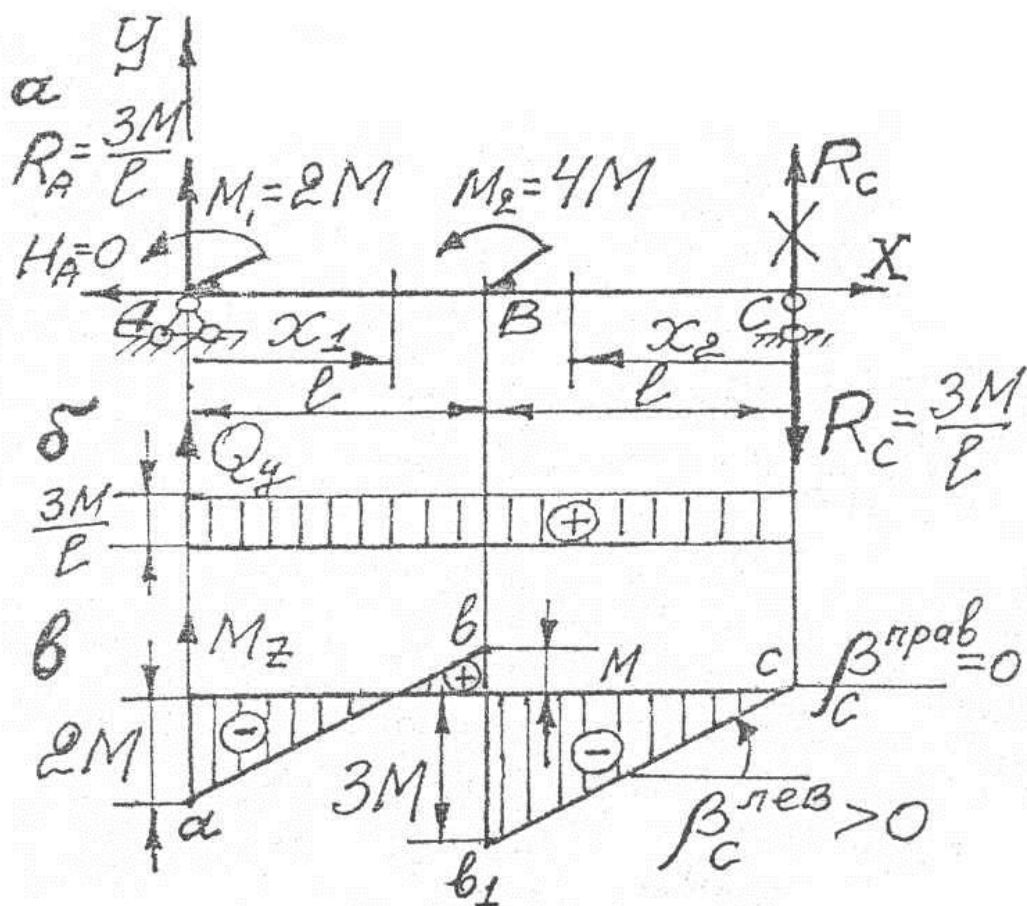


Рис. 4.14

Проверка:

$$\sum Y = 0: \quad R_A + R_C = 0, \quad \frac{3M}{l} - \frac{3M}{l} \equiv 0$$

или

$$\sum m_B = 0: \quad R_A \cdot l - M_1 - M_2 - R_C \cdot l = 0,$$

$$\frac{3M}{l} \cdot l - 2M - 4M - \left(-\frac{3M}{l}\right) \cdot l \equiv 0.$$

Обратим внимание на часто совершаемую грубую ошибку при составлении уравнения равновесия в виде  $\sum m_A = 0$ . Записывают часто это уравнение, не вводя в него момента  $M_1$ , полагая, что «так как момент  $M_1$  приложен в сечении  $A$ , то его момент относи-

тельно этого сечения равен нулю», забывая при этом, что это уже «готовый» сосредоточенный момент, и его уже не нужно умножать на какое-либо плечо.

В результате определения реакций получили значение  $R_C$  со знаком «-», что свидетельствует о том, что реакция направлена в противоположную сторону. Поэтому, вынося полученные значения реакций на расчетную схему, первоначальное направление реакции  $R_C$  перечеркнем крестиком, направим  $R_C$  вниз и запишем ее значение  $R_C = \frac{3M}{l}$  (см. рис. 4.14, а).

**III операция.** Составление выражений для  $Q_y$  и построение эпюры  $Q_y$ . Силовых участков у балки два. Абсциссы текущих сечений участков обозначим через  $x_1$  и  $x_2$ . Из рис. 4.14, а имеем, что

$$0 \leq x_1 \leq l, \quad 0 \leq x_2 \leq l.$$

$$Q_{y_1} = R_A = \frac{3M}{l} = \text{const}, \quad Q_{y_2} = R_C = \frac{3M}{l} = \text{const}.$$

Эпюра  $Q_y$  представлена на рис. 4.14, б.

**IV операция.** Составление выражений для  $M_z$  и построение эпюры  $M_z$ .

$$M_{z_1} = R_A \cdot x_1 - M_1 \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_{z_1} = -M_1 = -2M,$$

$$\text{при } x_1 = l \quad M_{z_1} = R_A \cdot l - M_1 = M;$$

$$M_{z_2} = -R_C \cdot x_2 \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad M_{z_2} = 0,$$

$$\text{при } x_2 = l \quad M_{z_2} = -R_C \cdot l = -3M.$$

Эпюра  $M_z$  представлена на рис. 4.14, в. Покажем, как с помощью формулы (4.5) определить  $M_{z_1}(B)$  при  $x_1 = l - 0$ , т.е. слева от сечения (то же сечение  $B$ , но справа от сечения имеет абсциссу  $x_1 = l + 0$ ).

$$\int_l Q_y dx = \omega_1 = \frac{3M}{l} \cdot l, \quad M_i = -M_1 = -2M,$$

тогда  $M_{z_1}(B) = 3M - 2M = M$ .

### Пример 3 (рис.4.15)

**I операция. Изображение расчетной схемы.** В расчетной схеме не будем показывать реакции жесткой заделки (рис. 4.15, а). Изображение сосредоточенного момента другое, чем изображение в примере 2, но равнозначное ему.

**II операция. Определение опорных реакций.** В жесткой заделке возникают три опорные реакции. Горизонтальная реакция  $H_K = 0$  из уравнения равновесия  $\sum X = 0$ , так как на балку действуют только вертикальные силы. В консольных балках две другие опорные реакции в защемлении определять не обязательно при выборе начала координат (отчет абсцисс  $x_i$ ) от сечения А – конец консоли, так как полученное далее значение поперечной силы в сечении заделки дает величину и направление вертикальной опорной реакции, а изгибающий момент в сечении заделки – опорный момент в заделке, что и будет показано дальше.

**III операция. Составление выражений для  $Q_y$  и построение эпюры  $Q_y$ .** Силовых участков в балке четыре:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq 2a, \\ 2a &\leq x_2 \leq 4a, \\ 4a &\leq x_3 \leq 6a, \\ 6a &\leq x_4 \leq 8a. \end{aligned}$$

Абсциссы  $x_i$  берем только от левого конца балки (от сечения А) и, таким образом, для всех сечений по одну (левую!) сторону будут только известные внешние усилия, т.е. значения опорных реакций не будут входить в выражения  $Q_y$  и  $M_z$ .

$$Q_{y_1} = -q \cdot x_1 \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad Q_{y_1} = 0,$$

$$\text{при } x_1 = 2a \quad Q_{y_1} = -2qa;$$

$$Q_{y_2} = -2qa = \text{const на втором участке;}$$

$Q_{y_3} = Q_{y_4} = -2qa + P = 4qa = \text{const}$  на третьем и четвертом участках.

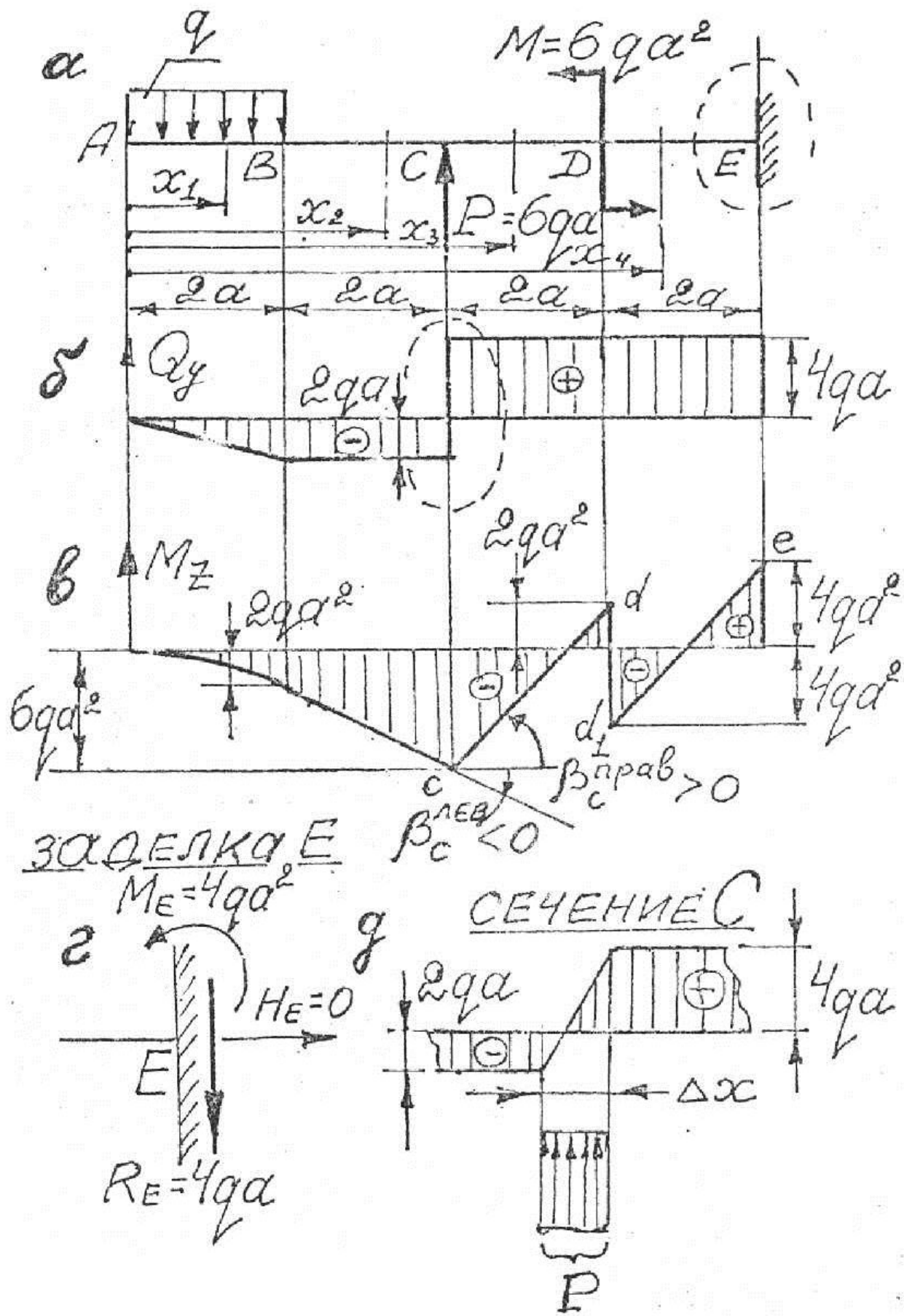


Рис. 4.15

Эпюра  $Q_y$  приведена на рис. 4.15, б.

Формально из эпюры  $Q_y$  следует, что в сечении  $C$  действуют  $Q_y = -2qa$  и  $Q_y = 4qa$ . Очевидно, что физически в одном и том же сечении не могут действовать два разных по величине и знаку внутренних силовых фактора одного смысла. Результат, полученный на эпюре  $Q_y$ , является следствием схематизации реального объекта, согласно которой сосредоточенная сила действует в точке, тогда как в действительности сила действует на определенной конечной длине, например,  $\Delta x$ , и следовательно, действие силы равносильно действию распределенной нагрузки, интенсивностью  $q = \frac{P}{\Delta x}$ . Таким образом, фактически у сечения  $C$  эпюра  $Q_y$  должна (без схематизации!) выглядеть так, как показано на рис. 4.15, д. Итак, отвечая на вопрос «чему равна  $Q_y$  в сечении  $C$ », должен быть дан ответ: подходя к сечению  $C$  слева ( $x_2 = 4a - 0$ )  $Q_y = -2qa$ , подходя к сечению справа ( $x_3 = 4a + 0$ )  $Q_y = 4qa$ .

Аналогичное, по сути, объяснение справедливо и для значения изгибающего момента, например для сечения  $D$  балки (см. рис. 4.15).

**IV операция.** Составление выражений для  $M_z$  и построение эпюры  $M_z$ .

$$M_{z_1} = -\frac{qx_1^2}{2} \text{ (квадратная парабола!),}$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_{z_1} = 0,$$

$$\text{при } x_1 = 2a \quad M_{z_1} = -2qa^2;$$

$$M_{z_2} = -2qa(x_2 - a) \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_2 = 2a \quad M_{z_2} = -2qa^2,$$

$$\text{при } x_2 = 4a \quad M_{z_2} = -6qa^2;$$

$$M_{z_3} = -2qa(x_3 - a) + P(x_3 - 4a) \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_3 = 4a \quad M_{z_3} = -6qa^2,$$

$$\begin{aligned} \text{при } x_3 = 6a \quad M_{z_3} &= 2qa^2; \\ M_{z_4} &= -2qa(x_4 - a) + P(x_4 - 4a) - M, \\ \text{при } x_4 = 6a \quad M_{z_4} &= -4qa^2; \\ \text{при } x_4 = 8a \quad M_{z_4} &= 4qa^2. \end{aligned}$$

Эпюра  $M_z$  приведена на рис. 4.15, в.

После завершения III и IV операции при необходимости можно изобразить и реакции жесткой заделки.

В сечении заделки  $E$   $Q_y = 4qa$ ; для того чтобы вертикальная реакция в заделке вызвала такую перерезывающую силу, необходимо чтобы она была направлена вниз, т.е. стремилась повернуть примыкающую к заделке часть балки по часовой стрелке, как показано на рис. 4.15, г, и равна  $R_F = 4qa$ .

Изгибающий момент в сечении  $E$   $M_z = 4qa^2 > 0$ ; для того чтобы опорный момент  $M_E$  вызвал положительный изгибающий момент (положительную кривизну оси балки), необходимо чтобы он был направлен против часовой стрелки, как показано на рис. 4.15, г, и равен  $M_E = 4qa^2$ .

#### **Пример 4** (рис.4.16)

**I операция.** Изображение расчетной схемы (рис.4.16, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Согласно формуле (1.13) на с. 12 при числе замкнутых контуров  $K = 1$ , количестве простых шарниров  $III = 3$ ,  $S = 3 \cdot K - III = 0$ , т.е. задача статически определимая.

Представленная балка носит название балки с промежуточным шарниром.

Определение опорных реакций такой балки может быть произведено двумя методами.

Рассмотрим первый метод.

Неизвестных реакций опорных устройств – четыре:  $R_B$ ,  $R_D$ ,  $H_D$ ,  $M_D$ . Уравнений равновесия можно записать только три:

$$\sum X = 0: \quad H_D = 0; \quad (1)$$



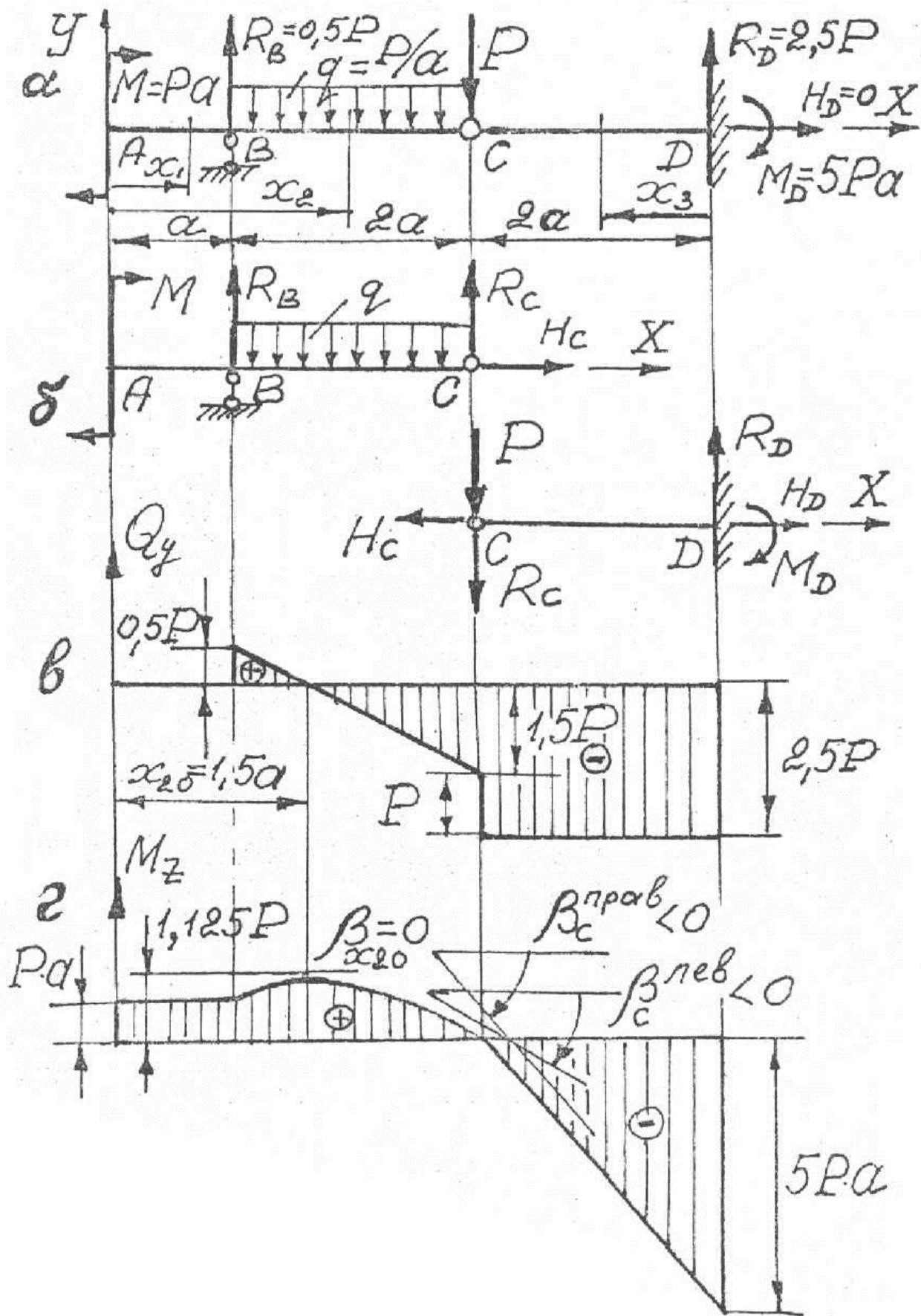


Рис. 4.16

$$\sum m_D = 0: M + R_B \cdot 4a - 2qa \cdot 3a - P \cdot 2a + M_D = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_B = 0, \quad M + 2qa \cdot a + P \cdot 2a - R_D \cdot 4a + M_D = 0 \quad (3)$$

Дополнительное четвертое уравнение можно записать из того соображения, что изгибающий момент в шарнире  $C$  равняется нулю. Изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов, лежащих по одну сторону от сечения  $C$ . Тогда

$$\sum M^{\text{левая}}(C) = M + R_B \cdot 2a - 2qa \cdot a = 0 \quad (4)$$

(или  $\sum M^{\text{правая}}(C) = R_D \cdot 2a - M_D = 0$ ).

Решая совместно вышеприведенные четыре уравнения, получим  $R_B = 0,5P$ ;  $R_D = 2,5P$ ;  $M_D = 5Pa$ ;  $H_D = 0$ .

Рассмотрим второй метод.

Балка с промежуточным шарниром представляет собой сочлененную систему, состоящую из двух балок, соединенных шарниром  $C$ : правой консольной балки  $CD$  и левой полуподвесной балки  $AC$ .

Мысленно разъединяем эти балки и изображаем их отдельно, заменяя их взаимодействие реакциями  $H_C$  и  $R_C$  (см. рис.4.16, б).

Силу  $P$ , приложенную в сечении шарнира  $C$ , если специально не указано, можно отнести к правой балке  $CD$  (см. рис.4.16, б), или к левой балке  $AC$ , или разделить силу пополам и загрузить левую балку силой  $P/2$  в сечении  $C$  и правую балку силой  $P/2$  в сечении  $C$ .

Для полуподвесной балки  $AC$  запишем три уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_C = 0;$$

$$\sum m_C = 0: M + R_B \cdot 2a - 2qa \cdot a = 0 \Rightarrow R_B = 0,5P;$$

$$\sum m_B = 0: M + 2qa \cdot a - R_C \cdot 2a = 0 \Rightarrow R_C = 1,5P.$$

Для консольной балки  $CD$  запишем три уравнения равновесия:

$$\sum X = 0: -H_C + H_D = 0 \Rightarrow H_D = 0;$$

$$\sum m_D = 0: -P \cdot 2a - R_C \cdot 2a + M_D = 0 \Rightarrow M_D = 5Pa;$$

$$\sum m_C = 0: -R_D \cdot 2a + M_D = 0 \Rightarrow R_D = 2,5P.$$

Проверка правильности определения реакций производится так же, как и в примере 1.

Убедившись в правильности определения реакций, выносим их значения на расчетную схему (см. рис. 4.16, а).

**III операция.** Составление выражений для  $Q_y$  и построение эпюры  $Q_y$ . Силовых участков у балки три, при этом

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 &\leq a, \\ a \leq x_2 &\leq 3a, \\ 0 \leq x_3 &\leq 2a. \end{aligned}$$

$$Q_{y_1} = 0;$$

$$Q_{y_2} = R_B - q(x_2 - a) \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_2 = a \quad Q_{y_2} = 0,5P,$$

$$\text{при } x_2 = 3a \quad Q_{y_2} = -1,5P.$$

Найдем абсциссу  $x_{20}$ , соответствующую значению  $Q_{y_2} = 0$ .

Для этого приравняем к нулю выражение для  $Q_{y_2}$ :

$$Q_{y_2} = R_B - q(x_{20} - a) = 0 \Rightarrow x_{20} = 1,5a.$$

$$Q_{y_3} = -R_D = -2,5P = \text{const на всем участке } DC.$$

Эпюра  $Q_y$  представлена на рис.4.16, в.

**IV операция.** Составление выражений для  $M_z$  и построение эпюры  $M_z$ .

$$M_{z_1} = M = P \cdot a = \text{const на всем участке } AB;$$

$$M_{z_2} = M + R_B \cdot (x_2 - a) - q \frac{(x_2 - a)^2}{2} \text{ (квадратная парабола!),}$$

$$\text{при } x_2 = a \quad M_{z_2} = M = Pa,$$

$$\text{при } x_{20} = 1,5a \quad M_{z_2} = 1,125Pa,$$

$$\text{при } x_2 = 3a \quad M_{z_2} = 0,$$

последнее может служить проверочным моментом, так как действительно в сечении шарнира изгибающий момент равен нулю.

$$M_{z_3} = R_D \cdot x_3 - M_D \text{ (линейная зависимость!),}$$

$$\text{при } x_3 = 0 \quad M_{z_3} = -M_D = -5Pa,$$

$$\text{при } x_3 = 2a \quad M_{z_3} = R_D \cdot 2a - M_D = 0.$$

Эпюра  $M_z$  приведена на рис. 4.16, *г*.

### 4.1.3. Проверка правильности построения эпюр $Q_y$ и $M_z$

Анализ эпюр примеров 1 – 4, а также дифференциальные зависимости (4.3) и (4.4) позволяют установить правила, которые широко применяются для контроля правильности построения, и для совершенствования самой техники построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$ . Приведенные далее правила, указания и выводы относятся к эпюрам балки, отнесенной к координатам с началом отсчета в левом крайнем сечении балки, т.е. ось  $x$  – горизонтальная ось, проведенная слева направо, а ось  $y$  – вертикально вверх.

**4.3.1.** Вертикальная сосредоточенная сила дает на эпюре  $Q_y$  скачок на величину силы (см. рис. 4.11, *б*, сечение  $A, D, K$ ; рис. 4.14, *б*, сечение  $A, C$ ; рис. 4.15, *б*, сечение  $C, E$ ; рис. 4.16, *б*, сечение  $B, C, D$ ). На эпюре  $M_z$  в сечении действия сосредоточенной силы всегда получаем излом линии, ограничивающей эпюру, при этом острие излома направлено в сторону, противоположную направлению действующей силы. Это положение подтверждается дифференциальной зависимостью  $Q_y = \frac{dM_z}{dx} = \text{tg}\beta$ . Так, на эпюре (см. рис. 4.11, *б*) в сечении  $D$  поперечная сила имеет два значения  $Q_{y_3} = -5qa$  (в сечении слева при  $x_3 = 5a - 0$ ) и  $Q_{y_3} = -qa$  (в сечении справа при  $x_3 = 5a + 0$ ), следовательно, угол наклона касательной  $\left| \beta_D^{\text{прав}} \right| < \left| \beta_D^{\text{лев}} \right|$  (см. рис. 4.11, *в*); в сечении  $A$ , имеем одно значение  $Q_{y_1} = 5qa$ , а левее сечения  $Q_y = 0$ , т.е.  $\beta_A^{\text{лев}} = 0$ , и следовательно, получаем две касательные, образующие угол, острие которого направлено в противоположную сторону направления реакции  $R_A$ , т.е. вниз.

На эпюре (см. рис. 4.14, б) в сечении  $C$  имеем одно значение  $Q_y(C) = \frac{3M}{l} > 0$ , т.е.  $\beta_C^{\text{лев}} > 0$ , а правее сечения  $C$   $Q_y = 0$ , т.е.  $\beta_C^{\text{прав}} = 0$ , и следовательно, на эпюре  $M_z(C)$  имеем две касательные, образующие угол, направленный острием против действующей силы  $R_C$ , т.е. вверх (см. рис. 4.14, в).

На эпюре (см. рис. 4.15, б) в сечении  $C$  имеем два значения  $Q_{y_2}^{\text{лев}}(C) = -2qa < 0$  и  $Q_{y_2}^{\text{прав}}(C) = 4qa$ , т.е. на эпюре  $M_z$  будем иметь в этом сечении две касательные к графику функции  $M_z$ :  $\beta_C^{\text{лев}} < 0$  и  $\beta_C^{\text{прав}} > 0$ , как показано на рис. 4.15, в; острие образованного угла направлено в сторону, противоположную направлению силы  $P = 6qa$ , т.е. вниз.

**4.3.2.** Сосредоточенный момент в сечении своего действия дает на эпюре  $M_z$  скачек на величину момента (см. рис. 4.11, в, сечение  $E$ ; рис. 4.14, в, сечения  $A$  и  $B$ ; рис. 4.15, в, сечения  $D$  и  $E$ ).

**4.3.3.** Если на участке  $q = 0$ , то  $Q_y = \text{const}$  (в том числе  $Q_y = 0$ ) и эпюра  $Q_y$  ограничена прямой, параллельной оси  $x$ , а изгибающий момент изменяется по линейному закону, т.е. график функции  $M_z$  – прямая наклонная линия (см. на рис. 4.11 эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  на участках  $DE$ ,  $EK$ ; на рис. 4.14 эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  на всем пролете балки; на рис. 4.15 эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  на участках  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ; на рис. 4.16 эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  на участке  $CD$ ). Обращаем внимание, что при этом сосредоточенный момент, давая скачек на эпюре  $M_z$ , не меняет угла наклона линии, ограничивающей эпюру  $M_z$ , так как  $Q_y = \frac{dM_z}{dx} = \text{tg}\beta = \text{const}$  на всем участке  $DK$  рис. 4.11, в, или, например, на всем пролете  $AC$  рис. 4.14, в. Таким образом, имеем, что на рис. 4.11, в прямая  $de \parallel e_1k$ , на рис. 4.14, в –  $ab \parallel b_1c$ , на рис. 4.15, в –  $cd \parallel d_1e$ .

**4.3.4.** Если на участке распределенная нагрузка имеет интенсивность  $q = \text{const}$ , то  $Q_y$  меняется по линейному закону (см. рис. 4.11, б на участке  $BC$  и  $CD$ ; рис. 4.15, б на участке  $AB$ ; рис. 4.16, б на участке  $BC$ ), т.е. эпюра  $Q_y$  ограничена прямыми наклонными линиями, при этом если  $q < 0$ , т.е. направлена вниз, то  $Q_y$  убывает, так как  $q = \frac{dQ_y}{dx} = \text{tg}\alpha < 0$ ,  $\alpha < 0$ . Если  $q > 0$ , т.е. направлена вверх, то  $Q_y$  возрастает.

Обращаем внимание, что в сечении перехода от одного значения  $q_1 = \text{const}$  (или  $q = 0$ ) к другому значению  $q_2 = \text{const}$ , на эпюре  $Q_y$  получаем излом, что наглядно представлено на рис. 4.11, б. Здесь в сечении  $C$  пересекаются две прямые: одна под углом  $\alpha_{BC} < 0$   $\left( q_1 = q = \frac{dQ_y}{dx} = \text{tg}\alpha_{BC} < 0 \right)$ , и вторая под углом  $\alpha_{CD} < 0$   $\left( q_2 = 4q = \frac{dQ_y}{dx} = \text{tg}\alpha_{CD} < 0 \right)$ , при этом  $|\alpha_{CD}| > |\alpha_{BC}|$ . Излом на эпюре  $Q_y$  имеется и в сечении  $B$ , где начинается распределенная нагрузка интенсивностью  $q_1$ .

Особо подчеркнем, что «переходы» от одного значения интенсивности  $q$  к другому значению никак не сказываются на эпюре  $M_z$ . Так на эпюре  $M_z$  (см. рис. 4.11, в) в сечении  $B$  имеем плавный переход наклонной прямой  $ab$  в кривую на участке  $BC$ , что соответствует и дифференциальной зависимости  $Q_y = \frac{dM_z}{dx} = \text{tg}\beta$ , так как в этом сечении имеется только одно значение  $\text{tg}\beta = Q_y(B) = 5qa$ , т.е. в сечении к графику  $M_z$  можно провести только одну касательную. Аналогичную ситуацию имеем и в сечении  $C$ .

**4.3.5.** Если на участке  $Q_y = 0$ , то  $M_z = \text{const}$  (в том числе  $M_z = 0 = \text{const}$ ), что имеет место на рис. 4.16, г на участке  $AB$ .

**4.3.6.** Если на участке  $Q_y > 0$ , т.е.  $\text{tg}\beta > 0$ , то изгибающий момент  $M_z$  возрастает (см., например, рис. 4.11, *в* на участке  $AB$ ,  $BC$ ; рис. 4.14, *в* на участке  $AB$  и  $BC$ ; рис. 4.15, *в* на участке  $CD$  и  $DE$ ). И наоборот, если на участке  $Q_y < 0$ , т.е.  $\text{tg}\beta < 0$ , то  $M_z$  убывает (см., например, рис. 4.11, *в* на участке  $DE$ ,  $EK$ ; рис. 4.15, *в* на участках  $AB$  и  $BC$ ).

**4.3.7.** Если на участке эпюры  $Q_y$  ограничена прямой наклонной линией, т.е.  $Q_y$  меняется по линейному закону, то эпюра  $M_z$  ограничена кривой второго порядка – параболой (см. рис. 4.11, *в* на участках  $BC$  и  $CD$ ; рис. 4.15, *в* на участке  $AB$ ; рис. 4.16, *г* на участке  $BC$ ).

Знак кривизны параболы на эпюре  $M_z$  можно определять по знаку второй производной от изгибающего момента. Так, если

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q > 0, \text{ т.е. } \frac{1}{\rho} > 0, \text{ то эпюра } M_z \text{ ограничена параболой во-}$$

гнутостью в положительное направление оси  $y$  (т.е. выпуклостью

вниз). И, наоборот, если  $\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q < 0$ , т.е.  $\frac{1}{\rho} < 0$ , то эпюра  $M_z$

ограничена кривой выпуклостью вверх, как показано на рис. 4.11, *в* на участке  $BD$ , на рис. 4.15, *в* на участке  $AB$ , на рис. 4.16, *г* на участке  $BC$ .

**4.3.7А.** Однако более просто и удобно определять направление выпуклости (вогнутости) кривых на эпюре  $M_z$ , причем для кривых любой степени  $n$  или представляющих собой тригонометрическую функцию, исходя из следующих соображений, которые рассмотрим на конкретных примерах.

Для балки (см. рис. 4.15) на участке  $AB$   $M_{z_1} = -\frac{qx_1^2}{2}$ , т.е. эпюра должна быть ограничена параболой. Обратимся к рассмотрению эпюры  $Q_y$  на этом участке. В сечении  $A$   $Q_y = 0$ , следовательно,  $Q_y = \frac{dM_z}{dx} = \text{tg}\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$ , т.е. касательная к параболе в сечении

$A$  должна быть горизонтальной, так как  $\beta_A = 0$ , чем и определяется выпуклость вверх кривой на эпюре  $M_z$  на участке  $AB$ .

Для балки (см. рис. 4.16) на участке  $BC$  для  $M_z$  имеем квадратичную зависимость. В сечении с абсциссой  $x_{20} = 1,5a$

$Q_{y2} = \frac{dM_z}{dx} = \operatorname{tg}\beta_{x_{20}} = 0$ , следовательно,  $\beta_{x_{20}} = 0$ , т.е. в этом сечении имеем только одну горизонтальную касательную к кривой функции  $M_z$ , что и определяет выпуклость кривой на этом участке.

Аналогичные рассуждения можно привести и для участка  $CD$  на рис. 4.11, в.

Рассмотрим применение данного приема определения кривизны для участка  $BC$  эпюры  $M_z$  на рис. 4.11, в. Эпюру  $Q_y$  можно разбить на две фигуры: прямоугольник  $b_1b_2c_1c$  и треугольник  $bb_1c$ . Если бы эпюра  $Q_y$  имела только вид прямоугольника, т.е.  $Q_y = 3qa = \operatorname{const}$ , то эпюра  $M_z$  была бы ограничена прямой наклонной линией. Кривизну функции  $M_z$  определяет наличие треугольника  $bb_1c$  ( $Q_y^*$  имеет в нем линейную зависимость). Согласно треугольнику  $bb_1c$   $Q_y^* = 0$  в сечении  $C$ , т.е. угол наклона касательной к кривой функции  $M_z$  в сечении  $C$   $\beta_C^* = 0$ , т.е. касательная, параллельная оси  $x$ , чем и определяется выпуклость вверх кривой функции  $M_z$  на этом участке. Конечно, учитывая, что  $\operatorname{tg}\beta_C = Q_y = 3qa$ , касательная будет иметь определенный наклон, но характер выпуклости вверх сохраняется. Прием, изложенный в этом положении, может быть применен и для определения знака кривизны линий, ограничивающих эпюру  $Q_y$ , если распределенная нагрузка  $q(x)$  меняется по закону степенной или тригонометрической функции.

**4.3.7Б.** Для определения знака кривизны линий, ограничивающих эпюру  $M_z$ , можно пользоваться и следующими соображениями. Любую непрерывную распределенную нагрузку ( $q = \operatorname{const}$  или  $q = q(x)$ ) можно представить дискретно, как состоящую из систе-



мы сосредоточенных сил, каждая из которой равна  $P_i = q \cdot dx$ . Тогда, пользуясь положением 4.3.1, согласно которому изломы на эпюре  $M_z$  всегда направлены в сторону, противоположную направлению действующей силы, на эпюре  $M_z$  будем получать ломаную линию, острия изломов которой направлены против направления  $P_i = q \cdot dx$ . В пределе эта ломаная линия даст кривую  $n$  порядка. Итак, получаем, что выпуклость линий, ограничивающих эпюру  $M_z$ , всегда направлена в сторону, противоположную направлению распределенной нагрузки.

**4.3.8.** Изгибающий момент имеет экстремальное значение в тех сечениях, в которых  $Q_y$  достигает нулевого значения. При этом (ось  $x$  направлена слева направо!) если  $Q_y$  меняется с положительной на отрицательную, то  $M_z$  в этом сечении максимальный (см. рис. 4.11, *в*, сечение с абсциссой  $x_{30} = 3,75a$ ; рис.4.16, *г*, сечение с абсциссой  $x_{20} = 1,5a$ ), и наоборот, если  $Q_y$  меняется с отрицательной на положительную, то  $M_z$  в этом сечении минимальный (см. рис. 4.15, *в*, сечение *С*).

**4.3.9.** Изгибающий момент в сечении установки промежуточного шарнира всегда равен нулю. Так, в сечении *С* балки (см. рис. 4.16, *г*)  $M_z = 0$ , в крайних концевых сечениях *А* и *К* балки (см. рис. 4.11), где установлены шарнирные опоры –  $M_z = 0$ . Если в таких сечениях приложен сосредоточенный момент, то изгибающий момент равен этому сосредоточенному моменту.

В сечении жесткой заделки изгибающий момент равен по величине опорному моменту.

**4.3.10.** На крайних концевых шарнирных опорах и в заделке поперечная сила равна опорной реакции.

**4.3.11.** На свободном (консольном) конце балки  $Q_y = 0$  и  $M_z = 0$ , если на консольном конце не приложены сосредоточенная сила или сосредоточенный момент, в противном случае  $Q_y$  и  $M_z$  будут равны соответственно силе и моменту (см. рис. 4.17, *б* и рис. 4.17, *в*, сечение *К*).

**4.3.12.** В соответствии с принятым правилом знаков для изгибающего момента получается, что положительные ординаты эпю-

ры  $M_z$  откладываются все время на сжатых волокнах балки. Действительно, для сечений  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  балки (см. рис. 4.11) изгибающие моменты положительные, т.е. балка гнется вогнутостью вверх, в положительное направление оси  $y$  («вода не сливается!»); при этом сжатыми оказываются верхние волокна балки, и положительные ординаты  $M_z$  откладываются в положительное направление оси  $y$ , т.е. все положительные ординаты находятся над базовой линией – **на сжатых волокнах**.

На участке  $AB, BC$  и частично на участке  $CD$  балки (см. рис. 4.15) изгибающий момент отрицательный, кривизна  $\frac{1}{\rho} < 0$ , т.е.

балка гнется выпуклостью вверх («вода сливается!»), сжатыми оказываются нижние волокна, и все отрицательные ординаты  $M_z$  откладываются вниз от базовой линии – **на сжатых волокнах**.

Итак, рассматривая базовую линию эпюры  $M_z$  как балку, заключаем, что согласно принятому правилу знаков для изгибающего момента, эпюра изгибающего момента всегда располагается на сжатых волокнах. Это положение в дальнейшем будет использоваться при изображении изогнутой оси балки, а также для определения знака действующих в балке нормальных напряжений.

#### 4.1.4. Примеры построения эпюр $Q_y$ и $M_z$

##### Пример 5 (рис. 4.17)

Пользуясь вышеприведенными правилами построения и проверки эпюр  $Q_y$  и  $M_z$ , для представленной балки покажем, как строить эпюры не составляя выражения для внутренних силовых факторов в текущих сечениях с абсциссами  $x_i$ .

**I операция.** Составление расчетной схемы (см. рис. 4.17, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad -H_A = 0; \\ \sum m_D = 0 & \quad R_A \cdot 3l - 2P \cdot l - 3ql \cdot 0,5l + M - P \cdot 2l = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow R_A = 2,5ql; \end{aligned}$$

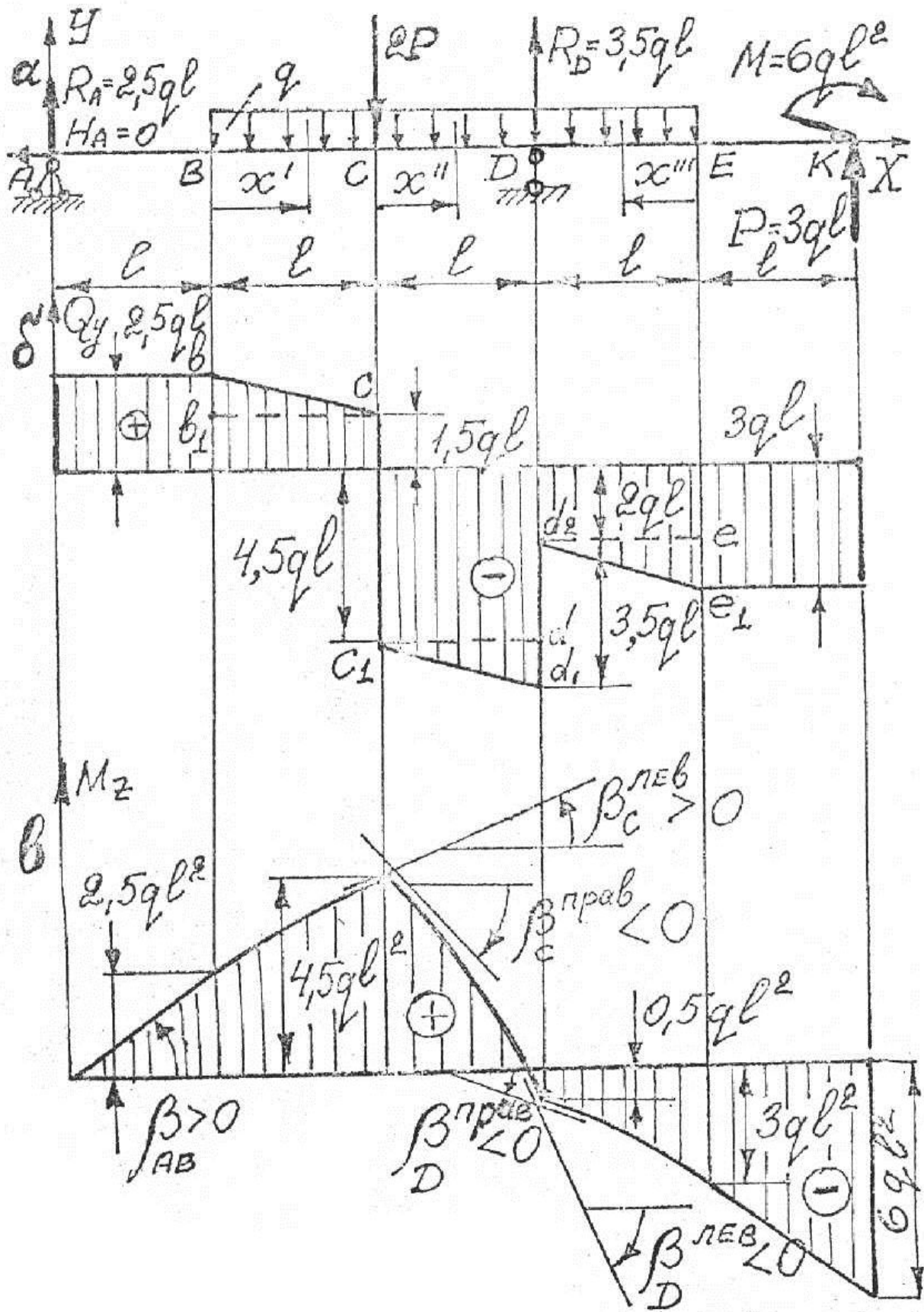


Рис. 4.17

$$\sum m_A = 0 \quad 2P \cdot l + 3ql \cdot 2,5l - R_D \cdot 3l + M - P \cdot 5l = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow R_D = 3,5ql ;$$

Проверка:

$$\sum m_E = 0 \quad R_A \cdot 4l - 2P \cdot 2l - 3ql \cdot 1,5l + R_D \cdot l + M - P \cdot l = 0, \\ 0 \equiv 0 .$$

Выносим значения опорных реакций на расчетную схему.

**III операция.** Построение эпюры  $Q_y$ . Построение эпюры проведем, определяя только значения  $Q_y$  в характерных сечениях, т.е. на границах участков.

На первом этапе будем просматривать балку слева (начиная от сечения  $A$ ) направо.

1. На опоре  $A$   $Q_y(A) = R_A = 2,5ql$  (см. положение 4.3.10), со знаком плюс, так как стремится повернуть лежащую справа часть балки по часовой стрелке.

2. На участке  $AB$  ( $q = 0$ )  $Q_y = \text{const} = R_A = 2,5ql$ .

3. Начиная с сечения  $B$   $Q_y$  уменьшается на  $q \cdot x'$ , так как  $q \cdot x'$  дает отрицательную перерезывающую силу – стремится повернуть против часовой стрелки часть балки, лежащую справа от  $q \cdot x'$ , и в сечении  $C$  (слева от сечения!)  $Q_y^{\text{лев}}(C) = R_A - ql = 1,5ql$ .

4. В сечении  $C$  имеет место скачок на величину сосредоточенной силы  $2P = 6ql$  (см. положение 4.3.1) вниз, так как  $2P$  дает отрицательную поперечную силу (стремится повернуть справа лежащую часть балки против часовой стрелки). Тогда справа от сечения  $Q_y^{\text{прав}}(C) = 1,5ql - 6ql = -4,5ql$ .

5. На участке  $CD$  идет дальнейшее уменьшение поперечной силы на величину  $qx''$  и в сечении  $D$  (слева от сечения!)  $Q_y^{\text{лев}}(D) = -4,5ql - ql = -5,5ql$ . Дальнейшее построение эпюры  $Q_y$  проведем, просматривая балку справа (начиная от сечения  $K$ ) налево.

6. В сечении  $K$   $Q_y(K) = -P = -3ql$  (см. положение 4.3.11), т.е. имеет отрицательное значение, так как сила  $P$  стремится повернуть, слева прилежащую часть балки, против часовой стрелки.

7. На участке  $KI'$  нет никакой нагрузки и значение перерезывающей силы сохраняется тоже, т.е.  $Q_y = -P = -3ql$ .

8. Начиная с сечения  $I'$ , значение  $Q_y$  возрастает, так как  $qx'''$  вызывает положительную поперечную силу – стремится повернуть слева прилежащую часть балки по часовой стрелке, и в сечении  $D$  (справа от сечения!)  $Q_y^{\text{прав}}(D) = -P + ql = -2ql$ .

Обращаем внимание, что в сечении  $D$  получен скачок на величину  $|5,5ql| - |2ql| = 3,5ql = R_D$ , что соответствует положению 4.3.1.

**IV операция. Построение эпюры  $M_z$ .** Вначале, как и в случае построения эпюры  $Q_y$ , будем просматривать балку слева направо.

1. На концевой шарнирной опоре  $A$   $M_z = 0$  (см. положение 4.3.9).

2. В сечении  $B$   $M_z(B) = R_A l = 2,5ql^2$ . Значение  $M_z$  положительное, так как момент  $R_A l$  стремится изогнуть часть балки  $AB$  по отношению к сечению  $B$  вогнутостью вверх («вода не сливается»!). На участке  $AB$  отсутствует  $q = 0$ ,  $Q_y = \text{const}$ , и следовательно, эпюра  $M_z$  ограничена прямой наклонной линией при  $Q_y = \frac{dM_z}{dx} = \text{tg}\beta > 0$ , т.е.  $\beta_{AB} > 0$ .

3. В сечении  $C$  изгибающий момент  $M_z(C) = R_A \cdot 2l - ql \cdot \frac{l}{2} = 4,5ql^2$ . На участке  $BC$  эпюра  $M_z$  ограничена кривой второго порядка. Кривая имеет выпуклость вверх, что определяется треугольником  $bb_1c$  на рис.4.17, б (см. положение 4.3.7А).

4. В сечении  $D$   $M_z(D) = R_A \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot l - 2P \cdot l = -0,5ql^2$ . На участке  $CD$  эпюра  $M_z$  ограничена кривой второго порядка с выпуклостью вверх, что определяется треугольником  $dc_1d_1$  на рис. 4.17, б (см. положение 4.3.7А).

Дальнейшее построение эпюры  $M_z$  проведем, просматривая балку справа (начиная от сечения  $K$ ) налево.

5. В сечении  $K$   $M_z(K) = -M = -6ql^2$  (см. положение 4.3.11). Изгибающий момент имеет отрицательное значение, так как сосредоточенный момент  $M$  стремится изогнуть слева примыкающую к сечению  $K$  часть балки выпуклостью вверх («вода сливается»!).

6. В сечении  $E$   $M_z(E) = -M + P \cdot l = -3ql^2$ . Эпюра  $M_z$  на участке  $KE$  ограничена прямой наклонной линией, так как  $Q_y = 0$  на этом участке.

7. В сечении  $D$   $M_z(D) = -M + P \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = -0,5ql^2$ . На участке  $ED$  эпюра  $M_z$  ограничена кривой второго порядка, так как  $Q_y$  на этом участке имеет линейную зависимость. Направление кривизны определяется треугольником  $ed_2e_1$  (рис. 4.17, б).

