ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Изложены вопросы, включаемые в курс «Сопротивление материалов» в соответствии с действующей учебной программой для машиностроительных специальностей вузов. Наряду с классическими приемами оценки прочности даны основные понятия механики разрушения тел с трещинами. Представлены примеры решения типовых задач, развернутый комментарий к которым облегчает понимание и усвоение материала.

ВВЕДЕНИЕ

Основные понятия

Сопротивление материалов – наука о приближенных методах расчета на прочность конструкций и их элементов. Под *конструкцией* понимается любой искусственный или природный объект, который используется в процессе жизнедеятельности людей.

Прочность в широком смысле – это способность конструкции сохранять свои параметры в пределах, необходимых для выполнения заданных функций в заданных условиях в течение заданного срока службы. Обеспечить прочность конструкции означает не допустить ее переход в *предельное состояние* – т. е. состояние, в котором ее дальнейшая эксплуатация невозможна вследствие разрушения, появления необратимых деформаций, недопустимо больших перемещений, возникновения трещин, колебаний и т. д. На практике поставленная задача решается в несколько этапов, на каждом из которых расчет проводится для исключения той или иной причины нарушения прочности:

1) разрушения или появления необратимых деформаций (собственно расчет на прочность);

2) появления слишком больших перемещений (расчет на жесткость);

3) изменения конструкцией ее первоначальной формы упругого равновесия (расчет на устойчивость).

Курс «Сопротивление материалов» относится к числу фундаментальных инженерных дисциплин. Для его успешного изучения необходимо знакомство с преподаваемыми в высшей школе курсами физики, математики и теоретической механики. В отличие от теоретической механики, изучающей

равновесие и движение абсолютно твердых тел, в курсе сопротивления материалов учитывается способность тел менять свои размеры и форму, т. е. деформироваться. В этом смысле «сопротивление материалов» можно рассматривать как введение в «Механику деформируемого твердого тела», включающую в себя более сложные в математическом отношении дисциплины, такие как «Теория упругости», «Теория пластичности», «Теория ползучести», «Механика разрушения» и т. д. В свою очередь, подходы и методы сопротивления материалов используются затем в таких курсах, как «Детали машин», «Строительная механика», «Строительные материалы» и т. д., рассматривающих поведение конкретных конструкций и их элементов.

Реальный объект и расчетная схема

Расчет всегда начинается с анализа, который позволяет выделить в свойствах реального объекта самое существенное с точки зрения прочности и отбросить второстепенное, т.е. произвести схематизацию объекта – выбрать *расчетную схему.*

Для описания каждого объекта можно использовать несколько расчетных схем в зависимости от требуемой точности, от того, какие особенности интересуют исследователя в каждом конкретном случае (рис. 1.1).

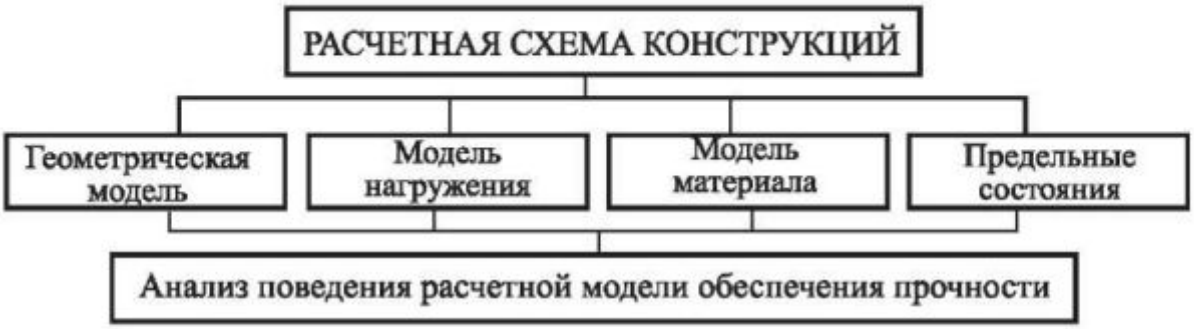


Рис. 1.1

С другой стороны, что особенно важно, одной расчетной схеме может соответствовать множество различных реальных объектов, что позволяет на основе изучения некоторой

схемы получить решение целого класса сводящихся к ней задач. Выбор расчетной схемы сопротивления материалов включает в себя схематизацию геометрических свойств объекта, схематизацию нагрузок, физическую модель поведения материала, моделирование предельных состояний.

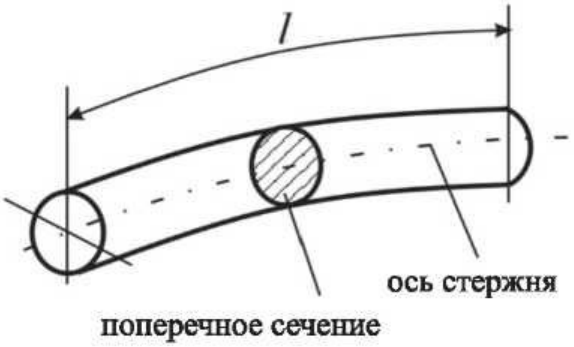
Геометрическая модель

Ниже приведена классификация геометрических форм тел по соотношению их характерных размеров.

Стержень

Тело, у которого один из размеров (длина l) много больше поперечных размеров:

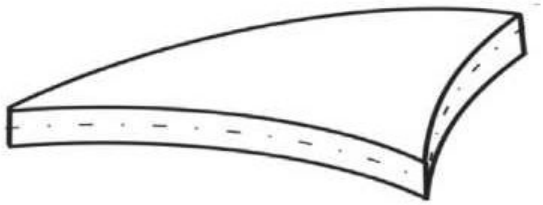
$$\frac{l}{a} \geq 20$$



где a – наибольший размер поперечного сечения.

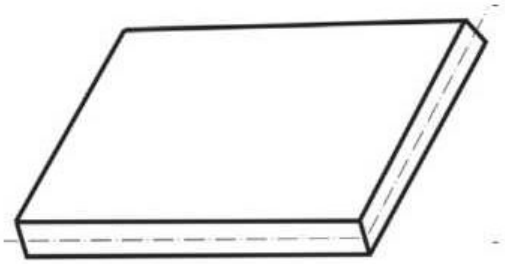
Оболочка

Тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина) мало по сравнению с другими размерами тела.



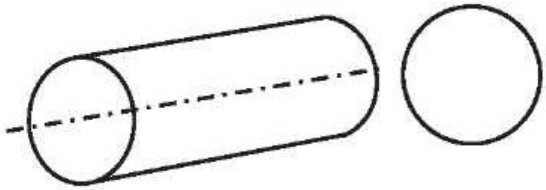
Пластинка

Частный случай оболочки, когда ограничивающие поверхности являются плоскостями.

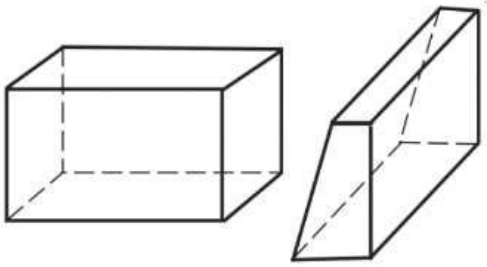


Массив

Тело, у которого все три размера имеют один порядок: шарик или ролик в подшипниках качения;



фундаменты сооружений, подпорные стенки.



В курсе «Сопротивление материалов» изучают главным образом стержни, что позволяет для упрощения расчетов использовать ***гипотезу плоских сечений***: *поперечное сечение, плоское до приложения нагрузки, остается плоским и нормальным к оси стержня и после нагружения.*

Другим существенным упрощением геометрии является *принцип сохранения начальных размеров*, заключающийся в том, что ввиду малости деформаций тела по сравнению с его начальными размерами их влиянием на положение нагрузок и величину опорных реакций можно пренебречь. Это позволяет считать, что точки приложения нагрузок не меняют своего положения в процессе нагружения, и определять опорные реакции из условий равновесия так, как это делалось в курсе «Теоретическая механика».

Классификация связей, наложенных на тело в плоскости

1. *Шарнирно-подвижная* опора изображается так, как показано на рис. 1.2. Она препятствует перемещению точки по линии действия связи. Реакция R_A всегда направлена по линии действия связи.

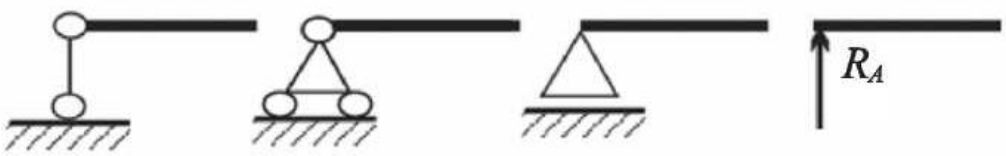


Рис. 1.2

2. *Шарнирно-неподвижная* опора (рис.1 3) препятствует линейным смещениям точки.

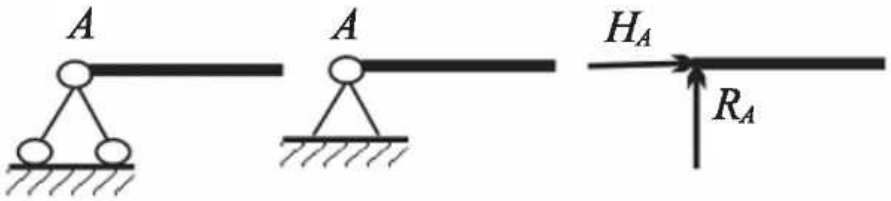


Рис. 1.3

3. *Скользящая заделка* (рис.1.4) ограничивает возможность углового и одного из линейных перемещений, но допускает перемещение вдоль оси.

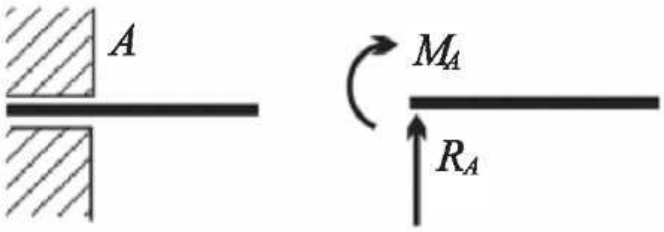


Рис. 1.4

4. *Жёсткая заделка* (рис. 1.5) препятствует как линейным, так и и угловому смещениям.

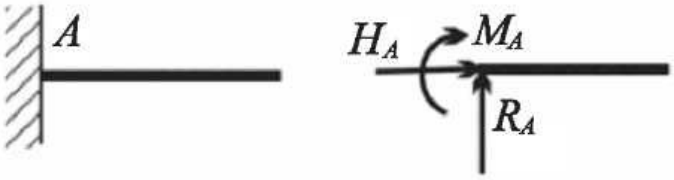


Рис. 1.5

Модель нагружения

Механические нагрузки, а также опорные реакции относятся к внешним силам. По скорости нагружения их делят на статические, т. е. изменяющиеся достаточно медленно и не вызывающие появления заметных сил инерции, и динамические, при которых силами инерции пренебречь нельзя.

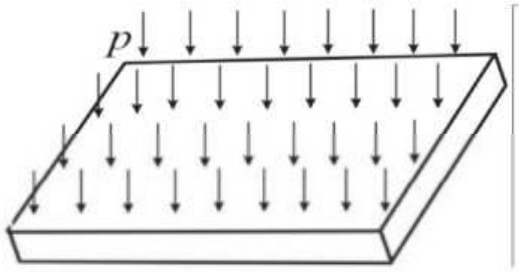
По времени действия нагрузки подразделяют на кратковременные и длительные; по периодичности воздействия – на однократные и циклические.

Модель нагружения включает в себя также понятие объемных сил – действующих на каждую частицу тела, и поверхностных сил – распределенных по некоторой площади. К объемным воздействиям можно отнести силовые поля – электромагнитное и гравитационное, а также силы инерции. Поверхностные силы при выборе расчетной схемы упрощают и в зависимости от размеров площади нагружения подразделяются следующим образом:

Нагрузка, распределённая по поверхности

p – давление.

Размерность давления Н/м^2 или Па (Паскаль).

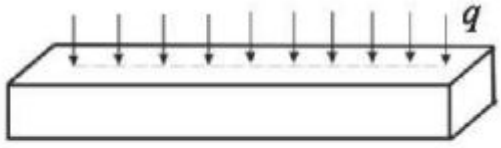


Нагрузка, распределённая по длине (погонная)

q – интенсивность нагрузки.

Размерность интенсивности Н/м.

Пример – погонный вес конструкции.

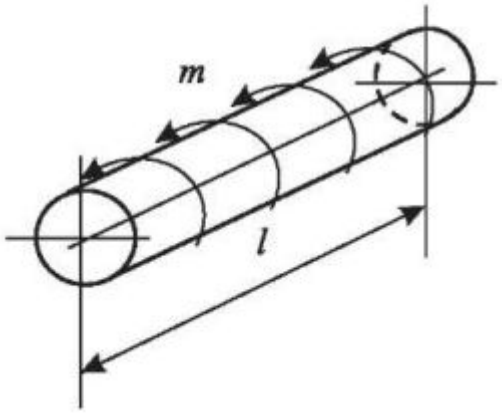


Распределённая по длине пара сил.

m – интенсивность момента.

Размерность Н·м/м.

Пример – момент трения в подшипнике скольжения.



Сосредоточенная нагрузка. Если площадь, на которой действует поверхностная нагрузка, мала по сравнению с площадью поверхности всего тела, ее мысленно стягивают в точку, а действие самой нагрузки заменяют ее равнодействующей. В таком случае говорят о сосредоточенных силах F и сосредоточенных моментах M, которые измеряются соответственно в ньютонах (Н) и ньютонах умноженных на метр (Н·м).

Деление нагрузок носит достаточно условный характер и позволяет в зависимости от требуемой точности расчетов заменять одни нагрузки другими, эквивалентными им статически, например, силы веса – приложенными к оси стержня погонными и т.п. Многочисленные расчеты и эксперименты показывают, что действительный характер распределения нагрузки сказывается лишь в довольно небольшой окрестности места ее приложения (на рис. 1.6 эта область заштрихована).

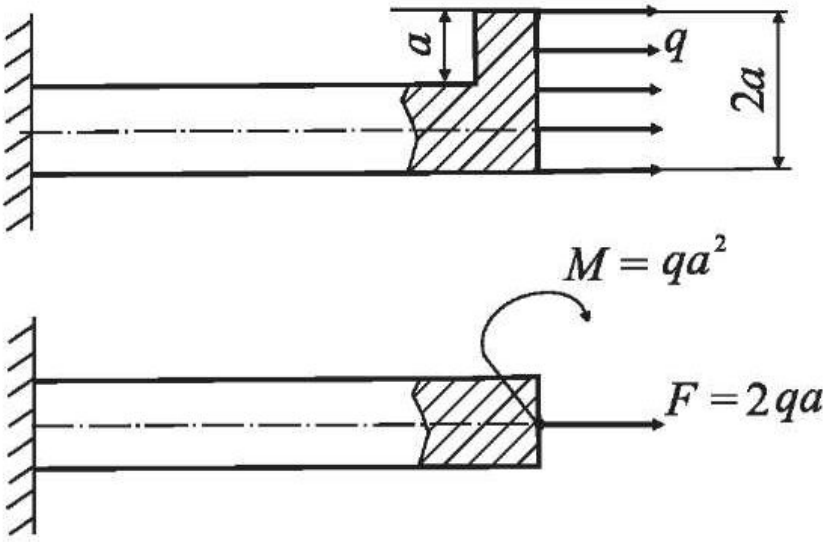


Рис. 1.6

За пределами этой области замена нагрузки ее равнодействующей не вносит существенной погрешности. Высказанное правило носит название ***принципа Сен-Венана***, широкое использование которого в курсе сопротивления материалов позволяет существенно упрощать расчеты, не заостряя

внимание на точных законах приложения нагрузки. Подчеркнем, что принцип Сен-Венана позволяет проводить замену нагрузки на статически эквивалентную ей только в локальной, т. е. небольшой по сравнению с размером всей конструкции, области.

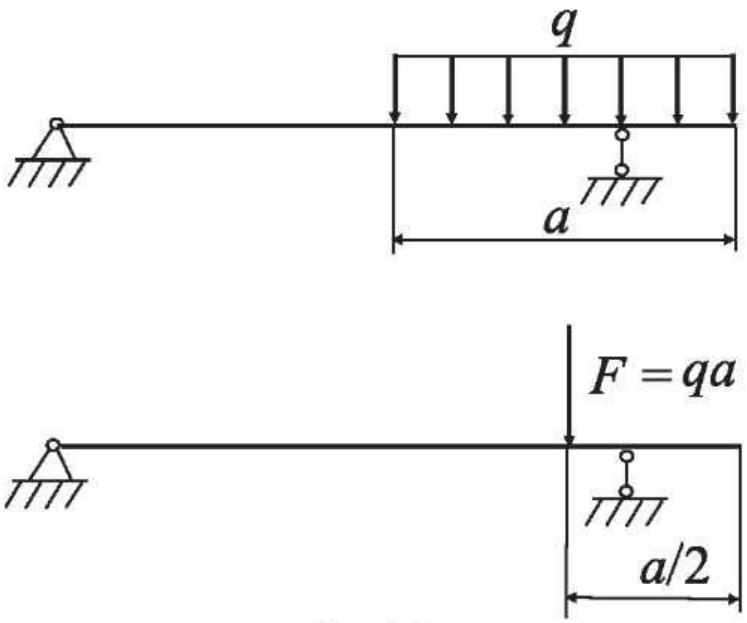


Рис 1.7

Замена показанной на рис. 1.7 распределенной нагрузки на сосредоточенную, применимая для нахождения опорных реакций, при определении внутренних усилий и перемещений уже не будет справедлива, поскольку существенно меняет всю картину деформаций.

Ниже (рис 1.8) показан пример выбора расчетных схем для железнодорожного вагона.

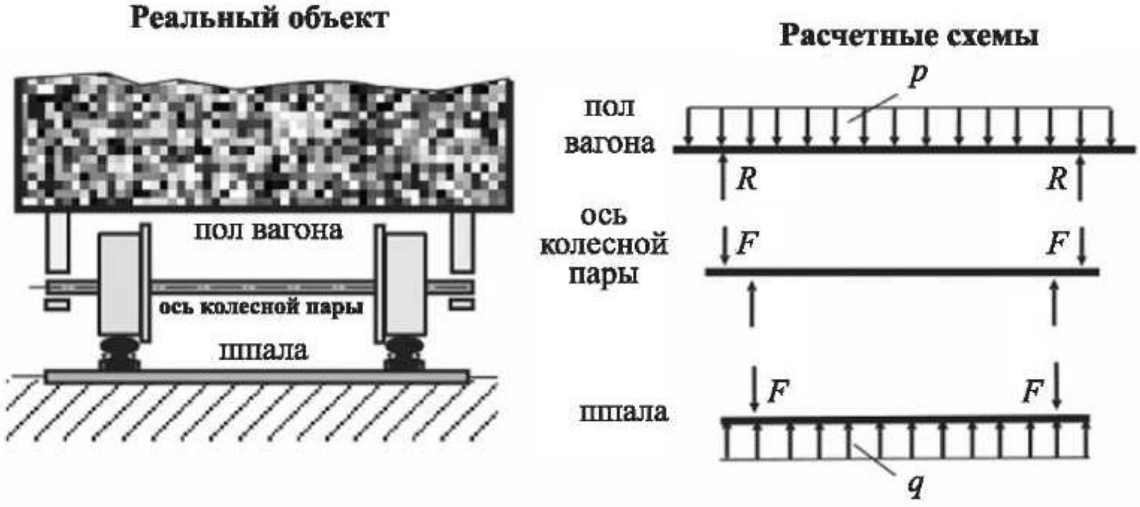


Рис. 1.8

Модель материала

В курсе «Сопротивление материалов» реальный материал, имеющий подчас довольно сложную структуру, заменяется идеализированной сплошной средой, свойства которой одинаковы в окрестностях любой точки тела *(гипотеза об однородности материала)* и не зависят от выбранного направления *(гипотеза об изотропии материала)*. Кроме того, такая среда наделяется свойством *идеальной упругости* – т. е. способностью полностью восстанавливать первоначальные размеры и форму после снятия нагрузки, а также свойством *линейной упругости*, когда деформация тела прямо пропорциональна величине приложенной нагрузки. В отдельных задачах возможны отступления от некоторых из перечисленных упрощающих гипотез, но в таких случаях это специально оговаривается.

Предположение о линейной упругости вместе с ранее сформулированным принципом сохранения начальных размеров позволяет использовать в расчетах *принцип суперпозиции* – находить результат от нескольких воздействий как сумму результатов от каждого из них в отдельности.

Предельные состояния конструкции

Рассматриваемые в курсе «Сопротивление материалов» предельные состояния можно разделить на две группы. В первую группу входят состояния, связанные с *потерей несущей способности* – разрушением при однократном нагружении хрупких материалов, появлением необратимых деформаций в элементах конструкций, сдвигов в соединениях и т. д. вследствие текучести пластичных материалов.

Вторая группа предельных состояний связана с *непригодностью к нормальной эксплуатации* вследствие появления трещин при циклическом нагружении, недопустимо

больших перемещений из-за недостаточной жесткости конструкций, возникновения недопустимых вибраций и т. д.

Внутренние силы. Метод сечений

Под действием внешних сил тело деформируется, меняется взаимное расположение элементарных частиц тела, в результате в нем возникают внутренние (упругие) силы, стремящиеся вернуть тело в исходное состояние. Для нахождения внутренних сил используют *метод сечений*, суть которого состоит в следующем. Тело мысленно рассекается на две части плоскостью, затем одна из частей отбрасывается, а ее действие на оставшуюся часть заменяется внутренними силами (рис. 1.9). По своей природе эти силы представляют собой взаимодействие частиц тела, которое обеспечивает его целостность.

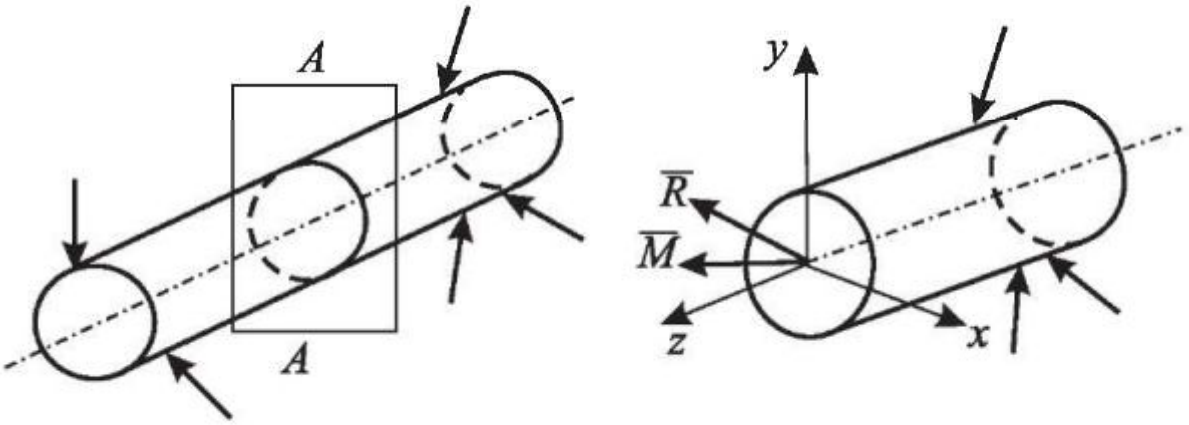


Рис. 1.9

Внутренние силы непрерывно распределены по всему сечению и в общем случае приводятся к главному вектору $\overline{R}$, т. е. равнодействующей этих сил, приложенной в центре тяжести сечения, и главному моменту $\overline{M}$.

Для стержня удобно использовать в качестве секущей плоскость, нормальную к его оси.

Выберем систему координат с началом отсчета в центре тяжести сечения, ось z направим вдоль оси стержня. Проекции главного вектора на оси координат N, Q_x, Q_y и состав-

ляющие главного момента $M_к$, M_x, M_y называют внутренними силовыми факторами (рис.1.10).

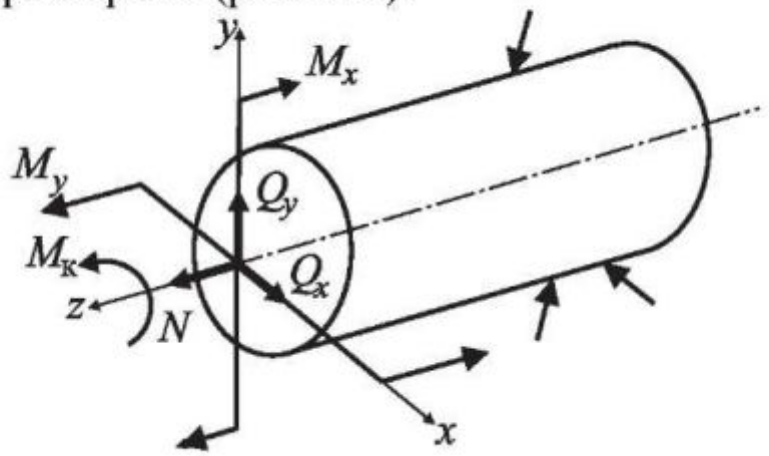


Рис. 1.10

N – нормальная (продольная) сила – проекция главного вектора на ось стержня;

Q_x, Q_y – поперечные силы, лежащие в плоскости сечения и направленные вдоль соответствующих осей;

$M_к$ (M_z) – крутящий момент;

M_x, M_y – изгибающие моменты относительно осей x и y.

Величина внутренних силовых факторов находится из условий равновесия отсеченной части тела:

$$\sum F_x = 0;\ \sum F_y = 0;\ \sum F_z = 0;$$

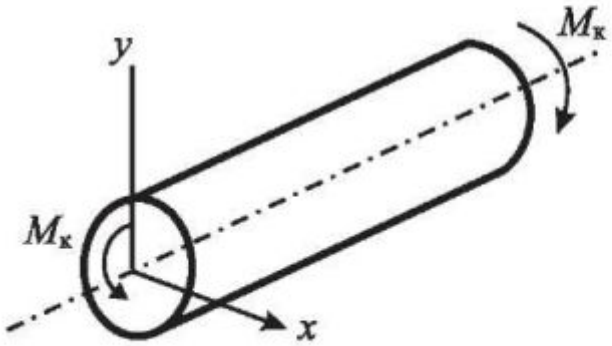
$$\sum m_x = 0;\ \sum m_y = 0;\ \sum m_z = 0.$$

Три первых уравнения дают выражения для нормальной и поперечных сил, оставшиеся – выражения для крутящего и изгибающих моментов. Очевидно, что каждый из внутренних силовых факторов равен алгебраической сумме внешних силовых факторов, действующих на отсеченную часть тела.

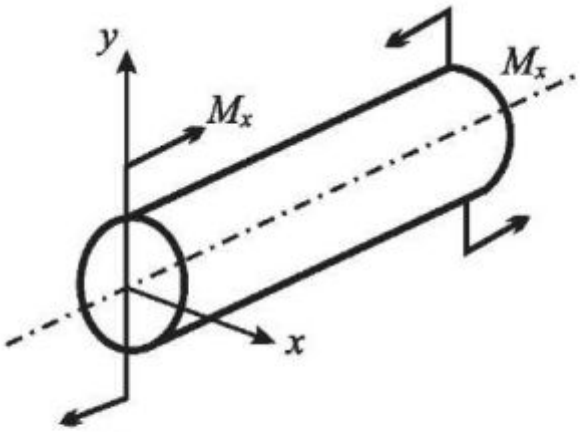
В основе классификации *видов нагружения* лежит появление в поперечных сечениях тех или иных внутренних силовых факторов. К простым видам нагружения относят та-

кие, при которых в поперечных сечениях стержня возникает только один силовой фактор.

Растяжение (*сжатие*) – в поперечных сечениях возникает только нормальная сила N, остальные внутренние усилия обращаются в нуль.

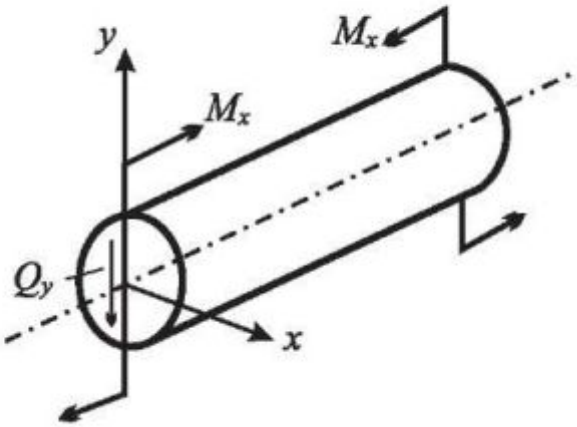


Кручение – в поперечных сечениях действует только крутящий момент $M_к$, остальные факторы отсутствуют; стержень, работающий на кручение, называют валом.



Чистый изгиб – в поперечных сечениях действует только один из изгибающих моментов M_x или M_y; стержень, подвергаемый изгибу, называют балкой.

К простым видам нагружения условно относят также *поперечный изгиб* – случай изгиба, при котором в попе-речных сечениях балки наряду с изгибающим моментом (M_x, или M_y) появляется поперечная сила (Q_y или Q_x).



К сложным видам нагружения относят различные комбинации простых видов (*сложное сопротивление*).

Понятие о напряжениях в точке тела

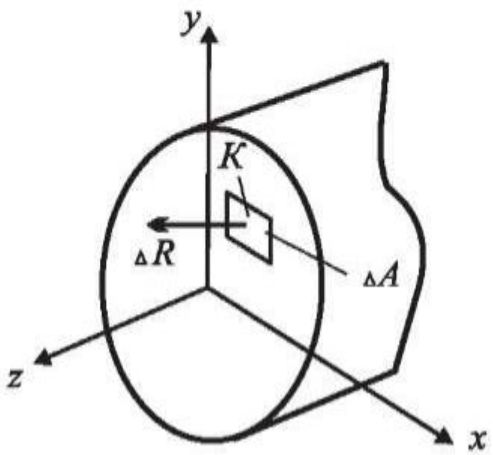


Рис. 1.11

Считая тело сплошным, можно представить внутренние силы непрерывно распределенными по сечению. Выделим в сечении произвольную точку K, а в ее окрестности – малую площадку ΔA. Равнодействующую внутренних сил на выделенной площадке обозначим ΔR (рис. 1.11). Отношение ΔR к площади ΔA при стремлении последней к нулю дает нам интенсивность внутренних сил в данной точке сечения

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = p,$$

которую называют *полным напряжением в точке* на данной площадке и измеряют в единицах силы, отнесенных к единицам площади – паскалях (1 Н/м^2 = 1 Па) или мегапаскалях (1 МПа = $1 \cdot 10^6$ Па).

Для оценки прочности удобнее использовать не вектор полного напряжения p, а его проекции на оси координат.

Проекция на ось z, нормальная к сечению, обозначается греческой буквой «сигма» с индексом оси, которой она параллельна – σ_z, и называется нормальным напряжением. Проекции полного напряжения в точке на оси x и y обозначаются греческой буквой «тау» с соответствующими индексами – τ_{zx}, τ_{zy}, и называются касательными напряжениями. По теореме Пифагора, длина вектора полного напряжения определяется через его проекции:

$$p^2 = \sigma_z^{\,2} + \tau_{zx}^{\,2} + \tau_{zy}^{\,2}.$$

Совокупность напряжений, действующих на всевозможных площадках, проходящих через данную точку, образует *напряженное состояние* в точке тела.

Связь между напряжениями в точке сечения и действующими в этом сечении внутренними силовыми факторами можно найти интегрированием по всей площади сечения A действующих на бесконечно малой площадке dA элементарных сил $\sigma_z dA$, $\tau_{zx} dA$, $\tau_{zy} dA$, а также моментов этих сил относительно осей координат:

$$N = \int_A \sigma_z dA; \; Q_x = \int_A \tau_{zx} dA; \; Q_y = \int_A \tau_{zy} dA;$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA; \; M_y = \int_A \sigma_z x dA; \; M_k = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA. \qquad (1.1)$$

Приведенные зависимости позволяют определить равнодействующие внутренних сил, если известен закон распределения напряжений по сечению. Однако в большинстве случаев стоит обратная задача – нахождение напряжений по известным внутренним силовым факторам, которую нельзя решить с помощью только этих уравнений, так как одному и тому же значению внутреннего усилия в левых частях уравнений могут соответствовать различные законы распределения напряжений по сечению. Для нахождения напряжений необходимо рассматривать вместе с условиями равновесия и условия деформации тела.

Понятие о деформациях

Деформацией называют как сам процесс изменения размеров и форм тел при нагружении, так и количественную меру таких изменений. Если деформации возникают сразу и полностью после приложения нагрузки, а после ее снятия сразу же и полностью исчезают, их называют упругими. Если

деформации после снятия нагрузки сохраняются, их называют пластическими или остаточными. В основном в сопротивлении материалов исследуются упругие деформации.

Для количественного описания деформирования вводят понятия линейной и угловой деформации в точке тела. Выберем в сечении ненагруженного тела произвольную точку A и проведем из нее под прямым углом друг к другу два коротких отрезка AB и AC.

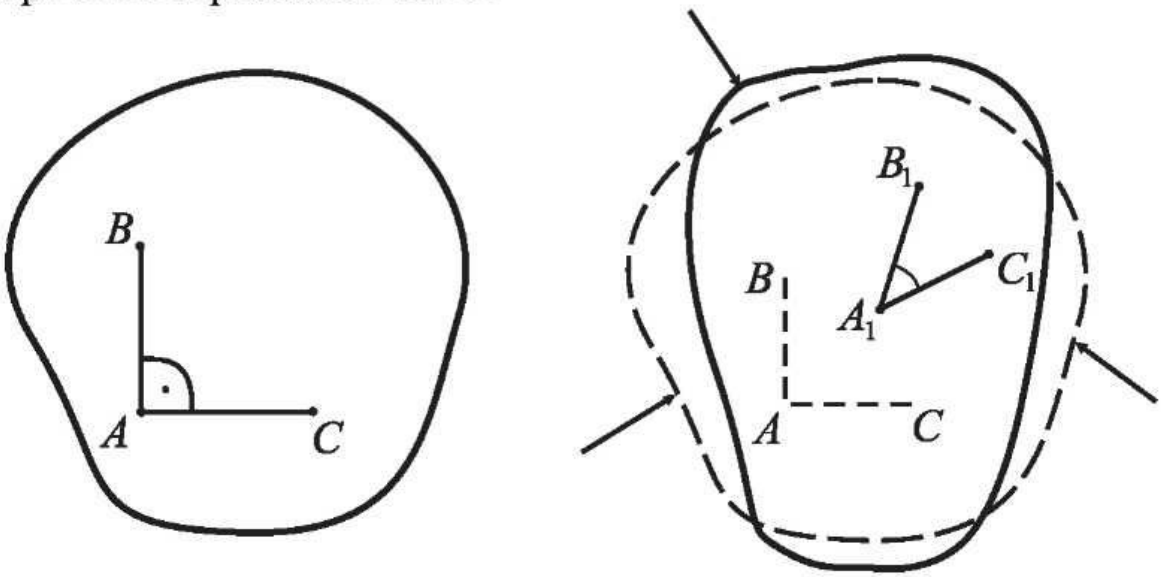


Рис. 1.12

После нагружения тело деформируется и точки изменят свое положение: точка A переместится в положение A_1, точка B – в положение B_1 и т. д., при этом изменятся как длины отрезков, так и их положение (рис. 1.12). Пусть s – длина отрезка AB до нагружения, а $s + \Delta s$ – после нагружения. Линейной деформацией в точке A в направлении AB называют предел отношения

$$\lim_{s \to 0} \frac{\Delta s}{s} = \varepsilon_{AB} .$$

Проводя последовательно отрезки, параллельные каждой из координатных осей, получим три линейных деформации ε_x, ε_y, ε_z.

Первоначально прямые углы между выбранными отрезками после нагружения изменяются. Предел изменения

$$\lim_{\substack{AB\to 0\\ AC\to 0}} \left(\angle BAC - \angle B_1A_1C_1\right) = \gamma_{BAC}$$

называют угловой деформацией в точке A в плоскости BAC, или углом сдвига. Рассматривая последовательно каждую из координатных плоскостей, получим угловые деформации γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}.

Совокупность линейных и угловых деформаций в данной точке по всем направлениям образует *деформированное состояние* в точке тела.

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Нормальные силы и их эпюры

Растяжение **(*сжатие*)** – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня появляются только нормальные силы, а остальные силовые факторы равны нулю. При этом положительная нормальная сила направлена в сторону внешней нормали к сечению, т.е. вызывает растяжение, а отрицательная – сжатие. Внешние силы в этом случае приводятся к равнодействующей, направленной вдоль оси стержня.

Формально растяжение от сжатия отличается только знаком нормальной силы. Ниже будет показано, что это не всегда справедливо. В частности, при растяжении и сжатии могут сильно различаться механизмы разрушения. Кроме того, при сжатии длинных гибких стержней возникает опасность их изгиба, что значительно усложняет методы их расчета (см. раздел «Устойчивость сжатых стержней»).

Для нахождения нормальных сил применяется метод сечений – стержень мысленно рассекается плоскостью, перпендикулярной его оси, на две части. Взаимодействие частей стержня заменяется силой N, величина которой определяется из условия равновесия какой-либо из частей (рис. 2.1).

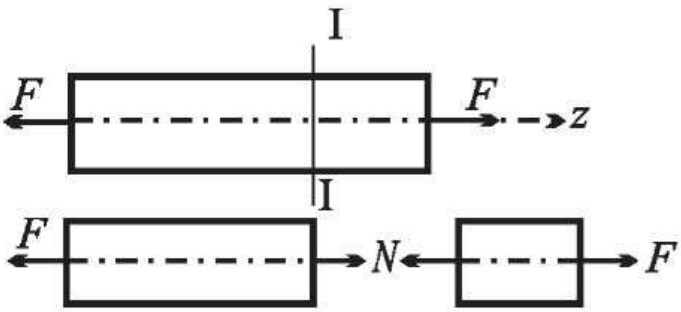


Рис. 2.1

$\sum F_z=0$: $-F+N=0$

$N=F$

($N>0$ – растяжение)

Отметим, что в тех случаях, когда направление силы N заранее неизвестно, ее рекомендуется направлять в положительную сторону.

Если при этом из решения уравнения равновесия сила получится положительной, это будет соответствовать чертежу, т. е. стержень окажется растянут, а при отрицательной силе – сжат.

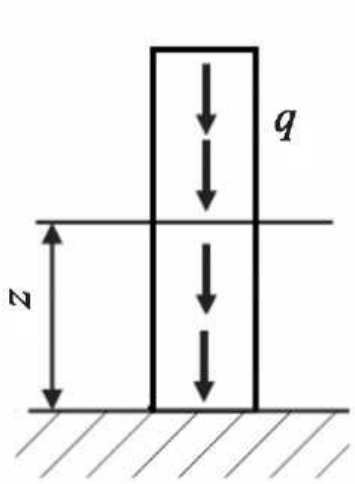


Рис. 2.2

Действующие на стержень внешние силы могут быть как сосредоточенными, так и распределенными. Примером распределенной продольной нагрузки может служить собственный вес массивного вертикально расположенного стержня (колонны) (рис. 2.2). Интенсивность распределенной нагрузки в этом случае можно найти как произведение удельного веса материала γ на площадь поперечного сечения $A(z)$:

$$q\,(z)=\gamma\cdot A(z)$$

Между интенсивностью распределенной нагрузки и нормальной силой в сечении существует дифференциальная зависимость, которую находят из рассмотрения равновесия выделенного из стержня элемента длиной dz (рис. 2.3).

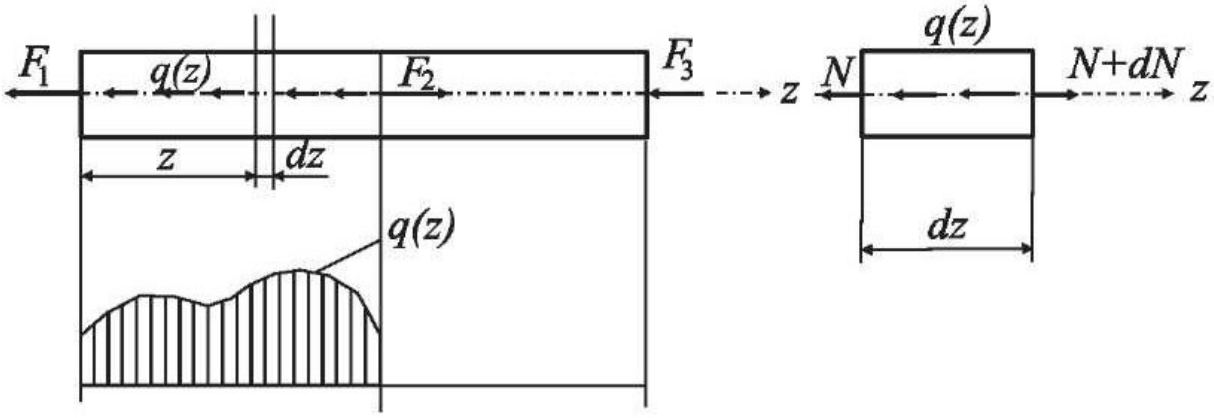


Рис. 2.3

Интенсивность нагрузки в пределах элемента ввиду его малости можно считать постоянной:

$$q(z) = q = \text{const}.$$

Тогда, проектируя силы на ось z, получим

$$\Sigma F_z = 0:\ -N - qdz + N + dN = 0.$$

Отсюда

$$q = dN/dz.$$

Интегрируя, находим выражение для нормальной силы

$$N = N(0) + \int_0^z q(z)dz.$$

Здесь $N(0)$ – постоянная интегрирования – значение нормальной силы в начале участка ($z = 0$).

В случае одновременного действия на стержень нескольких нагрузок для наглядности строят *эпюру* нормальной силы, т. е. график ее изменения вдоль оси стержня.

Пример 2.1. Построение эпюры нормальной силы.

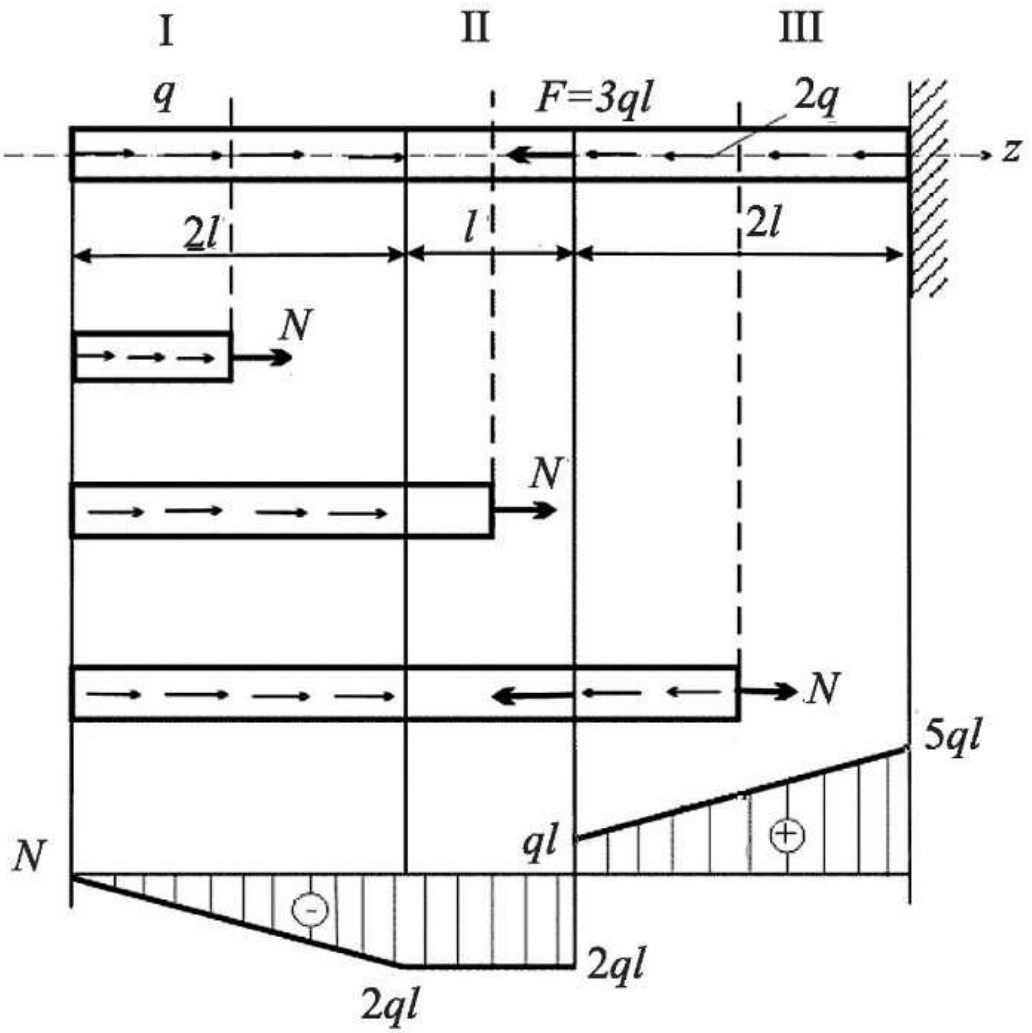


Рис. 2.4

Решение. Стержень разбивается на силовые участки, границами которых служат сечения, где приложены сосредоточенные нагрузки, либо начинается или заканчивается действие распределенных нагрузок. В нашем примере стержень имеет три таких участка. Для нахождения нормальной силы на каждом из участков поочередно мысленно проводится сечение, рассекающее стержень на две части. Записывая условия равновесия для показанных на рисунке отсеченных частей стержня, получаем выражения для нормальной силы на каждом из выделенных участков:

I. $0 \le z \le 2l$ II. $2l \le z \le 3l$ III. $3l \le z \le 5l$

$qz + N = 0;$ $q2l + N = 0;$ $2ql - P - 2q(z - 3l) + N = 0;$

$N = -qz;$ $N = -2ql;$ $N = -5ql + 2qz\ .$

На основе этих уравнений строим эпюру $N(z)$ (рис. 2.4).

Напряжения и деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука

В соответствии с принципом Сен-Венана можно считать, что на некотором удалении от места приложения нагрузки способ нагружения роли не играет и нормальная сила определяется только равнодействующей нагрузки (рис. 2.5). Для большей части растянутого стержня справедлива гипотеза плоских сечений, согласно которой поперечные сечения смещаются параллельно начальному положению, оставаясь плоскими.

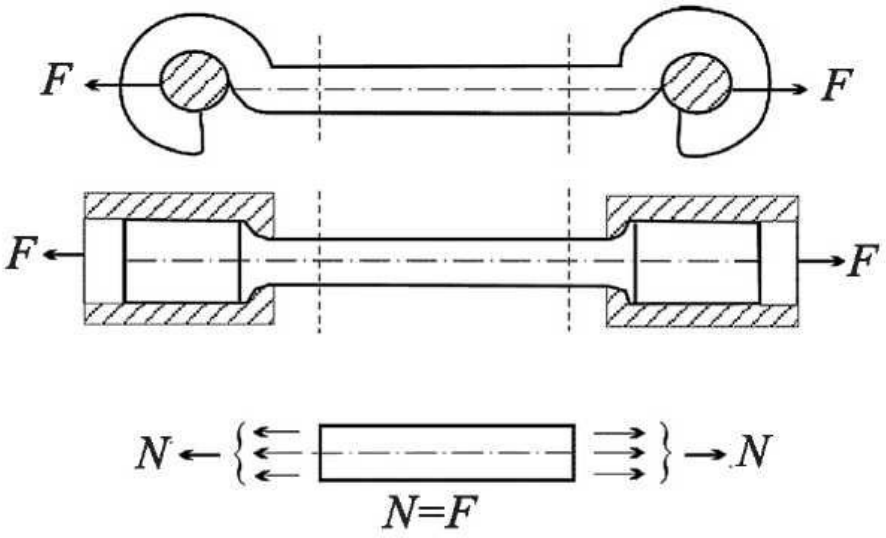


Рис. 2.5

Если представить себе стержень, состоящим из тонких продольных элементов, торцы которых образуют плоскости поперечных сечений, то все они будут удлиняться одинаково. Следовательно, напряжения в каждой точке поперечного сечения также будут одинаковы, что позволяет однозначно определить их из интегрального условия равновесия:

$$\sigma_z = \sigma(x,y) = \sigma = \text{const}; \; N = \int_A \sigma(x,y)dA = \sigma A;$$

$$\sigma = \frac{N}{A}. \qquad (2.1)$$

Все изложенное справедливо и для коротких сжимаемых стержней.

Подчеркнем, что найти напряжение $\sigma(x,y)$ только из условий равновесия

$$N = \int_A \sigma(x,y)dA$$

не удаётся, т. к. этим условиям могут удовлетворять различные законы распределения напряжения по сечению стержня $\sigma(x, y)$ (рис. 2.6).

