

# **ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ**

## Учебное пособие

В пособии рассмотрены анализ внутренних силовых факторов в стержневых системах и подход к расчетам на прочность по допускаемым напряжениям. Эти темы играют, пожалуй, центральную роль в подготовке теоретической базы для решения задач, с которыми студенты сталкиваются при выполнении расчетно-графических заданий или (на некоторых специальностях) курсовой работы, а также в ходе контрольных работ, защит, экзамене.

Основу пособия составляют подробно разобранные примеры построения эпюр внутренних силовых факторов и расчетов на прочность при растяжении-сжатии, поперечном изгибе (для пластичного и хрупкого материалов) и кручении. В связи с этим пособие рекомендуется, в первую очередь, для самостоятельной работы учащихся. Этому помогут и приведенные в приложении расчетные зависимости для определения нормальных и касательных напряжений при простых видах нагружения и объемные эпюры их распределения по сечению; справочные данные, касающиеся механических характеристик некоторых марок сталей, сплавов цветных и легких металлов, серых чугунов, а также необходимые при решении задач геометрические характеристики простейших сечений.

Пособие адресовано студентам немеханических специальностей, изучающих сопротивление материалов в курсах прикладной и технической механики.

## СОДЕРЖАНИЕ

ОТ АВТОРА.....	4
1. ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ .....	5
2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СЕЧЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ .....	6
2.1 Простые виды нагружения .....	7
2.2 Построение эпюр внутренних силовых факторов с помощью метода сечений.....	9
3. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ.....	20
3.1 Опасные и допускаемые напряжения .....	20
3.2 Коэффициент запаса прочности – фактический и нормативный.....	21
3.3 Типы расчета на прочность.....	24
3.4 Примеры расчетов на прочность по допускаемому напряжению.....	25
ЛИТЕРАТУРА.....	39
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. НЕКОТОРЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ХАРАКТЕР ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО СЕЧЕНИЮ ПРИ ПРОСТЫХ ВИДАХ НАГРУЖЕНИЯ .....	40
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СЕЧЕНИЙ .....	42
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ МАРОК СТАЛЕЙ, СПЛАВОВ ЦВЕТНЫХ И ЛЕГКИХ МЕТАЛЛОВ, СЕРЫХ ЧУГУНОВ .....	43
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ОБРАЗЕЦ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА .....	44

## ОТ АВТОРА

Пособие, которое Вы держите в руках, рассчитано на студентов Физико-металлургического факультета специальностей 550500 «Металлургия», 110100 «Металлургия черных металлов», 110400 «Литейное производство черных и цветных металлов», 110500 «Металловедение и термическая обработка металлов», 110600 «Обработка металлов давлением», 70300 «Металлургические машины и оборудование», изучающих СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ в течение одного семестра. Надеюсь, однако, что оно будет полезно студентам и другим, по крайней мере, немеханических, специальностей.

Пособие, конечно, лишь дополняет лекционный курс, ни в коем случае не заменяя его, поскольку в нем обсуждаются всего два раздела курса: анализ внутренних силовых факторов в стержневых системах и принципы расчетов на прочность по допускаемым напряжениям. Именно с ними приходится особенно часто иметь дело при выполнении курсовой работы или расчетно-графических заданий и, конечно, на экзамене. Не случайно большую часть пособия занимают примеры, что позволяет рекомендовать его, в первую очередь, для самостоятельной работы.

Многолетний опыт свидетельствует, что первый из этих разделов вызывает затруднение, в основном, потому, что он первый и закладывает основы понимания (или непонимания) всего курса. Что же касается второго, то ни с каким другим вопросом не возникает большей путаницы, чем с расчетами на прочность; попытки вычислить нормативный коэффициент запаса прочности стали уже притчей во языцех и караются беспощадно – потому, что «вычислитель» просто не понимает смысла того, что он делает. К тому же на эти обстоятельства накладываются осложнения субъективного характера: «металлурги» изучают курс в весеннем семестре, когда солнышко сияет, птички чирикают, студенты гуляют парами – по три пары в день, а при всем этом сдача сопромата, как известно, есть неперемное условие будущей благополучной семейной жизни.

Все сказанное и подвигло автора на попытку рассказать об этом предмете пусть не очень строго, зато просто и понятно, в форме разговора с авторитетным в данной области человеком, назовем его *Наставником*.

Кстати, вот он, прошу любить и жаловать. Честно говоря, в те времена науки о прочности еще не существовало, но ведь чем старше *Наставник*, тем большее уважение он внушает – не так ли?

Вопросы ему мы будем задавать - , а уж отвечать он будет по-русски, иначе понять что-либо будет очень трудно: представьте – сопромат по-гречески!



Термины, понятия и определения в тексте набраны *курсивом*, а моменты, на которые необходимо обратить особое внимание – **жирным шрифтом**.

Ну, кажется, все, о чем следовало бы договориться предварительно, сказано. А теперь к делу! Первый вопрос.

— , , , ?

## 1. ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Под *прочностью* в широком смысле понимают способность конструкции, а также отдельных ее частей выдерживать заданную нагрузку, **не разрушаясь** и без проявления **остаточных деформаций, нарушающих работоспособность изделия**.

В курсе сопротивления материалов получают зависимости (Приложение 1), с помощью которых можно рассчитать *напряжения* в конструкции. Определение этого понятия посмотрите в своем конспекте лекций или учебнике. Однако сама по себе величина напряжения еще мало о чем говорит. Пусть в некоторой области детали напряжение оказалось равным, например, 250 МПа (мегаскалям). Много это или мало? Будет деталь работать или нет? Все зависит от механических свойств материала; для малоуглеродистой стали Ст.3 такое напряжение приведет к чрезмерной деформации и, как следствие, потере работоспособности. Деталь же из легированной стали, скажем, 40ХН при таких напряжениях вполне работоспособна.



Таким образом, оценка прочности обязательно включает **две** стороны:

- определение **действующих** в конструкции напряжений, зависящих от **внешней нагрузки и геометрических параметров** системы;
- назначение **максимально возможного, допустимого** (из соображений надежности) напряжения, зависящего от **прочностных свойств** материала и **ответственности** конструкции,
- и, наконец, сопоставление действующего и максимально допустимого напряжений.