Обращаем внимание, что на эпюре  $M_z$  в сечении  $B$  отсутствует излом линии, ограничивающей эпюру, так как действительно в этом сечении имеется только одно значение  $Q_y = \frac{dM_z}{dx} = \text{tg}\beta$ , т.е. только один угол  $\beta = \beta_{AB}$ . В сечении  $C$  имеем две касательные к кривой, ограничивающей эпюру  $M_z$ :  $\beta_C^{\text{лев}} > 0$  (соответствует  $Q_y^{\text{лев}}(C) = \text{tg}\beta = 1,5ql$ ) и  $\beta_C^{\text{прав}} < 0$  (соответствует  $Q_y^{\text{прав}}(C) = \text{tg}\beta = -4,5ql$ ). В сечении  $D$  также две касательные, проходящие под углом  $\beta_D^{\text{лев}} < 0$  (соответствует  $Q_y^{\text{лев}}(D) = \text{tg}\beta_D^{\text{лев}} = -5,5ql < 0$ ) и  $\beta_D^{\text{прав}} < 0$  (соответствует  $Q_y^{\text{прав}}(D) = \text{tg}\beta_D^{\text{прав}} = -2ql < 0$ ).

На рис. 4.17, в изломы линий, ограничивающих эпюру  $M_z$ , направлены острием в сторону, противоположную направлению действующей в данном сечении сосредоточенной силы, например в сечении  $A, C, D, K$ .

### Пример 6 (рис. 4.18)

Рассмотрим построение эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  для балки, нагруженной распределенной нагрузкой, меняющейся по линейному закону.

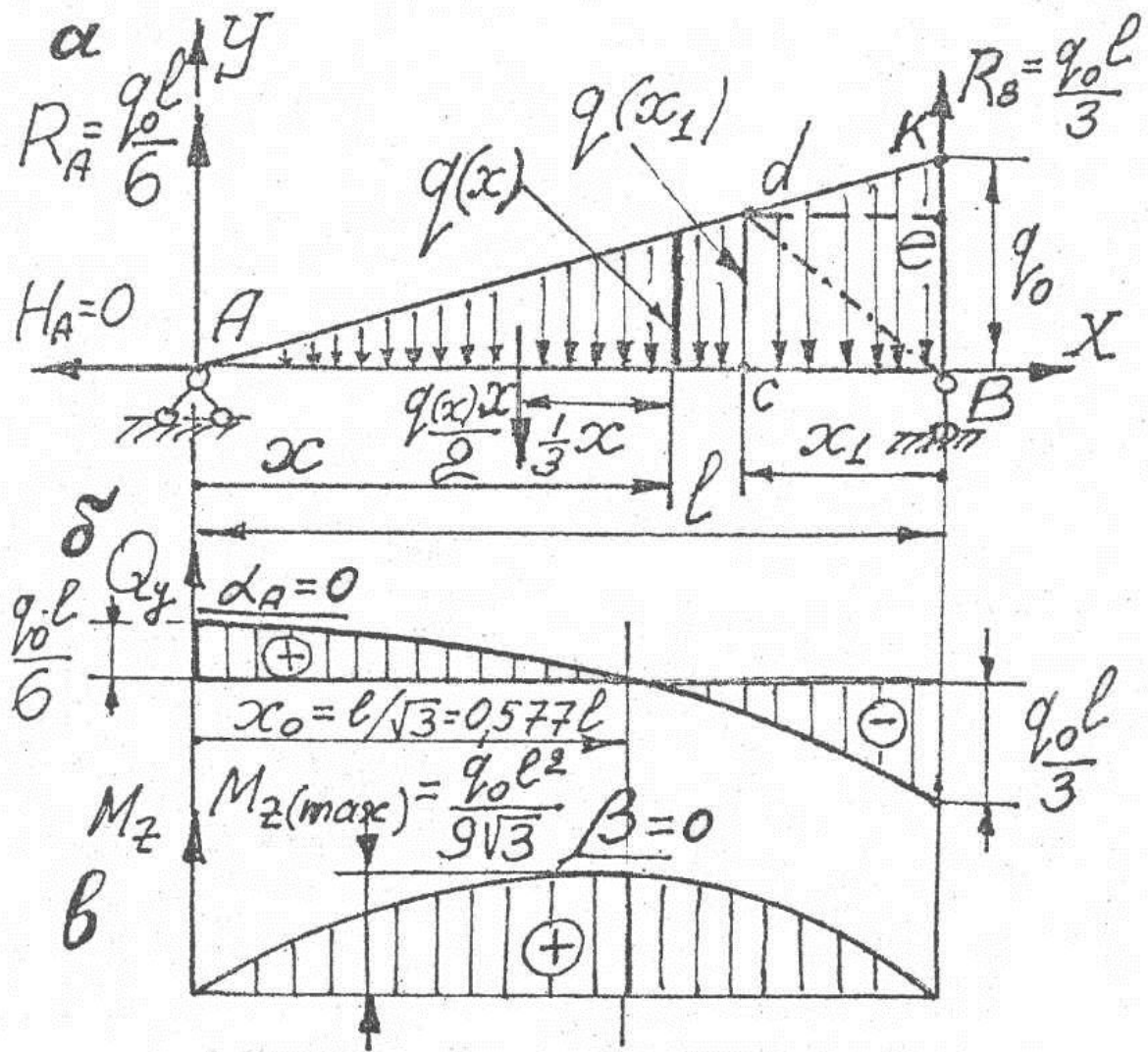


Рис. 4.18

Линию, показывающую закон изменения нагрузки  $q(x)$ , называют грузовой линией, а площадь между грузовой линией и осью балки называют грузовой площадью, величина которой и дает значение равнодействующей данной распределенной нагрузки.

**I операция.** Составление расчетной схемы (см. рис. 4.18, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Заменяем всю распределенную нагрузку ее равнодействующей, равной  $\frac{1}{2} q_0 \cdot l$  (грузовая площадь равна площади треугольника), которая будет приложена в центре тяжести треугольника, т.е. на расстоянии  $\frac{2}{3} l$  от левого сечения А.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 \quad -H_A = 0;$$

$$\sum m_B = 0 \quad R_A \cdot l - \frac{1}{2} q_0 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l = 0; \quad R_A = \frac{q_0 l}{6};$$

$$\sum m_A = 0 \quad -R_B \cdot l + \frac{1}{2} q_0 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = 0; \quad R_B = \frac{q_0 l}{3}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0 \quad R_A - \frac{1}{2} q_0 \cdot l + R_B = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

Выносим значение реакций на расчетную схему.

**III операция. Построение эпюры  $Q_y$ .** В сечении  $x$  действует

$$q(x) = \frac{q_0}{l} x.$$

$$Q_y = R_A - \frac{1}{2} q(x) \cdot x = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 \cdot x^2}{2l},$$

$$\text{при } x = 0 \quad Q_y(A) = \frac{q_0 l}{6} = R_A,$$

$$\text{при } x = l \quad Q_y(B) = -\frac{q_0 l}{3} = -R_B.$$

На всей длине  $l$  эпюра  $Q_y$  ограничена параболой. Направление кривизны найдется по положению 4.3.7А в сечении  $A$   $q = \frac{dQ_y}{dx} = \text{tg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ , т.е. касательная к эпюре  $Q_y$  в сечении  $A$  должна быть горизонтальна, что и определяет кривизну кривой – выпуклость вверх (см. рис. 4.18, б).

Приравняв уравнение для  $Q_y$  нулю, получим значение  $x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l$ , т.е. найдем абсциссу сечения, в котором  $Q_y$  переходит через нулевое значение.

Эпюра  $Q_y$  представлена на рис. 4.18, б.



**IV операция.** Построение эпюры  $M_z$ . Нагрузку в виде треугольника  $\frac{1}{2}q(x) \cdot x$  заменяем равнодействующей приложенной в центре тяжести этого треугольника, т.е. на расстоянии  $\frac{1}{3}x$  от рассматриваемого сечения  $x$ . Запишем выражение для  $M_z$ :

$$M_z = R_A \cdot x - \frac{q(x) \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{q_0 \cdot l}{6}x - \frac{q_0 \cdot x^3}{6l},$$

$$\text{при } x = 0 \quad M_z(A) = 0,$$

$$\text{при } x = x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad M_z(\max) = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}},$$

$$\text{при } x = l \quad M_z(B) = 0.$$

Эпюра  $M_z$  ограничена кривой третьего порядка (см. рис. 4.18, в). Кривизна линии, ограничивающей эпюру  $M_z$ , определена, исходя из положения 4.3.7А и 4.3.7Б.

Иногда приходится рассматривать сечения справа (от опоры  $B$ ) налево, как отмечено на рис. 4.18, а абсциссой  $x_1$  (в случае когда балка продолжается влево от сечения  $A$  и имеет большое количество нагрузки, что приводит к громоздким выражениям для  $Q_y$  и  $M_z$  при просмотре балки слева направо).

В этом случае пользуются одним из следующих трех приемов.

**1-й прием.** Нагрузку на длине  $x_1$  разбивают на прямоугольную грузовую площадь  $Vcde$  и треугольную грузовую площадь  $edk$ .

При этом  $q(x_1) = \frac{q_0}{l}(l - x_1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} Q_y &= -R_B + q(x_1) \cdot x_1 + \frac{1}{2}(q_0 - q(x_1)) \cdot x_1 = \\ &= \frac{-q_0 \cdot l}{3} + q_0 \cdot x_1 - \frac{q_0 \cdot x_1^2}{2l}, \end{aligned}$$

$$M_z = R_B \cdot x_1 - q(x_1) \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} - \frac{1}{2}(q_0 - q(x_1)) \cdot x_1 \cdot \frac{2}{3}x_1 =$$

$$= \frac{q_0 l}{3} \cdot x_1 - \frac{q_0}{2} x_1^2 + \frac{q_0}{6l} \cdot x_1^3.$$

**2-й прием.** Нагрузку на длине  $x_1$  разбиваем на две грузовые площади – треугольники  $Bcd$  и  $BdK$ . Тогда

$$Q_y = -R_B + \frac{1}{2} \cdot q(x_1) \cdot x + \frac{1}{2} q_0 \cdot x_1 = -\frac{q_0 l}{3} + q_0 \cdot x_1 - \frac{q_0 \cdot x_1^2}{2l},$$

$$\begin{aligned} M_z &= R_B \cdot x_1 - \frac{1}{2} q(x_1) \cdot x_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot x_1 - \frac{1}{2} q_0 \cdot x_1 \cdot \frac{2}{3} x_1 = \\ &= \frac{q_0 l}{3} \cdot x_1 - \frac{q_0}{2} x_1^2 + \frac{q_0}{6l} \cdot x_1^3. \end{aligned}$$

**3-й прием** (рис. 4.19). Нагрузку по треугольнику при  $q < 0$  достраиваем до нагрузки равномерно распределенной по длине интенсивностью  $q_0 = \text{const} < 0$  (штриховая линия); достроенную нагрузку уравнивают треугольной нагрузкой  $q > 0$  (штрихпунктир), с интенсивностью в сечении  $A$   $q = q_0 > 0$ . Тогда

$$q(x_1) = \frac{q_0}{l} x_1.$$

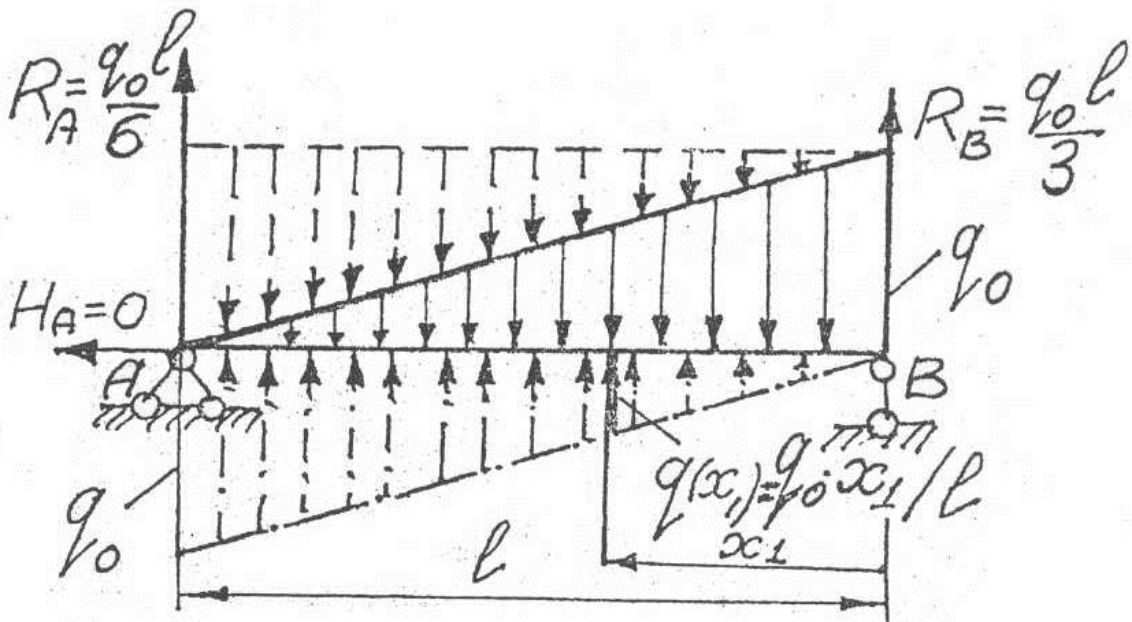


Рис. 4.19

$$Q_y = -R_B + q_0 \cdot x_1 - \frac{1}{2} q(x_1) \cdot x_1 = -\frac{q_0 l}{3} + q_0 \cdot x_1 - \frac{q_0 \cdot x_1^2}{2l},$$

$$M_z = R_B \cdot x_1 - \frac{q_0 \cdot x_1^2}{2} + \frac{1}{2} q(x_1) \cdot x_1 \cdot \frac{1}{3} x_1 = \frac{q_0 l}{3} \cdot x_1 - \frac{q_0 x_1^2}{2} + \frac{q_0 \cdot x_1^3}{6l}.$$

### Пример 7

Построим эпюры для балки, нагруженной неравномерной распределенной нагрузкой (рис. 4.20).

**1 операция. Изображение расчетной схемы** (см. рис. 4.20, а).

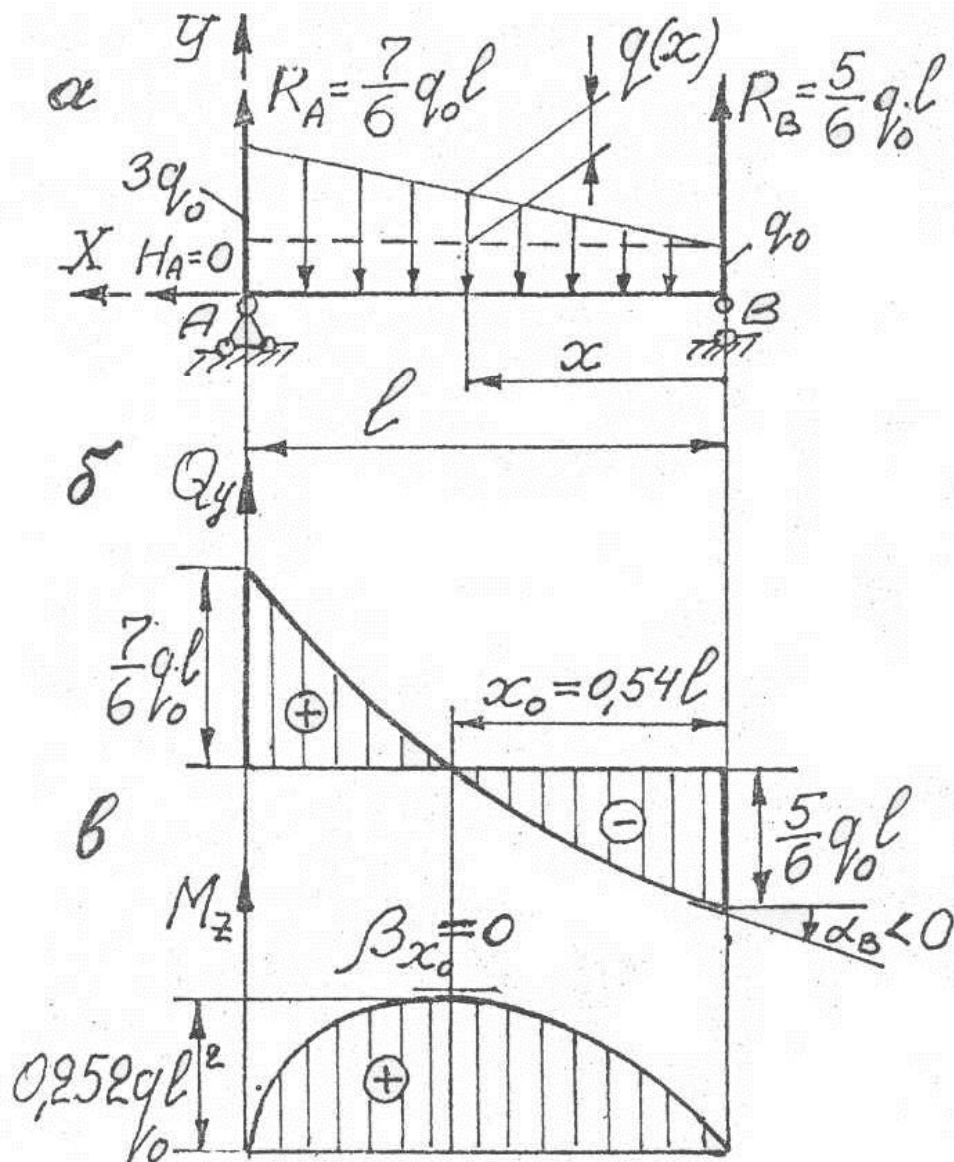


Рис. 4.20

**II операция. Определение опорных реакций.** Разбиваем всю распределенную нагрузку на равномерно распределенную с интенсивностью  $q_0$  и на нагрузку в виде треугольника со значением интенсивности в сечении на опоре  $A$   $q = 2q_0$ . Равномерно распределенную заменяем ее равнодействующей, равной  $q_0 \cdot l$  и приложенной посередине длины  $l$ , а распределенную по треугольнику заменяем равнодействующей, равной  $\frac{1}{2} \cdot 2q_0 \cdot l$  и приложенной в центре тяжести грузовой площади в виде треугольника, т.е. на расстоянии  $\frac{1}{3}l$  от опоры  $A$ .

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 \quad H_A = 0;$$

$$\sum m_B = 0 \quad R_A \cdot l - \frac{1}{2} \cdot 2q_0 \cdot l \cdot \frac{2}{3}l - q_0 \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{7}{6}q_0 \cdot l;$$

$$\sum m_A = 0 \quad -R_B \cdot l + q_0 \cdot l \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2}2q_0 \cdot l \cdot \frac{1}{3}l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{5}{6}q_0 \cdot l.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0 \quad R_A - \frac{3q_0 + q_0}{2} \cdot l + R_B = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

Выносим значение реакций на расчетную схему.

**III операция. Составление выражений для  $Q_y$  и построение эпюры  $Q_y$ .**

$$Q_y = -R_B + q_0 \cdot x + \frac{1}{2}q(x) \cdot x = -\frac{5}{6}q_0 \cdot l + q_0 \cdot x + \frac{q_0}{l}x^2, \quad (*)$$

где  $q(x)$  определено из соотношения  $\frac{q(x)}{x} = \frac{2q_0}{l} \Rightarrow q(x) = \frac{2q_0}{l}x$ .

Эпюра  $Q_y$  ограничена кривой второго порядка.

$$\text{При } x = 0 \quad Q_y = -R_B = -\frac{5}{6}q_0l,$$

$$\text{при } x = l \quad Q_y = R_A = \frac{7}{6}q_0l.$$

Приравняв выражение (\*) к нулю, найдем значение абсциссы  $x_0$ , при котором  $Q_y$  переходит через нуль. Квадратное уравнение (\*) дает два корня:  $x_1 = 0,54l$ ,  $x_2 = -1,54l$ . Откуда следует  $x_0 = 0,54l$ .

Эпюра  $Q_y$  изображена на рис.4.20, б.

Для определения знака кривизны линии, ограничивающей эпюру  $Q_y$ , воспользуемся положением 4.3.7А.

Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q_0$  дает  $Q_y$ , изменяющуюся по линейному закону. Кривизну линии, ограничивающей эпюру  $Q_y$ , дает нагрузка с грузовой площадью в виде треугольника. В этой нагрузке интенсивность над опорой  $B$  равна нулю и, следовательно,  $\text{tg}\alpha_B^* = 0$ ,  $\Rightarrow \alpha_B^* = 0$ , т.е. касательная к эпюре в сечении  $B$  располагалась бы горизонтально, если была бы только нагрузка, распределенная по треугольнику, что и определяет направление кривизны. Как видно из рис.4.20, б, касательная в сечении  $B$  проходит под углом  $\alpha_B$ , так как  $\text{tg}\alpha_B = \frac{dQ_y}{dx} = -q_0$ .

**IV операция.** Составление выражения для  $M_z$  и построение эпюры  $M_z$ .

$$M_z = R_B \cdot x - q_0 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - \frac{1}{2}q(x) \cdot x \cdot \frac{1}{3}x = \frac{5}{6}q_0 \cdot l \cdot x - \frac{q_0 \cdot x^2}{2} - \frac{q_0 \cdot x^3}{3l},$$

$$\text{при } x = 0 \quad M_z = 0,$$

$$\text{при } x_0 = 0,54l \quad M_z = M_z(\text{max}) = 0,252q_0 \cdot l^2,$$

$$\text{при } x = l \quad M_z = 0.$$

Эпюра  $M_z$  изображена на рис. 4.20, в. Кривизна линии, ограничивающей эпюру  $M_z$ , определена, исходя из положения 4.3.7А и 4.3.7Б.

**Пример 8** (рис.4.21)

Построение эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  покажем с использованием двух разных приемов.

**Прием первый – традиционный.**

**I операция.** Составление расчетной схемы (см. рис. 4.21, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Уравнение в виде  $\sum X = 0$  дает значение  $H_A = 0$ .

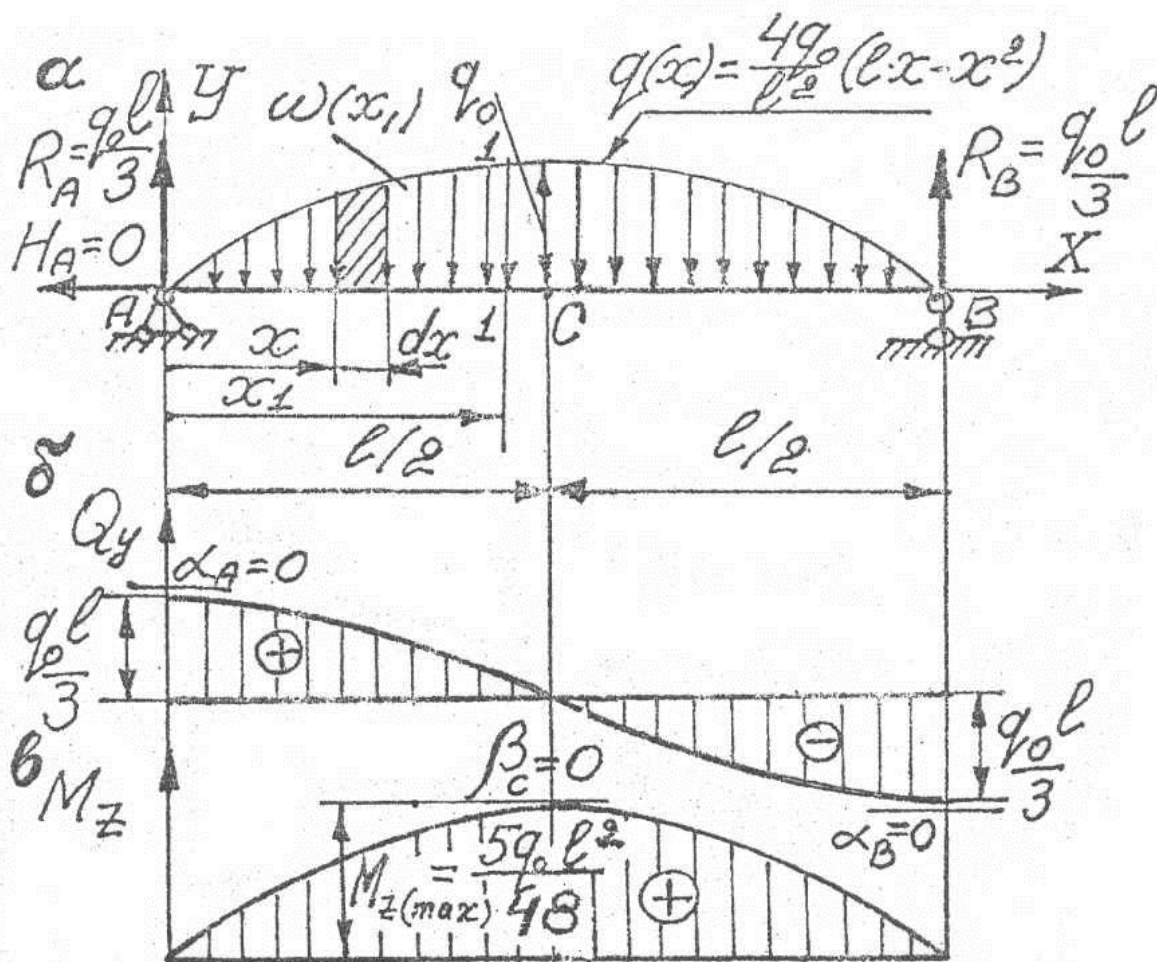


Рис. 4.21

Грузовая площадь ограничена симметричной квадратной параболой. В силу симметрии грузовой площади реакции  $R_A = R_B = \frac{\omega}{2}$ , где  $\omega$  – грузовая площадь. Наибольшую высоту площади  $\omega$  получим из условия, что при  $x_1 = l/2$   $q(l/2) = q_0$ . Площадь, огра-

численная выпуклой параболой, равна  $\omega = \frac{2}{3}h \cdot l = \frac{2}{3}q_0 \cdot l$ . Тогда

$R_A = R_B = \frac{q_0 l}{3}$  – значения реакций, которые выносим на расчетную схему.

**III операция.** Составление выражения для  $Q_y$  и построение эпюры  $Q_y$ . Обозначим грузовую площадь, лежащую слева от сечения 1–1 через  $\omega(x_1)$ , тогда

$$\begin{aligned} Q_y &= R_A - \omega(x_1) = \\ &= \frac{q_0 \cdot l}{3} - \int_0^{x_1} q(x) \cdot dx = \frac{q_0 l}{3} - \frac{4q_0}{l^2} \left[ l \int_0^{x_1} x dx - \int_0^{x_1} x^2 dx \right] = \\ &= q_0 \left( \frac{l}{3} - \frac{2x_1^2}{l} + \frac{4x_1^3}{3l^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

при  $x_1 = 0$        $Q_y = \frac{q_0 l}{3} = R_A$ ,

при  $x_1 = \frac{l}{2}$        $Q_y = 0$ ,

при  $x_1 = l$        $Q_y = -\frac{q_0 l}{3} = R_B$ .

Эпюра  $Q_y$  изображена на рис. 4.21, б. Обращаем внимание, что касательные к линии, ограничивающей эпюру  $Q_y$  в сечении  $A$  и  $B$ , горизонтальны, т.е.  $\alpha_A = 0$ ,  $\alpha_B = 0$ , так как

$$q(A) = \frac{dQ_y}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_A = 0 \text{ и } q(B) = \frac{dQ_y}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_B = 0,$$

что и определило характер выпуклости линий, ограничивающих эпюру  $Q_y$ .

**IV операция.** Составление выражений для  $M_z$  и построение эпюры  $M_z$ .

$$M_z = R_A \cdot x_1 - \int_0^{x_1} q(x)(x_1 - x) dx,$$

где  $q(x)dx$  – элементарная сила, а  $(x_1 - x)$  – плечо этой силы относительно сечения 1–1.

Подставляя значение  $q(x)$  и интегрируя, получим, что

$$M_z = q_0 \left( \frac{l \cdot x_1}{3} - \frac{2x_1^3}{3l} + \frac{x_1^4}{3l^2} \right), \quad (2)$$

при  $x_1 = 0$        $M_z = 0$ ,

при  $x_1 = \frac{l}{2}$        $M_z = M_z(\max) = \frac{5}{48} q_0 \cdot l^2$ ,

при  $x_1 = l$        $M_z = 0$ .

Эпюра  $M_z$  изображена на рис. 4.21, в.

**Прием второй**, основанный на использовании дифференциальных зависимостей (4.4).

$$Q_y = \int [-q(x)] dx.$$

Обращаем внимание на знак минус в подынтегральном выражении, его наличие определено тем, что распределенная нагрузка действует вниз, т.е.  $q(x) < 0$ !

Подставим заданное значение  $q(x)$  и проинтегрируем:

$$Q_y = \frac{-4q_0}{l^2} \int (lx - x^2) dx = -\frac{4q_0}{l^2} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1,$$

$$M_z = \int Q_y dx = -\frac{4q_0}{l^2} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 \cdot x + C_2.$$

На концевых шарнирных опорах изгибающие моменты равны нулю (см. положение 4.3.9). Таким образом,

при  $x = 0$        $M_z = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ ,

при  $x = l$        $M_z = 0 = -\frac{4q_0 \cdot l^4}{6l^2} + \frac{4q_0 \cdot l^4}{12l^2} + C_1 \cdot l$ , откуда

$$C_1 = \frac{q_0 \cdot l}{3}.$$



Тогда

$$Q_y = q_0 \left( \frac{l}{3} - \frac{2x^2}{l} + \frac{4x^3}{3l^2} \right),$$

$$M_z = q_0 \left( \frac{l \cdot x}{3} - \frac{2x^3}{3l} + \frac{x^4}{3l^2} \right),$$

что совпадает с выражением (1) и (2) при решении задачи традиционным путем.

**Пример 9** (рис. 4.22)

Для построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  воспользуемся приемом, основанным на использовании дифференциальных зависимостей (4.4).

$$Q_y = \int | -q(x) | dx = -q_0 \int \sin \frac{2\pi x}{l} dx =$$

$$= \frac{l}{2\pi} q_0 \cos \frac{2\pi x}{l} + C_1,$$

$$M_z = \int Q_y dx = \frac{l}{2\pi} q_0 \int \cos \frac{2\pi x}{l} dx = \frac{l^2 \cdot q_0}{4\pi^2} \sin \frac{2\pi x}{l} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Согласно положению 4.3.11

$$\text{при } x=l \quad Q_y = 0 \Rightarrow C_1 = -q_0 l / 2\pi,$$

$$M_z = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{q_0 l^2}{2\pi}.$$

$$\text{Тогда } Q_y = \frac{q_0 l}{2\pi} \cos \frac{2\pi x}{l} - \frac{q_0 l}{2\pi},$$

$$\text{при } x=0 \quad Q_y = 0,$$

$$\text{при } x=l/2 \quad Q_y = \frac{q_0 l}{\pi},$$

$$\text{при } x=l \quad Q_y = 0.$$

Эпюра  $Q_y$  изображена на рис. 4.22, б. Обращаем внимание, что в сечениях  $A$ ,  $B$ ,  $C$  касательные к линии, ограничивающей эпюру

$Q_y$ , горизонтальны, так как  $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = 0$ , исходя из дифференциальной зависимости  $q_{A,B,C} = \frac{dQ_y}{dx} = \text{tg}\alpha_{A,B,C} = 0$ .

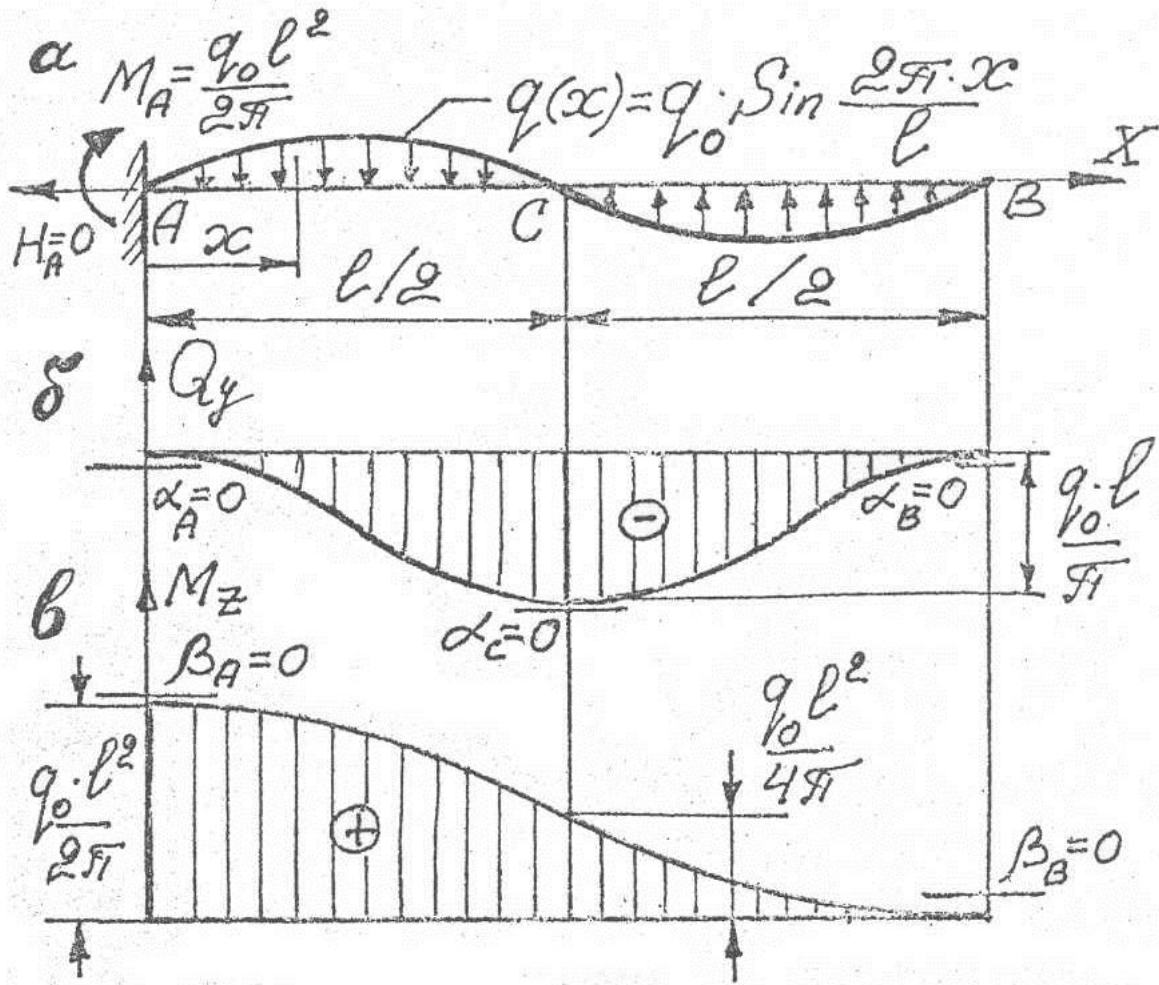


Рис. 4.22

Подставляя значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  в выражения для изгибающего момента, получим

$$M_z = \frac{q_0 \cdot l^2}{4\pi^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - \frac{q_0 \cdot lx}{2\pi} + \frac{q_0 \cdot l^2}{2\pi},$$

при  $x = 0$   $M_z = \frac{q_0 l^2}{2\pi},$

$$\text{при } x = l/2 \quad M_z = \frac{ql^2}{4l},$$

$$\text{при } x = l \quad M_z = 0.$$

Эпюра  $M_z$  изображена на рис. 4.22, в. Обращаем внимание, что в сечениях  $A, B$  касательные к линии, ограничивающей эпюру  $M_z$ , горизонтальны, так как  $\beta_A = \beta_B = 0$ , исходя из дифференциальной зависимости (4.4)  $Q_y(A, B) = \frac{dM_z}{dx} = \text{tg}\beta_{A,B} = 0$ .

В заделке  $A$  горизонтальная реакция  $H_A = 0$ , что следует из уравнения равновесия в виде  $\sum X = 0$ . Вертикальная реакция  $R_A = Q_y(A) = 0$ . Опорный момент в заделке  $A$   $M_A = M_z(A) = \frac{q_0 l^2}{2\pi}$  и направлен по часовой стрелке, как показано на рис. 4.22, а, с тем, чтобы вызвать в сечении заделки (в балке правее заделки) положительный изгибающий момент («вода не сливается»!).

### Пример 10 (рис. 4.23)

Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балки, загруженной равномерно распределенными моментами, интенсивностью  $m \left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} \right]$ .

**I операция.** Изображение расчетной схемы (рис. 4.23, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 \quad -H_A = 0;$$

$$\sum m_B = 0 \quad -R_A \cdot l + m \cdot l = 0 \Rightarrow R_A = m;$$

$$\sum m_A = 0 \quad -R_B \cdot l + m \cdot l = 0 \Rightarrow R_B = m.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0 \quad -R_A + R_B = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

Выносим значения реакций на расчетную схему.

**III операция.** Составление выражения для  $Q_y$  и построение эпюры  $Q_y$

$Q_y = -R_A = -m = \text{const}$  на всей длине  $l$  (см. рис. 4.23, б).

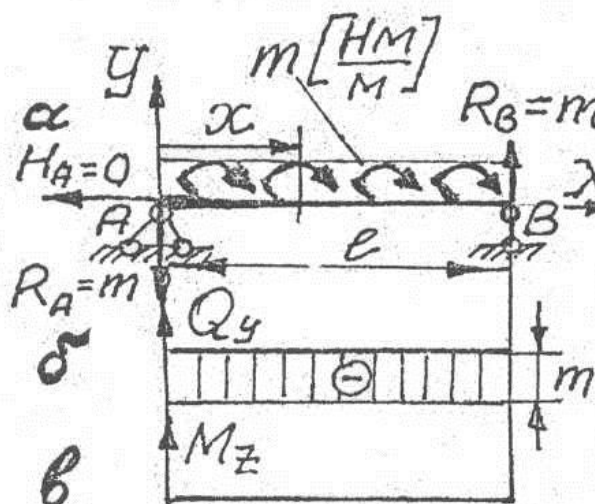


Рис. 4.23

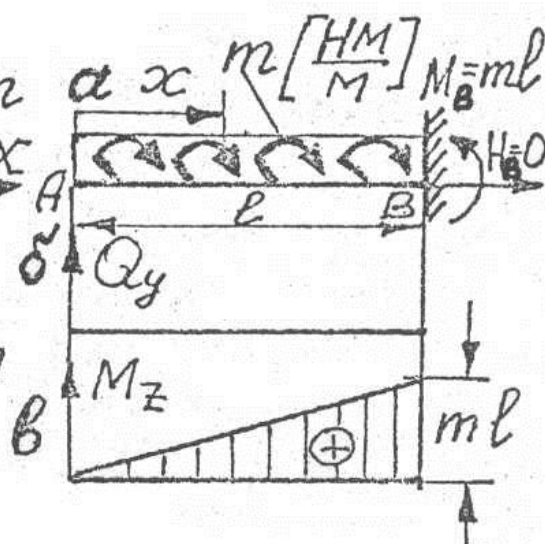


Рис. 4.24

**IV операция.** Составление выражения для  $M_z$  и построение эпюры  $M_z$

$M_z = -R_A \cdot x + m \cdot x = -m \cdot x + m \cdot x = 0$  на всей длине  $l$  (см. рис. 4.23, в).

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  находятся в строгом соответствии с дифференциальными зависимостями (4.3).

**Пример 11** (рис. 4.24)

Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для консольной балки, нагруженной равномерно распределенными моментами, интенсивностью  $m \left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} \right]$ .

$$Q_y = 0;$$

$$M_z = m \cdot x,$$

$$\text{при } x = 0 \quad M_z = 0,$$

$$\text{при } x = l \quad M_z = ml.$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  представлены соответственно на рис. 4.24, б и 4.24, в и находятся в строгом соответствии с (4.3). Так,  $M_z =$

$$= \int_0^x (Q_y + m) dx = m \cdot x, \text{ так как } Q_y = 0$$

### Пример 12

Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балки, изображенной на рис. 4.25.

**I операция.** Составление расчетной схемы (см. рис. 4.25, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 \quad H_A = 0;$$

$$\sum m_B = 0 \quad R_A \cdot l + m \cdot l - m \cdot l = 0 \Rightarrow R_A = 0;$$

$$\sum m_A = 0 \quad -R_B \cdot l - m \cdot l + m \cdot l = 0 \Rightarrow R_B = 0.$$

Выносим значение реакций на расчетную схему.

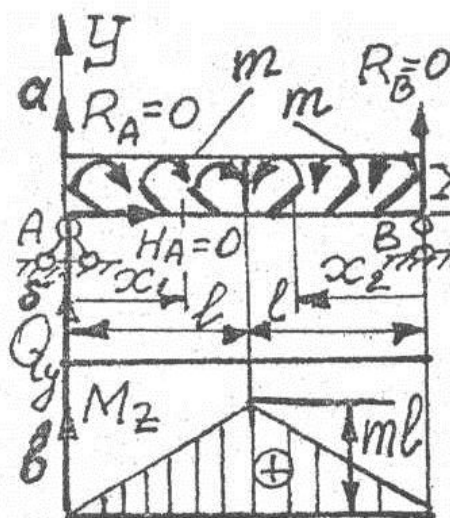


Рис. 4.25

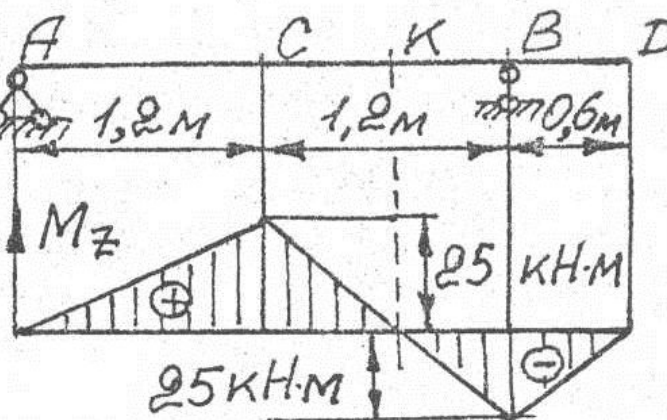


Рис. 4.26

**III операция.** Составление выражений для  $Q_y$  и построение эпюр  $Q_y$ .

$$Q_y(x_1) = 0, \quad Q_y(x_2) = 0.$$

Эпюра  $Q_y$  представлена на рис. 4.25, б.

**IV операция.** Составление выражений для  $M_z$  и построение эпюры  $M_z$ .

$$M_z(x_1) = t \cdot x_1; \text{ при } x_1 = 0, M_z = 0; \text{ при } x_1 = l, M_z = ml;$$

$$M_z(x_2) = t \cdot x_2; \text{ при } x_2 = 0, M_z = 0; \text{ при } x_2 = l, M_z = ml.$$

Эпюра  $M_z$  представлена на рис. 4.25, в.

#### 4.1.5. Условия «обратных» задач на построение эпюр $Q_y$ , $M_z$

Под «обратными» задачами понимают задачи, в которых по заданным эпюрам  $Q_y$ ,  $M_z$  необходимо найти вид нагрузок на балку, их величину, устройство опор балки.

**Задача 4.1.** Для однопролетной балки с правой консолью по заданной эпюре  $M_z$  (рис. 4.26) изобразить нагрузку, определить опорные реакции и построить эпюру  $Q_y$ .

**Задача 4.2.** Для однопролетной балки с правой и левой консолью по заданной эпюре  $M_z$  (рис. 4.28) изобразить нагрузки, определить реакции опор и построить эпюру  $Q_y$ . Все кривые, ограничивающие эпюру  $M_z$ , – квадратные параболы.

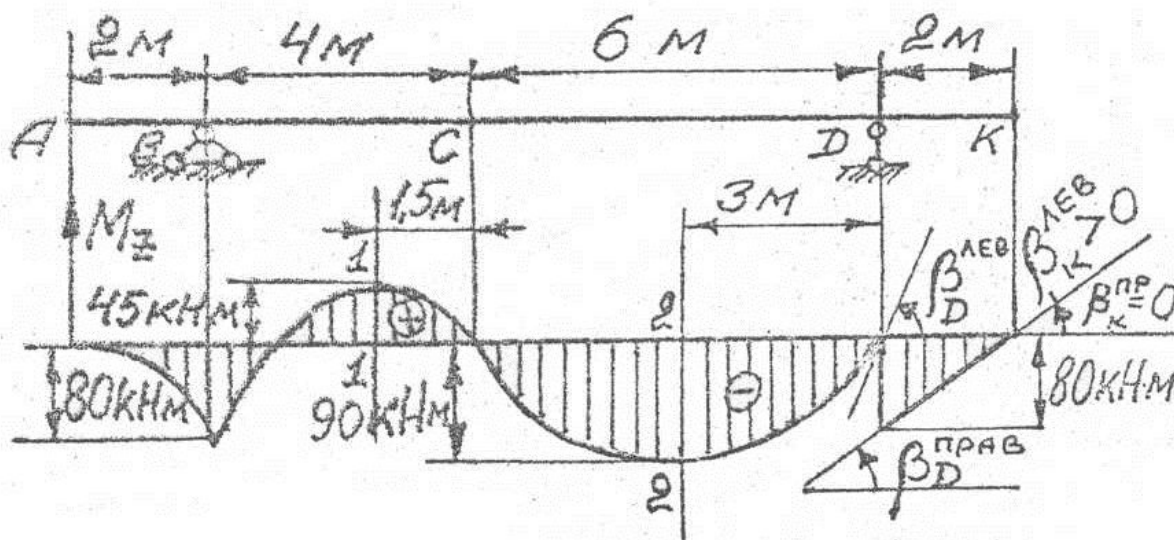


Рис. 4.27

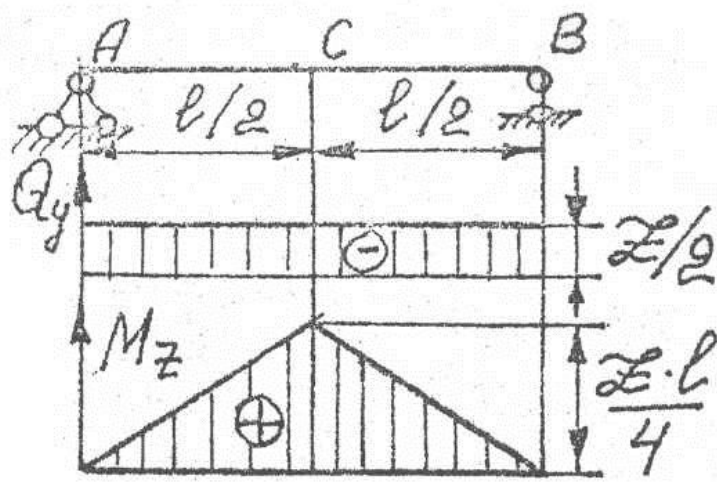


Рис. 4.28

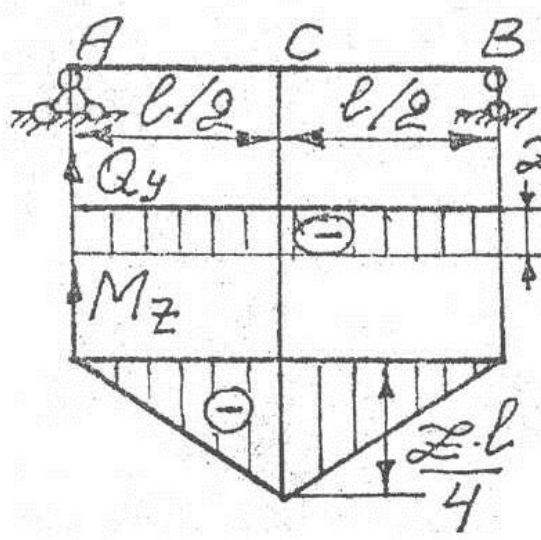


Рис. 4.29

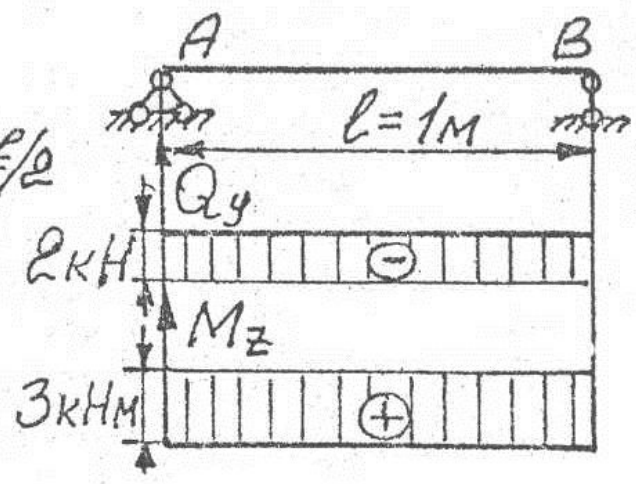


Рис. 4.30

**Задача 4.3.** Для однопролетных балок по заданным эюграм  $Q_y$  и  $M_z$  (рис. 4.28, 4.29 и 4.30) восстановить нагрузку на балки и определить опорные реакции.

**Задача 4.4.** Для однопролетной балки по заданной эюре  $Q_y$  (рис. 4.31) воспроизвести нагрузку и эюру изгибающих моментов, если известно, что сосредоточенная сила и распределенная моментная нагрузка в пролете отсутствуют, на левой опоре изгибаю-

щий момент равен нулю. Эюра  $Q_y$  ограничена квадратной параболой.