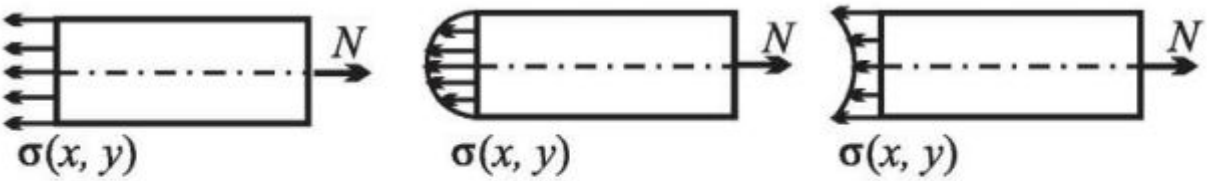


Рис. 2.6

Поэтому для нахождения функции $\sigma(x,y)$ кроме условий равновесия необходимо дополнительно привлекать геометрические соображения, в нашем случае – гипотезу плоских сечений.

Рассмотрим возникающие при растяжении и сжатии деформации. При растяжении длина стержня l получит приращение на величину Δl, а поперечные размеры сократятся соответственно на Δa и Δb (рис. 2.7).

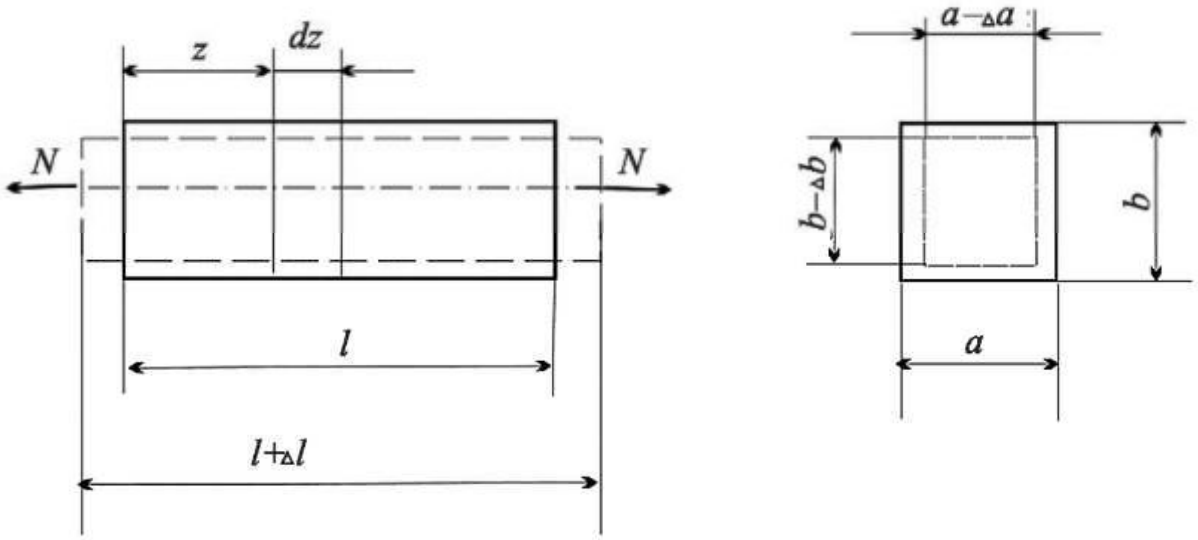


Рис 2.7

При сжатии соответственно уменьшится длина и увеличатся поперечные размеры.

Рассмотрим элемент стержня длиной dz (рис. 2.8).

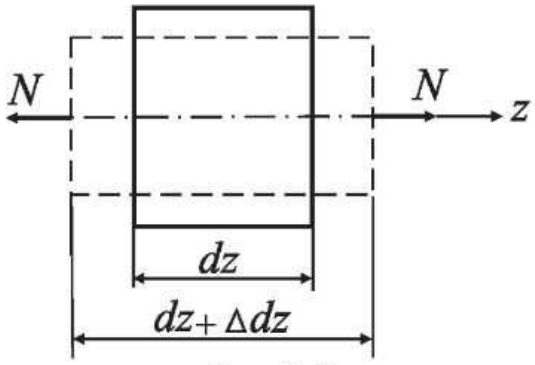


Рис. 2.8

Относительным удлинением стержня (продольной линейной деформацией) называется величина

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Отсюда $\Delta dz = \varepsilon dz$; проинтегрировав это выражение по всей длине, получим абсолютное удлинение стержня

$$\Delta l = \int_l \varepsilon dz.$$

Эксперименты показывают, что линейная деформация по длине однородного стержня при растяжении постоянной силой не меняется, т. е. $\varepsilon = \text{const}$, или

$$\Delta l = \varepsilon l,$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (2.2)$$

Аналогично продольной деформации определяется поперечная деформация в направлении размеров a и b:

$$\varepsilon_a' = -\frac{\Delta a}{a};\ \varepsilon_b' = -\frac{\Delta b}{b}.$$

Знак «минус» в этих выражениях отражает тот факт, что поперечные размеры уменьшаются при растяжении и увеличиваются при сжатии.

Для изотропных материалов можно принять $\varepsilon_a' = \varepsilon_b' = \varepsilon'$, причем отношение поперечной деформации к продольной для каждого материала есть постоянная величина, называемая *коэффициентом Пуассона*:

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|.$$

У всех существующих материалов значения коэффициента Пуассона находятся в пределах от 0 до 0,5. Конструкционные стали имеют $\mu = 0{,}25 \div 0{,}3$.

Значение коэффициента Пуассона, близкое к 0,5, свидетельствует о несжимаемости материала, т. е. независимости его объема от действующих нагрузок.

Между напряжениями и деформациями при растяжении существует зависимость, называемая ***законом Гука***:

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{2.3}$$

Здесь E – модуль упругости при растяжении (модуль упругости I рода). Модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ являются основными упругими константами материала. Для сталей модуль упругости E составляет величину $2{,}0 \div 2{,}2 \cdot 10^5$ МПа; для ряда других конструкционных материалов его значение можно найти, например, в справочных таблицах [6]. Подставив в формулу (2.3) выражения (2.1), (2.2), получим ещё одну формулу записи закона Гука, позволяющую найти абсолютное удлинение стержня при растяжении:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \tag{2.4}$$

Знаменатель этой формулы EA (произведение модуля упругости на площадь поперечного сечения) называют жесткостью стержня при растяжении (сжатии).

Для ступенчатого стержня, нагруженного несколькими сосредоточенными силами, удлинения вычисляются на участках, где сила N и жесткость EA постоянны, а результаты алгебраически суммируются:

$$\Delta l = \sum_i \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \tag{2.5}$$

Формулу (2.5) можно обобщить на тот случай, когда нормальная сила и жесткость стержня непрерывно меняются по длине:

$$N = N(z),$$
$$EA = EA(z).$$

Тогда

$$\Delta l = \int_l \frac{N(z)dz}{EA(z)}. \tag{2.6}$$

Полученные зависимости позволяют найти продольные перемещения сечений растягиваемого стержня.

$$u(z) = u(0) + \int_0^z \frac{N(z)dz}{EA},$$

где $u(0)$ – перемещение сечения, расположенного в начале координат. Принимая за начало отсчета неподвижное сечение, перемещение произвольного сечения $u(z)$ можно найти как удлинение части стержня, расположенного между этим сечением и заделкой (рис. 2.9).

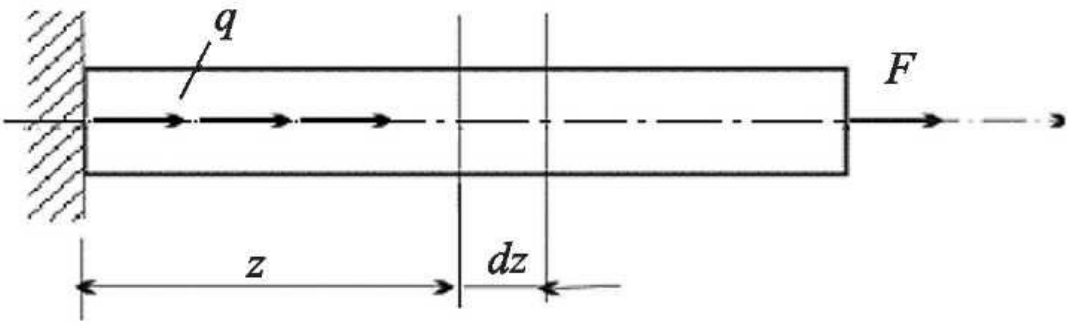


Рис. 2.9

Пример 2.2. Построение эпюр нормальных сил, нормальных напряжений и продольных перемещений в вертикальном стержне. Площадь поперечного сечения A, удельный вес материала γ (рис. 2.10).

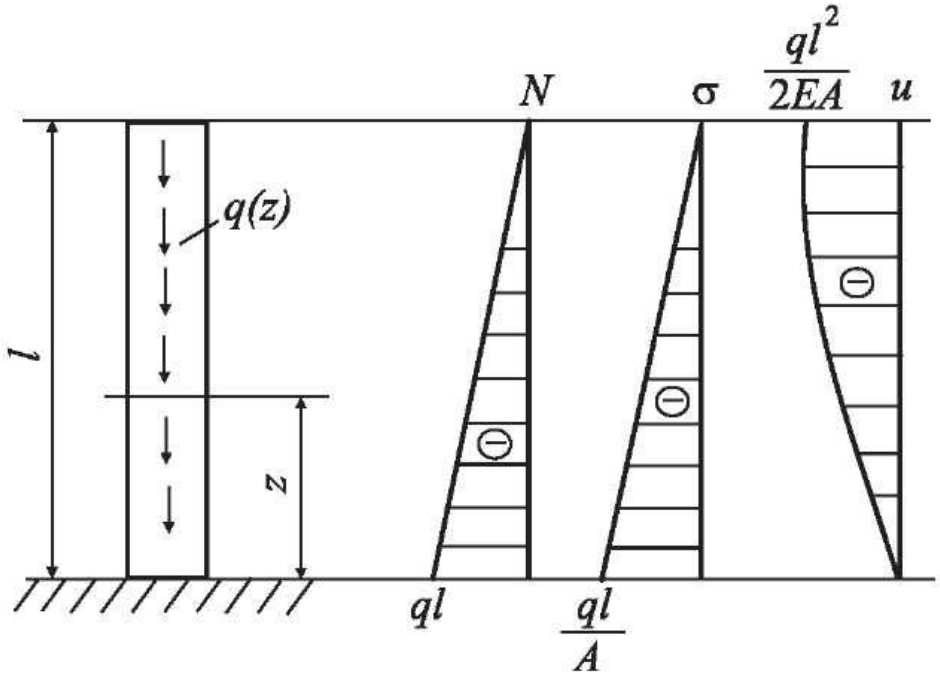


Рис. 2.10

$$q\,(z) = q = \gamma A[\text{Н/м}];\ N\,(z) = q(l - z);$$

$$\sigma\,(z) = \frac{q}{A}(l - z);\quad u\,(z) = \int_0^z \frac{q(l - z)}{EA}dz = \frac{q}{EA}(lz - \frac{z^2}{2}).$$

Пример 2.3 Построение эпюр нормальных сил, нормальных напряжений и продольных перемещений в ступенчатом стержне.

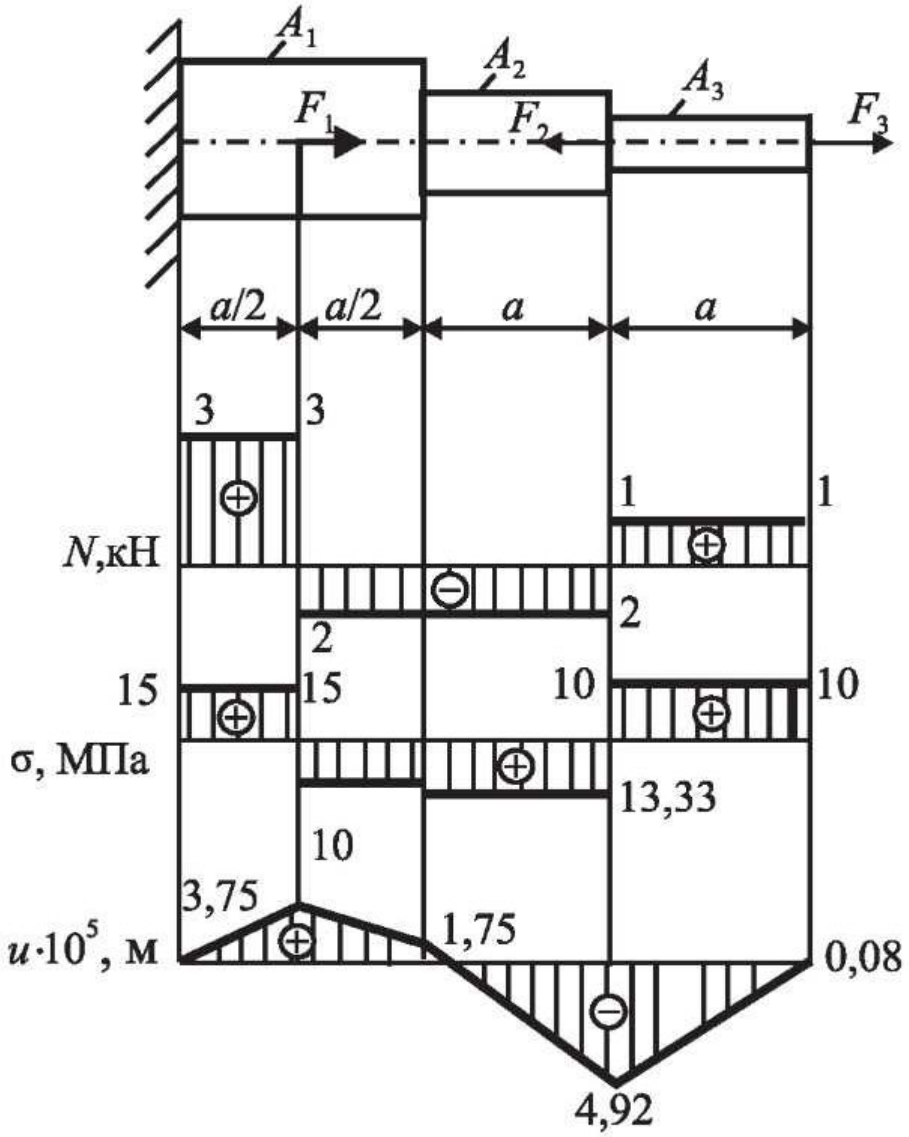


Рис. 2.11

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $a = 1{,}0$ м

$F_1 = 5$ кН $\qquad A_1 = 2{,}0$ см^2

$F_2 = 3$ кН $\qquad A_2 = 1{,}5$ см^2

$F_3 = 1$ кН $\qquad A_3 = 1{,}0$ см^2

Решение. Построение эпюры нормальных сил ведем аналогично тому, как это делалось в примере 2.1. Выделяем три силовых участка, границами которых являются сечения, нагруженные внешними силами; на каждом из участков мысленно рассекаем стержень на две части, одну из которых отбрасываем, а ее действие на оставшуюся часть заменяем нормальной силой N. В нашем случае удобнее отбрасывать левые части стержня и находить силу N из условия равновесия правых частей. Принимая за начало отсчета крайнее правое сечение стержня и нумеруя участки справа налево, получим:

I. $0 \le z \le a$ $\quad N = F_3 = 1{,}0$ кН;
II. $a \le z \le 2{,}5a$ $\quad N = F_3 - F_2 = -2{,}0$ кН;
III. $2{,}5 \le z \le 3{,}0a$ $\quad N = F_3 - F_2 + F_1 = 3{,}0$ кН.

Пользуясь найденными значениями, строим эпюру N.

Для нахождения нормальных напряжений воспользуемся формулой (2.1), при этом учтем, что на втором силовом участке (при $z = 2a$) площадь поперечного сечения стержня изменяется:

I. $0 \le z \le a$
$\sigma = N/A_3 = 1{,}0 \cdot 10^3/(1{,}0 \cdot 10^{-4}) = 10 \cdot 10^{-6} = 10$ МПа;

II. $a \le z \le 2a$
$\sigma = N/A_2 = (-2{,}0 \cdot 10^3)/(1{,}5 \cdot 10^{-4}) = -13{,}33 \cdot 10^6 = -13{,}33$ МПа;

III. $2a \le z \le 2{,}5a$
$\sigma = N/A_1 = (-2{,}0 \cdot 10^3)/(2{,}0 \cdot 10^{-4}) = -10{,}0 \cdot 10^6 = -10$ МПа;

IV. $2{,}5a \le z \le 3{,}0a$
$\sigma = N/A_1 = 3{,}0 \cdot 10^3/(2{,}0 \cdot 10^{-4}) = 15{,}0 \cdot 10^6 = 15$ МПа.

Поскольку левый торец стержня неподвижен, сначала найдем перемещение ближайшего к нему характерного сечения B – места приложения силы F_1. Для этого воспользуемся формулой (2.4), учитывая, что перемещение любого сечения равно удлинению части стержня между этим сечением и заделкой:

$$u_B = \frac{N}{EA_1}\frac{a}{2} = \frac{3\cdot 10^3}{2\cdot 10^{11}\cdot 2\cdot 10^{-4}}\cdot\frac{1}{2} = 3{,}75\cdot 10^{-5}\text{ м}.$$

Далее определим перемещение сечения C, воспользовавшись формулой (2.5):

$$u_C = \Delta l_{OB} + \Delta l_{BC} = u_B + \frac{N}{EA_1}\frac{a}{2} =$$

$$= 3{,}75\cdot 10^{-5} - \frac{2\cdot 10}{2\cdot 10^{11}\cdot 2\cdot 10^{-4}}\cdot\frac{1}{2} = 1{,}75\cdot 10^{-5}\text{ м}.$$

Аналогично находим перемещения остальных характерных сечений.

$$u_D = u_C + \Delta l_{CD} = 1{,}75\cdot 10^{-5} - \frac{2\cdot 10^3\cdot 1}{2\cdot 10^{11}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}} = -4{,}92\cdot 10^{-5}\text{ м},$$

$$u_E = u_D + \Delta l_{DE} = -4{,}92\cdot 10^{-5} + \frac{1\cdot 10^3\cdot 1}{2\cdot 10^{11}\cdot 1\cdot 10^{-4}} = 0{,}08\cdot 10^{-5}\text{ м}.$$

Между характерными сечениями перемещения изменяются по линейному закону.

По найденным значениям строим эпюры (рис. 2.11).

Напряжения в наклонных сечениях растянутого стержня

Пусть площадь поперечного сечения n–n равна A, тогда площадь наклонного сечения с нормалью υ (рис. 2.12) определяется зависимостью

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha}.$$

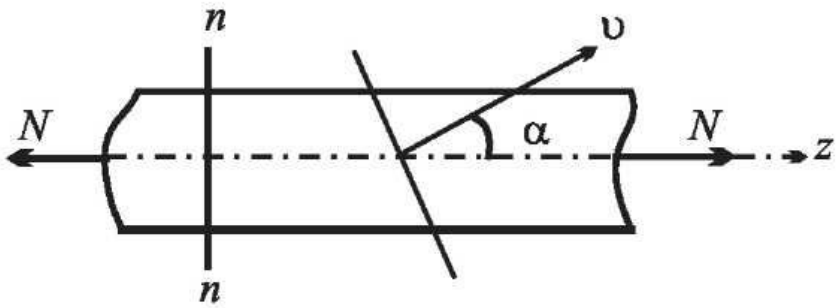


Рис. 2.12

Проекции продольной силы на нормаль υ и на плоскость сечения, показанные на рис. 2.13, будут равны

$$N_\alpha = N\cos\alpha;\ T_\alpha = N\sin\alpha\ .$$

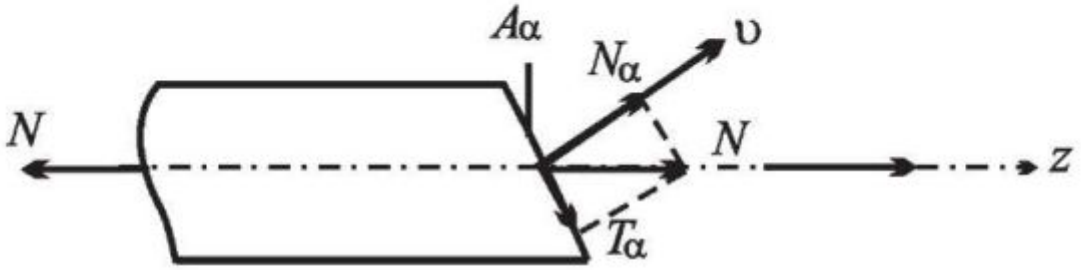


Рис. 2.13

Считая распределение напряжений по сечению равномерным, получим

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N}{A}\cos^2\alpha = \sigma\cos^2\alpha,$$
$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{A_\alpha} = \frac{N}{A}\sin\ \alpha\cos\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha. \qquad (2.7)$$

Здесь $\sigma = \frac{N}{A}$ – нормальное напряжение в поперечном сечении *n–n*.

Анализируя полученные зависимости (2.7), можно сделать несколько выводов:

1) наибольшие нормальные напряжения возникают в поперечных сечениях, где $\alpha = 0$; $\cos^2\alpha = 1$;

2) наибольшие касательные напряжения возникают в сечениях, повернутых к оси стержня на 45°, и достигают половины наибольших нормальных;

3) в продольных сечениях $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ как нормальные, так и касательные напряжения равны нулю, т. е. отсутствуют взаимное давление и сдвиг волокон;

4) сумма нормальных напряжений на любых двух взаимно перпендикулярных площадках постоянна и равна σ:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2\alpha,$$
$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma \cos^2(\alpha + 90^\circ) = \sigma \sin^2\alpha,$$
$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \sigma = \text{const}.$$

Понятие о концентрации напряжений

Равномерное распределение напряжений по площади поперечного сечения стержня нарушается не только в окрестности приложения нагрузок, но и вблизи мест резкого изменения формы или площади сечения.

Это явление носит название *концентрации напряжений*, а сами факторы, вызывающие ее, – *концентраторами напряжений.* Концентрация напряжений значительно усложняет картину их распределения по сечению. Однако это усложнение носит местный характер. На рис. 2.14 показано распределение напряжений на некотором удалении от концентраторов (сечения *B,C*) и вблизи них.

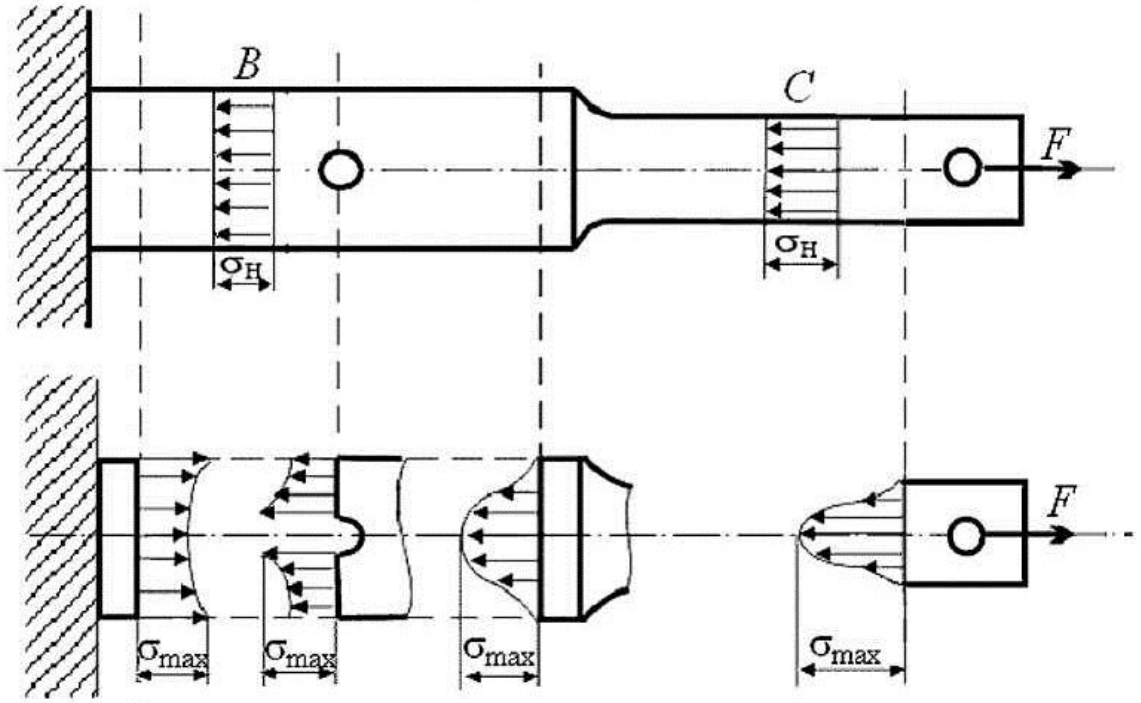


Рис. 2.14

На некотором расстоянии от концентратора, обычно очень небольшом, напряжения можно считать распределенными по сечению равномерно и вычислять по формуле (2.1). Напряжения, найденные по этой же формуле для сечений с концентраторами, называют номинальными:

$$\sigma_{н} = \frac{N}{A_{нетто}},$$

здесь $A_{нетто}$ – площадь поперечного сечения с учетом ослаблений, вносимых концентратором.

Рост напряжений вблизи концентраторов описывают с помощью теоретического коэффициента концентрации напряжений α_{σ}:

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{н}}.$$

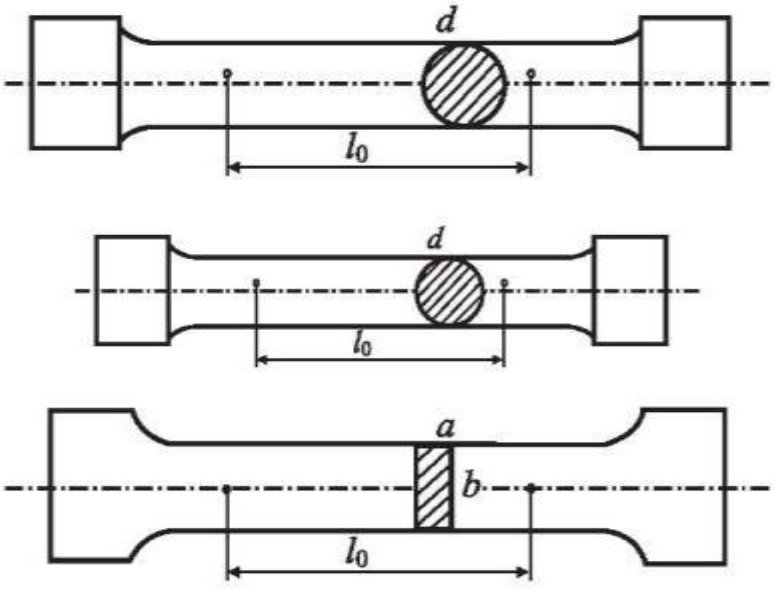
Влияние концентрации напряжений на прочность у пластичных и хрупких материалов проявляется по-разному. Принято считать, что при статическом нагружении пластичные материалы малочувствительны к наличию концентраторов. Если же нагрузки циклически меняются во времени либо материал хрупкий, то влияние концентрации напряжений на прочность необходимо учитывать.

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

При проектировании конструкций и расчетах на прочность необходимо знать поведение материалов под нагрузкой. Для этого на специальных машинах проводят испытания образцов, что позволяет определить механические характеристики материала, т. е. характеристики, численно оценивающие его прочность и пластичность.

Испытание материалов на растяжение

Наибольшее распространение получили опыты на растяжение образцов. Типы и размеры образцов устанавливаются ГОСТом для того, чтобы результаты испытаний, проведенных в разных лабораториях, можно было сравнивать между собой. На рис. 3.1 показаны основные типы применяемых образцов.



Цилиндрические образцы:

а) нормальный образец
d = 10 мм
$l_0 = 10d$

б) малый образец
d = 5 мм
$l_0 = 5d$

Плоский образец
$l_0 = 11{,}3\sqrt{ab}$

Рис. 3.1

По краям образцы имеют утолщения для захватов испытательной машины. Расстояние между утолщениями называют рабочей длиной образца.

База образца l_0 (*расчетная длина*) помечается рисками, нанесенными на некотором расстоянии от утолщений, что позволяет в соответствии с принципом Сен-Венана считать эту часть образца находящейся в состоянии осевого растяжения.

В учебных целях обычно применяются малые цилиндрические образцы, которые испытывают на разрывных машинах типа ИМ-4Р.

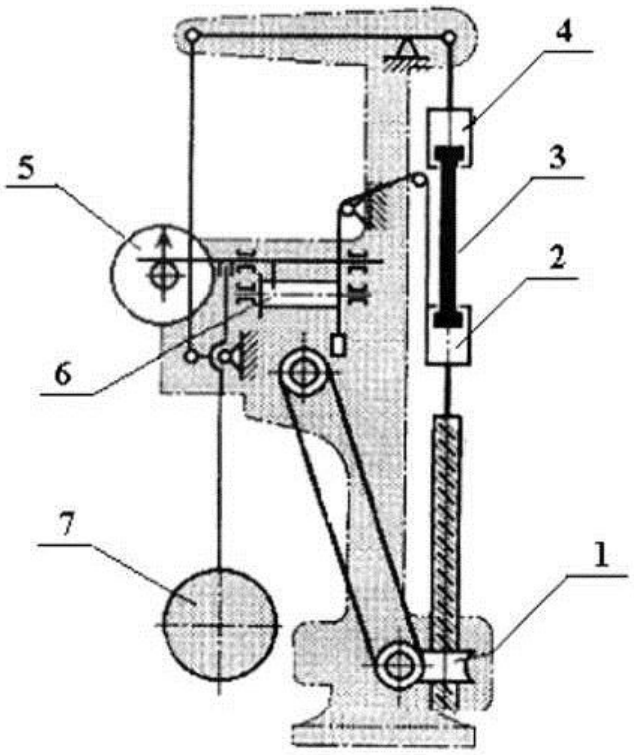


Рис. 3.2

1 – червячная передача; *2, 4* – захваты;
3 – образец; *5* – циферблат силоизмерителя;
6 – диаграммный аппарат; *7* – маятник силоизмерителя

Испытательная машина такого типа, схема которой показана на рис. 3.2, автоматически вычерчивает график зависимости между растягивающей силой F и удлинением образца Δl, который называют *диаграммой растяжения*.

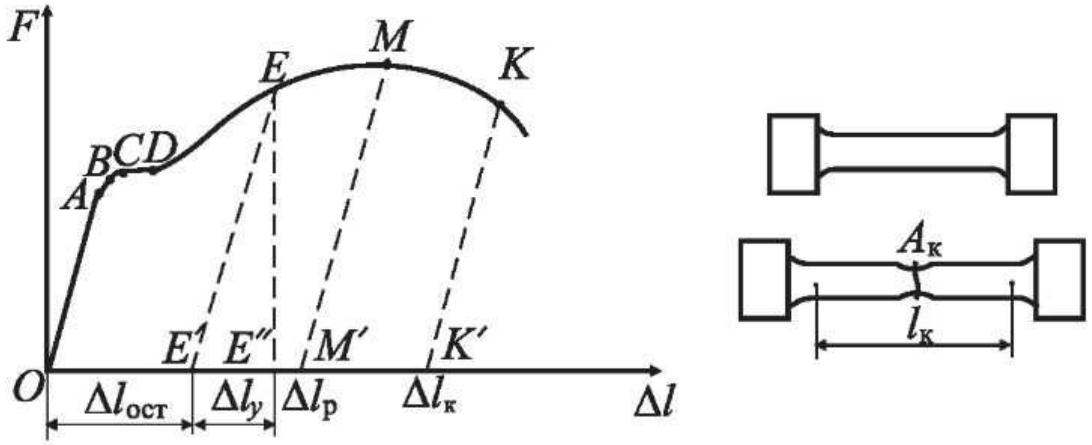


Рис. 3.3

На рис. 3.3 изображен типичный вид диаграммы для малоуглеродистой стали, как примера наиболее распространенного пластичного конструкционного материала. Рассмотрим характерные участки и точки этой диаграммы:

OA – прямая, справедлив закон Гука;

AB – закон Гука нарушается, но при снятии нагрузки образец полностью восстанавливает свои первоначальные размеры, отсутствует остаточная деформация;

CD – площадка текучести, удлинение образца происходит при постоянной нагрузке;

DM – зона упрочнения, требуется увеличение нагрузки для дальнейшего растяжения образца;

M – точка, соответствующая наибольшей силе, достигнутой при испытании. До точки *M* деформации распределены по длине образца равномерно, поэтому участок *BM* иногда называют зоной равномерных упругопластических деформаций;

MK – зона местных деформаций, на образце появляется сужение («шейка»), в которой и происходит основной рост деформаций;

K – точка диаграммы, соответствующая моменту разрыва образца.

Если с некоторой произвольной точки диаграммы *E* начать разгружать образец, то этот процесс опишется прямой *EE′*, практически параллельной начальному участку *OA*.

Отрезок OE'' равен полному удлинению в точке E и складывается из остаточной (отрезок OE') и упругой (отрезок $E'E''$) частей.

Если теперь начать вновь растягивать образец, то диаграмма пойдёт примерно по прямой $E'E$, а затем вдоль линии EMK так, как будто разгрузки и повторной нагрузки не было. Иными словами, при нагружении образца выше предела текучести и последующей разгрузке металл меняет свои свойства – исчезает площадка текучести, повышается предел пропорциональности, уменьшается относительное удлинение при разрыве – материал становится более хрупким. Это явление называется *наклёпом*, оно возникает не только при растяжении, но и при других видах нагружения. Иногда наклёп вызывается специально, иногда он является нежелательным следствием предшествующих методов механической обработки. В этих случаях с ним приходится бороться, в частности, с помощью отжига изделия.

Чтобы исключить влияние на результаты испытаний размеров образца, диаграмму растяжения перестраивают в другом масштабе. По вертикальной оси откладывают не саму растягивающую силу, а её отношение к первоначальной площади поперечного сечения образца, которое называют условным нормальным напряжением:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}.$$

По горизонтальной оси соответственно откладывается линейная деформация, которая находится делением абсолютного удлинения образца на начальную длину l_0:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Полученный таким образом график называют диаграммой условных напряжений, или условной диаграммой растяжения (рис. 3.4).

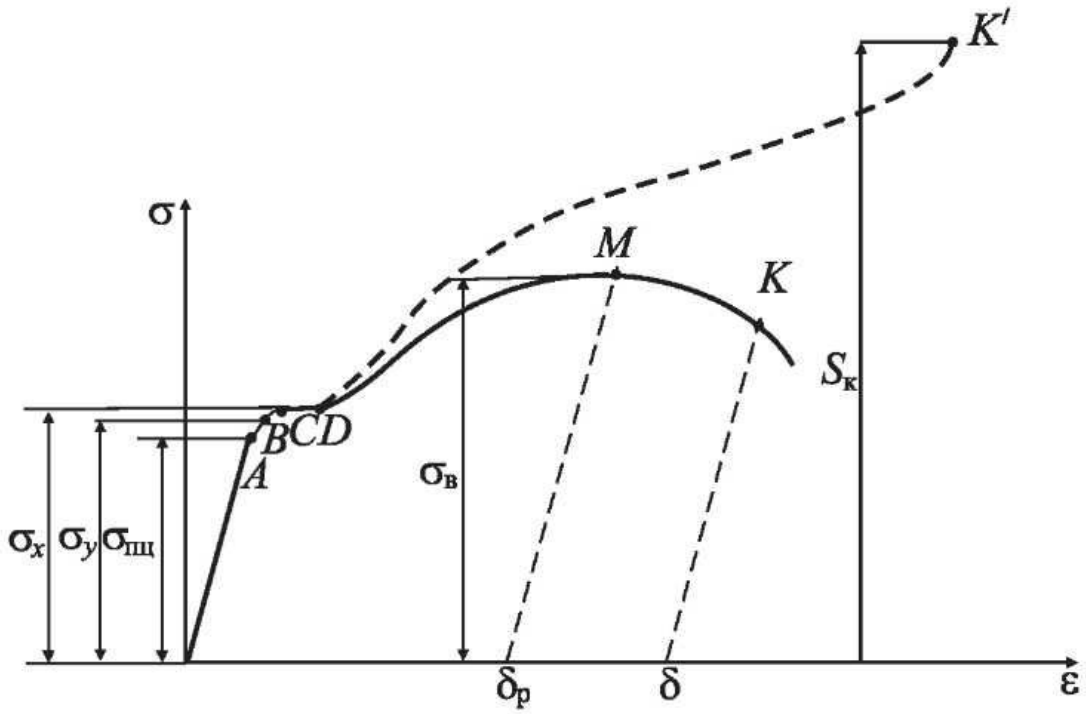


Рис. 3.4

Характерные точки условной диаграммы используются для нахождения основных механических характеристик материала.

Характеристики прочности

$\sigma_{пц}$ – *предел пропорциональности* – наибольшее напряжение, при котором ещё справедлив закон Гука;

$\sigma_{у}$ – *предел упругости* - наибольшее напряжение, до которого при разгрузке не обнаруживается остаточная деформация;

$\sigma_{т}$ – *предел текучести* – наименьшее напряжение, при котором деформация растёт без увеличения нагрузки;

$\sigma_{в}$ – *временное сопротивление* или *предел прочности* – напряжение, соответствующее наибольшей силе, выдерживаемой образцом.

Несмотря на ниспадающий характер диаграммы на участке *MK*, напряжения после достижения предела прочности не снижаются, а возрастают. Это обусловлено тем, что площадь поперечного сечения в шейке образца уменьшается

быстрее, чем снижается нагрузка. Отношение растягивающей силы в точке K диаграммы к действительной площади сечения в шейке называется *истинным сопротивлением разрыву:*

$$S_{\text{к}} = \frac{F_{\text{к}}}{A_{\text{к}}}.$$

Эта величина значительно больше предела прочности материала, её можно трактовать как аналог точки K' с диаграммы истинных напряжений. Истинная диаграмма показана пунктиром, её построение вызывает большие технические сложности, поскольку требует знания текущего значения площади поперечного сечения в каждый момент нагружения. По этой причине истинную диаграмму на практике применяют довольно редко.

Характеристики пластичности

$\delta_{\text{р}} = \frac{\Delta l_{\text{р}}}{l_0} \cdot 100\ \%$ – *относительное остаточное равномерное удлинение* – необратимая часть деформации, соответствующая пределу прочности;

$\delta = \frac{\Delta l_{\text{к}}}{l_0} \cdot 100\ \%$ – *относительное удлинение после разрыва* – выраженное в процентах отношение приращения расчётной длины образца после разрыва к его начальной длине;

$\psi = \frac{\Delta A_{\text{к}}}{A_0} \cdot 100\ \%$ – *относительное сужение образца* – выраженное в процентах отношение уменьшения площади поперечного сечения в шейке к первоначальной площади.

Эти характеристики также носят условный характер, поскольку в знаменателе приведённых формул стоят величины, измеренные до начала испытаний, а не их текущие значения. Однако они вполне отвечают своему назначению – служить количественной оценкой при сравнении пластических свойств различных материалов.

Отметим, что некоторые материалы не имеют на диаграмме растяжения выраженной площадки текучести. В этом случае вместо предела текучести $\sigma_т$ вводят понятие *условного предела текучести* $\sigma_{0,2}$ – напряжения, при котором остаточные деформации достигают 0,2 %.

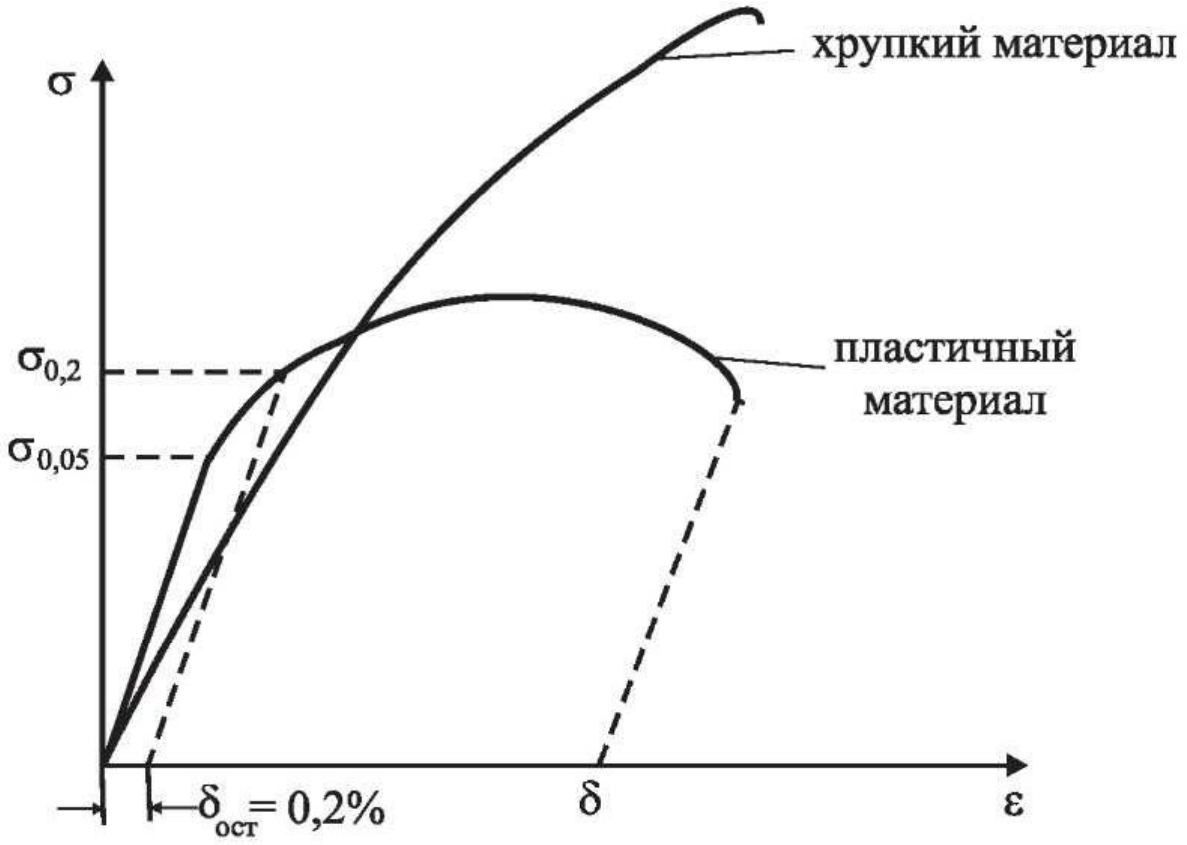


Рис. 3.5

Аналогично вместо предела упругости σ_y иногда используют *условный предел упругости* $\sigma_{0,05}$ – напряжение, при котором остаточная деформация достигает 0,05 %. На рис. 3.5 показаны для сравнения условные диаграммы растяжения таких материалов.

Испытание материалов на сжатие

Испытанию на сжатие подвергают образцы в форме коротких цилиндров, высота которых составляет от одного до трёх диаметров, или кубиков. При этом используются универсальные испытательные машины, принципиальная схема которых приведена на рис. 3.6.

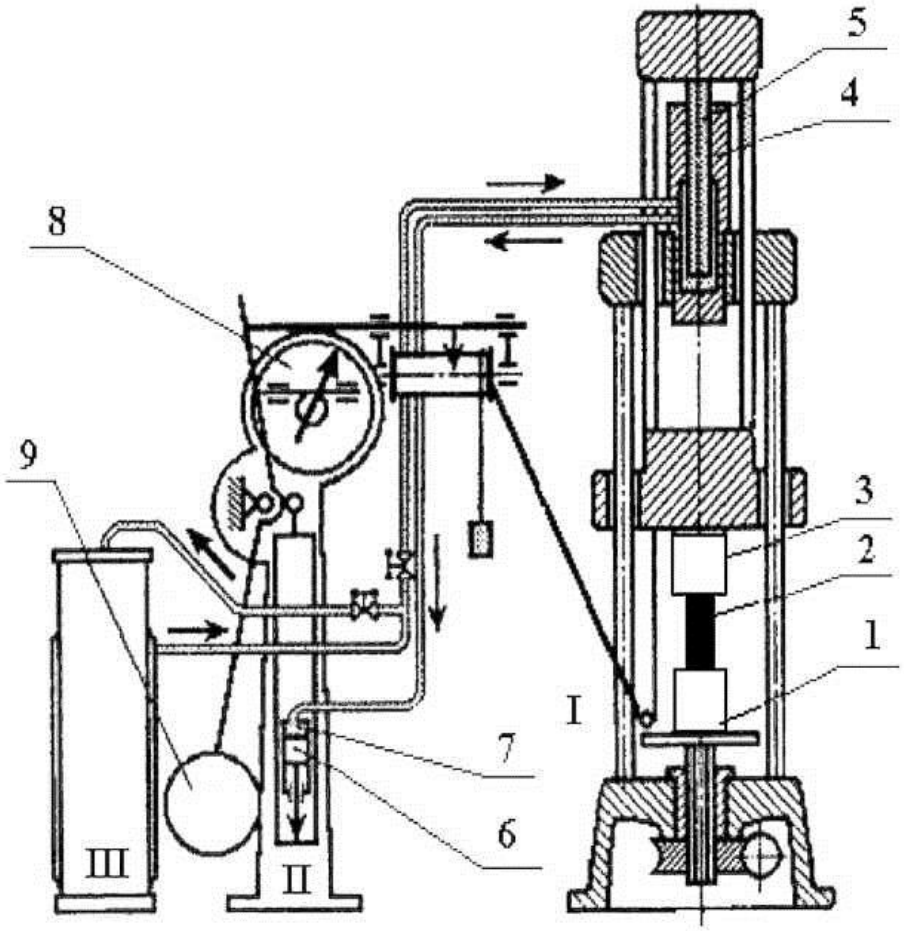


Рис. 3.6.

I – пресс; II – силоизмеритель; III – насосная станция;
1, 3 – захваты; *2* – образец; *4* – рабочий цилиндр;
5 – поршень; *6* – поршень силоизмерителя;
7 – цилиндр силоизмерителя; *8* – диаграммный аппарат;
9 – маятник силоизмерителя

Диаграмма сжатия пластичных материалов имеет свои особенности по сравнению с диаграммой растяжения, поскольку образец не разрушается, а превращается в диск (рис. 3.7). На результаты таких испытаний существенно влияет трение, возникающее между опорными плитами машины и торцами образца, которое препятствует перемещению материала в поперечном направлении. Вследствие этого цилиндрические образцы в процессе сжатия приобретают бочкообразную форму. Для уменьшения этого эффекта обычно применяют различные смазки.

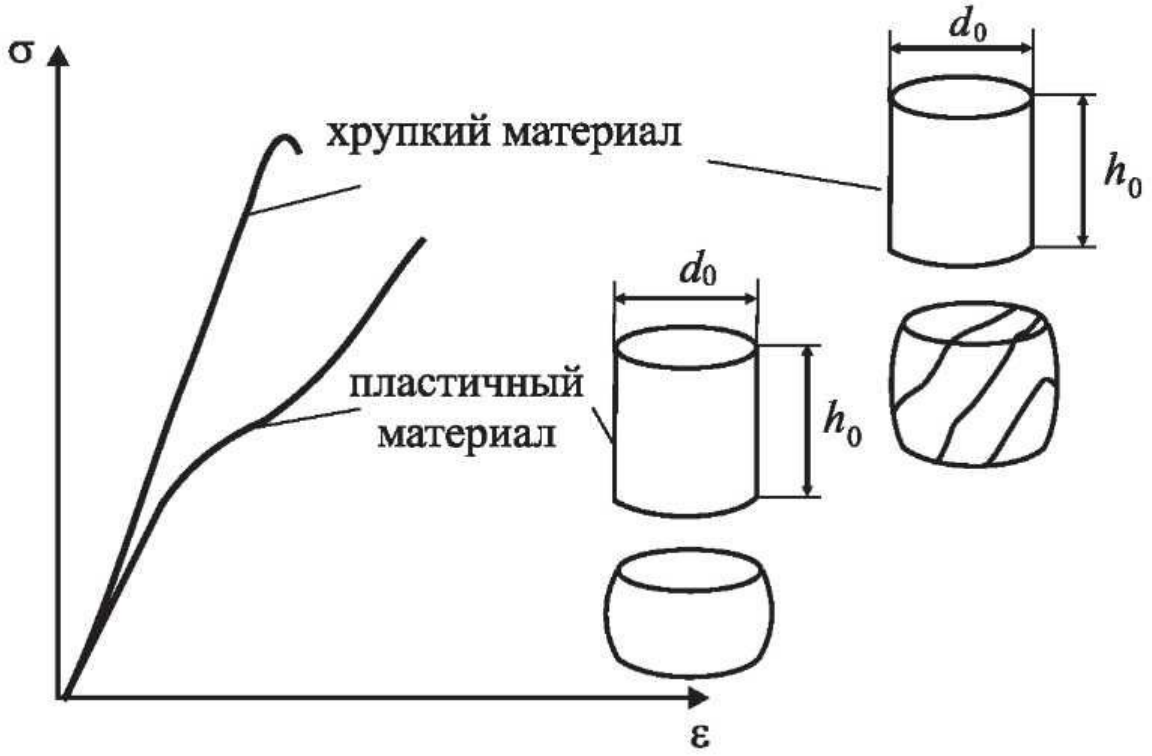


Рис. 3.7

Наклон линейного участка диаграмм при растяжении и сжатии не меняется, что говорит о постоянстве модуля упругости. У пластичных материалов при сжатии и растяжении предел упругости и предел текучести также примерно одинаковы. Для таких материалов характеристики, аналогичные пределу прочности, относительному удлинению и относительному сужению при разрыве, при испытаниях на сжатие получить нельзя. По этой причине для пластичных материалов результаты испытаний на сжатие мало что добавляют к результатам испытаний на растяжение. Поэтому на практике испытаниям на сжатие подвергают лишь хрупкие материалы, которые, как правило, имеют разную прочность при растяжении и сжатии. Разрушение образцов из хрупкого материала при сжатии обычно происходит вследствие сдвига одной части образца относительно другой с образованием трещин. Для металлических материалов трещины, как правило, ориентированы по плоскостям наибольших касательных напряжений, т. е. примерно под углом 45° к оси. Для неметаллических материалов, таких как древесина, бетон,

натуральный камень, ориентация трещин определяется структурой материала и может быть как наклонной, так и продольной.