Первый этап – определение действующих напряжений – начинается с анализа *нагруженности* объекта. Под нагруженностью понимается распределение внутренних усилий вдоль оси стержня (именно с такими, пожалуй,

самыми простыми телами, будем иметь дело в нашем курсе). С этой целью в сопротивлении материалов применяется так называемый *метод сечений*.

## 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СЕЧЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ



Рис. 1. Твердое тело находится в равновесии под действием системы обобщенных нагрузок  $\{F_i\}_n$

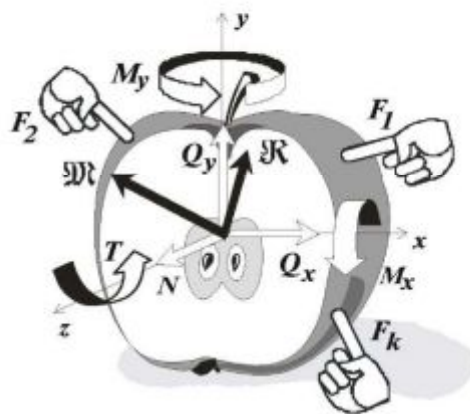


Рис. 2. Внутренние силовые факторы в поперечном сечении тела ( $k < n$ )

Пусть твердое тело (рис. 1) находится в **равновесии** под действием приложенных к нему  $n$  внешних нагрузок (активных и реактивных – реакций отброшенных связей). Нагрузкой может быть любое воздействие – сосредоточенная (приложенная в точке) сила, сила, распределенная вдоль линии, по поверхности или объему тела, или же пара сил – сосредоточенная или распределенная; такие нагрузки часто называют *обобщенными*.

Проведем произвольное поперечное сечение тела и рассмотрим любую из двух получившихся частей, например, правую (рис. 2), на которую действует система нагрузок  $\{F_i\}_k$  ( $k < n$ ). В общем случае она окажется **неуравновешенной**.

— ? !

— А почему вообще твердое тело – твердое, почему оно не распадается на части? Всему «виной» взаимодействие отдельных его частиц – атомарного, молекулярного ли характера – сейчас это не важно. Важно лишь, что эти внутренние усилия – всегда распределенные, их-то мы и «потеряли», разделив части сечением. Понятно, что такая своеобразная реакция материала на деформирование возникает только в том случае, когда к объекту приклады-

ваются внешние нагрузки. В связи с этим в сопротивлении материалов принимается гипотеза о начальном ненапряженном состоянии тела. Заметим, что в действительности в конструкции могут существовать внутренние усилия и до приложения внешней нагрузки, скажем, после отливки заготовки, сварки отдельных частей, механической обработки или в результате неточности сборки.

В соответствии с известной теоремой статики (теоремой Пуансо) любая система усилий может быть заменена ей эквивалентной – силой и парой сил. Силу определяет главный вектор сил  $\overline{R}$ , а момент – вектор главного момента  $\overline{M}$  исходной системы (см. рис. 2). Представим их в виде составляющих, разложив по осям  $x, y, z$ :

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{Q}_x + \overline{Q}_y, \quad \overline{M} = \overline{T} + \overline{M}_x + \overline{M}_y;$$

$x, y, z$  – главные оси, проведенные через центр тяжести фигуры, представляющей сечение.

Величины  $\overline{N}$  – нормальная сила;  $\overline{Q}_x, \overline{Q}_y$  – горизонтальная и вертикальная составляющие поперечной (или перерезывающей) силы;  $\overline{T}$  – крутящий момент;  $\overline{M}_x, \overline{M}_y$  – составляющие изгибающего момента в вертикальной и горизонтальной плоскостях, соответственно, получили название «внутренние силовые факторы». Внутренние силовые факторы можно рассматривать как результат действия левой (отброшенной) части на правую (вспомните: «сила есть мера взаимодействия тел»). Они могут быть определены из условия равновесия любой из отсеченных частей (главное, чтобы были известны все – активные и реактивные – действующие на нее внешние нагрузки) с помощью известных уравнений статики



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k F_{iz} + N &= 0; & \sum_{i=1}^k \text{mom}_x F_i + \sum_{j=1}^l M_{jx} + M_x &= 0; \\ \sum_{i=1}^k F_{ix} + Q_x &= 0; & \sum_{i=1}^k \text{mom}_y F_i + \sum_{j=1}^l M_{jy} + M_y &= 0; \\ \sum_{i=1}^k F_{iy} + Q_y &= 0; & \sum_{i=1}^k \text{mom}_z F_i + \sum_{j=1}^l M_{jz} + T &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$M_j$  – момент  $j$ -ой внешней пары сил общим числом  $l$  штук, приложенных к рассматриваемой части;  $F, N, Q, M, T$  – величины скалярного характера.

## 2.1 Простые виды нагружения

Разумеется, в сечении могут присутствовать не все шесть внутренних силовых факторов одновременно – это зависит от вида внешней нагрузки и

способа ее приложения. В зависимости от того, какие внутренние силовые факторы оказались отличны от нуля, различают несколько *простых видов нагружения* стержня.

Если в сечении имеется только *нормальная сила*  $N$ , в стержне реализуется *растяжение* или *сжатие*, при этом **растягивающая** сила считается **положительной**, а **сжимающая** – **отрицательной** (рис. 3).

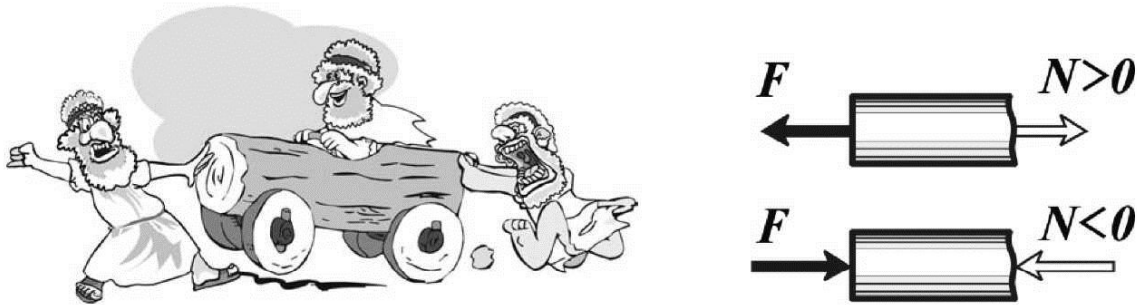


Рис.3. Нормальная сила  $N$  в сечении стержня при растяжении-сжатии

При наличии *крутящего момента*  $T$  говорят о *кручении* стержня. Крутящий момент **в сечении**, направленный **против** часовой стрелки, считается **положительным**, **по часовой** стрелке – **отрицательным** (рис. 4).