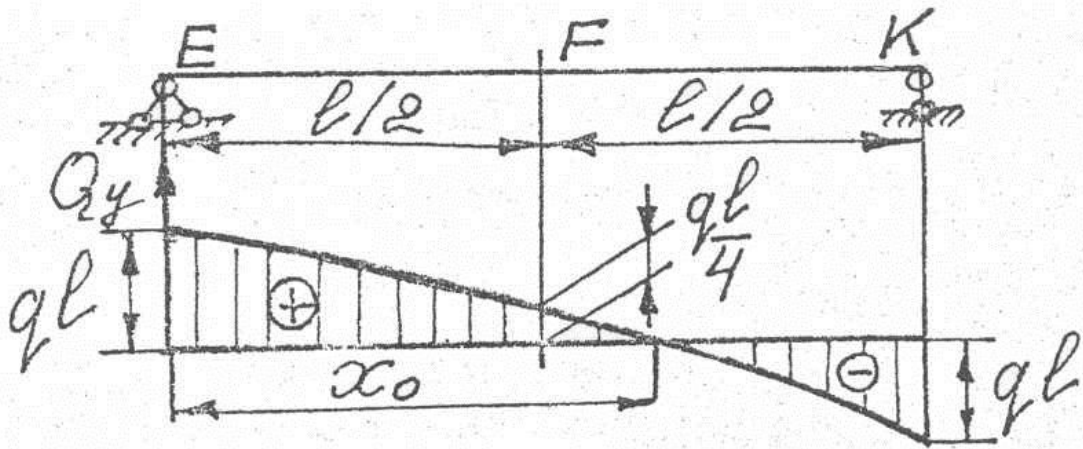


Рис. 4.31

#### 4.1.6. Решения, указания, ответы

4.1. Так как эюра  $M_z$  (см. рис. 4.26) ограничена прямыми линиями, то, следовательно, на балке отсутствует распределенная нагрузка. На эюре  $M_z$  отсутствуют скачки, что свидетельствует об отсутствии сосредоточенных внешних моментов. Таким образом, балка загружена только сосредоточенными силами. В соответствии с направлением острия изломов на эюре  $M_z$  изобразим сосредоточенные силы, действующие на балку (рис. 4.32, а). Реакция  $H_A = 0$ , так как действуют только вертикальные силы ( $\sum X = 0!$ ).

Значение реакции  $R_A$  найдем из выражения изгибающего момента в сечении С:

$$M_z(C) = R_A \cdot 1,2 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м} \Rightarrow R_A = 20,85 \text{ кН.}$$

Составляя выражения для  $M_z$  других сечений, найдем и другие сосредоточенные силы:

$$M_z(B) = -P_2 \cdot 0,6 = -25 \text{ кН}\cdot\text{м} \Rightarrow P_2 = 41,7 \text{ кН,}$$

$$M_z^{\text{прав}}(K) = -P_2 \cdot 1,2 + R_B \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow R_B = 83,4 \text{ кН,}$$

$$M_z^{\text{лев}}(K) = R_A \cdot 1,8 - P_1 \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow P_1 = 62,55 \text{ кН.}$$



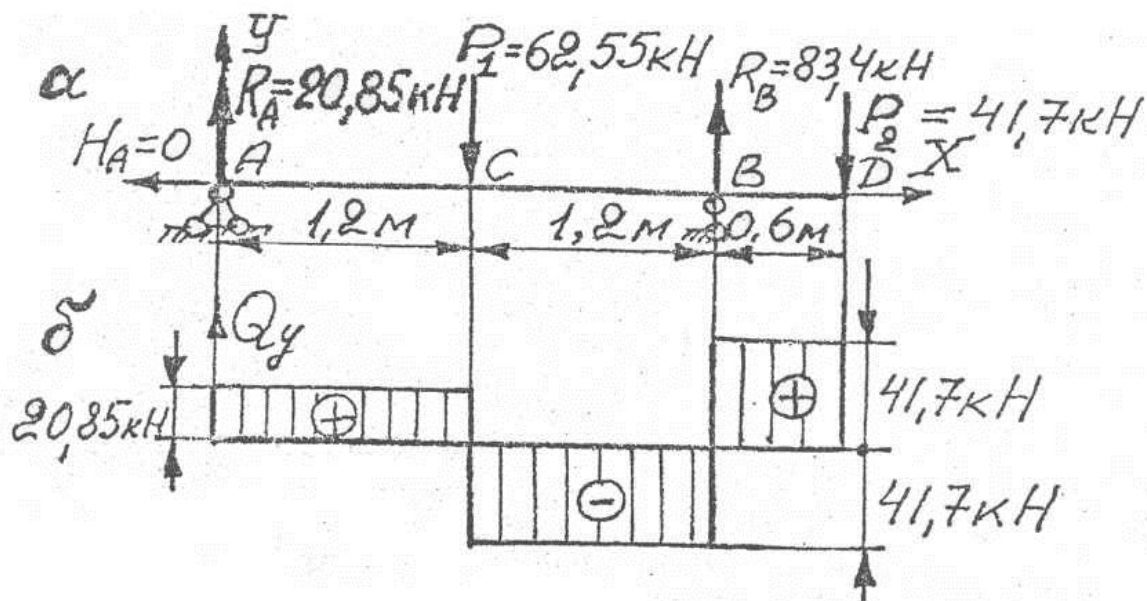


Рис. 4.32

Проверка:

$$\sum Y = 0 \quad R_A - P_1 + R_B - P_2 = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Эпюра  $Q_y$  изображена на рис. 4.32, б.

4.2. В сечении  $D$  на эпюре  $M_z$  (см. рис. 4.22) имеется скачек, что свидетельствует о наличии в этом сечении сосредоточенного момента  $M = 80$  кН·м. Направление момента легко определить, просматривая балку, например, справа налево: от значения  $M_z = -80$  кН·м в сечении  $D$  происходит скачек до значения  $M_z = 0$ , т.е. прибавляется положительное значение изгибающего момента, а это положительное значение может дать сосредоточенный момент  $M$ , направленный против часовой стрелки, тогда балка, прилегающая к сечению  $D$  слева будет изгибаться вогнутостью вверх («вода не сливается»!). На эпюре  $M_z$  в сечении  $B$  имеется излом, острие которого направлено вниз, следовательно, в этом сечении действует сосредоточенная сила – реакция опоры  $R_B$ , направленная вверх; в сечении  $D$  имеется излом, острие которого направлено вверх, следовательно, в сечении  $D$  действует сосредоточенная сила – реакция опоры  $R_D$ , направленная вниз. Для того, чтобы снять сомнения в направлении острия излома в сечении  $D$ , необходимо мысленно избавиться от скачка на эпюре, равного 80 кН·м, т.е. свести

пересечение касательных под углом  $\beta_D^{\text{прав}}$  и  $\beta_D^{\text{лев}}$  в одну точку, и тогда будет очевидно, что так как  $\beta_D^{\text{лев}} > \beta_D^{\text{прав}}$ , острие излома направлено вверх; в сечении  $K$  острие направлено вверх и, следовательно, в этом сечении действует сосредоточенная сила  $P$ , направленная вниз (рис. 4.33, а).

На участке  $AB$  действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q_1 < 0$  (направлена вниз), аналогично на участке  $BC$  действует  $q_2 < 0$ , а на участке  $CD$  действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q_3 > 0$  (направлено вверх).

Значение силы  $P$  найдем, записав выражение для изгибающего момента в сечении  $D$  при просмотре балки справа налево:

$$M_z(D) = -P \cdot 2 = -80 \text{ кН}\cdot\text{м} \Rightarrow P = 40 \text{ кН}.$$

При просмотре балки справа налево запишем выражения для изгибающих моментов в сечении 2–2 и  $C$ :

$$M_z(2-2) = -P \cdot 5 + M - R_D \cdot 3 + q_3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -90 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad (1)$$

$$M_z(C) = -P \cdot 8 + M - R_D \cdot 6 + q_3 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 0. \quad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), получим, что  $R_D = 20 \text{ кН}$ ,  
 $q_3 = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ .

Из выражения для  $M_z$  в сечении  $B$  (при просмотре балки слева направо):  $M_z(B) = -q_1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -80 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , получим, что  $q_1 = 40 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ .

Решив совместно уравнения (3) и (4), получим значения  $q_2$ ,  $R_B$ :

$$M_z(1-1) = -q_1 \cdot 2(1 + 2,5) + R_B \cdot 2,5 - q_2 \cdot 2,5 \cdot \frac{2,5}{2} = 45 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_z(C) = -q_1 \cdot 2(1 + 4) + R_B \cdot 4 - q_2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 0,$$

откуда  $q_2 = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ,  $R_B = 180 \text{ кН}$ .

Нагрузки на балку показаны на рис. 4.33, а, а эпюра  $Q_y$  изображена на рис. 4.33, б.

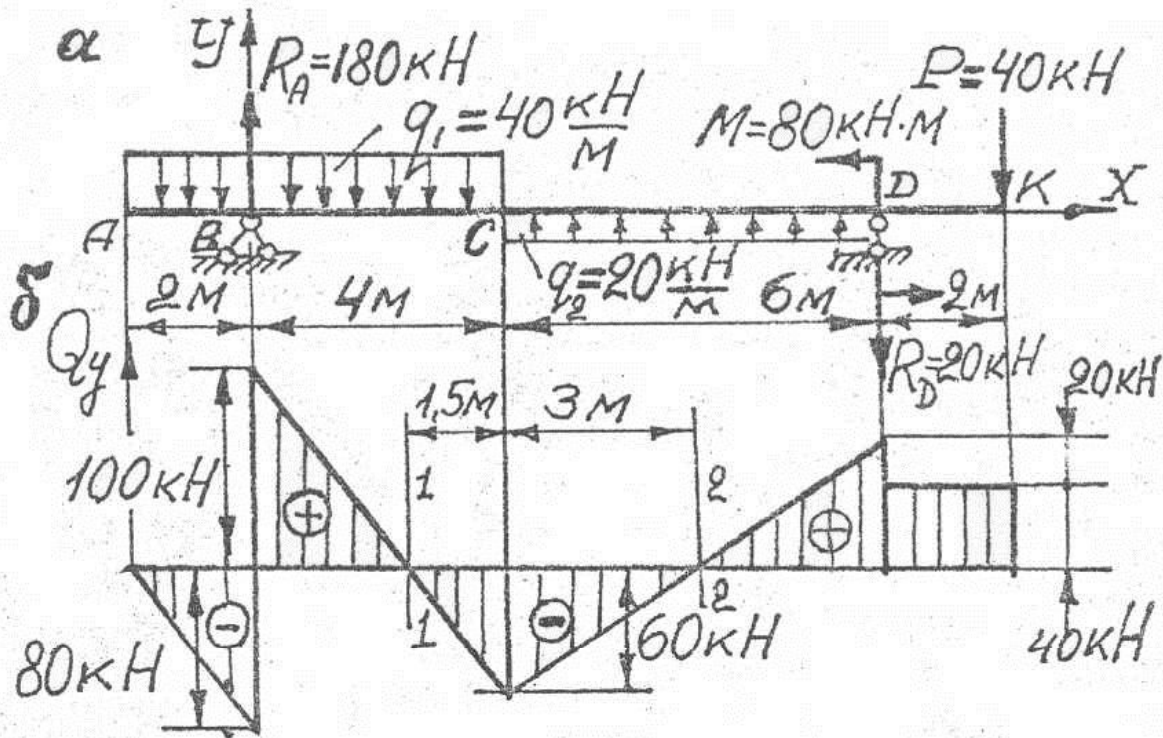


Рис. 4.33

4.3 (к рис. 4.28). Из вида эпюры  $Q_y$  следует, что в сечении  $A$  (на левой опоре) действует сосредоточенная сила – реакция  $R_A = \frac{Z}{2}$  и направленная вниз, а в сечении  $B$  (на правой опоре) реакция  $R_B = \frac{Z}{2}$  и направленная вверх (рис. 4.34).

На пролете  $AB$  отсутствуют сосредоточенные силы (нет скачков на эпюре  $Q_y$ ), распределенная нагрузка  $q = \frac{dQ_y}{dx} = 0$ , так как  $Q_y = \text{const}$ , сосредоточенные моменты (нет скачков на эпюре  $M_z$ ).

На участке  $BC$ , при просмотре балки справа налево,  $M_z$  возрастает за счет действия только реакции  $R_B$ , так как  $R_B \cdot \frac{l}{2} = M_z(C) = \frac{Z \cdot l}{4}$ .

На участке  $AC$  реакция  $R_A$  создает отрицательный изгибающий момент величиной, в сечении с абсциссой  $x$ , равной  $M_z = -R_A \cdot x = -\frac{Z}{2}x$ , но в действительности на участке  $AC$  изгибающий момент линейно возрастает, что следует из эпюры  $M_z$  (см. рис. 4.28). Учитывая вышесказанное, на участке  $AC$  должна действовать равномерно распределенная моментная нагрузка интенсивностью  $m \left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} \right]$ , направленная по часовой стрелке, т.е. создающая положительный изгибающий момент  $M_z$ , которая вместе с реакцией  $R_A$  должна дать в сечении  $C$   $M_z(C) = Z \cdot l / 4$ , т.е.

$$M_z(C) = Z - R_A \cdot \frac{l}{2} + m \cdot \frac{l}{2} = -\frac{Z}{2} \cdot \frac{l}{2} + m \frac{l}{2} = \frac{Zl}{4},$$

откуда  $Z = m$  (см. рис. 4.34).

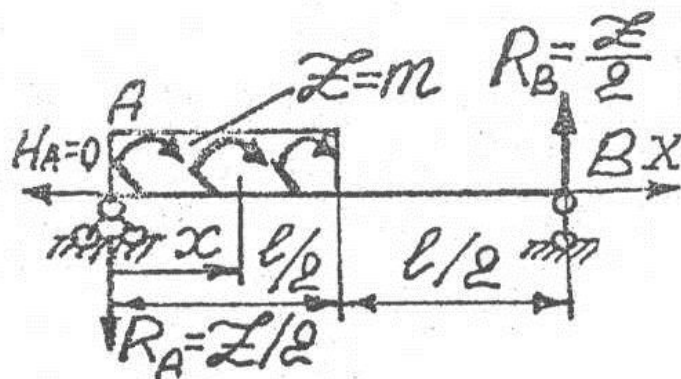


Рис. 4.34

4.3 (к рис. 4.29). Проведя аналогичные к решению 4.3 (к рис. 4.28) рассуждения, получим, что к балке приложена равномерно распределенная моментная нагрузка интенсивностью  $m$  ( $Z = m$ ), как показано на рис. 4.35.

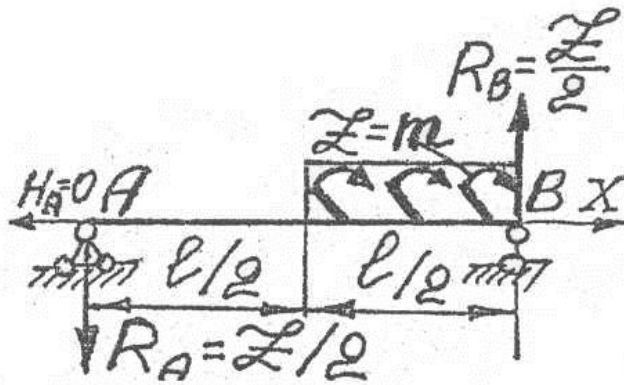


Рис. 4.35

4.3 (к рис. 4.30). Из эпюры  $Q_y$  следует, что на опоре  $A$  действует реакция  $R_A = 2 \text{ кН}$ , направленная вниз, а на опоре  $B$  – реакция  $R_B = 2 \text{ кН}$ , направленная вверх.

На крайних шарнирных опорах  $A$  и  $B$  приложены сосредоточенные моменты, равные  $M_1 = M_2 = M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , которые приложены так, что создают положительные изгибающие моменты  $M_z$  на пролете  $AB$ , т.е.  $M_1$  направлен по часовой стрелке, а  $M_2$  – против часовой стрелки (рис. 4.36).

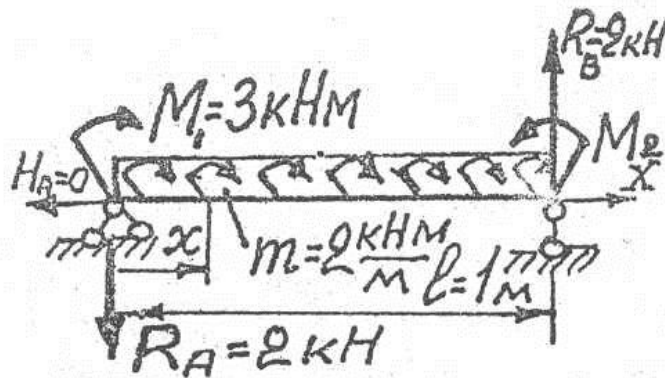


Рис. 4.36

На пролете  $AB$  отсутствуют сосредоточенные силы, сосредоточенные моменты, распределенная нагрузка.

Моменты  $M_1$  и  $M_2$  дают постоянное значение  $M_z = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Реакция же, например,  $R_A = 2 \text{ кН}$  дает переменный момент  $M_z^* = -R_A \cdot x$ ; чтобы уравновесить этот момент, т.е. его действие

свести к нулю, необходимо чтобы к балке была приложена равномерно распределенная моментная нагрузка интенсивностью  $m$ , величину которой найдем из выражения  $M_z$  для сечения с абсциссой

$$x: M_z = -R_A \cdot x + M_1 + m \cdot x = 3 \text{ кН} \cdot \text{м} \Rightarrow m = 2 \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{м}}.$$

Восстановленная нагрузка на балку и значение опорных реакций приведены на рис. 4.36. Здесь  $H_A = 0$ , так как действуют только вертикальные силы и  $\sum X = 0$ .

4.4. 1. Из эпюры  $Q_y$  (см. рис. 4.31) следует, что на пролете  $EK$  действует распределенная нагрузка интенсивностью  $q(x)$ .

2. Так как  $Q_y$  меняется по закону квадратной параболы, то  $M_z$  должен меняться по закону кубической параболы; общий вид уравнения для  $M_z$  будет  $M_z = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ , тогда

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx} = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad q(x) = \frac{dQ_y}{dx} = 6Ax + 2B,$$

т.е.  $q(x)$  меняется по линейному закону.

3. Найдем коэффициенты  $A, B, C, D$  из граничных условий:

$$\text{при } x = 0 \quad Q_y = ql \text{ (см. рис.4.33)} \Rightarrow C = ql,$$

при  $x = 0,5l$

$$Q_y = 3A(0,5l)^2 + 2B \cdot 0,5l + C = \frac{ql}{4}, \quad (1)$$

при  $x = l$

$$Q_y = 3A \cdot l^2 + 2Bl + C = -ql \quad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), получим, что  $B = -\frac{q}{2}$ ,  $A = -\frac{q}{3l}$ .

При  $x = 0$ , по условию задачи  $M_z = M_E = 0$ , откуда  $D = 0$ .

4. Итак,  $q(x) = -\frac{2q}{l}x - q$ , т.е. при любом значении  $x$   $q(x) < 0$

(нагрузка направлена вниз), при этом при  $x = 0$   $q(x) = -q$  (значение интенсивности в сечении над левой опорой  $E$ ); при  $x = l$   $q(x) = -3q$  (значение интенсивности в сечении над правой опорой  $K$ ).

$$5. Q_y = -\frac{q}{l}x^2 - qx + ql.$$

При  $x=0$   $Q_y = ql = R_E$ ; реакция направлена вверх, так как создает положительную перерезывающую силу (стремится повернуть часть балки по часовой стрелке по отношению к сечению с абсциссой  $x$ ).

При  $x=l$   $Q_y = -ql = R_K$ ; реакция направлена вверх, так как создает отрицательную перерезывающую силу  $Q_y$ .

Приравняв выражение  $Q_y$  к нулю, найдем значение абсциссы  $x_0$ , при котором  $Q_y$  переходит через нуль:

$$-\frac{q}{l}x_0^2 - qx_0 + ql = 0 \Rightarrow x_0 = 0,62l.$$

$$6. M_z = -\frac{q}{3l}x^3 - \frac{q}{2}x^2 + ql \cdot x.$$

При  $x=0$  получаем  $M_z = 0$ , что соответствует условию задачи.

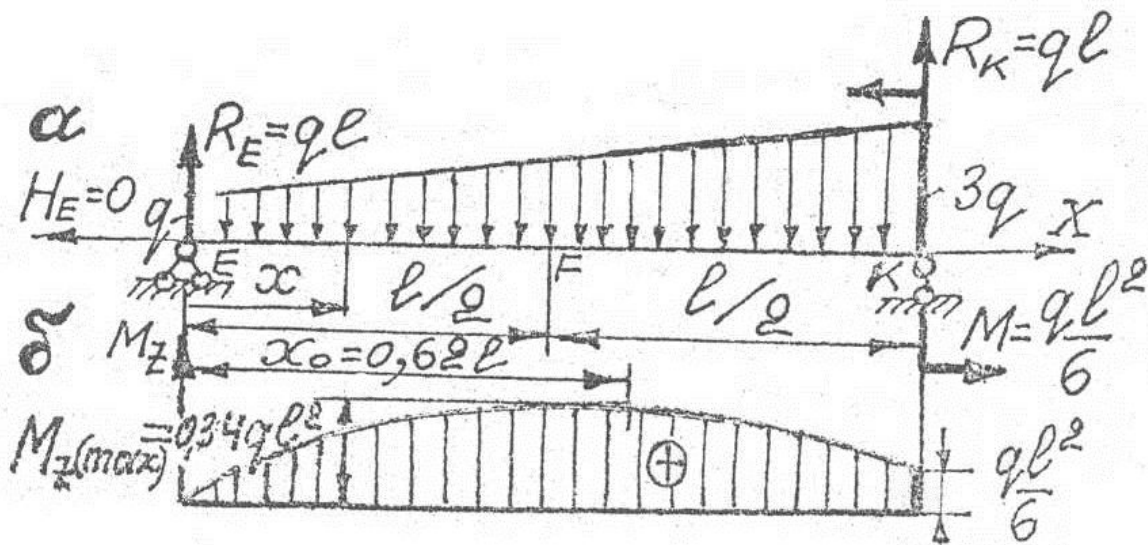


Рис. 4.37

При  $x=l$   $M_z = \frac{1}{6}ql^2$ , т.е. на правой концевой опоре действует сосредоточенный момент  $M = \frac{1}{6}ql^2$ , направленный против часо-

вой стрелки, т.е. создающий положительную кривизну оси балки (вода не сливается!).

$$\text{При } x = x_0 \quad M_z = M_z(\max) = 0,34ql^2.$$

Восстановленная нагрузка на балку представлена на рис. 4.37, а, а эпюра изгибающего момента – на рис. 4.37, б.

## 4.2. Напряжения и расчеты на прочность при плоском изгибе

### 4.2.1. Основные положения

Деформация по высоте сечения балки, расчетная схема которой представлена на рис. 4.38, а, определяется выражением:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\rho} \cdot y, \quad (4.6)$$

где  $x$  – продольная ось балки;  $y$  – расстояние от нейтральной  $n - n$  оси сечения до рассматриваемой точки поперечного сечения;  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя, т.е. слоя, не испытывающего ни продольных, ни поперечных линейных деформаций (для него  $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$ ). Вместе с тем нейтральный слой искривляется при изгибе, как в продольном, так и в поперечном направлении (см. рис. 4.38, г, ж).

Из теории чистого изгиба известно, что кривизна

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}, \quad (4.7)$$

где  $M_z$  – изгибающий момент;  $J_z$  – момент инерции относительно оси  $z$  (нейтральной оси  $n - n$ , являющейся **главной центральной осью**).

Выражение (4.7), по сути, является законом Гука для чистого изгиба. Действительно, умножив правую и левую части выражения

(4.7) на  $y$ , получим  $\frac{1}{\rho} \cdot y = \frac{M_z \cdot y}{J_z} \cdot \frac{1}{E}$  или  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ , так как

$$\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{J_z}. \quad (4.8)$$



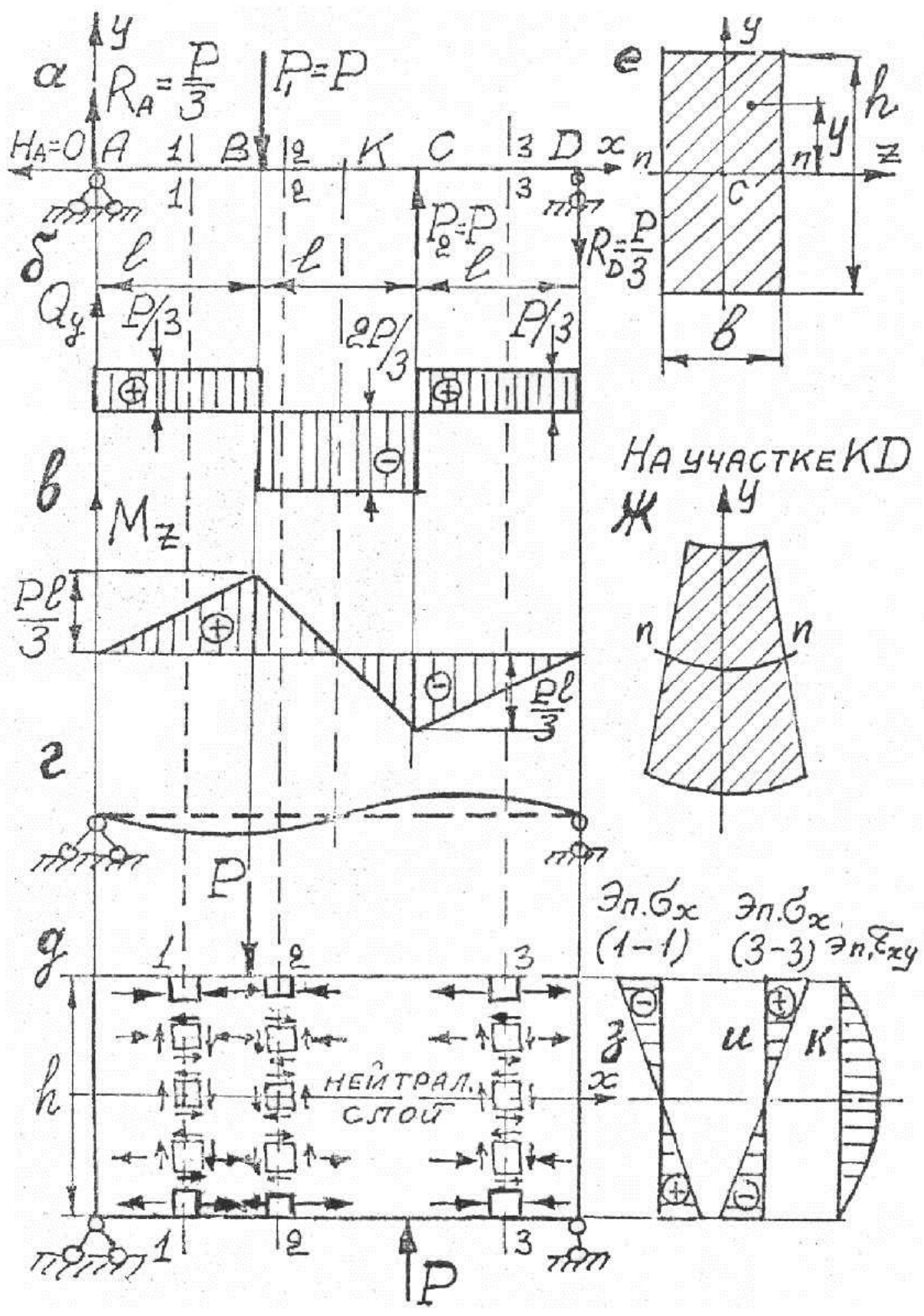


Рис. 4.38

При чистом изгибе имеет место одноосное напряженное состояние, продольные волокна испытывают чистое растяжение (сжатие), при этом не надавливают друг на друга, и не сдвигаются относительно друг друга.

По формуле (4.8) определяются нормальные напряжения как при чистом ( $M_z \neq 0, Q_y = 0$ ), так и при поперечном изгибе ( $M_z \neq 0, Q_y \neq 0$ ).

Касательные напряжения при поперечном изгибе определяются формулой Журавского:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отс}}(y)}{J_z \cdot b(y)}, \quad (4.9)$$

где  $b(y)$  – ширина сечения на уровне  $y$ , т.е. на уровне точки, в которой определяется напряжение;  $S_z^{\text{отс}}(y)$  – статический момент относительно оси  $z$  отсеченной части площади сечения, лежащей выше (ниже!) уровня  $y$ .

Последнее утверждение («ниже!») подтверждается следующим. Пусть имеем сечение (рис. 4.39), для которого известно положение центра тяжести  $C$ , а следовательно, и положение нейтральной оси  $z$ . Требуется найти напряжение в точке  $K$ , лежащей на уровне  $y$ . Статический момент площади всего сечения относительно оси  $z$ , как центральной оси, равен  $S_z = S_z^{\text{верх}} + S_z^{\text{низ}} = 0$ , откуда  $|S_z^{\text{верх}}| = |S_z^{\text{низ}}|$ . Очевидно, что подсчитать  $S_z^{\text{верх}}$  для данно-

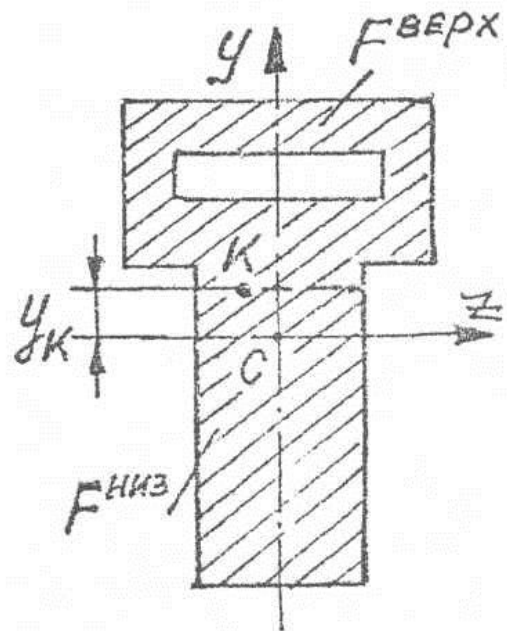


Рис. 4.39

го сечения гораздо сложнее, чем подсчитать  $S_z^{\text{низ}}$ , таким образом в этом случае лучше воспользоваться положением «ниже!».

**Определение знаков нормальных и касательных напряжений.** Нормальные напряжения определяем формулой:

$$\sigma_x = \frac{|M_z| |y|}{J_z}, \quad (4.10)$$

где  $M_z$  и  $y$  входят по модулю, о чем памятуя в дальнейшем, записывать будем формулу (4.10) в виде (4.8).

Знак  $\sigma_x$  определяется эюрой  $M_z$ , что и выполним для балки рис. 4.38, *д*, где для удобства рассмотрения балка изображена высотой  $h$ . Рассмотрим определение знаков напряжений в ряде сечений. В сечении 1–1 эюра  $M_z$  расположена над базовой линией, т.е. все верхние волокна (волокна выше нейтрального слоя) испытывают сжатие (см. положение 4.3.12 темы 4), а тогда волокна ниже нейтрального слоя – растяжение. Аналогичную картину имеем и в сечении 2–2. В сечении 3–3 эюра  $M_z$  располагается под базовой линией, и следовательно,

все волокна ниже нейтрального слоя испытывают сжатие, а тогда волокна расположенные выше нейтрального слоя – растяжение. Эюры  $\sigma_x(1-1)$  и  $\sigma_x(3-3)$  представлены на рис. 4.38, *з, и*.

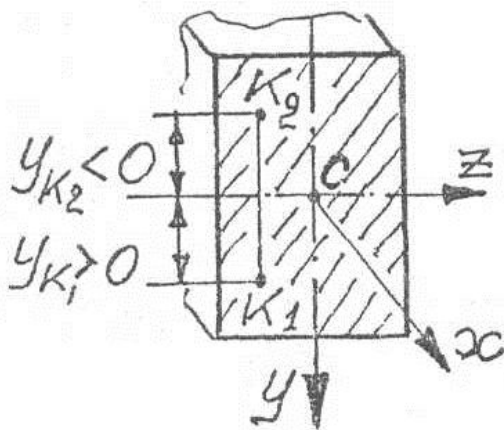


Рис. 4.40

В учебных пособиях можно встретить и другой прием определения знака  $\sigma_x$ . В поперечном сечении в отличие от рис. 4.38, *е* ось  $y$  направляется обязательно вниз, как показано на рис. 4.40. Пользуются формулой (4.8), записывая  $M_z$  и  $y$  по алгебраической величине. Так, для сечения

1–1 (рис. 4.38)  $M_z > 0$ ,  $y_{K_1} > 0$ , а  $y_2 < 0$ , тогда

$$\sigma_x(K_1) = \frac{M_z \cdot y_{K_1}}{J_z} > 0, \quad \sigma_x(K_2) = \frac{M_z (-y_{K_2})}{J_z} < 0. \quad \text{Математически}$$

все строго, но, по нашему мнению, теряется понимание физического смысла характера деформирования балки при изгибе, да и о не совсем обычном направлении оси  $y$  вниз легко забывается.

Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  в поперечном сечении совпадают по направлению с перерезывающей силой и, следовательно, их знак определяется знаком  $Q_y$ .

При решении задач часто пользуются формулами, полученными из условия эквивалентности:

$$Q_y = \int \tau_{xy} \cdot dF', \quad (4.11)$$

$$M_z = \int \sigma_x \cdot y \cdot dF'. \quad (4.12)$$

Основное условие прочности при изгибе имеет вид

$$\sigma_x(\max) = \frac{M_z(\max) \cdot y_{\max}}{J_z} = \frac{M_z(\max)}{W_z} \leq |\sigma|, \quad (4.13)$$

где  $W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}$  – неинтегрируемая геометрическая характеристика,

так называемый осевой момент сопротивления; очевидно, что чем больше  $W_z$ , тем меньше напряжение  $\sigma_x$ .

С помощью условия прочности (4.13) решаются три задачи.

1. Производится проверочный расчет, т.е. проверяем условие  $\sigma_x(\max) \leq |\sigma|$ .

2. Производится проектировочный расчет. Так, из (4.13) имеем, что  $W_z \geq M_z(\max)/|\sigma|$ , а  $W_z$  является функцией размеров поперечного сечения.

3. Осуществляется расчет грузоподъемности. Из (4.13) имеем, что  $M_z(\max) \leq W_z \cdot |\sigma|$ , а изгибающий момент  $M_z = f(P, M, q)$ .

Для балок, в которых действуют большой величины касательные напряжения  $\tau_{xy}$ , что характерно для коротких балок, у которых в силу малых плеч сил малы и изгибающие моменты, а следовательно, и  $\sigma_x$ , необходимо проводить проверку по условию прочности по касательным напряжениям.

$$\tau_{xy}(\max) = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отв}}(\max)}{J_z \cdot b(y)} \leq |\tau|. \quad (4.14)$$

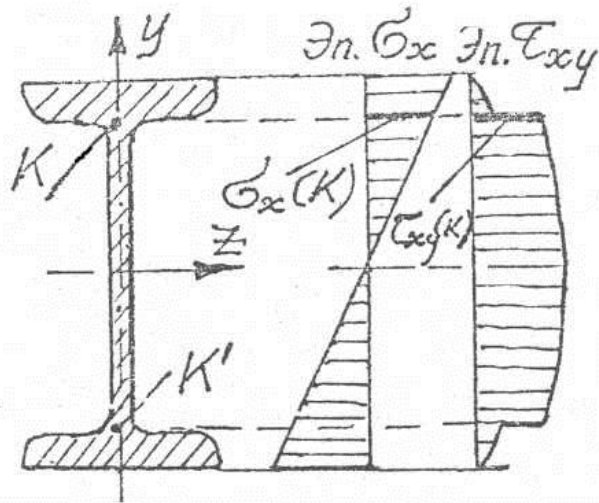


Рис. 4.41

Для балок, имеющих поперечное сечение, например, в виде двутавра (рис. 4.41) проводят проверку прочности и по главным напряжениям для точки  $K(K')$ , где имеет место наиболее неблагоприятное сочетание  $\sigma_x(K)$  и  $\tau_{xy}(K)$ :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x(K)}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2(K)}{4} + \tau_{xy}^2(K)} \leq [\sigma]. \quad (4.15)$$

#### 4.2.2. Задачи

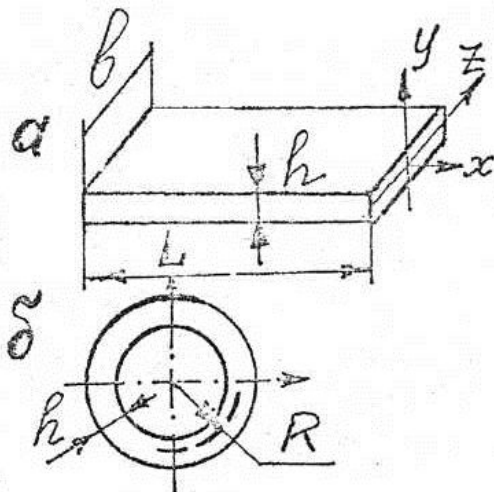


Рис. 4.42

**Задача 4.5.** Металлическую полосу (рис. 4.42, а) нужно свернуть в кольцо (рис. 4.42, б), не сообщая ей остаточных деформаций. Определить  $L$ , если известно  $E$ ,  $h$ ,  $b$  и все механические характеристики прочности.

**Задача 4.6.** Какой размер ширины  $b(x)$  должен иметь брус, вырезанный из полосы постоянной толщины  $h = 10$  мм и длиной  $l = 1$  м (рис. 4.43, а), который плотно прилегал бы к цилиндру

радиусом  $R = 5$  м под нагрузкой  $P = 0,5$  кН (рис. 4.43, б). Принять  $[\sigma] = 200$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

**Задача 4.7.** Стальная линейка, имеющая поперечное сечение  $0,08 \times 5$  см<sup>2</sup> и длину  $l = 25$  см, изгибается в плоскости наименьшей жесткости по дуге в  $60^\circ$  парами сил, приложенными по концам. Определить наибольшее напряжение в линейке.

**Задача 4.8.** Балка круглого поперечного сечения состоит из сердечника 1 и трубы 2 (рис. 4.44), проскальзывание между которыми не происходит. Балка изгибается моментами  $M$ . Найти напряжения в стержнях и построить эпюру напряжений, если  $E_1 = 4E_2 = 4E$ .

**Задача 4.9.** Найти  $\tau_{xy}(\max)$  и построить эпюру касательных напряжений для балки, испытывающей плоский изгиб. Поперечное сечение балки имеет форму равнобедренного треугольника высотой  $h$  и основанием  $b$ .

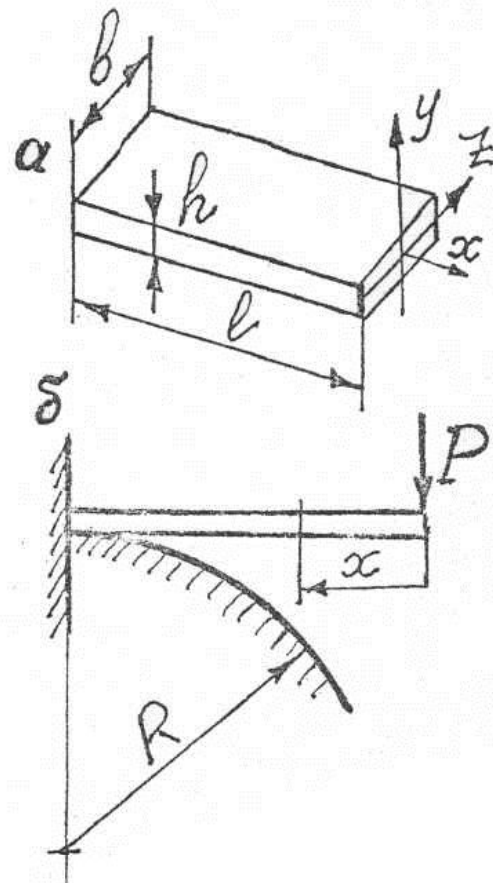


Рис. 4.43

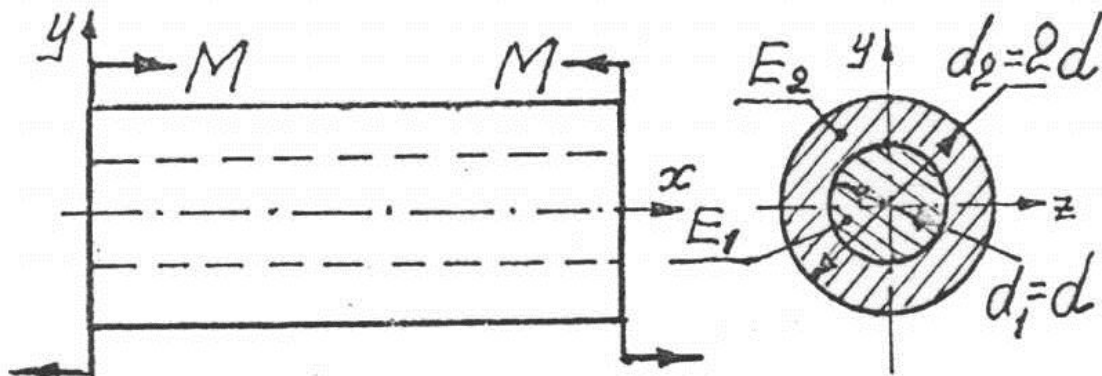


Рис. 4.44

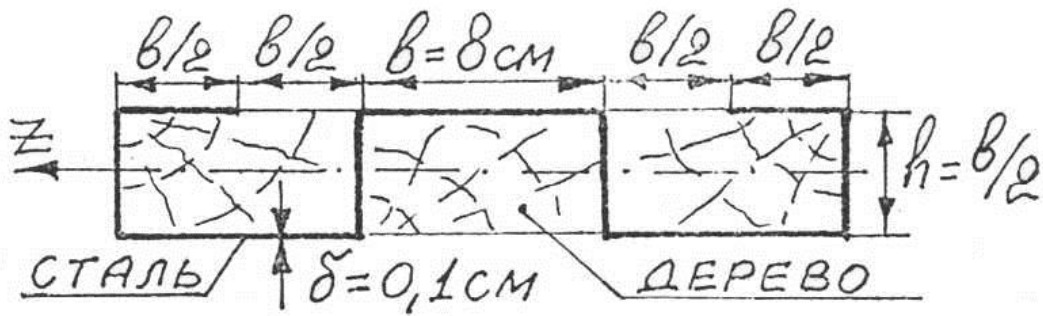


Рис. 4.45

**Задача 4.10.** В целях использования для балки узких досок была предложена конструкция, приведенная на рис. 4.45. Какой максимальный изгибающий момент выдержит такая балка, если  $[\sigma]_{\text{ст}} = 120 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_{\text{д}} = 13 \text{ МПа}$ ,  $E_{\text{ст}} = 20E_{\text{д}}$ ?

**Задача 4.11.** Из условия прочности вычислить наименьшее допускаемое значение  $h$  для балки (рис. 4.46), если  $P = 20 \text{ кН}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $l = 3 \text{ м}$ . Поперечное сечение балки – прямоугольник с постоянной по всей длине балки шириной  $b = 0,4h$ .

**Задача 4.12.** Установить длину двутавровой балки № 20, при которой наибольшие касательные напряжения в точках  $K_1$  и  $K_2$  будут одинаковыми (рис. 4.47). Показать площадки, по которым действуют эти напряжения, если известно, что для сечения двутавра  $J_z = 1840 \text{ см}^2$ ,  $S_z(\text{max}) = 104 \text{ см}^3$ ,  $d = 0,52 \text{ см}$ .

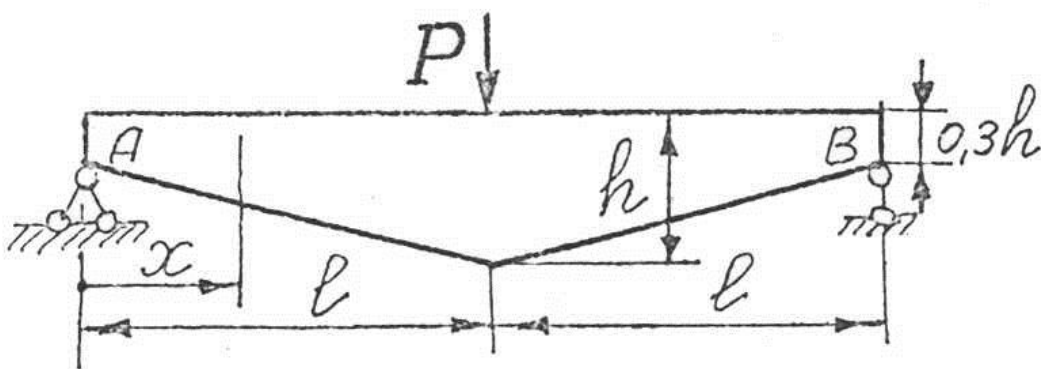


Рис. 4.46

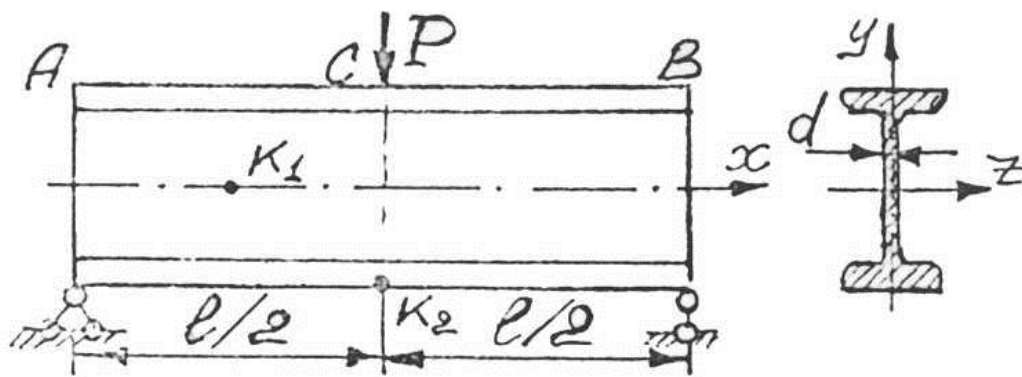


Рис. 4.47

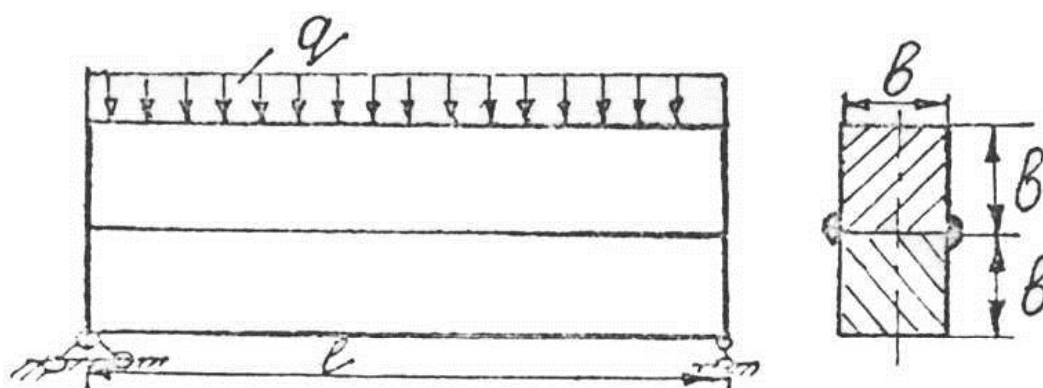


Рис. 4.48

**Задача 4.13.** Два одинаковых металлических бруса квадратного сечения свободно уложены друг на друга и загружены равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  (рис. 4.48). В нагруженном состоянии брусья свариваются по длине. Определить в опасном сечении остаточные напряжения после снятия нагрузки, показать эпюры напряжений. При решении сварочными напряжениями и трением между брусьями пренебречь.

**Задача 4.14.** Определить грузоподъемность консольной балки с поперечным сечением в виде равнобедренного треугольника (рис. 4.49), если допускаемое напряжение для материала балки на растяжение  $[\sigma]_p = [\sigma]$ , а на сжатие  $[\sigma]_c = 4[\sigma]$ .

**Задача 4.15.** На каком расстоянии  $a < 0,5l$  необходимо расположить опору  $A$  (рис. 4.50), чтобы балка постоянного поперечного сечения по длине обладала бы наибольшей несущей способностью?