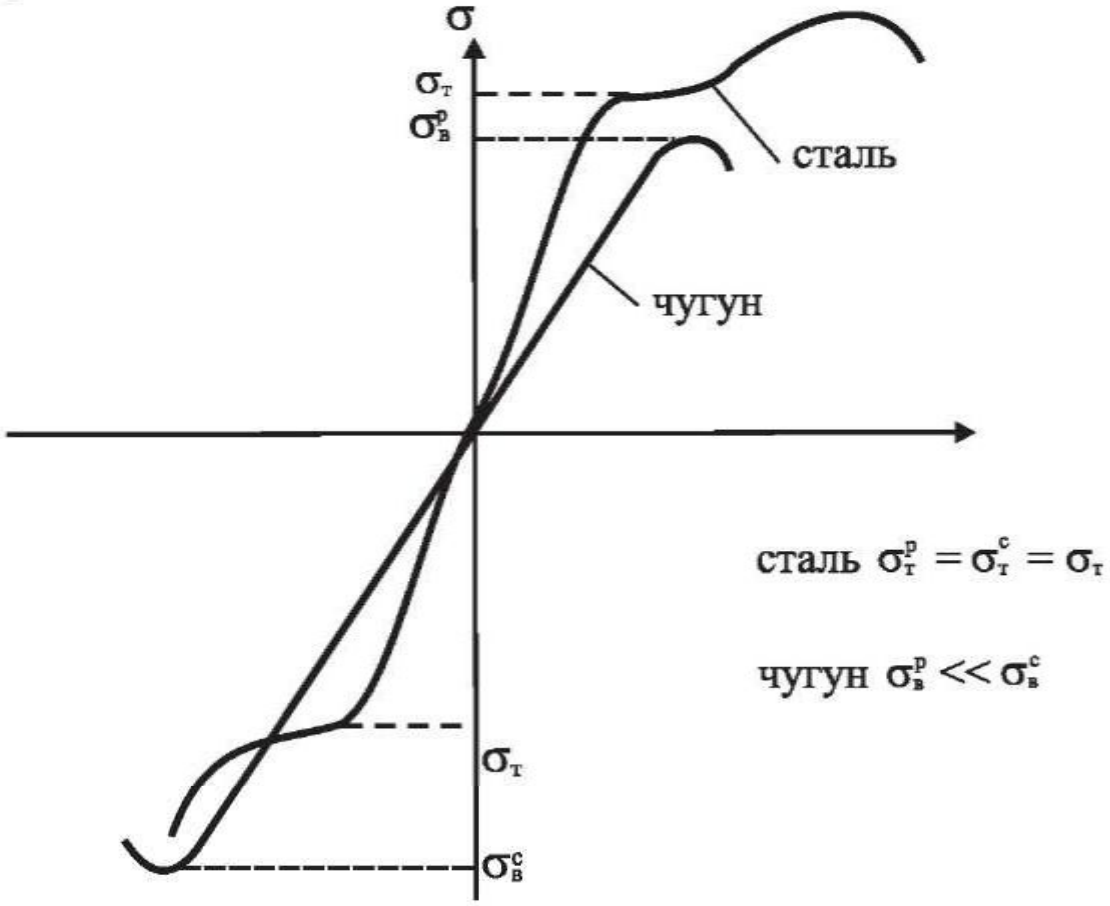


Рис. 3.8

На рис. 3.8 для наглядности показаны в одних координатных осях диаграммы растяжения и сжатия малоуглеродистой стали и чугуна. При этом учтено, что напряжение и деформация при сжатии имеют отрицательные значения.

Верхние индексы «с» в характеристиках соответствуют сжатию, «р» – растяжению.

Влияние различных факторов на механические свойства конструкционных материалов

В описанных испытаниях материалов механические характеристики определялись при нормальных условиях – температуре 20°С и малой скорости нагружения. Однако реальные условия работы конструкций могут сильно отличаться

от лабораторных. Например, элементы авиационных и ракетных двигателей, конструкции доменных печей работают при повышенных температурах, а элементы холодильных установок – при пониженных, элементы атомных энергоустановок испытывают действие проникающих излучений и т. д. Очевидно, что от условий эксплуатации будут зависеть и механические свойства материалов.

Влияние температуры

У большинства конструкционных материалов с ростом температуры уменьшаются характеристики прочности, возрастают характеристики пластичности. У стали Ст3, например, предел текучести, составляющий при температуре 20°С около 240 МПа, при $t = 500$°С снижается до 140 МПа, а при нагреве до 600–650°С практически стремится к нулю, наступает так называемая температурная текучесть. На рис. 3.9 показаны законы изменения основных механических характеристик от температуры для некоторых марок стали.

Модуль упругости у сталей остается неизменным примерно до 200°С, затем снижается.

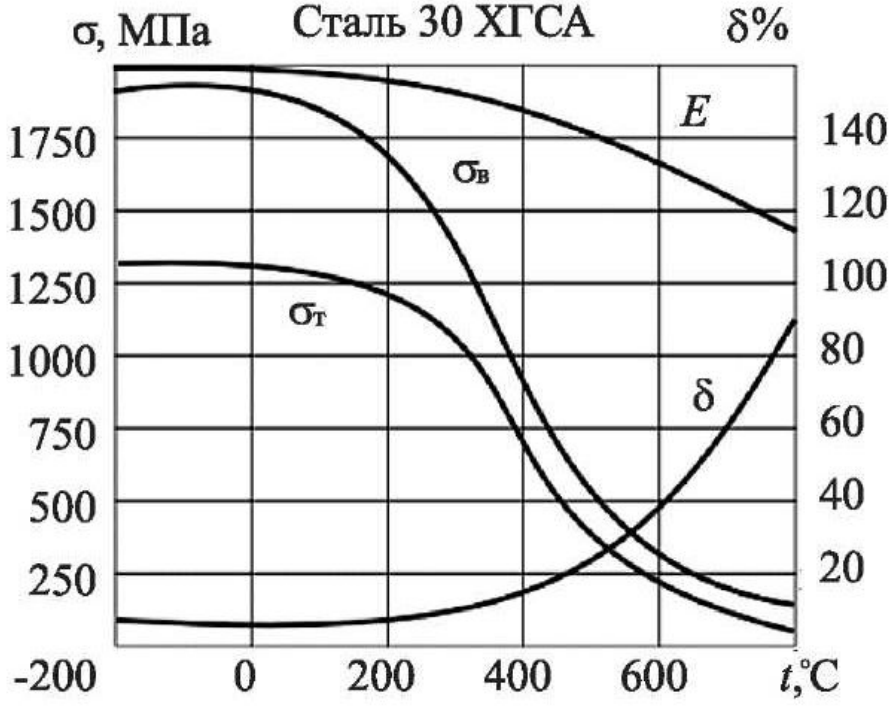


Рис. 3.9*а*

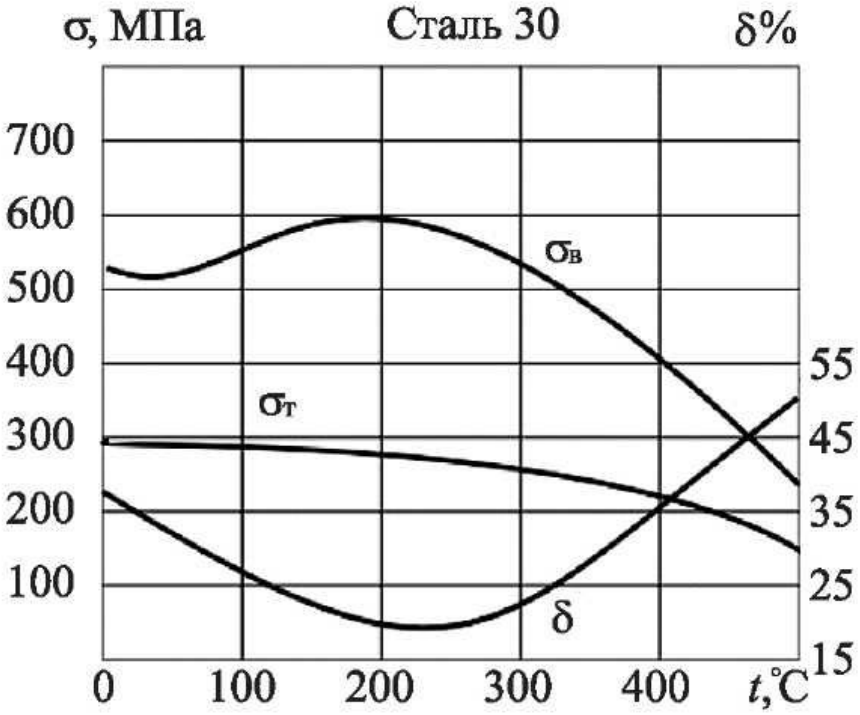


Рис. 3.9*б*

С понижением температуры в отрицательную область у сталей наблюдается явление, которое называют хладноломкостью – резко снижаются характеристики пластичности, что проявляется в хрупкости материала.

Влияние скорости нагружения

С увеличением скорости деформирования у большинства конструкционных материалов несколько увеличиваются характеристики прочности, причем предел текучести возрастает в большей степени, чем предел прочности.

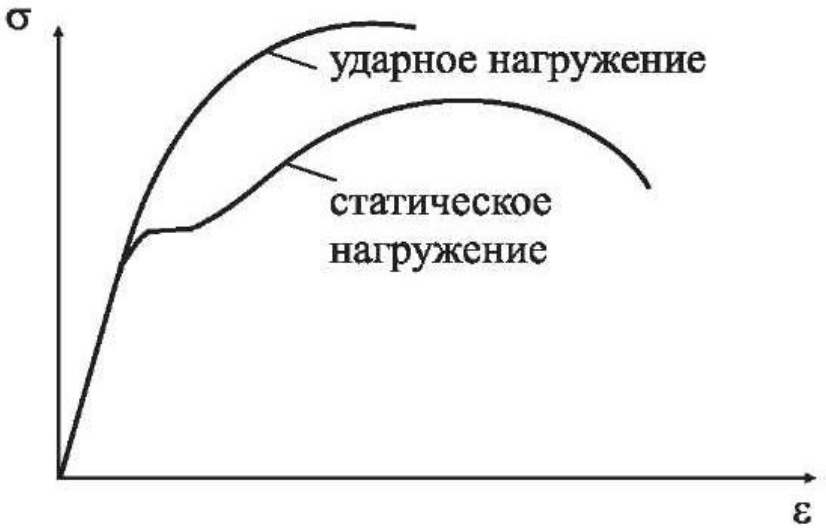


Рис. 3.10

Модуль упругости при этом не меняется, а характеристики пластичности заметно снижаются. Пластичные материалы при ударных воздействиях могут проявлять склонность к хрупкому разрушению. На рисунке 3.10 схематично показаны диаграммы растяжения малоуглеродистой стали при статическом и ударном нагружениях.

Влияние технологических факторов

Свойства конструкционных материалов, прежде всего сталей, существенно зависят от технологии их изготовления и обработки. Металлургическое производство имеет две основные стадии. На первой получают металл заданного химического состава, на второй стадии заготовке придают необходимую форму, практически не меняя химического состава материала. На этой стадии используется способность металлов к значительным пластическим деформациям. Поскольку изменение формы достигается применением давящего на металл инструмента, используемые с этой целью методы называются *обработкой металла давлением.* При этом обеспечивается не только придание слитку или заготовке необходимой формы и размеров, но и существенно улучшается структура материала, повышаются его механические характеристики.

Можно выделить следующие основные технологические операции пластической обработки:

прокатка заготовка обжимается вращающимся валками в целях уменьшения поперечного сечения заготовки и придания ей заданной формы;

волочение протягивание изделия через отверстие волоки, используется для получения проволоки, прутков, круглых и фасонных труб;

прессование выдавливание с помощью пуансона материала исходной заготовки через отверстие матрицы;

ковка многократное и непрерывное воздействие на заготовку инструментом в виде бойков с целью придания ей нужной формы;

штамповка – придание заготовке в виде ленты или листа необходимой формы без значительного изменения толщины.

Из всех видов пластической обработки особое место занимает прокатка, поскольку с ее помощью производят как изделия, пригодные для непосредственного использования в строительстве и машиностроении (сортовой прокат, рельсы и т. п.), так и разнообразные виды заготовок, подлежащих дальнейшей обработке другими методами.

При обработке давлением широко используется нагрев заготовки для придания материалу большей пластичности. Но термические методы могут применяться и независимо от остальных технологических операций. Так, *нормализация* – нагрев стали до температуры 750…950° С, выдержка при этой температуре и последующее охлаждение на воздухе – значительно улучшает структуру материала, делая ее более однородной.

Закалка – нагрев до определенной температуры с последующим быстрым охлаждением – повышает характеристики прочности материала, снижая его пластические свойства.

Существуют и другие технологические операции, в том числе целый класс методов обработки поверхностного слоя изделия – цементация, азотирование, обкатка роликами, выглаживание алмазным инструментом и т. д., направленных на изменение механических характеристик конструкционных материалов.

Основные методы и виды расчета на прочность

Существуют три основных метода расчета элементов конструкций на прочность:

– метод допускаемых напряжений;

– метод предельных состояний;

– метод разрушающих нагрузок.

Метод допускаемых напряжений

Этот метод является основным при расчете машиностроительных конструкций. В его основе лежит *условие прочности*

$$\sigma_{max} \le [\sigma],$$

которое для случая растяжения (сжатия) приобретает вид

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \le [\sigma], \qquad (3.1)$$

где σ_{max} – наибольшее по величине напряжение, возникающее в опасных точках наиболее нагруженного сечения;

$[\sigma]$ *допускаемое напряжение*, которое для каждого материала находится по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{on}}{n}.$$

Здесь $\sigma_{оп}$ – опасное напряжение, за которое принимают либо предел текучести при статическом нагружении для пластичных материалов, либо предел прочности для хрупких;

n – *коэффициент запаса прочности*, учитывающий весь комплекс факторов, влияющих на точность расчетов – разброс механических характеристик материала, погрешности методик расчета, упрощение условий нагружения, особенности работы конструкции и т. д. Коэффициенты запаса назначаются техническими условиями и нормами проектирования, они могут существенно различаться в разных отраслях производства. Для пластичных материалов коэффициент запаса принимается обычно равным n = 1.4…1.6, для хрупких n = 2.5…3.5. С развитием техники, ростом качества производства и точности расчетов коэффициенты запаса имеют тенденцию к понижению.

Метод предельных состояний

Этот метод используется в настоящее время при строительстве промышленных и гражданских зданий и сооружений. Он позволяет учесть большинство факторов, от которых зависит прочность сооружения или его отдельных элементов – особенности нагрузок и других воздействий, свойства материала, геометрию конструкции, условия работы, степень ответственности сооружения и т. д.

Условие прочности элементов, работающих на растяжение (сжатие) имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \le R. \qquad (3.2)$$

Здесь R – *расчетное сопротивление* материала – напряжение, при котором конструкция может перейти в предельное состояние;

$$R = \frac{R_н}{\gamma_м},$$

где $R_н$ – *нормативное сопротивление* материала, принимаемое обычно равным соответствующей характеристике прочности – пределу текучести для пластичных и пределу прочности для хрупких материалов;

$\gamma_м$ – *коэффициент надёжности по материалу*, учитывающий возможность статистического отклонения характеристик материала от справочных значений. Этот коэффициент устанавливается Строительными нормами и правилами (СНиП) и составляет для металлов величину 1.025…1.15, для бетона 1.3…1.5.

Особенности нестатистического характера, такие как агрессивность среды, температурный режим, непостоянство нагрузок и т. п. учитывают умножением расчетного сопротивления на *коэффициент условий работы* γ, который также устанавливается СНиПом; в большинстве случаев при нормальных условиях работы он равен единице и может быть

опущен. В ряде случаев расчетное сопротивление может содержать и другие коэффициенты, в частности *коэффициент надежности по назначению* $\gamma_н$, учитывающий значимость последствий наступления предельного состояния.

Входящая в условие прочности (3.2) величина N – *расчетное усилие* – определяется следующим образом:

$$N = N_н n,$$

где $N_н$ – *нормативное усилие*, возникающее в элементах конструкции от действия нормативных нагрузок, устанавливаемых строительными нормами;

n – *коэффициент надежности по нагрузке*, учитывающий отклонение нагрузок от нормативных в процессе строительства и эксплуатации сооружения.

Метод разрушающих нагрузок

Нарушение условия прочности в наиболее опасной точке, на котором основан метод допускаемых напряжений, в ряде случаев не только не приводит к разрушению конструкции, но и не влияет существенно на ее работоспособность. Это возможно, если материал, из которого изготовлена конструкция, обладает ярко выраженными пластическими свойствами, а область высоких напряжений локальна и не захватывает всей площади опасного сечения.

В этом случае условие прочности можно представить в виде

$$F_{\max} \le [F] = \frac{F_{раз}}{n}.$$

Величина $|F|$ называется допускаемой нагрузкой; $F_{раз}$ – разрушающая, опасная для данной конструкции нагрузка; коэффициент запаса n назначается аналогично тому, как это делается в методе допускаемых напряжений.

При определении разрушающей нагрузки предполагается, что после достижения напряжениями предела текучести они больше не возрастают, площадка текучести на диаграмме

растяжения условно продляется неограниченно. Такой материал называют идеально упругопластическим, его диаграмма растяжения схематично показана на рис. 3.11.

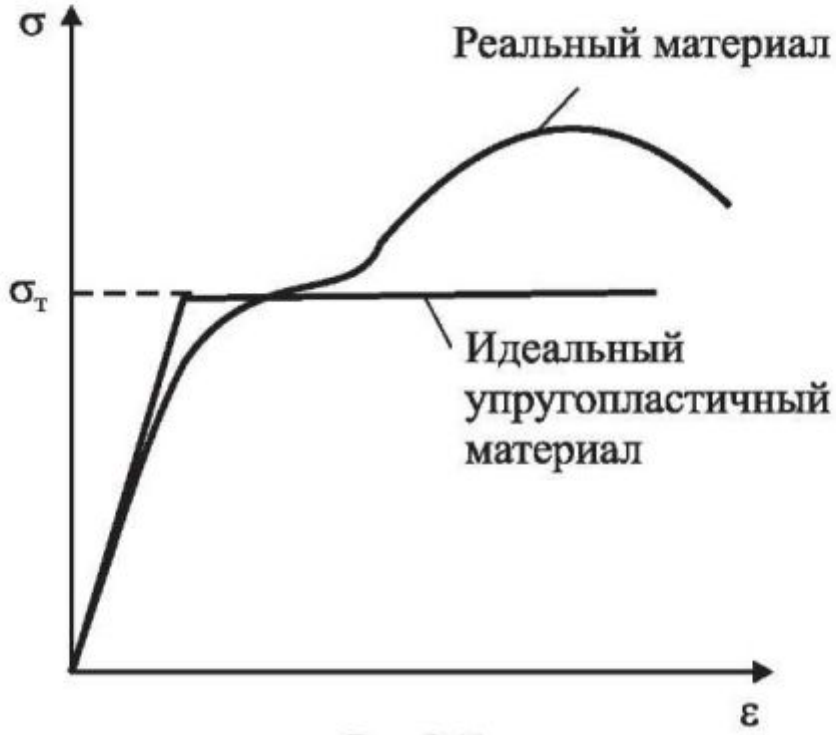


Рис. 3.11

Для растянутого или сжатого стержня разрушающая сила определяется равенством

$$F_{\text{раз}} = \int_A \sigma_т dA = \sigma_т A$$

Заметим, что в сложных расчетных схемах нахождение разрушающих нагрузок может оказаться непростой задачей и метод оказывается неприменим.

Основные виды расчета на прочность

Условие прочности в виде (3.1) или (3.2) позволяет проводить три основных вида расчетов.

1. Проверочный расчет

По заданной нагрузке и известным размерам сечения находится наибольшее напряжение, которое сравнивается с характеристикой прочности материала (допускаемым

напряжением). Как вариант, в методе допускаемых напряжений находится фактический запас прочности

$$n = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{\sigma_{\max}} \geq [n],$$

который сравнивается с нормативным коэффициентом запаса $[n]$.

2. Проектировочный расчет

По известной нагрузке и заданному материалу (известной величине $[\sigma]$ в методе допускаемых напряжений либо величине расчётного сопротивления R в методе предельных состояний) подбираются размеры поперечного сечения, обеспечивающие прочность стержня:

$$A \geq \frac{|N|}{[\sigma]}.$$

3. Расчет на грузоподъемность

По известным размерам поперечного сечения и характеристикам прочности материала определяют допускаемое значение внутреннего силового фактора (в случае растяжения и сжатия – продольной силы):

$$|N| \leq A[\sigma],$$

после чего находится наибольшее допускаемое значение нагрузки.

Условие прочности (3.1) или (3.2) записано для осевого растяжения (сжатия). При других видах нагружения меняется его вид, но остаётся неизменной структура: напряжение находится как отношение соответствующего внутреннего силового фактора к соответствующей геометрической характеристике поперечного сечения и сравнивается с характеристикой прочности материала. Поэтому описанные виды расчетов на прочность сохраняются при любых видах нагружения.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Простейшая геометрическая характеристика плоской фигуры – её площадь. От площади поперечного сечения зависят прочность и жесткость стержня при осевом растяжении и сжатии.

При изучении изгиба, кручения, различных случаев работы бруса на сложное сопротивление, а также при расчетах сжатых стержней на устойчивость приходится встречаться с более сложными геометрическими характеристиками плоских сечений: статическими моментами, моментами инерции, моментами сопротивления, радиусами инерции.

Геометрические характеристики сечений простой формы могут быть вычислены по соответствующим формулам. В таблицах ГОСТа приводятся геометрические характеристики профилей стандартного проката: равнополочных и неравнополочных уголков, двутавров, швеллеров.Для вычисления геометрических характеристик сечений сложной формы их приходится расчленять на ряд простых фигур и пользоваться формулами, устанавливающими зависимость между геометрическими характеристиками относительно различных осей.

Рассмотрим основные свойства и методы вычисления геометрических характеристик плоских сечений.

Статические моменты сечения

Статическим моментом площади сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади A сумма произведений элементарных площадок dA на расстояние до соответствующей оси (рис. 4.1):

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA, \tag{4.1}$$

где S_x – статический момент сечения относительно оси x;

S_y – статический момент сечения относительно оси y.

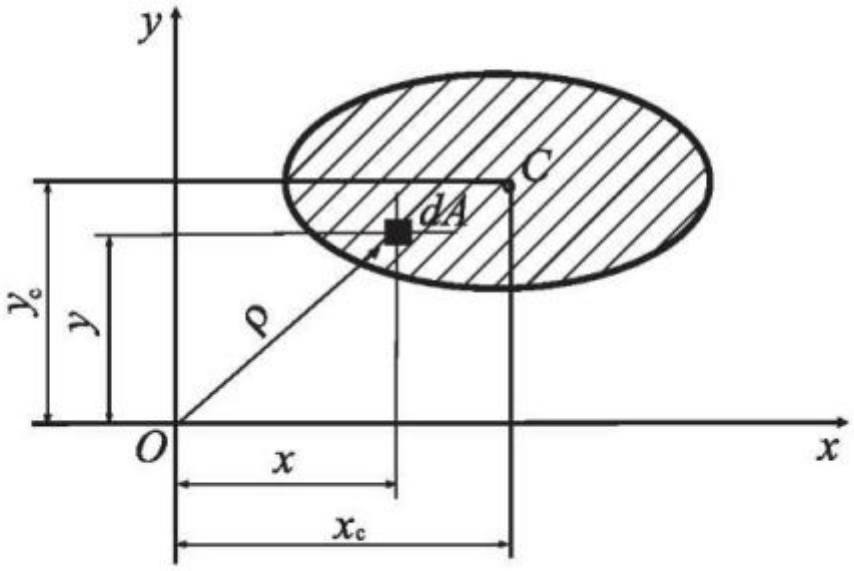


Рис. 4.1

Размерность статического момента – (ед. длины)^3, например, мм^3, см^3, м^3.

Если уподобить сечение однородной пластинке, то нетрудно установить тождественность определения статического момента сечения и момента силы тяжести этой пластинки. Используя теорему о равнодействующей, можно получить удобную для расчетов формулу вычисления статического момента простой фигуры

$$S_x = Ay_c; \quad S_y = Ax_c, \tag{4.2}$$

где x_c, y_c – координаты центра тяжести сечения.

Если сечение имеет сложное очертание, то для определения статических моментов используется интегральная формула (4.1). Статический момент сечения может быть положительным, отрицательным, равным нулю в зависимости от положения оси, относительно которой он вычисляется. Ось, проходящая через центр тяжести сечения, называется *центральной*.

Для определения статического момента сложного сечения его расчленяют на отдельные простые фигуры (рис. 4.2). На основании главного свойства интеграла статический момент сложного сечения равен сумме статических моментов простых фигур:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} A_i y_{ci}; \qquad S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i x_{ci}, \tag{4.3}$$

где x_{ci}, y_{ci} – координаты центра масс i-й фигуры.

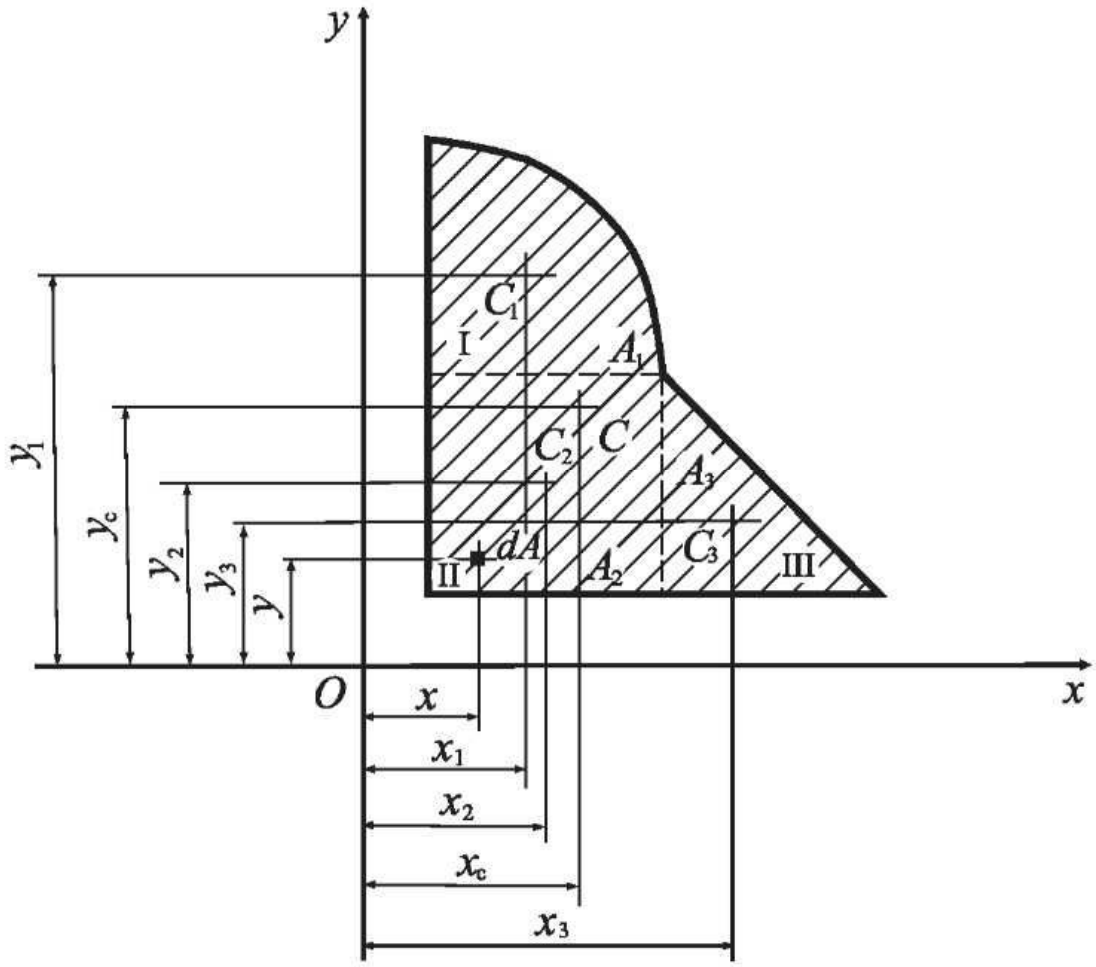


Рис. 4.2

Исходя из соотношений (4.2) и (4.3), получаем формулы для нахождения координат центра тяжести сложного сечения, состоящего из простых фигур

$$x_c = \frac{\sum A_i x_{ci}}{\sum A_i}; \qquad y_c = \frac{\sum A_i y_{ci}}{\sum A_i}. \tag{4.4}$$

Из сказанного можно сделать следующий вывод: если какая-либо ось проходит через центр тяжести сечения, то статический момент относительной этой оси равен нулю, и наоборот, если статический момент относительно какой-либо оси обращается в нуль, то ось проходит через центр тяжести сечения, т. е. является центральной.

Понятие о моментах инерции сечения

Осевым моментом инерции сечения относительно данной оси называется взятая по всей площади сечения сумма произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до этой оси, т. е. для фигуры, изображенной на рис. 4.1:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \qquad I_y = \int_A x^2 dA. \tag{4.5}$$

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса 0) называется взятая по всей его площади сумма произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA. \tag{4.6}$$

Осевые и полярный моменты инерции являются величинами существенно положительными. Пользуясь рис. 4.1, установим связь между полярным и осевым моментами инерции сечения:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA.$$

Окончательно, учитывая формулы (4.5), имеем:

$$I_\rho = I_y + I_x, \tag{4.7}$$

т. е. полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции относительно любой пары взаимно-перпендикулярных осей, проходящих через полюс.

Центробежным моментом инерции сечения относительно некоторых двух взаимно-перпендикулярных осей называется взятая по всей его площади сумма произведений элементарных площадок на их расстояния до этих осей:

$$I_{xy} = \int_A xydA. \qquad (4.8)$$

В зависимости от расположения осей центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

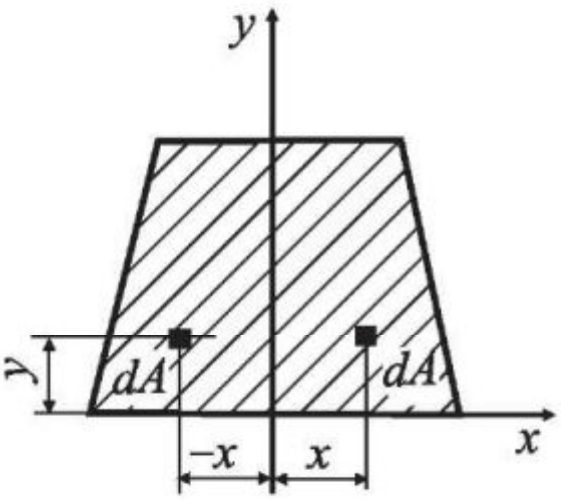


Рис. 4.3

Рассмотрим центробежный момент инерции сечения относительно осей, одна из которых является осью симметрии фигуры (рис. 4.3). Легко заметить, что для каждой положительной величины $xydA$ в первом квадранте можно найти такую же отрицательную во втором квадранте, т. е. для всей фигуры $I_{xy} = \int_A xydA = 0.$

Итак, если хотя бы одна из осей является осью симметрии фигуры, то центробежный момент инерции сечения относительно этой оси и любой ей перпендикулярной равен нулю. Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными*. Если начало координат этих осей совпадает с центром тяжести сечения, то их называют *главными центральными* осями.

Из определения моментов инерции (4.5), (4.8) очевидно, что они характеризуют расположение сечения относительно осей. Размерность моментов инерции – (ед. длины)^4, например, мм^4, см^4, м^4.

Моменты инерции простых сечений

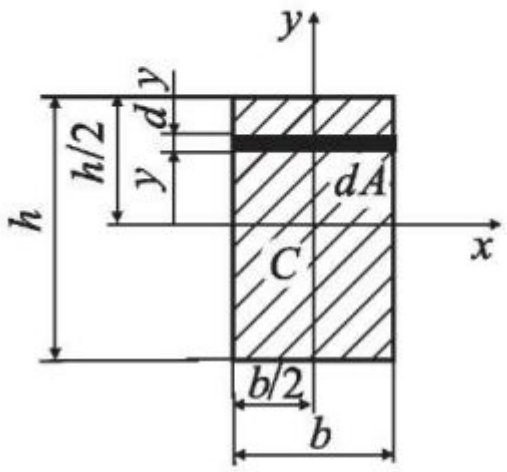


Рис. 4.4

Прямоугольник (рис. 4.4).

Вычислим моменты инерции относительно главных центральных осей x и y. Для определения момента инерции относительно оси выделим элементарную площадку в виде узкого прямоугольника, параллельного оси x:

$$dA = bdy.$$

Момент инерции находим по формуле (4.5)

$$I_x = \int_A y^2 dA = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{by^3}{3}\Bigg|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}. \qquad (4.9)$$

Очевидно, что относительно другой главной центральной оси y момент инерции определяется как

$$I_y = \frac{hb^3}{12}. \qquad (4.10)$$

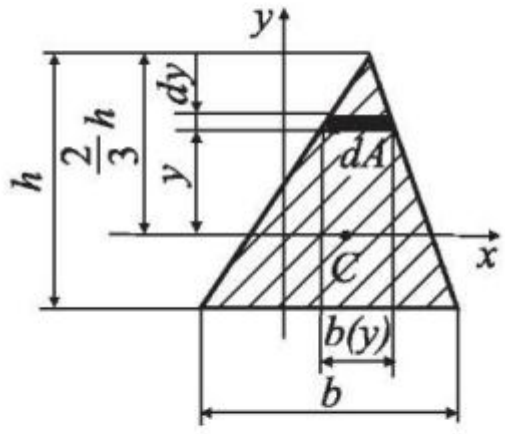


Рис. 4.5

Треугольник (рис. 4.5).

Найдем момент инерции относительно центральной оси x. Выделим элементарную площадку в виде полоски, параллельной оси x:

$$dA = b(y)dy,$$

где $b(y) = \frac{b}{h}(\frac{2}{3}h - y)$.

В соответствии с формулой (4.5) получим

$$I_x = \frac{b}{h}\int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} y^2\left(\frac{2}{3}h - y\right)dy = \frac{bh^3}{36}. \qquad (4.11)$$

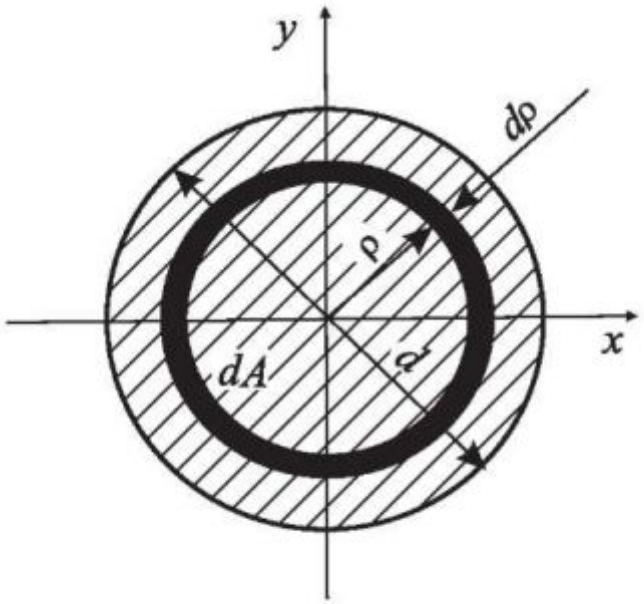


Рис. 4.6

Круг (рис. 4.6).

Вычислим полярный момент инерции круга относительно его центра. Для этого радиусами ρ и $(\rho + d\rho)$ выделим произвольно расположенное бесконечно тонкое кольцо, площадь которого найдем как площадь прямоугольника со сторонами $2\pi\rho$ и $d\rho$:

$$dA = 2\pi\rho d\rho.$$

Полярный момент инерции круга

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi\frac{\rho^4}{4}\int_0^{\frac{d}{2}} d\rho = \frac{\pi d^4}{32}. \qquad (4.12)$$

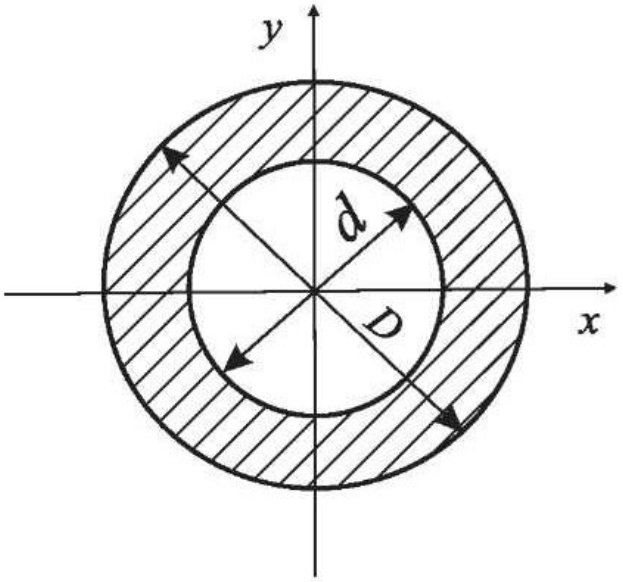


Рис. 4.7.

Моменты инерции круга относительно центральных осей легко найти на основании зависимости (4.7). В силу симметрии

$$I_x = I_y,$$

следовательно

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64}. \qquad (4.13)$$

Кольцо (рис. 4.7).

Моменты инерции кругового кольца определяются точно так же, как круга, но с учетом изменения нижнего предела интегрирования в связи с наличием отверстия:

$$I_\rho = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right). \qquad (4.14)$$

где $\alpha = \dfrac{d}{D}$ – коэффициент ослабления сечения, величина которого зависит от размера отверстия.

На основании соотношения (4.7) может быть получена формула для осевого момента инерции кольца

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right) \qquad (4.15)$$

Моменты инерции сложных сечений

При вычислении моментов инерции сложных сечений последние разбивают на отдельные простые составляющие фигуры, моменты инерции которых известны. Из основного свойства интеграла следует, что момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составляющих ее частей.

Найдем момент инерции сложного сечения относительно оси x (см. рис. 4.2). Разобьем сечение на простые фигуры. При вычислении будем последовательно суммировать произведения $y^2 dA$, охватывая площади A_1, A_2, A_3 простых фигур. Тогда

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \int_{A_3} y^2 dA.$$

Очевидно, каждый из интегралов правой части представляет собой момент инерции соответствующей простой фигуры: $I_x^{\mathrm{I}}, I_x^{\mathrm{II}}, I_x^{\mathrm{III}}$, т. е. $I_x = I_x^{\mathrm{I}} + I_x^{\mathrm{II}} + I_x^{\mathrm{III}}$.

Таким образом, для сложных сечений моменты инерции связаны следующими соотношениями:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} I_x^{(i)};\ \ I_y = \sum_{i=1}^{n} I_y^{(i)};\ \ I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} I_{xy}^{(i)}. \qquad (4.16)$$

Заметим, что отверстие в сечении следует считать фигурой с отрицательной площадью.

Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей

Пусть известны моменты инерции произвольного сечения относительно взаимно перпендикулярных осей x, y (рис. 4.8, *а*), которые определены согласно формулам (4.5) и (4.8):

$$I_x = \int_A y^2 dA;\ \ I_y = \int_A x^2 dA;\ \ I_{xy} = \int_A xy dA.$$

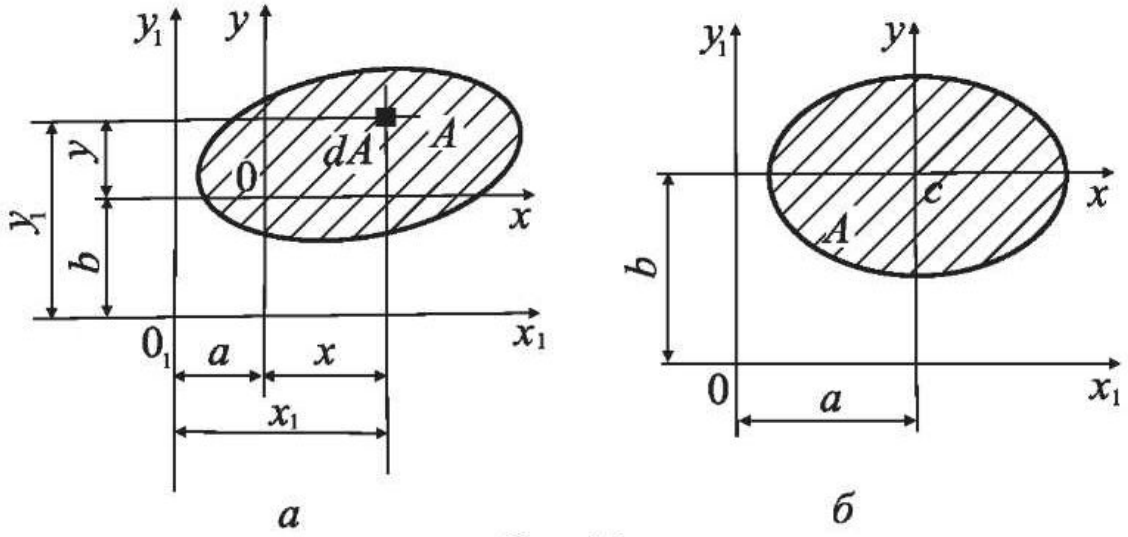


Рис. 4.8

Найдем моменты инерции относительно осей x_1, y_1, которые параллельны заданным осям x, y:

$$I_{x_1} = \int_A y_1^{\,2} dA;\ \ I_{y_1} = \int_A x_1^{\,2} dA;\ \ I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA.$$

Координаты любой точки в новой системе x_1, y_1 могут быть выражены через координаты в осях x, y:

$$x_1 = x + a, \qquad y_1 = y + b,$$

где a, b – координаты старого начала координат осей x, y в новой системе x_1, y_1. Подставляя значение y_1 в выражение для I_{x_1}, имеем

$$I_{x_1} = \int_A (y+b)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2b\int_A y dA + b^2 \int_A dA.$$

Учитывая, что

$$\int_A y^2 dA = I_x; \int_A y dA = S_x; \int_A dA = A,$$

окончательно получаем

$$I_{x_1} = I_x + 2bS_x + b^2 A. \qquad (4.17)$$

Аналогично может быть найдено выражение для момента инерции относительно оси y_1:

$$I_{y_1} = I_y + 2aS_y + a^2 A. \qquad (4.18)$$

Центробежный момент инерции относительно осей x_1, y_1

$$I_{x_1 y_1} = \int_A (x+a)(y+b)dA = \int_A xy dA + a\int_A y dA + b\int_A x dA + ab\int_A dA$$

или

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + aS_x + bS_y + abA. \qquad (4.19)$$

Если исходные оси являются центральными (см. рис. 4.8, *б*), то формулы при параллельном переносе осей упрощаются, так как статические моменты S_x, S_y обращаются в нуль:

$$I_{x_1} = I_x + b^2 A;$$

$$I_{y_1} = I_y + a^2 A;$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA. \qquad (4.20)$$

Отметим, что в последнюю из этих формул координаты a, b следует подставлять с учетом их знака (в системе координат x_1, y_1).

Следует подчеркнуть, что относительно любой нецентральной оси осевые моменты инерции больше, чем относительно параллельной ей центральной.

Зависимость между моментами инерции при повороте координатных осей

Будем считать известными моменты инерции сечения I_x, I_y, I_{xy}. Определим моменты инерции $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1y_1}$ относительно осей x_1, y_1 (рис. 4.9), повернутых на угол α (напомним, что в правой системе координат $\alpha > 0$ при повороте против хода часовой стрелки).

Установим связь между координатами x_1, y_1 и x, y:

$x_1 = OD = OA + AD = OA + BC$ или $x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha$.

Аналогично найдем y_1:

$y_1 = CE - DC$, $\qquad y_1 = y\cos\alpha - x\sin\alpha$.

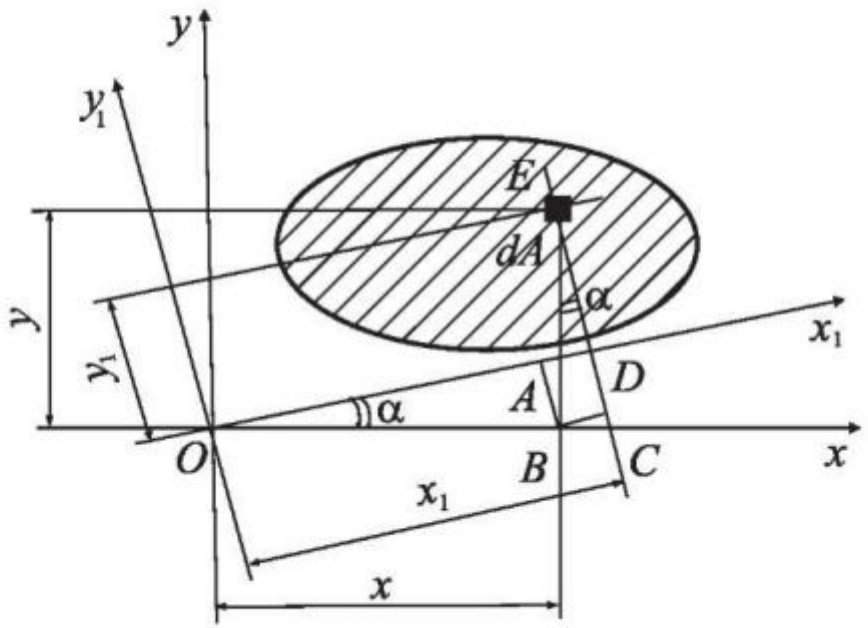


Рис. 4.9

По определению $I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA$, после подстановки y_1 имеем

$$I_{x_1} = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA = \cos^2\alpha \int_A y^2 dA -$$

$$- 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A xy dA + \sin^2\alpha \int_A x^2 dA.$$

Учитывая, что $I_x = \int_A y^2 dA$, $I_y = \int_A x^2 dA$, $I_{xy} = \int_A xy dA$,

получаем

$$I_{x_1} = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

Используя известные тригонометрические соотношения

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \text{ и } \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

приведем выражение I_{x_1} к окончательному виду

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha. \tag{4.21}$$

Путем аналогичных преобразований получим выражение для I_{y_1} и $I_{x_1 y_1}$:

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha; \tag{4.22}$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha. \tag{4.23}$$

Складывая почленно выражения (4.21) и (4.22), получаем

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_\rho = \text{const},$$

т. е. при повороте осей сумма осевых моментов инерции не изменяется. Следовательно, если один момент инерции

возрастает, то другой убывает; один достигает максимального значения, другой – минимального.

Исследуем функцию (4.21) на экстремум, чтобы установить оси, относительно которых осевые моменты инерции сечения экстремальны:

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = 0;$$

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha\right) = -2I_{x_1y_1}.$$

Таким образом, условием экстремальности осевых моментов инерции является равенство нулю центробежного момента инерции относительно этих осей, т. е. осевые моменты инерции имеют максимальное и минимальное значения относительно главных осей, которым в случае сложных сечений дают свои обозначения, например, u и v.

Рассмотрим частный случай задачи, в которой известны моменты инерции относительно главных осей I_u, I_v $(I_{uv} = 0)$, а требуется определить осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно осей x, y, повернутых от главных осей u,v на угол α. Нужные формулы легко получить из соотношений (4.21), (4.22), (4.23):

$$I_x = \frac{I_u + I_v}{2} + \frac{I_u - I_v}{2}\cos 2\alpha,$$

$$I_y = \frac{I_u + I_v}{2} - \frac{I_u - I_v}{2}\cos 2\alpha,$$

$$I_{xy} = \frac{I_u - I_v}{2}\sin 2\alpha. \qquad (4.24)$$

Определение направления главных осей. Главные моменты инерции

По определению, центробежный момент инерции относительно главных осей u и v равен нулю, т. е. $I_{uv} = 0$.

Приравнивая нулю правую часть выражения (4.23) при $\alpha = \alpha_0$, получим

$$\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha_0 + I_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0.$$

Это уравнение дает формулу для нахождения угла α_0, определяющего положение главных осей u,v несимметричного сечения (рис. 4.10), для которого известны моменты инерции I_x, I_y и I_{xy}:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

или

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}\right). \qquad (4.25)$$

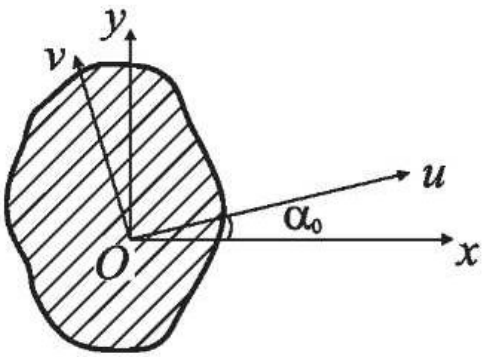


Рис. 4.10

Положительное значение угла $\alpha_0 \le \frac{\pi}{4}$ откладываем от оси x против хода часовой стрелки и получаем положение главной оси u, ось v перпендикулярна ей. Если $\alpha_0 < 0$, то откладываем его по ходу часовой стрелки. Это правило знаков справедливо для правой системы координатных осей. Если расчеты моментов инерции выполняются в левой системе координат, то правило знаков для угла α_0 изменяется на обратное.