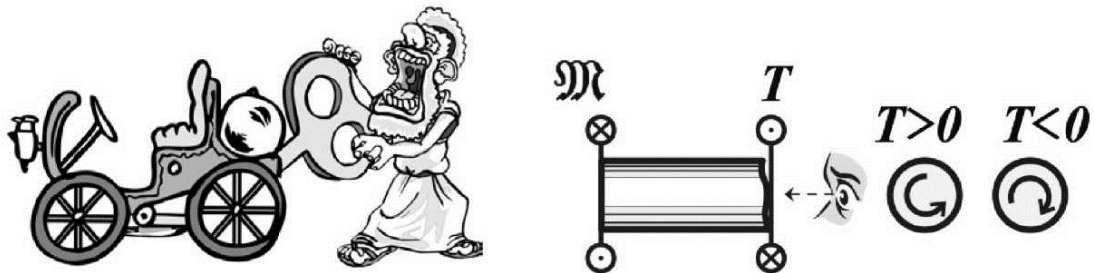
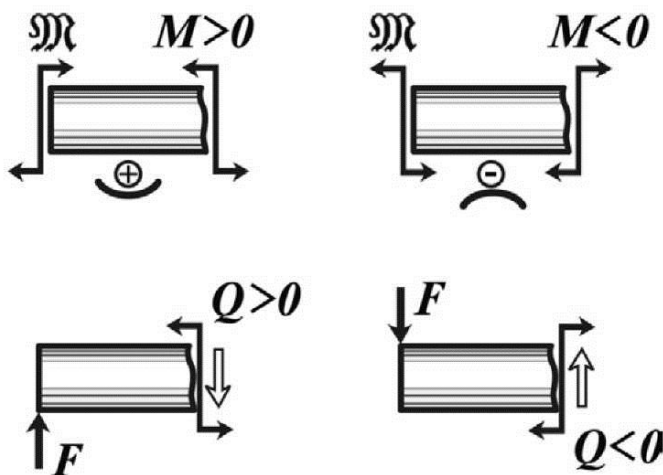


Рис.4. Крутящий момент  $T$  в сечении при кручении стержня



В том случае, когда в сечении ненулевым будет лишь *изгибающий момент*  $M$ , говорят, что стержень испытывает *чистый изгиб*; знак изгибающего момента определяется знаком кривизны балки (рис. 5). Таким образом, **положительному** изгибающему моменту соответствуют **сжатые** волокна **сверху**, **отрицательному** – **снизу**. Если же помимо *изгибающего момента*  $M$  в сечении стержня присутствует еще и *поперечная (перерезывающая) сила*  $Q$  в нем реализуется *поперечный изгиб*. Знак поперечной силы удобно определять по тому, в каком направлении пытается

повернуть отсеченную часть балки результирующая поперечной нагрузки относительно рассматриваемого сечения (см. рис. 5): если по часовой стрелке – сила считается **положительной**, против часовой стрелки – **отрицательной**.



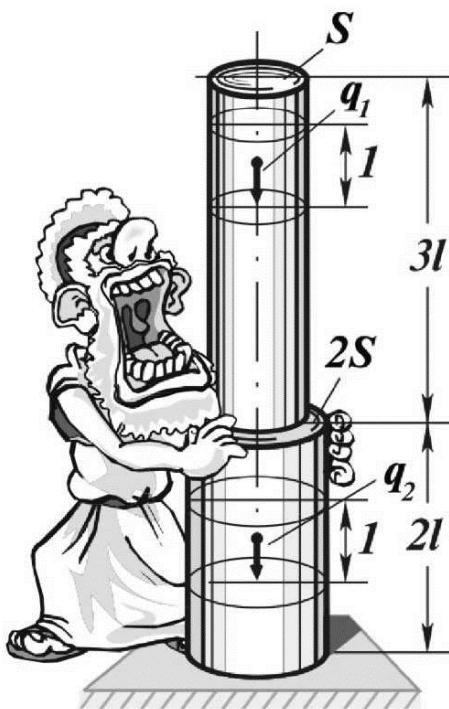
–

– Применение метода сечений с этой целью поясним на паре примеров.

Рис.5. Изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$  в сечении при чистом и поперечном изгибе стержня

## 2.2 Построение эпюр внутренних силовых факторов с помощью метода сечений

Как уже было сказано, для расчета на прочность по допускаемым напряжениям вначале необходимо выявить наиболее опасную (а таковой будет, конечно, наиболее нагруженная) область конструкции. Такой областью логично считать наиболее нагруженное сечение. Его, в свою очередь, удобно выбирать, построив график распределения того или иного внутреннего силового фактора вдоль продольной оси стержня; кстати, этот график в сопротивлении материалов называется *эпюрой*.



**Пример 1.** Для системы, изображенной на рис. 6, нужно построить эпюры всех отличных от нуля внутренних силовых факторов. Удельный вес материала  $\gamma$ . Наставник пытается приподнять колонну с силой, в полтора раза превышающей вес верхней части.

Рис. 6. Наставник пытается поднять ступенчатую колонну, обладающую собственным весом

Прежде всего, необходимо составить *расчетную схему* объекта. В плане геометрии дальнейшей схематизации не требуется, а вот нагрузки еще предстоит определить.