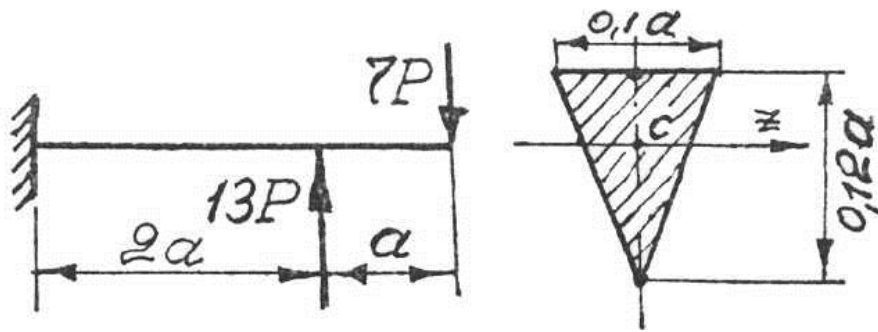
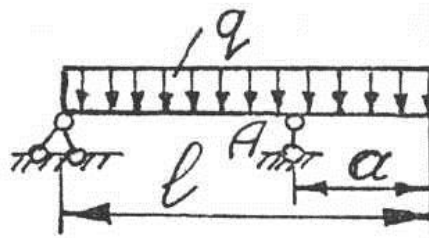


Рис. 4.49

Рис. 4.50



### 4.2.3. Решения, указания, ответы

4.5. Максимальные нормальные напряжения при изгибе полосы

$$\sigma_x(\max) = \frac{M_z(\max)h/2}{J_z} \leq \sigma_{\text{упр}},$$

Кривизна  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} = \frac{M_z(\max)}{EJ_z} \Rightarrow M_z(\max) = \frac{EJ_z}{R}$ , тогда

$$\sigma_x(\max) = \frac{EJ_z h/2}{R \cdot J_z} \leq \sigma_{\text{упр}} \Rightarrow R = \frac{E \cdot h}{2\sigma_{\text{упр}}}, L = 2\pi R.$$

4.6. По гипотезе плоских сечений  $\varepsilon_x = \frac{1}{\rho} \cdot y$ , тогда для крайних волокон (верхнего или нижнего), с учетом, что  $y = h/2$ ,  $\rho = R$ ,

имеем  $\varepsilon_x(\max) = \frac{\sigma_x(\max)}{E} = \frac{h}{2R}$ , откуда

$$\frac{1}{R} = \frac{2\sigma_x(\max)}{Eh}. \quad (1)$$

Так как  $\rho = R = \text{const}$ , то из (1) следует, что и  $\sigma_x(\max)$  по всей длине  $l$  бруса должно быть постоянным, т.е. брус должен иметь форму балки равного сопротивления изгибу (рис. 4.51).

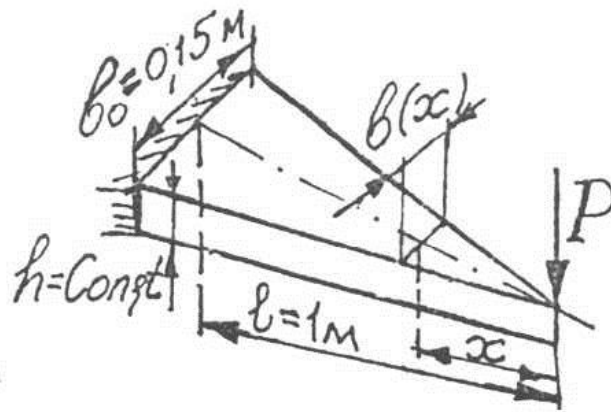


Рис. 4.51

Таким образом,

$$\sigma_x(\max) = \frac{M_z}{W_z} \Big|_{x=l} = \frac{M_z}{W_z} \Big|_x = [\sigma] \Rightarrow b(x) = \frac{6P}{h^2[\sigma]} \cdot x,$$

где  $M_z = P \cdot x$ ,  $W_z = \frac{b(x) \cdot h^2}{6}$ .

Размер ширины балки в заделке

$$b(x=l) = b_0 = \frac{6Pl}{h^2[\sigma]} = 0,15 \text{ м.}$$

Из зависимости кривизны балки от изгибающего момента

$$\frac{1}{R} = \frac{M_z}{EJ_z}, \text{ где } M_z = P \cdot x, J_z = \frac{b(x) \cdot h^3}{12}, \text{ найдем}$$

$$b(x) = \frac{P \cdot x \cdot 12 \cdot R}{Eh^3} = 0,15x.$$

При  $x = l = 1 \text{ м}$  (сечение заделки)  $b_0 = 0,15 \text{ м}$ .

Отметим, что при  $R > 5$  ( $b(x) > 0,15x$ ) напряжения  $\sigma_{x(\max)}$  будут меньше  $[\sigma]$ , и балка будет работать с недогрузкой. При  $R < 5 \text{ м}$  ( $b(x) < 0,15x$ ) напряжения  $\sigma_{x(\max)} > [\sigma]$ , так, например, уже при  $R = 4 \text{ м}$   $\sigma_{x(\max)} = 250 \text{ МПа}$ , т.е. превышают  $[\sigma]$  на 25 %, что совершенно недопустимо.

В месте приложения силы  $P$  балка должна иметь площадку.

4.7. Радиус кривизны  $\rho$  определится из соотношения  $\frac{l}{60^\circ} = \frac{2\pi\rho}{360^\circ}$ ,

откуда  $\rho = \frac{6l}{2\pi}$ .

$$\sigma_x(\max) = E\varepsilon_x(\max) = E \frac{y_{\max}}{\rho} = \frac{E \cdot y_{\max} \cdot 2\pi}{6 \cdot l}.$$

При  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $l = 0,25$  м,  $y_{\max} = \frac{\delta}{2} = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{2} = 4 \cdot 10^{-4}$  м

получаем  $\sigma_x(\max) = 335$  МПа.

4.8. Найдем  $M_z^{(1)}$  и  $M_z^{(2)}$  из совместного решения уравнений (1\*) и (2\*):

$$M = M_z^{(1)} + M_z^{(2)}, \quad (1^*)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z^{(1)}}{E_1 J_z^{(1)}} = \frac{M_z^{(2)}}{E_2 J_z^{(2)}}, \quad (2^*)$$

откуда

$$M_z^{(1)} = M \frac{E_1 J_z^{(1)}}{E_1 J_z^{(1)} + E_2 J_z^{(2)}}, \quad M_z^{(2)} = M \frac{E_2 J_z^{(2)}}{E_1 J_z^{(1)} + E_2 J_z^{(2)}}.$$

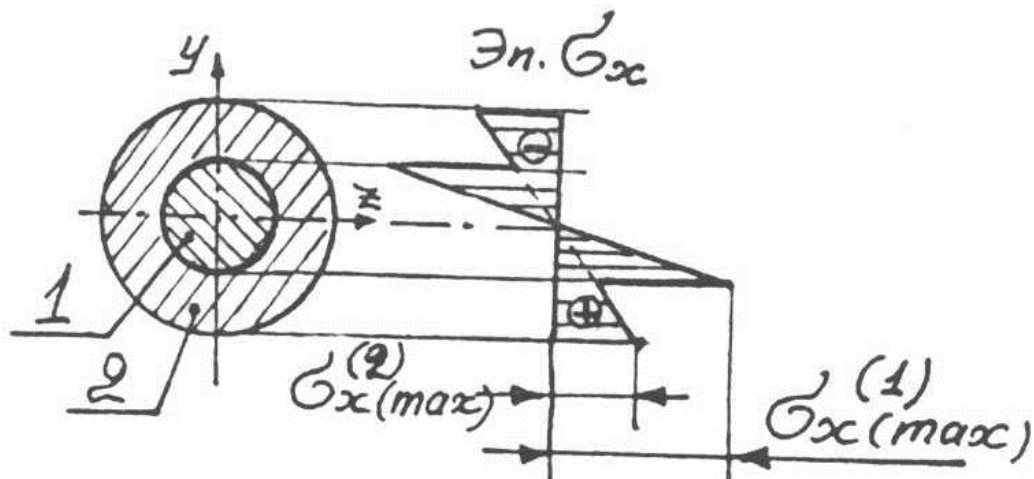


Рис. 4.52

Найдем максимальные напряжения

$$\sigma_x^{(1)}(\max) = \frac{M_z^{(1)} \cdot d_1 / 2}{J_z^{(1)}} = \frac{2M \cdot E \cdot d}{E_1 J_z^{(1)} + E_2 J_z^{(2)}},$$

$$\sigma_x^{(2)}(\max) = \frac{M_z^{(2)} \cdot d_2 / 2}{J_z^{(2)}} = \frac{M \cdot E \cdot d}{E_1 J_z^{(1)} + E_2 J_z^{(2)}}.$$

Эпюра  $\sigma_x$  приведена на рис. 4.52.

4.9. По формуле Журавского  $\tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{отс}}(y)}{J_z \cdot b(y)}$ . Так как

$$J_z = \frac{bh^3}{36}, \quad b(y) = b \left( \frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right),$$

$$\begin{aligned} S_z^{\text{отс}}(y) &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3}h - y \right) \cdot b \left( \frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right) \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3}h - y \right) + y \right] = \\ &= \frac{2}{3} \cdot b \left( \frac{h}{3} - \frac{y}{2} \right) \left( \frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right) \left( \frac{h}{3} + y \right) \end{aligned}$$

(см. рис. 4.53, а), то  $\tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{bh^3} (2h - 3y)(h + 3y)$ .

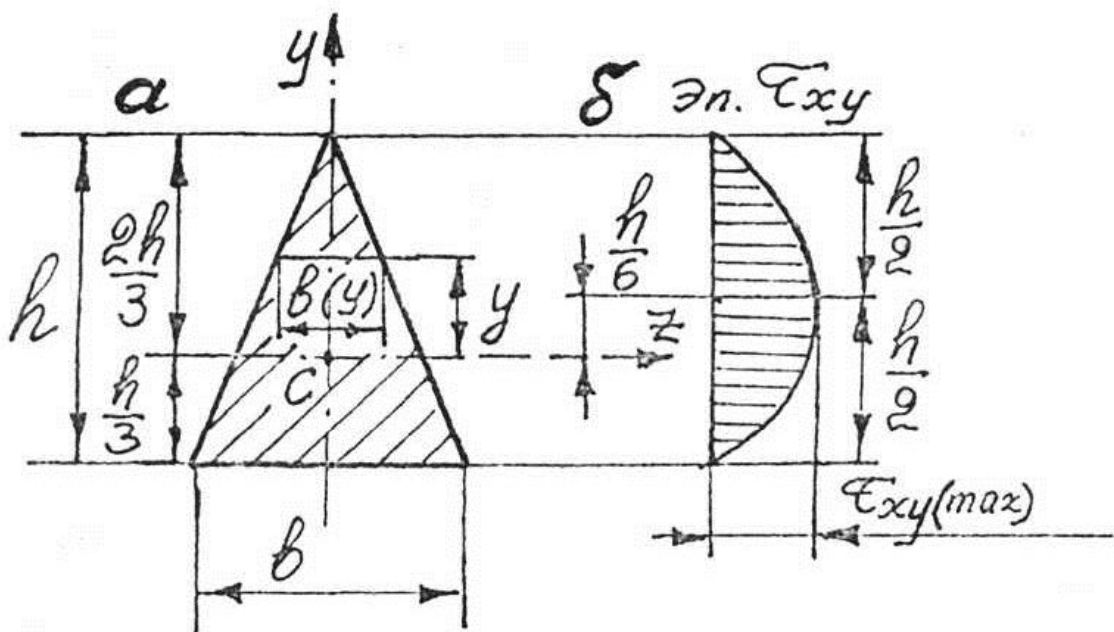


Рис. 4.53

Исследуем  $\tau_{xy}$  на экстремум и находим, что при  $y_0 = \frac{1}{6}h$

$$\tau_{xy}(\max) = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{I'}. \text{ Эпюра } \tau_{xy} \text{ представлена на рис. 4.53, б.}$$

4.10. Так как сечение по жесткости симметрично относительно оси  $z$ , то, следовательно, нейтральная ось сечения проходит посередине высоты  $h$ . Тогда

$$J_z^{\text{л}} = \frac{3b \cdot h^3}{12} = 128 \text{ см}^4,$$

$$J_z^{\text{ст}} = 4 \frac{\delta \cdot h^3}{12} + 2 \left[ \frac{2b \cdot \delta^3}{12} + \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot 2b \cdot \delta \right] = 15 \text{ см}^4.$$

Суммарный изгибающий момент в сечении будет

$$\begin{aligned} M_z &= M_z^{\text{ст}} + M_z^{\text{л}} = \int_{F_{\text{ст}}} \sigma_x \cdot y \cdot dF' + \int_{F_{\text{л}}} \sigma_x \cdot y \cdot dF' = \\ &= \frac{E_{\text{ст}}}{\rho} \int_{F_{\text{ст}}} y^2 dF' + \frac{E_{\text{л}}}{\rho} \int_{F_{\text{л}}} y^2 dF' = \frac{E_{\text{ст}}}{\rho} J_z^{\text{ст}} + \frac{E_{\text{л}}}{\rho} J_z^{\text{л}}, \end{aligned}$$

$$\text{откуда } \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E_{\text{ст}} J_z^{\text{ст}} + E_{\text{л}} J_z^{\text{л}}} = \frac{M_z}{E_{\text{л}} (20 J_z^{\text{ст}} + J_z^{\text{л}})}.$$

Условия прочности будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\text{ст}}(\max) &= E_{\text{ст}} \cdot \varepsilon_x^{\text{ст}}(\max) = E_{\text{ст}} \cdot \frac{y_{\max}}{\rho} = \\ &= \frac{E_{\text{ст}} \cdot h}{2} \cdot \frac{M_z}{E_{\text{л}} (20 J_z^{\text{ст}} + J_z^{\text{л}})} \leq |\sigma|_{\text{ст}}, \end{aligned}$$

откуда  $[M]' = 128,4 \text{ кН} \cdot \text{см}.$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\text{л}}(\max) &= E_{\text{л}} \cdot \varepsilon_x^{\text{л}}(\max) = E_{\text{л}} \cdot \frac{y_{\max}}{\rho} = \\ &= \frac{E_{\text{л}} \cdot h}{2} \cdot \frac{M_z}{E_{\text{л}} (20 J_z^{\text{ст}} + J_z^{\text{л}})} \leq |\sigma|_{\text{л}}, \end{aligned}$$

откуда  $|M|'' = 278,2 \text{ кН} \cdot \text{см}.$

Принимаем  $|M| = 128,4 \text{ кН} \cdot \text{см}.$

4.11. Вертикальные опорные реакции балки (см. рис. 4.46)  $R_A = R_B = \frac{P}{2}$ ; изгибающий момент  $M_z = \frac{P}{2} \cdot x$ ; осевой момент сопротивления  $W_z = \frac{b \cdot h^2(x)}{6}$ ,  $h(x) = 0,3h + 0,7hx/l$ . Тогда в сечении с абсциссой  $x$  наибольшее напряжение

$$\sigma_x(\max) = \frac{M_z(x)}{W_z} = \frac{3Px}{bh^2(0,3 + 0,7x/l)^2}.$$

Иследуем  $\sigma_x$  на экстремум  $\frac{d\sigma_x}{dx} = 0$  и найдем абсциссу опасного сечения  $x = x_0 = 0,429l$ . Подставляя найденное значение  $x_0$  в выражение для  $\sigma_x(\max)$ , получим

$$\sigma_x(\max) = 3,6 \frac{Pl}{bh^2} = 9 \frac{Pl}{h^3} \leq [\sigma],$$

откуда  $h \geq \sqrt[3]{\frac{9Pl}{[\sigma]}} = 0,15 \text{ м.}$

4.12. Поперечная сила на участке  $AC$  (см. рис. 4.47) равна опорной реакции  $Q_y = R_A = \frac{P}{2}$ , а изгибающий момент в сечении  $C$  равен  $\frac{Pl}{4}$ .

Наибольшее касательное напряжение в точке  $K_1$  равно касательному напряжению в поперечном сечении посередине высоты  $h$  и определяется по формуле Журавского:

$$\tau_{xy}^{(K_1)}(\max) = \frac{Q_y \cdot S_z(\max)}{J_z \cdot d} = \frac{P \cdot 104}{2 \cdot 1840 \cdot 0,52}.$$

Так как в точке  $K_2$  касательное напряжение от  $Q_y$  равно нулю, то наибольшее касательное напряжение в этой точке определится как

$$\tau_{nt}^{K_2}(\max) = \frac{\sigma_x^{(K_2)}}{2} = \frac{Pl \cdot h/2}{8 \cdot J_z} = \frac{P \cdot l \cdot 10}{8 \cdot 1840},$$

действующее на площадь под углом  $\alpha = \hat{xn} = 45^\circ$ .

Из условия  $\tau_{xy}^{(K_1)}(\max) = \tau_{nt}^{(K_2)}(\max)$  найдем  $l = 80 \text{ см.}$

4.13. Наибольший изгибающий момент в однопролетной балке, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, действует по середине пролета и равен  $M_z(\max) = \frac{ql^2}{8}$ . Так как балки совершенно одинаковы, то до сварки каждой балкой воспринимается

$$M_z^*(\max) = \frac{M_z(\max)}{2}, \text{ а } \sigma_x^*(\max) = \frac{M_z^*(\max)}{W_z^*} = \frac{ql^2 \cdot 6}{16 \cdot b^3} = \frac{3}{8} \frac{ql^2}{b^3}.$$

После сварки поперечное сечение балки работает как единое целое, т.е. для него  $W_z = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3$ . Снятие нагрузки равносильно нагружению балки нагрузкой противоположного направления по сравнению с первоначальной. Следовательно, в балке после разгрузки нижние волокна будут сжаты, а верхние растянуты, при этом

$$\sigma_x(\max) = \frac{M_z(\max)}{W_z} = \frac{3}{16} \frac{ql^2}{b^3}.$$

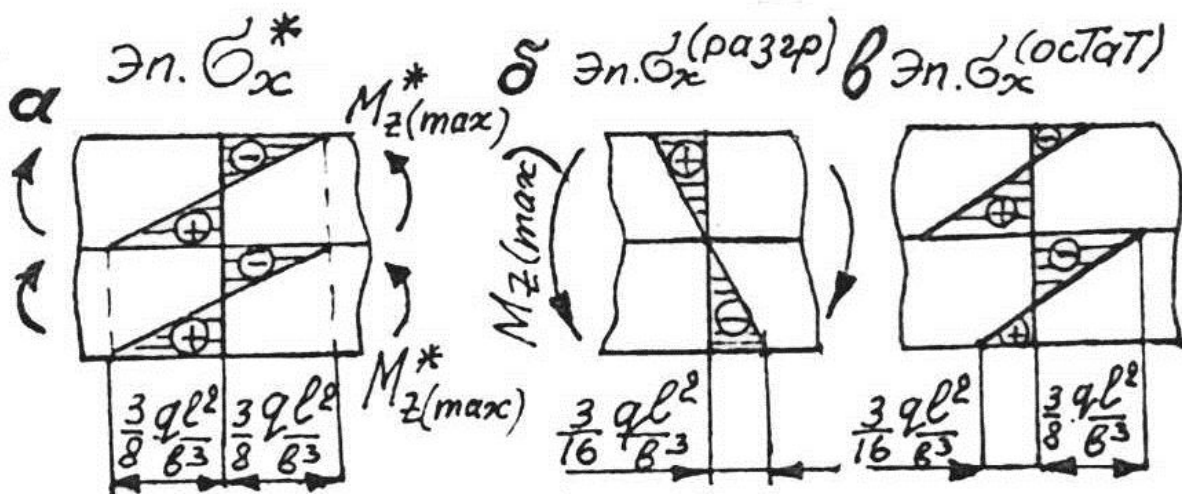


Рис. 4.54

Эпюры напряжений до сварки показаны на рис. 4.54, а, разгрузки – рис. 4.54, б, остаточных – рис. 4.54, в.

4.14. Значение допускаемой силы  $[P]$  будем искать как из условия прочности для сечения  $B$ , так и из условия прочности для сечения  $A$ , где в наиболее неблагоприятных условиях находится точка  $I$  сечения (см. рис. 4.55), в которой имеет место растяжение.

Для сечения *B*

$$\sigma_x(I) = \frac{7P \cdot a \cdot 0,08a}{J_z} \leq [\sigma]_c = 4[\sigma] \Rightarrow P' = \frac{[\sigma] \cdot J_z}{0,14 \cdot a^2};$$

$$\sigma_x(II) = \frac{7P \cdot a \cdot 0,04a}{J_z} \leq [\sigma]_p = [\sigma] \Rightarrow P'' = \frac{[\sigma] \cdot J_z}{0,28 \cdot a^2}.$$

Для сечения *A*

$$\sigma_x(I) = \frac{5P \cdot a \cdot 0,08a}{J_z} \leq [\sigma]_p = [\sigma] \Rightarrow P''' = \frac{[\sigma] \cdot J_z}{0,40 \cdot a^2}.$$

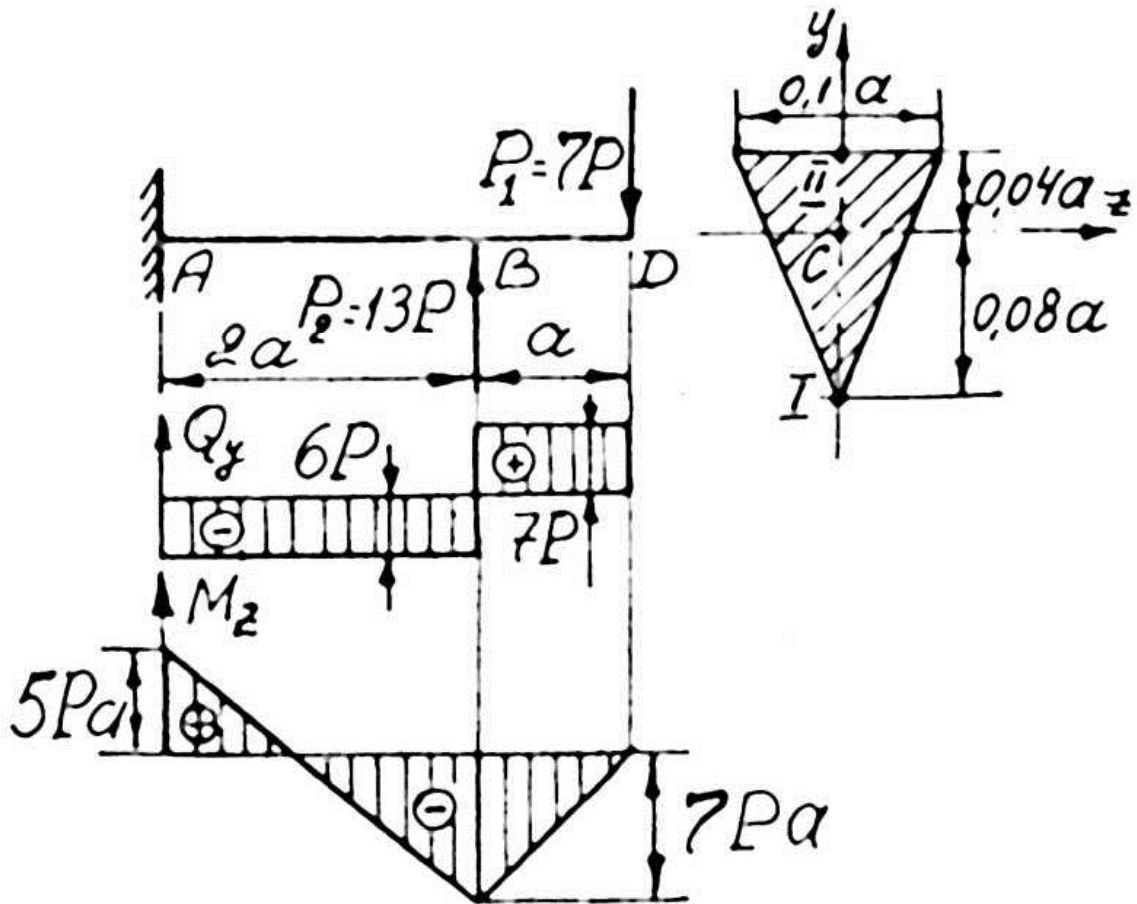


Рис. 4.55

Итак,

$$[P] = P''' = \frac{[\sigma] \cdot J_z}{0,40 \cdot a^2} = 1,2 \cdot 10^{-6} [\sigma] \cdot a^2,$$



где

$$J_z = \frac{bh^3}{36} = 48 \cdot 10^{-7} \cdot a^4.$$

4.15. На рис. 4.56 представлена расчетная схема балки, эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ .

Гипотетически балка обладала бы наибольшей несущей способностью, если бы во всех сечениях был бы одинаков  $M_{z(\max)} = [\sigma] \cdot W_z$ . Так как такого быть не может, то наибольшей грузоподъемностью балка будет обладать в том, случае если  $|M_z(1-1)| = |M_z(2-2)|$ , тогда и  $\sigma_{x(\max)}(1-1) = \sigma_{x(\max)}(2-2)$ .

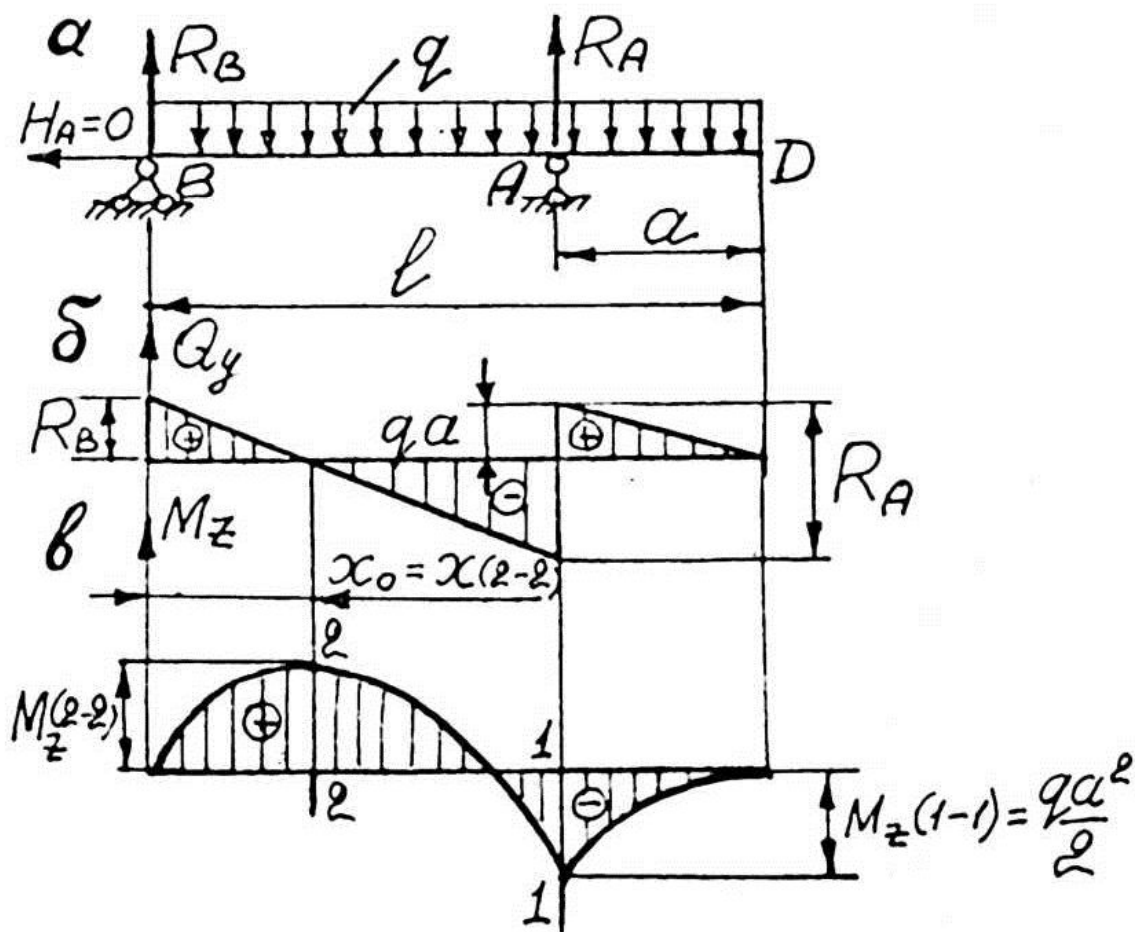


Рис. 4.56

$$M_z(1-1) = \left| \frac{qa^2}{2} \right|, \quad (*)$$

$$M_z(2-2) = R_B \cdot x_{(2-2)} - \frac{q[x_{(2-2)}]^2}{2}. \quad (**)$$

Из уравнения равновесия в виде  $\sum m_A = R_B(l-a) - ql\left(\frac{l}{2} - a\right) = 0$  найдем  $R_B = ql \cdot \frac{l-2a}{2(l-a)}$ .

На участке  $AB$  нас будет интересовать абсцисса того сечения, в котором действует  $M_{z(\max)}(2-2)$ .

Из  $Q_y(2-2) = R_B - qx_{(2-2)} = 0$  найдем  $x_0 = l \frac{l-2a}{2(l-a)}$ . Тогда подставляя вместо  $x_{(2-2)}$  значение  $x_0$  в (\*\*), и приравнявая  $M_z(2-2) = M_z(1-1)$ , найдем  $a = 0,293l$ .

## Тема 5

### ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БАЛКАХ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

#### 5.1. Предварительные замечания

Под действием внешних сил ось балки искривляется (рис. 5.1) и сечения балки получают линейные и угловые перемещения  $u$ ,  $y$ ,  $\theta$ . Перемещение  $u$  настолько мало, что им можно пренебречь, тогда изогнутая ось балки или, иначе, упругая линия балки будет иметь вид  $AB_1$ , показанный на рис. 5.2, где  $y$  – прогиб сечения  $x$ , т.е. перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки в плоскости изгиба.

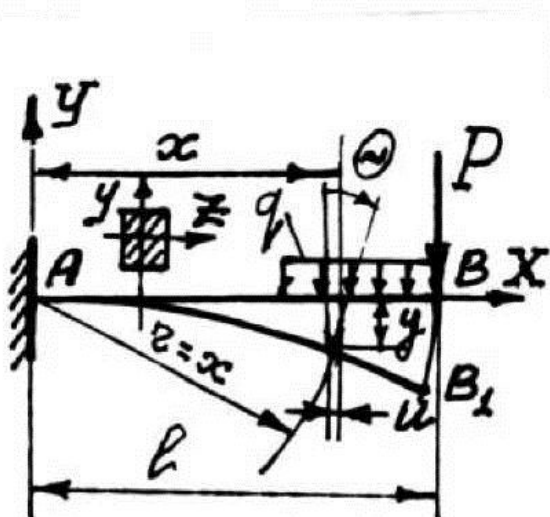


Рис. 5.1

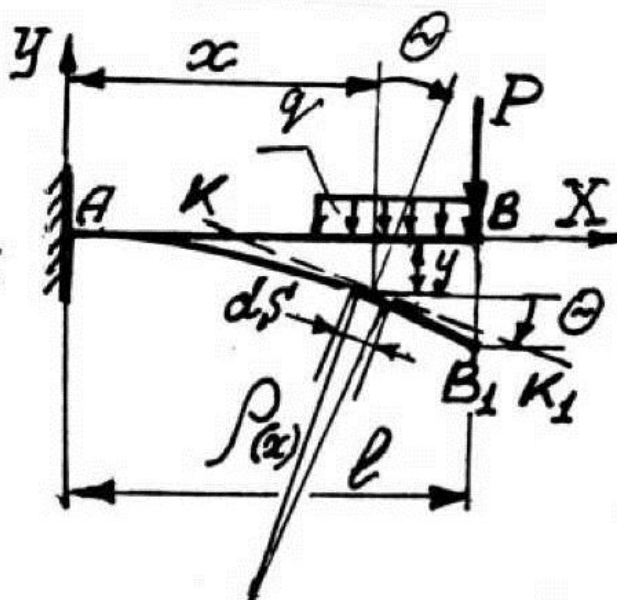


Рис. 5.2

Наибольший прогиб (прогиб сечения  $B$  на рис. 5.2) называется стрелой прогиба и обозначается через  $f$ .

Уравнение вида  $y = F(x)$  будет являться уравнением изогнутой оси балки.

Угол поворота  $\theta$  поперечного сечения равен углу наклона касательной  $KK_1$  к изогнутой оси с первоначальной (до деформирования) осью  $x$ ; как известно:  $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$ .

Угол  $\theta$  на практике при изгибе балок очень мал, обычно он не более одного градуса, и с достаточной степенью точности можно считать, что  $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$  в радианах, тогда

$$\theta = \frac{dy}{dx}, \quad (5.1)$$

т.е. угол поворота поперечного сечения равен первой производной по  $x$  от прогиба  $y$  в данном сечении.

## 5.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Кривизна изогнутой оси связана с изгибающим моментом выражением:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_z(x)}{EJ_z(x)}, \quad (5.2)$$

где  $\rho(x)$  – радиус кривизны изогнутой оси между двумя смежными сечениями, т.е. радиус кривизны дуги длиной  $dS$  (см. рис. 5.2).

Из курса высшей математики известно, что

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{\pm \frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}. \quad (5.3)$$

Приравняв правые части выражений (5.2) и (5.3) и сохраняя только знак «+» в последнем выражении, так как имеется полное соответствие между знаками кривизны и знаком изгибающего момента, что продемонстрировано на рис. 5.3, получим точное уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} = \frac{M_z(x)}{EJ_z(x)}. \quad (5.4)$$

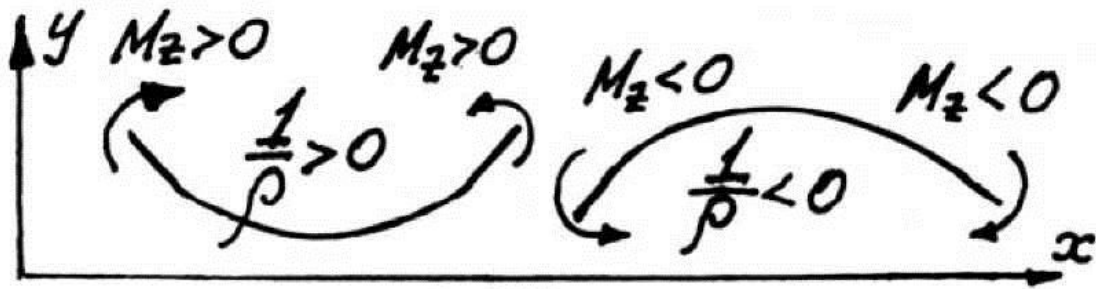


Рис. 5.3

Интегрирование нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (5.4) представляет значительные трудности, с другой стороны, квадрат угла поворота  $\theta = dy/dx$  – величина весьма малая по сравнению с единицей. Учитывая это, для определения перемещений используют приближенное дифференциальное уравнение, которое принято называть основным дифференциальным уравнением упругой линии:

$$EJ_z(x) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M_z(x). \quad (5.5)$$

В большинстве задач  $EJ_z(x) = EJ_z = \text{const}$ , тогда двумя последовательными интегрированиями получим выражения для определения  $\theta$  и  $y$ :

$$EJ_z \cdot \frac{dy}{dx} = EJ_z \cdot \theta = \int M_z(x) \cdot dx + C, \quad (5.6)$$

$$EJ_z \cdot y = \int dx \int M_z(x) \cdot dx + C \cdot x + D. \quad (5.7)$$

Если жесткость  $EJ_z(x)$  – величина переменная, то понятно, что она должна быть внесена под знак интеграла.

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  определяются из граничных условий (условий на опорах и на границе двух смежных участков).

При расположении осей  $x$  и  $y$ , как показано на рис. 5.1 – 5.3, руководствуемся следующим правилом знаков: положительный прогиб  $y$  направлен в положительное направление оси  $y$ , а отрицательный – в отрицательное; угол  $\theta$  положителен, если сечение поворачивается против часовой стрелки, и отрицателен – если по часовой стрелке от своего первоначального положения.

### Пример 1

Определить прогиб и угол поворота сечения  $C$  консольной балки (рис. 5.4).

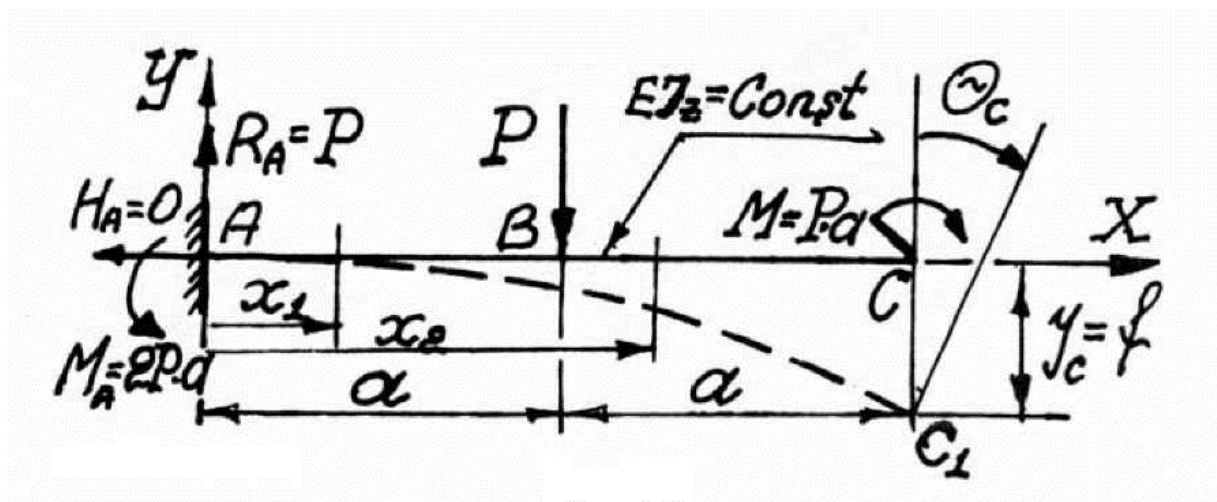


Рис. 5.4

**I операция.** Изображение расчетной схемы. Сюда входит изображение балки (ее оси!), ее размеров, опорных устройств, активных сил, реакций опор с указанием выбранного их направления, изображение выбранной координатной системы.

**II операция.** Определение опорных реакций. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0,$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow R_A = P,$$

$$\sum m_A = 0, \quad -M_A + Pa + M = 0 \Rightarrow M_A = 2Pa.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций можно воспользоваться, например, уравнением вида  $\sum m_C = 0$ .

**III операция.** Составление уравнений упругой линии для каждого силового участка и интегрирование их:

$$EJ_z \cdot y_1'' = -2Pa + Px_1,$$

$$EJ_z \cdot y_1' = EJ_z \theta_1 = -2Pax_1 + \frac{Px_1^2}{2} + C_1, \quad (1)$$

$$EJ_z \cdot y_1 = -\frac{2Pax_1^2}{2} + \frac{Px_1^3}{6} + C_1x_1 + D_1, \quad (2)$$

$$EJ_z \cdot y_2'' = -2Pa + Px_2 - P(x_2 - a),$$

$$EJ_z \cdot y_2' = -2Pax_2 + \frac{Px_2^2}{2} - \frac{P(x_2 - a)^2}{2} + C_2, \quad (3)$$

$$EJ_z \cdot y_2 = -\frac{2Pax_2^2}{2} + \frac{Px_2^3}{6} - \frac{P(x_2 - a)^3}{6} + C_2x_2 + D_2. \quad (4)$$

**IV операция. Определение постоянных интегрирования  $C_i$  и  $D_i$ .** Из условия опирания (заделки) левого сечения  $A$ :

$$\text{при } x_1 = 0 \quad y_1' = \theta_A = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$y_1 = y_A = 0 \Rightarrow D_1 = 0.$$

Из условия на границе смежных участков  $AB$  и  $BC$ :

$$\text{при } x_1 = x_2 = a \quad y_1' = y_2' \Rightarrow C_1 = C_2 = 0,$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow D_1 = D_2 = 0.$$

**V операция. Определение перемещений в заданных сечениях.** Подставляя в (3)  $x_2 = 2a$  найдем  $y_2'(C) = \theta_C = -\frac{2,5Pa^2}{EJ_z}$  (ради-

ан), а из (4) найдем  $y_2(C) = f = -\frac{17Pa^3}{6EJ_z}$  (м).

На рис. 5.4 изогнутая ось показана штриховой линией.

Из уравнений (1) и (2) следует, что постоянные интегрирования  $C_1 = EJ_z \cdot \theta_A = EJ_z \cdot \theta_0$  [Н·м<sup>2</sup>], а  $D_1 = EJ_z \cdot y_A = EJ_z \cdot y_0$  [Н·м<sup>3</sup>], где  $y_0$  – прогиб,  $\theta_0$  – угол поворота в начале координат. Постоянные  $C_1$  и  $D_1$  обратились в нуль, что является следствием выбора начала координат в заделке.

### 5.3. Метод начальных параметров (метод Клебша).

#### Универсальное уравнение упругой линии

При определении перемещений путем интегрирования дифференциальных уравнений упругой линии, получаем  $2n$  постоянных интегрирования, где  $n$  – число силовых участков. Можно обеспечить равенство между собой всех соответствующих постоянных интегрирования, если при интегрировании соблюдать следующие правила.

1. Начало координат выбирается в крайнем левом сечении балки.

2. Абсцисса  $x_i$  текущего сечения для каждого силового участка отсчитывается от один раз выбранного начала координат.

3. Если имеется сосредоточенный момент, то в уравнении изгибающего момента он должен быть умножен на скобку  $(x - a)^0$ , равную единице. Здесь  $a$  – абсцисса сечения приложения момента  $M$ .

4. Интегрирование должно проводиться без раскрытия скобок.

5. Распределенная нагрузка раз начавшись должна продолжаться до конца балки. Если распределенная нагрузка обрывается, то ее продлевают «дополнительной» нагрузкой до конца балки, а для восстановления исходного нагружения балку догружают «компенсирующей» нагрузкой обратного направления.

При выполнении приведенных правил  $C_1 = C_2 = \dots = C_i = C_0 = EJ_z \cdot \theta_0$ ,  $D_1 = D_2 = \dots = D_i = D_0 = EJ_z \cdot y_0$ ; в уравнивании постоянных интегрирования и состоит сущность метода начальных параметров. Прогиб  $y_0$  и угол поворота  $\theta_0$  в начале координат принято называть начальными параметрами.

При решении задач методом Клебша легко заметить, что сосредоточенные моменты дают в уравнении прогибов члены вида

$\frac{M(x - a)^2}{2}$  (где  $a$  – абсцисса сечения, в котором приложен сосредоточенный момент  $M$ ), сосредоточенные силы –  $\frac{P(x - a)^3}{6}$  (где

$a$  – абсцисса сечения, в котором приложена сосредоточенная сила  $P$ ), равномерно распределенные нагрузки –  $\frac{q(x - a)^4}{24}$  (где  $a$  – абс-

цисса начала приложения распределенной нагрузки), распределенная по треугольнику нагрузка –  $\frac{\text{tg } \beta (x - a)^5}{120}$ , где  $\beta$  – положитель-

ный угол наклона касательной к эпюре треугольной нагрузки.

С учетом указанного было составлено универсальное уравнение метода начальных параметров упругой линии балки:

$$EJ_z \cdot y = EJ_z \cdot y_0 + EJ_z \theta_0 \frac{x^1}{1!} \pm \sum \frac{M_i (x - a)^2}{2!} \pm \sum \frac{P_i (x - a)^3}{3!} \pm$$



$$\pm \sum \frac{q_i(x-a)^4}{4!} \pm \sum \frac{\text{tg} \beta(x-a)^5}{5!}. \quad (5.8)$$

В уравнении (5.8)  $EJ_z \cdot y_0 = D_0$ , а  $EJ_z \cdot \theta_0 = C_0$  (см. уравнения (2) и (4) в III операции примера 1). Знак «+» или «-» перед членами уравнения определяется знаком изгибающих моментов, которые вызывают соответствующие нагрузки в сечении с абсциссой  $x$ . При составлении универсального уравнения абсцисса  $x$  – это абсцисса текущего сечения последнего (правого) силового участка балки.

Определение начальных параметров  $y_0$  и  $\theta_0$  производится из граничных условий – условий на опорах балки.

Дифференцируя уравнение (5.8) получим уравнение для определения углов поворота поперечных сечений балки:

$$EJ_z \theta = EJ_z \theta_0 \pm \sum \frac{M_i(x-a)^1}{1!} \pm \sum \frac{P_i(x-a)^2}{2!} \pm \sum \frac{q(x-a)^3}{3!} \pm \sum \frac{\text{tg} \beta(x-a)^4}{4!}. \quad (5.9)$$

Правило знаков для  $\theta$  и  $y$  сохраняется то же, что и в методе интегрирования дифференциальных уравнений изогнутой оси балки.

При определении перемещений с помощью (5.8), (5.9) в уравнениях используются только те члены, у которых  $x > a$ , другими словами, учитываются только те усилия, которые лежат по одну сторону (левее!) рассматриваемого сечения с абсциссой  $x$ , т.е. те члены, у которых  $(x-a) > 0$ .

При составлении уравнения (5.8) балка просматривается от начала координат. При этом с появлением той или иной нагрузки записывают член уравнения, соответствующий данной нагрузке.

### Пример 2

Для балки (рис. 5.5, а) определить прогиб сечения  $C$  и угол поворота сечения  $D$ . Изобразить изогнутую ось балки. Балка изготовлена из двутавра 27а, для которого  $J_z = 5500 \text{ см}^4$ ;  $l = 2 \text{ м}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

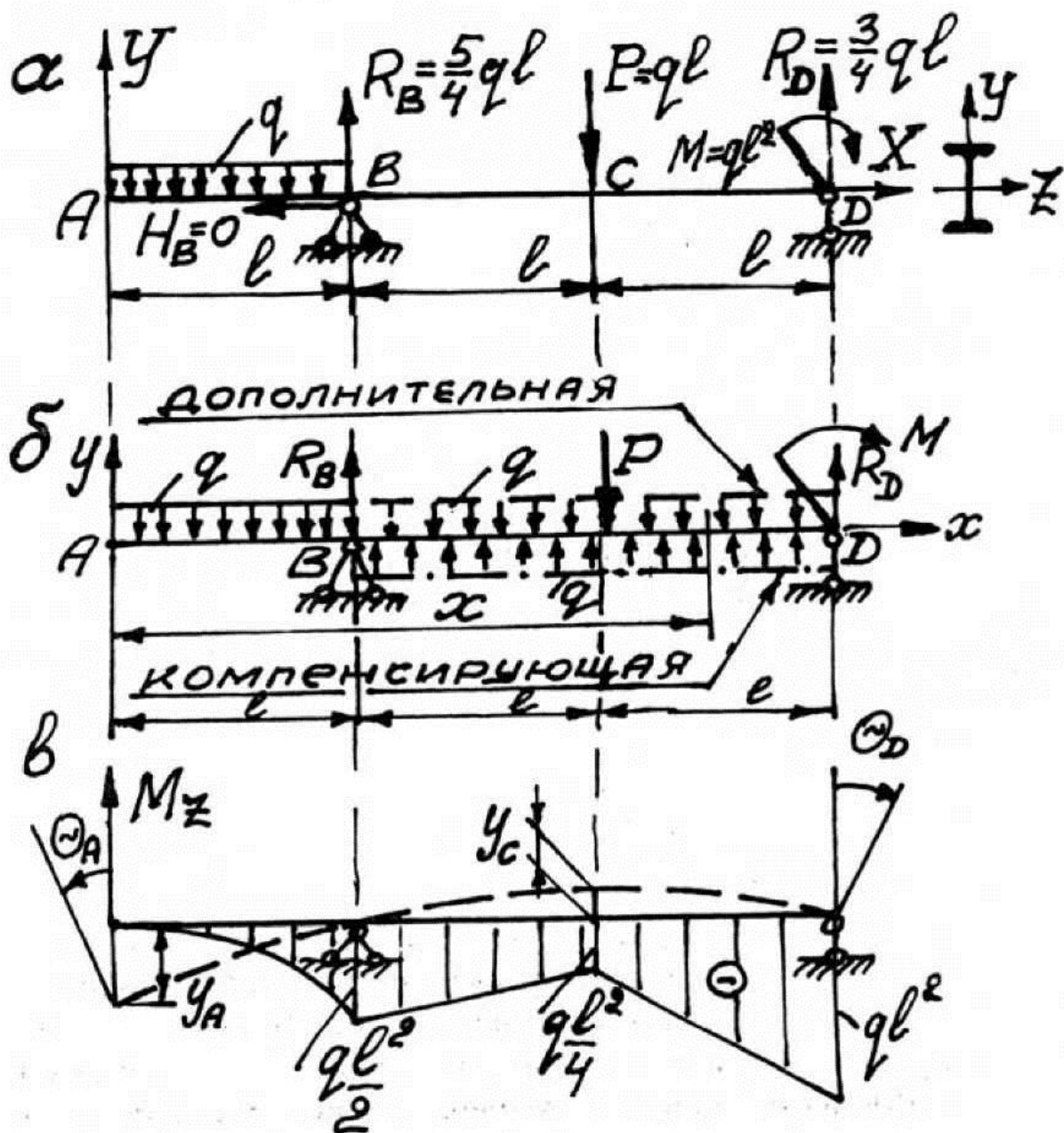


Рис. 5.5

**I операция.** Изображение расчетной схемы (см. рис. 5.5, а)

**II операция.** Определение опорных реакций. Используя уравнения равновесия вида  $\sum X = 0$ ,  $\sum m_D = 0$ ,  $\sum m_B = 0$ , найдем, что  $H_B = 0$ ,  $R_B = \frac{5}{4}qa$ ,  $R_D = \frac{3}{4}qa$ . Проверку правильности определения реакций осуществим, составив уравнение вида  $\sum Y = 0$ .