Для вычисления главных моментов инерции следует подставить в формулы (4.21) и (4.22) значение $\alpha = \alpha_0$:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha_0 - I_{xy}\sin 2\alpha_0; \qquad (4.26)$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha_0 + I_{xy}\sin 2\alpha_0. \qquad (4.27)$$

Можно также получить формулы для вычисления главных моментов инерции, не содержащие тригонометрических функций. Для этого используем формулы (4.26), (4.27) и представление (4.23) для центробежного момента инерции относительно главных осей u, v $(I_{uv} = 0)$:

$$I_u - \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha_0 - I_{xy}\sin 2\alpha_0,$$

$$\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha_0 + I_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0.$$

Возведем в квадрат правые и левые части этих выражений, сложим их и после простых преобразований получим весьма удобную для практических расчетов формулу

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \qquad (4.28)$$

Сумма даст значение наибольшего главного момента инерции $I_{\max}$, разность – наименьшего $I_{\min}$.

Для ответа на вопрос, относительно какой из осей (u или v) момент инерции максимален, надо руководствоваться следующим правилом: если $I_x > I_y$, то $I_{\max} = I_u$, $I_{\min} = I_v$; если $I_x < I_y$, то $I_{\max} = I_v$, $I_{\min} = I_u$. В большинстве случаев правильный ответ может быть дан исходя из формы сечения и его расположения относительно главных осей.

Понятие о радиусе инерции сечения

Момент инерции сечения относительно какой-либо оси можно представить в виде произведения площади всего

сечения на квадрат некоторого отрезка, называемого *радиусом инерции* сечения, например:

$$I_x = Ai_x^2,$$

где i_x – радиус инерции относительно оси x.

На основании приведенного определения радиусы инерции сечения относительно осей x и y могут быть выражены как

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \tag{4.29}$$

Главным центральным осям инерции соответствуют *главные радиусы инерции*

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}, \; i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \tag{4.30}$$

Например, для прямоугольника, изображенного на рис. 4.4, главные радиусы инерции

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}.$$

Размерность радиуса инерции – (ед. длины), например, мм, см, м.

Радиусы инерции сечения являются еще более явственной характеристикой формы сечения, чем моменты инерции, так как в них исключено влияние площади. В практических расчетах обычно применение находят главные радиусы инерции.

Моменты сопротивления сечения

Полярным моментом сопротивления сечения называется отношение полярного момента инерции к расстоянию от полюса до наиболее удаленной точки сечения

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{max}}. \qquad (4.31)$$

Осевым моментом сопротивления сечения называется отношение момента инерции относительно данной оси к расстоянию до наиболее удаленной точки сечения

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}; \qquad W_y = \frac{I_y}{x_{max}}. \qquad (4.32)$$

Практический интерес представляют моменты сопротивления относительно главных осей, являющихся осями симметрии. Размерность момента сопротивления – (ед. длины)^3, например, мм^3, см^3, м^3.

Найдем моменты сопротивления для некоторых фигур.

Прямоугольник

$I_x = \frac{bh^3}{12}$, $y_{max} = \frac{h}{2}$, следовательно,

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}.$$

$I_y = \frac{hb^3}{12}$, $y_{max} = \frac{h}{2}$, следовательно,

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}} = \frac{hb^3}{12} \cdot \frac{2}{b} = \frac{hb^2}{6}.$$

Круг

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}, \quad \rho_{\max} = \frac{d}{2}, \text{ следовательно,}$$

$$W_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}, \quad x_{\max} = y_{\max} = \frac{d}{2}, \text{ следовательно}$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Кольцо

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4), \quad \rho_{max} = \frac{D}{2}, \text{ следовательно}$$

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4).$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4), \quad x_{max} = y_{max} = \frac{D}{2}, \text{ следовательно}$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4).$$

Полярные моменты сопротивления используются в расчетах на прочность при кручении, осевые – при изгибе. Заметим, что при вычислении моментов сопротивления сложных сечений их нельзя ни складывать, ни вычитать, так как моменты сопротивления не являются интегральными величинами (как статические моменты или моменты инерции); в таких случаях расчет выполняется в соответствии с формулами (4.31) и (4.32).

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Расчет на срез

С деформацией сдвига мы встречаемся, когда из шести внутренних силовых факторов отлична от нуля только поперечная сила Q_y (или Q_x). С достаточной степенью приближения деформация сдвига или среза практически может быть получена в случае, когда на стержень с противоположных сторон на весьма близком расстоянии друг от друга действуют две равные силы, перпендикулярные к его оси и направленные в противоположные стороны. Примером может служить резка ножницами полосы, прутьев и т. п. (рис. 5.1, *а,б*).

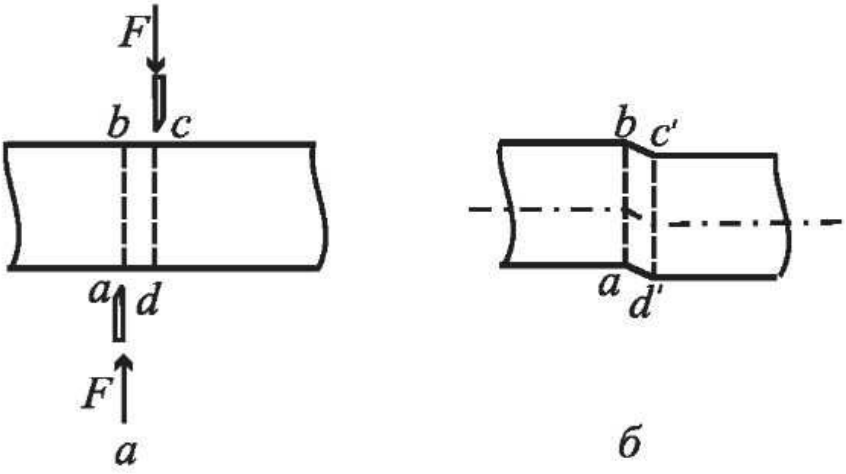


Рис. 5.1

Получим формулу для напряжений в поперечном сечении стержня, представленного на рис. 5.1. Пусть известна внешняя нагрузка F. Используя метод сечений, находим, что на участке bc поперечная сила $Q_y = F$.

Опуская в дальнейшем индекс при Q, запишем интегральную связь (1.1) между поперечной силой и напряжениями, действующими в рассмотренном сечении, в следующем виде:

$$\int_A \tau dA = Q. \qquad (5.1)$$

Принимая касательные напряжения τ равномерно распределёнными по площади поперечного сечения A (рис. 5.2), на основании выражения (5.1) имеем $Q = \tau A$, откуда

$$\tau = \frac{Q}{A}. \qquad (5.2)$$

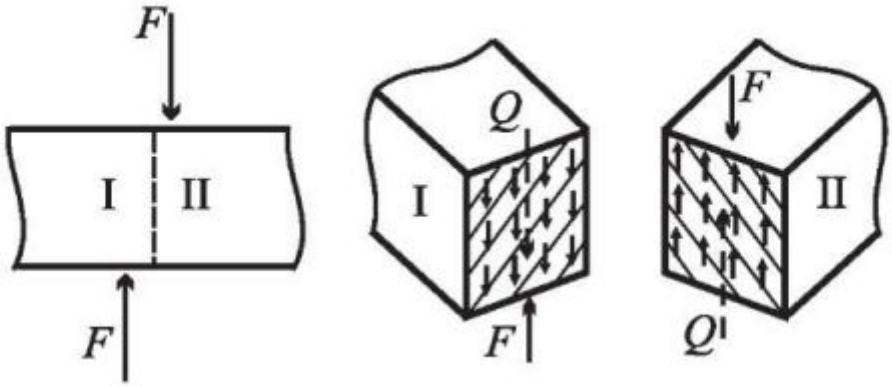


Рис. 5.2

Допущение о равномерности касательных напряжений по сечению весьма условно, однако оно широко используется в инженерной практике при расчёте болтов, шпонок, заклёпочных и сварных соединений и других деталей.

Условие прочности на сдвиг (срез) по методу допускаемых напряжений записывается в виде

$$\tau = \frac{Q}{A} \le [\tau], \qquad (5.3)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение, величина которого зависит от свойств материала. Отметим, что для пластичных материалов

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0{,}6[\sigma].$$

Понятие о чистом сдвиге

Выделим из стержня, представленного на рис. 5.2, элементарный параллелепипед (элемент) в окрестности данной точки поперечного сечения (рис. 5.3, *а*).

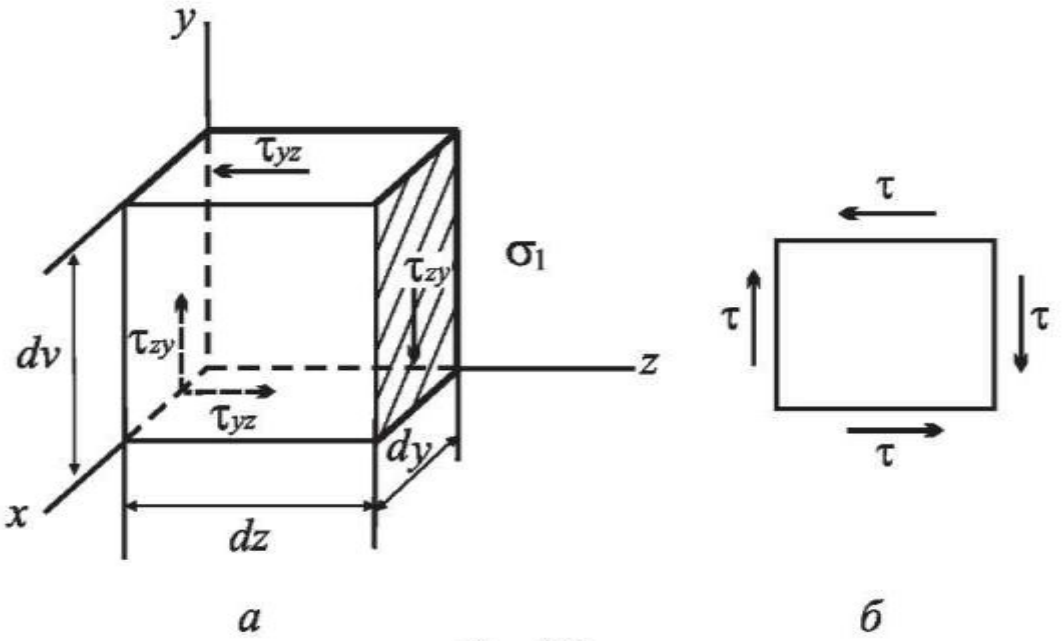


Рис. 5.3

Компоненту касательных напряжений, возникающих на боковых гранях элемента (в поперечных сечениях), обозначим τ_{zy}. Очевидно, что для равновесия элемента на горизонтальных гранях (в продольных сечениях) должны быть указаны компоненты напряжений τ_{yz}. Найдём соотношение этих напряжений из условия равновесия элемента в виде

$$\Sigma m_x = 0; \qquad \left(\tau_{yz} dxdz\right)dy - \left(\tau_{zy} dxdy\right)dz = 0 .$$

Сократив это выражение на произведение *dxdydz*, получим равенство

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} , \tag{5.4}$$

называемое ***законом парности касательных напряжений***: *на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и направлены так, что стремятся вращать элемент в противоположные стороны.*

Подчеркнём, что речь идёт о компонентах напряжений, перпендикулярных линии пересечения ортогональных площадок.

Таким образом, в плоскости на гранях прямоугольного элемента действуют касательные напряжения $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau$ (см. рис. 5.3, *б*).

Напряжённое состояние, при котором на гранях выделенного элемента действуют только касательные напряжения, называют *чистым сдвигом.*

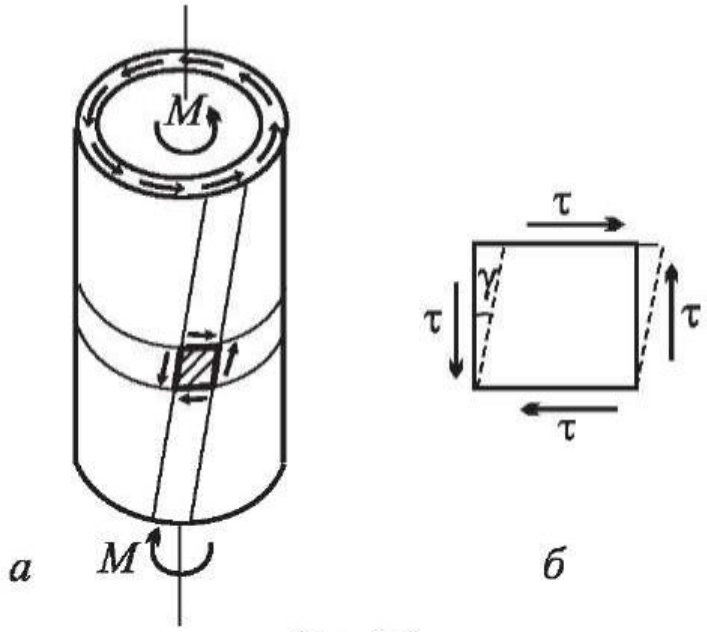


Рис. 5.4

Типичным примером тела, во всех точках которого имеет место чистый сдвиг, является скручиваемая тонкостенная труба, показанная на рис. 5.4, *а*. Прямоугольные до деформации элементы материала стенок трубы превращаются в параллелограммы за счёт изменения первоначально прямого угла на малый угол γ (рис. 5.4, *б*).

Закон Гука при чистом сдвиге

Рассмотрим деформацию элемента, ограниченного площадками чистого сдвига. Для наглядности закрепим его по одной из граней (рис. 5.5). Под действием касательных

напряжений верхняя грань сдвигается параллельно нижней, превращая прямоугольный элемент в параллелограмм. При этом высота элемента остаётся неизменной, а первоначально прямые углы изменяются на малый угол γ, называемый *углом сдвига* или *относительным сдвигом*.

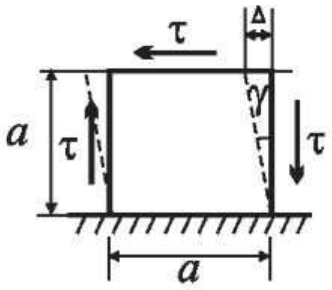


Рис. 5.5

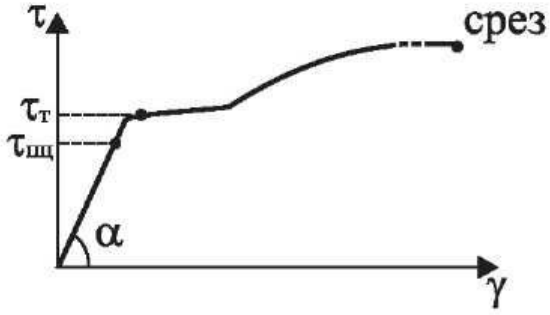


Рис. 5.6

Величину смещения грани обозначают Δ и называют *абсолютным сдвигом.*

Учитывая малость угла, можно принять $\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma$, тогда относительный сдвиг

$$\gamma = \frac{\Delta}{a}. \qquad (5.5)$$

Экспериментальное изучение деформации чистого сдвига обычно проводят путём кручения трубчатых образцов, получая зависимость между напряжением τ и углом сдвига γ. Типичный вид диаграммы сдвига для пластичной стали показан на рис. 5.6. До *предела пропорциональности при сдвиге* $\tau_{пц}$ справедлива линейная зависимость

$$\tau = G\gamma, \qquad (5.6)$$

называемая ***законом Гука при сдвиге***. Здесь G – коэффициент пропорциональности, который называется *модулем сдвига* материала. Из выражения (5.6) следует, что модуль G имеет размерность напряжений (Па), так как угол сдвига γ – величина безразмерная. Величина модуля сдвига определяется экспериментально. Можно показать, что для изотропного

материала три упругие постоянные E, G и μ связаны между собой соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (5.7)$$

Например, для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}25$ найдём, что $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа. Зависимость (5.7) подтверждается экспериментально.

Напряжение $\tau_т$ является *пределом текучести при сдвиге*, т.е. касательным напряжением, при котором угол сдвига возрастает при постоянном напряжении. Характерно, что для многих материалов предел текучести при сдвиге $\tau_т$ связан с пределом текучести при растяжении $\sigma_т$ соотношением

$$\tau_т \approx \frac{\sigma_т}{\sqrt{3}}.$$

Запишем выражение для абсолютного сдвига Δ, подставив в формулу закона Гука (5.6) полученные ранее соотношения (5.2) и (5.5):

$$\tau = G\gamma,$$

или

$$\frac{Q}{A} = G\frac{\Delta}{a},$$

откуда

$$\Delta = \frac{Qa}{GA}, \qquad (5.8)$$

где произведение GA называют *жесткостью сечения при сдвиге*.

Крутящие моменты и их эпюры

Кручение – это такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – крутящий момент, обозначаемый $M_к$ (или M_z). Стержень, работающий на кручение, называют *валом*.

Деформация кручения возникает при нагружении стержня парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси. Моменты этих пар будем называть *скручивающими* и обозначать буквой *M*.

На рис. 5.7, *а* представлен вал, работающий на кручение под действием приложенных к нему скручивающих моментов. При этом на рис. 5.7, *б* внешний момент условно изображён в виде двух кружков: кружок с точкой обозначает силу, направленную на наблюдателя, а кружок с крестом – силу, направленную от наблюдателя.

Во всех случаях будем считать, что алгебраическая сумма скручивающих моментов равна нулю, т. е. вал находится в равновесии.

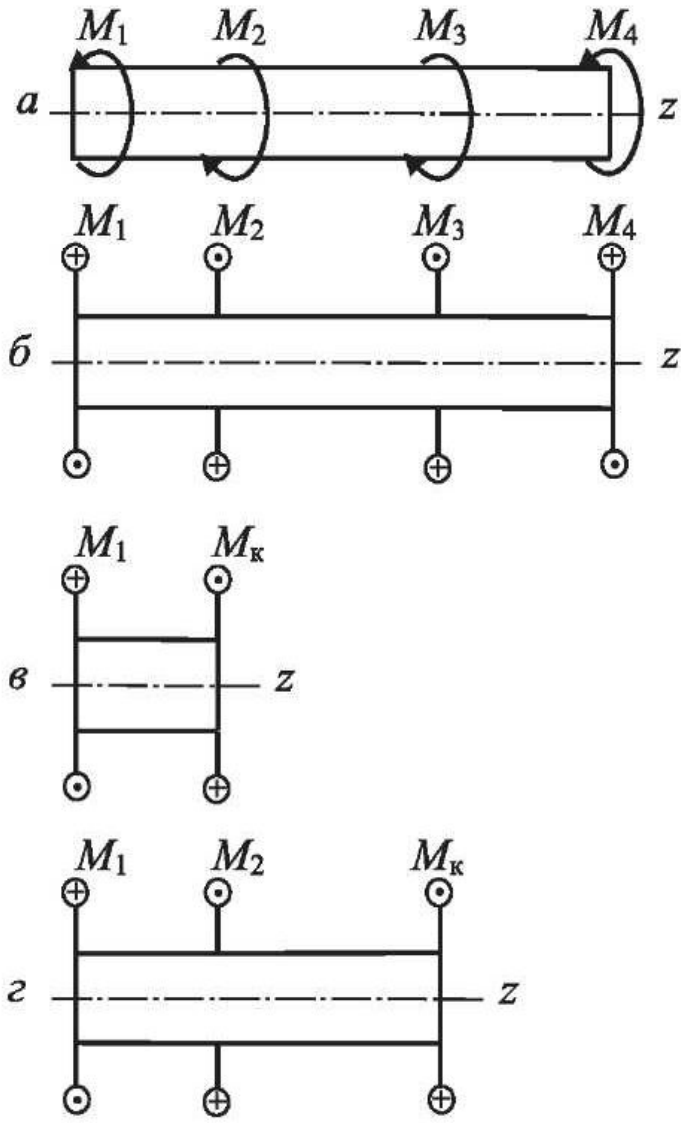


Рис. 5.7

Условимся о следующем правиле знаков: крутящий момент считается положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали n он направлен против хода часовой стрелки (рис. 5.8). Соответствующий внешний скручивающий момент направлен по ходу часовой стрелки.

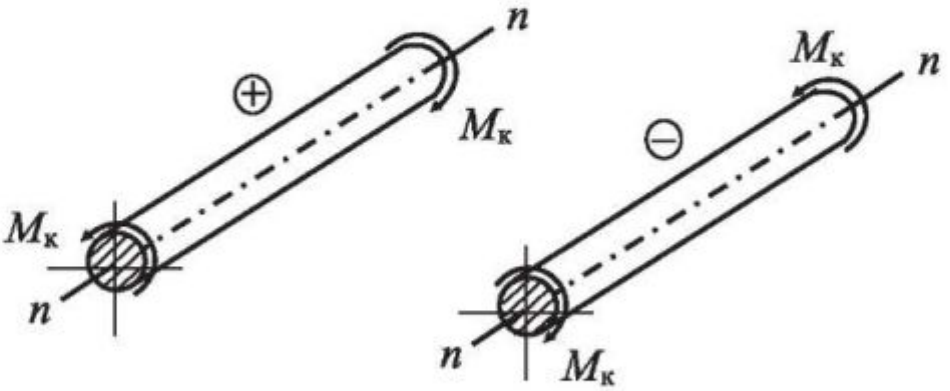
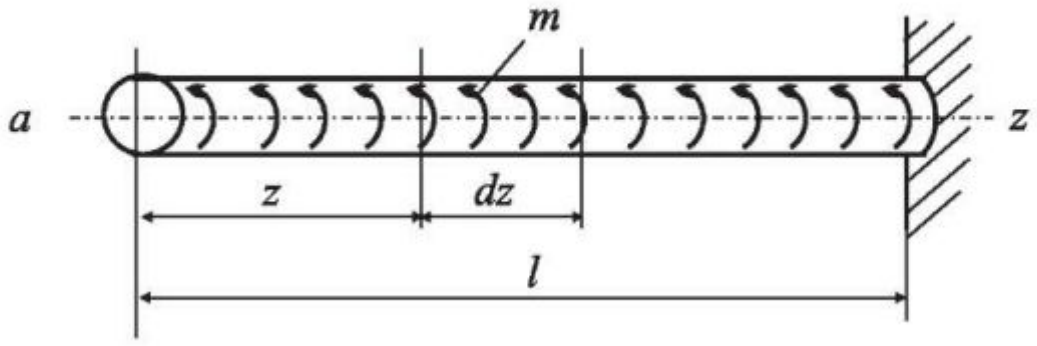


Рис. 5.8

Применяя метод сечений и рассматривая равновесие отсечённой части (см. рис. 5.7, *в, г*), приходим к выводу, что крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме скручивающих моментов, приложенных к отсечённой части:

$$M_к = \sum_{отс.ч.} M_i . \qquad (5.9)$$

Помимо сосредоточенных скручивающих моментов на вал может действовать и распределённая по некоторому закону моментная нагрузка интенсивностью $m(z)$.



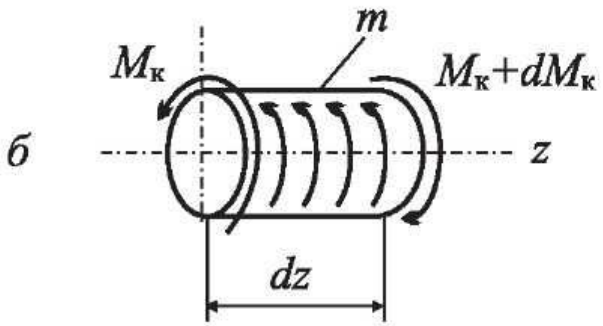


Рис. 5.9

Установим дифференциальную зависимость между интенсивностью m и крутящим моментом $M_к$. Для этого рассмотрим стержень с моментной нагрузкой m (рис. 5.9, *а*), из которого вырежем элемент длиной dz (рис. 5.9, *б*)

На него будут действовать моментная нагрузка m = const, которую можно считать равномерно распределённой ввиду малости dz, и уравновешивающие положительные крутящие моменты (в левом сечении – $M_к$, в правом – $M_к+dM_к$, где $dM_к$ – приращение крутящего момента). Составим уравнение равновесия для элемента

$$\Sigma m_z = 0: \quad M_к + mdz - (M_к + dM_к) = 0,$$

откуда

$$\frac{dM_к}{dz} = m. \qquad (5.10)$$

График, показывающий закон изменения крутящих моментов по длине вала, называется *эпюрой крутящих моментов*. Положительные значения на эпюре будем откладывать вверх от горизонтальной базисной линии, а отрицательные значения – вниз. Построение эпюры крутящих моментов принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил.

Пример. Построить эпюру крутящих моментов для вала, изображённого на рис. 5.10, *а*.

Решение. Разбиваем вал на три участка: I, II, III. Используя метод сечений, на участке I мысленно проводим в произвольном месте сечение, отбрасываем правую часть вала и рассматриваем равновесие отсечённой левой части с приложенным в месте сечения положительным крутящим

моментом $M_к$ и внешней нагрузкой. Тогда в соответствии с принятым правилом знаков для участка I получаем:

I. $0 \le z_1 \le 2a$;

$$M_к = -ma + mz_1;$$
$$M_к(0) = -ma,$$
$$M_к(2a) = ma.$$

Проведя произвольные сечения на остальных участках вала, получим соответственно:

II. $a \le z_2 \le 4a$ (отбрасываем левую часть);

$$M_к = -2ma + 3ma = ma\ .$$

III. $0 \le z_3 \le a$ (отбрасываем левую часть);

$$M_к = -2ma\ .$$

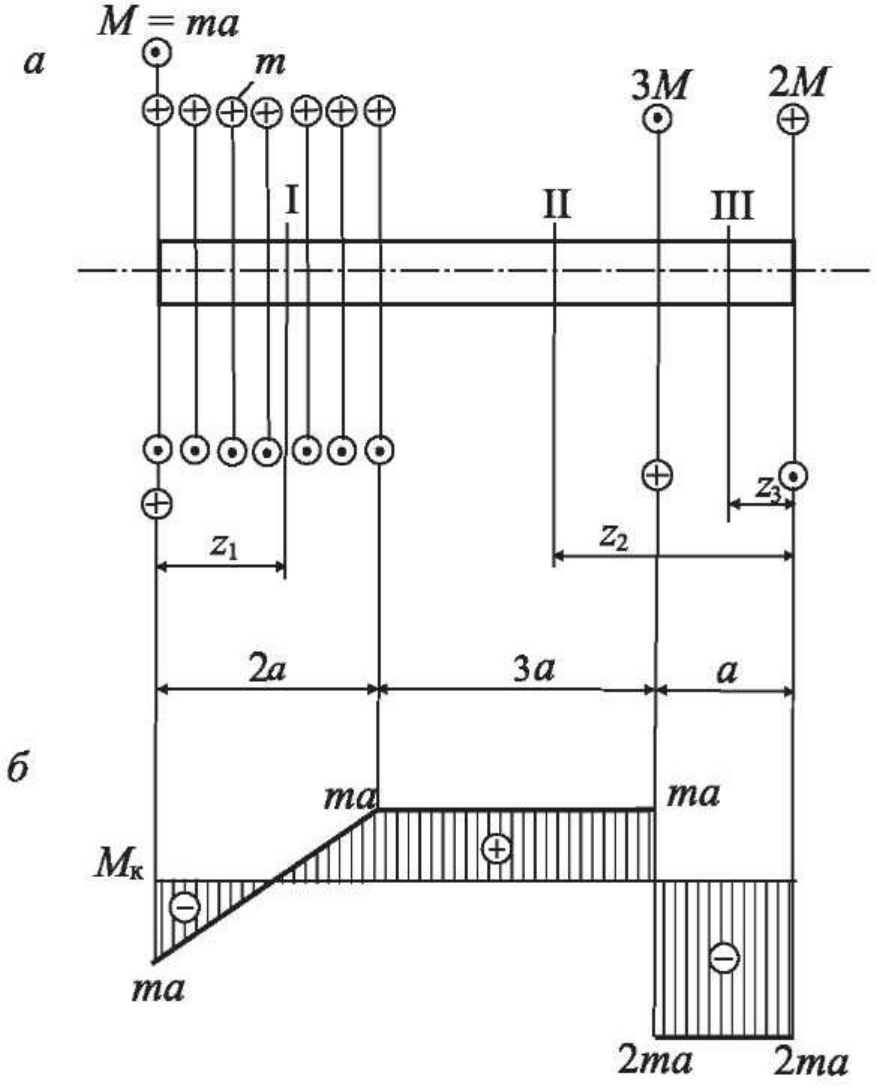


Рис. 5.10

По полученным данным строим эпюру $M_к$ (рис. 5.10, *б*). На участке I величина крутящего момента линейно зависит от координаты сечения, так как действует равномерно распределённая моментная нагрузка интенсивностью m. На участках I и II крутящий момент не зависит от координаты z, поэтому эпюра имеет вид прямоугольников. В тех сечениях, где приложены внешние сосредоточенные моменты, получаются скачки на величину этих моментов.

Напряжения и деформации при кручении вала круглого поперечного сечения

Теория кручения вала круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения основана на следующих допущениях, подтверждаемых экспериментально:

1. Поперечные сечения вала, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси при деформации (гипотеза Бернулли).

2. Радиусы, проведённые в сечении, остаются прямыми и поворачиваются на один и тот же угол.

3. Расстояния между поперечными сечениями не изменяются, т. е. продольные волокна не удлиняются и не укорачиваются.

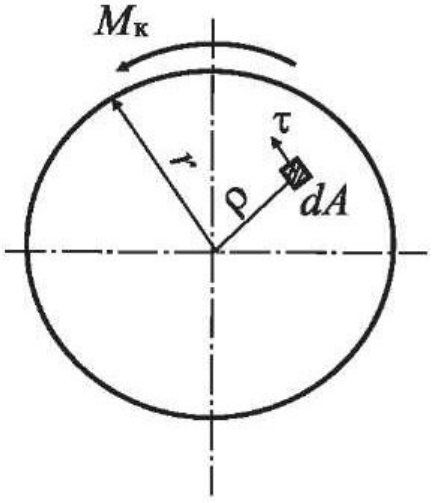


Рис. 5.11

Согласно принятым допущениям кручение представляет деформацию сдвига материала, заключённого между соседними поперечными сечениями, вызванную относительным поворотом этих сечений вокруг оси z. Вследствие этого в поперечных сечениях действуют только касательные напряжения τ, направленные перпендикулярно соответствующему радиусу (рис. 5.11).

Крутящий момент в сечении, являющийся результирующим моментом внутренних касательных сил, действующих

на элементарных площадках dA, расположенных на расстоянии ρ от центра сечения, можно выразить уравнением

$$M_к = \int_A \rho\tau dA . \qquad (5.11)$$

Характер распределения напряжений по сечению установим из геометрической картины деформации вала. Для этого из исследуемого вала (рис. 5.12) выделим элементарный цилиндр двумя бесконечно близкими сечениями I и II произвольным радиусом ρ. Пусть φ – *угол закручивания* сечения I относительно заделки, $\varphi+d\varphi$ – сечения II. Следовательно, угол закручивания участка вала длиной dz равен $d\varphi$.

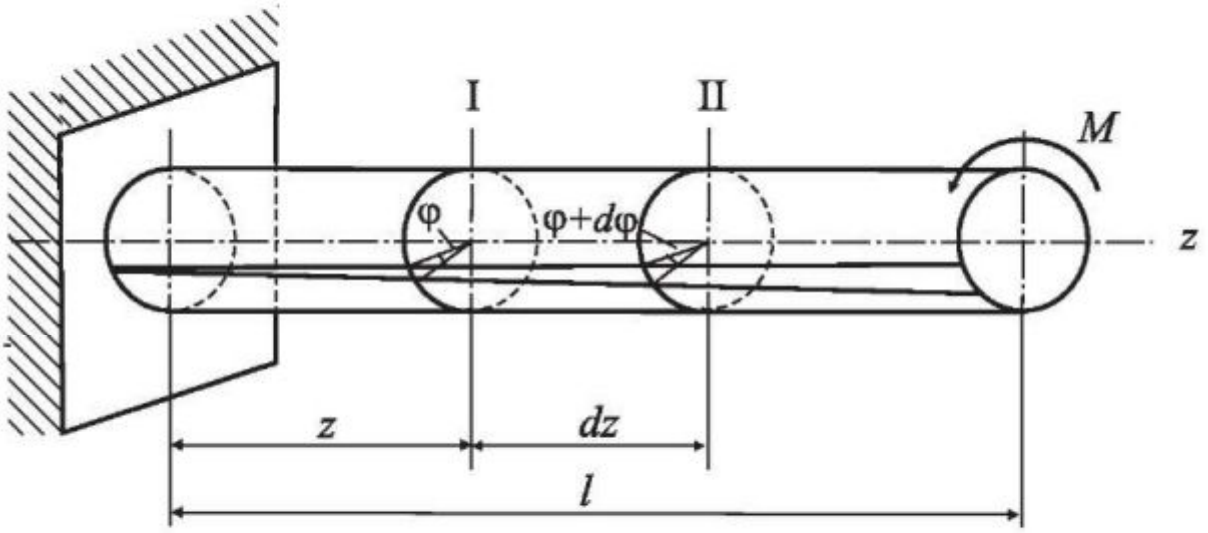


Рис. 5.12

Используя указанные допущения, изобразим деформацию элементарного цилиндра, условно закрепив левое сечение (рис.5.13).

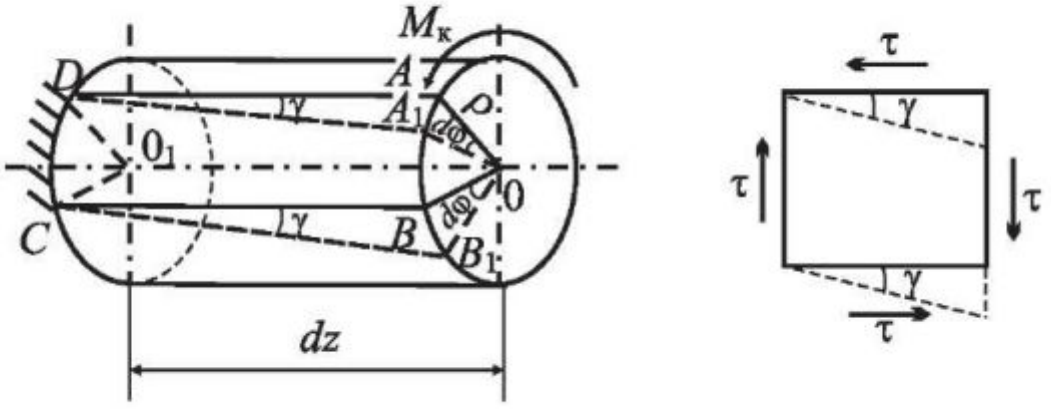


Рис. 5.13

Рассмотрим деформацию прямоугольного элемента $ABCD$ бесконечно малой толщины. Радиусы OA и OB, оставаясь прямыми, повернутся на угол $d\varphi$ и займут положение соответственно OA_1 и OB_1. При этом образующие AD и BC перейдут в новое положение A_1D и B_1C, составив с первоначальным положением угол γ. Так как длина этих отрезков практически неизменна, то деформация элемента состоит в изменении первоначально прямых углов на величину угла γ. Таким образом, рассмотренный элемент находится в условиях чистого сдвига и на его гранях действуют касательные напряжения. Здесь γ является *углом сдвига* и

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{AA_1}{AD} \approx \gamma \ .$$

Учитывая, что $AA_1 = \rho d\varphi$, $AD = dz$, получаем

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz} . \qquad (5.12)$$

Величина $\theta = \dfrac{d\varphi}{dz}$ называется относительным (погонным) углом закручивания и имеет размерность рад/м. Учитывая это, формулу (5.12) можно записать так:

$$\gamma = \theta\rho . \qquad (5.13)$$

По закону Гука, при чистом сдвиге получим

$$\tau = G\gamma = G\theta\rho , \qquad (5.14)$$

где G и θ – константы для всех точек сечения и, следовательно, касательные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону прямо пропорционально расстоянию ρ точек от центра сечения. Покажем эпюру касательных напряжений в сечении (рис. 5.14). Во всех точках окружности радиуса ρ напряжение τ = const и направлено по касательной к окружности. Очевидно, максимальные напряжения будут у поверхности вала при $\rho = r$.

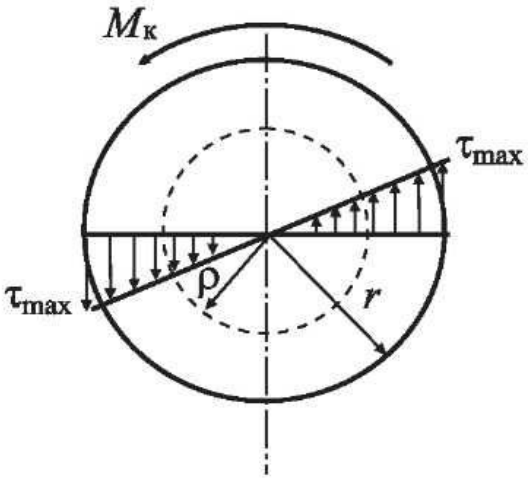


Рис. 5.14

Таким образом, выражение (5.14) можно переписать в виде

$$\tau_{\rho=r} = \tau_{max} = G\theta r\,.$$

Подставляя выражение (5.14) для касательного напряжения в уравнение (5.11), будем иметь

$$M_к = G\theta\int_A \rho^2 dA = G\theta I_\rho\,.$$

Отсюда получим формулу для относительного угла закручивания круглого вала

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_к}{GI_\rho}, \qquad (5.15)$$

где произведение GI_ρ называется *жёсткостью поперечного сечения при кручении*;

I_ρ – полярный момент инерции сечения, который является геометрической характеристикой жёсткости круглого вала.

Для определения взаимного угла закручивания двух сечений, расположенных на расстоянии l, воспользуемся соотношением (5.15), из которого, интегрируя обе части равенства, найдём

$$\varphi = \int_0^\ell \frac{M_к}{GI_\rho} dz. \qquad (5.16)$$

В частном случае при $M_к$ = const, GI_ρ = const получим

$$\varphi = \theta l = \frac{M_к l}{GI_\rho}. \qquad (5.17)$$

Для определения касательного напряжения в любой точке сечения достаточно в формулу (5.14) подставить выражение для θ по формуле (5.15). Тогда

$$\tau = \frac{M_к}{I_\rho}\rho\,. \qquad (5.18)$$

Максимальное касательное напряжение, действующее на периферии сечения вала,

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{I_\rho}\rho_{max} = \frac{M_к}{W_\rho}, \qquad (5.19)$$

где $W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{max}}$ – полярный момент сопротивления сечения, который является геометрической характеристикой прочности круглого вала при кручении.

Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Обеспечение прочности при кручении валов круглого сечения производится по методу допускаемых напряжений на основе условия

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_\rho} \le [\tau] \ , \qquad (5.20)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение материала. Для пластичных материалов обычно принимают $|\tau| \approx 0{,}6|\sigma|$.

Помимо условий прочности должны соблюдаться и условия жёсткости, которые формулируются в отношении относительного угла закручивания в виде

$$\theta_{max} = \frac{M_к}{GI_\rho} \le [\theta], \qquad (5.21)$$

где $|0|$ – допускаемый относительный угол закручивания, величина которого задаётся техническими условиями в зависимости от назначения вала.

При проектировочном расчёте из двух диаметров вала, полученных из условия прочности (5.20) и условия жёсткости (5.21), принимается большее значение.

Сравнительная оценка валов круглого сплошного и кольцевого поперечных сечений

Из эпюры касательных напряжений (см. рис.5.14) видно, что область вала вблизи его оси нагружена весьма незначительно. При равных площадях сечения, а следовательно, при одинаковой массе валов кольцевое сечение обладает большими полярными моментами инерции I_ρ и сопротивления W_ρ, чем сплошное, т. е. вал кольцевого сечения оказывается жёстче и прочнее. Наконец, при равной прочности или равной жёсткости, т. е. при одинаковых значениях W_ρ и I_ρ, полый вал получается легче сплошного.

Кручение валов некруглого сечения

В инженерной практике довольно часто кручению подвергаются стержни, имеющие не круглое, а прямоугольное, треугольное, эллиптическое и другие сечения. В этих случаях гипотеза плоских сечений неприменима, так как сечения искривляются (депланируют). Коробление поперечных сечений, получающееся в результате того, что отдельные их точки при деформации смещаются вдоль оси стержня, называется *депланацией*.

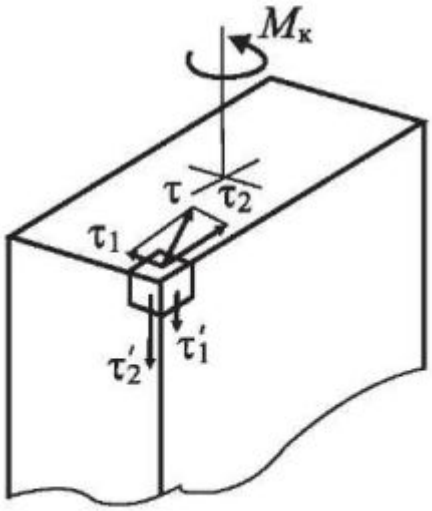


Рис. 5.15

Это обстоятельство не позволяет применить методы сопротивления материалов для решения задачи о напряжениях и перемещениях при кручении некруглых валов. Для целого ряда сечений эта задача решена методами теории упругости. Приведём здесь некоторые окончательные результаты. Отметим, что в валах произвольного сечения, как и в круглых, касательные напряжения при кручении направлены по касательной

к контуру. Если поперечное сечение имеет внешние углы, то в них касательные напряжения отсутствуют. Действительно, раскладывая напряжение τ вблизи угла, как показано на рис. 5.15, на две составляющие по нормалям к сторонам угла, получаем напряжения τ_1 и τ_2. По закону парности на свободной поверхности вала должны возникнуть касательные напряжения $\tau'_1 = \tau_1$ и $\tau'_2 = \tau_2$. Но внешняя поверхность свободна от нагрузки. Таким образом, $\tau'_1 = \tau'_2 = 0$. Следовательно, вблизи внешнего угла касательные напряжения в поперечном сечении обращаются в нуль.

Наибольшие касательные напряжения, относительные и полные углы закручивания определяют по формулам

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}; \tag{5.22}$$

$$\theta = \frac{M_к}{GI_к}; \tag{5.23}$$

$$\varphi = \frac{M_к l}{GI_к}. \tag{5.24}$$

Здесь $I_к$ и $W_к$ – некоторые геометрические характеристики, которые условно называют моментом инерции и моментом сопротивления при кручении.

Наиболее часто встречаются валы прямоугольного сечения. В этом случае эпюры касательных напряжений имеют вид, показанный на рис. 5.16.

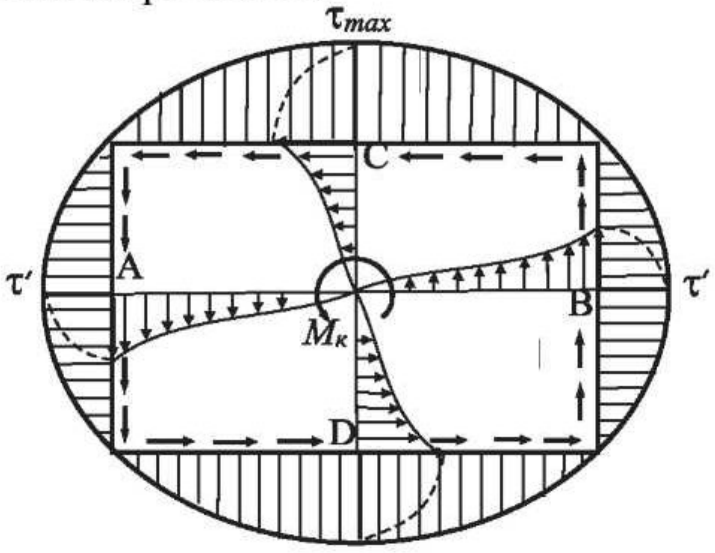


Рис. 5.16

Наибольшие напряжения возникают у поверхности, посредине длинных сторон прямоугольника (в точках C и D), и определяются по формуле (5.22), где

$$W_к = \alpha h b^2 . \qquad (5.25)$$

Здесь h – длинная сторона прямоугольника;
b – короткая его сторона.

Напряжения, возникающие у поверхности посредине коротких сторон (в точках A и B), меньше и выражаются через τ_{max} следующим образом:

$$\tau' = \gamma \tau_{max} . \qquad (5.26)$$

Для определения углов закручивания в формулах (5.23) и (5.24) принимают

$$I_к = \beta h b^3 . \qquad (5.27)$$

Коэффициенты α, β и γ, зависящие от отношения h/b, приведены в справочных таблицах [4, 8].

Отметим, что прочность и жёсткость прямоугольного вала значительно ниже, чем круглого с равновеликой площадью сечения. Эта разница возрастает с увеличением отношения сторон прямоугольника.

ИЗГИБ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

Общие замечания

Изгиб – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты. Наиболее простой вариант, когда возникает один изгибающий момент, а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю, называется чистым изгибом. В большинстве случаев вместе с изгибающим моментом в сечении стержня действует поперечная сила – такой вид изгиба называют поперечным. Напомним, что прямолинейные стержни, подвергаемые изгибу, в курсе «Сопротивление материалов» называются балками. Балкой может быть назван и пролёт моста, и ось железнодорожного вагона, и вал редуктора, и зуб шестерни – этот термин описывает не столько назначение конструкции (например, строительная балка), сколько её расчётную схему.

В дальнейшем будем предполагать, что балка имеет плоскость симметрии, совпадающую с плоскостью чертежа, и в этой же плоскости лежат действующие на балку нагрузки. Очевидно, что изгиб балок будет происходить в той же плоскости симметрии, поэтому такая ситуация называется плоским изгибом. Позже будут рассмотрены более общие случаи изгиба. (Например, см. раздел «Косой изгиб»).

На рис. 6.1 показаны расчётные схемы простейших типов балок. Предполагается, что продольная составляющая нагрузок, а следовательно, и горизонтальные реакции отсутствуют. Балка, показанная на рис. 6.1, *а*, называется *консольной*. Жёсткая заделка в сечении *A* запрещает любые перемещения, все остальные сечения могут перемещаться.

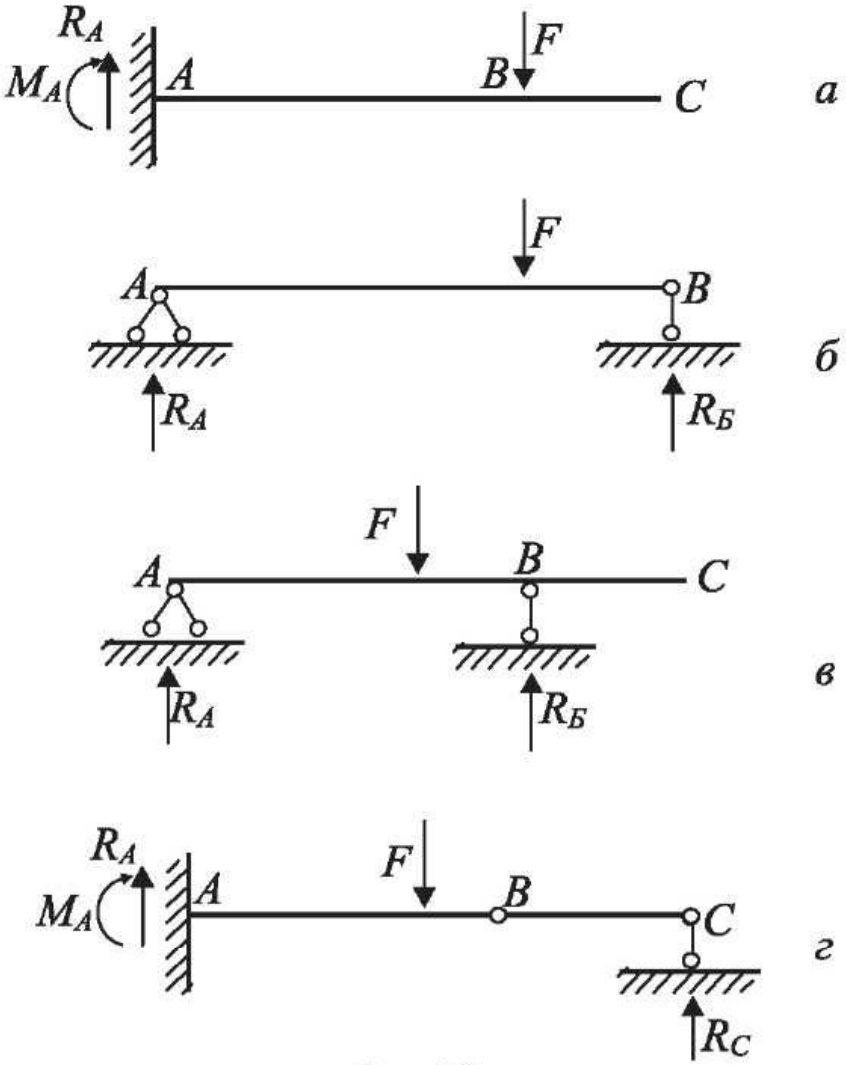


Рис. 6.1

Балка, имеющая на концах шарнирные опоры (рис. 6.1, *б*), называется *свободно опёртой*. В сечениях *A* и *B* такая балка не имеет вертикальных перемещений, но может поворачиваться. Балка, показанная на рис. 6.1, *в*, закреплена также с помощью шарнирных опор, но имеет свободный свес. Такая схема носит название *балки с консолью*, а сечение *C* называют свободным концом балки. Схема, изображённая на рис. 6.1, *г* называется *балкой с врезным шарниром*. Сечение *A* показанной балки неподвижно, в сечении *C* отсутствует вертикальное перемещение. Особенностью такой схемы является то, что в шарнире *B*, соединяющем две части балки, не может возникать изгибающий момент. Это позволяет при определении опорных реакций записать дополнительное условие: сумма моментов внешних сил, приложенных

к каждой из частей балки, относительно точки B равна нулю. С учётом уравнений статики, записанных для всей балки целиком, мы получаем возможность вычислить все опорные реакции.