Очевидно, на колонну действует сила веса, причем неравномерно, и усилие Наставника. Определим интенсивность распределенной нагрузки на верхнем и нижнем участках. По определению, *интенсивность распределенной нагрузки численно равна силе* (в данном случае, силе веса), *действующей на единицу длины рассматриваемого участка*; тогда  $q_1 = \gamma V_1 = \gamma S \cdot 1 \equiv q$ ;  $q_2 = \gamma V_2 = \gamma 2S \cdot 1 = 2q$  (см. рис. 6). Сила, которую прикладывает Наставник, равна

$$1,5\gamma V_1 = 1,5\gamma S \cdot 3l = 4,5ql.$$

И только теперь появляется возможность изобразить расчетную схему конструкции (рис. 7) и приступить к построению эпюры. Поскольку сейчас сила веса представлена явно, в виде распределенной нагрузки, положение бруса уже не играет никакой роли, поэтому для удобства изобразим его горизонтально. Между прочим, ступенчатость конструкции (различие площади сечений участков) на этапе построения эпюры тоже не имеет значения.

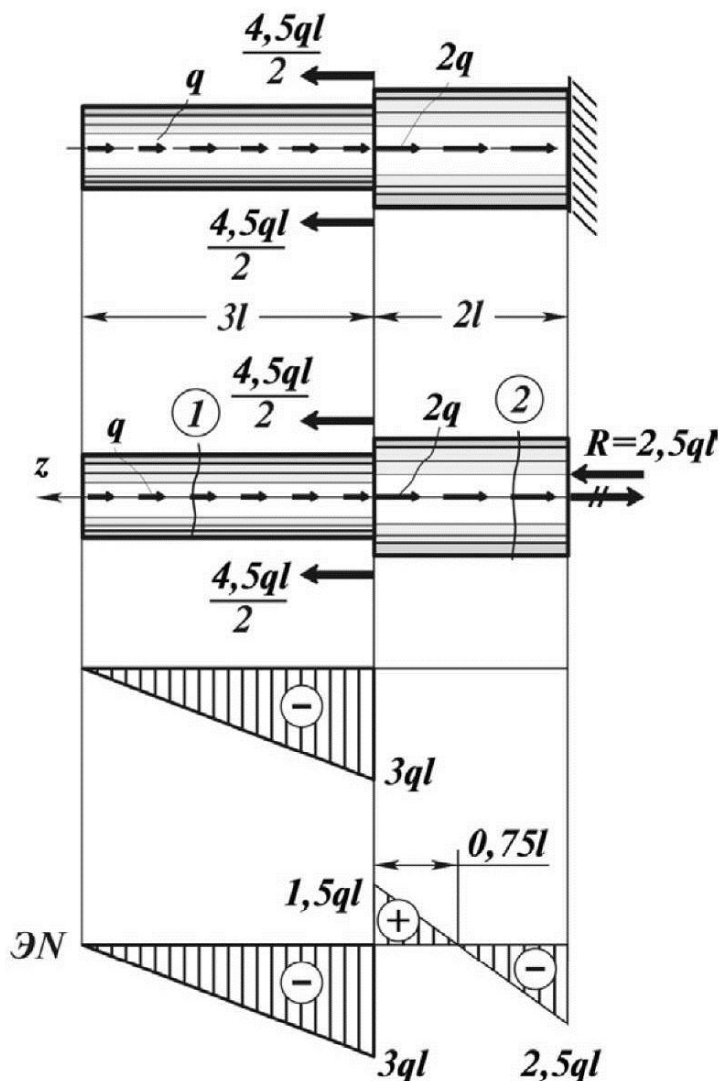


Рис. 7. Расчетная схема колонны и построение эпюры нормальной силы

Анализ нагруженности начнем с определения неизвестной пока **внешней** нагрузки – реакции опоры (в нашем случае, жесткого защемления, или заделки). Для этого достаточно записать условие равновесия системы в форме суммы проекций всех сил на ось, совпадающую с осью бруса (по традиции ее обозначают  $z$ ):

Анализ нагруженности начнем с определения неизвестной пока **внешней** нагрузки – реакции опоры (в нашем случае, жесткого защемления, или заделки). Для этого достаточно записать условие равновесия системы в форме суммы проекций всех сил на ось, совпадающую с осью бруса (по традиции ее обозначают  $z$ ):

$$\sum F_z = -q \cdot 3l + 4,5ql - 2q \cdot 2l - R = 0;$$

$$R = -2,5ql.$$

Остальные условия равновесия удовлетворяются тождественно. Знак «-», как нетрудно догадаться, означает, что первоначальное предположение о направлении реакции было ошибочным.

Итак, для каждого из двух участков бруса применим метод сечений.

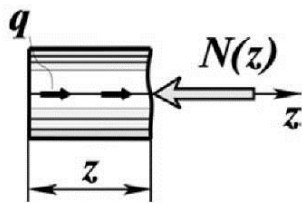


Рис. 8. Левая отсеченная часть (первый участок)

### Участок ①

В любом месте на первом участке (см. рис.7) проведем сечение и рассмотрим равновесие одной из получившихся частей, какой – безразлично (рис. 8). Главное, чтобы была известна **вся** приложенная к ней внешняя нагрузка – активная и реактивная. Записав условие равновесия для этой части,

найдем закон изменения нормальной силы – единственного ненулевого внутреннего силового фактора – на этом участке:

$$\Sigma F_z = q \cdot z - N(z) = 0, \quad N(z) = qz.$$

Как видно, функция  $N(z)$  представляет линейную зависимость. Для ее построения найдем два значения  $N(z)$  – в начале и в конце участка:

$$z=0, \quad N(0) = 0; \quad z=3l, \quad N(3l) = 3ql.$$

Заметьте, положительный знак перед силой  $N$  говорит лишь о правильном выборе ее направления и только. Сила на всем участке оказалась сжимающей, а это означает, что она отрицательна (см. рис.3). Осталось изобразить график изменения силы  $N$  на соответствующем участке, заштриховать его и проставить найденные значения, точнее, их абсолютные величины – знаки ставятся на самой эпюре (см. рис.7).