**III операция.** Составление расчетной схемы с учетом правил метода начальных параметров (рис. 5.5, б), а именно правил 1 – 5 разд. 5.3 на с. 216, 217.

**IV операция.** Составление универсального уравнения:

$$EJ_z \cdot y = EJ_z \cdot y_0 + EJ_z \theta_0 x - \frac{q(x-0)^4}{4!} + \underbrace{\left| \frac{R_B(x-l)^3}{3!} \right|}_{x>l} + \frac{q(x-l)^4}{4!} - \underbrace{\left| \frac{P(x-2l)^3}{3!} \right|}_{x>2l}. \quad (5.10)$$

Значения  $x > l$  и  $x > 2l$  под стрелками указывают, что все члены уравнения, находящиеся правее вертикальной разделительной черты, используются в решении, если  $x$  имеет указанное значение.

**V операция.** Определение начальных параметров. При  $x = l$   $y = y_B = 0$ :

$$0 = EJ_z y_0 + EJ_z \theta_0 l - \frac{ql^4}{24}. \quad (1)$$

При  $x = 3l$   $y = y_D = 0$ :

$$0 = EJ_z y_0 + EJ_z \theta_0 3l - \frac{q(3l)^4}{24} + \frac{5}{4} \frac{ql(3l-l)^3}{6} + \frac{q(3l-l)^4}{24} - \frac{ql(3l-2l)^3}{6}. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$y_0 = y_A = -\frac{13}{24} \frac{ql^4}{EJ_z} = -1,58 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$\theta_0 = \theta_A = \frac{14}{24} \frac{ql^3}{EJ_z} = 0,0084 \text{ рад} = 0,482^\circ.$$

**VI операция. Определение перемещений заданных сечений.**  
 Прогиб сечения  $C$  найдем, подставив в (5.10) значения  $\theta_0$  и  $y_0$ , а

также  $x = 2l$ ; получим  $y_C = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ_z} = 0,61 \cdot 10^{-2}$  м.

Продифференцируем уравнение (5.10), тогда

$$EJ_z \frac{dy}{dx} = EJ_z \theta = EJ_z \theta_0 - \frac{q(x-0)^3}{3!} + \underbrace{\left[ \frac{R_B(x-l)^2}{2!} + \frac{q(x-l)^3}{3!} \right]}_{x>l} - \underbrace{\left[ \frac{P(x-2l)^2}{2!} \right]}_{x>2l}. \quad (5.11)$$

Угол поворота сечения  $D$  найдем, подставив в (5.11) значение  $x = 3l$ :

$$\theta_D = -\frac{18}{24} \frac{ql^3}{EJ_z} = -0,011 \text{ рад} = -0,63^\circ.$$

**VII операция. Изображение изогнутой оси балки.** Изогнутую ось удобно строить на эпюре изгибающего момента  $M_z$ , так как знак эпюры  $M_z$  указывает на то, какие волокна балки сжаты, а какие растянуты. Согласно принятому правилу знаков эпюра  $M_z$  всегда «располагается» на сжатых волокнах.

Изогнутая ось заданной балки изображена штриховой линией на рис. 5.5, в, при этом масштаб искажен в сторону большого увеличения прогибов и углов поворота сечений.

**Примечание.** Решение задачи может быть упрощено, если расположить начало координат на опоре  $D$  (ось  $x$  направить справа налево). В этом случае не нужно будет догружать балку дополнительной и компенсирующей нагрузкой; начальный параметр  $y_0 = 0$ . При этом нужно помнить, что правило знаков для угла поворота  $\theta$  меняется на противоположное, т.е. при  $\theta > 0$  сечение поворачивается от своего первоначального положения по часовой стрелке, а при  $\theta < 0$  – против часовой стрелки, что справедливо и для метода непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений изогнутой оси.

### Пример 3

Определить стрелу прогиба для консольной балки (рис. 5.6).

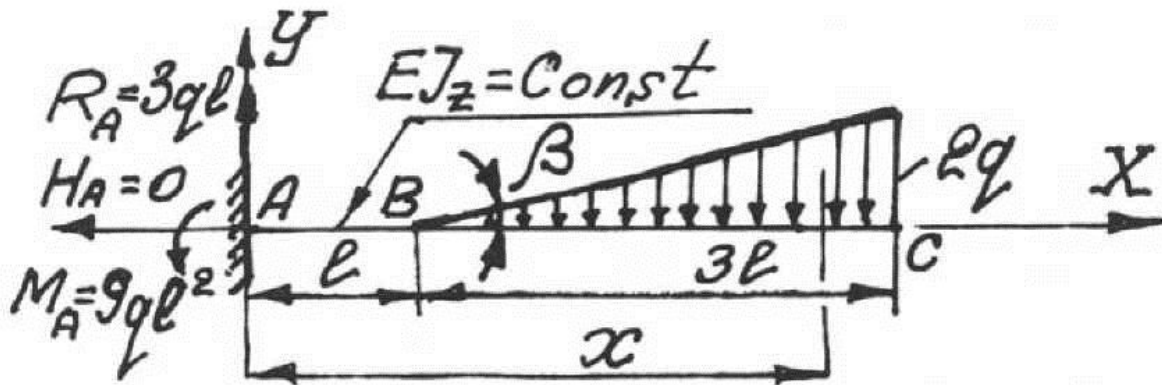


Рис. 5.6

**I операция.** Изображение расчетной схемы (см. рис. 5.6)

**II операция.** Определение опорных реакций. Используя уравнения равновесия в виде  $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$ ;  $\sum m_A = 0$ , найдем, что  $H_A = 0$ ;  $R_A = 3ql$ ,  $M_A = 9ql^2$ .

Для проверки можно воспользоваться уравнением  $\sum m_B = 0$ .

**III операция.** Составление универсального уравнения:

$$EJ_z y = EJ_z y_0 + EJ_z \theta_0 \frac{x^1}{1!} - \frac{M_A (x-0)^2}{2!} + \frac{R_A (x-0)^3}{3!} - \frac{\text{tg } \beta (x-l)^5}{5!}, \quad (5.12)$$

$\xrightarrow{x>l}$

$$\text{tg } \beta = \frac{2q}{3l}.$$

**IV операция.** Определение начальных параметров. Расположение начала координат в заделке определяет, что  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ .

**V операция.** Определение прогиба  $y_C$ . Подставляя в (5.12) значения  $y_0$ ,  $\theta_0$  и  $x = 4l$ , найдем, что

$$y_C = f = -\frac{41,3ql^4}{EJ_z}.$$

#### Пример 4

Определить стрелу прогиба в консольной балке (рис. 5.7, а).

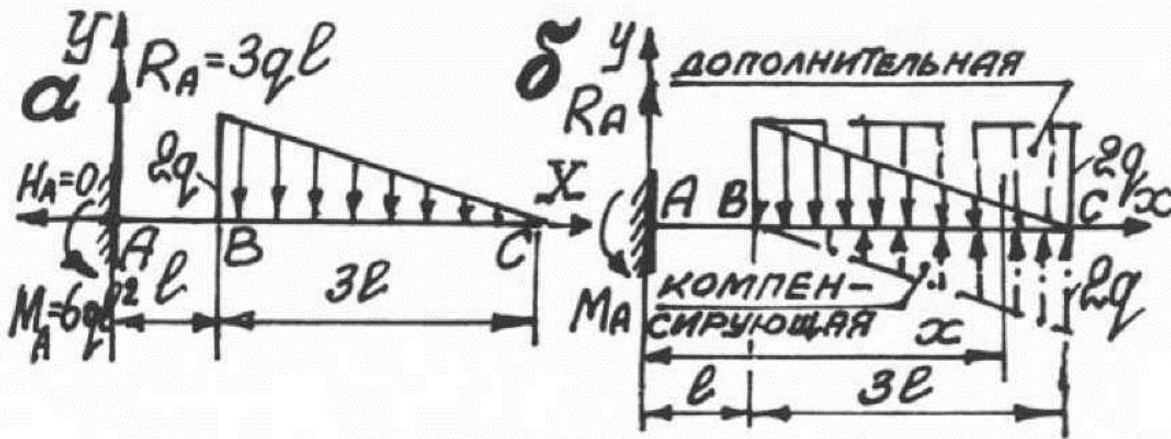


Рис. 5.7

**I операция.** Изображение расчетной схемы (см. рис. 5.7, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Используя уравнения равновесия в виде  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum m_A = 0$ , найдем, что  $H_A = 0$ ,  $R_A = 3ql$ ,  $M_A = 6ql^2$ .

Для проверки можно воспользоваться уравнением  $\sum m_B = 0$ .

**III операция.** Составление расчетной схемы с учетом правил метода начальных параметров (рис. 5.7, б).

**IV операция.** Составление универсального уравнения:

$$EJ_z \cdot y = EJ_z \cdot y_0 + EJ_z \cdot \theta_0 \cdot x - \frac{M_A(x-0)^2}{2!} + \frac{R_A(x-0)^3}{3!} - \underbrace{\left[ \frac{2q(x-l)^4}{4!} + \frac{\text{tg } \beta(x-l)^5}{5!} \right]}_{x>l}, \quad (5.13)$$

где  $\text{tg } \beta = \frac{2q}{3l}$ .

**V операция.** Определение начальных параметров.  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ , что является следствием расположения начала координат в заделке.

**VI операция.** Определение прогиба сечения C. Подставляя в (5.13) значения  $y_0$ ,  $\theta_0$  и  $x = 4l$ , найдем, что

$$y_C = f = -\frac{21,4ql^4}{EJ_z}$$

### Пример 5

Для консольной балки  $AD$  (рис. 5.8, а) определить прогиб сечения  $D$  и угол поворота сечения  $C$ .

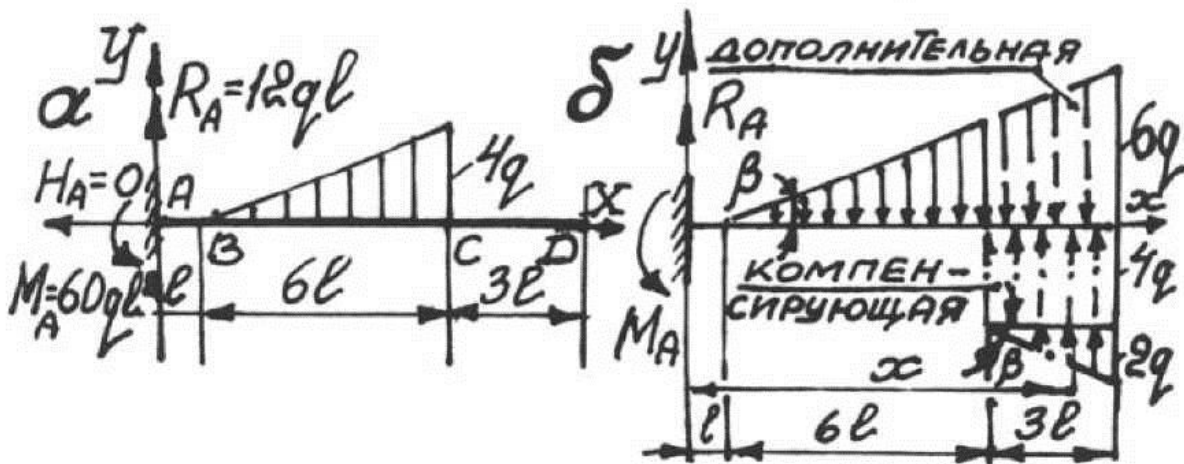


Рис. 5.8

**I операция.** Изображение расчетной схемы (см. рис. 5.8, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Используя уравнения равновесия в виде  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ,  $\sum m_A = 0$ , найдем, что  $H_A = 0$ ,  $R_A = 12ql$ ,  $M_A = 60ql^2$ .

Для проверки можно воспользоваться уравнением  $\sum m_C = 0$ .

**III операция.** Составление расчетной схемы с учетом правил метода начальных параметров (рис. 5.8, б).

**IV операция.** Составление универсального уравнения:

$$EJ_z \cdot y = EJ_z \cdot y_0 + EJ_z \cdot \theta_0 \cdot x - \frac{M_A(x-0)^2}{2!} + \frac{R_A(x-0)^3}{3!} - \frac{\left| \frac{\text{tg} \beta (x-l)^5}{5!} \right|}{x>l} + \frac{\left| \frac{4q(x-7l)^4}{4!} + \frac{\text{tg} \beta (x-7l)^5}{5!} \right|}{x>7l}, \quad (5.14)$$

где  $\text{tg} \beta = \frac{2q}{3l}$ .

**V операция. Определение начальных параметров.**  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ , что является следствием расположения начала координат в заделке.

**VI операция. Определение искомых перемещений.** Прогиб сечения  $D$  найдем, подставив в (5.14) значения  $y_0$ ,  $\theta_0$  и  $x = 10l$ :

$$y_D = f = -\frac{1313,2ql^4}{EJ_z}.$$

Для определения  $\theta_C$  продифференцируем уравнение (5.14), в результате получим

$$EJ_z \cdot y' = EJ_z \cdot \theta = -M_A \cdot x + \frac{R_A \cdot x^2}{2} - \underbrace{\left| \frac{\operatorname{tg} \beta (x-l)^4}{24} \right|}_{x>l} + \underbrace{\left| \frac{4q(x-7l)^3}{6} \right|}_{x>7l} + \frac{\operatorname{tg} \beta (x-7l)^4}{24}. \quad (5.15)$$

Подставляя в (5.15)  $x = 7l$ , найдем, что

$$\theta_C = -\frac{164 \cdot q \cdot l^3}{EJ_z}.$$

#### 5.4. Интеграл Мора

Интеграл Мора для определения перемещений при изгибе, пренебрегая влиянием поперечной силы, имеет вид

$$\delta = \int_L \frac{M_z \cdot \bar{M}_z \cdot dx}{EJ_z}, \quad (5.16)$$

где  $\delta$  – перемещение (прогиб или угол поворота),  $M_z$  – значение изгибающего момента в текущем сечении силового участка от заданных нагрузок или, как принято говорить, от грузового состояния балки (сами моменты  $M_z$  при этом называют грузовыми моментами, а эпюру  $M_z$  – грузовой эпюрой),  $\bar{M}_z$  – значение изгибающего момента в том же текущем сечении от единичного усилия, но приложенного в том сечении, перемещение которого опре-



деляется, и по тому направлению, по которому определяется перемещение.

Если определяется прогиб, т.е.  $\delta = y$ , то единичное усилие представляет собой сосредоточенную силу  $P^0 = 1$ , а если определяется угол поворота, т.е.  $\delta = \theta$ , то единичное усилие представляет собой сосредоточенный момент  $M^0 = 1$ .

Предел интегрирования  $L$  в формуле (5.16) указывает на то, что интегрирование должно быть произведено по всей длине балки.

Полученное в результате интегрирования значение  $\delta$  со знаком «+» (плюс) говорит о том, что перемещение  $\delta$  совпадает с направлением единичного усилия, и, наоборот, знак «-» (минус) свидетельствует о том, что перемещение  $\delta$  направлено в сторону, противоположную направлению единичного усилия.

Порядок определения перемещений с помощью интеграла Мора рассмотрим на конкретном примере.

### **Пример 6**

Определить для балки (рис. 5.9, а) постоянной жесткости прогибы в сечениях  $C$  и  $D$  и углы поворотов сечений  $A$  и  $D$ .

**I операция.** Изображение расчетной схемы (см. рис. 5.9, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Используя уравнения равновесия в виде  $\sum X = 0$ ,  $\sum m_B = 0$ ,  $\sum m_A = 0$ , найдем, что  $H_A = 0$ ,  $R_A = \frac{5}{4}qa$ ,  $R_B = \frac{3}{4}qa$ .

Для проверки можно воспользоваться уравнением вида  $\sum Y = 0$ .

**III операция.** Наметим абсциссы  $x_i$  текущих сечений для каждого силового участка балки, при этом будем стремиться к тому, чтобы в выражении для изгибающих моментов входило как можно меньше членов. Начало абсцисс  $x_i$  будем устанавливать не в каком-либо одном, раз выбранном сечении, а от начала каждого силового участка, что определит во всех интегралах нижний предел, равный нулю (см. абсциссы  $x_i$  на рис. 5.9, а). Итак,  $0 \leq x_1 \leq a$ ,  $0 \leq x_2 \leq a$ ,  $0 \leq x_3 \leq a$ , не забывая, что изгибающий момент в сече-

нии равен алгебраической сумме моментов всех сил, лежащих по одну сторону от сечения (см. значение  $M_z$  в IV операции).

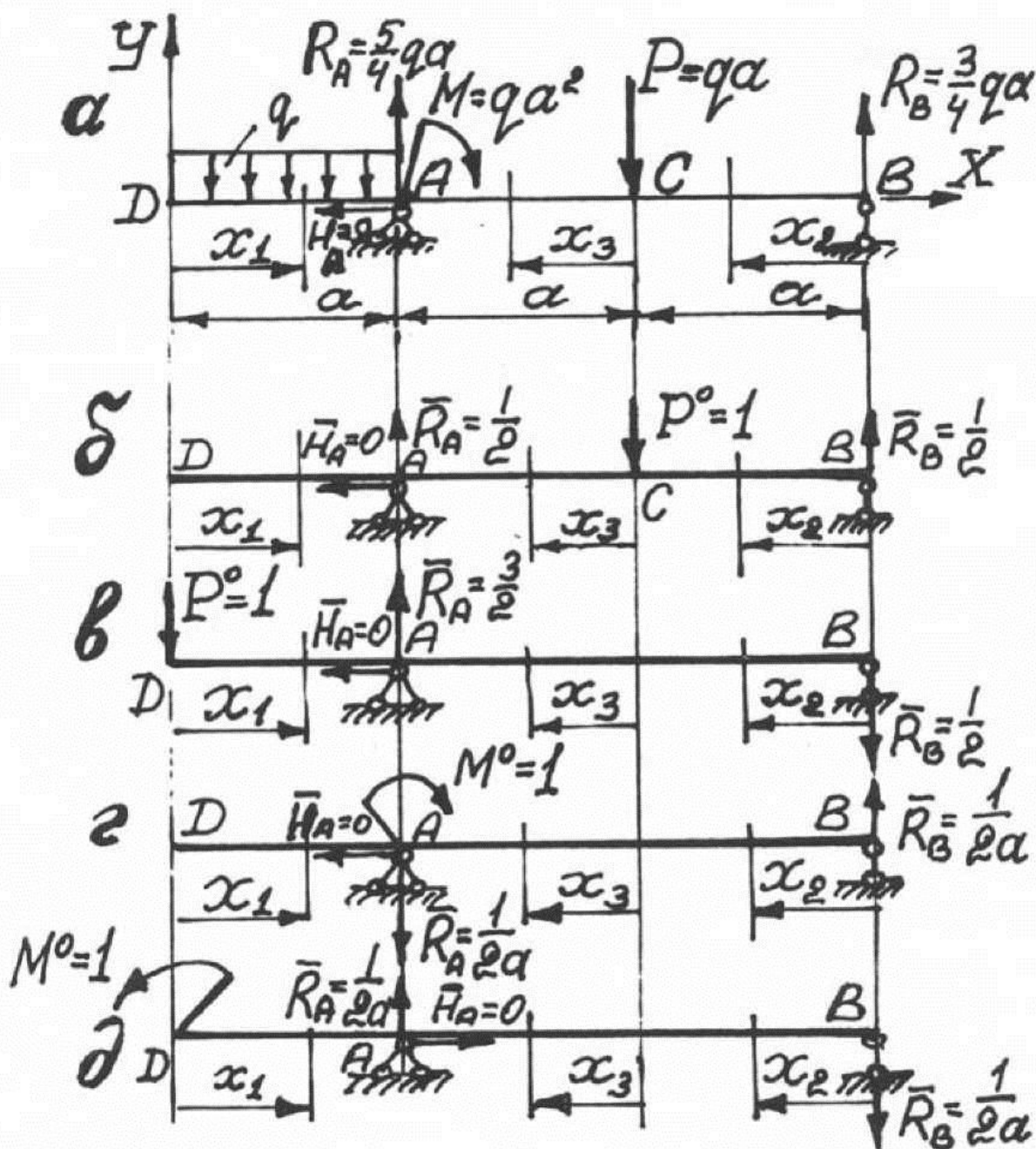


Рис. 5.9

**IV операция.** Определение изгибающих моментов  $M_z$  в текущих сечениях каждого силового участка:

$$M_{z_1} = -\frac{qx_1^2}{2}, \quad M_{z_2} = R_B \cdot x_2, \quad M_{z_3} = R_B(a + x_3) - P \cdot x_3.$$

(О правиле знаков для изгибающих моментов см. с. 166 – 168.)

**V операция. Изображение единичной системы.** Единичной системой будем называть схему балки, нагруженную только (!) единичным усилием в соответствующем сечении по искомому направлению.

Для определения  $y_C$  единичная система представлена на рис. 5.9, б, для определения  $y_D$  – на рис. 5.9, в, для определения  $\theta_A$  – на рис. 5.9, г, для определения  $\theta_D$  – на рис. 5.9, д.

Для каждой единичной системы повторяем те же операции II, III, IV, что и для балки, нагруженной заданными усилиями.

На схемах единичных систем показаны реакции опор, те же абсциссы текущих сечений, что и на рис. 5.9, а.

Изгибающие моменты для единичных систем будут равны:

для схемы рис. 5.9, б (определение прогиба  $y_C$ ):

$$\bar{M}_{z_1} = 0, \quad \bar{M}_{z_2} = \bar{R}_B \cdot x_2, \quad \bar{M}_{z_3} = \bar{R}_B(a + x_3) - P^0 \cdot x_3;$$

для схемы рис. 5.9, в (определение прогиба  $y_D$ ):

$$\bar{M}_{z_1} = -P^0 \cdot x_1, \quad \bar{M}_{z_2} = -\bar{R}_B \cdot x_2, \quad \bar{M}_{z_3} = -\bar{R}_B(a + x_3);$$

для схемы рис. 5.9, г (определение угла поворота  $\theta_A$ ):

$$\bar{M}_{z_1} = 0, \quad \bar{M}_{z_2} = \bar{R}_B \cdot x_2, \quad \bar{M}_{z_3} = \bar{R}_B(a + x_3);$$

для схемы рис. 5.9, д (определение угла поворота  $\theta_D$ ):

$$\bar{M}_{z_1} = -M^0, \quad \bar{M}_{z_2} = -\bar{R}_B \cdot x_2, \quad \bar{M}_{z_3} = -\bar{R}_B(a + x_3).$$

**VI операция. Последняя.** Запись интегралов Мора, проведение интегрирования и получение значений перемещений

$$y_C = \frac{1}{EJ_z} \left\{ \int_0^a \left( \frac{3}{4} qax_2 \right) \frac{1}{2} x_2 dx + \int_0^a \left[ \frac{3}{4} qa(a + x_3) - qax_3 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{2}(a + x_3) - 1 \cdot x_3 \right] dx \right\} = \frac{7}{24} \frac{qa^4}{EJ_z},$$

$$y_D = \frac{1}{EJ_z} \left\{ \int_0^a \left( -\frac{qx_1^2}{2} \right) \cdot (-x_1) dx + \int_0^a \left( \frac{3}{4} qa_1 x_2 \right) \left( -\frac{1}{2} x_2 \right) dx + \right.$$

$$+ \int_0^a \left[ \frac{3}{4} qa(a + x_3) - qa \cdot x_3 \right] \cdot \left[ -\frac{1}{2}(a + x_3) \right] dx \Bigg\} = -\frac{11}{24} \frac{qa^4}{EJ_z},$$

где знак «−» (минус) в результате говорит о том, что балка в сечении  $D$  прогибается вверх, в сторону противоположную направлению  $P^0 = 1$ , приложенном в сечении  $D$ .

$$\theta_A = \frac{1}{EJ_z} \left\{ \int_0^a \left( \frac{3}{4} qax_2 \right) \left( \frac{1}{2a} x_2 \right) dx + \int_0^a \left[ \frac{3}{4} qa(a + x_3) - qax_3 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{2a}(a + x_3) \right] dx \right\} = \frac{14}{24} \frac{qa^3}{EJ_z},$$

$$\theta_D = \frac{1}{EJ_z} \left\{ \int_0^a \left( -\frac{qx_1^2}{2} \right) (-1) dx + \int_0^a \left( \frac{3}{4} qax_2 \right) \left( -\frac{1}{2a} x_2 \right) dx + \right. \\ \left. + \int_0^a \left[ \frac{3}{4} qa(a + x_3) - qax_3 \right] \cdot \left[ -\frac{1}{2a}(a + x_3) \right] dx \right\} = -\frac{10}{24} \frac{qa^3}{EJ_z},$$

где знак «−» (минус) в результате свидетельствует о том, что угловое перемещение  $\theta_D$  направлено в сторону, противоположную направлению момента  $M^0 = 1$ , т.е. по часовой стрелке.

В выражении для  $y_C$  и  $\theta_A$  не проводится интегрирование по первому силовому участку, так как при наличии грузового момента, отличного от нуля на этом участке, момент от единичного усилия  $\bar{M}_{z_1} = 0$ .

### 5.5. Способ Верещагина

Способ (правило) Верещагина представляет собой графоаналитическое решение интеграла Мора. Согласно этому способу перемещение

$$\delta = \frac{\omega \cdot \bar{M}_C}{EJ_z}, \quad (5.17)$$

где  $\omega$  – грузовая площадь, т.е. площадь эпюры  $M_z$  от заданных нагрузок;  $\bar{M}_C$  – ордината эпюры изгибающего момента от единич-

ного усилия под центром тяжести грузовой площади  $\omega$ . Единичное усилие, как и при определении перемещений с помощью интеграла Мора, приложено в том сечении, перемещение которого находится, и по тому направлению, по которому определяется перемещение.

Операция в числителе формулы Верещагина (5.17) получила название «перемножение» эпюр.

Способ Верещагина допускает «перемножение» эпюр только в том случае, если одна из «перемножаемых» эпюр ограничена прямой неломаной линией, а такими эпюрами как раз и являются эпюры от единичных усилий.

Определение  $\overline{M}_C$  не представляет труда. Затруднения возникают при определении положения центра тяжести грузовых площадей  $\omega$ . Для решения этой задачи воспользуемся следующими рекомендациями.

Сложную грузовую эпюру  $M_z$  следует разбить на простые фигуры, для каждой из которых легко определить абсциссу центра тяжести. При этом площадь **каждой** простой фигуры умножают на ординату единичной эпюры под ее, простой фигуры, центром тяжести. На рис. 5.10, а, б показаны два варианта разбиения трапеции на простые фигуры, а на рис. 5.10, в – преобразование «перекрученной» трапеции.

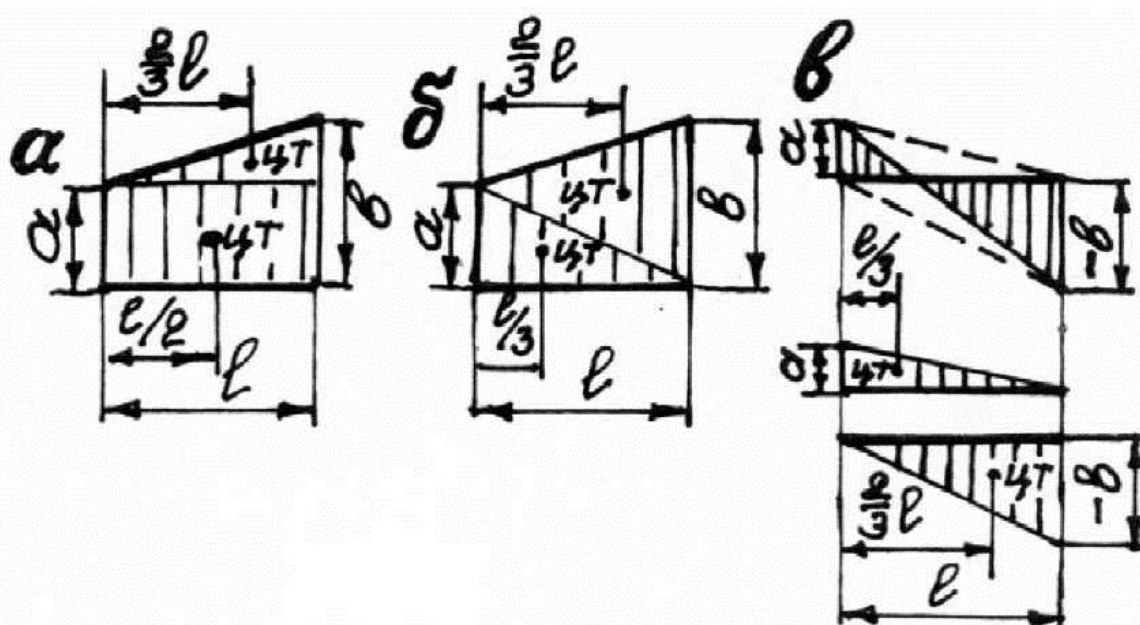


Рис. 5.10

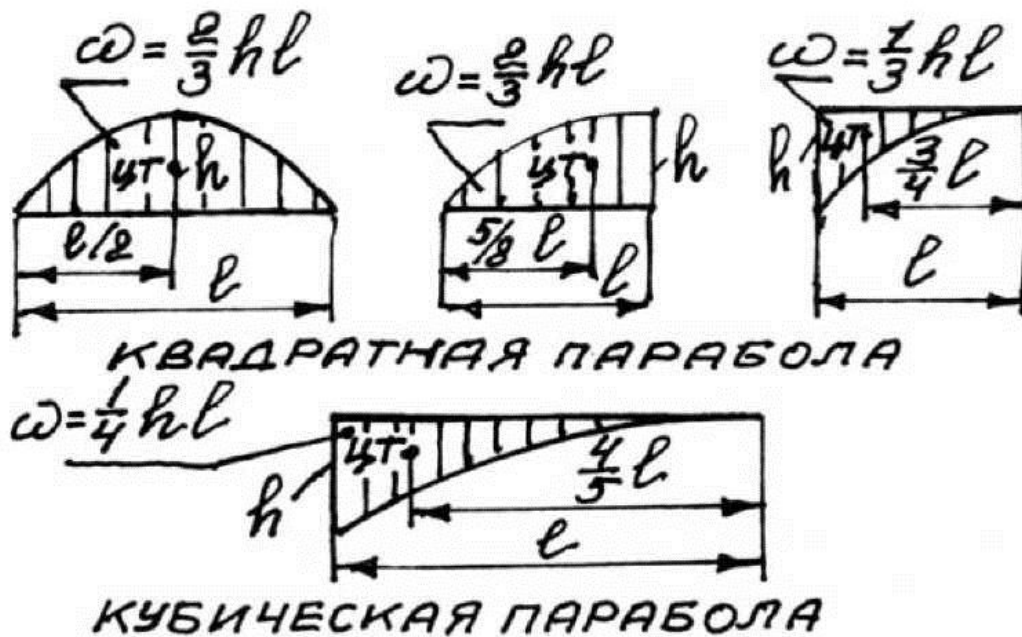


Рис. 5.11

На рис. 5.11 представлены наиболее часто встречающиеся эпюры, ограниченные квадратной и кубической параболой, а на рис. 5.12 показана трансформация эпюр сложной формы, при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q = \text{const}$ , ограниченных квадратными парабололами.

В случае если обе эпюры (грузовая и единичная) ограничены прямыми неломаными линиями, то операция «перемножения» этих эпюр обладает свойством коммутативности, т.е. безразлично, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или площадь второй – на ординату первой.

При «перемножении» эпюр, лежащих по одну сторону от базовой линии (эпюры изгибающих моментов одного и того же знака), получаем знак «+» (плюс), а эпюр, лежащих по разные стороны, – знак «-» (минус) в результате.

Результат «перемножения» двух эпюр в виде трапеций, «перекрученных» трапеций, треугольников (рис. 5.13) можно получить по следующей формуле:

$$\Delta = \sum \omega_i \cdot \bar{M}_{ci} = \frac{L}{6} (2ac + 2bd + ad + bc), \quad (5.18)$$

при этом ординаты  $a, b, c, d$  берутся со своим знаком по отношению к базовой линии (ординаты над базовой линией имеют знак «+», а под базовой линией – «-»).

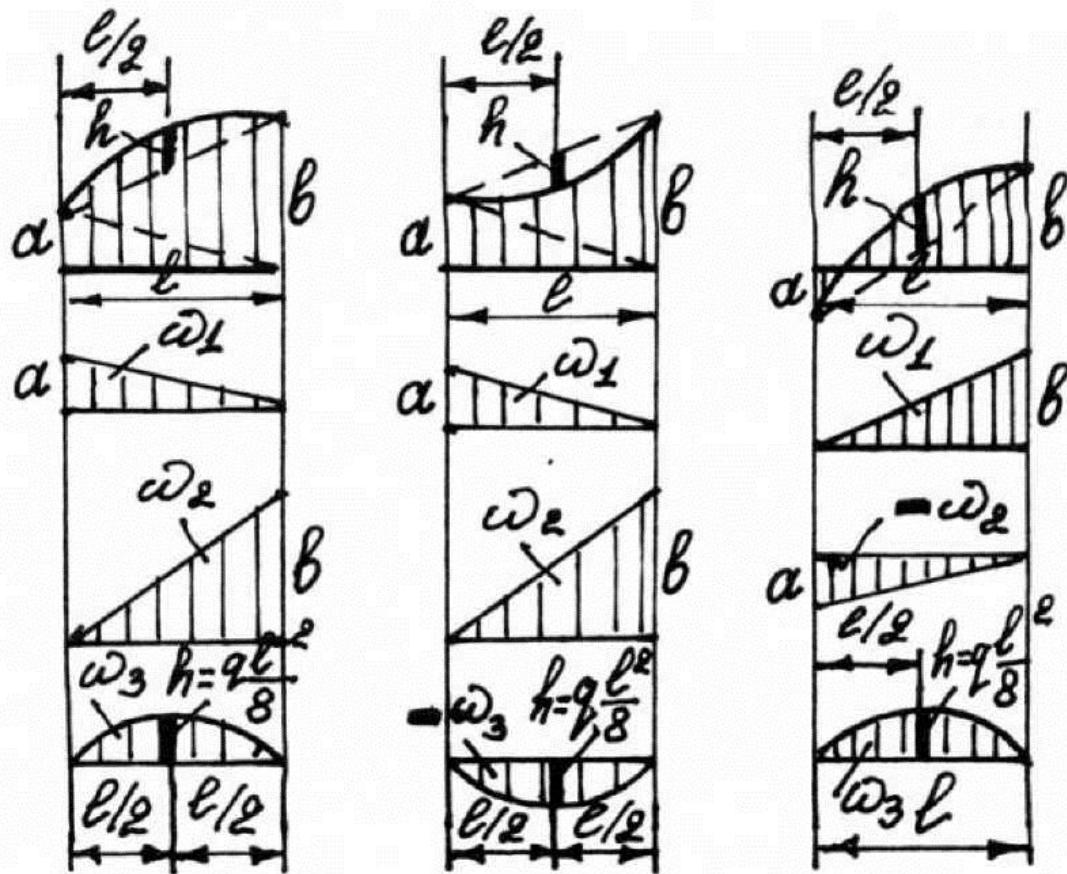


Рис. 5.12

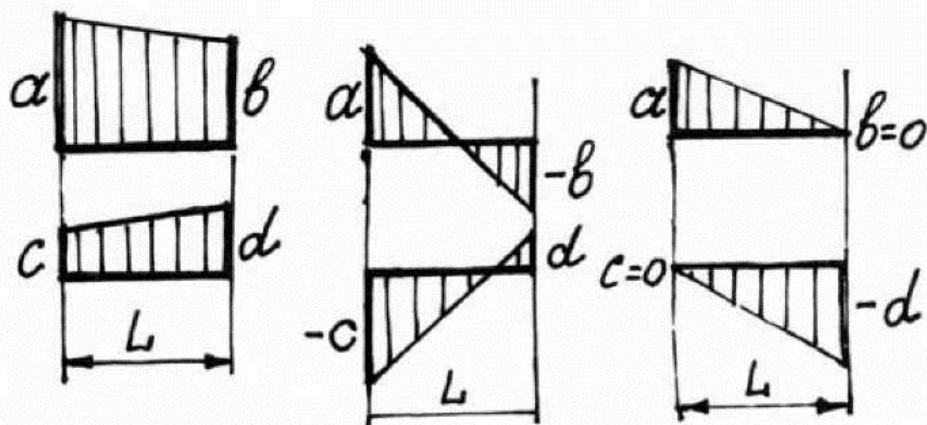


Рис. 5.13

Для «перемножения» эпюр, одна из которых ограничена квадратной параболой, а другая – прямой (рис. 5.14), можно воспользоваться и формулой Симпсона – Корноухова:

$$\Delta = \frac{L}{6}(ac + 4Hh + bd); \quad (5.19)$$

для этого случая можно воспользоваться и приемом расслоения эпюр по всей длине балки, который приведен в примере 8.

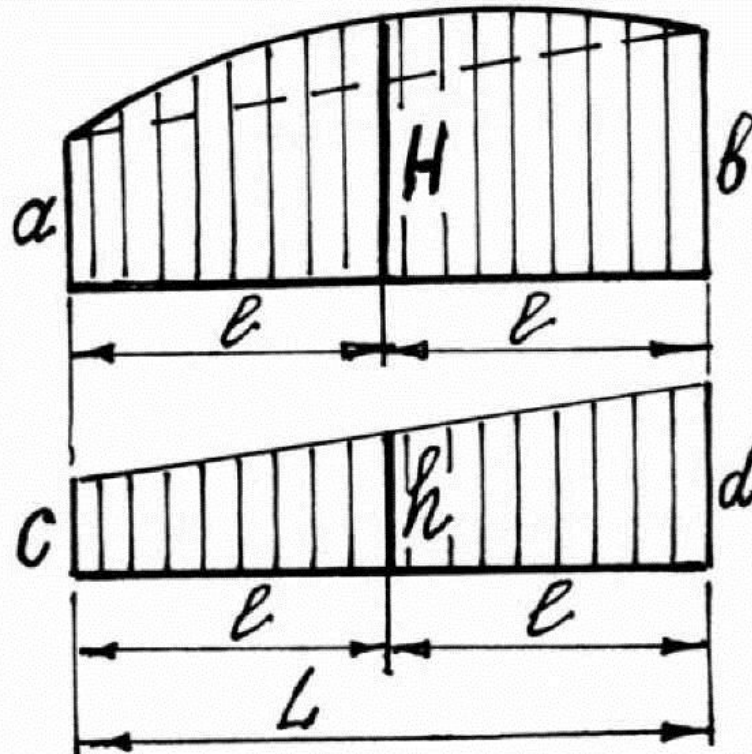


Рис. 5.14

### Пример 7

Для балки (см. рис. 5.9, а) определить способом Верещагина прогибы в сечениях  $C$  и  $D$ , угол поворота сечения  $D$ , изобразить изогнутую ось балки.

**I операция.** Изображение расчетной схемы (рис. 5.15, а).

**II операция.** Определение опорных реакций (см. операцию II в примере 6).

**III операция.** Построение эпюры изгибающих моментов  $M_z$  (грузовой эпюры!). Эпюра приведена на рис. 5.15, б. Рассмотрим подробно определение прогиба  $y_D$ .

**IV операция.** Изображение единичной системы (рис. 5.15, в). Для определения прогиба в сечении  $D$  загрузим это сечение единичной силой  $P^0 = 1$ , направленной вниз.

**V операция.** Определение опорных реакций для единичной системы. Используя уравнение равновесия в виде  $\sum X = 0$ ,  $\sum m_B = 0$ ,



$\sum m_A = 0$ , найдем  $\bar{H}_A = 0$ ,  $\bar{R}_A = 1,5$ ,  $\bar{R}_B = \frac{1}{2}$ . Проверку правильности определения реакций выполним, составив уравнение вида  $\sum Y = 0$ .

**VI операция.** Построение эпюры изгибающего момента для единичной системы (рис. 5.15, з).

**VII операция.** Найдем  $y_D$  с помощью формулы (5.17):

$$\begin{aligned} y_D &= \frac{1}{EJ_z} (\omega_1 \bar{M}_{c_1} + \omega_2 \bar{M}_{c_2} + \omega_3 \bar{M}_{c_3} + \omega_4 \bar{M}_{c_4}) = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left\{ \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} a \right) \left( \frac{3}{4} a \right) - \left( \frac{qa^2}{2} a \right) \left( \frac{1}{2} \cdot 1,5a \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 \cdot a \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{3} a \right) \right] - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} qa^2 \cdot a \right) \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} a \right) \right\} = -\frac{11}{24} \cdot \frac{qa^4}{24}. \end{aligned}$$

Для «перемножения» эпюр на участке  $AC$  можно воспользоваться и формулой (5.18):

$$\begin{aligned} \Delta_{AC} &= \omega_2 \bar{M}_{c_2} + \omega_3 \bar{M}_{c_3} = \\ &= \frac{a}{6} \left[ 2 \cdot \frac{qa^2}{2} (-a) + 2 \frac{3}{4} qa^2 \left( -\frac{1}{2} a \right) + \frac{qa^2}{2} \left( -\frac{1}{2} a \right) + \frac{3}{4} qa^2 (-a) \right] = \\ &= -\frac{11}{24} qa^4. \end{aligned}$$

Знак «-» в результате вычисления  $y_D$  свидетельствует о том, что прогиб направлен вверх, в сторону, противоположную направлению  $P^0 = 1$  в сечении  $D$ .

На рис. 5.15, д показана единичная система для определения прогиба  $y_C$ , а на рис. 5.15, е приведена эпюра изгибающего момента  $\bar{M}_z$  для этой единичной системы. Прогиб  $y_C$  получим «перемножив» грузовую эпюру  $M_z$  с эпюрой рис. 5.15, е:

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{4} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \frac{3qa^2}{4} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right) = \\ &= \frac{7}{24} \frac{qa^4}{EJ_z}. \end{aligned}$$

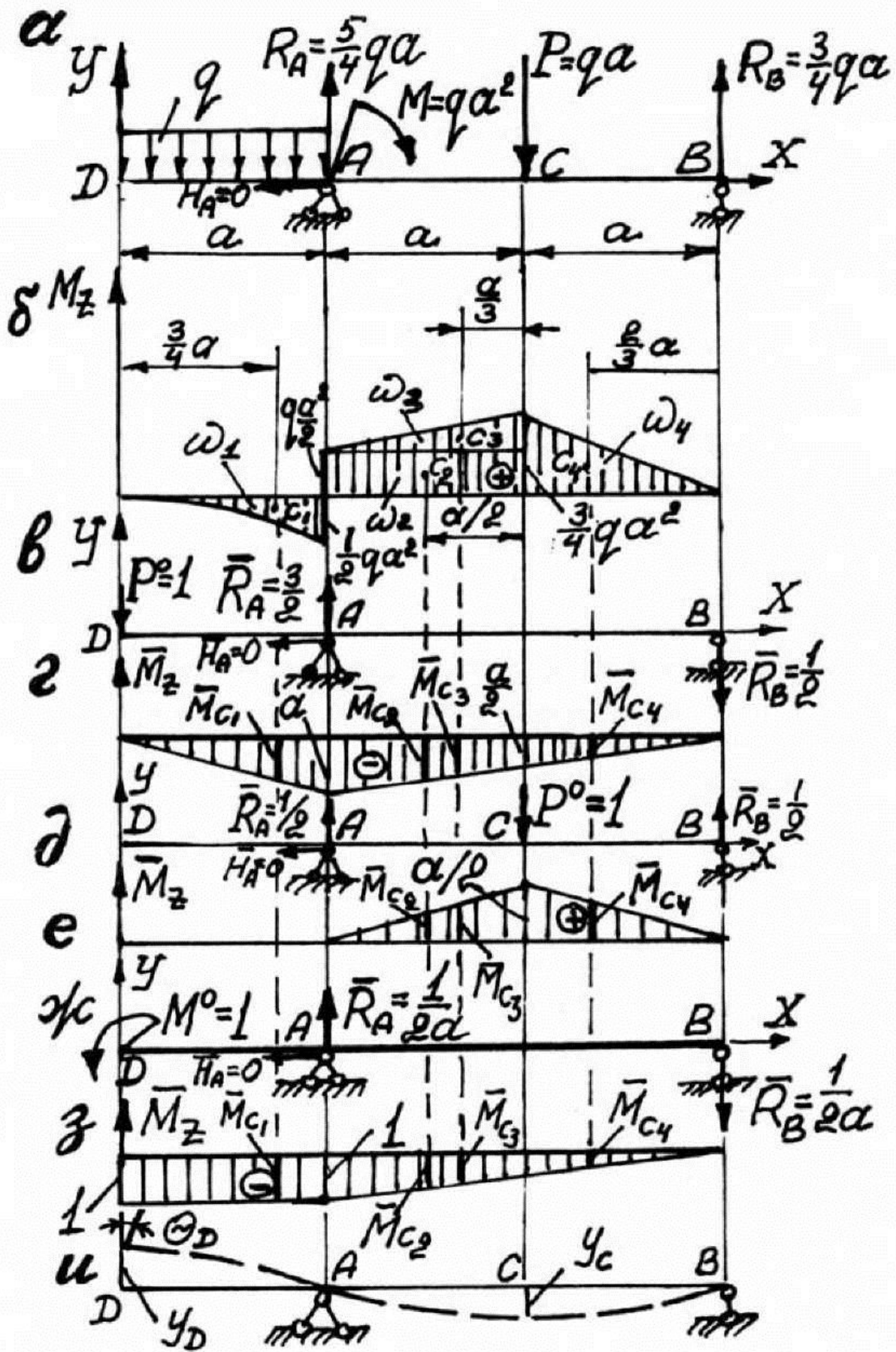


Рис. 5.15

На рис. 5.15, ж показана единичная система для определения угла поворота  $\theta_D$ , а на рис. 5.15, з приведена эпюра изгибающего момента  $\overline{M}_z$  для этой единичной системы.

Угол поворота  $\theta_D$  получим, «перемножив» грузовую эпюру  $M_z$  с эпюрой рис. 6.15, з:

$$\theta_D = \frac{1}{EJ_z} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot 1 - \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{3}{2} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{4} \cdot a \cdot \frac{1}{2a} \left( a + \frac{1}{3}a \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} qa^2 \cdot a \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{2}{3} a \right] = -\frac{10}{24} \frac{qa^3}{EJ_z}.$$

Знак «-» (минус) в результате вычисления  $\theta_D$  свидетельствует о том, что угол поворота сечения  $D$  происходит по часовой стрелке, т.е. в сторону, противоположную направлению  $M^0 = 1$ .

На рис. 5.15, и штриховой линией изображена изогнутая ось балки. Здесь на участке  $DA$  эпюра  $M_z$  отрицательна, следовательно, кривизна  $\frac{1}{\rho} < 0$ , а на участке  $AB$  кривизна  $\frac{1}{\rho} > 0$ , так как эпюра  $M_z$  имеет положительный знак.

### Пример 8

Для балки (рис. 5.16, а) определить способом Верещагина угол поворота сечения  $D$ .

#### *Вариант первый*

**I операция.** Составление расчетной схемы (см. рис. 5.16, а).

**II операция.** Определение опорных реакций. Используя уравнения равновесия в виде  $\sum X = 0$ ,  $\sum m_B = 0$ ,  $\sum m_A = 0$ , найдем, что  $H_A = 0$ ,  $R_A = \frac{4}{3}ql$ ,  $R_D = \frac{2}{3}ql$ . Для проверки можно воспользоваться уравнением вида  $\sum Y = 0$ .