Балки, изображённые на рис. 6.1, являются статически определимыми – число наложенных связей совпадает с числом независимых уравнений статики. Напомним известные из курса теоретической механики формы записи независимых уравнений равновесия для плоской системы сил:

$$1)\ \sum F_z = 0;\ \ \sum F_y = 0;\ \ \sum m_O = 0,$$

$$2)\ \sum m_A = 0;\ \ \sum m_B = 0;\ \ \sum F_z = 0$$

(ось z не должна быть перпендикулярна прямой AB),

$$3)\ \sum m_A = 0;\ \ \sum m_B = 0;\ \ \sum m_C = 0$$

(точки A, B, C не должны лежать на одной прямой).

При нахождении опорных реакций в балках удобнее составлять уравнения для суммы моментов относительно опорных точек, поскольку такие уравнения будут содержать только одно неизвестное. После того как реакции найдены, рекомендуется провести проверку, записав линейно зависимое уравнение равновесия. Так, для схем 6.1, *б*, *в* опорные реакции удобнее определить с помощью уравнений

$$\sum m_A = 0;\ \ \sum m_B = 0,$$

а для проверки воспользоваться уравнением

$$\sum F_y = 0,$$

которое в случае правильного определения реакций должно выполнятся тождественно.

Для схем 6.1, *а*, *г* опорные реакции проще найти из уравнений

$$\sum m_A = 0;\ \ \sum F_y = 0,$$

(для схемы 6.1, *г* – дополненных уравнением $\sum m_B = 0$ для левой или правой частей балки), а проверить с помощью уравнения

$$\sum m_C = 0.$$

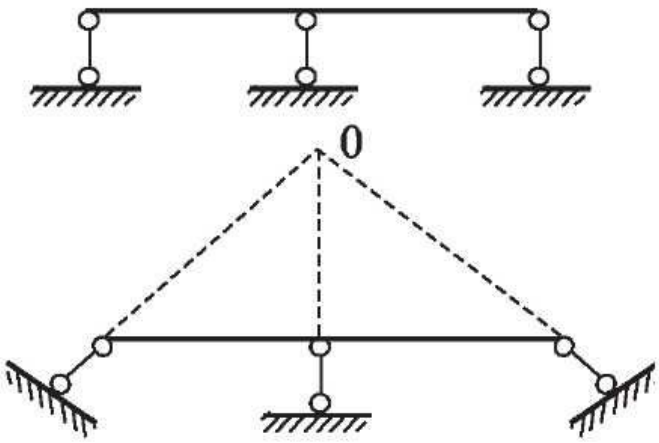


Рис. 6.2

Отметим, что наложенные на балку связи должны обеспечивать кинематическую неизменяемость системы – невозможность её перемещения как твёрдого тела.

На рис. 6.2 показаны случаи, когда это требование не выполняется: линии действия связей параллельны, либо пересекаются в одной точке. Здесь мы имеем дело с механизмами, в которых перемещения возможны без деформации конструкции, несмотря на то, что число связей равно трём, т. е. совпадает с количеством независимых уравнений равновесия. На практике часто встречаются системы, в которых число наложенных связей больше числа независимых уравнений равновесия, например, балки с дополнительными опорами. Такие системы называют *статически неопределимыми*, поскольку опорные реакции в них не могут быть определены только из уравнений равновесия.

С методами расчёта статически неопределимых систем мы встретимся позже.

Внутренние силовые факторы при изгибе балок. Дифференциальные зависимости

Как мы ранее условились, внешние силы будем считать действующими в плоскости симметрии балки yOz перпендикулярно её оси. (Напомним, что такой изгиб называется поперечным). При этом в поперечных сечениях балки возникают лишь два внутренних силовых фактора – изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y. Для их нахождения используют метод сечений – балка мысленно рассекается плоскостью, перпендикулярной оси, одна из частей отбрасывается,

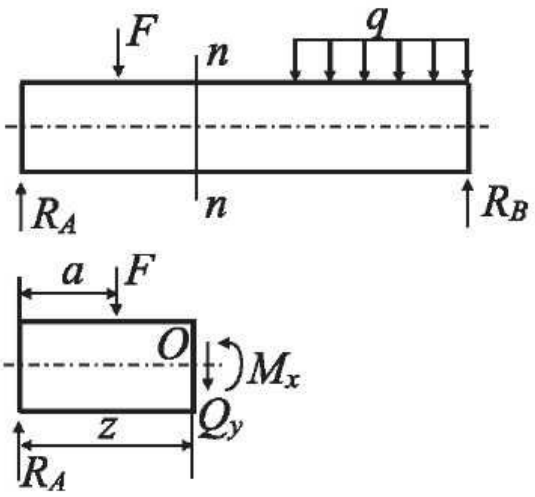


Рис. 6.3

а действие отброшенной части на оставшуюся заменяется внутренними усилиями, как это показано на рис. 6.3.

Здесь O – центр тяжести сечения n–n. Величина внутренних усилий находится из условий равновесия оставшейся части:

$$\sum F_y = 0:\ Q_y = R_A - F;$$

$$\sum m_0 = 0:\ M_x = R_A \cdot z - F(z - a) \quad (6.1)$$

Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к оставшейся части балки; изгибающий момент – алгебраической сумме этих же сил относительно горизонтальной оси x, проходящей через центр тяжести сечения.

Введём следующие правила знаков:

1) поперечная сила положительна, если направлена так, что стремится повернуть оставшуюся часть балки по ходу часовой стрелки;

2) изгибающий момент положителен, если он стремится изогнуть балку выпуклостью вниз, вызывая растяжения нижних волокон.

На рис. 6.4 показаны положительные направления внутренних усилий.

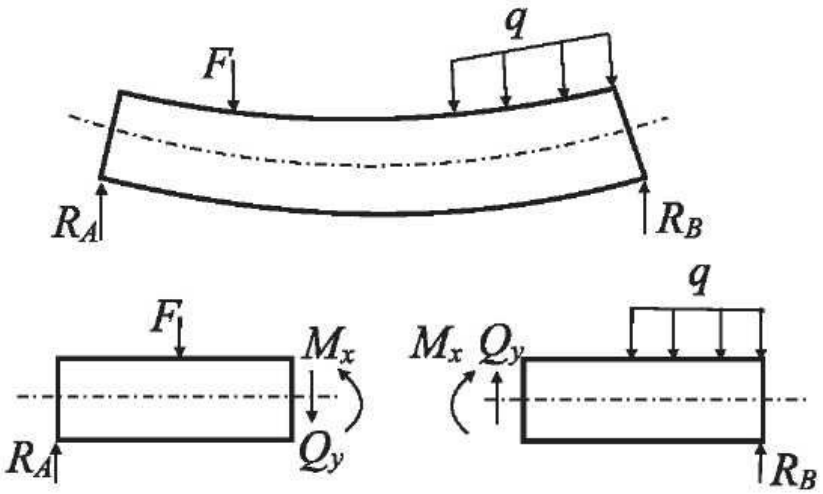


Рис. 6.4

Чтобы легче запомнить эти правила и не ошибиться в выборе знака слагаемых в правой части уравнений вида (6.1), отметим следующее (рис. 6.5):

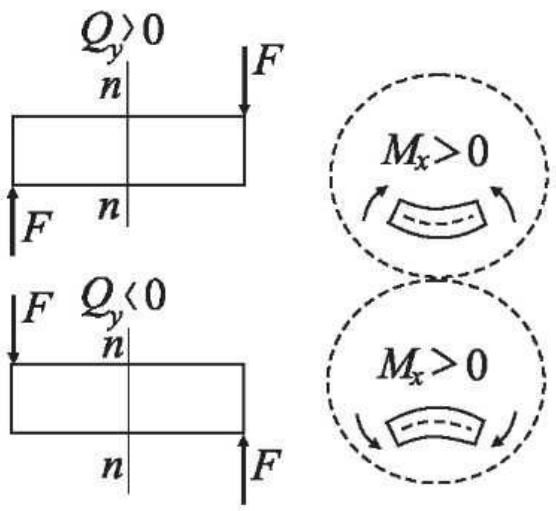


Рис. 6.5

а) правило знаков для поперечной силы по сути является *единственным исключением* – для правил, связанных с поворотом, за положительное обычно принимают направление против хода часовой стрелки;

б) правило знаков для изгибающего момента с ходом часовой стрелки никак не связано. Чтобы запомнить его раз и навсегда, достаточно взглянуть на рожицы рис. 6.5, где знак эмоций совпадает со знаком момента.

Между внутренними силовыми факторами при изгибе и внешней распределённой нагрузкой существуют важные дифференциальные зависимости.

Рассмотрим балку, нагруженную распределёнными по её длине вертикальными силами, интенсивность которых $q(z)$ может быть переменной (рис. 6.6).

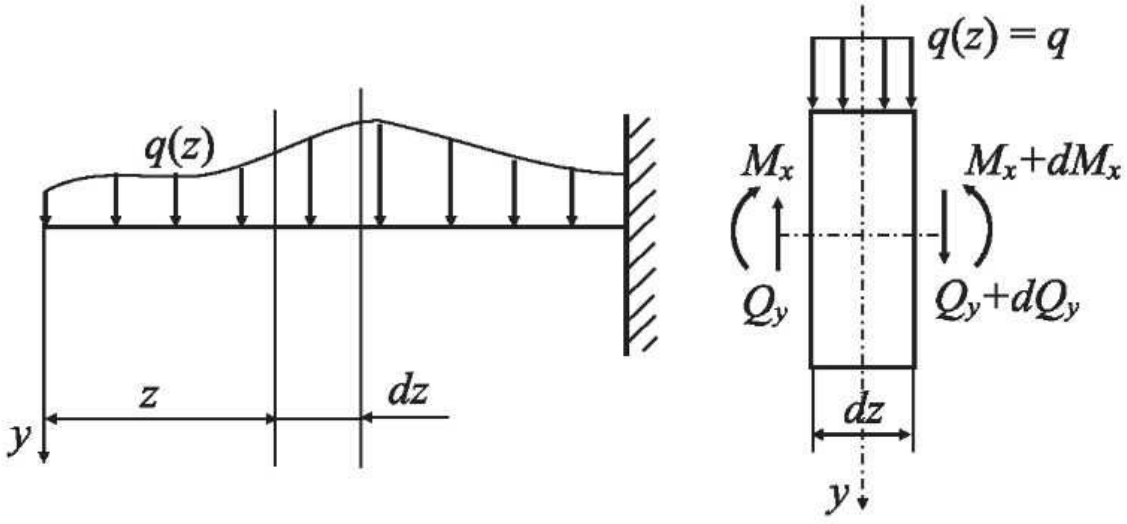


Рис. 6.6

Поскольку большая часть распределенных нагрузок связана с весом, удобнее направить ось y вниз и считать нагрузку такого направления положительной. С помощью двух бесконечно близких поперечных сечений выделим из балки элемент длиной dz. Действие на элемент левой отброшенной части балки заменим поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_x, действие правой – поперечной силой $Q_y + dQ_y$ и моментом $M_x + dM_x$. Приращение внутренних усилий dQ_y и dM_x вызваны приращением координаты dz. Ввиду малости элемента действующую на него распределённую нагрузку можно считать равномерной: $q(z) = q = \text{const}$.

Для того, чтобы выделенный элемент находился в равновесии, должны выполняться следующие условия:

$$\sum F_y = 0: \quad -Q_y + qdz + \left(Q_y + dQ_y\right) = 0;$$

$$\sum m_0 = 0: \quad -M_x - Q\frac{dz}{2} - \left(Q_y + dQ_y\right)\frac{dz}{2} + \left(M_x + dM_y\right) = 0. \quad (6.2)$$

Из первого уравнения следует

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q. \quad (6.3)$$

Из второго уравнения (6.2), пренебрегая членом $dQ_y\frac{dz}{2}$ как величиной второго порядка малости, найдём

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y. \quad (6.4)$$

Таким образом, распределённая поперечная нагрузка является первой производной по координате z от поперечной силы, взятой с обратным знаком. В свою очередь, поперечная сила представляет собой первую производную по той же координате от изгибающего момента. Объединяя выражения (6.3) и (6.4), получим

$$\frac{d^2M_x}{dz^2} = -q,$$

т. е. интенсивность распределённой поперечной нагрузки с точностью до знака равна второй производной по продольной координате от изгибающего момента.

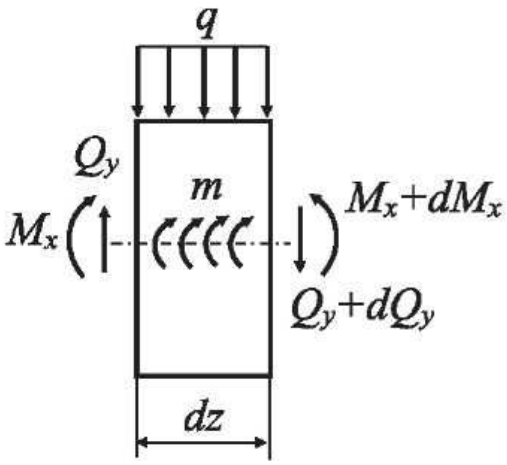


Рис. 6.7

Если на участке балки, где выделен элемент, действует погонная моментная нагрузка интенсивностью m (рис. 6.7), дифференциальная зависимость (6.4) изменится и примет следующий вид:

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_y + m\,. \qquad (6.6)$$

Выражение (6.3) останется справедливым и в этом случае.

Отметим, что знак минус в выражениях (6.3), (6.5) связан с выбором направления координаты y. Он исчезнет, если направить ось вверх и считать это направление положительным для вертикальной нагрузки.

Полученные дифференциальные зависимости позволяют по виду нагрузки судить о характере изменения внутренних усилий, что существенно упрощает построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в балках

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов представляют собой графическое изображение функций $Q_y(z)$ и $M_x(z)$ по всей длине балки. Эпюры необходимы для нахождения опасных сечений, а также при определении перемещений в балках. Они строятся по вычисленным значениям внутренних усилий в характерных сечениях – местах приложения нагрузки, установки опор и т. п. При этом положительные значения поперечной силы и моментов откладываются вверх от оси, т. е. эпюры изгибающих моментов строятся со стороны сжатых волокон балки.

На основании найденных дифференциальных зависимостей можно сформулировать ряд правил, которыми пользуются при построении эпюр.

1. На участке балки, где нет распределённой нагрузки, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент имеет линейную зависимость.

2. На участке с равномерно распределённой поперечной нагрузкой (q = const) поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент имеет квадратичную зависимость от координаты z, выпуклостью навстречу направлению нагрузки q.

3. Если эпюра поперечной силы пересекает ось, т. е. на участке есть сечение, в котором $Q_y = 0$, то момент в этом сечении имеет экстремальное значение $|M_x| = M_{\max}$.

4. На участке, где распределённая нагрузка меняется по линейному закону, поперечная сила имеет квадратичную, а момент – кубическую зависимость от координаты z.

5. В сечении, где приложена сосредоточенная внешняя сила, на эпюре Q_y будет скачок на величину этой силы, а эпюра моментов будет иметь излом, поскольку производная $M_x' = Q_y$ слева и справа от сечения имеет различные значения.

6. В сечении, где приложен внешний сосредоточенный момент, на эпюре M_x будет скачок, равный приложенному моменту, на эпюре Q_y изменений не будет. Справедливо и обратное утверждение – в сечениях, где нет внешних сосредоточенных моментов, появление скачков на эпюре M_x невозможно. Рассмотрим несколько примеров, которые помогут освоить технику построения эпюр внутренних усилий в балках.

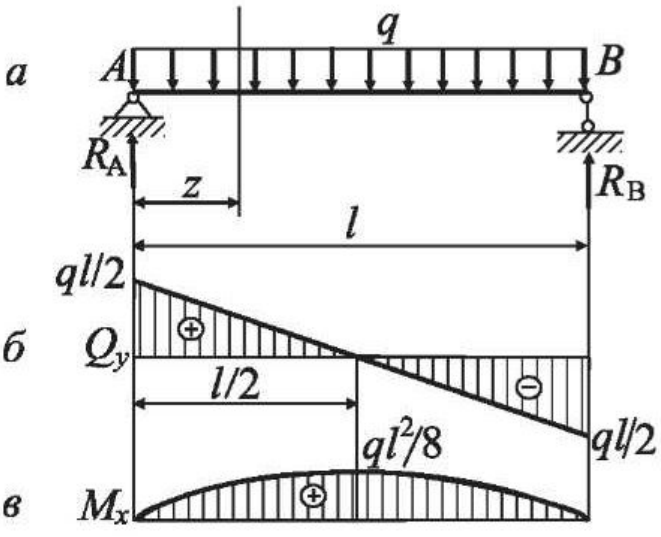


Рис. 6.8

Пример 6.1. Построить эпюры Q_y и M_x для свободно опёртой балки с равномерно распределённой нагрузкой q (рис. 6.8, *а*).

Решение. Для нахождения опорных реакций воспользуемся уравнением равновесия

$$\sum m_A = 0: \quad \frac{-ql^2}{2} + R_B l = 0.$$

$$R_B = \frac{ql}{2}.$$

Ввиду симметрии $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$.

Запишем выражение поперечной силы в сечении z, учитывая принятое правило знаков

$$0 \le z \le l,$$

$$Q_y = R_A - qz = \frac{ql}{2} - qz.$$

Полученная зависимость Q_y от координаты z линейна, следовательно, эпюра представляет собой прямую линию, которую можно построить по значениям в двух точках:

$$z = 0: \quad Q_y = \frac{ql}{2}, \qquad z = l: \quad Q_y = -\frac{ql}{2}.$$

По этим значениям построена эпюра Q_y, показанная на рис. 6.8, *б*. Как мы видим, в середине пролёта ($z = l/2$) поперечная сила равна нулю, следовательно, изгибающий момент M_x в этом сечении экстремален. Выражение M_x в произвольном сечении z имеет следующий вид

$$M_x = R_A z - \frac{qz^2}{2} = \frac{ql}{2} z - q\frac{z^2}{2}.$$

Момент имеет квадратичную зависимость от продольной координаты, его эпюра, показанная на рис. 6.8, *в*, представляет собой квадратную параболу. Момент равен нулю

на концах балки ($z = 0;\ z = l$), в середине пролёта его значение достигает максимума

$$M_{\max} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ql^2}{8}.$$

Построение эпюры вполне соответствует дифференциальным зависимостям (6.3)–(6.5), из которых следует, что при постоянной нагрузке q эпюра Q_y должна быть прямой линией с постоянным наклоном на всём участке $0 \le z \le l$, эпюра M_x должна иметь вид квадратной параболы. Поскольку сосредоточенными моментами балка не нагружена, эпюра M_x не имеет скачков; её максимум расположен в сечении, где $Q_y = 0$.

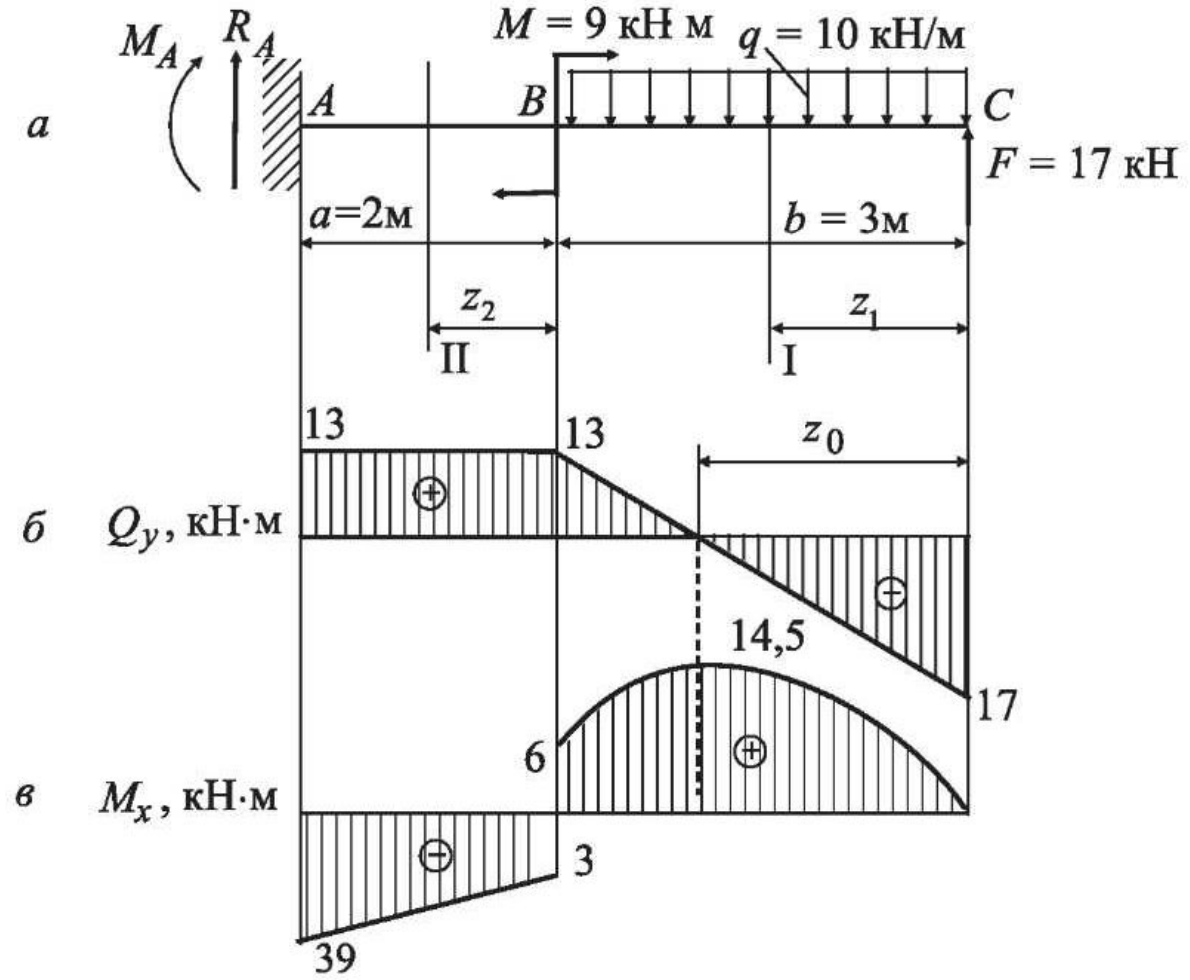


Рис. 6.9

Пример 6.2. Построить эпюры Q_y и M_x для консольной балки, показанной на рис. 6.9, *а*.

Решение. Разобьём балку на отдельные участки, границами которых будут служить сечения, где приложены сосредоточенные нагрузки или начинается (заканчивается) действие распределённых нагрузок. В пределах таких участков нагружения (иногда их называют силовыми участками) закон изменения внутренних силовых факторов изменяться не будет. В нашем случае таких участков два, сечения на них обозначены римскими цифрами. При использовании метода сечений, как известно, нет принципиальной разницы, равновесие какой из частей рассечённой балки рассматривать. В данном случае удобнее оставлять правую и отбрасывать левую часть, поскольку при этом отпадает необходимость в определении опорных реакций в заделке.

Проведём сечение на участке I и рассмотрим равновесие правой части балки, заменив действие отброшенной части внутренними усилиями Q_y и M_x (рис. 6.10).

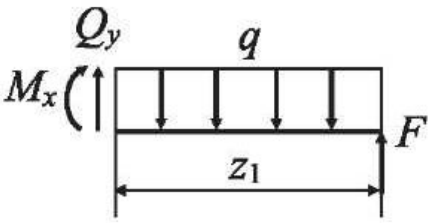


Рис. 6.10

Сила F пытается повернуть оставшуюся часть балки против часовой стрелки, следовательно, в выражение для поперечной силы она войдёт со знаком минус; равнодействующая распределённой нагрузки q равна произведению qz_1 и вызывает вращение относительно сечения по часовой стрелке, т. е. в положительную сторону. Таким образом, поперечная сила на участке $0 \le z_1 \le b$ имеет следующее выражение:

$$Q_y = -F + qz_1 = -17 + 10z_1 .$$

Закон изменения на участке I, как видим, линейный. В начале участка в сечении C поперечная сила

$$Q_y(0) = -F = -17\,\text{кН},$$

в конце участка в сечении B

$$Q_y(3) = -F + q \cdot b = -17 + 30 = 13\,\text{кН}.$$

На рис. 6.11 показана правая часть балки, рассечённой на участке II.

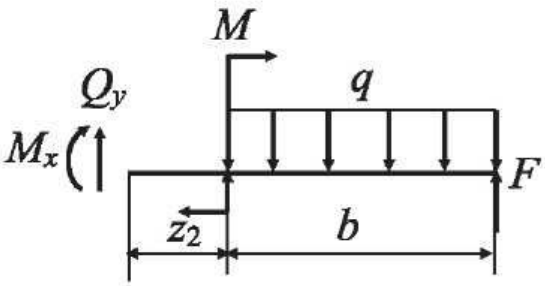


Рис. 6.11

Поперечная сила на этом участке постоянна:

$$0 \le z_2 \le a,$$

$$Q_y = -F + qb = 13\,\text{кН}.$$

Эпюра поперечных сил показана на рис. 6.13, *в*.

Перейдём к построению эпюры изгибающих моментов. На участке I изгибающий момент в сечении создаётся силой F на плече z_1, вызывающей сжатие верхних и растяжение нижних волокон, а также распределённой нагрузкой q, направленной в противоположную силе F сторону. Равнодействующая распределённой нагрузки равна произведению qz_1 и проходит через середину нагруженного участка, т. е. плечо равно $z_1/2$. Таким образом, на участке I имеем параболическую зависимость для изгибающего момента

$$M_x = Fz_1 - qz_1\frac{z_1}{2} = 17z_1 - 5z_1^2.$$

Поскольку на этом участке эпюра поперечных сил пересекает ось, т. е. имеется сечение, в котором $M_x' = Q_y(z_0) = 0$, то функция $M_x(z)$ в данном сечении принимает экстремальное значение.

Найдём положение экстремума:

$$Q_y = -F + qz_0 = 0;\ z_0 = \frac{F}{q} = \frac{17}{10} = 1{,}7\,\text{м}.$$

Эпюру изгибающих моментов построим по значениям в трёх точках. В начале участка в сечении C имеем

$$z = 0: \quad M_x = 0.$$

В сечении $z = z_0$ получаем

$$z = 1{,}7\text{м}:\ M_x = M_{\max} = 17\cdot 1{,}7 - 5\cdot 1{,}7^2 = 14{,}45 \approx 14{,}5\ \text{кН·м}.$$

В конце участка в сечении B имеем

$$z = 3{,}0: \quad M_x = 17 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 6 \text{ кН·м}.$$

На участке II распределённая нагрузка отсутствует, следовательно, функция M_x должна подчиняться линейному закону:

$$0 \le z_2 \le 2{,}0\text{м}$$

$$M_x = F(z_2 + b) - qb(z_2 + b/2) - M = -13 - 13z_2 [\text{кН} \cdot \text{м}].$$

Эпюра моментов изображена на рис. 6.9, *в*, она соответствует всем сформулированным ранее дифференциальным зависимостям и следствиям из них. Отметим тот факт, что на концах балки внутренние силовые факторы численно равны приложенным там соответствующим сосредоточенным внешним силовым факторам. В сечении C поперечная сила равна силе F, а изгибающий момент равен нулю. В сечении A в роли внешних силовых факторов выступают реакции опоры, следовательно, $R_A = 13$кН; $M_A = -29$кН·м.

Таким образом, если имеется заделка, то реакции в ней могут быть найдены не до построения эпюр Q_y и M_x, а в результате такого построения.

Построение эпюр внутренних силовых факторов в рамах

Рамой называется конструкция, состоящая из жёстко соединённых между собой прямых или криволинейных стержней. Места соединения стержней называют узлами, вертикальные стержни – стойками, горизонтальные – ригелями. Ось рамы представляет собой ломаную линию. Если она лежит в плоскости и в этой же плоскости действует нагрузка, рама называется плоской. Мы ограничимся рассмотрением плоских рам, состоящих из прямых стержней, имеющих плоскость симметрии сечений, совпадающую с плоскостью нагружения.

В поперечных сечениях таких рам возникают только три внутренних усилия: нормальная сила N, поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x. При этом на каждом прямолинейном участке рамы вводится своя, локальная система координат, в которой координата z всегда откладывается вдоль оси стержня, ось y лежит в плоскости рамы, а ось x перпендикулярно ей. Этот приём позволяет сохранить для поперечной силы и изгибающего момента те же обозначения, которые использовались в балках.

Правило знаков для нормальных сил остаётся прежним: растягивающие силы считаются положительными. Для горизонтальных участков рамы правило записи уравнений для поперечных сил и изгибающих моментов остаются такими же, как и для балок. Чтобы распространить это правило на вертикальные участки рамы, удобно вести понятие позиции наблюдателя – той точки, при взгляде из которой записываются выражения внутренних усилий на всех участках. По возможности позицию наблюдателя выбирают внутри рамы, обычно её положение совмещают с обозначением внутренних усилий, обведённых кружком на подписях к эпюрам. При построении эпюр положительные значения нормальных и поперечных сил откладывают наружу от наблюдателя, отрицательные – внутрь. Знаки указывают непосредственно на эпюрах. Правило знаков для поперечной силы, связанное с направлением поворота оставшейся части конструкции, применительно к рамам может вызвать затруднения. Так, на рис. 6.12 показан случай, когда сила F стремится повернуть оставшуюся часть конструкции по часовой стрелке и, следовательно, должна вызвать в сечении z поперечную силу положительного направления, т. е. действующую вниз. Это явно противоречит здравому смыслу, поскольку нарушает условие равновесия. Причина в том, что мы попытались распространить правило знаков, сформулированное

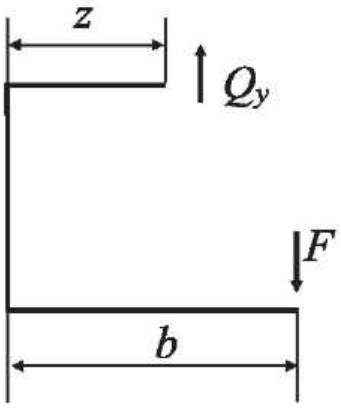


Рис. 6.12

для внутренней силы Q_y, на внешнюю силу F, а эти силы поворачивают показанную часть рамы в противоположные стороны.

Поэтому для рам удобнее формулировать правило знаков следующим образом: внешняя сила входит в выражение для поперечной силы со знаком плюс, если вызывает сдвиг левой отсечённой части вверх (наружу) относительно правой.

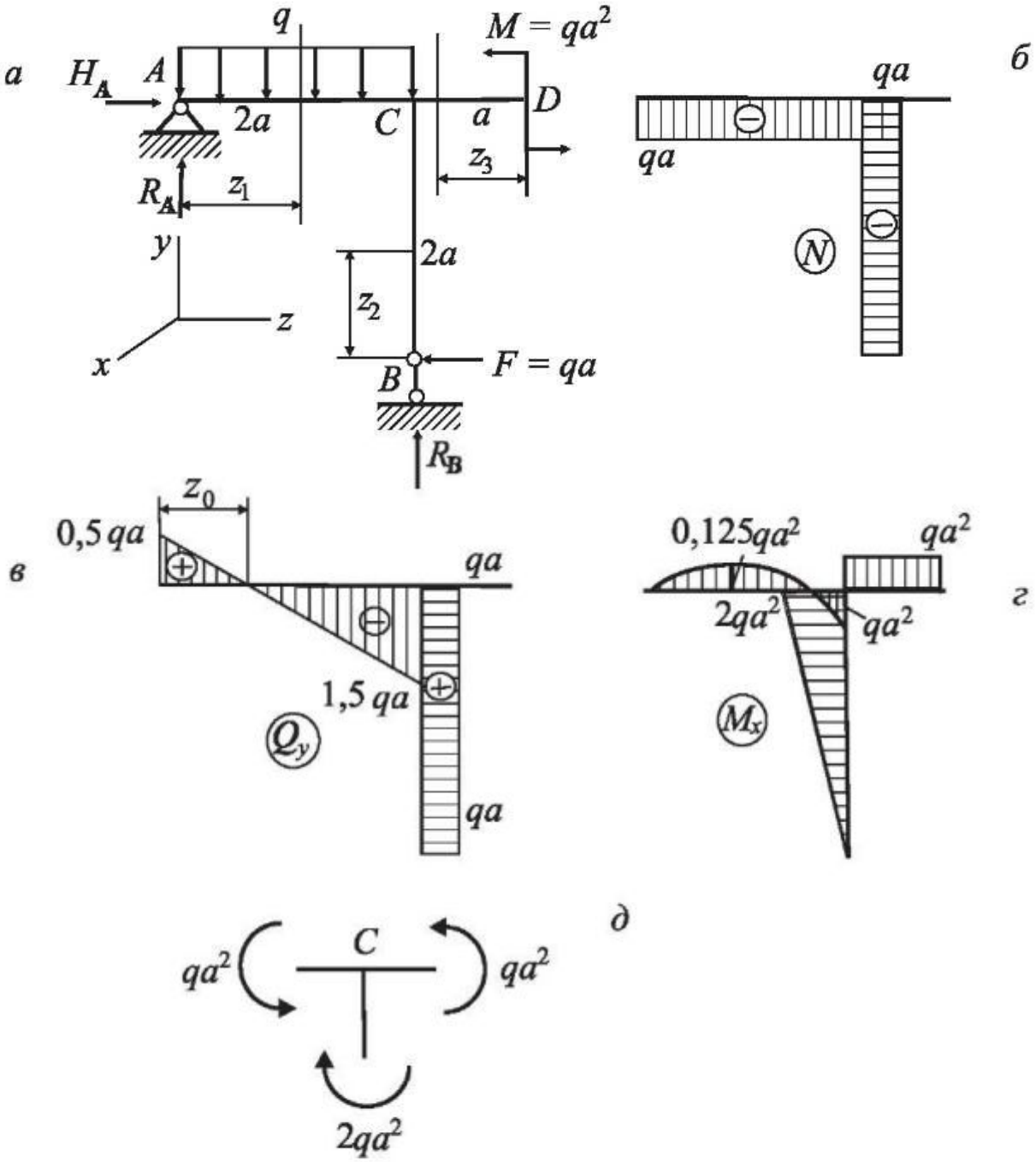


Рис. 6.13

Эпюры изгибающих моментов строятся со стороны сжатых волокон, т. е. положительные значения моментов откладываются наружу, а отрицательные – внутрь от наблюдателя. Знаки на эпюрс моментов не ставятся.

Пример 6.3. Построить эпюры внутренних усилий для рамы, показанной на рис. 6.13.

Решение. Определим опорные реакции, записав уравнения равновесия

$$\sum m_A = 0: \; -2qa^2 + M - F \cdot 2a + R_B \cdot 2a = 0;$$

$$R_B = \frac{3}{2} qa.$$

$$\sum F_z = 0: \qquad H_A - F = 0;$$

$$H_A = qa.$$

$$\sum m_C = 0: \qquad -R_A \cdot 2a + 2qa^2 + M - F \cdot 2a = 0;$$

$$R_A = \frac{qa}{2}.$$

Все реакции определены независимо друг от друга. Проверим их правильность, записав ещё одно уравнение статики

$$\sum m_B = 0:$$

$$2qa^2 + M - H_A \cdot 2a - R_A \cdot 2a = 2qa^2 + qa^2 - qa \cdot 2a - \frac{qa}{2} \cdot 2a = 0.$$

Уравнение тождественно выполняется, следовательно, реакции найдены верно.

Разделим раму на три участка – AC, BC и CD. На каждом из участков в произвольном месте проведём сечение и определим внутренние усилия из условий равновесия отсечённых частей. Позицию наблюдателя выберем слева от стойки BC; на рис. 6.13, *б*, *в*, *г* она отмечена кружком.

На участке AC, оставляя левую часть рамы, получим:

I. $0 \le z_1 \le 2a$

$N = -H_A = -qa;$

$$Q_y = R_A - qz_1 = \frac{qa}{2} - qz_1;\ \ Q_y(0) = \frac{qa}{2};\ \ Q_y(2a) = -\frac{3}{2}qa.$$

Эпюра поперечной силы имеет вид прямой линии, пересекающей ось в сечении z_0:

$$Q_y(z_0) = \frac{qa}{2} - qz_0 = 0;\quad z_0 = \frac{a}{2}.$$

В соответствии с дифференциальными зависимостями в этом сечении изгибающий момент имеет экстремум.

$$M_x = R_A z_1 - \frac{qz_1^2}{2} = \frac{qa}{2} z_1 - \frac{qz_1^2}{2}.$$

Момент изменяется по закону квадратной параболы; для построения эпюры необходимо вычислить его значения в трёх точках:

$$M_x(0) = 0,$$

$$M_x(2a) = -qa^2,$$

$$M_x(z_0) = \frac{qa^2}{8}.$$

В начале участка момент положителен, следовательно, сжаты верхние волокна стержня AC; в конце участка знак момента меняется, следовательно, сжаты нижние волокна.

На участке BC, рассматривая равновесие нижней части, имеем:

II. $0 \le z_2 \le 2a$

$$N = -R_B = -\frac{3}{2}qa;$$

$$Q_y = F = qa;$$

$$M_x = -Fz_2 = -qaz_2.$$

На этом участке сжаты левые (внутренние для наблюдателя) волокна стержня BC.

На участке CD, рассматривая равновесия правой части рамы, получим:

III. $0 \le z_3 \le a$

$N = 0;$

$Q_y - 0;$

$M_x - M - qa^2.$

Момент на участке положителен, сжаты верхние волокна.

Полученные по записанным выражениям эпюры представлены на рис. 6.13, *б*, *в*, *г*. Построенные эпюры должны подчиняться дифференциальным зависимостям между q, Q_y и M_x. Кроме того, необходимо проверить равновесие узлов рамы. Вырежем из рамы узел C сечениями, расположенными от него на бесконечно малых расстояниях, заменив действие отброшенных частей найденными внутренними усилиями. На рис. 6.13, *д* показан узел C с изгибающими моментами, действующими в бесконечно близких к нему сечениях. Легко видеть, что сумма моментов относительно точки C равна нулю, т. е. узел находится в равновесии.

НАПРЯЖЕНИЯ В БАЛКЕ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

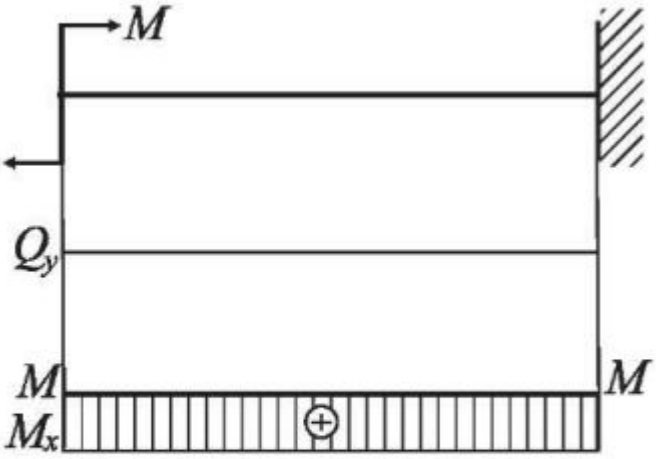
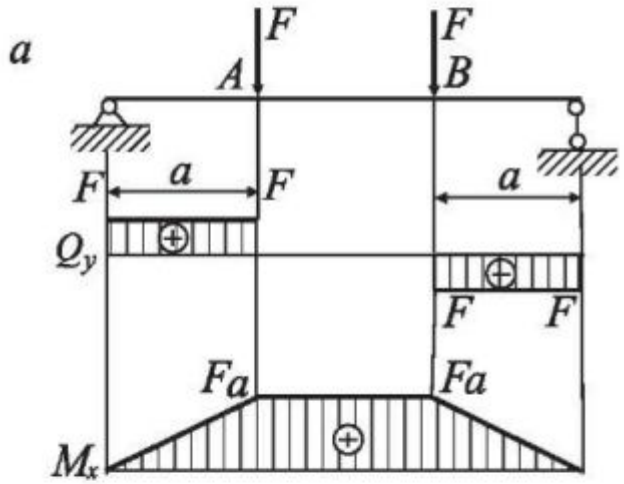


Рис. 7.1



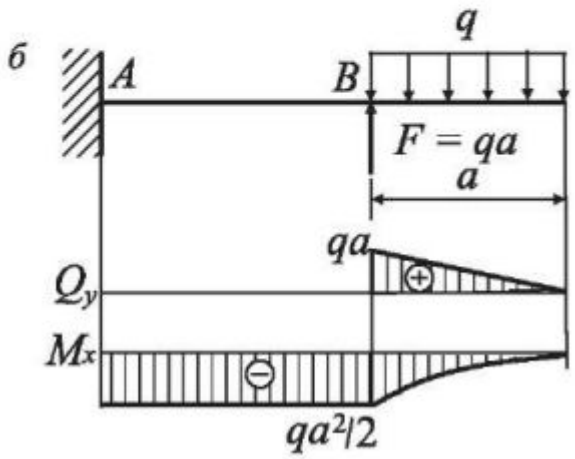


Рис. 7.2

Поставим перед собой задачу найти закон, по которому распределены напряжения в сечениях изогнутой балки. Рассмотрение начнём с самого простого случая, а именно с чистого изгиба, при котором в поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – изгибающий момент. При этом, как и раньше, будем предполагать изгиб плоским.

В качестве примера возникновения чистого изгиба может служить консольная балка, нагруженная сосредоточенным моментом на конце (рис. 7.1).

Поперечные силы в такой балке отсутствуют, а изгибающий момент постоянен по её длине. Стоит отметить, что, несмотря на некоторую искусственность такого нагружения, чистый изгиб

встречается на практике довольно часто. Дело в том, что появление чистого изгиба возможно при нагружении не только моментами, но также сосредоточенными и распределёнными силами. Так, участки AB балок, изображённых на рис. 7.2, испытывают чистый изгиб.

Как отмечалось в самом начале изучения курса «Сопротивление материалов», с помощью метода сечений и уравнений статики можно определить главный вектор и главный момент распределённых по сечению внутренних сил. Но для определения закона, по которому определяются напряжения, одних уравнений равновесия недостаточно – необходимо привлечь условия деформации балки. Здесь на помощь вновь приходят экспериментальные данные. Рассмотрим балку из легко деформирующегося упругого материала (например, поролона), на боковую поверхность которой нанесена сетка из продольных и поперечных прямых. Если подвергнуть такую балку чистому изгибу, то окажется, что продольные линии изогнутся, а поперечные останутся прямыми, повернувшись на некоторый угол (рис. 7.3).

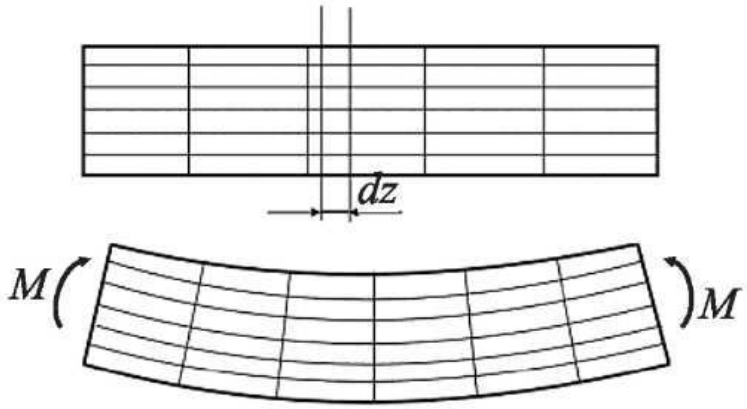


Рис. 7.3

Это обстоятельство, а также некоторые несложные рассуждения приводят к выводу, что при чистом изгибе, как и при осевом растяжении, справедлива гипотеза плоских сечений: поперечные сечения, плоские до нагружения, остаются таковыми и после приложения нагрузки. Таким образом, де-

формацию при чистом изгибе можно рассматривать как результат взаимного поворота плоских поперечных сечений.

Мысленно вырежем из участка балки, находящегося в состоянии чистого изгиба, бесконечно малый элемент длиной *dz* (рис. 7.4).

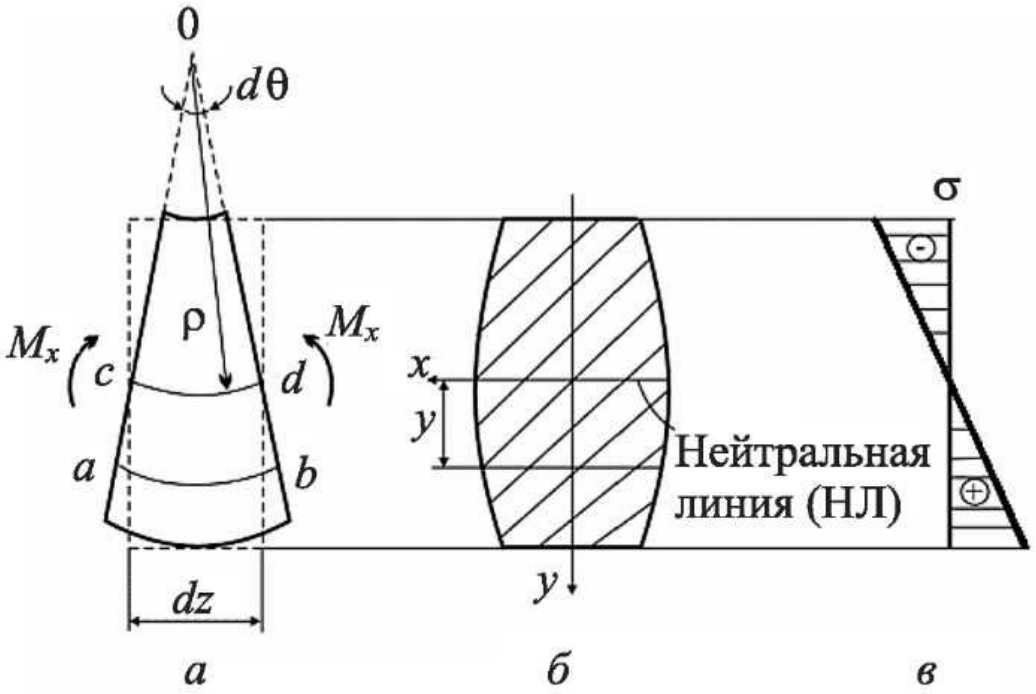


Рис. 7.4

Недеформированное состояние элемента показано пунктиром. После нагружения элемент искривляется. Поперечные сечения, которыми он выделен, поворачиваются в плоскости чертежа на некоторый малый угол $d\theta$. При этом верхние волокна элемента укорачиваются, нижние – растягиваются. Зону сжатия от зоны растяжения будет отделять слой волокон, длина которых остаётся прежней – *dz*. Этот слой волокон, не меняющий при изгибе своей длины, называют *нейтральным слоем*, он отмечен на рис. 7.4, *а* отрезком *cd*. Пересечение нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения образует прямую, которую называют *нейтральной линией* (см. рис. 7.4, *б*). Ось *x*, проходящая через нейтральную линию, называется *нейтральной осью*. По ширине балки все волокна деформируются одинаково.

Обозначим величиной ρ радиус кривизны нейтрального слоя. При этом ни положение нейтрального слоя, ни его кривизна нам пока неизвестны. Длину нейтрального слоя *dz* можно выразить через радиус кривизны и угол поворота сечений следующим образом:

$$dz \quad \rho d\theta. \tag{7.1}$$

Обозначим длину слоя волокон, лежащих на произвольном расстоянии *y* от нейтрального слоя, отрезком *ab*, тогда будем иметь

$$ab - (\rho + y)d\theta.$$

Поскольку до деформации все волокна имели одинаковую длину *dz*, разность отрезков *ab* и *cd* представляет собой абсолютное удлинение выделенных волокон:

$$\Delta dz = ab - cd = (\rho + y)dz - \rho dz = yd0.$$

Отсюда относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{yd0}{\rho d0} = \frac{y}{\rho}. \tag{7.2}$$

Будем считать, что отдельные волокна элемента деформируются независимо друг от друга, находясь в состоянии простого растяжения – сжатия. Это позволяет воспользоваться законом Гука при растяжении

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y. \tag{7.3}$$

Отсюда следует весьма важный вывод: напряжения в поперечном сечении меняются по линейному закону и пропорциональны расстоянию от нейтральной линии. Сама нейтральная линия представляет собой геометрическое место точек, удовлетворяющих условию $\sigma - 0$.