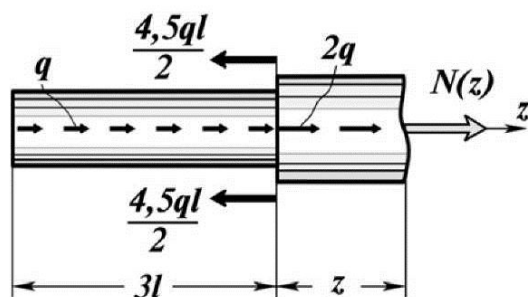


Рис. 9. Левая отсеченная часть (второй участок)

### Участок ②

Проведем сечение 2 на втором участке (см. рис.7) и рассмотрим равновесие одной, как и прежде, левой, отсеченной части (рис. 9). Излишне говорить, что в каждый момент времени рассматривается только **одно** сечение. Для того, чтобы уравнение получилось как можно проще, начало системы координат лучше поместить в **начало** рассматриваемого участка. Условие равновесия имеет вид

$$\Sigma F_z = 3ql - 4,5ql + 2q \cdot z + N(z) = 0, \quad N(z) = 1,5ql - 2qz;$$

$$z=0, \quad N(0) = 1,5ql;$$

$$z=2l, \quad N(2l) = - 2,5ql.$$

Оказывается, в начале участка направление силы мы угадали – она действительно растягивающая, значит, положительная, а вот в конце становится

сжимающей, т.е., отрицательной. Кстати, если силу  $N$  в сечении изначально показывать всегда растягивающей, то знак ее, полученный при решении уравнения, будет именно тем, который нужно поставить на эпюре. Может так будет проще? Достроим эпюру  $\Delta N$  на втором участке (см. рис.7).

Обратите внимание, что изменение нормальной силы  $N$  («скачок») на границе участков от  $-3ql$  до  $1,5ql$  в точности равно величине сосредоточенной нагрузки  $4,5ql$ , приложенной там. И еще, внутренний силовой фактор в сечении, прилежащем к заделке, равен по величине и совпадает по направлению с опорной реакцией. Это обстоятельство используют для контроля правильности построения эпюры.

Кроме того, на эпюре выделяется сечение, в котором усилие вообще отсутствует. Координаты таких сечений подлежат определению. Проще всего это сделать из геометрических соображений, воспользовавшись подобием двух треугольников:

$$\frac{1,5ql}{2l-z} = \frac{2,5ql}{z}, \text{ либо последним уравнением } N(z) = 1,5ql - 2qz = 0;$$

так или иначе, получим  $z = 1,25 l$ .

На этом, собственно, построение эпюры  $\Delta N$  можно и закончить.

—

— Вы верно подметили эту особенность; чтобы было легче запомнить постоянно повторяющуюся последовательность операций, придумана своеобразная «формула» процедуры метода сечений – **РОЗУ**:



**Разрезали** (выбрали сечение, в котором будем определять внутренний силовой фактор);

**Отбросили** (выбрали одну из получившихся частей со **всеми** – активными и реактивными – внешними нагрузками, приложенными к ней);

**Заменяли** (действие отброшенной части на рассматриваемую отобразили с помощью искомого внутреннего силового фактора);

**Уравновесили** (записали условие равновесия в форме суммы проекций всех сил на ось или суммы моментов относительно оси, проходящей через выбранное сечение, и определили величину внутреннего силового фактора).

—

?

— Разумеется, однако, если построение эпюры крутящего момента выполняется так же просто, как было изложено выше, то применение этой процеду-

ры к эпюрам поперечной силы и изгибающего момента может оказаться заметно более трудоемким.

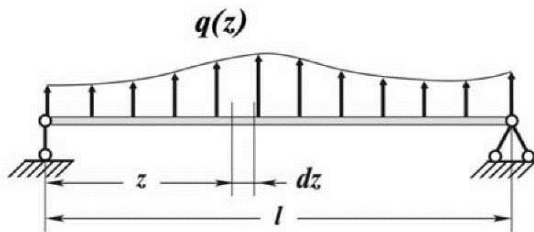
—

?



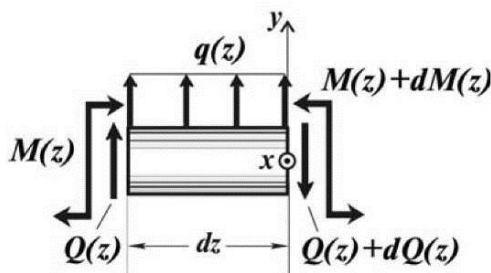
— Да, в этой ситуации можно воспользоваться дифференциальной зависимостью между функциями изгибающего момента и поперечной силы, точнее, зависимостью **интегральной**, из нее вытекающей. В основе обеих лежит все то же условие равновесия.

Пусть однопролетная балка на двух шарнирных опорах нагружена произвольно изменяющейся распределенной нагрузкой (рис.10). На расстоянии  $z$  от левой опоры двумя бесконечно близкими сечениями выделим участок длиной  $dz$ . Рассмотрим его равновесие, записав соответствующее условие в форме суммы моментов относительно оси  $x$  в некотором сечении с координатой  $z$  (переменную величину  $q(z)$  в пределах бесконечно малого участка  $dz$  можно считать постоянной):



$$\sum M_x = -M(z) - Q(z) \cdot dz - q \frac{dz^2}{2} + (M(z) + dM(z)) = 0.$$

Раскрывая скобки и разделяя переменные, пренебрежем слагаемым более высокого, чем первый, порядка малости; таким образом, окончательно получим



$$Q(z) = \frac{dM(z)}{dz}.$$

Рис. 10. К выводу дифференциальной зависимости между функциями поперечной силы и изгибающего момента

Последнее выражение свидетельствует, о том, что функция изгибающего момента  $M(z)$  является первообразной для зависимости поперечной силы  $Q(z)$ . Проинтегрируем ее в пределах от  $z=0$  (начало участка) до текущего значения  $z$ :

$$M(z) = \int_0^z Q(z) dz + M_H$$

(величина момента  $M_n$  в начале участка играет роль константы интегрирования). Таким образом может быть подсчитан изгибающий момент в любом сечении. Обычно при построении эпюры необходимо определить значение момента не в каком-то произвольном сечении, а в конце участка, в сечении с координатой  $z = l_k$ . Если к тому же вспомнить геометрический смысл интеграла (он численно равен площади, заключенной под графиком подинтегральной функции в пределах от 0 до  $l_k$ ), то требуемую величину момента можно подсчитать с помощью зависимости

$$M_k = M_n + \Delta M = M_n + S_{\Delta Q} \quad (S_{\Delta Q} - \text{площадь эпюры } \Delta Q \text{ поперечной силы}).$$



Важно еще раз отметить, что полученная интегральная зависимость **справедлива лишь в пределах участка!** При построении конкретной эпюры ее придется применить столько раз, сколько участков выделяется на нашей балке. В данном случае *участком* будет называться часть стержня, в пределах которой зависимость  $Q(z)$  описывается **одним и тем же уравнением** (сама поперечная сила изменяться может, а закон ее изменения – нет!), и внутри нет пары сил, или, как иногда говорят, сосредоточенного момента).