**III операция.** Построение эпюры изгибающего момента (рис. 5.16, б).

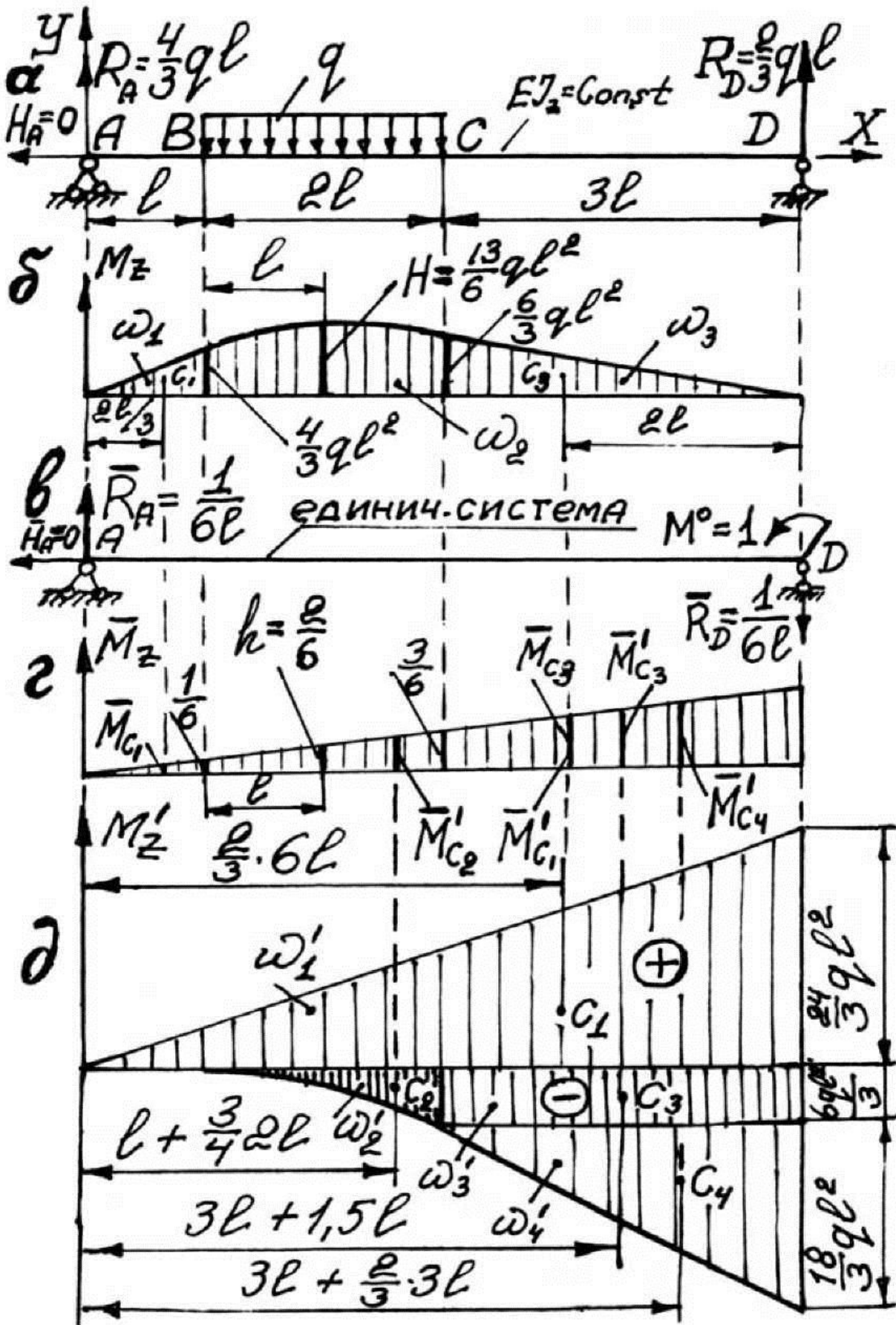


Рис. 5.16

**IV операция.** Изображение единичной системы (рис. 5.16, в). Здесь балка загружена только единичным сосредоточенным моментом  $M^0 = 1$ , приложенным в том сечении (сечение  $D!$ ), угол поворота которого определяется.

**V операция.** Определение опорных реакций для единичной системы. Значение реакций приведено на рис. 5.16, в.

**VI операция.** Построение эпюры изгибающего момента для единичной системы (рис. 5.16, г).

**VII операция.** Определение  $\theta_D$  способом Верещагина:

$$\theta_D = \frac{1}{EJ_z} (\omega_1 \bar{M}_{c_1} + \omega_2 \bar{M}_{c_2} + \omega_3 \bar{M}_{c_3});$$

$$\Delta_{AB} = \omega_1 \bar{M}_{c_1} = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} ql^2 \cdot l \right) \cdot \left( \frac{1}{6l} \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{2}{27} ql^3.$$

Рассмотрим определение  $\Delta_{BC} = \omega_2 \bar{M}_{c_2}$  двумя способами. По формуле (5.19):

$$\Delta_{BC} = \frac{2l}{6} \left[ \left( \frac{4}{3} ql^2 \right) \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \left( \frac{13}{6} ql^2 \right) \cdot \frac{2}{6} + \left( \frac{6}{3} ql^2 \right) \cdot \frac{3}{6} \right] = \frac{37}{27} ql^3.$$

Путем расслоения эпюры  $M_z$  согласно рис. 5.12, а, как показано для данной задачи на рис. 5.17:

$$\begin{aligned} \Delta_{BC} &= \omega_2^I \bar{M}_{c_2}^I + \omega_2^{II} \bar{M}_{c_2}^{II} + \omega_2^{III} \bar{M}_{c_2}^{III} = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} ql^2 \cdot 2l \right) \cdot \left( \frac{1}{6l} \cdot \frac{5}{3} l \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{3} ql^2 \cdot 2l \right) \cdot \left( \frac{1}{6l} \cdot \frac{7}{3} l \right) + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{q(2l)^2}{8} \cdot 2l \right) \cdot \left( \frac{1}{6l} \cdot 2l \right) = \frac{37}{27} ql^3. \end{aligned}$$

$$\Delta_{CD} = \omega_3 \bar{M}_{c_3} = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{3} ql^2 \cdot 3l \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{6l} \cdot 2l \right) = \frac{54}{27} ql^3;$$

$$\theta_D = \frac{1}{EJ_z} \sum_1^3 \omega_i \bar{M}_{c_i} = \frac{93}{27} \frac{ql^3}{EJ_z} = \frac{31}{9} \frac{ql^3}{EJ_z}.$$

### **Вариант второй**

По этому варианту в III операции эпюру  $M_z$  построим, проведя расслоение эпюры по всей длине балки. Для этого строим эпюры  $M'_z$  от каждого внешнего усилия, лежащего левее опоры  $D$  (рис. 5.16, д).

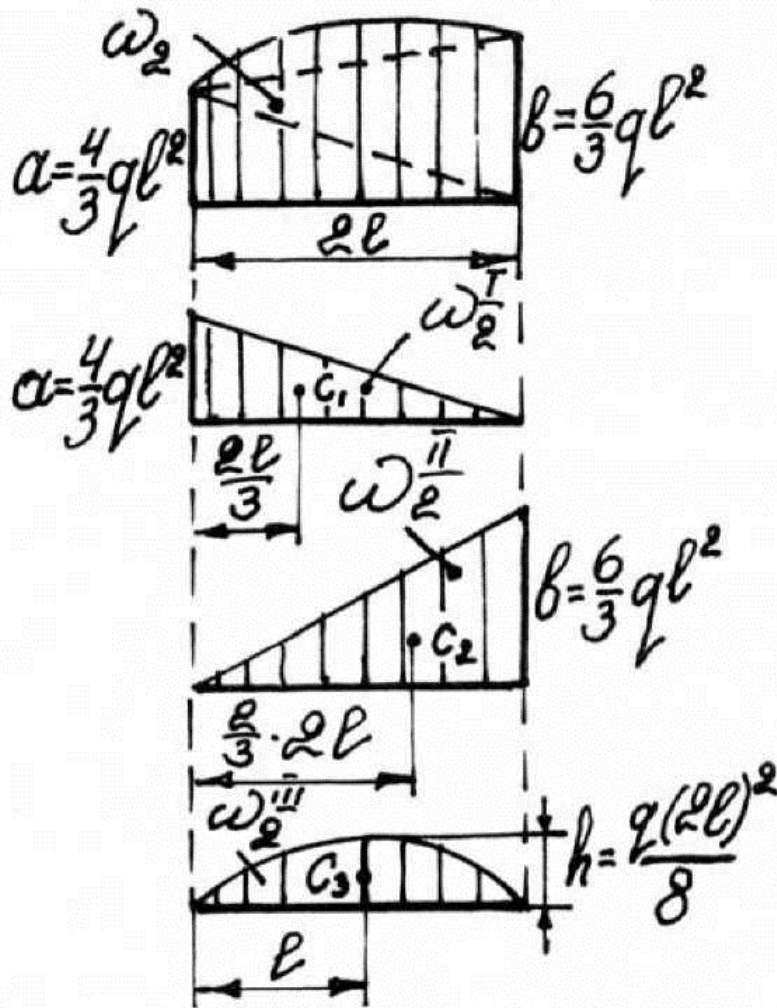


Рис. 5.17

От реакции  $R_A$  эпюра ограничена прямой линией, площадь которой обозначим через  $\omega'_1$ ; от равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  эпюра  $M_z$  на участке  $BC$  ограничена квадратной параболой, площадь эпюры обозначим через  $\omega'_2$ . На участке  $CD$  эпюра ограничена прямой линией, площадь эпюры разобьем на две части:  $\omega'_3$  (прямоугольник) и  $\omega'_4$  (треугольник).

**VII операция. Определение  $\theta_D$  способом Верещагина:**

$$\begin{aligned} \theta_D &= \frac{1}{EJ_z} (\omega'_1 \bar{M}'_{c_1} + \omega'_2 \bar{M}'_{c_2} + \omega'_3 \bar{M}'_{c_3} + \omega'_4 \bar{M}'_{c_4}) = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left\{ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{3} ql^2 \cdot 6l \right) \cdot \left( \frac{1}{6l} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6l \right) + \left( -\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{3} ql^2 \cdot 2l \right) \times \right. \\ &\times \left[ \frac{1}{6l} \cdot \left( 1 + \frac{3}{4} \cdot 2l \right) \right] + \left( -\frac{6}{3} ql^2 \cdot 3l \right) \cdot \left( \frac{1}{6l} \cdot 4,5l \right) + \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{18}{3} ql^2 \cdot 3l \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ \frac{1}{6l} \cdot \left( 3l + \frac{2}{3} \cdot 3l \right) \right] \Bigg\} = \frac{31}{9} \cdot \frac{ql^3}{EJ_z}.$$

Знак «+» (плюс) в результате свидетельствует о том, что  $\theta_D$  по направлению совпадает с направлением единичного момента  $M^0 = 1$ , т.е. сечение  $D$  поворачивается против часовой стрелки.

### 5.6. Задачи

**Задача 5.1.** Однопролетная сосновая балка прямоугольного поперечного сечения загружена на участке  $AC$  (рис. 5.18) равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 3$  кН/м. Определить стрелу прогиба, если длина пролета  $l = 6$  м,  $E = 0,1 \cdot 10^5$  МПа,  $h = 20 \cdot 10^{-2}$  м,  $b = 15 \cdot 10^{-2}$  м.

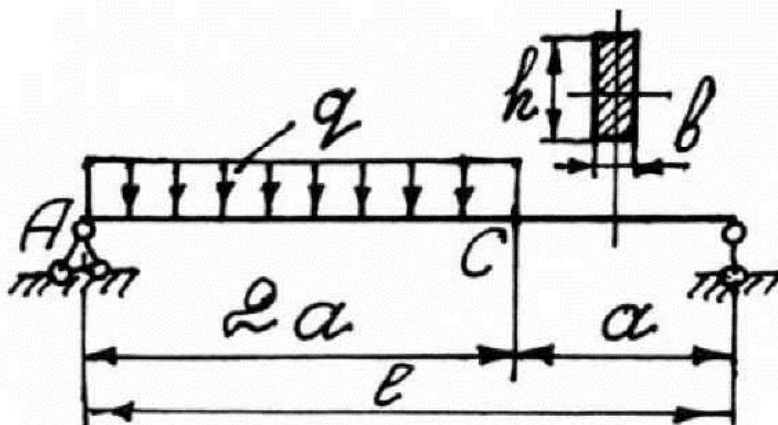


Рис. 5.18

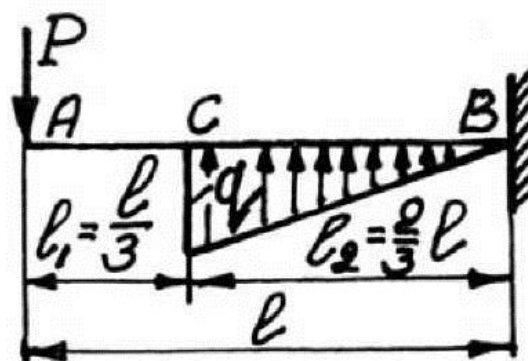


Рис. 5.19

**Задача 5.2.** Консольная балка постоянной жесткостью поперечного сечения  $EJ_z$  (рис. 5.19) загружена распределенной нагрузкой

с известным значением интенсивности  $q$ . Если балку догрузить силой  $P$ , то при каком значении этой силы прогиб балки в сечении  $A$  будет равен нулю?

**Задача 5.3.** Для балки с промежуточным шарниром (рис. 5.20), которая имеет постоянную жесткость  $EJ_z = 7300 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ , построить изогнутую ось, определив перемещения необходимых сечений. Дано:  $P = 40 \text{ кН}$ ,  $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ .

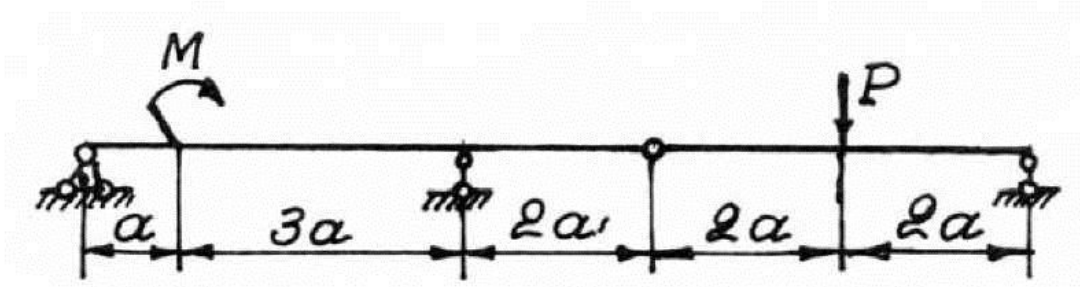


Рис. 5.20

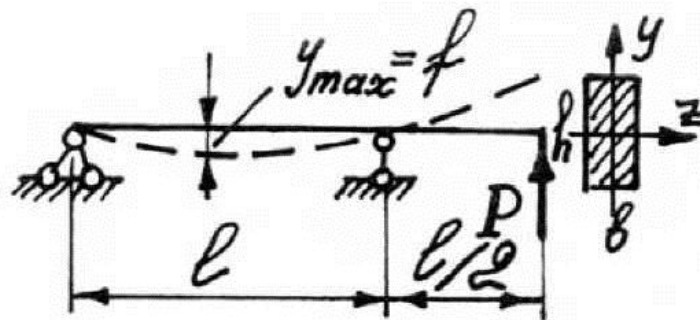


Рис. 5.21

**Задача 5.4.** Для однопролетной балки с правой консолью (рис. 5.21), нагруженной на конце консоли силой  $P$ , замерен максимальный прогиб  $y_{\max} = f$  на пролете между опорами. Определить наибольшее значение нормальных напряжений в опасном поперечном сечении балки и величину силы  $P$ . Известны размеры прямоугольного поперечного сечения, длина  $l$  пролета и модуль упругости  $E$  для материала балки.

**Задача 5.5.** Однопролетная балка загружена распределенной нагрузкой, как показано на рис. 5.22. Определить прогиб посередине пролета балки, если жесткость поперечного сечения  $EJ_z$  постоянна по всей длине.



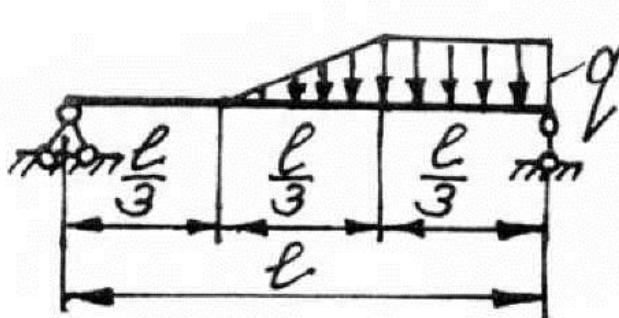


Рис. 5.22

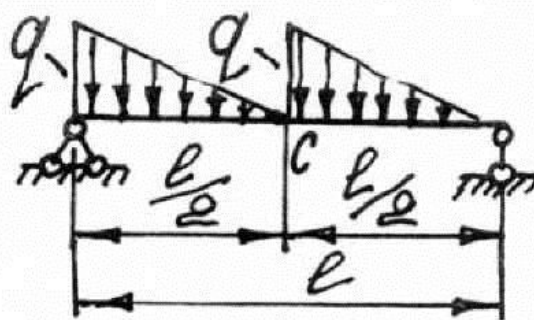


Рис. 5.23

**Задача 5.6.** Однопролетная балка загружена распределенными по линейному закону нагрузками с наибольшей интенсивностью  $q$  (рис. 5.23). Определить прогиб сечения  $C$  балки, если жесткость ее  $EJ_z = \text{const}$ .

**Задача 5.7.** Однопролетная балка (рис. 5.24) загружена распределенной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону. Измеренная датчиком ① продольная деформация составила  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ . Найти взаимный угол поворота сечений  $A$  и  $B$ , если  $l = 15h$ .

**Задача 5.8.** Балка (рис. 5.25) загружена распределенной нагрузкой и сосредоточенными моментами. Определить угол поворота поперечного сечения  $K$ , если жесткость  $EJ_z = \text{const}$ .

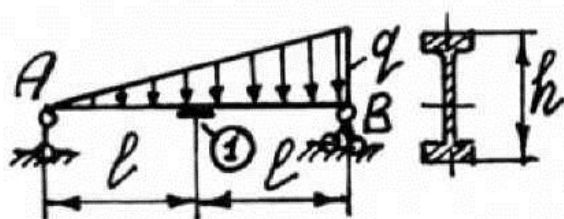


Рис. 5.24

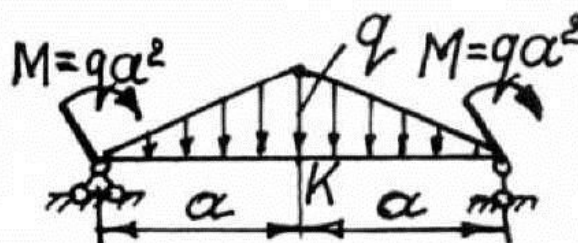


Рис. 5.25

**Задача 5.9.** Для балки (рис. 5.26), загруженной сосредоточенными моментами  $M = q_0 l^2$  и распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону  $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ , найти прогиб сечения  $K$ , если  $EJ_z = \text{const}$ .

**Задача 5.10.** Балка постоянной жесткости  $EJ_z$  с промежуточным шарниром  $K$  (рис. 5.27) нагружена парой сил моментом  $M$  в

двух вариантах: слева и справа от шарнира  $K$ . Найти линейное перемещение шарниров, угол поворота сечений приложения момента  $M$  и работу пары сил в обоих вариантах. Дано:  $M, l, E, J_z$ .

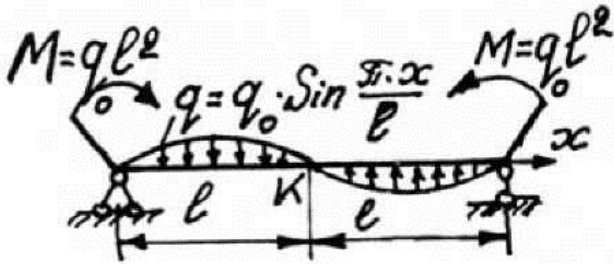


Рис. 5.26

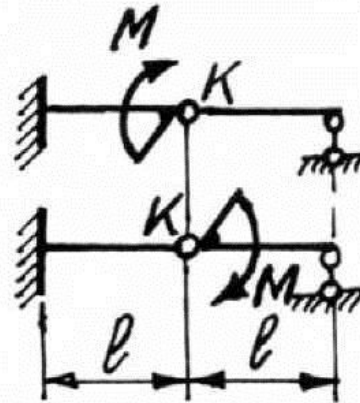


Рис. 5.27

**Задача 5.11.** Однопролетная балка (рис. 5.28) постоянной жесткости поперечного сечения  $EJ_z$  загружена по двум вариантам:

железобетонной плитой (см. рис. 5.28, *а*), деформацией которой пренебрегаем, весом  $G$ ;

мешками с песком (см. рис. 5.28, *б*), равномерно распределенными на длине  $2l$  балки, имеющими общий вес  $G$ , равный весу плиты.

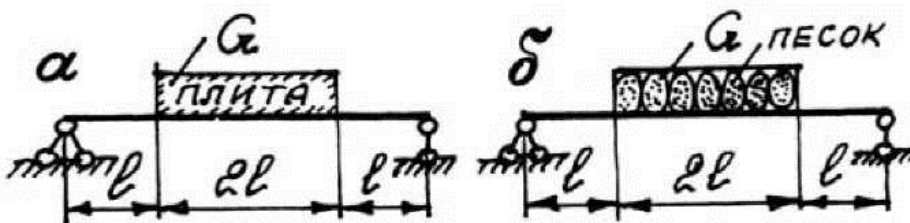


Рис. 5.28

Определить, насколько отличается максимальный прогиб в балке в обоих вариантах нагружения.

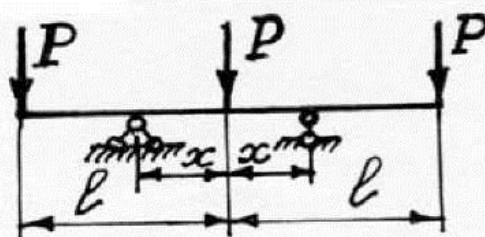


Рис. 5.29

**Задача 5.12.** Для балки постоянной жесткости поперечного сечения  $EJ_z$  (рис. 5.29) найти расположение опор, при котором от указанной нагрузки прогиб посередине балки будет равен нулю.

### 5.7. Решения, указания, ответы

**5.1.** Изобразим расчетную схему (рис. 5.30). Используя уравнения равновесия в виде  $\sum X = 0$ ,  $\sum m_B = 0$ ,  $\sum m_A = 0$ , найдем, что  $H_A = 0$ ,  $R_A = \frac{4}{3}qa = 8 \text{ кН}$ ,  $R_B = \frac{2}{3}qa = 4 \text{ кН}$ . Проверку правильности определения реакций опор выполним, составив уравнение вида  $\sum Y = 0$ .

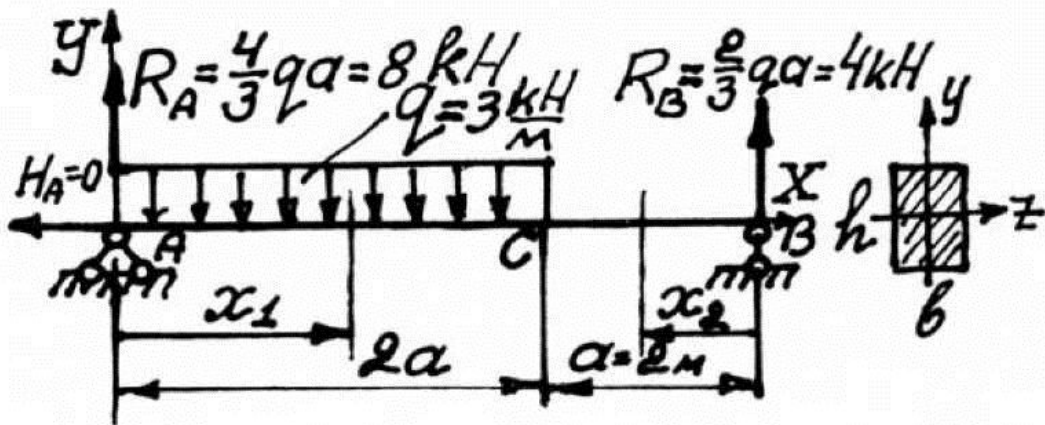


Рис. 5.30

Для того, чтобы получить более простые выражения изгибающих моментов для силового участка AC абсциссу текущего сечения  $x_1$  будем отсчитывать от опоры A, а для силового участка BC –  $x_2$  будем отсчитывать от опоры B.

Составим дифференциальные уравнения изогнутой оси балки для каждого силового участка и дважды проинтегрируем их:

$$EJ_z y_1'' = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2},$$

$$EJ_z y_2'' = R_B x_2;$$

$$EJ_z y_1' = \frac{R_A x_1^2}{2} - \frac{q x_1^3}{6} + C_1, \quad (1)$$

$$EJ_z y_2' = \frac{R_B x_2^2}{2} + C_2; \quad (2)$$

$$EJ_z y_1 = \frac{R_A x_1^3}{6} - \frac{q x_1^4}{24} + C_1 x_1 + D_1, \quad (3) \quad EJ_z y_2 = \frac{R_B x_2}{6} + C_2 x_2 + D_2. \quad (4)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся граничными условиями:

$$\text{при } x_1 = 0: \quad y_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 0;$$

$$\text{при } x_2 = 0: \quad y_2 = 0 \Rightarrow D_2 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 2a \text{ и } x_2 = a: \quad y_1 = y_2 = y_C, \quad (a)$$

$$\theta_1(C) = -\theta_2(C), \quad (б)$$

здесь знак «-» (минус) перед  $\theta_2(C)$  объясняется тем, что оси  $x_1$  и  $x_2$  направлены в противоположные стороны, поэтому правило знаков для  $\theta_2$  меняется на обратное, по отношению к правилу знаков для  $\theta_1$ .

Условие а) приводит к следующему выражению:

$$\frac{R_A (2a)^3}{6} - \frac{q(2a)^4}{24} + C_1 \cdot 2a = \frac{R_B \cdot a^3}{6} + C_2 \cdot a.$$

Условие б) дает равенство:

$$\frac{R_A (2a)^2}{2} - \frac{q(2a)^3}{6} + C_1 = -\frac{R_B \cdot a^2}{2} - C_2.$$

Подставляя численные значения в последние два равенства, получим

$$72 + 6C_1 = 3C_2,$$

$$40 + C_1 = -C_2,$$

откуда  $C_1 = -21,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ ,  $C_2 = -18,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ .

Для определения абсциссы сечения, которое имеет наибольший прогиб, исследуем на экстремум уравнение (3):

$$\frac{dy}{dx} = 0: \quad \frac{R_A x_1^2}{2} - \frac{q x_1^3}{6} + C_1 = 0 \Rightarrow x_1^{\max} = 2,889 \text{ м.}$$

Поставив  $x_1^{\max}$  в выражение (3), получим

$$y_{\max} = f = 3,818 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Обращаем внимание, что постоянная  $C_1 \neq C_2$ , это определено тем, что не был применен метод уравнивания постоянных интегрирования (метод Клебша).

5.2. Прогиб сечения  $A$  (рис. 5.31,  $a$ ) будет равен нулю, если  $|y_A(P)| = |y_A(q)|$ .

Для определения прогиба  $y_A(P)$  воспользуемся расчетной схемой, изображенной на рис. 5.31,  $b$ . Начало координат расположим в сечении  $B$ .

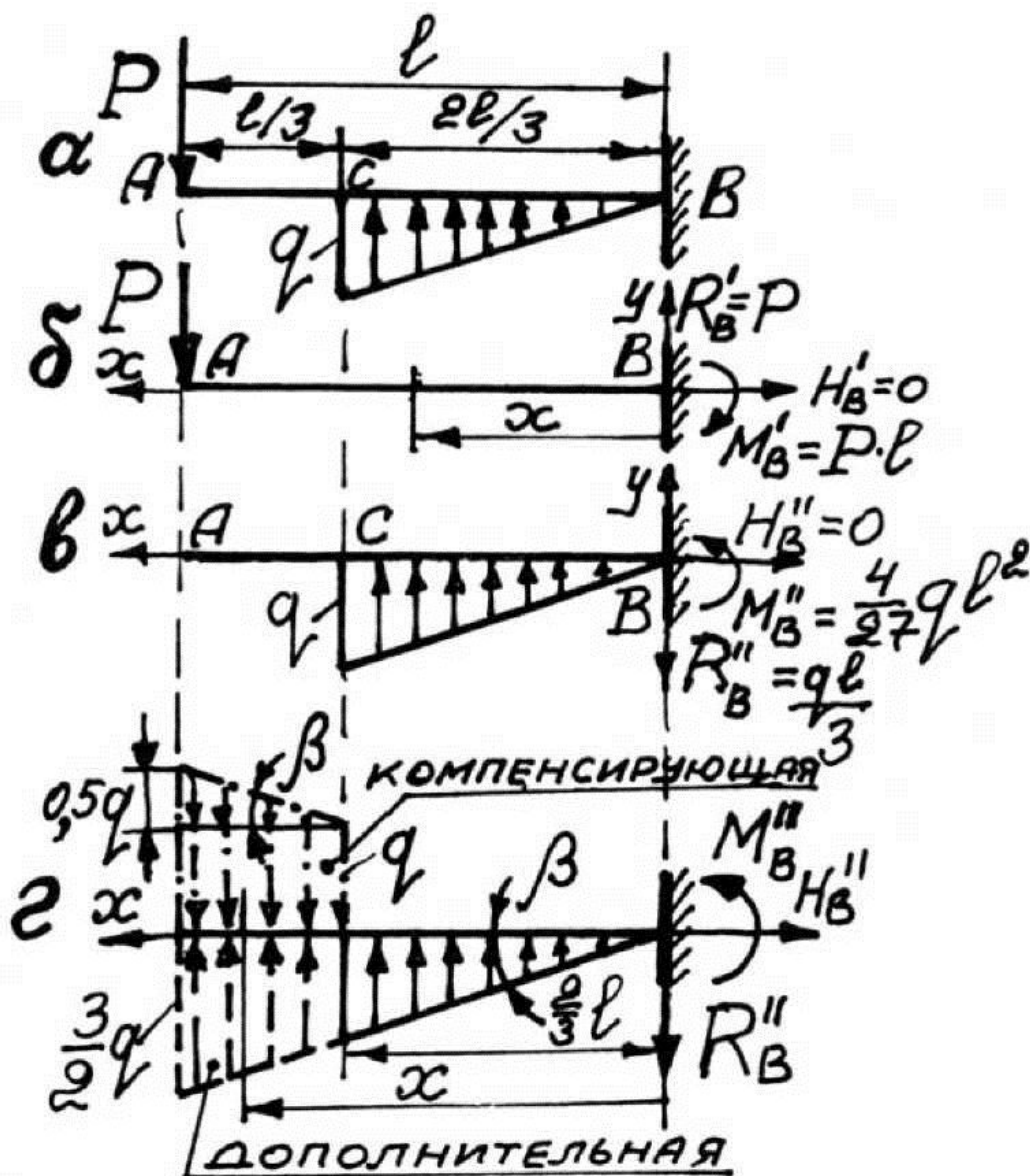


Рис. 5.31

Универсальное уравнение будет иметь вид:

$$EJ_z y(P) = EJ_z y_0 + EJ_z \theta_0 x + \frac{R'_B (x-0)^3}{3!} - \frac{M'_B (x-0)^2}{2!}.$$

В заделке  $y_B = y_0 = 0$ ,  $\theta_B = \theta_0 = 0$ , тогда при  $x=l$

$$y_A(P) = -\frac{Pl^3}{3EJ_z},$$

где знак «-» (минус) свидетельствует о том, что прогиб  $y_A(P)$  направлен в сторону, противоположную оси  $y$ , т.е. вниз.

Для определения прогиба  $y_A(q)$  воспользуемся расчетной схемой (рис. 5.31, в), для которой из уравнения равновесия в виде  $\sum x = 0$ ,

$$\sum y = 0, \quad \sum m_B = 0 \quad \text{найдем, что } H''_B = 0, \quad R''_B = \frac{ql}{3}, \quad M''_B = \frac{4ql^2}{27}.$$

Проверку правильности определения реакций опоры  $B$  можно выполнить, составив уравнение равновесия вида  $\sum m_C = 0$ , которое является следствием уравнений  $\sum y = 0$  и  $\sum m_B = 0$ .

Внесем коррективы в нагрузку на балку (рис. 5.31, з) согласно требованиям метода начальных параметров. Тогда универсальное уравнение (с учетом того, что  $y_B = y_0 = 0$  и  $\theta_B = \theta_0 = 0$ ) будет иметь вид:

$$EJ_z y(q) = \frac{M''_B (x-0)^2}{2!} - \frac{R''_B (x-0)^3}{3!} + \frac{\text{tg } \beta (x-0)^5}{5!} -$$

$$- \frac{q \left(x - \frac{2}{3}l\right)^4}{4!} - \frac{\text{tg } \beta \left(x - \frac{2}{3}l\right)^5}{5!},$$

$\xrightarrow{x > \frac{2}{3}l}$

где  $\text{tg } \beta = \frac{q}{\frac{2}{3}l}$ .

Тогда при  $x=l$   $y_A(q) = \frac{37ql^4}{15 \cdot 81 \cdot EJ_z}$ .

Из равенства  $|y_A(P)| = y_A(q)$  получим, что  $P = \frac{37}{5 \cdot 81} ql = 0,091ql$ .

**5.3.** Заданную балку представим как состоящую из двух: однопролетной с правой консолью и полуподвешной (рис. 5.32, а).

Используя уравнения равновесия, найдем реакции опор и силы взаимодействия в шарнире  $D$  (полученные численные значения реакций приведены на рис. 5.32, а).

На рис. 5.32, б изображена эпюра изгибающего момента для всей заданной балки.

Для построения изогнутой оси балки найдем прогибы сечений  $B, S, D$  и углы поворота сечений  $S, D$  для левой балки, а также угол поворота сечения  $D$  для правой балки с помощью универсального уравнения.

Для левой ( $AD$ ) балки при начале координат в сечении  $A$ :

$$EJ_z y_{II} = EJ_z y_0^I + EJ_z \theta_0^I x_{II} - \frac{R_A (x_{II} - 0)^3}{3!} + \underbrace{\left| \frac{M (x_{II} - a)^2}{2!} \right|}_{x_{II} > a} + \underbrace{\left| \frac{R_C (x_{II} - 4a)^3}{3!} \right|}_{x_{II} > 4a}. \quad (1)$$

Найдем начальные параметры из граничных условий:

при  $x_I = 0$ :  $y_{II} = y_0^I = 0$ ,

при  $x_{II} = 4a = 4$  м:  $y_{II} = y_C = 0 \Rightarrow \theta_0^I = \theta_A = \frac{100}{12EJ_z} =$

$= 0,00114$  рад  $= 0,0655^\circ$ .

Подставляя в (1) значения  $x_{II} = 1$  м,  $x_{II} = 2$  м и  $x_{II} = 6$  м, найдем, что:

$y_B = 0,0007$  м  $= 0,7$  мм;

$y_S = 0,00137$  м  $= 1,37$  мм;

$y_D = -0,016$  м  $= -16$  мм.

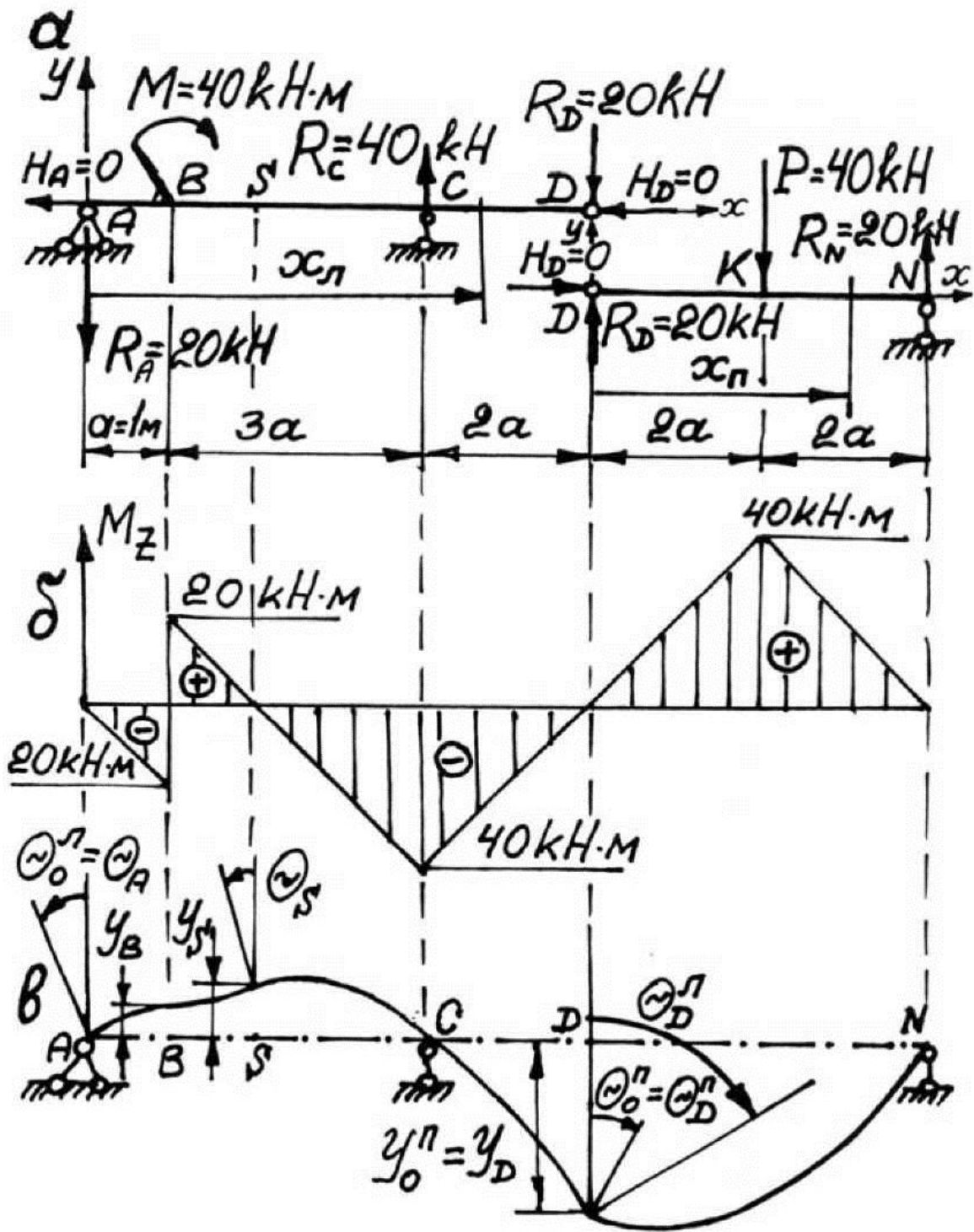


Рис. 5.32

Для определения углов поворота сечений продифференцируем уравнение (1):



$$EJ_z \frac{dy_{\Gamma}}{dx} = EJ_z \theta_{\Gamma} = EJ_z \theta_0^I - \frac{R_A(x_{\Gamma} - 0)^2}{2!} + \underbrace{\left| \frac{M(x_{\Gamma} - a)^1}{1!} \right|}_{x_{\Gamma} > a} + \underbrace{\left| \frac{R_C(x_{\Gamma} - 4a)^2}{2!} \right|}_{x_{\Gamma} > 4a}. \quad (2)$$

При  $x_{\Gamma} = 2$  м:  $\theta_S = 0,00113$  рад =  $0,065^\circ$ .

При  $x_{\Gamma} = 6$  м:  $\theta_D^I = -0,0098$  рад =  $-0,563^\circ$ .

Составим универсальное уравнение для правой ( $DN$ ) балки, выбрав начало координат в сечении  $D$ :

$$EJ_z y_{II} = EJ_z y_0^{II} + EJ_z \theta_0^{II} x_{II} + \frac{R_D(x - 0)^3}{3!} - \underbrace{\left| \frac{P(x - 2a)^3}{3!} \right|}_{x > 2a}. \quad (3)$$

где  $y_0^{II} = y_D = -16$  мм.

Из условия, что при  $x_{II} = 4a$ :  $y_{II} = y_N = 0$  найдем

$$\theta_0^{II} = \theta_D^{II} = -0,0015 \text{ рад} = -0,085^\circ.$$

Изогнутая ось балки изображена (сплошная линия) на рис. 5.32, *в*, где масштаб прогибов и углов поворота существенно увеличен по сравнению с масштабом размеров балки.

**5.4.** Используя уравнения равновесия, найдем реакции опор балки (рис. 5.33, *а*). Построим эпюру изгибающего момента  $M_z$  (рис. 5.33, *б*), откуда следует, что опасным сечением является сечение  $B$ , где действует  $M_{z(\max)} = Pl/2$ .

Запишем универсальное уравнение для балки с учетом, что  $y_0 = y_A = 0$  при расположении начала координат на опоре  $A$ .

$$EJ_z y = EJ_z \theta_0 x + \frac{R_A(x - 0)^3}{3!} - \underbrace{\left| \frac{R_B(x - l)^3}{3!} \right|}_{x > l}. \quad (1)$$

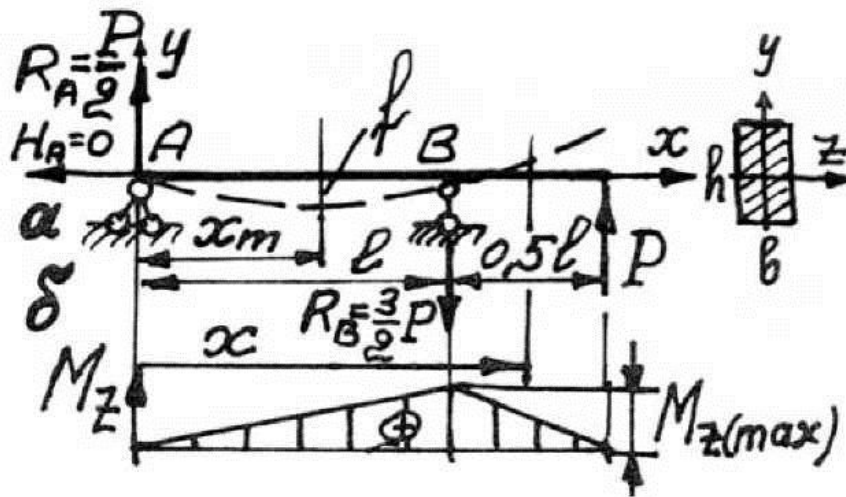


Рис. 5.33

Из условия, что при  $x=l$   $y = y_B = 0$ , получим из (1)  
 $\theta_0 = \theta_A = -\frac{Pl^2}{12EJ_z}$ ; здесь знак «-» (минус) указывает на то, что сечение  $A$  поворачивается по часовой стрелке.

Итак, уравнение изогнутой оси балки будет иметь вид:

$$y = \frac{1}{EJ_z} \left[ -\frac{Pl^2}{12}x + \frac{Px^3}{12} - \frac{3P(x-l)^3}{12} \right] \quad (2)$$

Исследуем на экстремум уравнение (2) для участка  $AB$  балки:

$$y' = 0 = -\frac{Pl^2}{12} + \frac{Px_m^2}{4} \Rightarrow x_m = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

тогда

$$y_{\max} = f = \frac{1}{EJ_z} \left[ -\frac{Pl^3}{12\sqrt{3}} + \frac{P\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^3}{12} \right] = -\frac{Pl^3}{18\sqrt{3}EJ_z}, \quad (3)$$

где знак «-» (минус) указывает на то, что прогиб  $y_{\max}$  направлен вниз, в сторону, противоположную направлению оси  $y$ .

Из (3) найдем, опустив знак минус, что  $P = \frac{1}{l^3} \cdot 18\sqrt{3}EJ_z \cdot f$ .

В крайних волокнах опасного сечения  $B$  напряжения будут равны:

$$\sigma_{x(\max)} = \frac{M_z \cdot h/2}{J_z} = \frac{Pl \cdot h/2}{2J_z} = \frac{9\sqrt{3}E \cdot h \cdot f}{2l^2}$$

5.5. Прогиб  $y_C^a$  сечения  $C$  балки, изображенной на рис. 5.34,  $a$ , равен прогибу  $y_C^b$  сечения  $C$  балки, изображенной на рис. 5.34,  $b$ , а сумма  $y_C^a + y_C^b = y_C$  балки, приведенной на рис. 5.34,  $в$ .

Для определения прогиба  $y_C$  воспользуемся интегралом Мора, для чего построим единичную систему (рис. 5.34,  $з$ ). Обозначим абсциссы текущих сечений на силовых участках.

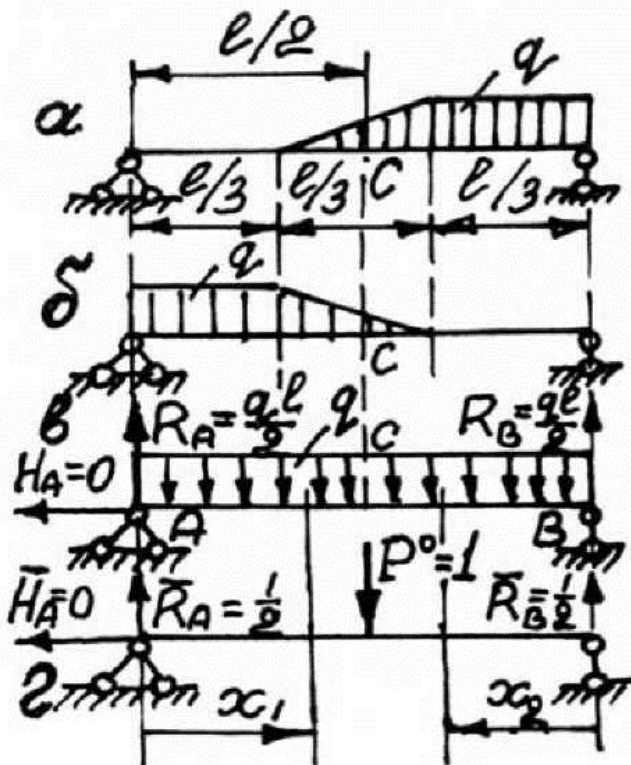


Рис. 5.34

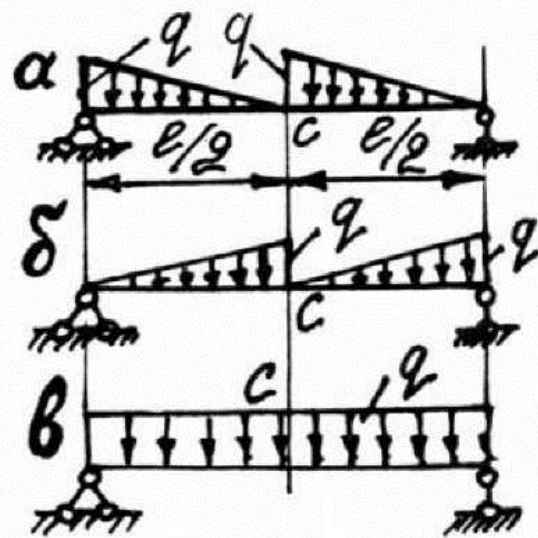


Рис. 5.35

Изгибающий момент для грузовой системы (см. рис. 5.34, в)  
 $M_{z_1} = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2}$ , а для единичной системы  $\bar{M}_{z_1} = \frac{1}{2} x_1$  при  
 $0 \leq x_1 \leq l/2$ ; точно такие же выражения для изгибающих моментов  
и с теми же пределами изменения  $x_2$  имеем для второго силового  
участка, тогда

$$y_C = \frac{1}{EJ_z} \cdot 2 \int_0^{l/2} M_{z_1} \cdot \bar{M}_{z_1} \cdot dx = \frac{2}{EJ_z} \int_0^{l/2} \left( \frac{ql}{2} \cdot x_1 - \frac{q x_1^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} x_1 \cdot dx =$$

$$= \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

$$\text{Прогиб } y_C^a = y_C^b = \frac{y_C}{2} = \frac{5}{768} \cdot \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

**5.6.** Очевидно, что прогиб сечения  $C$  для обеих балок  
(рис. 5.35, а, б) одинаков и равен 1/2 прогиба сечения  $C$  балки, изо-  
браженной на рис. 5.35, в. Таким образом,  $y_C^a = y_C^b = \frac{y_C}{2} =$   
 $= \frac{5}{768} \cdot \frac{ql^4}{EJ_z}$  (см. решение задачи 5.5).

**5.7.** При известной деформации  $\varepsilon$  нижнего волокна сечения  $C$   
найдем значение интенсивности распределенной нагрузки  $q$ .

Из условия равновесия балки имеем, что  $H_A = 0$ ,  $R_A = ql/3$ ,  
 $R_B = 2ql/3$  (рис. 5.36, а).

Изгибающий момент в сечении  $C$  равен:

$$M_z(C) = \frac{ql}{3} \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} l = \frac{1}{4} ql^2.$$

Напряжение в нижнем волокне сечения  $C$  равно:

$$\sigma_x = \frac{M_z(C) \cdot h/2}{J_z} = \frac{ql^2 h}{8J_z} = E \cdot \varepsilon,$$

откуда  $q = \frac{8EJ_z \varepsilon}{hl^2}$ .