Для того, чтобы воспользоваться выражением (7.3), необходимо знать положение нейтральной линии, от которой

отсчитывается координата y, а также радиус кривизны нейтрального слоя ρ. Воспользуемся известными интегральными зависимостями между внутренними силовыми факторами в сечении стержня и действующими там напряжениями (1.1). Тогда для нормальной силы получим

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA .$$

Но поскольку при чистом изгибе $N = 0$, это означает, что

$$\int_A y dA = 0 .$$

Полученный интеграл представляет собой не что иное, как статический момент сечения. Поскольку он равен нулю, ось Ox, относительно которой он вычисляется, проходит через центр тяжести сечения. Таким образом, нейтральная ось оказывается центральной осью, а величина ρ – радиусом кривизны оси балки. Величину, обратную радиусу кривизны, называют кривизной оси, для её нахождения снова воспользуемся интегральными соотношениями (1.1) и формулой (7.3)

$$M_x = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EI_x}{\rho} .$$

Полученный интеграл вновь оказывается знакомой нам геометрической характеристикой – моментом инерции относительно центральной оси x. Отсюда определяется кривизна нейтрального слоя:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} . \qquad (7.4)$$

Произведение $E \cdot I_x$, стоящее в знаменателе формулы (7.4), называют *жёсткостью при изгибе*. Подставив последнюю формулу в (7.3), получим выражение для напряжений в следующем виде:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y. \qquad (7.5)$$

Полученная зависимость отражает закон распределения напряжений по высоте сечения, который проиллюстрирован эпюрой σ на рис. 7.4, *в*. Отметим, что формула (7.5) имеет алгебраический характер – при вычислении напряжений в интересующей нас точке сечения необходимо учитывать знаки момента M_x и координаты y.

Условие прочности при чистом изгибе. Рациональная форма поперечного сечения балки

Наибольшие по величине напряжения возникают в наиболее удалённых от нейтрального слоя точках сечения (см. рис. 7.4, *в*):

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} y_{max}. \qquad (7.6)$$

Для материалов, имеющих одинаковую прочность при растяжении и сжатии, знаки M_x и y_{max} в этой формуле можно не учитывать. В этом случае y_{max} будет представлять собой не координату, а расстояние от удалённой точки сечения до нейтральной линии. Тогда условие прочности при чистом изгибе по методу допускаемых напряжений примет вид

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma], \qquad (7.7)$$

где W_x – осевой момент сопротивления сечения, а $|\sigma|$ – допускаемое напряжение материала.

Наиболее экономичными являются такие типы поперечных сечений, у которых при наименьших затратах материала достигается наибольшая величина момента сопротивления. Чтобы форма сечения была рациональной, необходимо распределять большую часть площади сечения возможно дальше от нейтральной оси. Стремление расположить материал

балки таким образом привело к созданию таких тонкостенных профилей, как двутавр и швеллер. Если оценивать экономичность сечения отношением момента сопротивления к площади сечения W_x / A, то сечение в форме двутавра оказывается примерно в два раза экономичнее прямоугольного сечения тех же пропорций. Отметим, что на практике чрезмерное увеличение высоты сечения может привести к потере устойчивости и короблению балок при изгибе.

Поскольку напряжения при изгибе пропорциональны расстоянию от нейтральной оси, то для материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию (большинства пластичных материалов), целесообразно применять симметричные по высоте профили сечения. Наоборот, для материалов с различными характеристиками прочности при растяжении и сжатии (бетон, дерево, чугун и другие хрупкие материалы) несимметричные относительно нейтральной оси сечения могут оказаться рациональнее симметричных.

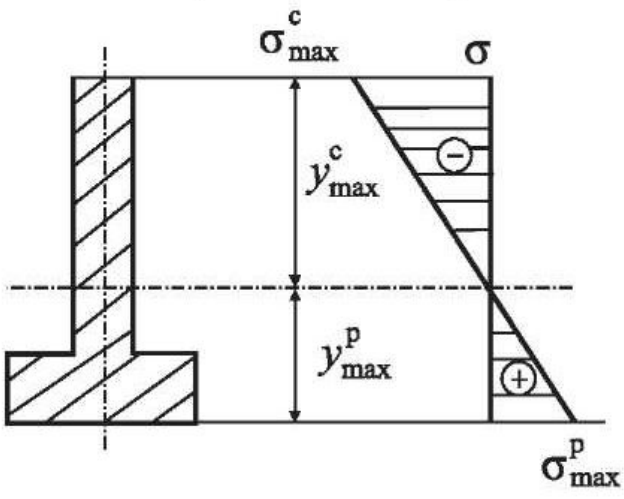


Рис. 7.5

В качестве примера на рис. 7.5 показано распределение напряжений при изгибе балок таврового (т-образного) сечения.

Такая форма часто используется при изготовлении балок из бетона или чугуна, сопротивляющихся сжатию значительно лучше, чем растяжению. В этих случаях необходимо обеспечить выполнение двух условий прочности – отдельно для сжатой и растянутой частей сечения:

$$\sigma^{c}_{max} = \frac{M_x}{I_x} y^{c}_{max} \le [\sigma]_c ,$$

$$\sigma^{p}_{max} = \frac{M_x}{I_x} y^{p}_{max} \le [\sigma]_p . \qquad (7.8)$$

Здесь y^{c}_{max}, y^{p}_{max} – расстояния от нейтральной оси до наиболее удалённых точек сечения соответственно в сжатой и растянутой зонах;

$[\sigma]_c$, $[\sigma]_p$ – допускаемые напряжения материала при сжатии и растяжении.

Очевидно, что наиболее рациональным является случай, когда расстояния от центра тяжести сечения (от нейтральной оси) до границ сечения пропорциональны соответствующим характеристикам прочности:

$$\frac{y^{c}_{max}}{y^{p}_{max}} \approx \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}.$$

Подчеркнём, что рационально подобранное сечение необходимо ещё правильно расположить с учётом характера нагружения балки. Так, если в приведённом примере (см. рис. 7.5) изгибающий момент будет отрицательным, т. е. вызовет растяжение верхних волокон, то сечение необходимо развернуть на 180°. В противном случае расход материала значительно возрастёт.

НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Нормальные напряжения

Как уже говорилось, поперечным называют изгиб, при котором в сечении балки помимо изгибающего момента возникает поперечная сила. В этом случае в поперечных сечениях вместе с нормальными напряжениями σ появляются касательные напряжения τ. Наличие касательных напряжений вызывает сдвиг отдельных волокон относительно друг друга, и сечение, бывшее до деформации плоским, после нагружения искривляется. Это явление носит название депланации сечений (рис. 8.1, *а*).

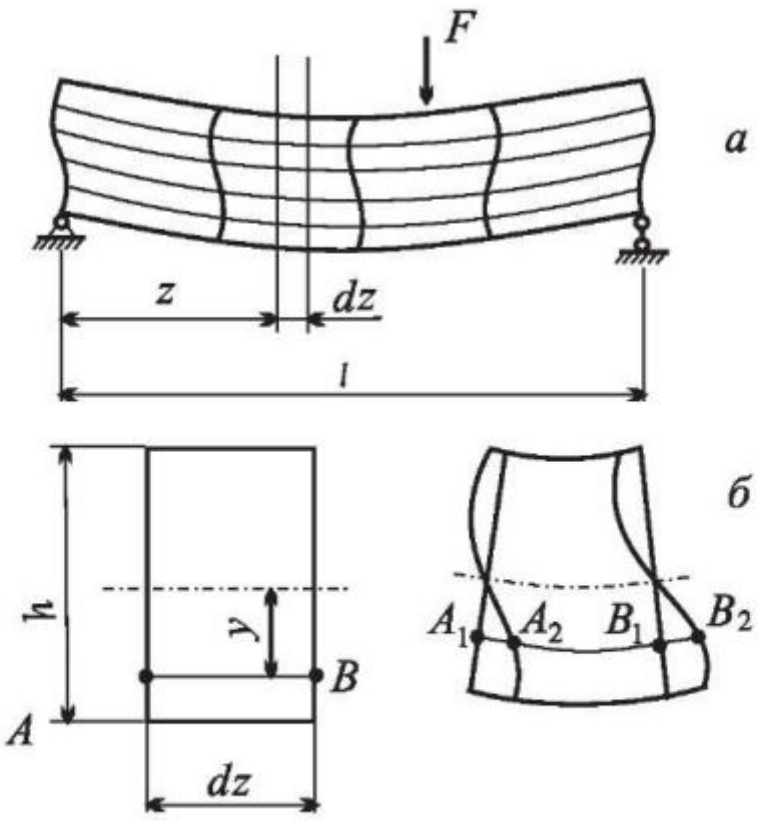


Рис. 8.1

Однако нарушение гипотезы плоских сечений практически не влияет на распределение нормальных напряжений, найденное нами при рассмотрении чистого изгиба, – формулы (8.4), (8.5), (8.7) остаются справедливыми и при поперечном изгибе:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_x}{EI_x};\quad \sigma=\frac{M_x}{I_x}y;\quad \sigma_{\max}=\frac{M_x}{W_x}.$$

Этот факт можно объяснить тем, что если поперечная сила на участке постоянна, искривление всех сечений происходит одинаково и удлинение произвольного продольного волокна AB (рис. 8.1, *б*) не зависит от того, остались ли сечения плоскими:

$$A_1B_1 = A_2B_2.$$

При изменяющейся поперечной силе указанные формулы дают некоторую погрешность, величина которой пропорциональна относительной высоте сечения балки h/l и в большинстве случаев незначительна. Сказанное даёт нам основания и при поперечном изгибе пользоваться гипотезой плоских сечений, считая, что картина деформаций в основном определяется поворотом сечений, а не их искривлением за счёт сдвиговых деформаций.

Касательные напряжения. Формула Журавского

Наличие поперечной силы Q_y приводит к появлению в плоскости сечения касательных напряжений τ_{zy} (рис. 8.2). По закону парности такие же по величине напряжения действуют в продольных сечениях: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau$.

Для нахождения касательных напряжений выделим из балки, подвергнутой поперечному изгибу, бесконечно малый элемент длиной dz, показанный на рис. 8.3, *а*. В поперечных сечениях, образующих грани элемента, показаны

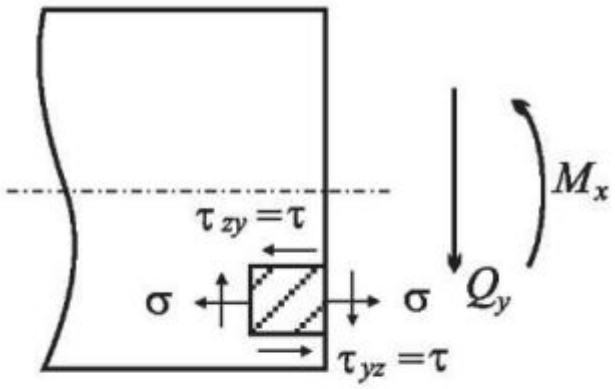


Рис. 8.2

нормальные и касательные напряжения, а также внутренние усилия. При этом учтено, что изгибающие моменты в левом и правом сечениях не равны друг другу и отличаются на величину dM_x в силу того, что $Q_y = dM_x/dz \neq 0$. Нормальные напряжения также не будет равны, их отличие с учётом (8.5) составит величину

$$d\sigma = \frac{dM_x}{I_x} y.$$

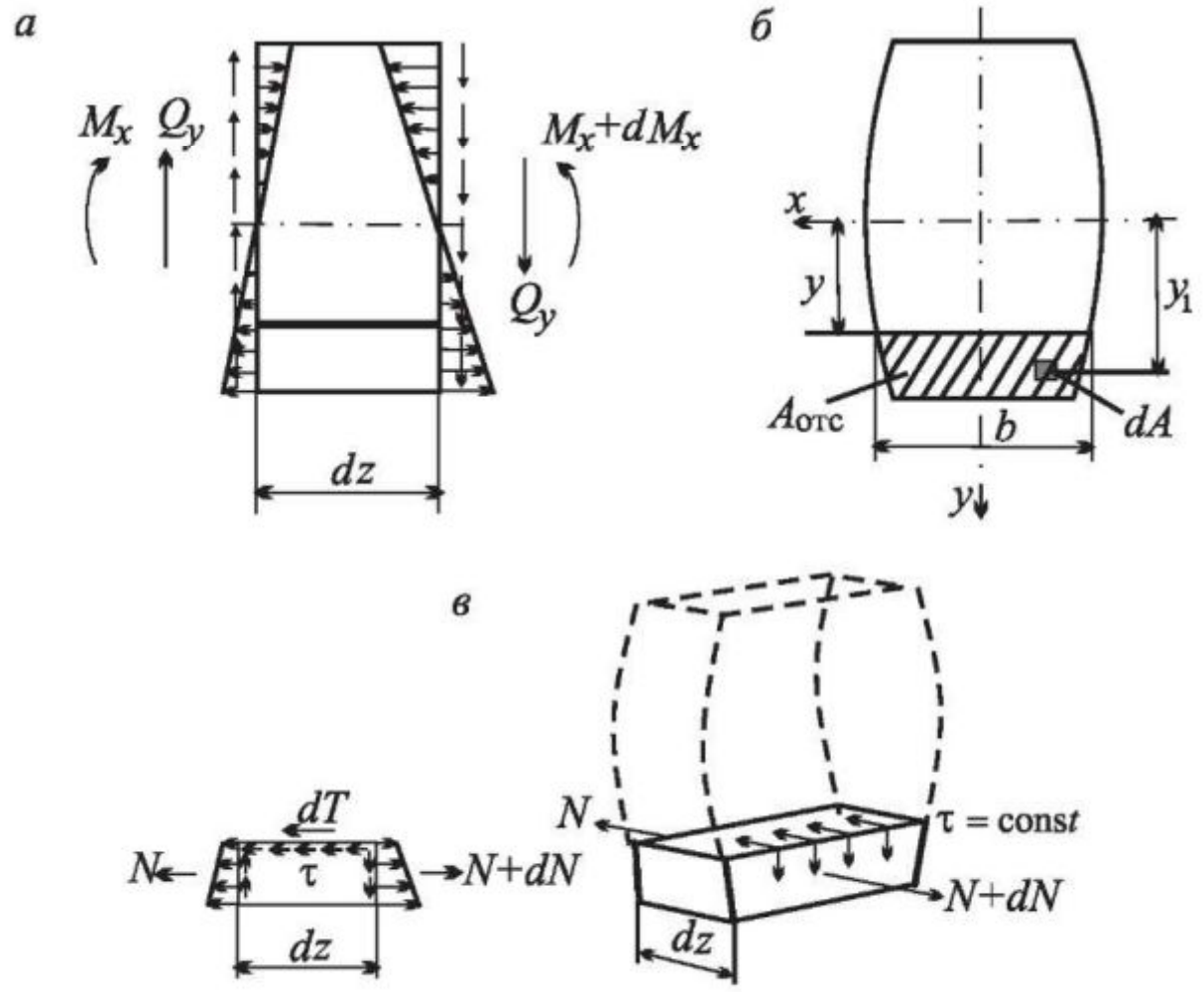


Рис. 8.3

Дополнительно рассечём выделенный элемент горизонтальной плоскостью, проходящей на произвольном расстоянии y от нейтральной оси, и рассмотрим условие равновесия нижней части элемента. Площадь поперечного сечения отсечённой части элемента обозначим $A_{\text{отс}}$, положение элементарной площадки dA определим координатой y_1 (рис. 8.3, *б*). Равнодействующая нормальных сил σdA в левом сечении равна

$$N = \int\limits_{A_{\text{отс}}} \sigma dA = \frac{M_x}{I_x} \int\limits_{A_{\text{отс}}} y_1 dA. \qquad (8.1)$$

Входящий в последнее выражение интеграл представляет собой статический момент площади $A_{\text{отс}}$ относительно нейтральной оси x. Обозначив его величину $S_x^{\text{отс}}$, получим

$$N = \frac{M_x S_x^{\text{отс}}}{I_x}. \qquad (8.2)$$

В правом сечении равнодействующая нормальных сил будет иной:

$$N + dN = \int\limits_{A_{\text{отс}}} (\sigma + d\sigma) dA = \frac{M_x S_x^{\text{отс}}}{I_x} + \frac{dM_x S_x^{\text{отс}}}{I_x}.$$

Разность этих сил

$$dN = \frac{dM_x S_x^{\text{отс}}}{I_x} \qquad (8.3)$$

должна в проекции на ось z уравновешиваться касательной силой dT, действующей в продольном сечении элемента (см. рис. 8.3, *в*). Предположив, что по ширине сечения b касательные напряжения τ распределены равномерно, а также учитывая малость элемента в направлении оси балки, усилие dT можно представить следующим образом:

$$dT = \tau b dz\,. \qquad (8.5)$$

Из полученных зависимостей (8.3) и (8.5) с учётом равенства (8.4) получаем формулу для нахождения касательных напряжений:

$$\tau = \frac{dM_x}{dz}\frac{S_x^{\text{отс}}}{I_x b}. \qquad (8.6)$$

При отсутствии распределённой моментной нагрузки m последнее выражение принимает вид

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}. \qquad (8.7)$$

Таким образом, мы определили напряжения в горизонтальном сечении, проведённом на расстоянии y от нейтральной оси. По закону парности они равны напряжениям в поперечном сечении балки. Напомним, что b – ширина поперечного сечения в месте его рассечения горизонтальной плоскостью, а $S_x^{\text{отс}}$ – статический элемент отсеченной площади $A_{\text{отс}}$ относительно горизонтальной центральной оси x. Выражение (8.7) называется *формулой Журавского*, по имени профессора Д. И. Журавского (1821–1891), впервые получившего её при разработке методов расчёта мостовых сооружений в ходе проектирования и строительства железной дороги С. Петербург – Москва в середине XIX века.

Распределение касательных напряжений в балках различного сечения

Из входящих в правую часть формулы Журавского величин в общем случае функциями координаты y являются статический момент $S_x^{\text{отс}}$ и ширина сечения b. При подходе к нижней кромке сечения площадь $A_{\text{отс}}$ (рис. 8.3, *б*) стремится к нулю, а вместе с ней обращается в нуль и статический момент $S_x^{\text{отс}}$. При подходе к верхней кромке площадь отсе-

чённой части $A_{отс}$ оказывается равна площади всего сечения A. Поскольку ось x является центральной, то статический момент и в этом случае равен нулю. Таким образом, касательные напряжения обращаются в нуль на верхней и нижней границах сечения. Характер их изменения внутри сечения рассмотрим на нескольких примерах.

1. Прямоугольное сечение.

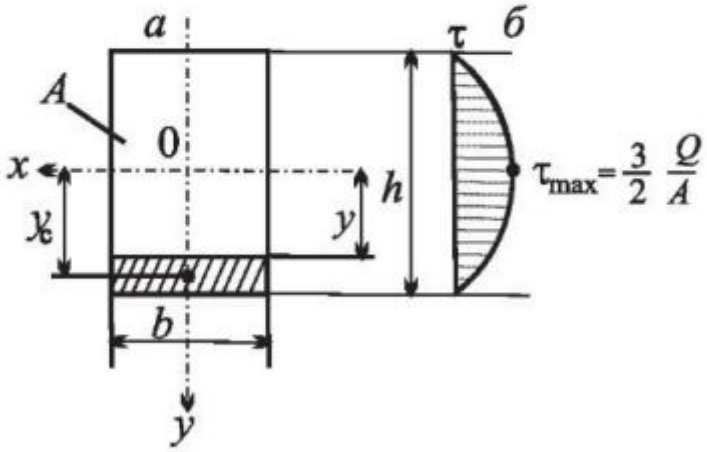


Рис. 8.4

Для сечения размерами b и h найдём статический момент отсеченной части площади (на рис. 8.4, *а* заштрихована) как произведение площади $A_{отс}$ на координату её центра тяжести y_c:

$$A_{отс}=b\left(\frac{h}{2}-y\right),$$

$$y_c=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right),$$

получим

$$S_x^{отс}=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right).$$

Подставляя это выражение в формулу Журавского (8.7), найдём закон изменения касательного напряжения по высоте сечения

$$\tau=\frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right).$$

Здесь принято во внимание, что для прямоугольного сечения $I_x=\frac{bh^3}{12}$

Таким образом, эпюра напряжения τ, показанная на рис. 8.4, *б*, имеет вид квадратной параболы. Наибольшей величины напряжение достигает при значении $y = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}.$$

Здесь A – площадь всего сечения.

2. Треугольное сечение.

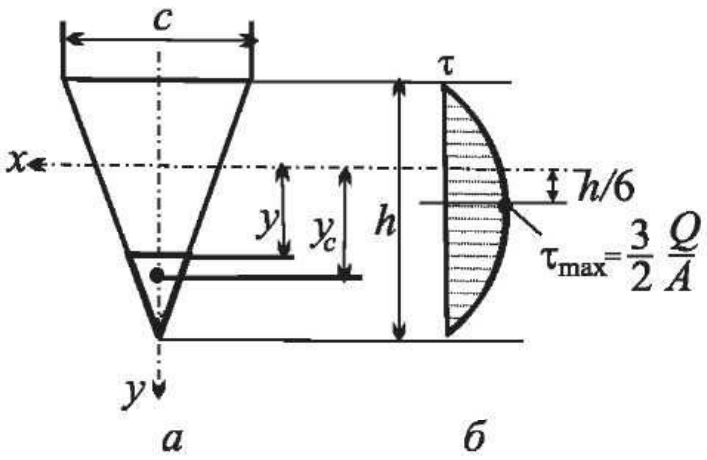


Рис. 8.5

Рассмотрим сечение треугольной формы с основанием c и высотой h (рис. 8.5, *а*). Обозначим ширину сечения на расстоянии y от оси как b. Тогда будем иметь

$$b = \frac{c}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right),$$

$$y_c = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{3} + y\right),$$

$$A_{\text{отс}} = \frac{1}{2} b \left(\frac{2}{3}h - y\right).$$

Статический элемент заштрихованной части сечения

$$S_x^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_c = \frac{1}{3}\frac{c}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right)^2 \left(\frac{h}{3} + y\right),$$

осевой момент инерции треугольного сечения

$$I_x = \frac{ch^3}{36}.$$

Подставив полученные выражения в формулу Журавского, найдём касательное напряжение:

$$\tau = \frac{12Q}{ch^3}\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(\frac{h}{3} + y\right).$$

Эпюра напряжений, показанная на рис. 8.5, *б*, как и в предыдущем случае, имеет вид квадратной параболы, имеющей максимум в центральной части сечения ($y = h/6$).

Наибольшее напряжение равно

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{ch} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A},$$

где A – площадь сечения балки.

3. Круглое сечение.

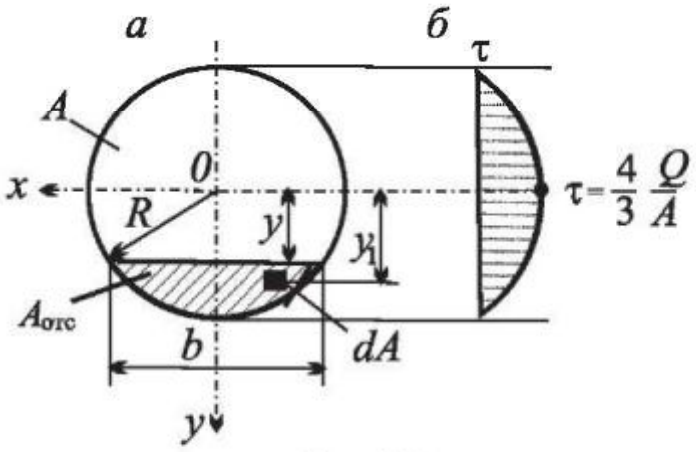


Рис. 8.6

Статический момент отсечённый части сечения, показанной на рис. 8.6, *а* штриховкой, можно представить следующим образом

$$S_x^{отс} = 2\int_y^R y_1\sqrt{R^2 - y_1^2}\,dy_1,$$

где y_1 – координата, описывающая положение элементарной площадки dA.

После интегрирования получим

$$S_x^{отс} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{R^2 - y^2}\right)^3.$$

Учитывая, что для круга

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4},$$

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2},$$

находим зависимость касательного напряжения τ от вертикальной координаты y:

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi R^2}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right).$$

При $y = 0$ касательное напряжение имеет наибольшее значение

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}.$$

Эпюра τ показана на рис. 8.6, *б*.

В двух последних примерах, строго говоря, формула Журавского не может быть признана точной. Легко показать, что здесь не выполняется допущение о постоянстве напряжений по ширине сечения.

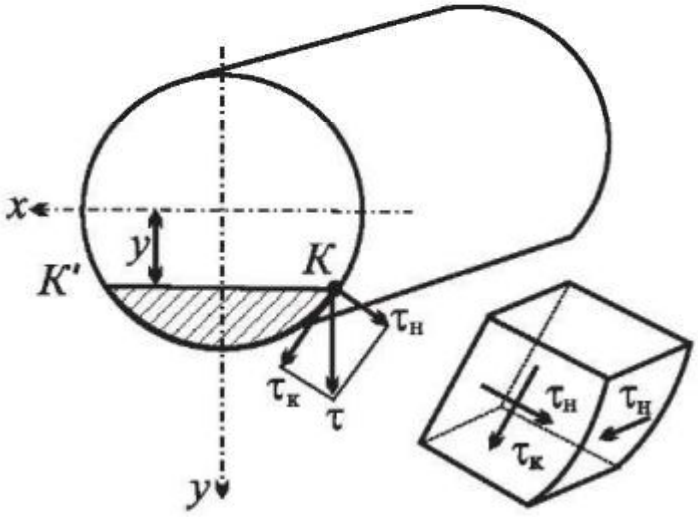


Рис. 8.7

Рассмотрим бесконечно малый элемент в окрестности точки K сечения (рис. 8.7). Пусть одна из граней элемента является частью внешней боковой поверхности балки.

Напряжение τ в поперечном сечении всегда можно разложить на две составляющие – $\tau_к$, которая направлена по касательной к контуру сечения, и перпендикулярную ей $\tau_н$, действующую по нормали к границе сечения. По закону парности касательных напряжений, такое же по величине напряжение $\tau_н$ должно действовать на перпендикулярной площадке, т. е. площадке, выходящей на боковую поверхность балки. Однако по условиям нагружения боковая поверхность должна быть свободна от сдвиговых нагрузок, следовательно, $\tau_н = 0$.

Отсюда следует вывод, что напряжение τ может быть направлено только по касательной к границе сечения, т. е. совпадать со своей проекцией $\tau_к$. В точке K' напряжение τ также будет направлено по касательной к контуру сечения, симметрично напряжению в точке K.

Проведённые рассуждения справедливы и для треугольного сечения, и вообще для любых сечений с плавно меняющейся шириной. Формула Журавского в этих случаях является приближённой и позволяет вычислить не сами касательные напряжения τ, а их проекцию на ось y (на плоскость нагружения).

4. Тонкостенные сечения.

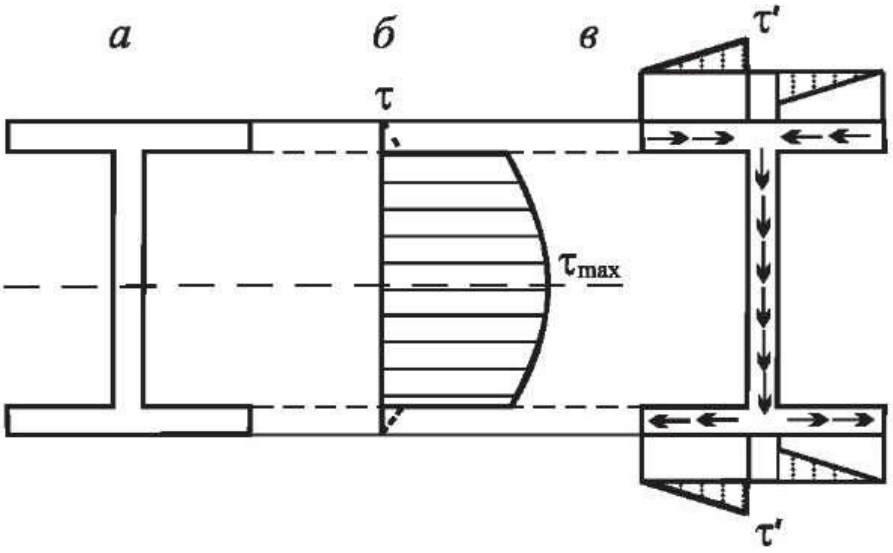


Рис. 8.8

В качестве примера тонкостенного сечения на рис. 8.8, *а* изображён двутавр, состоящий их двух полок и соединяющей их стойки. Такое сечение можно разбить на прямоугольники и, формально воспользовавшись формулой Журавского, получить показанные на рис. 8.8, *б* распределение касательных напряжений.

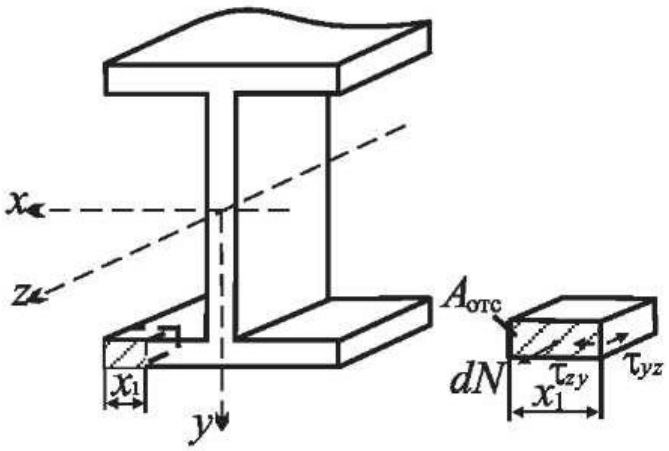


Рис. 8.9

В местах соединения полок со стойкой на эпюре напряжений возникает скачок значений, связанный с резким уменьшением ширины сечения в средней части. Распределение напряжений в полках показано на эпюре пунктиром, поскольку реальная картина будет несколько иной. Дело в том, что в полках помимо вертикальных напряжений τ возникают горизонтальные составляющие напряжений τ', величина которых значительно больше. Если отсечь часть полки с площадью $A_{отс}$, как это показано на рис. 8.9, то нормальные напряжения приведут к появлению нормальной силы dN, подобно тому, как это описано при выводе формулы Журавского (8.7). Для обеспечения условий равновесия необходимо появление в полке касательных напряжений τ':

$$\tau' = \tau_{xz} = \frac{Q_y S_x^{отс}}{I_x \delta},$$

где δ – толщина полки. Вдоль размера δ напряжения τ_{xz} распределены равномерно.

По ширине полки касательные напряжения изменяются по линейному закону, поскольку

$$S_x^{отс} = A_{отс} \frac{h}{2} = \delta x_1 \frac{h}{2},$$

где x_1 – расстояние от края полки (см. рис. 8.9). Эпюра горизонтальных напряжений τ', равномерно распределённых по толщине стенки δ и направленных по касательной к контуру сечения, показана на рис. 8.8, *в*. Их величина может быть найдена по формуле

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{отс}}{I_x \delta}. \qquad (8.8)$$

В случае изгиба в двух плоскостях напряжения можно найти в виде алгебраической суммы

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{отс}}{I_x \delta} + \frac{Q_x S_x^{отс}}{I_y \delta} \qquad (8.9)$$

Соотношение между наибольшими касательными и наибольшими нормальными напряжениями при изгибе

Из рассмотренных примеров следует, что зона наибольших касательных напряжений расположена в средней части высоты сечения, а величина τ_{max} для нетонкостенных сечений имеет порядок Q_y/A. В большинстве случаев касательные напряжения составляют по сравнению с нормальными напряжениями небольшую величину. Например, для консольной балки прямоугольного сечения, показанной на рис. 8.10,

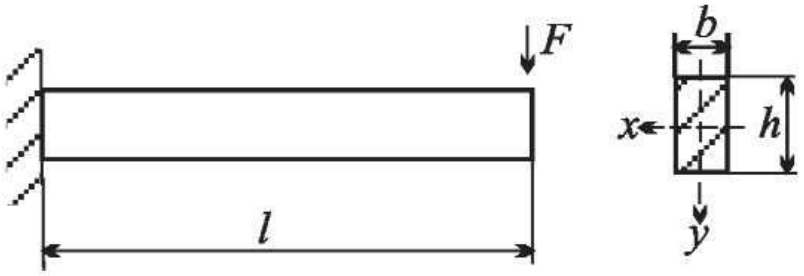


Рис. 8.10

наибольшие нормальные напряжения равны

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{6Fl}{bh^2},$$

а наибольшие касательные

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}.$$

Их соотношение

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{h}{4l}$$

свидетельствует о том, что касательные напряжения во много раз меньше нормальных. По этой причине расчёт на прочность при поперечном изгибе, как и при чистом изгибе,

производится только по нормальным напряжениям. При этом касательные напряжения во внимание не принимаются, поскольку они равны нулю в наиболее удалённых от нейтральной оси точках сечения, где максимальны нормальные напряжения.

Однако в ряде случаев касательные напряжения при изгибе необходимо учитывать. Это относится прежде всего к тонкостенным профилям – двутавру, швеллеру и т. д. при нагрузках, вызывающих большую поперечную силу по сравнению с изгибающим моментом. В такой ситуации рекомендуется проводить так называемую полную проверку прочности.

Другим исключением является применение изотропных материалов, плохо сопротивляющихся сдвигу – например, дерева.

Полная проверка прочности при изгибе балок тонкостенного профиля

На рис. 8.11, *а* в качестве примера тонкостенного сечения изображён двутавр с обозначением характерных точек, в которых необходима проверка прочности.

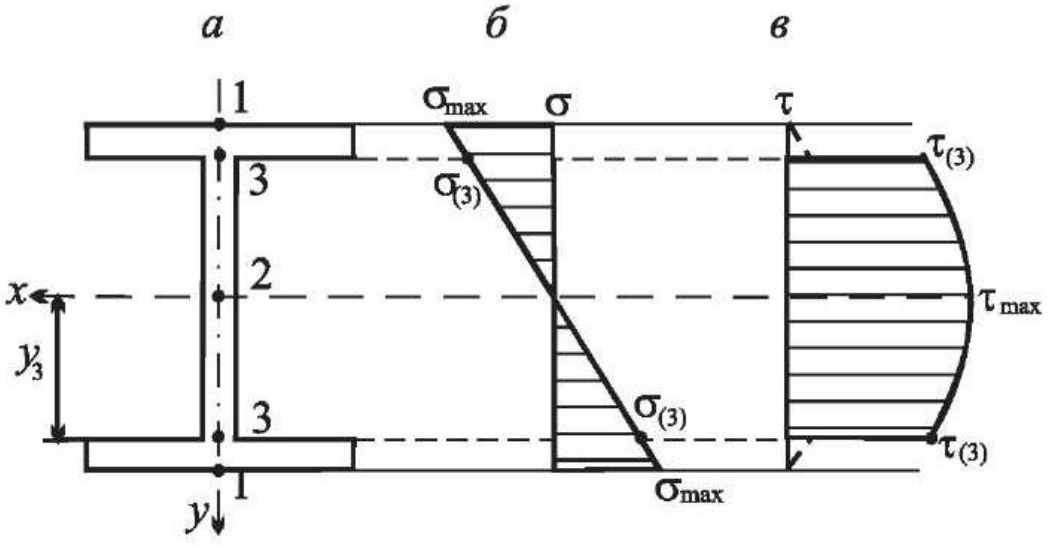


Рис. 8.11

В точках типа 1 (рис. 8.11, *а*), наиболее удалённых от нейтральной оси, нормальные напряжения достигают максимума, а касательные равны нулю.

Для тонкостенных сечений, так же как и для сплошных, расчёт на прочность начинают с проверки условия (8.7)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \le [\sigma],$$

что позволяет назначить размеры сечения таким образом, чтобы момент сопротивления не был меньше требуемого значения

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_x^{\max}}{|\sigma|}.$$

Если для сплошных сечений проверка прочности на этом заканчивается, то для тонкостенных необходим дальнейший расчёт.

В опасных точках типа *2* (см. рис. 8.11, *а*) возможно разрушение срезом за счёт значительных по величине касательных напряжений. Поскольку нормальных напряжений в этом месте нет, условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \le [\tau], \qquad (8.10)$$

где $|\tau|$ – допускаемое касательное напряжение материала.

Применительно к двутавровому сечению условие прочности по касательным напряжениям принимает вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} S_x^*}{I_x d} \le |\tau|. \qquad (8.11)$$

Здесь $Q_y^{\max}$ – наибольшее по модулю значение поперечной силы;

S_x^* – статический момент половины сечения относительно оси x (для стандартных профилей приведён в справочных таблицах);
d – толщина стойки двутавра.

Если условие прочности по касательным напряжениям не выполняется, необходимо увеличить номер стандартного профиля и повторить расчёт по формуле (8.11). Условие прочности по нормальным напряжениям при этом можно не проверять, поскольку оно заведомо выполняется.

Наконец, необходимо исключить разрушение в опасных точках типа *3*, расположенных в местах перехода от полок к стенке. Здесь ни нормальные, ни касательные напряжения не достигают максимума, но имеют значительную величину и действуют совместно. Для проверки прочности в такой ситуации необходимо привлекать так называемые теории прочности, о которых речь пойдет ниже. Пока же приведём условия прочности по наиболее часто применяемым для пластичных материалов третьей и четвёртой теориям:

$$\sigma_э^{III} = \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 4\tau_{(3)}^2} \le [\sigma],$$
$$\sigma_э^{IV} = \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 3\tau_{(3)}^2} \le [\sigma]. \qquad (8.12)$$

Здесь $\sigma_э^{III}, \sigma_э^{IV}$ – эквивалентные напряжения по соответствующим теориям прочности, $\sigma_{(3)}, \tau_{(3)}$ – нормальное и касательное напряжения в точке 3 (см. рис. 8.11, *а*):

$$\sigma_{(3)} = \frac{M_x}{I_x} y_3,$$
$$\tau_{(3)} = \frac{Q_y S_x^{отс}}{I_x d}.$$

В последнюю формулу входит величина $S_x^{отс}$, представляющая собой статический момент полки двутавра относительно оси x. Полка схематизируется в виде прямоугольника,

размеры которого приведены в справочных таблицах. Статический момент этой фигуры легко вычисляется как произведение площади прямоугольника на расстояние от его центра тяжести до оси x.

Отметим, что обеспечить прочность на этом этапе расчета необходимо для всех сечений, где одновременно велики изгибающий момент и поперечная сила.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

Для того чтобы судить о работоспособности конструкций, испытывающих изгиб, знать возникающие в сечениях напряжения часто бывает недостаточно. Балки могут удовлетворять условиям прочности, но при этом быть непригодными к эксплуатации из-за недостаточной жёсткости. Для проверки условий жёсткости необходимо уметь определять перемещения точек оси балки.

Ограничимся пока рассмотрением плоского изгиба, когда действующие на балку силы лежат в плоскости, проходящей через ось симметрии поперечного сечения.

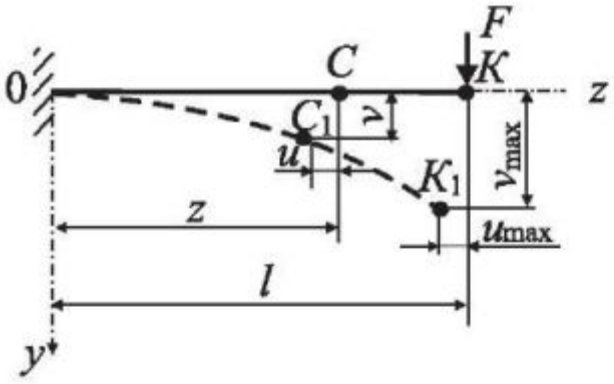


Рис. 9.1

Под действием приложенной нагрузки произвольная точка C оси балки, отстоящая от начала координат на расстоянии z, переместится в новое положение C_1 (рис. 9.1). Обозначим её вертикальное перемещение величиной v, горизонтальное – u. Проверка жёсткости балки сводится к условию, по которому наибольший прогиб v_{max} не должен превышать некоторой заданной доли от продольного размера конструкции – длины пролёта либо длины консольного участка, в зависимости от условий закрепления балки:

$$v_{max} \le \frac{l}{m} \qquad (9.1)$$

Величина m устанавливается нормами проектирования и обычно лежит в пределах 200...1000 единиц. Отсюда следу-

ет, что перемещения при изгибе малы по сравнению с размерами конструкции. Этот факт позволяет ввести некоторые упрощения, в частности, пренебречь горизонтальными перемещениями u. В дальнейшем будем учитывать только вертикальные перемещения v (в общем случае – перемещения, нормальные к недеформированной оси), называя их прогибами балки (рис. 9.2)

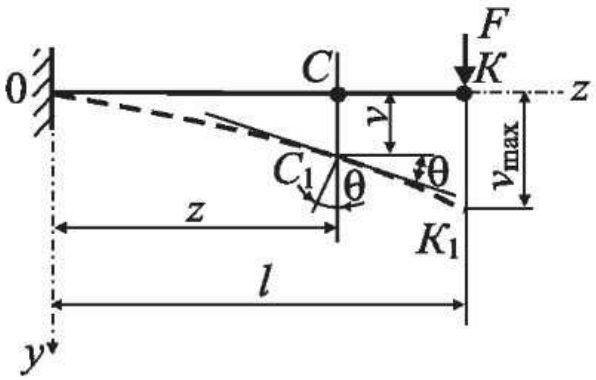


Рис. 9.2

В точке C_1 к оси изогнутой балки проведена касательная, угол наклона которой к оси z обозначен θ. Принимая гипотезу плоских сечений, можно считать, что угол поворота поперечного сечения в этой точке также равен θ (см. рис. 9.2)

Бесконечно малому приращению координаты dz соответствует приращение прогиба dv (рис. 9.3), откуда $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{dv}{dz}$.

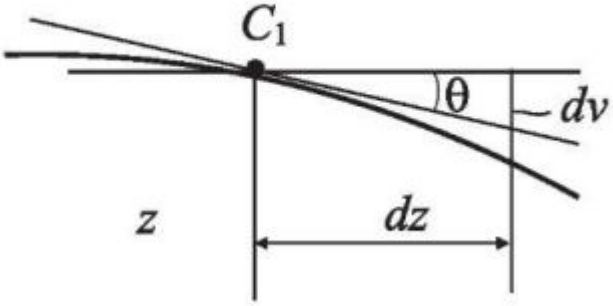


Рис. 9.3

При малых прогибах малы и углы θ, вследствие чего можно считать

$$\operatorname{tg}\theta \approx \theta,$$

где угол выражен в радианах.

Окончательная связь между прогибами v и углами поворота сечения θ принимает вид

$$\theta = \frac{dv}{dz}. \qquad (9.2)$$

Таким образом, задача определения перемещений при изгибе сводится к отысканию двух функций – прогибов $v(z)$ и углов поворота $\theta(z)$.

Введём для них следующие правила знаков. Прогиб будем считать положительным, если он направлен в сторону координатной оси y.

Угол поворота положителен, если касательная поворачивается по кратчайшему пути от направления оси z к направлению оси y.

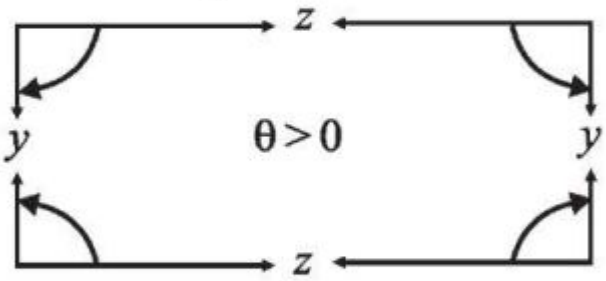


Рис. 9.4

На рис. 9.2 и прогиб, и угол поворота положительны. При других направлениях координатных осей для правильного выбора знака θ можно пользоваться схемой, показанной на рис. 9.4.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

При рассмотрении нормальных напряжений при изгибе нами была получена связь между кривизной балки $\frac{1}{\rho}$ и изгибающим моментом в сечении

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_x}{EI_x}.$$

С другой стороны, из курса высшей математики известно выражение для кривизны плоской кривой, описываемой уравнением $v(z)$:

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{\dfrac{d^2v}{dz^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}. \qquad (9.3)$$

Приравнивая правые части этих выражений, будем иметь

$$\frac{\dfrac{d^2z}{dz^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}=\pm\frac{M_x}{EI_x}. \qquad (9.4)$$

Полученное уравнение называют точным уравнением изогнутой оси балки. Нелинейность этого дифференциального уравнения вызывает значительные трудности при интегрировании. Однако для большинства решаемых практических задач справедливы предположения о малости прогибов и углов, что позволяет исключить нелинейность в (9.4), поскольку стоящая в знаменателе формулы производная

$$\frac{dv}{dz}=0<<1,$$

и квадратом этой величины по сравнению с единицей можно пренебречь.

Полученное таким образом упрощенное линейное уравнение

$$\frac{d^2v}{dz^2}=\pm\frac{M_x}{EI_x} \qquad (9.5)$$

мы в дальнейшем будем называть *дифференциальным уравнением изогнутой оси балки*. Знак в правой части уравнений (9.3)–(9.5) определяется направлением вертикальной оси y. При положительном значении изгибающего момента ось балки имеет характер вогнутой кривой с центром кривизны, расположенным в верхней полуплоскости. Если ось y направлена вверх, кривизна $\frac{1}{\rho}$ оказывается положительной (рис. 9.5, *а*), и правую часть необходимо брать со знаком плюс:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x}, \tag{9.6}$$

в противном случае, когда ось y направлена вниз, в правой части уравнения должен стоять минус (см. рис. 9.5, *б*):

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x}. \tag{9.7}$$

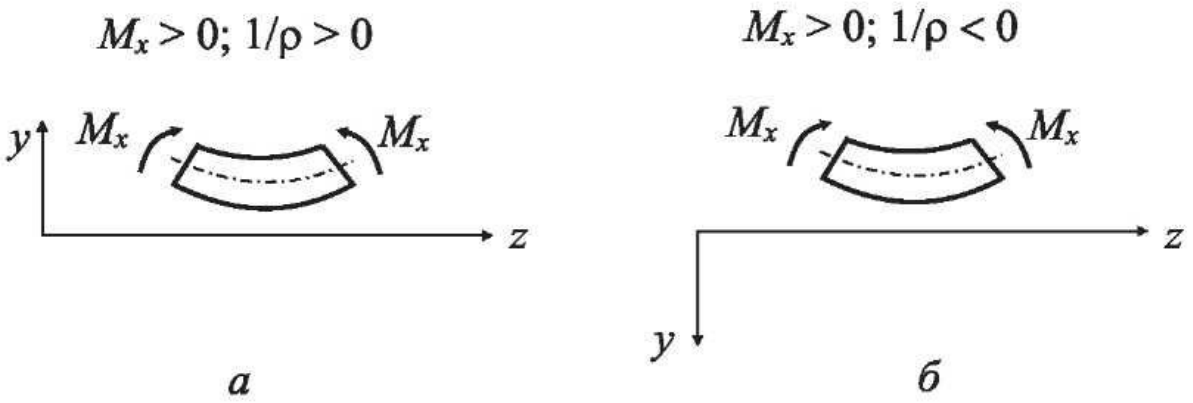


Рис. 9.5

Как говорилось ранее, в большинстве случаев мы будем направлять ось y вниз и использовать дифференциальное уравнение оси балки в форме (9.7).

Определение перемещений непосредственным интегрированием уравнения изогнутой оси балки

Для нахождения аналитических выражений прогибов и углов поворота необходимо решить дифференциальное уравнение (9.7). Эта задача упрощается в случае, если жёсткость балки остаётся постоянной по всей длине ($EI_x = \text{const}$).

Запишем уравнение изогнутой оси в следующем виде:

$$EI_x \frac{d^2v}{dz^2} = -M_x. \tag{9.8}$$

Зная закон изменения изгибающих моментов по длине балки, можно считать правую часть уравнения (9.8) известной. Проинтегрируем левую и правую часть уравнения

$$\int EI_x \frac{d^2v}{dz^2} dz = -\int M_x dz.$$

Порядок производной в левой части уравнения понизится, в результате чего будем иметь выражение для углов поворота как функции координаты z:

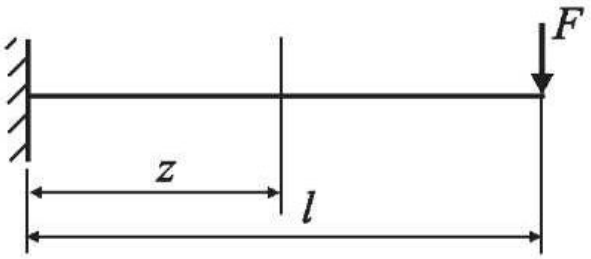
$$EI_x \frac{dv}{dz} = EI_x \theta = -\int M_x dz + C_1.$$

Повторное интегрирование даёт выражение для функции прогибов

$$EI_x v = -\int dz \int M_x dz + C_1 z + C_2.$$

Здесь C_1, C_2 – постоянные интегрирования, которые могут быть найдены из условий закрепления балки.