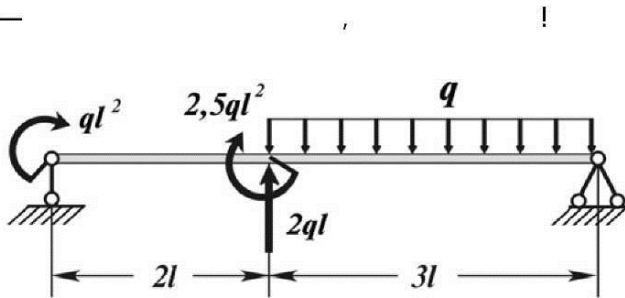


Рис. 11. Балка, нагруженная сосредоточенными и распределенными усилиями

**Пример 2.** Пожалуйста, покажем, как строятся эпюры внутренних силовых факторов, например, в балке на двух шарнирных опорах, которая нагружена сосредоточенными (силой и двумя парами сил) и распределенным усилием (рис.11). Как вы думаете, с чего следует начать?

– Так-то оно так, но вот можно ли это сделать прямо сейчас?

– ?

– Вы забыли об одном очень важном условии. Для той части конструкции, равновесие которой будет рассматриваться, должны быть известны **все внешние (активные и реактивные) усилия**. С активными нагрузками все в порядке – они заданы, а вот реакции опор пока неизвестны, так что какое сечение ни выбери, ни левую, ни правую часть рассматривать нельзя...

Итак, начинаем с определения опорных реакций, отбросив связи и заменив их соответствующими усилиями. Поскольку направление реакций  $Y_A$ ,  $Y_B$  заранее неизвестно, направим их произвольно, например, вверх. Горизонтальной составляющей реакции опоры  $B$ , очевидно, не будет, так как осевая нагрузка на балку отсутствует (рис. 12).

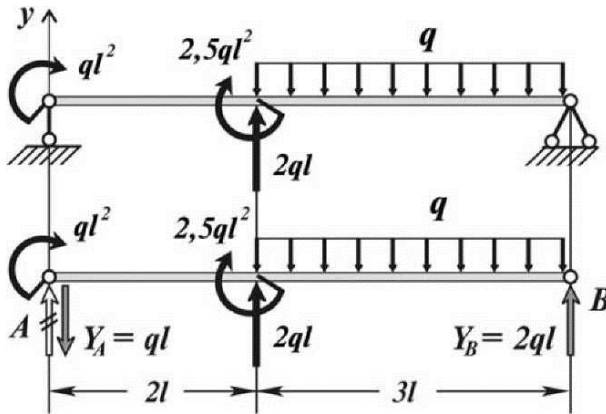


Рис. 12. Балка под действием всех (активных и реактивных) нагрузок



Запишем условие равновесия системы в форме суммы моментов относительно горизонтальной оси в сечении  $B$ , перпендикулярной плоскости чертежа (на нашей схеме относительно точки  $B$ ):

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -Y_A 5l - ql^2 - 2,5ql^2 - \\ &- 2ql \cdot 3l + 3ql \cdot 1,5l = 0; \quad (2) \\ Y_A &= -ql. \end{aligned}$$

Знак «-» отражает изменение направления силы  $Y_A$  – не угадали (см. рис.12). Вторая реакция ( $Y_B$ ) может быть определена либо из аналогичного уравнения моментов относительно оси в сечении  $A$ , либо из условия равновесия в форме

суммы проекций всех сил на ось  $y$ ; причем второе – проще. Однако эта, привлекательная на первый взгляд, простота, коварна: если при определении реакции  $Y_A$  была допущена ошибка, вторая реакция также будет найдена неверно! Эта неприятность обязательно «вылезет» при построении эпюр – так жаль попусту потраченных сил и времени! Поэтому для **независимого** определения реакции  $Y_B$  используем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= Y_B 5l - 3ql \cdot 3,5l - 2,5ql^2 + 2ql \cdot 2l - ql^2 = 0; \\ Y_B &= 2ql \end{aligned}$$

(оказалось, что направление этой реакции было выбрано правильно); затем проверим правильность полученного результата (см. рис. 12):

$$\sum F_y = -ql + 2ql - 3ql + 2ql = 0. \quad (3)$$

Итак, строим эпюру поперечной силы. Количество участков в данном случае очевидно – два.

Каждый раз будем рассматривать левую отсеченную часть. В крайнем левом сечении  $A$  балки действует сосредоточенная сила  $Y_A$  – стало быть, в

этом сечении на графике ЭQ должен быть «скачок» на величину  $ql$  (составьте мысленно или на бумажке условие равновесия). Далее эта величина на протяжении всего первого участка не меняется, поскольку других внешних нагрузок на нем нет.

Знак поперечной силы определяем исходя из направления, в котором старается повернуть отсеченную часть балки поперечная нагрузка относительно рассматриваемого сечения (рис. 13); в данном случае – против часовой стрелки, значит, сила  $Q$  отрицательна (см. подраздел 2.1).