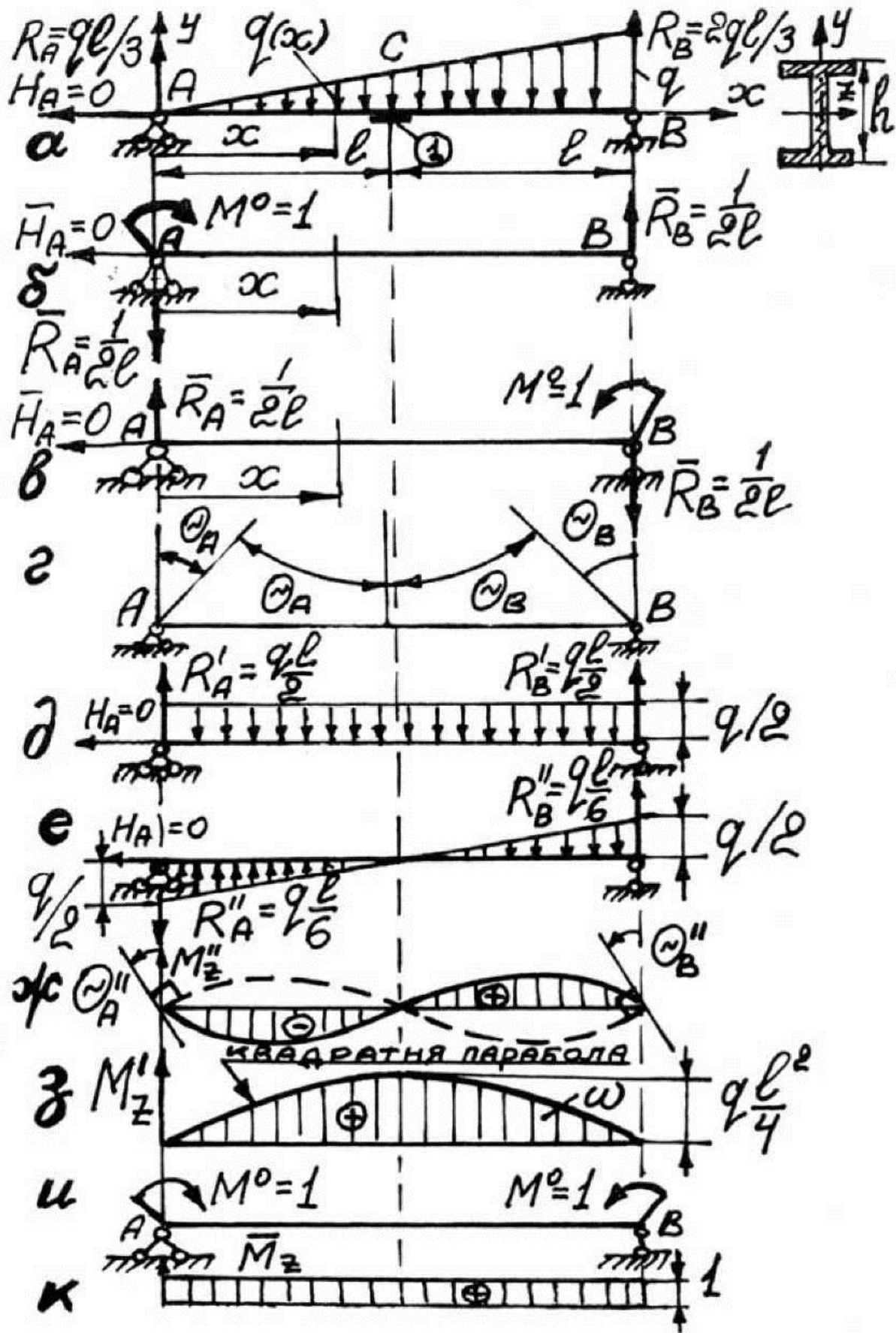


Рис. 5.36

*Вариант 1.* Для определения взаимного угла поворота воспользуемся интегралом Мора.

Изгибающий момент в сечении  $x$  грузовой балки

$$M_z = R_A x - \frac{1}{2} q(x) \cdot x \cdot \frac{1}{3} x,$$

где  $q(x) = \frac{q}{2l} x$ .

Для определения угла поворота сечения  $A$  изобразим единичную систему (рис. 5.36, б), загруженную в сечении  $A$  моментом  $M^0 = 1$ . Реакции опор определим из уравнений равновесия. Изгибающий момент в сечении  $x$  единичной системы равен

$$\bar{M}_z = 1 - \bar{R}_A x.$$

Тогда

$$\theta_A = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l \left( \frac{ql}{3} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2l} x \cdot x \cdot \frac{1}{3} x \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2l} x \right) dx = \frac{7ql^3}{45EJ_z}.$$

Знак «+» (плюс) в результате свидетельствует о том, что сечение  $A$  поворачивается по часовой стрелке, т.е. в направлении действия  $M^0 = 1$ .

Для определения поворота сечения  $B$  изобразим единичную систему (рис. 5.36, в), загруженную в сечении  $B$  моментом  $M^0 = 1$ . Реакции опор определим из уравнений равновесия. Изгибающий момент в сечении  $x$  единичной системы равен:

$$\bar{M}_z = \bar{R}_A \cdot x.$$

Тогда

$$\theta_B = \frac{1}{EJ_z} \int_0^l \left( \frac{ql}{3} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2l} x \cdot x \cdot \frac{1}{3} x \right) \cdot \frac{1}{2l} \cdot x \cdot dx = \frac{8ql^3}{45EJ_z}.$$

Знак «+» (плюс) в результате говорит о том, что сечение  $B$  поворачивается против часовой стрелки, т.е. по направлению момента  $M^0 = 1$ .

Взаимный угол поворота (см. рис. 5.36, г)

$$\theta_{AB} = \theta_A + \theta_B = \frac{15}{45} \frac{ql^3}{EJ_z} = \frac{8 \cdot \varepsilon \cdot l}{3h} = \frac{8 \cdot \varepsilon \cdot 15h}{3h} = 0,02 \text{ рад} = 1,15^\circ.$$

*Вариант 2.* Найдем взаимный угол поворота способом Верещагина, для чего, в первую очередь, представим нагрузку на балку как состоящую из двух составляющих: равномерно распределенную интенсивностью  $q/2$  (рис. 5.36, д) и распределенную по линейному закону кососимметричную нагрузку (рис. 5.36, е).

Взаимный угол поворота сечений  $A$  и  $B$  от кососимметричной нагрузке не зависит. Действительно, эпюра изгибающих моментов  $M_z''$  от этой нагрузки (рис. 5.36, ж) так же будет кососимметричной; на этом же рисунке изображена штриховой линией изогнутая ось балки и углы поворота сечений  $A$  и  $B$ . Очевидно, что углы поворота одинаковы,  $\theta_A'' = \theta_B''$ , и оба сечения поворачиваются в одном направлении – против часовой стрелки.

Таким образом, взаимный угол поворота сечений  $A$  и  $B$  зависит только от симметричной нагрузки (рис. 5.36, д), и для определения его способом Верещагина строим грузовую эпюру – эпюру изгибающего момента  $M_z'$  (рис. 5.36, з), единичную систему (рис. 5.36, и), эпюру изгибающего момента  $\bar{M}_z$  для единичной системы (рис. 5.36, к). Тогда «перемножение» эпюр даст

$$\theta_{AB} = \frac{\omega \bar{M}_C}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{2}{3} \frac{ql^2}{4} \cdot 2l \right) \cdot 1 = \frac{ql^3}{3EJ_z} = \frac{8 \cdot \varepsilon l}{3h} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 15h}{3h} = 0,02 \text{ рад.}$$

Обращаем внимание, что так как кососимметричная нагрузка (рис. 5.36, е) дает в сечении  $C$  посередине пролета изгибающий момент, равный нулю, то при определении  $M_z(C)$  (см. начало решения задачи) можно воспользоваться схемой нагружения, изображенной на рис. 5.36, д.

**5.8.** На основании принципа независимости действия сил угол поворота сечения  $K$  равен  $\theta_K = \theta_K(q) + \theta_K(M)$ , см. рис. 5.25.

От симметричной распределенной нагрузки угол  $\theta_K(q) = 0$ . Тогда расчетная схема будет иметь вид рис. 5.37, а.

Для определения  $\theta_K(M)$  способом Верещагина построим эпюру  $M_z(M)$  – грузовую эпюру (рис. 5.37, б), единичную систему (рис. 5.37, в), загруженную единичным моментом  $M^0 = 1$  в сече-

нии  $K$ , эпюру изгибающего момента  $\bar{M}_z$  для единичной системы (рис. 5.37,  $\varepsilon$ ).

$$\theta_K = 2 \cdot \frac{\omega_1 \bar{M}_{c1}}{EJ_z} = \frac{2}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} qa^2 a \right) \cdot \left( \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{3} a \right) = \frac{qa^3}{6EJ_z}.$$

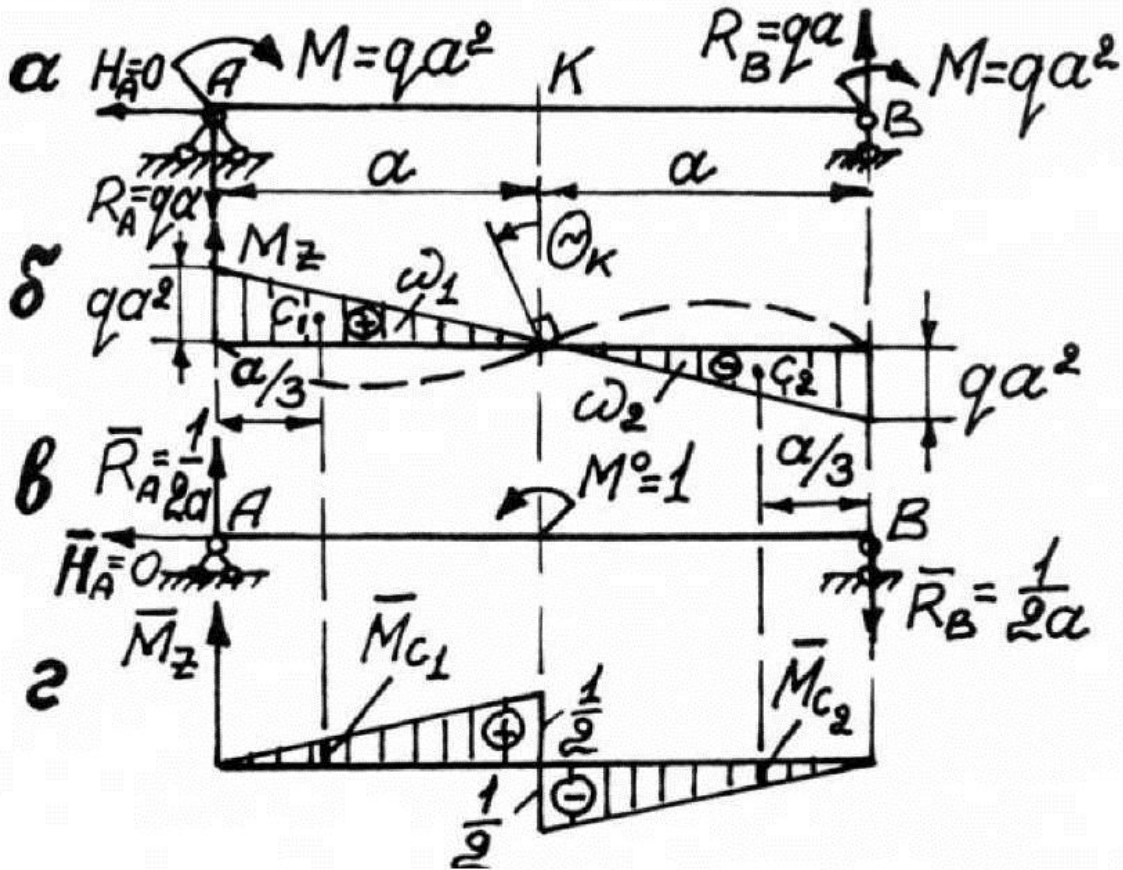


Рис. 5.37

Знак «+» (плюс) в результате свидетельствует о том, что сечение  $K$  поворачивается по направлению момента  $M^0$ , т.е. против часовой стрелки. Изогнутая ось балки только от действия сосредоточенных моментов  $M$  изображена пунктирной линией на рис. 5.37,  $\delta$ .

5.9. На основании принципа независимости действия сил прогиб сечения  $K$  равен  $y_K = y_K(q) + y_K(M)$ , см. рис. 5.26.

От кососимметричной распределенной нагрузки прогиб  $y_K(q) = 0$ . Тогда расчетная схема будет иметь вид рис. 5.38,  $a$ .

Для определения  $y_K(M)$  способом Верещагина построим грузовую эпюру  $M_z(M)$  (рис. 5.38,  $b$ ), единичную систему (рис. 5.38,  $\beta$ ),



загруженную единичной силой  $P^0 = 1$  в сечении  $K$ . Эпюру изгибающего момента  $\bar{M}_z$  для единичной системы (рис. 5.38,  $\varepsilon$ ).

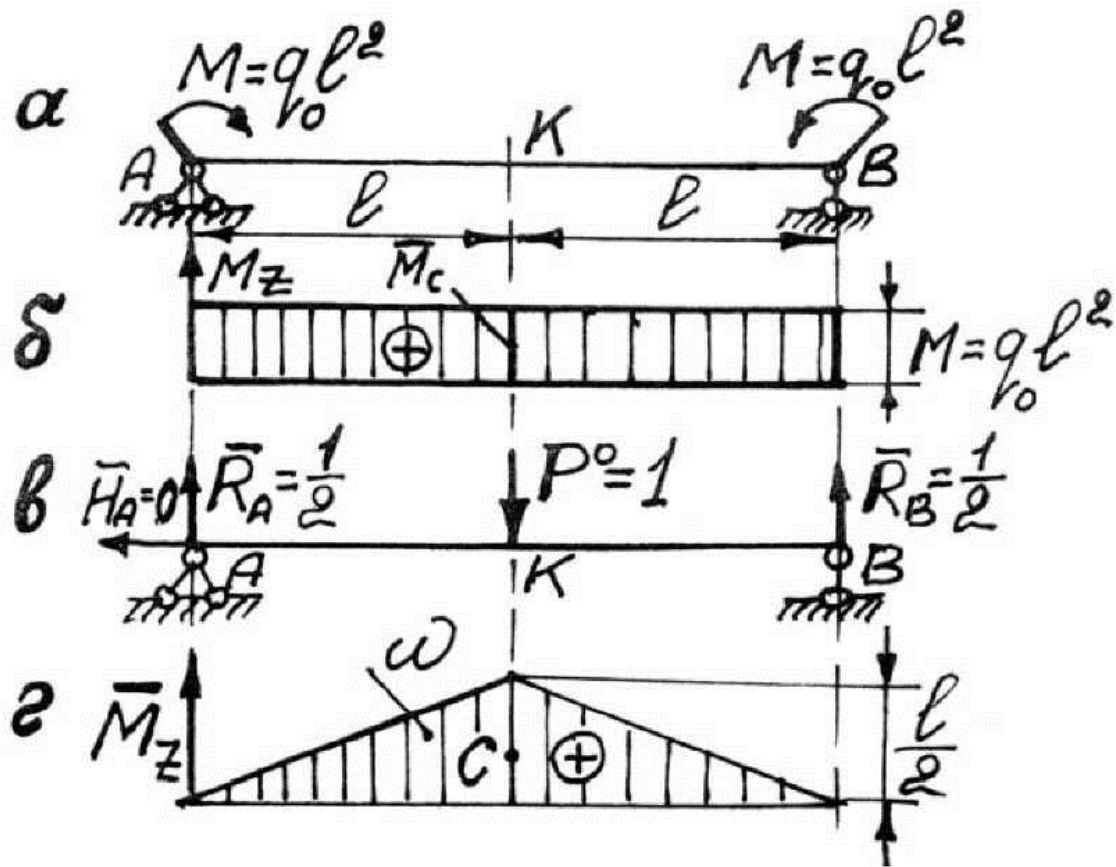


Рис. 5.38

Используя свойство коммутативности при «перемножении» эпюр, примем за грузовую площадь  $\omega$  площадь  $\bar{M}_z$  от единичного усилия, а  $\bar{M}_C$  возьмем из эпюры  $M_z$  (рис. 5.38,  $\beta$ ).

$$\text{Тогда } y_K(M) = \frac{\omega \cdot \bar{M}_C}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot 2l \right) \cdot M = \frac{Ml^2}{2EJ_z} = \frac{q_0 l^4}{2EJ_z}.$$

**5.10.** Приведенные в задаче балки ① и ② являются статически определимыми балками с промежуточным шарниром.

Для балки (рис. 5.39,  $a$ ) рассматривая равновесие полуподвесной балки  $KB$ , из уравнения равновесия вида  $\sum m_K = 0$  получаем, что

$$R_B^{①} = 0, \text{ а для балки (рис. 6.52, } \beta) - R_B^{②} = \frac{M}{l}.$$

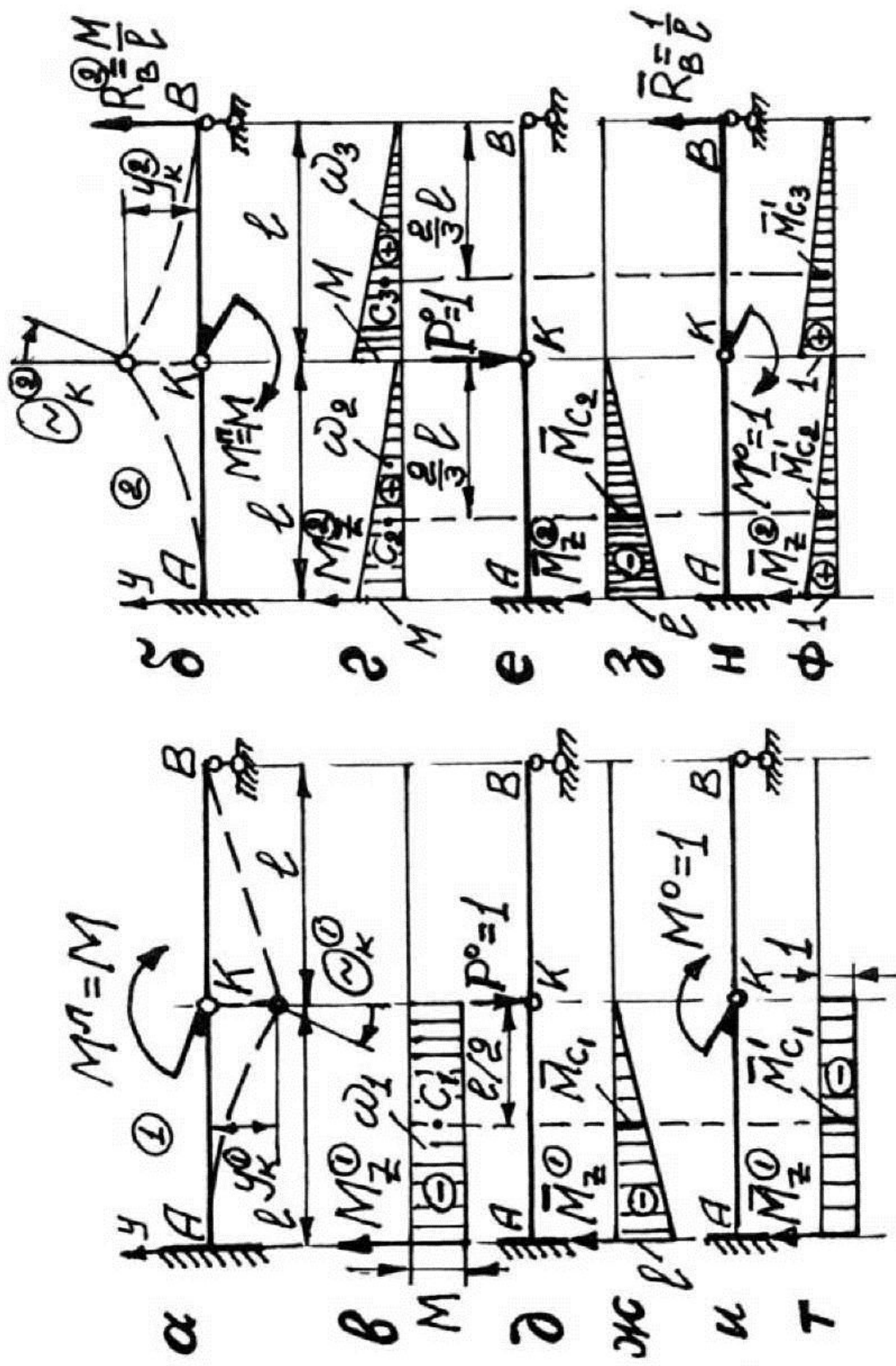


Рис. 5.39

Воспользуемся способом Верещагина для определения перемещений шарнира  $K$ .

Грузовые эпюры для ① и ② вариантов нагружения представлены на рис. 5.39, *в, г*.

Единичные системы для определения прогибов изображены на рис. 5.39, *д, е*, а соответствующие им эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 5.39, *ж, з*.

Единичные системы для определения углов поворота изображены на рис. 5.39, *и, н*, а соответствующие им эпюры изгибающих моментов приведены на рис. 5.39, *т, ф*.

Приведем результаты «перемножения» эпюр:

$$y_K^{①}(M^{\text{II}}) = \frac{\omega_1 \bar{M}_{c_1}}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} (-M \cdot l) \cdot \left(-\frac{l}{2}\right) = \frac{Ml^2}{2EJ_z} \quad \text{прогиб на}$$

правлен вниз, как и  $P^0 = 1$ ;

$$y_K^{②}(M^{\text{II}}) = \frac{\omega_2 \bar{M}_{c_2}}{EJ_z} = \left(\frac{1}{2}Ml\right) \cdot \left(-1 \cdot \frac{2}{3}l\right) = -\frac{Ml^2}{3EJ_z} \quad \text{прогиб на}$$

правлен вверх, в сторону, противоположную направлению

$$P^0 = 1. \theta_K^{①}(M^{\text{I}}) = \frac{\omega_1 \bar{M}'_{c_1}}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} (-M \cdot l) \cdot (-1) = \frac{Ml}{EJ_z}.$$

$$\theta_K^{②}(M^{\text{II}}) = \frac{1}{EJ_z} (\omega_2 \bar{M}'_{c_2} + \omega_2 \bar{M}'_{c_3}) =$$

$$= \frac{1}{EJ_z} \left\{ \left(\frac{1}{2}Ml\right) \cdot \left[\frac{1}{l} \cdot \left(l + \frac{2}{3}l\right) - 1\right] + \left(\frac{1}{2}Ml\right) \cdot \left(\frac{1}{l} \cdot \frac{2}{3}l\right) \right\} = \frac{2Ml}{3EJ_z}.$$

Сечения, прилегающие к шарниру  $K$  в обоих случаях нагружения, поворачиваются по часовой стрелке так же, как направлены и  $M^0 = 1$ .

Виды изогнутых осей балок показаны на рис. 5.39, *а, б* штриховой линией.

Обращаем внимание, что часть балки  $BK$  в первом варианте нагружения наклоняется, но не изгибается, так как на этом участке

$$\text{изгибающий момент равен нулю, т.е. } \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z} = 0.$$

Работа пары сил будет равна:

$$A^{①} = \frac{1}{2} M \cdot \theta_K^{①} = \frac{Ml^2}{2EJ_z}, \quad A^{②} = \frac{1}{2} M \cdot \theta_K^{②} = \frac{Ml^2}{3EJ_z}.$$

5.11. Определимся с расчетными схемами для первого и второго варианта нагружения (см. рис. 5.28).

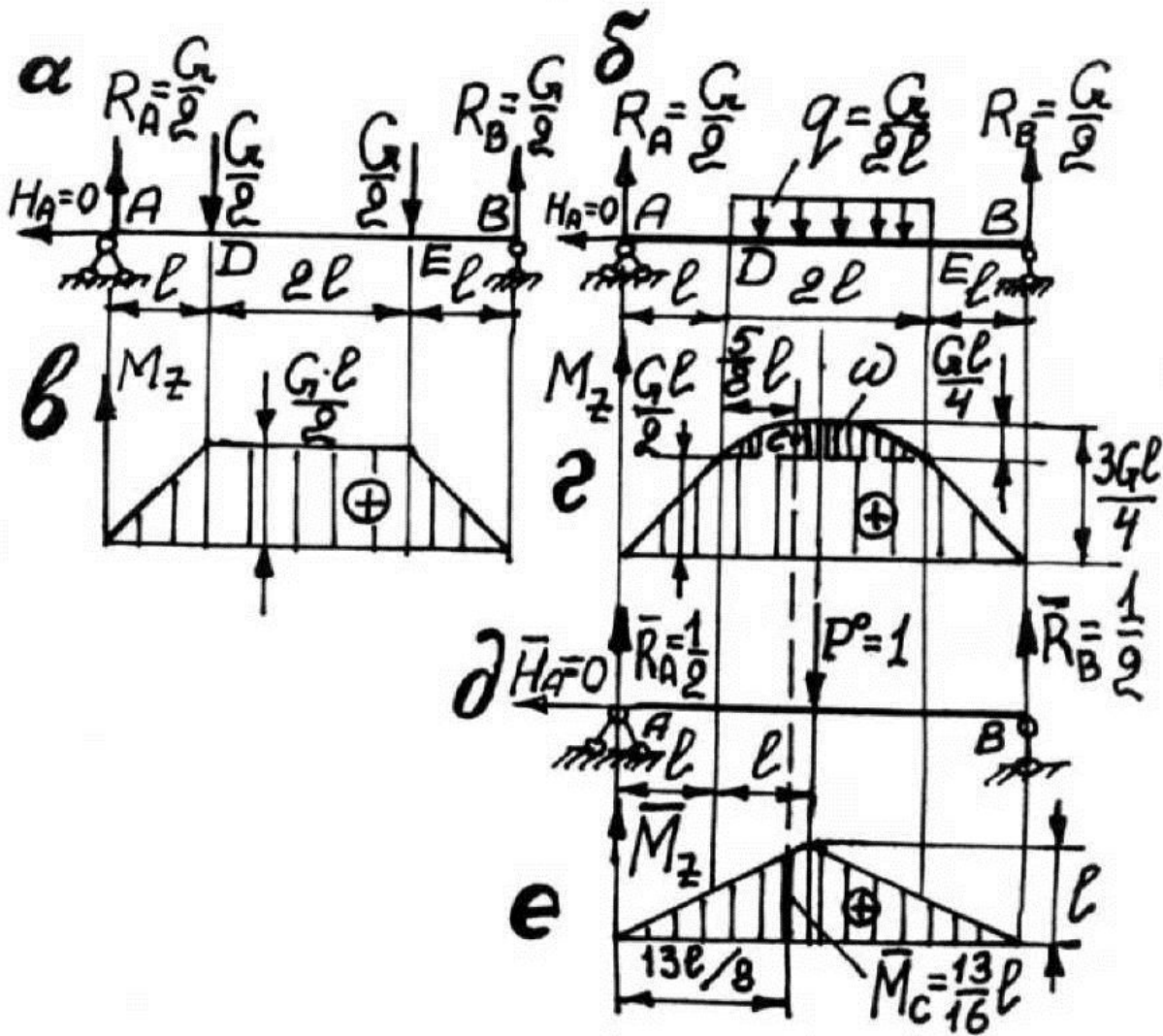


Рис. 5.40

В первом варианте, так как плиту считаем абсолютно жесткой, а балка под действием нагрузки прогибается по симметричной кривой, то, следовательно, весь вес плиты будет передаваться на балку через сечения D и E (рис. 5.40, а). На рис. 5.40, б представлена расчетная схема для второго случая нагружения.

Для решения задачи воспользуемся способом Верещагина, для чего построим эпюры изгибающего момента для первого и второго

варианта нагружения (рис. 5.40, в, з); изобразим единичную систему (рис. 5.40, д), которая будет одинакова для обоих случаев; построим эпюру изгибающего момента для единичной системы (рис. 5.40, е).

Из сравнения грузовых эпюр следует, что во втором варианте эпюра отличается только площадью  $\omega$  (густая вертикальная штриховка). «Перемножение» этой площади и эпюры от единичного усилия  $P^0 = 1$  и даст величину, на которую отличается прогиб второго варианта нагружения от первого.

$$\Delta f = \frac{\omega \bar{M}_e}{EJ_z} = \frac{2}{EJ_z} \left[ \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} Gl \cdot l \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{8} l \right) \right] = \frac{13}{48} \frac{Gl^3}{EJ_z}.$$

**5.12.** Решение задачи выполним способом Верещагина. На рис. 5.41, а изображена расчетная схема, на рис. 5.41, б – грузовая эпюра, на рис. 5.41, в – единичная система, на рис. 5.41, г – эпюра изгибающего момента  $\bar{M}_z$  для единичной системы.

Для «перемножения» эпюр воспользуемся формулой (5.18). «Перемножение» произведем для эпюр  $\bar{M}_z$  только на участке АС балки (густая вертикальная штриховка), а затем увеличим результат на два (учет «перемножения» на участке СВ).

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{L}{6} (2ac + 2bd + ad + bc) = \\ &= \frac{x}{6} \left\{ 2 \left( P \cdot \frac{3}{2} x - Pl \right) \cdot \left( \frac{1}{2} x \right) + \left[ -P(l-x) \right] \cdot \left( \frac{1}{2} x \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{3} Px^3 - \frac{1}{4} Plx^2. \end{aligned}$$

Тогда прогиб сечения С будет равен

$$y_C = \frac{2\Delta}{EJ_z} = \frac{P}{EJ_z} \left( \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} lx^2 \right).$$

Приравнивая  $y_C = 0$ , найдем

$$x_0 = \frac{3}{4} l.$$

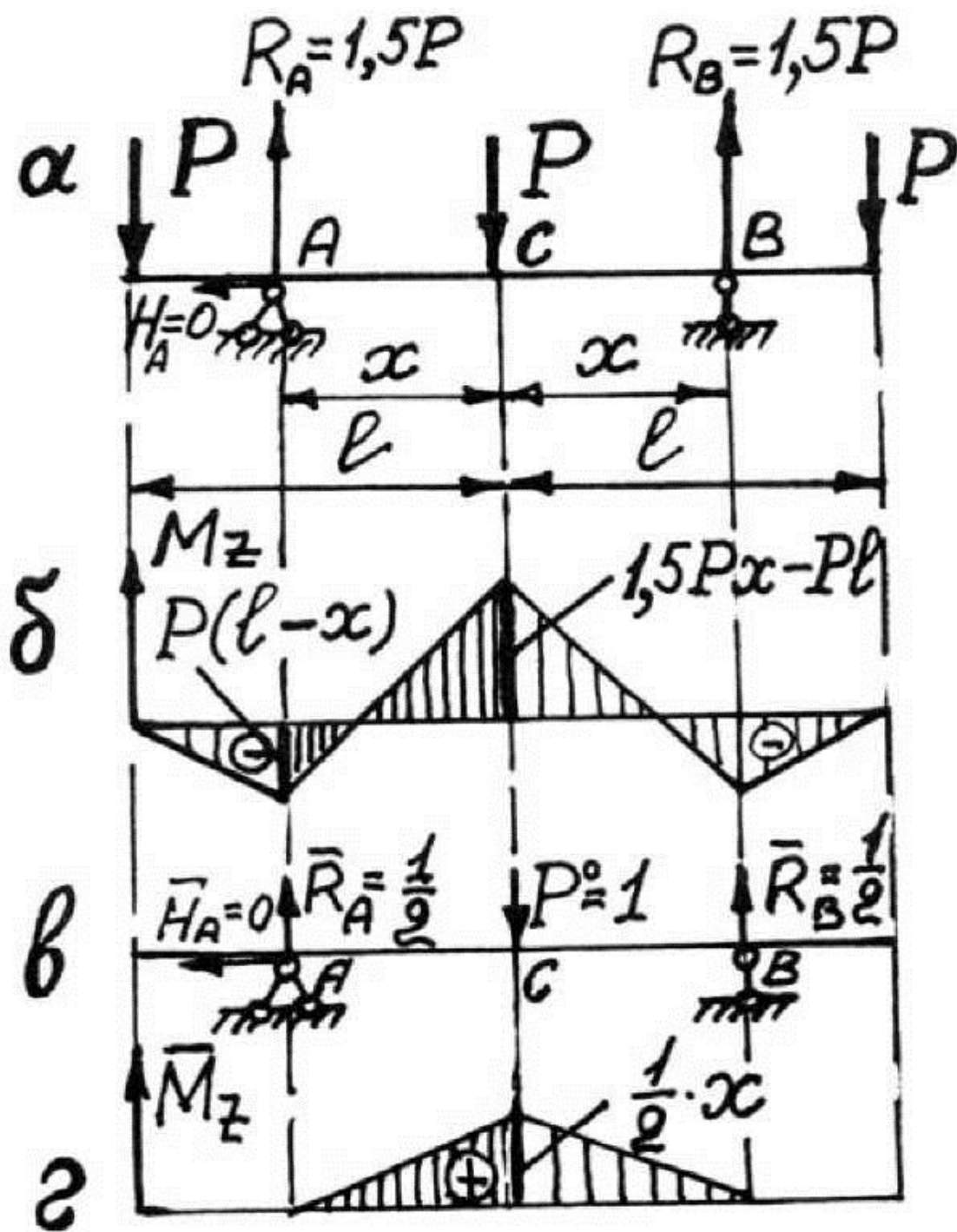


Рис. 5.41

## Тема 6

# КРУЧЕНИЕ

### 6.1. Основные положения

Кручением называется деформация, вызванная взаимно уравновешенными парами сил, лежащими в плоскостях поперечных сечений бруса (стержня).

Брус, испытывающий кручение, принято называть валом.

При кручении в поперечном сечении вала возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_x$ .

Рассмотрим вал под действием двух скручивающих (внешних) моментов (рис. 6.1, а). Расчетная схема вала представлена на рис. 6.1, б.

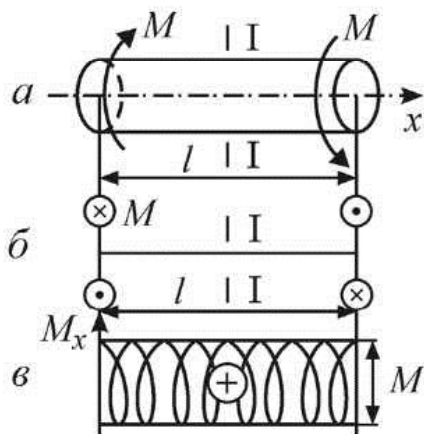


Рис. 6.1

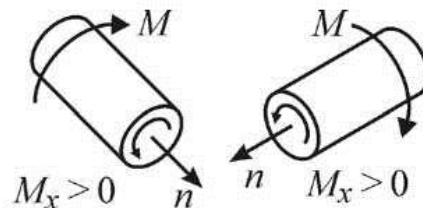


Рис. 6.2

В любом поперечном сечении крутящий момент равен алгебраической сумме внешних моментов, лежащих по одну сторону от сечения. За положительный крутящий момент будем считать момент, действующий против часовой стрелки при взгляде со стороны внешней нормали к сечению. Мысленно рассечем вал по сечению  $I-I$  (рис. 6.2). Из анализа рис. 6.2 следует, что скручивающий (внешний) момент, действующий по часовой стрелке (при

взгляде со стороны внешней нормали к рассматриваемому сечению) в выражении  $M_x$  даст положительное слагаемое, и, наоборот, скручивающий момент, действующий против часовой стрелки – дает в выражении  $M_x$  отрицательное слагаемое. Таким образом, в сечении  $I-I$   $M_x = M$ . Эпюра  $M_x$  показана на рис. 6.1, в.

## 6.2. Кручение валов круглого поперечного сечения

### 6.2.1. Напряжения

Под действием крутящего момента  $M_x$  в поперечном сечении вала возникают касательные напряжения, перпендикулярные к радиусам, определяемые по формуле:

$$\tau_{xt} = \frac{M_x \cdot \rho}{J_p} \quad (6.1)$$

Первый индекс у  $\tau$  – адрес, т.е. указывает на какой площадке (площадке с нормалью  $x$ !) действует касательное напряжение; второй индекс – направление, по которому оно действует; ось  $t$  в каждой точке перпендикулярна к радиусу. В формуле  $\rho$  – полярная координата точки поперечного сечения. Из формулы (6.1) видно, что  $\tau_{xt}$  в сечении изменяется по линейному закону. Эпюра  $\tau_{xt}$  представлена на рис. 6.3,

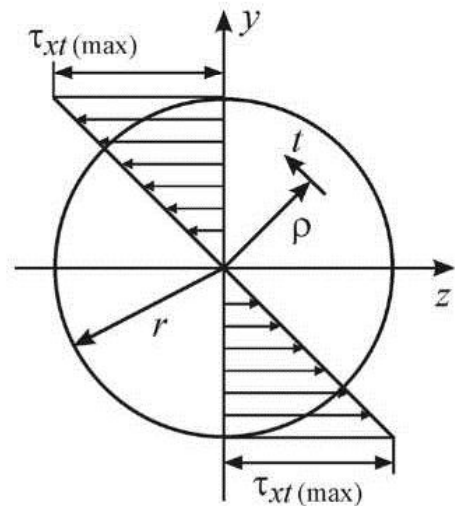


Рис. 6.3

$$\tau_{xt(max)} = \frac{M_x \cdot \rho_{max}}{J_p} = \frac{M_x}{W_p}, \quad (6.2)$$

где  $\rho_{max} = r$ , полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}.$$



Условие прочности имеет вид

$$\tau_{xt(\max)} = \frac{M_{x(\max)} \cdot \rho_{\max}}{J_p} = \frac{M_{x(\max)}}{W_p} \leq [\tau], \quad (6.3)$$

с помощью которого производим проверочный, проектировочный расчет и расчет грузоподвешности.

Выделим внутри вала элементарный объемный элемент с размерами  $dr$ ,  $ds$ ,  $dx$  (рис. 6.4, а); по боковым граням его действуют только касательные напряжения, определяемые формулой (6.1).

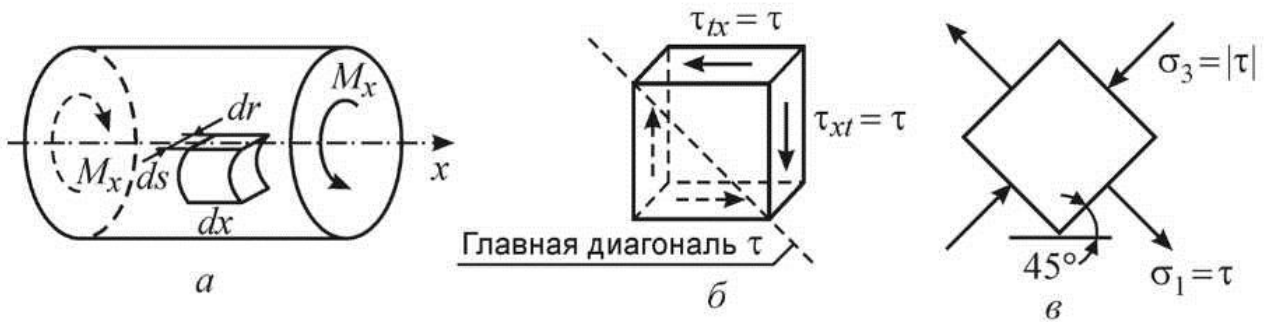


Рис. 6.4

Элементарный объем находится в условиях чистого сдвига (см. тему 2, разд. 2.1, рис. 2.5 и 2.6). На рис. 6.4, в представлено эквивалентное чистому сдвигу напряженное состояние: по главной диагонали касательных напряжений действует растягивающее  $\sigma_1 = \tau$ , а по направлению вспомогательной диагонали – сжимающее  $\sigma_3 = |\tau|$ .

Примем следующее правило знаков для касательных напряжений. Положительный крутящий момент  $M_x > 0$  вызывает в поперечном сечении вала положительные касательные напряжения  $\tau_{xt} > 0$ , т.е. такие касательные напряжения, которые стремятся повернуть элементарный объем по часовой стрелке. Тогда  $\tau_{tx} = \tau < 0$  (рис. 6.4, б), так как стремятся повернуть элементарный объем против часовой стрелки.

Введение вышеприведенного правила знаков необходимо для использования формул, начиная с (2.6) и далее темы 2, и настоящей темы 6.

Выделим в элементарном объеме площадку общего положения, определяемую нормалью  $n$  и углом  $\alpha = \widehat{xn}$ , где  $x$  – ось параллельная оси  $x$  вала. Напомним, что угол  $\alpha > 0$  откладывается против часовой стрелки, а  $\alpha < 0$  – по часовой стрелке (рис. 6.5).

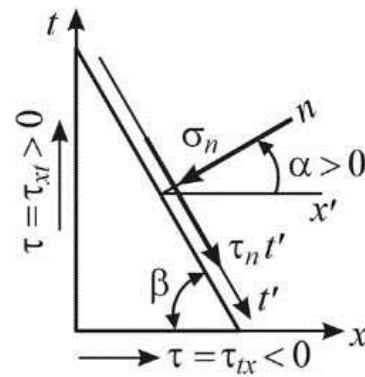


Рис. 6.5

Напряжения на площадке общего положения будут:

$$\sigma_n = -\tau_{xt} \sin \alpha, \quad (6.4)$$

$$\tau'_{nt} = \tau_{xt} \cos 2\alpha, \quad (6.5)$$

где  $\tau_{xt}$  – напряжения, действующие в поперечном сечении вала.

**Указание I.** Если нормаль  $n$  находится в пределах угла  $\pm 45^\circ$  от главной диагонали, то  $\sigma_n$  растягивающее, т.е. направлена от площадки, а если нормаль лежит в пределах угла  $\pm 45^\circ$  от вспомогательной диагонали –  $\sigma_n$  сжимающее, т.е. направлено к площадке общего положения, как показано на рис. 6.5.

**Указание II.** Возле угла  $\beta > 45^\circ$  направление  $\tau'_{nt}$  определяется аналогично закону парности касательных напряжений, но по отношению к  $\tau_{tx}$  (см. рис. 6.5).

Указания I, II строго соответствуют знакам формул (6.4) и (6.5).

### 6.3.1. Деформации. Условие жесткости

Связь между напряжениями и деформациями устанавливается законом Гука для сдвига

$$\tau_{xt} = \gamma_{xt} G, \quad (6.6)$$

где  $\gamma_{xt}$  – угол сдвига, модуль сдвига  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ . Связь между углом сдвига и углом закручивания  $\varphi$  определяется из выражения:

$$\gamma dx = \rho d\varphi, \quad (6.7)$$

что следует из рис. 6.6. Здесь  $\gamma$  – угол сдвига;  $\varphi$  – угол закручивания.

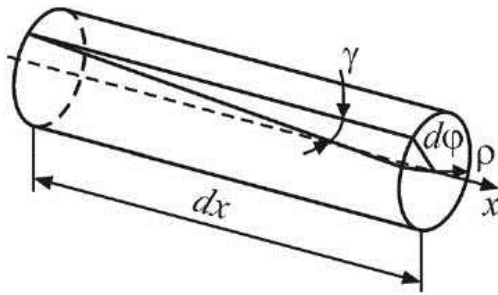


Рис. 6.6

Следует иметь в виду, что формула (6.7) справедлива и при конечных размерах (см. задачу 6.8).

Угол закручивания (угол поворота одного сечения по отношению к другому) определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{M_x l}{GJ_p}, \quad (6.8)$$

тогда относительный угол закручивания будет

$$\Theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GJ_p}, \quad (6.9)$$

откуда  $\gamma = \frac{d\varphi}{dx} \rho = \Theta \rho$ , а  $\tau = \Theta \rho G$ ; крутящий момент определится по формуле:

$$M_x = \Theta J_p G. \quad (6.10)$$

Из (6.9) имеем, что

$$\frac{d\varphi}{dx} = c M_x, \quad (6.11)$$

где  $c = \frac{1}{GJ_p}$ . Тогда (6.11) можно использовать для проверки соответствия эюры  $M_x$  и эюры  $\varphi$ , так как  $\frac{d\varphi}{dx} = c M_x = \text{tg}\Psi$ , т.е. тангенсу угла наклона касательной к функции  $\varphi$ .

Так же как при растяжении-сжатии, изгибе, для определения перемещений (угла закручивания  $\varphi$ ) может быть использован интеграл Мора и его графоаналитическое решение по способу Верещагина (см. задачи 6.2).

Валы, работающие на кручение и испытывающие большие углы закручивания, в связи с возможностью возникновения нежелательных крутильных колебаний, должны проверяться и по условию жесткости:

$$\varphi_0 = \frac{M_{x(\max)} l_0 \cdot 57,3}{GJ_p} \leq [\varphi], \quad (6.12)$$

где  $[\varphi]$  имеет размерность град./м,  $l_0 = 1$  м независимо от длины вала.

### 6.2.3. Работа и потенциальная энергия деформации

Работа определяется формулой

$$A = \frac{M\varphi}{2}, \quad (6.13)$$

потенциальная энергия деформации

$$U = \int_l \frac{M_x^2 dx}{2GJ_p}, \quad (6.14)$$

а через удельную потенциальную энергию деформации

$$U = \int_v u dv, \quad (6.15)$$

где 
$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (6.16)$$

Работа численно равна потенциальной энергии деформации, т.е.  $A = U$ .

### 6.3. Кручение брусьев некруглого поперечного сечения

При кручении таких брусьев нарушается гипотеза плоских сечений, происходит депланация сечений. Распределение касательных напряжений в сечении существенно отличается от распределения в брусьях круглого поперечного сечения. На рис. 6.7 показана эпюра  $\tau$  для бруса прямоугольного поперечного сечения. В этом случае используются следующие формулы:

$$\begin{cases} \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_k}; & \tau'_{\max} = \gamma^* \cdot \tau_{\max}; \\ \varphi = \frac{M_x l}{GJ_k}, \end{cases} \quad (6.17)$$

где  $J_k = \beta hb^3$ ,  $W_k = \alpha hb^2$ .

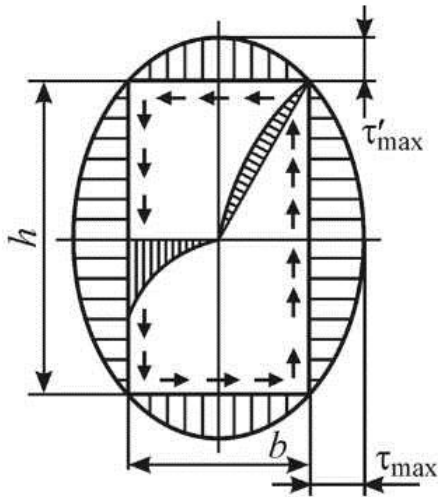


Рис. 6.7

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma^*$ , как правило, приводятся во всех учебниках и справочниках по сопротивлению материалов.

#### 6.4. Статически неопределимые задачи при кручении

Решение задач аналогично решению методом сил для статически неопределимых задач при растяжении-сжатии (см. тему 1, разд. 1.2.1). Отличие заключается в том, что отбрасывая «лишнюю» связь и заменяя ее «лишним» неизвестным скручивающим моментом, составляем дополнительное уравнение в виде равенства нулю угла закручивания в сечении «лишней» неизвестной (см. задачу 6.7).

#### 6.5. К расчету винтовых цилиндрических пружин с малым шагом витка

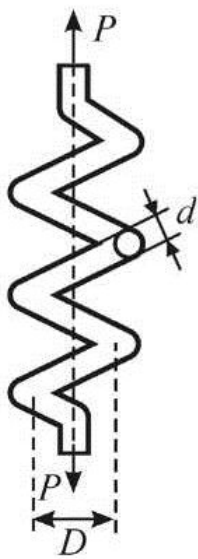


Рис. 6.8

В поперечном сечении витка пружины возникают два внутренних силовых фактора: крутящий момент и сила сдвига; вклад последней настолько незначителен, что ею пренебрегают, и расчет пружин ведут, исходя только из крутящего момента (рис. 6.8). Так, напряжения определяют по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{P \cdot D \cdot 8}{\pi \cdot d^3}, \quad (6.18)$$

где  $M_{\text{кр}} = P \cdot \frac{D}{2}$ ,  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ .

Деформация пружины  $\lambda$  (так называется осадка или растяжение пружины вдоль ее оси) определяется по формуле

$$\lambda = \lambda_0 \cdot P, \quad (6.19)$$

где  $\lambda_0 = \frac{8D^3n}{Gd^4}$  – податливость пружины ( $n$  – число витков);

$\frac{1}{\lambda_0} = c$  – жесткость пружины.

При последовательном соединении пружин (рис. 6.9)

$\lambda_0 = \lambda_{01} + \lambda_{02}$ , или  $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$ , а при параллельном соединении

(рис. 6.10)  $\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_{01}} + \frac{1}{\lambda_{02}}$ , или  $c = c_1 + c_2$ .

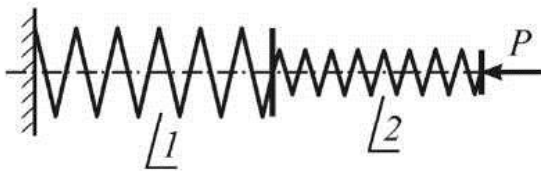


Рис. 6.9

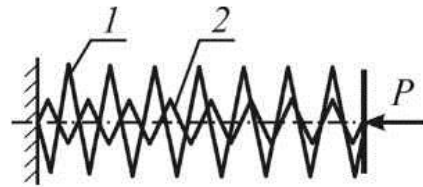


Рис. 6.10

При большом шаге витка и  $d$  сопоставимыми с  $D$  можно рекомендовать формулу для  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = k \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} \leq [\tau], \quad (6.20)$$

где  $k = \frac{m + 0,25}{m - 1}$ ,  $m = \frac{D}{d}$ .

## 6.6. Задачи

**Задача 6.1.** Для вала, расчетная схема которого изображена на рис. 6.11, необходимо построить эпюры  $M_x$  и  $\varphi$  и показать справедливость дифференциальной зависимости (6.11). Жесткость вала  $GJ_p$  по всей длине одинакова.