Пример 9.1. Нахождение углов поворота и прогибов консольной балки.



Решение. Запишем выражение для изгибающих моментов M_x в произвольном сечении балки z

$$M_x = -F(l - z).$$

Уравнения для углов поворота и прогибов примут вид

$$EI_x \theta = \int F(l - z) dz + C_1 = Flz - F\frac{z^2}{2} + C_1,$$

$$EI_x v = \int \left(Flz - F\frac{z^2}{2} + C_1 \right) dz = Fl\frac{z^2}{2} - F\frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2.$$

Постоянные интегрирования найдём из граничных условий:

при $z = 0$: $v = 0$;

$\theta = 0$,

откуда следуст

$$C_1 = 0;$$

$$C_2 = 0.$$

Таким образом, получаем окончательный вид для функций перемещений

$$EI_x\theta = Fz - F\frac{z^2}{2},$$

$$EI_x v = F\frac{z^2}{2} - F\frac{z^3}{6}.$$

Для шарнирно опёртой балки граничными условиями служат равенства нулю прогибов над опорами. В тех случаях, когда на разных участках балки изгибающий момент имеет различные законы изменения, для каждого такого участка необходимо составлять свои дифференциальные уравнения. При их интегрировании появляются дополнительные постоянные, общее число которых равно удвоенному числу участков. Для определения постоянных интегрирования помимо условий закрепления необходимо использовать условия непрерывности решений на границах участков:

$$\theta_{\text{л}} = \theta_{\text{п}};$$

$$v_{\text{л}} = v_{\text{п}},$$

где индекс «л» соответствует значению перемещений при подходе к границе участков слева, а «п» – справа.

Появление дополнительных постоянных интегрирования может значительно усложнить задачу, поэтому изложенный подход используется лишь в простейших случаях, когда мы имеем дело с одним, в крайнем случае – с двумя силовыми участками.

Определение перемещений в балках методом начальных параметров

Данный метод был разработан с целью упрощения расчётов при нахождении функций прогибов и углов поворота в балках. Его суть заключается в использовании универсальных уравнений для функций перемещений, содержащих только две постоянные интегрирования, независимо от числа силовых участков. Эти константы представляют собой значения угла поворота и прогиба в начале координат (начальные параметры) и легко находятся из условий закрепления балки.

Рассмотрим участок балки длиной z, нагруженный, как показано на рис. 9.6.

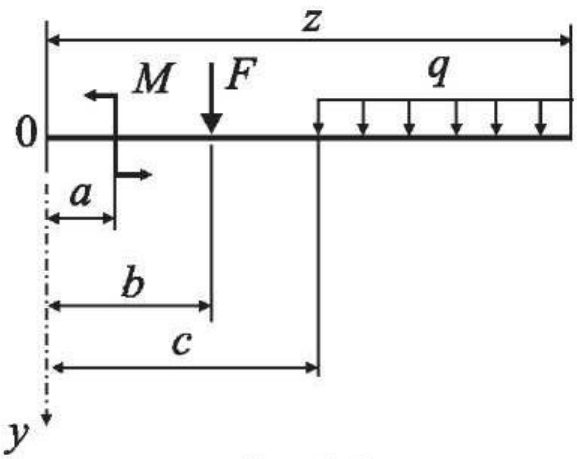


Рис. 9.6

Начало координат выбрано на левом торце балки, ось ординат y направлена вниз, направление нагрузок таково, чтобы создаваемый ими в сечении z изгибающий момент был отрицательным.

Запишем уравнение изогнутой оси в форме

$$EI_x \frac{d\theta}{dz} = -M_x$$

и проинтегрируем его от 0 до z:

$$EI_x\theta\Big|_0^z = -\int_0^z M_x dz.$$

Полученный результат представим в следующем виде:

$$EI_x\theta(z) = EI_x\theta(0) - \int_0^z M_x dz. \qquad (9.9)$$

Выполнив повторное интегрирование с учётом того, что $0 = \frac{dv}{dz}$,

получим $EI_x v(z)\Big|_0^z = EI_x \theta(0) z - \int_0^z dz \int_0^z M_x dz$,

или

$$EI_x v(z) = EI_x v(0) + EI_x \theta(0) z - \int_0^z dz \int_0^z M_x dz. \qquad (9.10)$$

Прогиб и угол поворота в начале координат, входящие в правую часть выражения (9.10), называют начальными параметрами и обычно обозначают следующим образом:

$$EI_x v_0 = EI_x v(0),$$
$$EI_x \theta_0 = EI_x \theta(0). \qquad (9.11)$$

Рассмотрим подробнее интеграл, входящий в правую часть уравнения (9.9). Для этого представим изгибающий момент в виде суперпозиции моментов от каждой из нагрузок в отдельности:

$$\int_0^z M_x(z) dz = -\int_0^z \left(M_{xM} + M_{xF} + M_{xq}\right) dz =$$

$$= -\int_a^z M dz - \int_b^z F(z-b) dz - \int_c^z \frac{q(z-c)^2}{2} dz.$$

В нижних пределах интегрирования учтено, что нагрузки создают изгибающий момент на участке, лишь начиная с некоторого значения координаты z: момент M – начиная со значения $z = a$, сила F – с точки её приложения $z = b$ и т. д.

Интегрируя по известным правилам без раскрытия скобок, получим

$$\int_0^z M_x dz = -M(z-a) - F\frac{(z-b)^2}{2} - q\frac{(z-c)^3}{6}. \qquad (9.12)$$

Повторное интегрирование даёт следующий результат:

$$\int_0^z dz \int_0^z M_x dz = -M\frac{(z-a)^2}{2} - F\frac{(z-b)^3}{6} - q\frac{(z-c)^4}{24}. \qquad (9.13)$$

Подставляя полученные выражения в (9.9), (9.10), найдём уравнения для углов поворота и прогибов

$$EI_x\theta = EI_x\theta_0 + M(z-a) + F\frac{(z-b)^2}{2} + q\frac{(z-c)^3}{6},$$

$$EI_x v = EI_x v_0 + EI_x\theta_0 z + M\frac{(z-a)^2}{2} + F\frac{(z-b)^3}{6} + q\frac{(z-c)^4}{24}.$$

Обобщая результат на случай произвольного числа внешних нагрузок, получим *универсальные уравнения метода начальных параметров* для перемещений при изгибе

$$EI_x\theta = EI_x\theta_0 + \sum_{i\ 0}^{l} M_i(z-a_i) + \sum_{j\ 0}^{m} F_j\frac{(z-b_j)^2}{2} + \sum_{k\ 0}^{n} q_k\frac{(z-c_k)^3}{6},$$

$$EI_x v = EI_x v_0 + EI_x\theta_0 z + \sum_{i\ 0}^{l} M_i\frac{(z-a_i)^2}{2} +$$

$$+ \sum_{j\ 0}^{m} F_j\frac{(z-b_j)^3}{6} + \sum_{k\ 0}^{n} q_k\frac{(z-c_k)^4}{24}.$$

Здесь θ_0, v_0 – угол поворота и прогиб балки в начале координат (*начальные параметры*), определяемые из граничных условий;

M_i, F_j, q_k – действующие на балку нагрузки;

l, m, n – количество соответствующих нагрузок, приложенных на участке балки от начала координат до сечения z;

a_i, b_j – координаты приложения сосредоточенных нагрузок;

c_k – координаты начала действия погонных нагрузок. В случае, если действие погонной нагрузки не доходит до правой границы участка, она условно продляется до конца балки, а на ненагруженной части балок компенсируется такой же по величине нагрузкой противоположного направления (рис. 9.7).

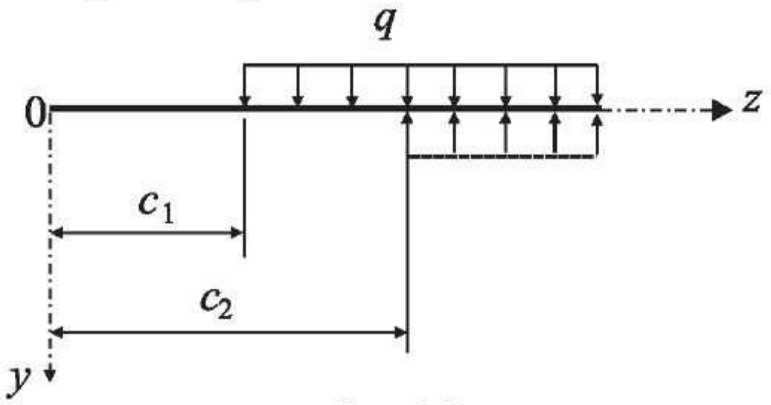


Рис. 9.7

Знаки каждого из слагаемых в суммах выражений противоположны знаку изгибающего момента в сечении z, который возникает от данной нагрузки. Другими словами, нагрузка входит в универсальные уравнения (9.14) со знаком плюс, если вызывает прогиб относительно рассматриваемого сечения z в направлении оси y, т. е. в положительную сторону.

При определении перемещений в некотором сечении z в выражения (9.14) входят только нагрузки, приложенные на участке балки между этим сечением и началом координат.

Пример 9.2. Определение перемещений в балке методом начальных параметров.

Решение:

Для изображённой на рис. 9.8, *а* балки определяем опорные реакции R_A и R_B.

Описанными ранее методами строим эпюры Q_y и M_x (см. рис. 9.8, *в*, *г*).

Выбираем начало координат в точке A (см. рис. 9.8, *б*).

Записываем универсальные уравнения метода начальных параметров в общем виде применительно к нашей задаче.

Поскольку размеры и форма сечения балки нам неизвестны, будем искать не сами перемещения, а угол поворота сечения и прогиб, умноженные на изгибную жёсткость EI_x.

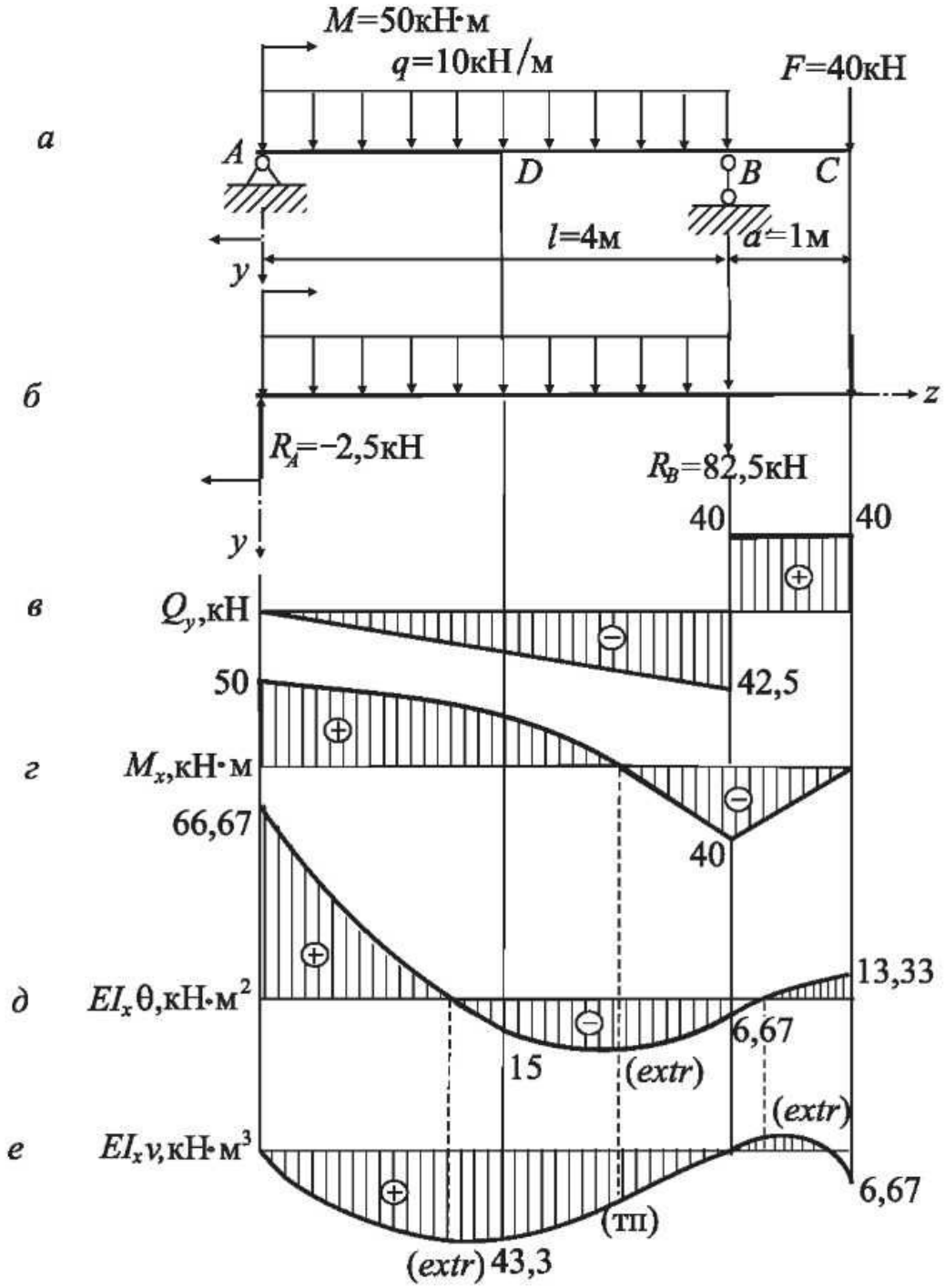


Рис. 9.8

$$EI_x\theta = EI_x\,\theta_0 - Mz - R_A\frac{z^2}{2} + q\frac{z^3}{6}\bigg|_1 - R_B\frac{(z-4)^2}{2} - q\frac{(z-4)^3}{6},$$

$$EI_x v = EI_x v_0 + EI_x\theta_0 z - M\frac{z^2}{2} - R_A\frac{z^3}{6} +$$

$$+ q\frac{z^4}{24}\bigg|_1 - R_B\frac{(z-4)^3}{6} - q\frac{(z-4)^4}{24}.$$

До вертикальной черты стоят слагаемые от нагрузок, приложенных на первом силовом участке, т. е. между сечениями A и B. При вычислении перемещений на этом участке нужно пользоваться только этими членами уравнений. Для нахождения перемещений на втором участке необходимо использовать все члены универсальных уравнений, включая стоящие за чертой.

Определим начальные параметры $EI_x\theta_0$ и $EI_x v_0$. Начало координат выбрано нами в сечении A, где расположена опора, следовательно, $EI_x v_0 = 0$.

Второй начальный параметр определим из условия того, что в сечении B ($z = l$) прогиб также отсутствует:

$$EI_x v(l) = EI_x 0_0 l - M\frac{l^2}{2} - R_A\frac{l^3}{6} + q\frac{l^4}{24} = 0.$$

Отсюда следует

$$EI_x\theta_0 = M\frac{l}{2} + R_A\frac{l^2}{6} - q\frac{l^3}{24} =$$

$$= 50\cdot 2{,}0 - 2{,}5\frac{16}{6} - 10\frac{64}{24} = 66{,}67\ \text{кН}\cdot\text{м}^2.$$

Здесь учтено, что размерность найденной величины совпадает с размерностью изгибной жёсткости.

Определим обобщённые перемещения в характерных сечениях балки.

Сечение A $\quad z = 0$:

$$EI_x 0_A = EI_x 0_0 = 66{,}67\ \text{кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI_x v_A = EI_x v_0 = 0.$$

Сечение D $\quad z = 2{,}0$ м:

$$EI_x\theta_D = EI_x\theta_0 - 50\cdot 2{,}0 + 2{,}5\cdot 2{,}0 + 10\frac{8}{6} = -15{,}0\ \text{кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI_x v_D = EI_x\theta_0\cdot 2{,}0 - 50\cdot\frac{4{,}0}{2{,}0} + 2{,}5\frac{8}{6} + 10\frac{16}{24} = 43{,}33\ \text{кН}\cdot\text{м}^2.$$

Сечение B $z = 4{,}0$:

$$EI_x\theta_B = EI_x\theta_0 - 50\cdot 4{,}0 + 2{,}5\frac{16}{2} + 10\frac{64}{6} = -6{,}67\ \text{кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI_x v_B = 0.$$

Сечение C $z = 5{,}0$:

$$EI_x 0_c = EI_x 0_0 - 50\cdot 5{,}0 + 2{,}5\frac{25}{2} +$$

$$+10\frac{125}{6} - 82{,}5\frac{1^2}{2} - 10\frac{1^3}{6} = 13{,}33\ \text{кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI_x v_C = EI_x\theta_0\cdot 5{,}0 - 50\frac{25}{2} + 2{,}5\frac{125}{2} +$$

$$+10\frac{625}{24} - 82{,}5\frac{1^3}{6} - 10\frac{1^4}{24} = 6{,}67\ \text{кН}\cdot\text{м}^2.$$

Построенные по найденным значениям эпюры обобщённых перемещений представлены на рис. 9.8, *д,е*. При построении учитывались уже известные дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y; \qquad EI_x\frac{d0}{\text{dz}} = -M_x; \qquad \frac{dv}{dz} = \theta.$$

Поскольку изгибающий момент пропорционален производной от угла поворота, то в сечении, где момент обращается в нуль, угол поворота имеет экстремум, а обобщённый прогиб, для которого изгибающий момент равен второй производный, меняет знак кривизны, т. е. имеет точку перегиба.

В свою очередь, функция прогибов имеет экстремумы в тех сечениях, где её производная – угол поворота сечения, обращается в нуль. На эпюрах перемещений экстремальные значения обозначены сокращением (extr), а точка перегиба – (тп). Положительные значения прогибов откладываются в направлении оси y, т. е. вниз (рис. 9.8, *е*)

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Обобщенные силы и обобщенные перемещения

Во многих случаях не требуется находить перемещения как функции координат, достаточно уметь вычислять перемещения в конкретных точках конструкции по заданным направлениям.

Эту задачу можно решить, основываясь на фундаментальных принципах механики – начале возможных перемещений и законе сохранения энергии.

Работа W постоянной силы F на перемещении в направлении силы Δ_F равна произведению

$$W = F\Delta_F. \qquad (10.1)$$

Поскольку нагрузки в задачах сопротивления материалов довольно разнообразны и, как правило, представляют собой группы воздействий сосредоточенных сил и моментов, погонных нагрузок и т. д., введём понятие *обобщённой силы*, под которой будем понимать любую внешнюю нагрузку.

Обобщённым перемещением будем называть тот вид перемещения точек конструкции, на котором обобщённая сила совершает работу.

Так, например, если обобщённая сила представляет собой действующую на балку сосредоточенную силу, обобщённым перемещением будет прогиб балки в месте приложения силы. Обобщённой силе в виде сосредоточенного момента будет соответствовать обобщённое перемещение в виде угла поворота сечения. Для стержня, растянутого приложенными на концах силами F, за обобщенную силу можно

принять величину F, а за обобщённое перемещение – изменение расстояния между точками приложения силы, т. е. удлинение стержня.

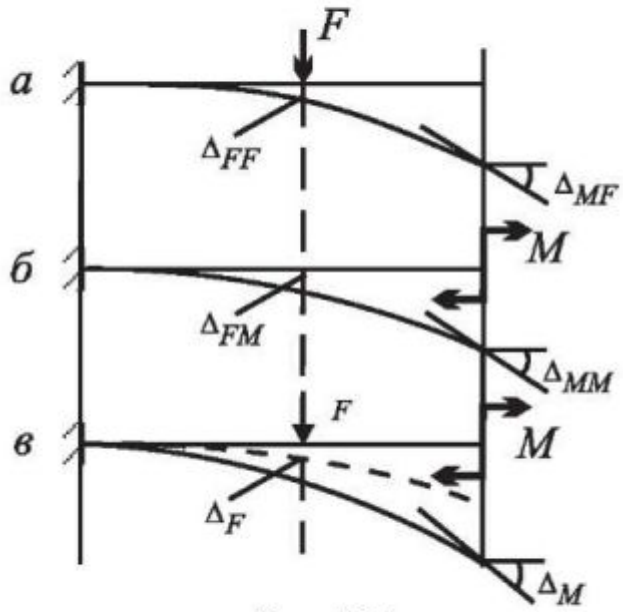


Рис. 10.1

В дальнейшем обобщённые перемещения будем обозначать греческой буквой Δ с двумя индексами. Первый индекс указывает точку и направление перемещения, второй – его причину, т. е. вызвавшую данное перемещение нагрузку. При обозначении полного перемещения от нескольких воздействий второй индекс опускается. На рис. 10.1 показаны обобщённые перемещения в консольной балке, нагруженной сосредоточенными силой и моментом.

Прогиб балки в месте приложения силы F от воздействия самой силы обозначен Δ_{FF} (см. рис.10.1, *а*), прогиб от действия момента М обозначен Δ_{FM} (см. рис.10.1, *б*). Угловое перемещение в месте приложения момента от силы F обозначено как $\Delta_{MF,}$ а от действия момента M – Δ_{MM} .Полное перемещение от совместного действия нагрузок обозначено Δ_F и Δ_M соответственно (см. рис. 10.1, *в*).

Перемещения, вызванные обобщённой единичной безразмерной силой $\overline{F}=1$, будем обозначать буквой δ с соответствующими индексами и называть удельными перемещениями. Так, δ_{ij} – перемещение точки приложения i-ой единичной силы (в направлении этой силы) от действия j-ой обобщённой единичной силы. Под обобщёнными единичными силами могут выступать как сосредоточенные силы и моменты, так и группы этих воздействий.

Потенциальная энергия деформации стержневой системы

Для нахождения потенциальной энергии деформации выделим из стержня бесконечно малый элемент длиной dz. В общем случае нагружения в каждом из выделенных сечений возникает шесть внутренних силовых факторов – изгибающие и крутящий моменты, нормальная и поперечные силы. Работа, совершаемая этими внутренними усилиями при деформировании элемента, равна потенциальной энергии, накопленной в элементарном участке стержневой системы. При этом каждый из силовых факторов вызывает такую деформацию элемента, на которой остальные внутренние усилия не совершают работы. Так, если в качестве обобщённой силы взять нормальную силу N, то в качестве обобщённого перемещения будет выступать изменение длины элемента Δdz. При этом потенциальная энергия деформации элемента определится через работу $dW_в$ внутренней силы N по теореме Клапейрона

$$dU(N) = dW_в = \frac{1}{2} N \cdot \Delta dz.$$

С учётом закона Гука $\Delta dz = \frac{N dz}{EA}$

получим

$$dU(N) = \frac{N^2 dz}{2EA}.$$

Здесь принято, что сила в процессе деформации элемента не остаётся постоянной, а медленно возрастает от нуля до своего окончательного значения.

Потенциальная энергия деформации всей системы найдётся интегрированием по длине составляющих систему стержней

$$U(N) = \int_l \frac{N^2 dz}{2EA}. \qquad (10.2)$$

Если стержни работают только на растяжение и сжатие, то потенциальная энергия зависит только от нормальной силы $U = U(N)$. В общем случае нагружения необходимо учесть вклад каждого из внутренних силовых факторов

$$U = U(M_к) + U(M_x) + U(M_y) + U(N) + U(Q_x) + U(Q_y) \quad (10.3)$$

Для крутящего момента $M_к$ обобщённым перемещением будет величина $d\varphi$, представляющая собой взаимный угол закручивания сечений элемента. При этом

$$dU(M_к) = \frac{1}{2} M_к d\varphi,$$

или с учётом того что $d\varphi = \frac{M_к dz}{GJ_к}$, потенциальная энергия элемента $dU(M_к) = \frac{M_к^2 d\varphi}{2GI_к}$.

Интегрируя по длине всех элементов системы, получим

$$U(M_к) = \int_l \frac{M_к^2 d\varphi}{2GI_к}. \quad (10.4)$$

Аналогично находится вклад изгибающих моментов в потенциальную энергию системы

$$U(M_x) = \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x},$$

$$U(M_y) = \int_l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y}. \quad (10.5)$$

Здесь учтено, что изгибающие моменты совершают работу на обобщённом перемещении, в качестве которого выступает взаимный угол поворота сечений $d\theta = \frac{dz}{\rho}$, где кривизна оси элемента $\frac{1}{\rho} = \frac{M_и}{EI_и}$ в каждой из двух плоскостей нагружения будет своей.

Наконец, получим выражение потенциальной энергии от действия поперечных сил. Для этого рассмотрим элемент балки, находящийся в состоянии плоского поперечного изгиба.

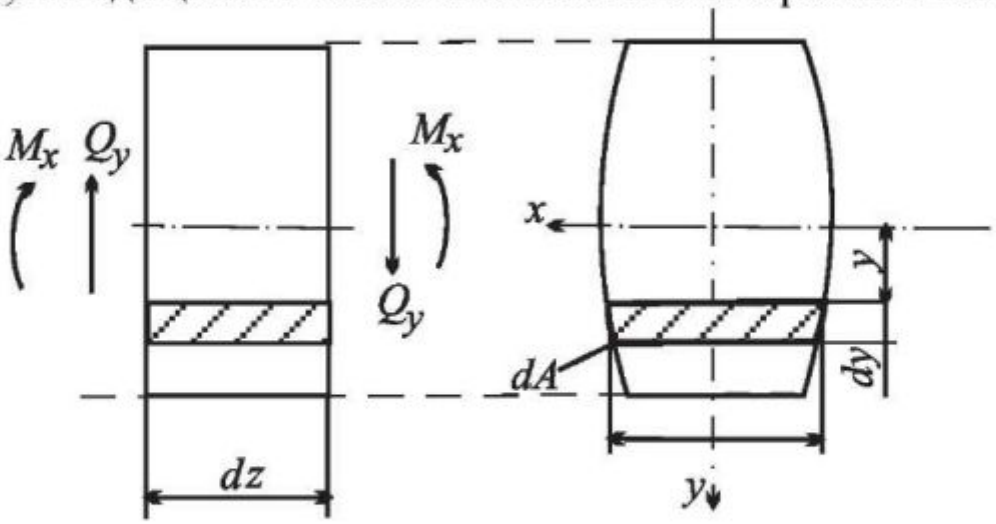


Рис. 10.2

На рис. 10.2 заштрихована часть элемента, полученная двумя бесконечно близкими продольными сечениями, проведёнными на расстоянии y от нейтральной оси. На гранях этого элемента действуют нормальные и касательные напряжения (рис. 10.3).

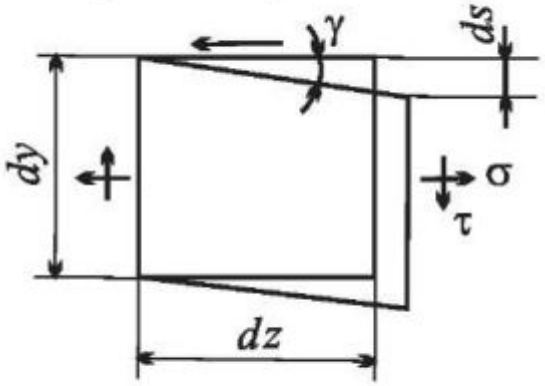


Рис. 10.3

Нормальные напряжения связаны с изгибающими моментами, вклад которых в потенциальную энергию системы мы уже рассмотрели.

Касательные напряжения вызывают параллельный сдвиг граней элемента на величину $ds = \gamma dz$, или с учётом закона Гука при сдвиге $ds = \dfrac{\tau}{G} dz$, где G – модуль сдвига.

Работа внутренних элементарных сил τdA на перемещении ds

$$\frac{1}{2}\tau dA ds = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G} dA dz .$$

После интегрирования по площади поперечного сечения A

$$dU(Q_y)=\int_A \frac{\tau^2}{2G}dAdz\,.$$

Учитывая, что по формуле Журавского

$$\tau=\frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b},$$

получим

$$dU(Q_y)=\frac{1}{2G}\int_A \frac{Q_y^2\left(S_x^{\text{отс}}\right)^2}{I_x^2 b^2}dAdz=\frac{Q_y^2 dz}{2GA}\cdot\frac{A}{I_x^2}\int_A \frac{\left(S_x^{\text{отс}}\right)}{b^2}dA=k_y\frac{Q_y^2 dz}{2GA}.$$

Здесь $k_y=\frac{A}{I_x^2}\int_A \frac{\left(S_x^{\text{отс}}\right)}{b^2}dA$ – безразмерный коэффициент, зависящий от формы сечения. Для сечений простой формы его несложно вывести. Так, для прямоугольника он равен 6/5; для круга – 10/9; для стандартных тонкостенных профилей $k_y = 2\ldots2{,}4$.

Интегрируя по длине всех элементов системы, находим

$$U(Q_y)=\int_l \frac{k_y Q_y^2 dz}{2GA}.$$

Аналогично

$$U(Q_x)=\int_l \frac{k_x Q_x^2 dz}{2GA}.$$

Итак, в общем случае нагружения потенциальная энергия стержневой системы в соответствии с (11.3) находится следующим образом:

$$U=\int_l \frac{M_к^2 dz}{2GI_к}+\int_l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}+\int_l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y}+\int_l \frac{N^2 dz}{2EA}+$$
$$+\int_l \frac{k_x Q_x^2 dz}{2GA}+\int_l \frac{k_y Q_y^2 dz}{2GA}. \qquad (10.6)$$

Интегрирование в (10.6) ведётся по длине всех входящих в систему стержней.

Следует отметить, что не все слагаемые в этом выражении равнозначны по величине. Как правило, потенциальная энергия нормальных и поперечных сил значительно меньше энергии крутящих и изгибающих моментов и в практических расчётах ею можно пренебречь. Например, при плоском изгибе балок и рам потенциальную энергию деформации с достаточной для инженерных расчётов точностью можно вычислять с учётом только изгибающего момента:

$$U = \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}. \qquad (10.7)$$

Принцип возможных перемещений. Интеграл Мора

Известный из курса теоретической механики *принцип возможных перемещений Лагранжа* применительно к деформируемым системам можно сформулировать следующим образом: *если система под действием приложенных нагрузок находится в равновесии, то сумма работ внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях точек системы равны нулю*:

$$W + W_в = 0. \qquad (10.8)$$

Здесь $W = \Sigma F_i \Delta_{Fi}$ – работа внешних обобщённых сил F_i на их возможных обобщённых перемещениях Δ_{Fi}; $W_в$ – работа внутренних сил.

Внутренние силы препятствуют возникновению деформаций от нагрузки, поэтому работу этих сил следует считать отрицательной. Возможными называют перемещения, которые не противоречат наложенным на систему связям, т. е. учитывают условия закрепления конструкции.

Возможные перемещения добавляются к действительным, возникающим от приложенных нагрузок. При этом работа внутренних сил системы на этих дополнительных возможных перемещениях будет равна

$$-W_{\text{в}} = \int_l M_{\text{к}} d\varphi + \int_l M_x d\theta_{\text{x}} + \int_l M_y d\theta_y + \\ + \int_l N\Delta dz + \int_l k_x Q_x ds_x + \int k_y Q_y ds_y. \qquad (10.9)$$

Силы в процессе бесконечно малого изменения перемещений считаются неизменными, поэтому множитель 1/2 в выражении работ отсутствует.

Для нахождения перемещений в произвольной точке конструкции поступим следующим образом. Рассмотрим два состояния нашей системы: первое состояние, которое возникает от действия приложенных нагрузок, будем называть *грузовым*, все относящиеся к нему величины – внутренние силовые факторы и соответствующие им обобщённые перемещения – пометим индексом «*l*». Второе состояние будет вызываться фиктивной обобщённой силой $\overline{F}=1$ (при нахождении углового перемещения в роли такой силы будет выступать единичный безразмерный момент). Это состояние будем называть *единичным*. Все величины, относящиеся к единичному состоянию, пометим индексом «1».

Сформулируем принцип возможных перемещений для системы, находящейся в единичном состоянии, т. е. нагружённой фиктивной единичной силой в той точке, где нас интересует перемещение. При этом в качестве возможных перемещений возьмём обобщённые перемещения грузового состояния – т.е. действительные перемещения системы, возникшие от приложенных к ней нагрузок. Эти перемещения хотя и не являются бесконечно малыми, как того требует принцип Лангранжа, но по сравнению с размерами конструкции они малы и удовлетворяют условиям закрепления. В соответствии с (10.1) работа фиктивной единичной силы будет равна искомому перемещению

$$W = \overline{F}\Delta_{1F} = 1 \cdot \Delta_{1F} = \Delta_{1F} \qquad (10.10)$$

Обобщённые перемещения грузового состояния системы, входящие в выражение (10.9), имеют вид

$$d\varphi = \frac{M_{F\kappa}dz}{GI_\kappa}; \qquad \Delta dz = \frac{N_F dz}{EA};$$

$$d\theta_x = \frac{M_{Fx}dz}{EI_x}; \qquad ds_x = \frac{Q_{Fx}ds}{GA}; \qquad (10.11)$$

$$d0_y = \frac{M_{Fy}dz}{EI_y}; \qquad ds_y = \frac{Q_{Fy}ds}{GA}.$$

Умножая внутренние усилия от единичной нагрузки на соответствующие обобщённые перемещения (10.11) и интегрируя по длине всех стержней конструкции, запишем (10.8) следующим образом:

$$\Delta_{1F} = \int_l \frac{M_{1\kappa}M_{F\kappa}}{GI_\kappa} + \int_l \frac{M_{1x}M_{Fx}}{EI_x} + \int_l \frac{M_{1y}M_{Fy}}{EI_y}dz +$$

$$+ \int_l \frac{N_1 N_F}{EA}dz + \int_l \frac{k_y Q_{1x}Q_{Fx}}{GA}dz + \int_l \frac{k_y Q_{1y}Q_{Fy}}{GA}dz. \qquad (10.12)$$

Полученное выражение называется *интегралом Мора*. Оно может быть использовано для определения перемещений в любых произвольно нагруженных упругих стержневых системах. Как говорилось ранее, не все интегралы в правой части (10.12) имеют одинаковый порядок величины. При наличии в поперечных сечениях стержней изгибающих и крутящего моментов последние три слагаемые можно не учитывать.

В случае простых видов нагружения интеграл Мора записывается проще. Например, для системы, работающей на растяжении и сжатие, перемещение определяется так

$$\Delta_i = \int_l \frac{N_{1i}N_F}{EA}dz. \qquad (10.13)$$

Выражение (10.13) нужно понимать как сумму интегралов по длине каждого из стержней системы. Здесь Δ_i – перемещение точки приложения единичной фиктивной силы $\overline{F}_i = 1$ в направлении этой силы; N_{1i} – нормальные силы в стержнях от действия единичной силы; N_{iF} – нормальные силы в стержнях системы в грузовом состоянии, т. е. от действия различных нагрузок.

При кручении перемещения представляют собой углы закручивания

$$\varphi_i = \Delta_i = \int_l \frac{M_{1к} M_{Fк}}{GI_к} dz. \qquad (10.14)$$

В качестве обобщённых фиктивных сил в этом случае выступают единичные скручивающие моменты $\overline{M}_i = 1$, поочерёдно прикладываемые в тех сечениях, где требуется найти угловое перемещение.

При плоском изгибе перемещения с достаточной точностью можно найти, учитывая в выражении (10.12) только изгибающий момент:

$$\Delta_i = \int_l \frac{M_{1x} M_{Fx}}{EI_x} dz \qquad (10.15)$$

Индексы «F» в обозначении изгибающих моментов от нагрузки, так же как и индекс «x» для обозначения моментов единичного состояния, обычно опускают. Для определения прогиба в интересующей точке прикладывают сосредоточенную силу $\overline{F}_i = 1$, для нахождения угла поворота прикладывают сосредоточенный момент $\overline{M}_i = 1$. Если имеется несколько силовых участков, на каждом из которых уравнения изгибающих моментов $M_{1i}(z)$ и (или) $M_X(z)$ имеют различный вид, интегрирование ведётся по каждому из участков отдельно, а результаты алгебраически суммируются:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{m} \int_{l_j} \frac{M_{1i} M_x}{EI_x} dz_j, \qquad (10.16)$$

где m – число силовых участков; l_j – длина j-го силового участка.

Необходимо обратить внимание на то, чтобы выделение силовых участков и выбор локальных координат z_j на них было одинаковым как в грузовом, так и в единичном состояниях конструкции, т. е. внутренние усилия, стоящие под знаком интеграла, должны быть функциями одной и той же переменной.

Положительный знак результата свидетельствует о том, что перемещение происходит в направлении единичной обобщённой силы.

Пример 10.1. Определение перемещений интегралом Мора.

Для шарнирно опёртой балки постоянной жёсткости, находящейся под давлением равномерно распределённой нагрузки интенсивностью q (рис. 10.4, *а*), определить прогиб в середине пролёта и угол поворота сечения над опорой B.

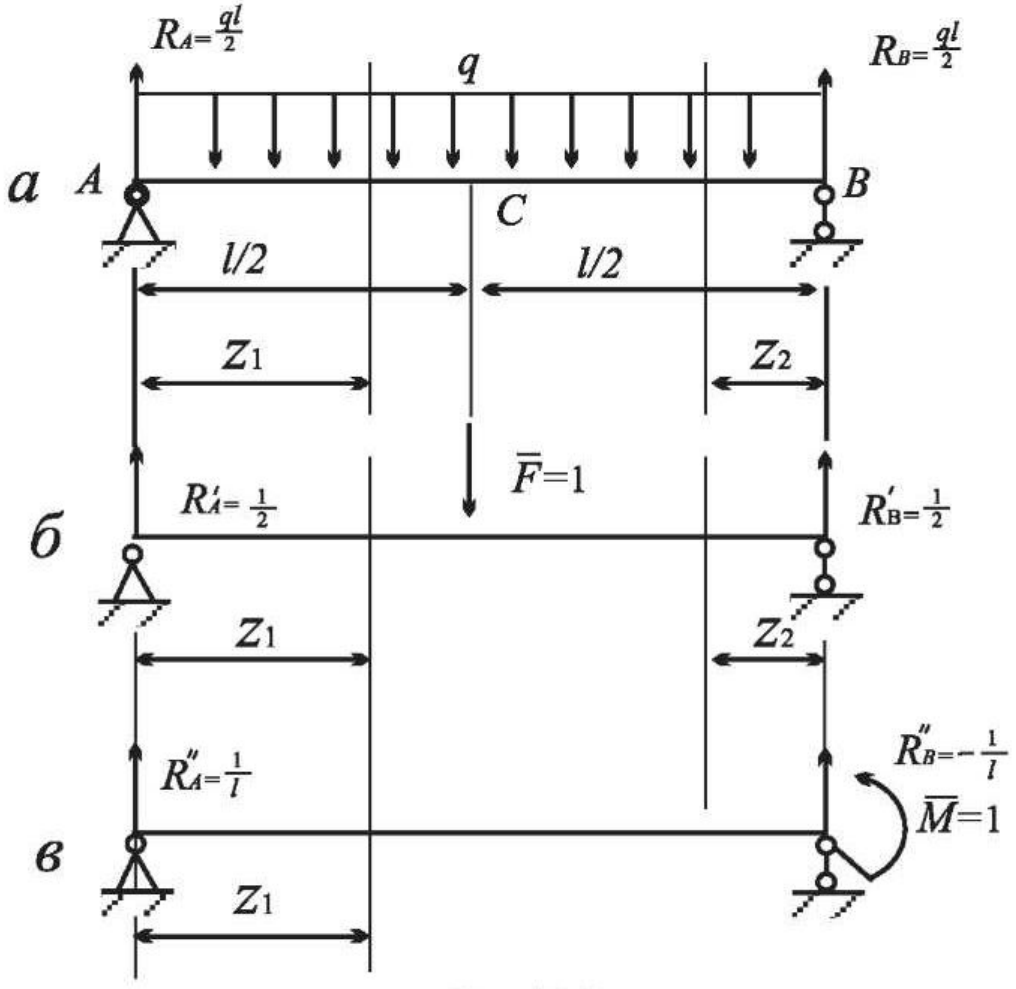


Рис. 10.4

Решение. Для определения прогиба в сечении C освобождаем балку от действия распределённой нагрузки и прикладываем в этом сечении фиктивную сосредоточенную силу $\overline{F} = 1$. В единичном состоянии балка имеет два силовых участка (см. рис. 10.4, *б*), такие же участки необходимо выделить и в грузовом состоянии балки. Запишем по участкам выражения изгибающих моментов:

I. $0 \le z_1 \le l/2$

$$M_x = R_A z_1 - q\frac{z_1^2}{2} = \frac{ql}{2}z_1 - q\frac{z_1^2}{2};$$

$$M_{11} = R'_A z_1 = \frac{z_1}{2}.$$

II. $0 \le z_2 \le l/2$

$$M_x = R_B z_2 - q\frac{z_2^2}{2} = \frac{ql}{2}z_2 - q\frac{z_2^2}{2};$$

$$M_{11} = R'_B z_2 = \frac{z_2}{2}.$$

Записываем интеграл Мора и вычисляем прогиб:

$$v_c = \Delta_1 = \int_0^{l/2}\frac{M_{11}M_x}{EI_x}dz_1 + \int_0^{l/2}\frac{M_{11}M_x}{EI_x}dz_2 =$$

$$= \frac{1}{EI_x}\left[\int_0^{l/2}\frac{z_1}{2}\left(\frac{ql}{2}z_1 - q\frac{z_1^2}{2}\right)dz_1 + \int_0^{l/2}\frac{z_2}{2}\left(\frac{ql}{2}z_2 - q\frac{z_2^2}{2}\right)dz_2\right] =$$

$$= \frac{2}{EI_x}\left(\frac{1}{12}qlz^3 - \frac{1}{16}qz^4\right)\Bigg|_0^{l/2} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_x}.$$

Здесь учтено, что в силу симметрии подынтегральные выражения оказываются одинаковыми. Найденный прогиб совпадает по направлению с приложенной единичной силой.

Для нахождения угла поворота вновь рассматриваем единичное состояние конструкции, возникающее под действием сосредоточенного безразмерного момента $\overline{M} = 1$, приложенного в сечении B (см. рис. 10.4, *в*). Поскольку в этом случае, как и в грузовом состоянии, имеется только один силовой участок, интегрировать будем по переменной z_1 по всей длине балки.

$$0 \le z_1 \le l$$

$$M_x = \frac{ql}{2} z_1 - q\frac{z_1^2}{2};$$

$$M_{12} = R_A'' z_1 = \frac{z_1}{l}.$$

$$0_B = \Delta_2 = \int_0^l \frac{M_{12} M_x}{EI_x} dz_1 = \frac{1}{EI_x} \int_0^l \frac{z_1}{l} \left(\frac{ql}{2} z_1 - q\frac{z_1^2}{2} \right) dz_1 =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{6} q z_1^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{z_1^4}{l} \right) \Bigg|_0^l = \frac{ql^3}{24EI_x}.$$

Результат получился положительным, следовательно, поворот сечения B происходит в направлении приложенного единичного момента, т. е. против часовой стрелки.

Определение перемещений способом Верещагина

Вычисление интеграла Мора можно упростить, если конструкция состоит из прямолинейных участков постоянной жёсткости. Упрощение основано на том, что внутренние усилия, возникающие от сосредоточенных единичных обобщённых сил, являются линейными функциями продольной координаты z.

Пусть на интервале от a до b требуется взять интеграл от произведения двух функций $f_1(z)$ и $f(z)$, причём одна из них, например $f_1(z)$ – линейна:

$$f_1(z) = c + kz. \qquad (10.17)$$

Тогда

$$J = \int_a^b f_1(z) f(z) dz = \int_a^b (c + kz) f(z) dz = c \int_a^b z f(z) dz + k \int_a^b z f(z) dz.$$

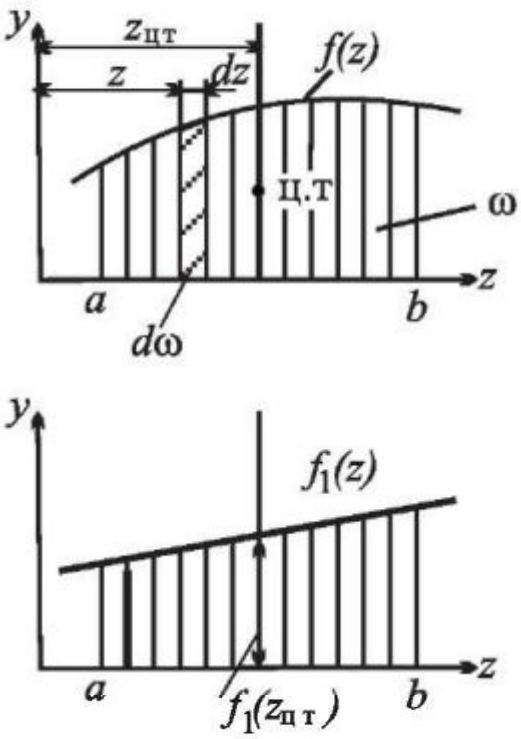


Рис. 10.5

Первый из интегралов может быть представлен графически площадью, ограниченной кривой $f(z)$, или, что то же самое, площадью эпюры этой функции ω (рис. 10.5).

$$\int_a^b f(z) dz = \int_\omega d\omega = \omega$$

Второй из интегралов, входящих в выражение для J, представляет собой статический момент площади ω относительно оси ординат y

$$\int_a^b z f(z) dz = \int_\omega z d\omega = \omega z_{\text{ц.т}},$$

где $z_{\text{ц.т}}$ = абсцисса центра тяжести эпюры f.

Тогда

$$J = c\omega + k\omega \cdot z_{\text{ц.т}} = \omega(c + k z_{\text{ц.т}}).$$

Но, поскольку $c + k z_{\text{ц.т}} = f_1(z_{\text{ц.т}})$, окончательно получим $J = \omega f_1(z_{\text{ц.т}})$.

Таким образом, интегрирование произведения двух функций, одна из которых линейна, можно заменить произведением площади эпюры функции f на ординату линейной функции f_1, взятую под центром тяжести эпюры f. Если линейны обе функции, то безразлично, перемножаются ли площадь первой эпюры с ординатой второй, или наоборот.

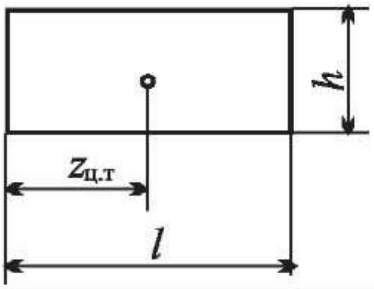
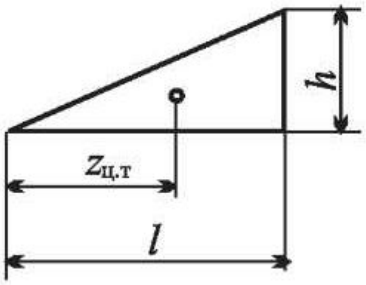
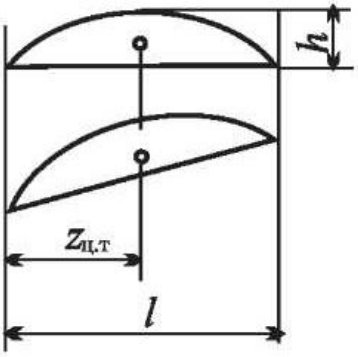
Способ А. К. Верещагина состоит в применении изложенного подхода к нахождению перемещений с помощью интеграла Мора. При плоском изгибе, например, выражение для перемещений (10.16) примет вид

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j \overline{M}_{cj}}{(EI_x)_j}. \qquad (10.18)$$

Здесь ω_j – площади простейших фигур, на которые разбивается эпюра изгибающих моментов M_x;

$\overline{M}_{cj}$ – ординаты с эпюры моментов M_{1i} от единичной нагрузки, взятые под центрами тяжести площадей ω_j;

n – число простейших фигур, на которые разбивается эпюра грузовых моментов M_x.

№ п/п	Фигура	ω	$z_{цт}$
1		lh	$l/2$
2		$\frac{1}{2}lh$	$\frac{2}{3}l$
3		$\frac{2}{3}lh = \frac{ql^3}{12}$	$l/2$

Необходимо учесть, что перед разбиением на простейшие фигуры должны быть выделены участки постоянной жёсткости, на которых эпюра M_x не имеет разрывов, а эпюра моментов от единичной нагрузки линейна – т. е. не имеет разрывов и изломов.

В подавляющем большинстве случаев эпюры внутренних усилий можно разбить на простейшие фигуры трёх типов – прямоугольники, треугольники и сегменты квадратной параболы. Формулы для вычисления их площадей и положений центров тяжести приведены в таблице.

Следует обратить внимание, что для последней фигуры площадь и положение центра тяжести не зависят от положения основания сегмента.

При вычислении перемещений по способу Верещагина в общем случае нагружения выражение для интегралов Мора (11.13) приобретёт следующий вид:

$$\Delta = \sum_j \frac{\omega_{\kappa j}\overline{M}^{\kappa}_{cj}}{(GI_{\kappa})_j} + \sum_j \frac{\omega_{xj}\overline{M}^{x}_{cj}}{(EI_x)_j} + \sum_j \frac{\omega_{yj}\overline{M}^{y}_{cj}}{(EI_y)_j} + \\ + \sum_j \frac{\omega_{Nj}\overline{N}_{cj}}{(EA)_j} + \sum_j k_x \frac{\omega_{Qxj}\overline{Q}^{x}_{cj}}{(GA)_j} + \sum_j k_y \frac{\omega_{Qyj}\overline{Q}^{y}_{cj}}{(GA)_j} \qquad (10.19)$$

Здесь $\omega_{\kappa j}, \omega_{xj}, \omega_{yj}, \omega_{Nj}, \omega_{Qxj}, \omega_{Qyj}$ – площади простых фигур, на которые разбиваются эпюры от заданной нагрузки для соответствующих внутренних силовых факторов; $\overline{M}^{\kappa}_{cj}, \overline{M}^{x}_{cj}, \overline{M}^{y}_{cj}, \overline{N}_{cj}, \overline{Q}^{x}_{cj}, \overline{Q}^{y}_{cj}$ – ординаты эпюр внутренних усилий от единичной силы под центрами тяжести выделенных фигур.