На границе участков, как видно, приложена сосредоточенная сила  $2ql$  – на эпюре появляется «скачок» вверх именно такой величины – до значения  $Q=ql$ . Равномерно распределенной поперечной нагрузке отвечает линейно

изменяющаяся поперечная сила (см. рис.13):

$$\sum F_y = -ql + 2ql - qz - Q(z) = 0;$$

$$Q(z) = ql - qz;$$

$$\text{при } z = 0, Q(0) = ql.$$

К концу участка ее изменение будет равно величине результирующей распределенной нагрузки –  $3ql$ , а сама сила  $Q=-2ql$ . Наконец, в крайнем правом сечении  $B$  действует сосредоточенная сила  $Y_B = 2ql$ , на эту величину скачкообразно изменяется поперечная сила  $Q$  (см. рис. 13). Таким образом, эпюра ЭQ «замкнулась», что является признаком уравновешенности системы по силам. Фактически мы «прорисовали» уравнение (3)

$$\sum F_y = \dots = 0.$$

Полезно отметить одну закономерность, которая проявилась при построении ЭQ: если двигаться от сечения к сечению слева направо, то можно даже не задумываться над знаком поперечной силы – как видно, **направление ее изменения соответствует направлению внешней нагрузки.**

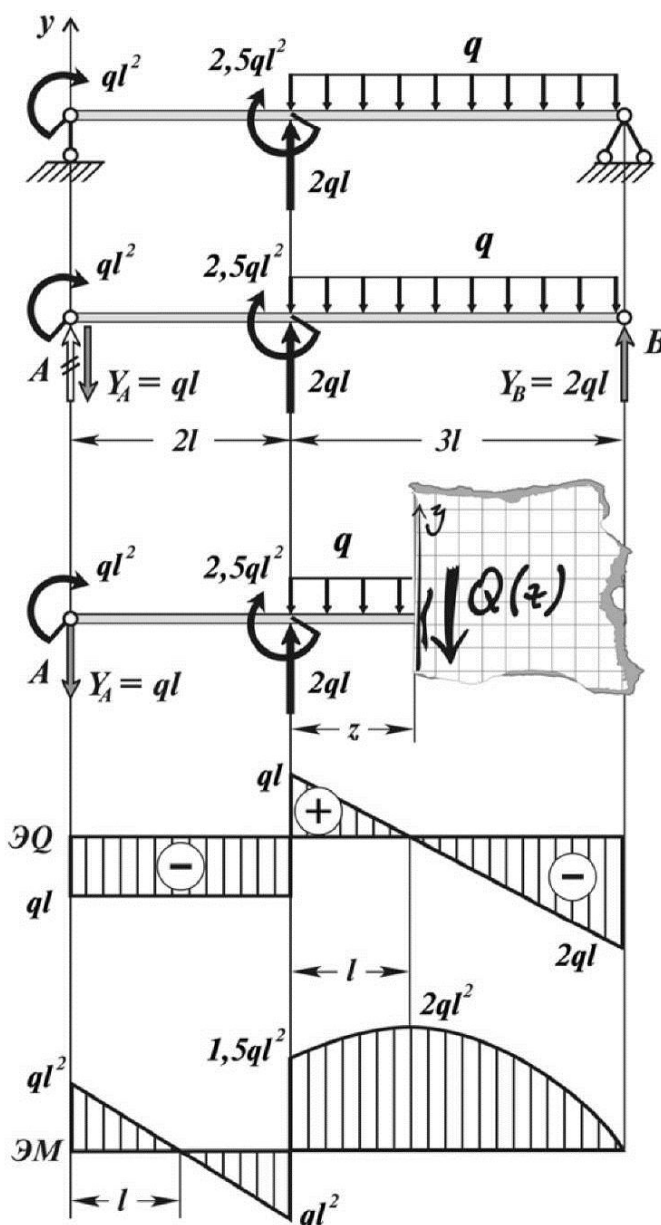


Рис. 13. Балка с приложенными к ней активными и реактивными нагрузками и эпюры поперечной силы и изгибающего момента

Приступаем к построению эпюры изгибающего момента ЭМ. С точки зрения математики задача может быть сформулирована так: «По известным начальному значению и графику производной получить график первообразной функции».

**Первый участок.** В крайнем левом сечении (А) приложена пара сил с моментом  $ql^2$ , поэтому эпюру следует начать со «скачка», отложив это значение момента.



Рис.14. Простой опыт по определению положения сжатых волокон

— ?

— Вспомним правило знаков для изгибающего момента (см. подраздел 2.1), которое кратко можно сформулировать так: «эпюра изгибающего момента строится на сжатом волокне». Где будут расположены сжатые волокна, если бы к балке была приложена только эта пара сил? Если при ответе на этот вопрос возникают затруднения или сомнения, поставьте опыт — попробуйте согнуть ластик или стержень шариковой ручки в заданном направлении (рис.14). Что же получилось?

— Верно, итак, «скачок» величиной  $ql^2$  откладываем вверх (см. рис. 13). Далее смотрим на эпюру ЭQ — производная  $Q(z) = \frac{dM(z)}{dz}$  отрицательна и постоянна на всем участке, это значит, что зависимость  $M(z)$  представляет линейную убывающую функцию (вспоминаем о геометрическом смысле производной как о тангенсе угла наклона касательной к графику функции). К концу участка ее изменение будет численно равно соответствующей площади ЭQ, а значение момента в конце участка составит

$$M_k = M_n + \Delta M = M_n + S_{ЭQ} = ql^2 + (-ql \cdot 2l) = -ql^2.$$

Обратите внимание, что площадь(!)  $S_{ЭQ}$  оказалась отрицательной; все правильно — подсчитываемое изменение момента  $\Delta M$  лишь **численно** (по абсолютной величине) равно площади соответствующей фигуры. Строим график  $M(z)$  от начального значения  $M_n = +ql^2$  «двигаясь» по прямой вниз на величину  $\Delta M = S_{ЭQ} = 2ql^2$  до значения момента  $M_k = -ql^2$  в конце участка (см. рис. 13). Очевидно, прямая, ограничивающая эпюру, пересечет линию нулевых значений как раз посередине участка, при  $z=l$ .