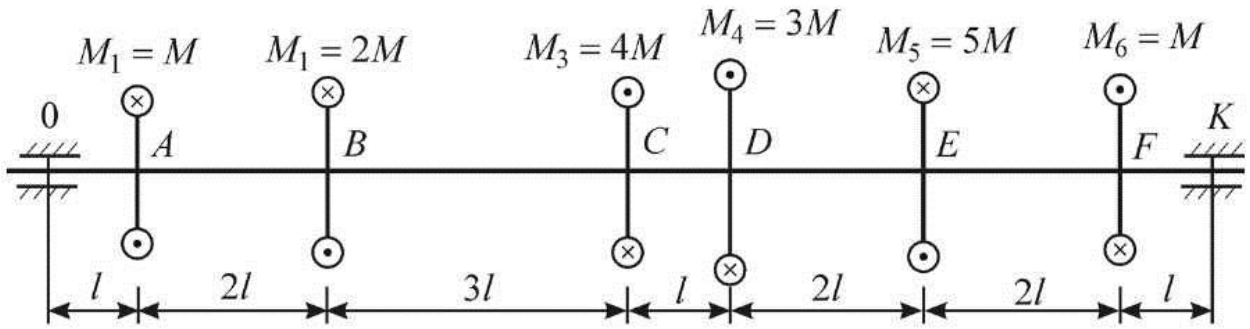


Рис. 6.11

**Задача 6.2.** Для вала (рис. 6.12) определить угол закручивания сечения  $A$ . Известно  $GJ_p, l, m$ .

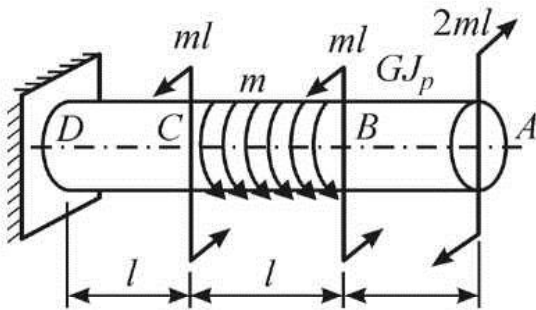


Рис. 6.12

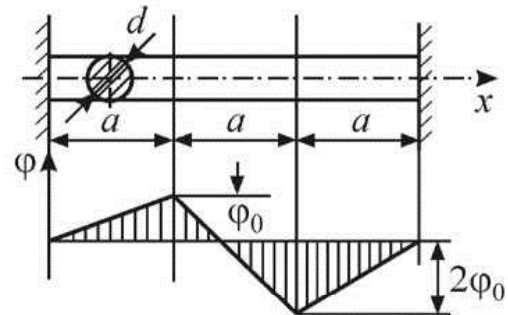


Рис. 6.13

**Задача 6.3.** По эпюре  $\varphi$  построить эпюру  $M_x$  и определить значения внешних моментов (рис. 6.13), если  $a, J_p, G, \varphi_0$  известны.

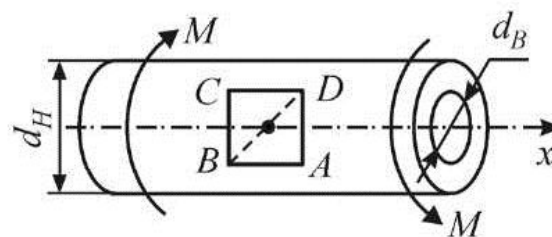


Рис. 6.14

**Задача 6.4.** На поверхности полого вала  $\left(\frac{d_B}{d_H} = \alpha\right)$  нанесен квадрат со стороной  $a$  (рис. 6.14). При действии момента  $M$  диагональ квадрата  $BD$  укорачивается на величину  $\Delta$ . Определить глав-

ные напряжения для точек около внутренней поверхности вала, если  $a$ ,  $\alpha$ ,  $G$ ,  $M$  заданы.

**Задача 6.5.** Круглый вал выполнен из стального круглого стержня и медной трубки, жестко соединенных между собой. Построить эпюру  $\tau$  по поперечному сечению, если вал скручивается моментом  $M$  (рис. 6.15).

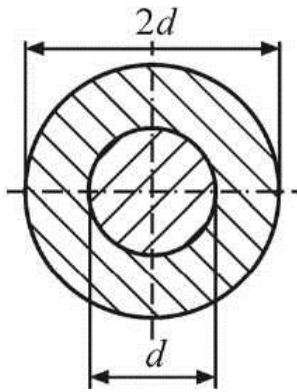


Рис. 6.15

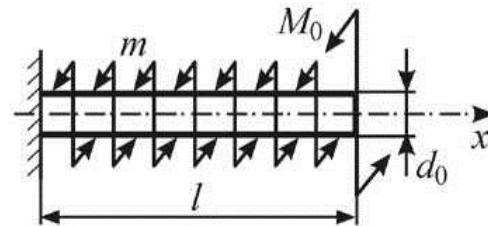


Рис. 6.16

**Задача 6.6.** Найти форму равного сопротивления для вала, скручиваемого сосредоточенным моментом  $M_0$  и распределенным  $m$  [нм/м] (рис. 6.16), если  $d_0$ ,  $M_0$ ,  $m$ ,  $[\tau]$  заданы.

**Задача 6.7.** В каком отношении находятся  $\frac{(\tau_{\max})_c}{(\tau_{\max})_T}$ , если  $(d_B)_T = 2d_c$ ,  $(d_H)_T = 2,4d_c$ ,  $G_c = 2G_T$ ,  $l = 4d_c$ ,  $M$  приложен к трубке (рис. 6.17),  $(d_B)_T$  и  $(d_H)_T$  – внутренний и наружный диаметр трубки соответственно?

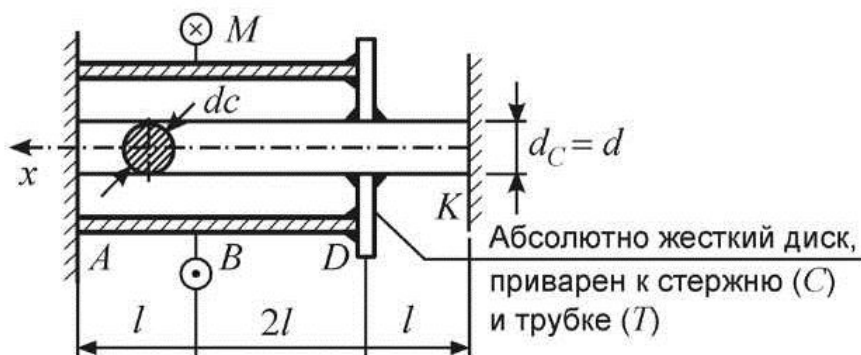


Рис. 6.17



**Задача 6.8.** Определить отношение  $\tau_{\max}$  на участках  $AB$  и  $BC$ , не раскрывая статической неопределенности (рис. 6.18).

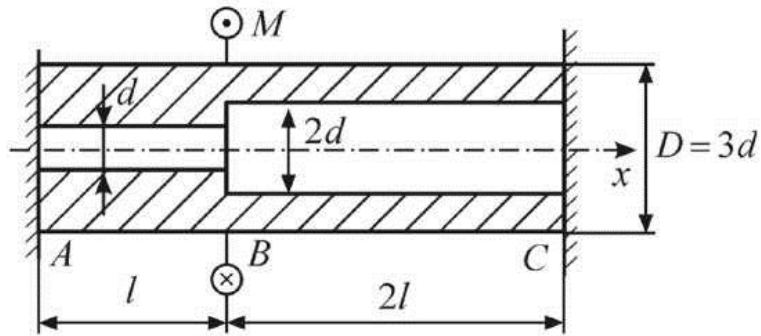


Рис. 6.18

**Задача 6.9.** Полый ступенчатый вал скручивается моментом  $M$  (рис. 6.19). У точки  $A$ , лежащей вблизи внутренней поверхности, на наклонной площадке  $BC$  действует по нормали  $n$  напряжение, равное минус  $25\sqrt{3}$  МПа. Определить величину и направление  $M$ .

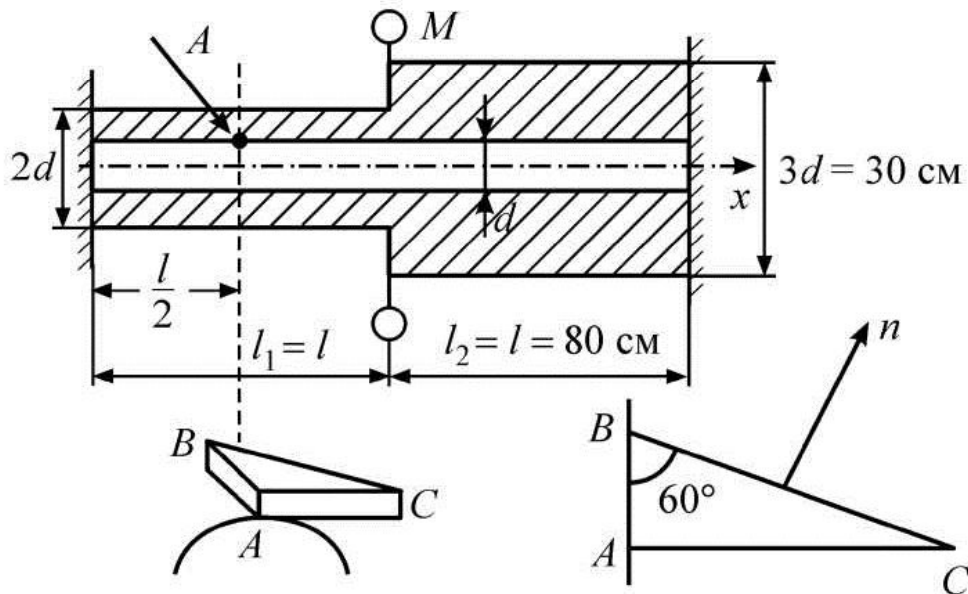


Рис. 6.19

**Задача 6.10.** Определить  $\tau_{\max}$  в валике и трубке после сборки узла. Порядок сборки: на валик с дисковыми выступами свободно без трения надевается трубка, из того же материала, что и валик; валик скручивается моментом  $M$  (возникающие в нем при этом напряжения меньше предела пропорциональности); концы трубки привариваются к выступам валика, после чего моменты  $M$  снима-

ются. По сравнению с валиком и трубкой дисковые выступы можно считать абсолютно жесткими (рис. 6.20).

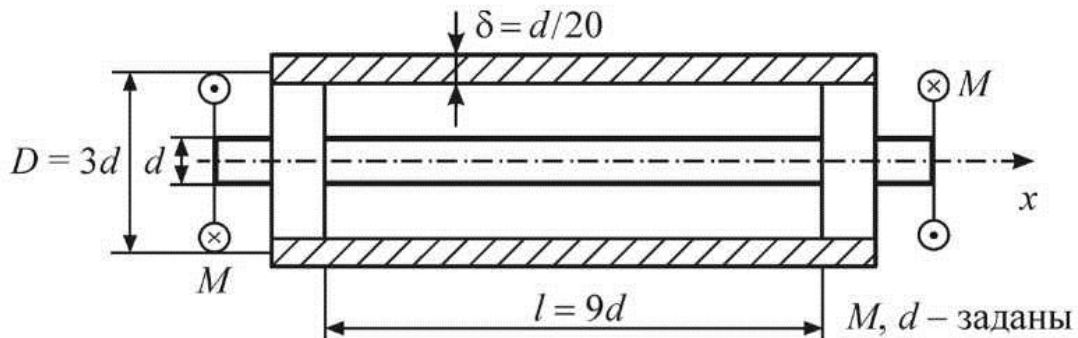


Рис. 6.20

**Задача 6.11.** Жесткий вал заделан нижним концом в упругую плиту неограниченных размеров на глубину  $h$  (рис. 6.21). На какой угол  $\varphi$  повернется вал при нагружении моментом  $M$ , если в соединении с плитой проскальзывание отсутствует?  $G, h, d, M$  известны.

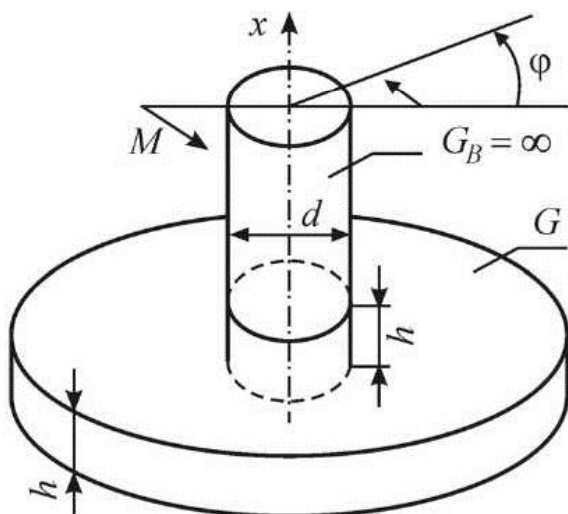


Рис. 6.21

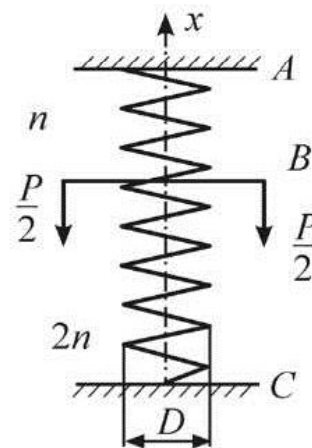


Рис. 6.22

**Задача 6.12.** Определить  $\tau_{\max}$  и смещение по оси  $x$  сечения  $B$  пружины (рис. 6.22), если известно  $P, D, n$  (число витков),  $d$  (диаметр проволоки пружины),  $G$  – модуль сдвига.

**Задача 6.13.** Из условия равнопрочности пружин подобрать диаметры их проволоки, если число витков  $n$  во всех пружинах одинаково,  $[\tau] = 500$  МПа. Весом абсолютно жесткой балки (рис. 6. 23) пренебрегаем.

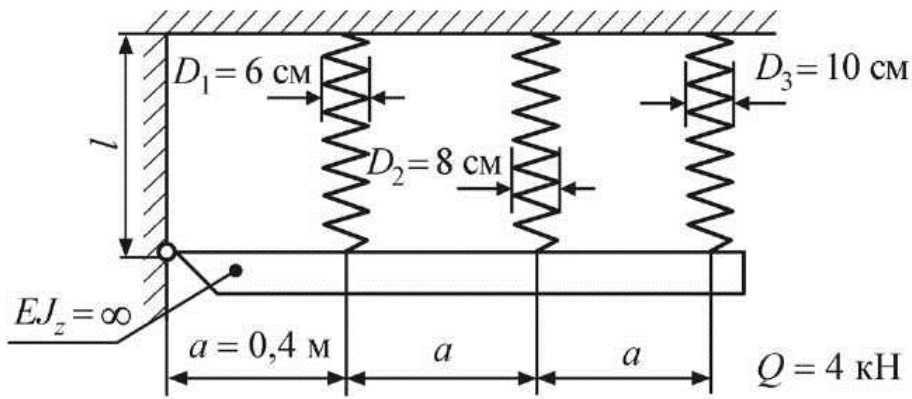


Рис. 6.23

### 6.7. Решения, указания, ответы

6.1. На рис. 6.24, а представлена эпюра  $M_x$ . На каждом участке  $M_x$  определялось, как сумма моментов, лежащих по одну сторону от сечения. Так, на участке  $CD$   $M_{x(CD)} = M_1 + M_2 - M_3 = -M$  (см. рис. 6.11).

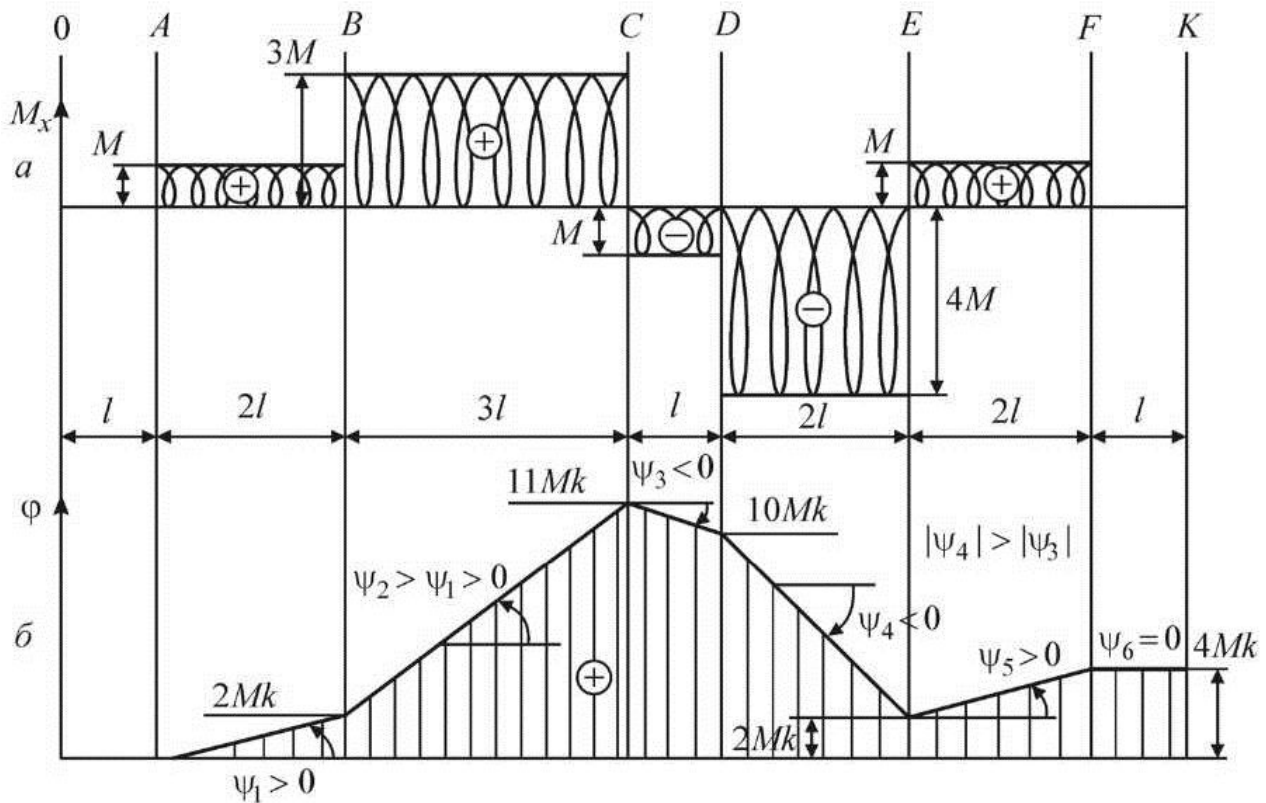


Рис. 6.24

Эпюра углов закручивания представлена на рис. 6.24, б. В каждом характерном сечении угол закручивания определялся следующим образом:

$$\varphi_B = \frac{M \cdot 2l}{GJ_p} = 2Mk, \quad k = \frac{l}{GJ_p};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{3M \cdot 3l}{GJ_p} = 11Mk;$$

$$\varphi_D = \varphi_B + \frac{(-M) \cdot l}{GJ_p} = 10Mk \quad \text{и т.д.}$$

Соответствие эпюры  $\varphi$  с эпюрой  $M_x$ , согласно формуле (6.11), представлено величинами углов  $\psi$  на рис. 6.24, б.

**6.2.** Решение выполним с помощью интеграла Мора (с использованием способа Верещагина). На рис. 6.25, а изображена расчетная схема; на рис. 6.25, б представлена эпюра  $M_x$  от заданных нагрузок (грузовая площадь); единичная система представлена на рис. 6.25, в; эпюра крутящего момента для единичной системы изображена на рис. 6.25, г.

По способу Верещагина

$$\varphi_A = \frac{1}{GJ_p} (\omega_1 \bar{M}_{C_1} + \omega_2 \bar{M}_{C_2} + \omega_3 \bar{M}_{C_3}) =$$

$$= \frac{1}{GJ_p} \left( ml \cdot l \cdot 1 - \frac{1}{2} ml \cdot l \cdot 1 - 2ml \cdot l \cdot 1 \right) = -\frac{3}{2} \frac{ml^2}{GJ_p}.$$

Отметим, что в данном решении не было необходимости определять положения центров тяжести грузовых площадей  $\omega$ , так как где бы они ни находились, им везде соответствует  $\bar{M}_x = 1$ .

**6.3.** В соответствии с рис. 6.26, а выразим крутящие моменты  $M_x$  через углы закручивания:

$$\varphi_{x_1=a} = \frac{M_{x_1} a}{GJ_p} = \varphi_0 \Rightarrow M_{x_1} = \varphi_0 k, \quad \text{где } k = \frac{GJ_p}{a};$$

$$\varphi_{x_2} = \varphi_0 + \frac{M_{x_2} (x_2 - a)}{GJ_p} \quad \text{при } x_2 = 2a, \quad \varphi_{x_2} = -2\varphi_0,$$

откуда  $M_{x_2} = -3\varphi_0 k$ ;

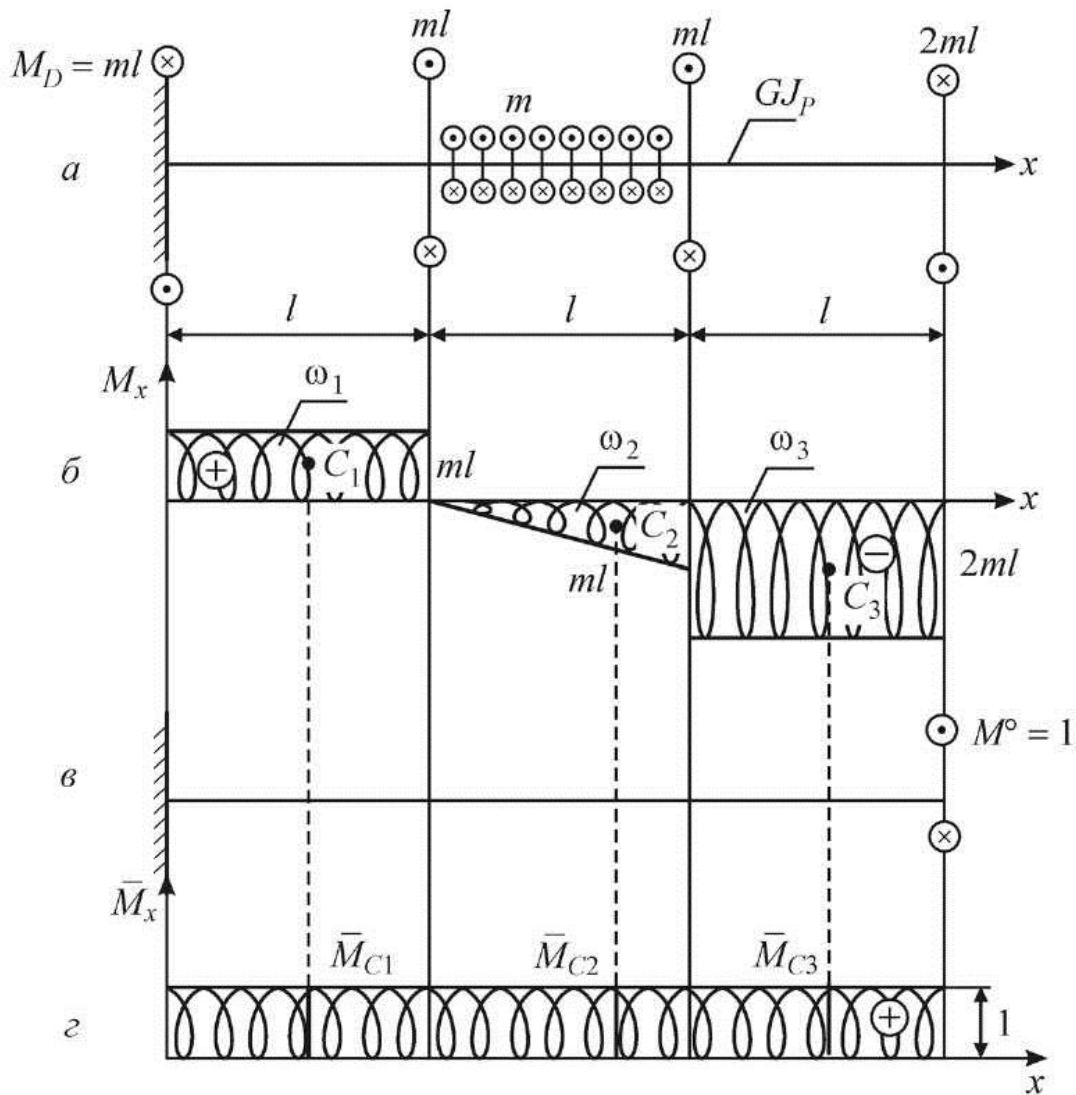


Рис. 6.25

Эпюра  $M_x$  показана на рис. 6.26, б. Из эпюры  $M_x$  следует, что:  $M_A = \varphi_0 k$  и направлена по часовой стрелке (взгляд со стороны оси  $x$ );  $M_B = -4\varphi_0 k$  и направлена против часовой стрелки;  $M_C = 5\varphi_0 k$  и направлена по часовой стрелке;  $M_D = -2\varphi_0 k$  и направлена против часовой стрелки (см. рис. 6.26, в). Осуществим проверку: для эквивалентной системы (рис. 6.26, з) угол  $\varphi_D$  должен быть равен нулю:

$$\varphi_D = -\frac{4\varphi_0 k \cdot a}{GJ_p} + \frac{5\varphi_0 k \cdot 2a}{GJ_p} - \frac{2\varphi_0 k \cdot 3a}{GJ_p} = 0!$$

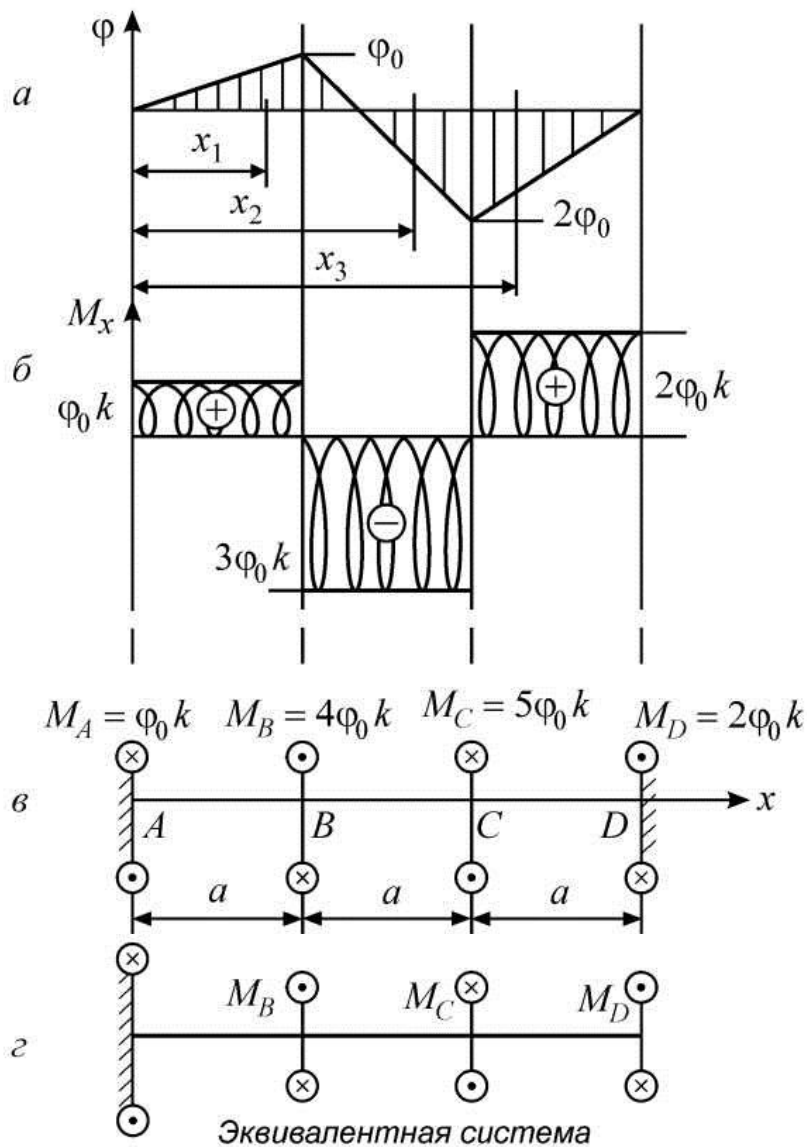


Рис. 6.26

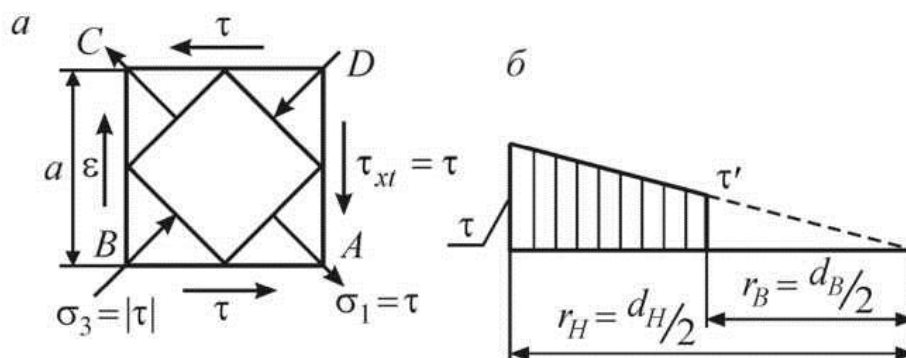


Рис. 6.27

**6.4.** Изобразим напряженное состояние элементарного объема с основанием в виде квадрата у наружной поверхности вала (рис. 6.27,  $a$ ):

$$\varepsilon_{BD} = -\frac{\Delta}{a/\sqrt{2}} = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1) = \frac{1}{E}(-\varepsilon - \mu\tau) \Rightarrow \tau = \frac{\Delta\sqrt{2} \cdot E}{a(1+\mu)}.$$

Из рис. 6.27, б найдем искомые напряжения:

$$\tau' = \tau \frac{d_B}{d_H}, \quad \sigma'_1 = \tau', \quad \sigma'_3 = -\tau'!$$

**6.5. Вариант 1.** Для стали  $G_c = 2G_M$  меди. Расчетная схема представлена на рис. 6.28.

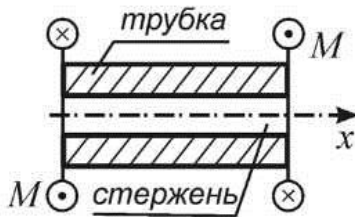


Рис. 6.28

$$\sum m_x = 0, \quad M - M_c - M_M = 0,$$

т.е. задача один раз статически неопределимая.

Теперь

$$\Theta_c = \frac{M_c}{G_c J_p^c} = \Theta_M = \frac{M_M}{G_M J_p^M},$$

где  $J_p^c = \frac{\pi d^4}{32}$ ,  $J_p^M = \frac{\pi(2d)^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$ , откуда  $M_M = 7,5M_c$ , и с учетом

$$\text{п. 1 } M_c = \frac{10}{85}M, \quad M_M = \frac{75}{85}M.$$

Тогда

$$\tau_{xt(\max)}^c = \frac{M_c \frac{d}{2}}{J_p^c} = \frac{30}{6}A, \quad \text{где } A = \frac{32M}{85\pi d^3};$$

$$\tau_{xt}^M = \frac{M_M \frac{d}{2}}{J_p^M} = \frac{15}{6}A \quad \text{при } \rho = d/2;$$

$$\tau_{xt(\max)}^M = \frac{30}{6}A \quad \text{при } \rho = d.$$

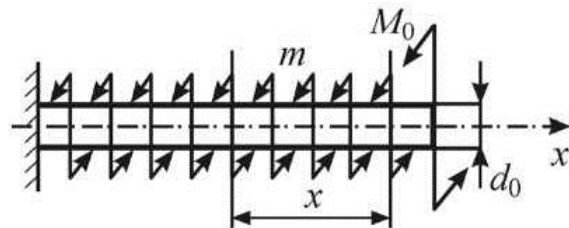
Рис. 6.29



Вариант 2. Вместе контакта при  $\rho_c = \frac{d}{2}$ ,  $\rho_m = \frac{d}{2}$ ,

$\gamma_c = \gamma_m = \frac{\tau_c}{G_c} = \frac{\tau_m}{G_m}$ , откуда в месте контакта  $\tau_c = 2\tau_m$ , что и показано на эпюре  $\tau$  (рис. 6.29).

Рис. 6.30



6.6. Запишем условие прочности для любого поперечного сечения, лежащего на расстоянии  $x$  от правого торца (рис. 6.30):

$$\tau_{xt(\max)} = \frac{M_x}{W_p(x)} \leq [\tau],$$

тогда

$$M_x = W_p(x)[\tau], \quad M_0 = W_p(0)[\tau],$$

где  $W_p(x) = \frac{\pi d^3(x)}{16} \approx 0,2d^3(x)$ ,  $W_p(0) \approx 0,2d_0^3$ ,

$$M_x = M_0 + mx, \text{ откуда } d^3(x) = \frac{M_0}{0,2[\tau]} + \frac{m}{0,2[\tau]}x = d_0^3 + \frac{mx}{0,2[\tau]}.$$



6.7. Представим расчетную схему для трубки (рис. 6.31) и для стержня (рис. 6.32). Уравнение равновесия для трубки:

$$\sum m_x = 0, \quad -M_A^T + M - M_D^T = 0, \quad (1)$$

а для стержня:

$$\sum m_x = 0, \quad -M_A^c + M_D^c - M_K^c = 0. \quad (2)$$

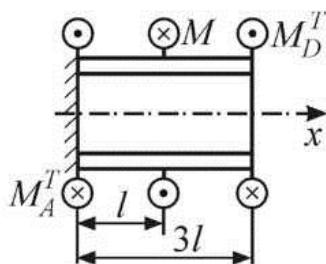


Рис. 6.31

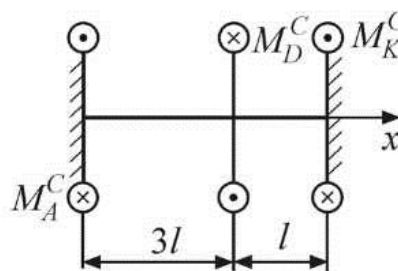


Рис. 6.32

С учетом того, что  $|M_D^T| = |M_D^c|$ , задача 2 раза статически неопределимая (имеем два уравнения и четыре неизвестных).

Дополнительные уравнения будут:

$$\varphi_D^T = \varphi_D^c; \quad (3)$$

$$\varphi_K^c = \varphi_K^c(M_D^c) + \varphi_K^c(M_K^c) = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1) – (4) дают возможность определить все моменты, а следовательно, и крутящие моменты  $M_x$ , найти  $M_{x(\max)}^T$ ,  $M_{x(\max)}^c$ ,

после чего определить  $\frac{(\tau_{\max})_c}{(\tau_{\max})_T} = \frac{M_{x(\max)}^c W_p^T}{W_p^c M_{x(\max)}^T}$ .

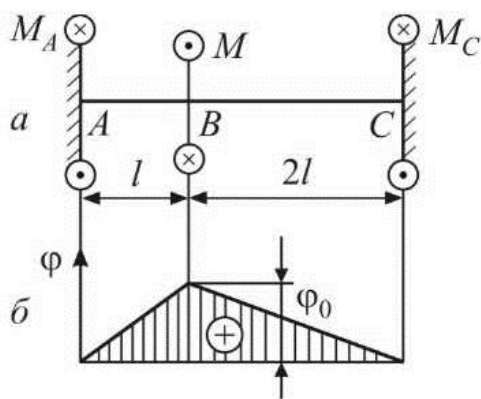


Рис. 6.33

6.8. Покажем направление моментов в заделке A, C (рис. 6.33, а), откуда следует, что на участке AB  $M_x > 0$ , на участке BC –  $M_x < 0$ .

Построим эпюру углов закручивания (рис. 6.33, б).

$$\text{Согласно (6.7)} \quad \gamma_{AB} l = \varphi_0 \frac{D}{2}$$

и  $\gamma_{BC} \cdot 2l = \varphi_0 \frac{D}{2}$  – для сечения  $B$ ; тогда  $\gamma_{AB} = \varphi_0 \frac{D}{2l}$ ,  $\gamma_{BC} = \varphi_0 \frac{D}{4l}$ ,

$$\frac{\tau_{\max}^{AB}}{\tau_{\max}^{BC}} = \frac{\gamma_{AB} G}{\gamma_{BC} G} = 2!$$

**6.9.** Согласно формулам (6.4) и (6.5) и указания 1 на гранях элемента будут действовать напряжения, как показано на рис. 6.34,

$\tau_{x1} = \tau = \frac{\sigma_n}{\sin 2\alpha}$  направлено против часовой стрелки, следовательно,

на участке  $l_1$   $M_x < 0$ , тогда и момент в левой заделке должен быть направлен против часовой стрелки (рис. 6.35), чем и определяется направление моментов  $M$  и  $M_K$ .

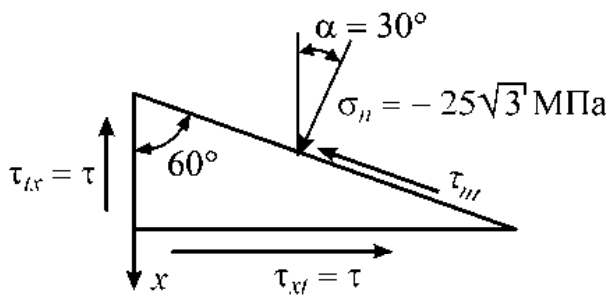


Рис. 6.34

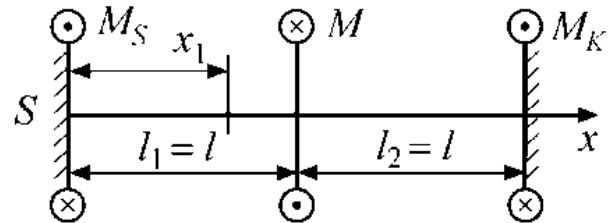


Рис. 6.35

Так как

$$\tau_{x1}(A) = \frac{M_{x1} \rho(A)}{J_p} = \frac{M_s \frac{d}{2}}{\frac{\pi(2d)^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{\sigma_n}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \text{найдем } M,$$

Связь между  $M_s$  и  $M$  установим из условия, что

$$\varphi_s = \frac{M_s l}{GJ_p} + \frac{M_s l}{GJ'_p} - \frac{Ml}{GJ'_p} = 0, \quad (*)$$

где  $J_p$  – полярный момент инерции на участке  $l_1$ ;  $J'_p$  – полярный момент инерции на участке  $l_2$ .

Из (\*) найдем значение  $M$ .

**6.10. Вариант 1.** 1. После удаления моментов в трубке (т) и валике (в) возникнут крутящие моменты

$$M_{\Gamma} = M_{\text{в}}, \quad (1)$$

так как система сохранит равновесие!

2. После приваривания трубки и удаления моментов  $M$ , сумма углов закручивания трубки и валика будет равна углу закручивания трубки от момента  $M$ , т.е.

$$\frac{Ml}{GJ_p^{\text{в}}} = \frac{M_{\text{в}}l}{GJ_p^{\text{в}}} + \frac{M_{\Gamma}l}{GJ_p^{\Gamma}}. \quad (2)$$

3. Из (1) и (2) получим

$$M_{\Gamma} = M_{\text{в}} = \frac{M}{1 + \frac{J_p^{\text{в}}}{J_p^{\Gamma}}},$$

где  $J_p^{\text{в}} = \frac{\pi d^3}{32}$ ,  $J_p^{\Gamma} = \frac{\pi D^3 \delta}{4}$ . Определим максимальное касательное

напряжение по формуле  $\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{в}} \rho_{\text{max}}}{J_p}$ .

*Вариант 2.* Потенциальная энергия стержня (валика – в) с выступами при приложении момента  $M_0$  до приварки:  $U = \frac{M_0^2 l}{2GJ_p^{\text{в}}}$ .

Потенциальная энергия системы после приварки трубки (т) (при этом  $M_0$  уменьшается на  $M$ ), а  $M_{\text{в}} = M_{\Gamma} = M$ , будет равна:

$$U_{\text{системы}} = \frac{(M_0 - M)^2 l}{2GJ_p^{\text{в}}} + \frac{M^2 l}{2GJ_p^{\Gamma}}.$$

На основании теоремы о минимуме потенциальной энергии (теорема о наименьшей работе):

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{системы}}}{dM} &= \frac{d}{dM} \left[ \frac{(M_0^2 - 2M_0M + M^2)l}{2GJ_p^{\text{в}}} + \frac{M^2 l}{2GJ_p^{\Gamma}} \right] = \\ &= -\frac{M_0 l}{GJ_p^{\text{в}}} + \frac{Ml}{GJ_p^{\text{в}}} + \frac{Ml}{GJ_p^{\Gamma}} = 0, \end{aligned}$$

откуда  $M = M_{\text{в}} = M_{\Gamma} = \frac{M_0}{1 + \frac{J_p^{\text{в}}}{J_p^{\Gamma}}}$ .

6.11. 1. Цилиндрической поверхностью с осью  $x$  сделаем сечение в плите (радиус цилиндра  $\rho$ !). В сечении будут действовать только  $\tau$  (рис. 6.36). Уравнение равновесия будет:

$$\sum m_x = 0; -M + \tau \cdot 2\pi\rho \cdot h \cdot \rho = 0 \Rightarrow \tau = \frac{M}{2\pi\rho^2 \cdot h}.$$

2. Тогда

$$U = \int_v \frac{\tau^2}{2G} dv = \int_r \frac{M^2}{(2\pi\rho^2 h)^2 \cdot 2G} \cdot 2\pi\rho \cdot h \cdot d\rho = \frac{M^2}{4\pi h r^2 G}.$$

3. Работа

$$A = \frac{M \cdot \varphi}{2} = U, \text{ откуда } \varphi = \frac{M}{2\pi h r^2 G}.$$

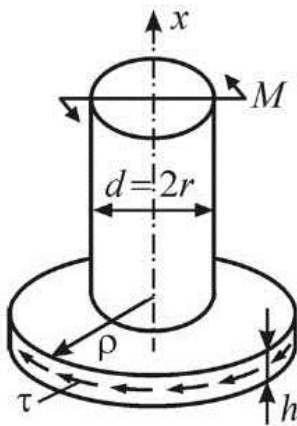


Рис. 6.36

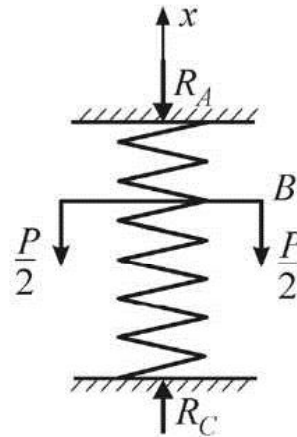


Рис. 6.37

6.12. 1. Расчетная схема представлена на рис. 6.37.

2. Тогда уравнение равновесия будет:

$$\sum x = 0, -R_A + P - R_C = 0, \quad (1)$$

т.е. задача один раз статически неопределимая.

3. Дополнительное уравнение имеет вид

$$|\lambda_{AB}| = |\lambda_{BC}| = \frac{8D^3 \cdot n}{Gd^4} \cdot R_A = \frac{8D^3 \cdot 2n}{Gd^4} R_B, \quad (2)$$

и с учетом (1) определим  $R_A$  и  $R_B$ .

4. По формуле (6.18) найдем  $\tau_{\max} = \frac{R_{(\max)} \cdot D \cdot 8}{\pi \cdot d^3}$ , а смещение сечения  $B$  будет  $\lambda_B = \lambda_0^{AB} \cdot R_A$ , или  $\lambda_B = \lambda_0^{BC} \cdot R_C$ .

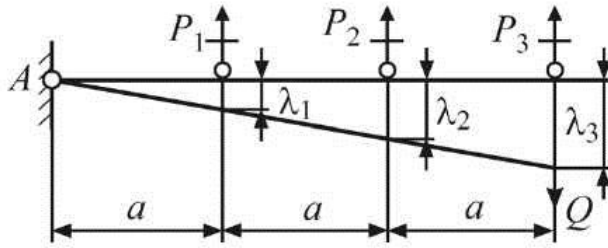


Рис. 6.38

6.13. 1. Из силовой и деформационной схемы (рис. 6.38) будем иметь:

$$\sum m_A = 0, \quad Q \cdot 3a - P_3 \cdot 3a - P_2 \cdot 2a - P_1 \cdot a = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\lambda_1}{a} = \frac{\lambda_2}{2a} = \frac{\lambda_3}{3a}$$

или, подставляя значения  $\lambda_i = \frac{8D_i^3 \cdot n}{Gd_i^4} \cdot P_i$ , получим

$$81 \frac{P_1}{d_1^4} = 96 \frac{P_2}{d_2^4} = 125 \frac{P_3}{d_3^4}. \quad (2)$$

2. По условию равнопрочности  $\tau_{\max(1)} = \tau_{\max(2)} = \tau_{\max(3)} = [\tau]$ , где

$$\tau_{\max(i)} = \frac{P_i \cdot D_i \cdot 8}{\pi \cdot d_i^3}, \text{ будем иметь}$$

$$3 \frac{P_1}{d_1^3} = 4 \frac{P_2}{d_2^3} = 5 \frac{P_3}{d_3^3}. \quad (3)$$

3. Возведем (2) в третью, а (3) в четвертую степень и разделим одно на другое (таким образом, избавимся от  $d_i$ !) и получим

$$\underbrace{\frac{(3)^4}{(81)^3} \cdot P_1}_{(4)} = \overbrace{\frac{(4)^4}{(96)^3} P_2 = \frac{(5)^4}{(125)^3} P_2}^{(5)},$$

т.е. получим два дополнительных уравнения (4) и (5).

4. Решая совместно (1), (4), (5), найдем  $P_1, P_2, P_3$ . Из условия

прочности для каждой пружины  $\tau_{\max} = \frac{P_i D_i 8}{\pi d_i^3} \leq [\tau]$  найдем  $d_i$ !

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*(жирным шрифтом выделена рекомендуемая литература)*

1. Аксельрод Э.Р., Бернацкий С.А., Возлинский В.И. и др. Методические указания к решению задач по сопротивлению материалов для подготовки к студенческим олимпиадам. – Ч. 1. – М.: МАДИ, 1983. – 64 с.

2. Ахметзянов М.Х., Геронимус В.Б., Грсс П.В. и др. Сборник олимпиадных задач по сопротивлению материалов. – Новосибирск: СГАПС, 1995.

3. **Беляев Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 347 с.**

4. **Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.**

5. Бидерман Т.В., Боровникова Н.Н. Методические указания к решению задач Всероссийской олимпиады по сопротивлению материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 12 с.

6. **Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Под ред. Г.С. Варданяна. – М.: Ассоциация строительных вузов, 1995. – 568 с.**

7. Всероссийская студенческая олимпиада по сопротивлению материалов в НГТУ г. Новочеркаска / Сост. Р.К. Вафин, 1997. – 1 с.

8. Исаченко В.В. Статически неопределимые задачи при растяжении-сжатии. – М.: МИФИ, 2003. – 68 с.

9. **Исаченко В.В. Учебно-методическое пособие для решения задач студенческих олимпиад по сопротивлению материалов. – Ч. 1 – 4. – М.: МИФИ. Ч. 1. 1998; Ч. 2. 2000; Ч. 3. 2000; Ч. 4. 2001.**

10. **Исаченко В.В., Мартиросов М.И., Щербаков В.И. Учебное пособие по решению конкурсных задач по сопротивлению материалов / Под ред. В.В. Исаченко. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: МИФИ, 2006. – 248 с.**

11. Итоги и задачи внутривузовских, областных и региональных олимпиад по сопротивлению материалов. Методическая разработка / Сост. Ю.В. Глявин, Н.А. Ильичев. – Горький: ГПИ, 1990. – 44 с.

12. Ключева Г.П., Сосновский Е.В. Методические указания к решению задач Всероссийской олимпиады по сопротивлению материалов / Под ред. Д.Н. Спицыной. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992.

13. Нестандартные задачи по сопротивлению материалов. Учебное пособие. – В 2-х ч. – Ч. 1 / Сост. Ю.В. Глявин, Н.А. Ильичев и др. – Самара: НПЦ «Авиатор», 1995. – 170 с.

14. Нестандартные задачи по сопротивлению материалов. Учебное пособие. – В 2-х ч. – Ч. 2 / Сост. Ю.В. Глявин, Н.А. Ильичев и др. – Самара: НПЦ «Авиатор», 1996. – 60 с.

15. Окопный Ю.А., Радин В.П., Хроматов В.Р и др. Механика материалов и конструкций. Справочные материалы / Под ред. В.П. Чиркова. – М.: изд-во МЭИ, 2005. – 124 с.

16. Олимпиады по сопротивлению материалов. Сборник заданий / Сост. Д.Ф. Бибииков. – Йошкар-Ола: МарПИ, 1987. – 40 с.

17. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова Думка, 1988. – 725 с.

18. Пособие к решению задач по сопротивлению материалу. – М.: Высшая школа, 1985.

19. Предметные олимпиады. Организация и задачи / Сост. Ю.В. Глявин, Н.А. Ильичев и др. – Горький: ГПИ, 1986. – 104 с.

20. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973.

21. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 592 с.

22. Щербаков В.И., Мартиросов М.И. Московские городские олимпиады по сопротивлению материалов (1992 – 1998 гг.). Задачи, решения и итоги. – М.: МГТУ «МАМИ», МГАИ (ТУ), 1998.