Практическое применение способа Верещагина для нахождения перемещений состоит в следующем:

1. Строятся эпюры внутренних силовых факторов от заданной нагрузки («грузовые» эпюры).

2. Строятся эпюры внутренних силовых факторов от единичной обобщённой силы, соответствующей искомому перемещению («единичные» эпюры).

3. Конструкция мысленно разбивается на участки, на которых «грузовые» эпюры не имеют разрывов, а «единичные» эпюры линейны, т. е. не имеют разрывов и изломов.

4. На каждом из выделенных участков «грузовые» эпюры разбиваются на простейшие фигуры, для каждой из которых вычисляется площадь и положение центра тяжести.

5. Вычисляются ординаты «единичных» эпюр под центрами тяжести выделенных простейших фигур.

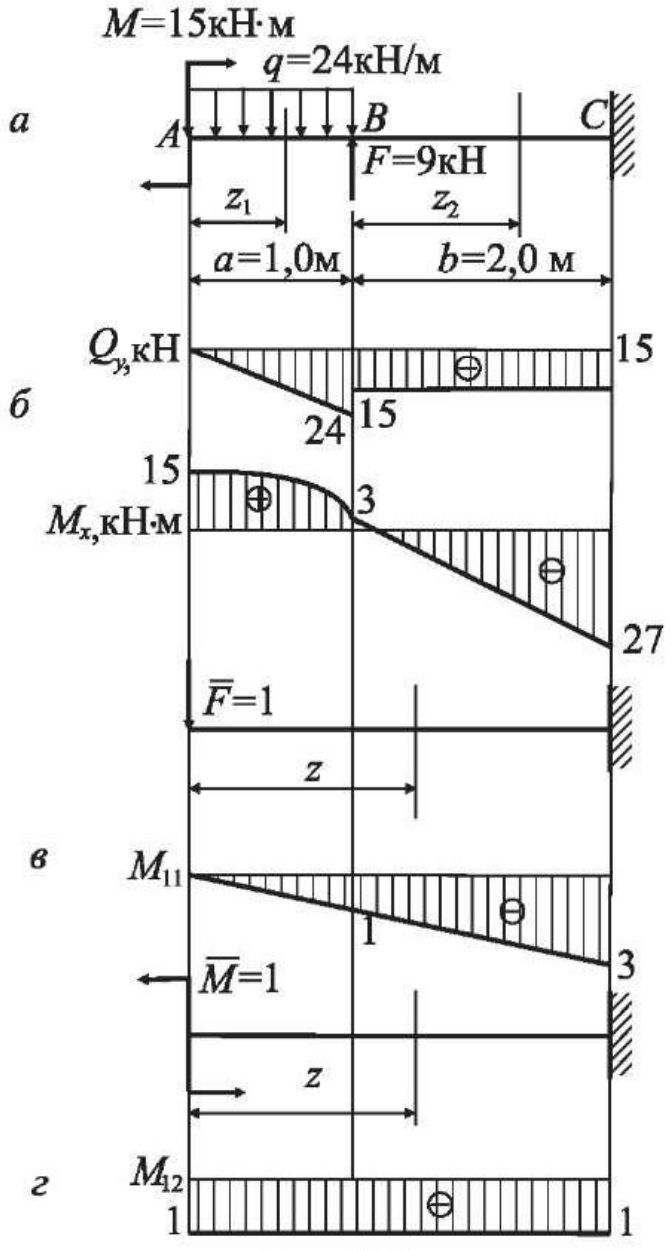


Рис. 10.6

6. Полученные площади и ординаты попарно перемножаются, а результаты алгебраически суммируются в соответствии с (10.19). Положительный знак результата означает, что найденное перемещение совпадает по направлению с обобщённой единичной силой.

Пример 10.2. Определение перемещений способом Верещагина.

Для балки постоянной жёсткости EI_x, изображённой на рис. 10.6, *а*, определить прогиб и угол поворота в сечении *A*.

Решение. Выделяем в грузовом состоянии балки два силовых участка и записываем для них уравнения внутренних силовых факторов:

I. $0 \le z_1 \le 1{,}0$м

$$Q_y = -qz_1 = -24z_1,$$

$$M_x = M - q\frac{z_1^2}{2} = 15 - 12z_1^2,$$

$$M_x(0) = 15{,}0\ \text{кН}\cdot\text{м},$$

$$M_x(1{,}0) = 3{,}0\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

II. $0 \le z_2 \le 2{,}0$м

$$Q_y = -qa + F = -15{,}0\text{кН};$$

$$M_x = M - qa\left(z_2 + \frac{a}{2}\right) + Fz_2 = 3 - 15z_2,$$

$$M_x(0) = 3{,}0\,\text{кН}\cdot\text{м},$$

$$M_x(1{,}0) = -27{,}0\text{кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x приведены на рис. 10.6, *б*.

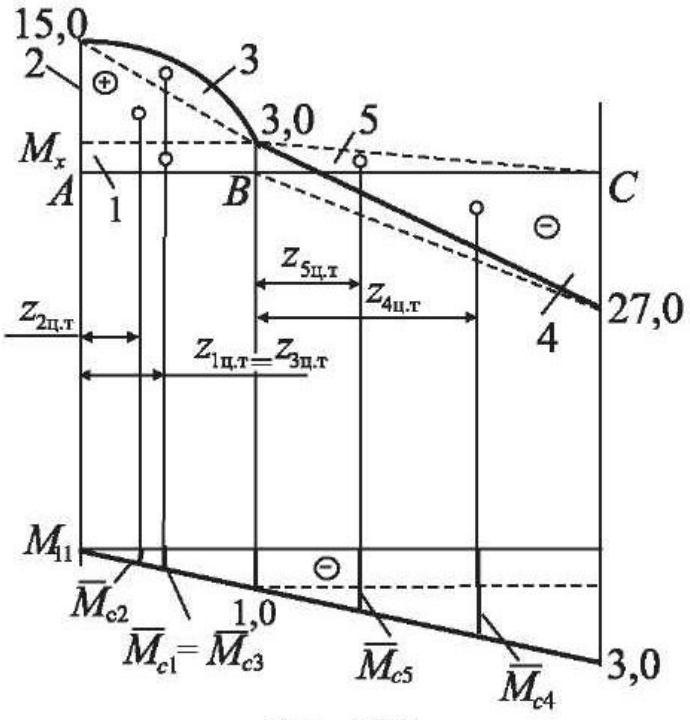


Рис. 10.7

Для нахождения прогиба в сечении A освобождаем балку от заданных нагрузок и прикладываем в указанном сечении фиктивную безразмерную силу $\overline{F} = 1$. Изгибающий момент M_{11} от этой силы в произвольном сечении z будет линейной функцией $M_{11} = -\overline{F}z = -z$, эпюра которой представлена на рис. 10.6, *в*.

Разбиваем грузовую эпюру моментов на простейшие фигуры, как это изображено на рис. 10.7.

Здесь же показаны положения центров тяжести выделенных фигур и соответствующие им ординаты единичной эпюры M_{11}. На первом участке эпюра M_x содержит три простейших фигуры – прямоугольник *1*, треугольник *2* и сегмент параболы *3*. Площади этих фигур и соответствующие их центрам тяжести ординаты единичной эпюры равны:

$$\omega_1 = 1{,}0 \cdot 3{,}0 = 3{,}0 \qquad \overline{M}_{c1} = -\frac{1}{2} \cdot 1{,}0 = -0{,}5;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0 \cdot (15{,}0 - 3{,}0) = 6{,}0 \qquad \overline{M}_{c2} = -\frac{1}{3} \cdot 1{,}0 = -0{,}33;$$

$$\omega_3 = \frac{24 \cdot 1{,}0^3}{12} = 2{,}0 \qquad \overline{M}_{c3} == -\frac{1}{2} \cdot 1{,}0 = -0{,}5.$$

На втором участке (*BC)* эпюра M_x линейна, и формально мы сразу имеем простейшие фигуры – один прямоугольный треугольник с вершиной в положительной области (M_x = 3,0 кН·м), другой с вершиной в отрицательной (M_x = –27,0 кН·м). Однако длина оснований этих треугольников требует определения, что, в свою очередь, усложняет вычисление координат центров тяжести и соответствующих им ординат единичной эпюры. В такой ситуации применяют следующий приём: расчёты проводят с треугольниками, имеющими вершины в тех же точках, но с основаниями, равными длине всего участка *BC* (см. рис. 10.7). Легко показать, что такая замена не влияет на результат, поскольку площади, добавленные к «положительному» и «отрицательному» треугольникам, одинаковы.

$$\omega_4 = -\frac{1}{2} \cdot 2{,}0 \cdot 27{,}0 = -27{,}0 \qquad \overline{M}_{c4} = -\left(1 + \frac{2}{3} 2\right) = -2{,}33;$$

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0 \cdot 3{,}0 = 3{,}0 \qquad \overline{M}_{c5} = -\left(1 + \frac{1}{3} \cdot 2\right) = -1{,}67.$$

При вычислении ординат единичной эпюры на этом участке удобно эпюру M_{11} тоже разбить на простейшие фигуры – прямоугольник с высотой, равной 1,0, и прямоугольный треугольник с высотой, равной 2,0. Прогиб в точке A находим алгебраически, складывая произведения найденных площадей и соответствующих им ординат (эту процедуру иногда называют «перемножением эпюр»):

$$v_A = \frac{1}{EI_x}\left[\, 3{,}0\cdot(-0{,}5)+6{,}0\cdot(-0{,}33)+2{,}0\cdot(-0{,}5)+\right.$$

$$\left.+(-27{,}0)(-2{,}33)+3{,}0\cdot(-1{,}67)\right]=\frac{53{,}5}{EI_x}\cdot 10^3 \quad [\text{м}].$$

Множитель 10^3 в ответе возникает из-за того, что нагрузки заданы в килоньютонах. Положительный результат означает, что прогиб происходит в направлении единичной силы, т. е. вниз.

В практических расчётах обычно не вычисляют площади и соответствующие им ординаты заранее, а сразу подставляют числовые значения в выражение для определения перемещений, сохраняя при этом узнаваемую структуру стандартных формул. Тогда для угла поворота в сечении A получим следующий результат, учитывая, что ординаты единичной эпюры M_{12} во всех сечениях одинаковы $M_{12} \equiv -1$:

$$0_A = \frac{1}{EI_x}\left|1{,}0\cdot 3{,}0\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1{,}0\cdot(15{,}0-3{,}0)\cdot(-1)+\frac{24\cdot 1{,}0^3}{12}\cdot(-1)+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{2}\cdot 2{,}0\cdot 27{,}0\right)\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 2{,}0\cdot 3{,}0\cdot(-1)\right|=\frac{13{,}0}{EI_x}\cdot 10^3.$$

Результат вновь получился положительным, значит, поворот сечения A происходит в направлении фиктивной единичной нагрузки $\overline{M}=1$, т. е. против хода часовой стрелки.

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Основные понятия и определения

Статически неопределимыми называются системы, для которых внешние реакции и внутренние силовые факторы не могут быть определены только из уравнений равновесия. В таких системах связей больше, чем необходимо для обеспечения равновесия конструкции. Таким образом, часть связей в этом смысле являются как бы лишними, а усилия в них – лишними неизвестными. По числу лишних связей Λ устанавливают *степень статической неопределимости* C

$$C = \Lambda.$$

Остановимся подробнее на этом вопросе, причём основное внимание уделим балкам и плоским рамам, у которых все стержни и действующая нагрузка лежат в одной плоскости.

Плоская система обладает тремя степенями свободы. Следовательно, на неё необходимо наложить, как минимум, три связи, чтобы она не могла перемещаться как жёсткое целое. Эти три связи называются *необходимыми*. Удаление хотя бы одной из таких связей превращает систему в *геометрически изменяемую* (механизм), т. е. в такую систему, в которой перемещения её точек или элементов возможны без деформации стержней. Реакции необходимых связей могу быть найдены с помощью уравнений равновесия.

Всякую связь, наложенную сверх необходимых, называют *лишней*. При удалении лишней связи система остаётся *геометрически неизменяемой*, т. е. такой, в которой перемещения точек или элементов возможны только за счёт деформации стержней.

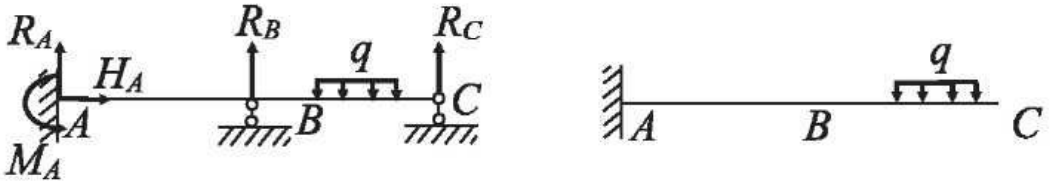
На рис. 11.1, *а* показана двухопорная балка – система статически определимая и геометрически неизменяемая. Все три реакции R_A, H_A, R_B определяются из трёх уравнений равновесия плоской системы сил. Используя метод сечений, легко найти силовые факторы Q_y, M_x в любом сечении балки.

Добавив ещё одну связь, например шарнирно-подвижную опору в сечении C (рис. 11.1, *б*), получаем один раз статически неопределимую систему.

а *б*

Рис. 11.1

На рис. 11.2, *а* показана дважды статически неопределимая балка, полученная из статически определимой системы (рис. 11.2, *б*) в результате установки двух шарнирно-подвижных опор в сечениях B и C.



а *б*

Рис. 11.2

На рис. 11.3 показана дважды статически неопределимая плоская рама. В этом случае для определения пяти реакций внешних связей имеем только три уравнения равновесия.

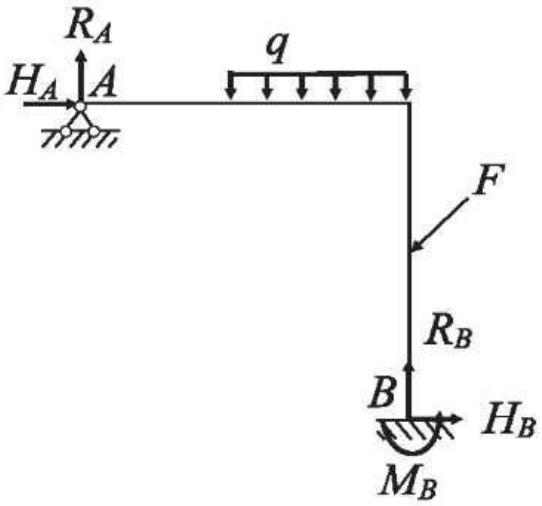


Рис. 11.3

Таким образом, степень статической неопределимости C можно найти как разность между числом неизвестных усилий N и числом независимых уравнений равновесия Y:

$$C = N - Y. \qquad (11.1)$$

Статическая неопределимость может быть результатом не только введения дополнительных связей, но также и условием образования системы. Примером может служить рама, изображённая на рис. 11.4, *а*, в которой реакции опор R_A, H_A, R_B определяются из трёх уравнений равновесия, но последние не позволяют найти все силовые факторы в её элементах. Разрежем раму на две части и рассмотрим равновесие одной из них (рис.11.4, *б*). Действие отброшенной части заменяем в каждом сечении разреза тремя силовыми факторами: продольной силой N, поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_x. Таким образом, из трёх уравнений равновесия надлежит определить шесть неизвестных усилий, т. е.

$$C = 6–3 = 3.$$

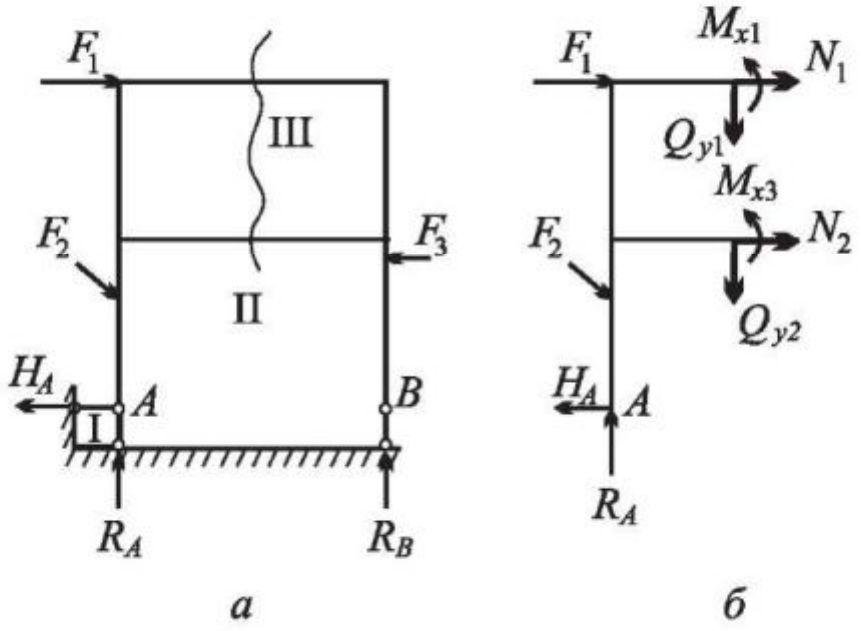


Рис. 11.4

Рассмотренная рама трижды статически неопределима за счёт наличия одного замкнутого контура, который имеет три лишние внутренние связи.

Обобщая, можно сказать, что *замкнутый плоский бесшарнирный контур трижды статически неопределим.*

Установка шарнира на оси стержня (*одиночный шарнир*) (рис. 11.5, *а*) снимает одну внутреннюю угловую связь, обращая в нуль изгибающий момент в данном сечении, и следовательно, снижает степень статической неопределимости

на единицу. Очевидно, что рама, показанная на рис. 11.5, *а*, пять раз статически неопределима (три раза внешним образом, два – внутренним).

Шарнир, включённый в узел (*общий шарнир*), где сходятся m стержней (рис. 11.5, *б*), снижает степень статической неопределимости на $(m-1)$, так как заменяет собой столько же одиночных шарниров (см. рис. 11.5, *в*).

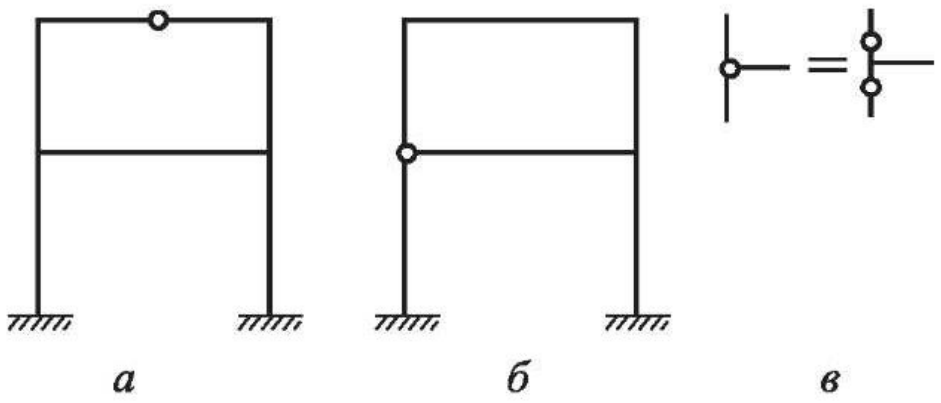
Степень статической неопределимости плоских систем может быть определена по формуле

$$C = 3k - \text{ш}, \qquad (11.2)$$

где k – число замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров;

ш – число шарниров в пересчёте на одиночные.

Основание (земля) рассматривается как стержень бесконечной жёсткости.



а *б* *в*

Рис. 11.5

Так, например, рама, показанная на рис. 11.4, имеет $k = 3$, ш = 1+2+1+1+1 = 6, следовательно, $C = 3 \cdot 3 - 6 = 3$.

Метод сил. Основные этапы расчета статически неопределимых систем

Для раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем широко применяется *метод сил*, в котором в качестве неизвестных принимают усилия лишних связей.

Для определения неизвестных усилий дополнительно к уравнениям статики составляют уравнения совместности деформаций.

Лишние связи накладывают определённые ограничения на перемещения тех сечений, к которым они приложены. Это обстоятельство и используют для составления дополнительных уравнений, которые вместе с уравнениями равновесия позволяют определить все внутренние силовые факторы в элементах системы.

Рассмотрим этапы расчёта статически неопределимой системы методом сил.

1. Устанавливаем степень статической неопределимости.

2. Отбрасывая лишние связи и заданную нагрузку, заменяем исходную систему статически определимой, называемой *основной системой*.

3. Загружая основную систему заданной внешней нагрузкой и лишними неизвестными усилиями $X_1, X_2, \ldots X_n$, получаем *эквивалентную систему*.

4. Эквивалентная система должна удовлетворять следующим условиям: перемещения сечений, в которых приложены неизвестные усилия, по направлению их действия отсутствуют.

Записывая указанные условия в аналитической форме, получаем дополнительные уравнения неразрывности деформаций (уравнения перемещений):

$$\begin{cases} \Delta_1 = 0; \\ \Delta_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Delta_n = 0. \end{cases} \qquad (11.3)$$

Здесь Δ_i – перемещение в направлении усилия X_i.

Определить перемещения соответствующих сечений основной системы можно любым способом, однако лучше всего общими методами – интегралом Мора или способом Верещагина.

Из уравнений (11.3) определяем значения лишних неизвестных $X_1, X_2, \ldots X_n$.

5. Найдя лишние неизвестные усилия, определение реакций опор и построение окончательных эпюр внутренних силовых факторов, а также расчёт на прочность проводим обычным способом.

Выбор основной системы

Для одной и той же статически неопределимой системы можно подобрать несколько основных систем. При этом нужно следить за тем, чтобы каждая из них была геометрически неизменяемой. Рациональный выбор основной системы упрощает расчёт.

Отметим, что удаление лишних связей можно производить:

а) отбрасыванием опорных стержней;

б) проведением разрезов, причём каждый разрез стержня, жёстко прикреплённого к узлам, равносилен отбрасыванию трёх внутренних связей;

в) включением шарниров (одиночных и общих).

Например, для рамы, показанной на рис. 11.6, *а*, можно предложить основные системы *б*, *в*, *г*, *д*, которые получены путём отбрасывания трёх лишних связей в различных комбинациях. Пятый вариант (рис. 11.6, *е*) не может быть принят к расчёту, так как в этом случае система является геометрически изменяемой.

Во всех случаях через X_1 ,X_2 ,X_3 обозначены соответствующие лишние неизвестные.

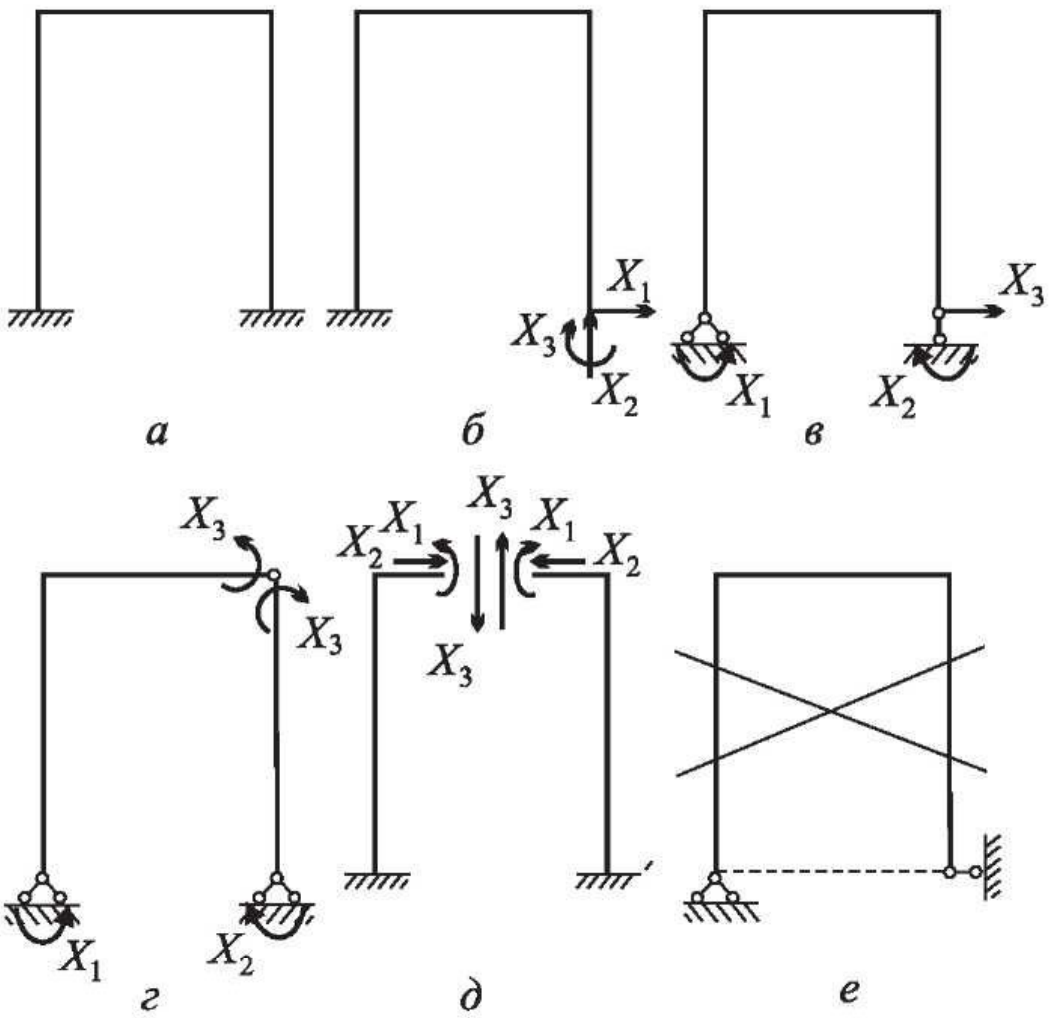


Рис. 11.6

На рис. 11.7, *а* показана многопролётная неразрезная балка.

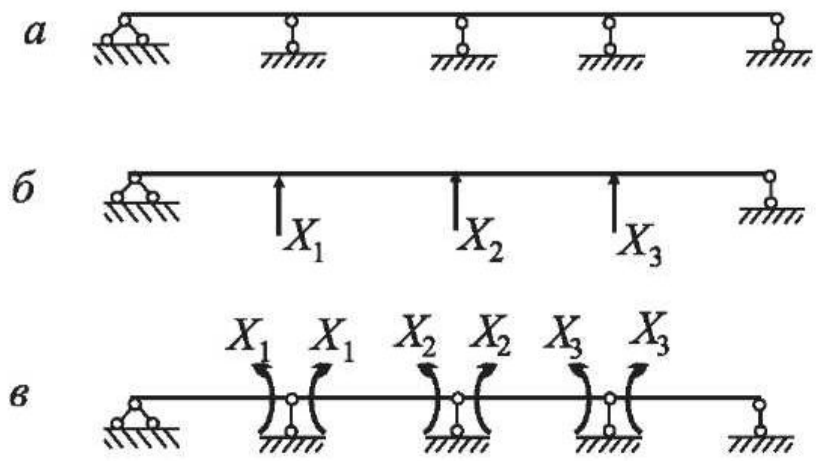


Рис. 11.7

Неразрезными называют балки, лежащие более чем на двух опорах и не имеющие промежуточных шарниров.

Такие балки широко применяются в различных строительных конструкциях.

Число лишних связей в неразрезных балках равно числу промежуточных опор. Если крайняя опора выполнена в виде защемления, то степень статической неопределимости увеличивается на единицу по сравнению с шарнирной опорой.

Для получения основной системы можно освободиться от всех промежуточных опор, заменив их действие неизвестными реакциями X_1, X_2, X_3 (рис. 11.7, *б*). Однако можно построить основную систему постановкой шарниров в сечениях над всеми *промежуточными* опорами. В этом случае основная система представляет собой четыре отдельные шарнирно опертые по концам балки (рис.11.7, *в*). Здесь лишними неизвестными X_1, X_2, X_3 являются изгибающие моменты в опорных сечениях балки. Отметим, что с точки зрения упрощения расчёта основная система для неразрезной балки, полученная путём врезания шарниров над промежуточными опорами, всегда предпочтительнее по сравнению с другими вариантами.

Канонические уравнения метода сил

Дополнительные уравнения перемещений (11.3), выражающие равенство нулю перемещений по направлениям лишних неизвестных, удобно составлять в канонической форме, т.е. по определённой закономерности. Покажем это на примере решения дважды статически неопределимой системы, изображённой на рис. 11.8, *а*.

Выберем в качестве основной системы раму, защемлённую одним концом. Тогда, нагрузив основную систему заданными внешними силами и лишними неизвестными X_1, X_2, получим эквивалентную систему. (рис. 11.8, *б*).

Дополнительные уравнения перемещений сечения A имеют вид

$$\Delta_1 = 0;$$

$$\Delta_2 = 0,$$

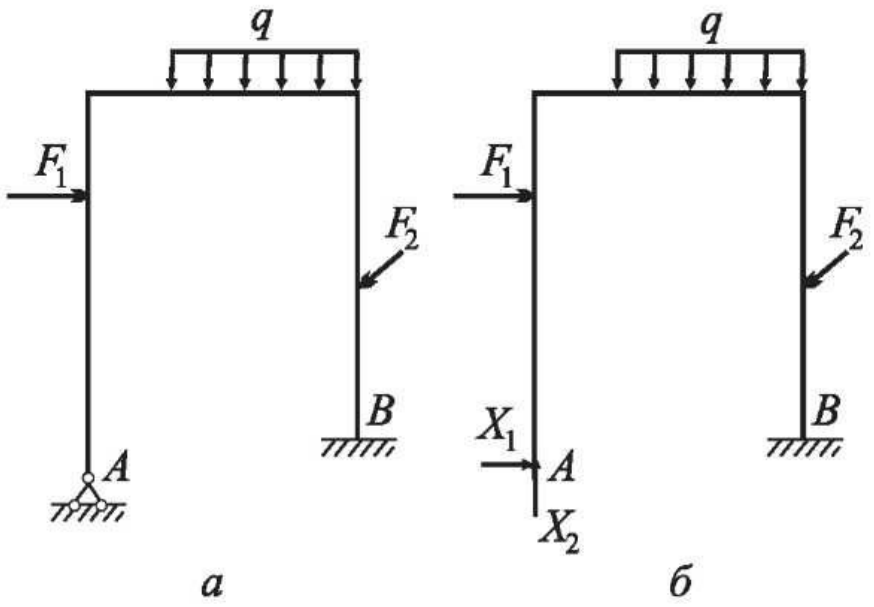


Рис. 11.8

где $\Delta_1 = \Delta(F, X_1, X_2)$ – полное перемещение точки A по направлению X_1 (горизонтальное) от заданной нагрузки и лишних неизвестных усилий X_1, X_2;

$\Delta_2 = \Delta(F, X_1, X_2)$ – полное перемещение точки A по направлению X_2 (вертикальное) от указанных нагрузок.

На основании принципа независимости действия сил запишем

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1F} = 0;$$
$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2F} = 0. \qquad (11.4)$$

Здесь Δ_{iF} – перемещение по направлению i-го неизвестного, вызванное заданной внешней нагрузкой F (грузовое перемещение);

Δ_{ik} – перемещение в том же направлении, вызванное действием силы X_k.

Перемещение Δ_{ik} удобно записать следующим образом:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k,$$

где δ_{ik} – перемещение по направлению i-го неизвестного, вызванное действием единичной силы $\overline{X_k} = 1$ (удельное перемещение).

Тогда

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1; \Delta_{12} = \delta_{12} X_2;$$
$$\Delta_{21} = \delta_{21} X_1; \Delta_{22} = \delta_{22} X_2.$$

Таким образом, уравнение (11.4) принимает вид

$$\begin{aligned} &\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ &\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{aligned} \qquad (11.5)$$

Это каноническая форма уравнений перемещений для системы, два раза статически неопределимой.

По аналогии можно записать систему канонических уравнений метода сил для любой n раз статически неопределимой системы:

$$\begin{aligned} &\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \ldots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ &\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \ldots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2F} = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \ldots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{aligned} \qquad (11.6)$$

Перемещения Δ_{iF} и δ_{ik} чаще всего определяют методом Мора или способом Верещагина. При этом для балок и рам влиянием поперечных и продольных сил обычно пренебрегают и учитывают лишь изгибающие моменты.

Для определения перемещений необходимо нагрузить основную систему заданной внешней нагрузкой и найти изгибающие моменты M_F. Затем основную систему поочерёдно нагружают единичными силами $\overline{X_1} = 1, \overline{X_2} = 1, \ldots, \overline{X_n} = 1$ и определяют изгибающие моменты $M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1n}$.

Тогда с помощью интеграла Мора находят

$$\Delta_{1F} = \int_l \frac{M_F M_{11} dz}{EI}; \quad \Delta_{2F} = \int_l \frac{M_F M_{12} dz}{EI}; \quad \ldots; \quad \Delta_{nF} = \int_l \frac{M_F M_{1n} dz}{EI}.$$

Удельные перемещения, имеющие одинаковые индексы, определяют следующим образом:

$$\delta_{11} = \int_l \frac{M_{11}M_{11}dz}{EI};\ \delta_{22} = \int_l \frac{M_{12}M_{12}dz}{EI};\ \ldots;\ \delta_{nn} = \int_l \frac{M_{1n}M_{1n}dz}{EI}.$$

Очевидно, что эти перемещения положительны.

Удельные перемещения, имеющие неодинаковые индексы, определяют по формулам

$$\delta_{12} = \int_l \frac{M_{11}M_{12}dz}{EI};\ \delta_{13} = \int_l \frac{M_{11}M_{13}dz}{EI};\ \ldots;\ \delta_{ik} = \int_l \frac{M_{1i}M_{1k}dz}{EI}.$$

Они могут быть положительными или отрицательными, а также равными нулю.

Из определения удельных перемещений следует очевидное равенство $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, называемое иногда *теоремой о взаимности перемещений.*

Буквенный вид канонических уравнений остаётся неизменным при любом возможном варианте основной системы. Изменяется лишь смысл лишних неизвестных и геометрический смысл перемещений. Например, для балки, показанной на рис. 11.7, *а* при расчёте по первому варианту основной системы (см. рис. 11.7, *б*), когда лишними неизвестными являются реакции опор, канонические уравнения выражают равенство нулю вертикальных перемещений опорных сечений. В том случае, когда лишними неизвестными являются изгибающие моменты над промежуточными опорами (см. рис. 11.7, *в*), аналогичные уравнения означают, что взаимные углы поворота сечений над промежуточными опорами должны быть равны нулю.

Важно отметить, что при выводе не оговаривалось, каким образом возникают перемещения Δ_{iF} и Δ_{ik}. Поэтому система канонических уравнений (11.6) применима для любых видов нагружения стержневых систем.

Контроль правильности раскрытия статической неопределимости

Окончательные эпюры внутренних силовых факторов подлежат обязательной проверке. Проверяют при этом условия равновесия (*статическая проверка*) и условия неразрывности деформаций (*деформационная проверка*).

Для статической проверки следует вырезать узел или какую-либо часть системы и удостовериться в выполнении условий равновесия, т.е. равенства нулю суммы проекций или моментов всех внешних и внутренних сил, приложенных к этой части:

$$\sum F_x = 0;\ \sum F_y = 0;\ \sum m = 0.$$

При этом нужные величины следует брать непосредственно из окончательных эпюр. Отметим, что статическая проверка не является достаточной.

Общим контролем является деформационная проверка. Так как в заданной статически неопределимой системе перемещение по направлению любой лишней связи равно нулю, то произведение окончательной эпюры изгибающих моментов M_x на эпюру моментов любого i-го единичного состояния основной системы должно равняться нулю, т. е.

$$\sum \int_l \frac{M_x M_{1i} dz}{EI} = 0. \qquad (11.7)$$

В качестве основной системы i-го единичного состояния лучше всего выбирать систему, не использованную при расчёте. Количество равенств вида (11.7) в деформационной проверке должно равняться числу лишних неизвестных.

Определение перемещений в статически неопределимых системах

После определения лишних неизвестных усилий и построения окончательных эпюр внутренних силовых факторов перемещения в статически неопределимых системах можно

найти обычными способами: методом начальных параметров, интегралом Мора или способом Верещагина. Метод Мора, являющийся универсальным, обычно используют при определении перемещений в балках, рамах и фермах. Вычисляя перемещения по формуле Мора

$$\Delta_i = \sum \int_l \frac{M_F M_{1i} dz}{EI} + \sum \int_l \frac{N_F N_{1i} dz}{EA} + \sum \int_l \frac{Q_F Q_{1i} dz}{GA}, \quad (11.8)$$

следует рассмотреть заданную систему под действием внешней нагрузки (окончательные эпюры M_x, N и Q_y). При этом единичную нагрузку мы вправе прикладывать к основной системе, так как исходная статически неопределимая система и основная статически определимая, нагруженная заданными силами и найденными лишними неизвестными, полностью тождественны по условиям работы. Заметим, что основная система может быть выбрана по любому возможному варианту.

УЧЁТ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ ПРИ РАСКРЫТИИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ МЕТОДОМ СИЛ

При расчете систем, обладающих свойствами симметрии, оказывается возможным упростить решение задачи и снизить число искомых лишних неизвестных усилий за счёт рационального выбора основной системы.

Покажем эту возможность на примере одного из часто встречающихся в технике видов симметрии – зеркальной симметрии. Будем называть систему симметричной, если они обладает плоскостью симметрии и жестокости симметричных элементов одинаковы.

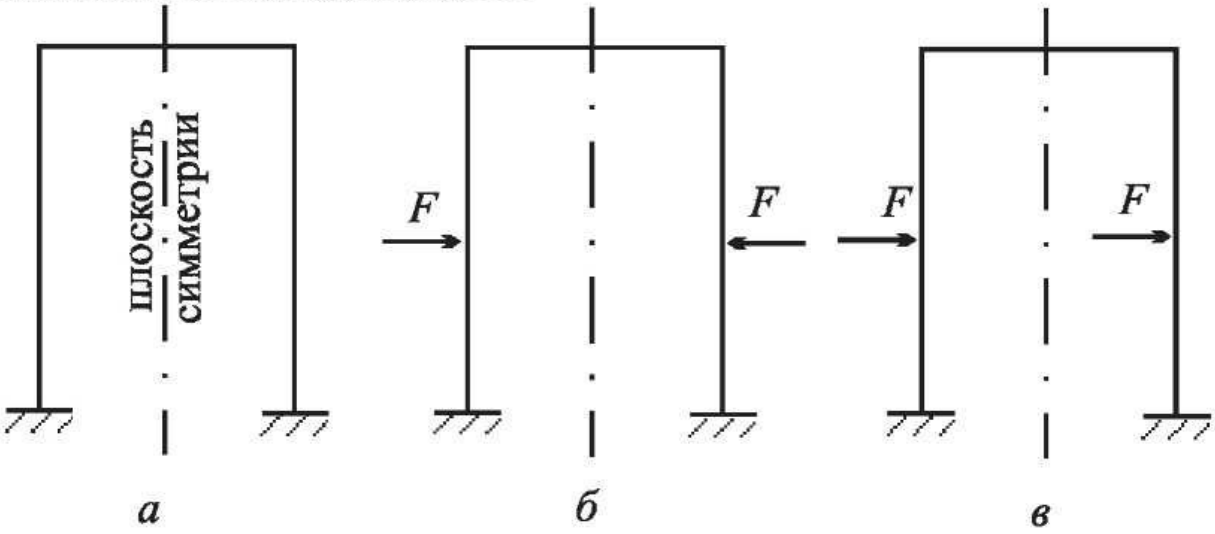


Рис. 12.1

Для примера возьмём симметричную раму, показанную на рис. 12.1, *а*. Рассмотрим случаи нагружения рамы симметричной и кососимметричной нагрузками.

Симметричной называют такую нагрузку, при которой внешние силы, приложенные к правой части системы, являются зеркальным отображением сил, приложенных к левой части (рис. 12.1, *б*).

Кососимметричной называют такую нагрузку, при которой силы, приложенные к правой половине системы, также являются зеркальным отображением сил, приложенных к левой половине, но противоположны им по знаку (рис. 12.1, *в*).

Аналогично можно классифицировать и внутренние силовые факторы. Напомним, что в общем случае действия сил в поперечном сечении стержня возникает шесть силовых факторов N, Q_x, Q_y, $M_к$, M_x, M_y. Причём внутренние силы и моменты, приложенные к правой и левой плоскостям сечения, равны по величине и одинаковы по знаку. Отсюда следует, что продольная сила N и изгибающие моменты M_x, M_y являются симметричными внутренними силовыми факторами, так как представляют зеркальное отображение относительно плоскости сечения. Крутящий момент $M_к$ и поперечные силы Q_x, Q_y являются кососимметричными силовыми факторами.

Можно доказать, что у симметричной системы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные факторы, а при кососимметричной нагрузке – симметричные силовые факторы.

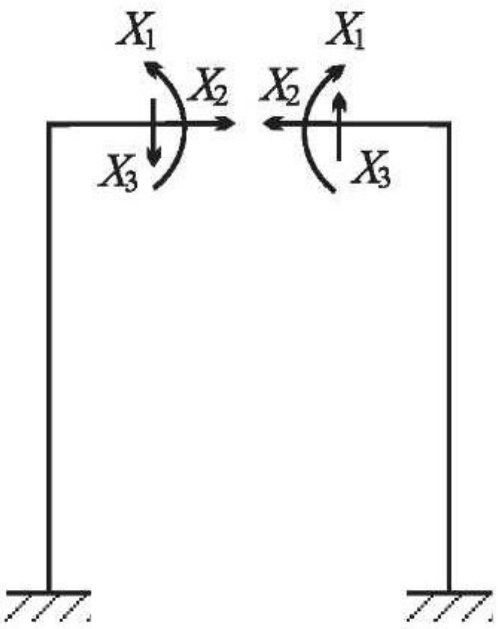


Рис. 12.2

Покажем это на примере симметричной рамы, изображённой на рис. 12.1. Выберем для расчёта симметричную основную систему, разрезав раму по плоскости симметрии (рис. 12.2). К сторонам разреза приложим в качестве лишних неизвестных симметричные силовые факторы X_1 (изгибающие моменты), X_2 (продольные силы) и кососимметричные X_3 (поперечные силы).

Запишем систему канонических уравнений для трижды статически неопределимой рамы:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0;$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0. \qquad (12.1)$$

Уравнения (12.1) выражают равенство нулю полных взаимных перемещений сторон разреза по направлениям лишних неизвестных. Так, первое уравнение системы (12.1) означает равенство нулю взаимного угла поворота, второе уравнение – взаимного горизонтального перемещения, третье уравнение – взаимного вертикального перемещения. Заметим теперь, что в этих уравнениях коэффициенты δ_{ik}, у которых один индекс принадлежит симметричному, а другой – кососимметричному фактору, обращаются в нуль, т. е.

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Происходит это потому, что в симметричной раме не возникает взаимных кососимметричных перемещений под действием симметричных нагрузок. Точно так же не возникает симметричных перемещений под действием кососимметричных факторов. Сказанное становится очевидным, если для определения перемещений δ_{ik} применить способ Верещагина. В симметричной раме эпюра изгибающих моментов от симметричных силовых факторов будет симметричной (рис. 12.3, *а, б*), а от кососимметричных – кососимметричной (рис. 12.3, *в*)

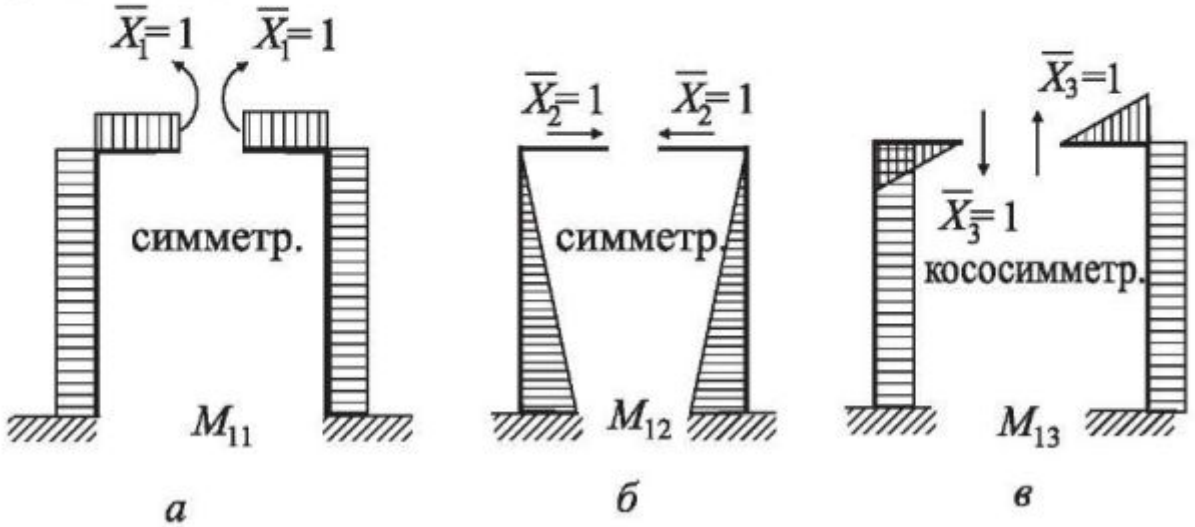


Рис. 12.3

При перемножении симметричной эпюры на кососимметричную, очевидно, получим нуль, в то время как перемножение симметричной эпюры на симметричную и кососимметричной на кососимметричную даёт результат, отличный от нуля.

Итак, вычёркивая из системы уравнений (12.1) коэффициенты, обращающиеся в нуль, получаем

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0;\\
&\delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0.
\end{aligned} \qquad (12.2)$$

Как видим, система канонических уравнений упростилась.

Если при этом внешняя нагрузка симметрична (эпюра M_F будет симметричной), то $\Delta_{3F} = 0$. Тогда из третьего уравнения системы (12.2) получаем, что кососимметричный фактор $X_3 = 0$.

Если нагрузка кососимметричная (эпюра M_F будет кососимметричной), то $\Delta_{1F} = \Delta_{2F} = 0$. Тогда первые два уравнения системы (12.2) образуют однородную систему

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0;\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0,
\end{aligned}$$

решением которой будет $X_1 = X_2 = 0$, т. е. равенство нулю симметричных силовых факторов.

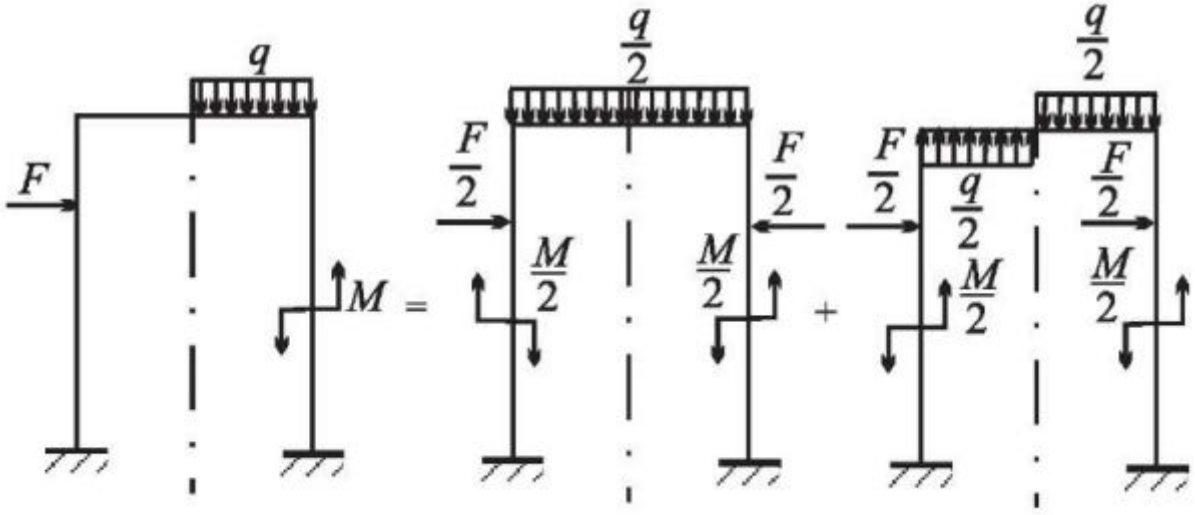


Рис. 12.4

Всё сказанное справедливо как для плоских, так и для пространственных стержневых систем.

Если нагрузка, приложенная к симметричной раме, не обладает ни прямой, ни косой симметрией, то её удобно разложить на симметричную и кососимметричную, как это показано, например, на рис. 12.4. Задача, таким образом, распадается на две отдельные: симметричная рама с симметричной нагрузкой и рама с кососимметричной нагрузкой. Внутренние силовые факторы в заданной раме определяются в дальнейшем наложением полученных решений.