**Второй участок.** На границе участков, как видно, приложена пара сил с моментом  $2,5ql^2$  того же, что и в начале, направления; таким образом, совершенно ясно, в какую сторону следует откладывать соответствующий «ска-



чок» – вверх. Значение момента в начале второго участка составит  $M_n = 1,5ql^2$  (см. рис. 13). Если же на этот счет возникли какие-то сомнения, воспользуй-

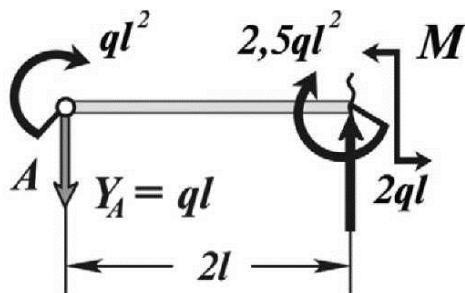


Рис.15. К определению изгибающего момента в начале второго участка

тесь старым добрым методом сечений и определите «подозрительный» момент как по величине, так и по направлению (рис. 15):

$$\sum M_x(2l) = ql \cdot 2l - ql^2 - 2,5ql^2 + M = 0;$$

$$M = 1,5ql^2.$$

Как и прежде, анализируем график производной –  $\mathcal{EQ}$ : производная линейна, значит, первообразная функция описывается квадратичной параболой, которая

сначала возрастает на участке протяженностью  $l$ , где производная положительна, а затем убывает по тому же закону. Смена знака производной говорит о наличии экстремума (у нас – максимума) функции в данном сечении. Понятно, что значение  $M_{\max}$  нужно определить обязательно, ведь цель построения любой эпюры – выявить опасное сечение (см. рис. 13). Таким образом, эпюру момента на втором участке целесообразно «просчитывать» в два приема:

$$M_{\max} = M_n + S_{\mathcal{EQ}} = 1,5ql^2 + \frac{1}{2}ql \cdot l = 2ql^2; \quad M_k = M_{\max} + S_{\mathcal{EQ}} = 2ql^2 + \frac{1}{2}(-2ql)2l = 0.$$

Значение момента в конце участка, в сечении  $B$ , оказалось равным нулю, что соответствует уравнению (2); и впрямь, идеальный шарнир (в отсутствии силы трения) момента не передает.

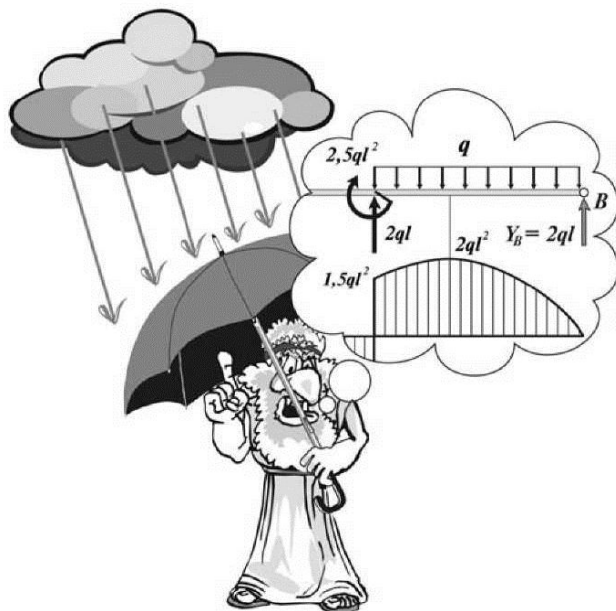


Рис.16. Наставник демонстрирует правило зонтика

Итак, все характерные значения и той, и другой эпюры найдены.

– Совершенно определенный ответ на этот вопрос дает анализ графика производной ( $\mathcal{EQ}$ ): исходя из характера изменения тангенса угла (а, следовательно, и самого угла) наклона касательной делаем вывод в пользу первого варианта (см. рис. 13).

Эта закономерность в сопротивлении материалов формулируется как **правило зонтика** (рис.16):

эюра изгибающего момента своей выпуклостью всегда направлена навстречу распределенной нагрузке как зонтик своим куполом – навстречу дождевому потоку.

– И опять Вы правы. Действительно, для того, чтобы построить ЭМ на данном участке (или его части – это требуется, когда на участке достигается экстремальное значение момента), всякий раз нужно ответить на **пять** стандартных вопросов:

- 1) чему равен момент  $M_n$  в начале участка?
- 2) какой (возрастающей или убывающей) является функция  $M(z)$  на этом участке?
- 3) каков характер (порядок) функции  $M(z)$  на участке?
- 4) чему равно изменение момента  $\Delta M = S_{ЭО}$  к концу участка?
- 5) и, наконец, чему равен момент  $M_k = M_n + \Delta M = M_n + S_{ЭО}$  в конце участка?



Остается лишь аккуратно, в масштабе провести линию эюры, нанести вертикальную штриховку и проставить абсолютные значения момента. Кстати, теперь по положению эюры можно судить, в каких сечениях сжатые волокна находятся сверху, а в каких – снизу; если эюра построена правильно, это получится автоматически. И конечно, можно (и нужно!) сказать, в каком сечении (или сечениях) действует самый большой изгибающий момент.

– И это не оплошность, а традиция. Почему всякие «сухопутные крысы» говорят «ко'мпас», а настоящие «морские волки» – «компа'с»? Традиция!

– Вот теперь, действительно, пора.

### 3. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

— ... ?

#### 3.1 Опасное и допускаемое напряжения

В результате лабораторных испытаний получают механические характеристики материала, в частности, предел текучести (физический  $\sigma_T$  или условный  $\sigma_{0,2}$ ) и временное сопротивление (предел прочности)  $\sigma_B$ . Вспомните, что происходит с образцом при достижении напряжением каждой из этих величин, и сопоставьте это с соответствующими участками диаграммы деформирования (рис. 17). При напряжении, равном пределу текучести, наблюдается существенное **необратимое** изменение размеров и формы объекта. Несмотря на то, что его разрушения в привычном понимании (появление трещины, разделение на части) не происходит, такая деталь уже неработоспособна хотя бы потому, что требуемые технические параметры изделия не обеспечиваются. Приближение напряжения к пределу прочности сопровождается локализацией пластического деформирования (на образце образуется отчетливо видимая шейка) и последующим разрушением (см. рис. 17).

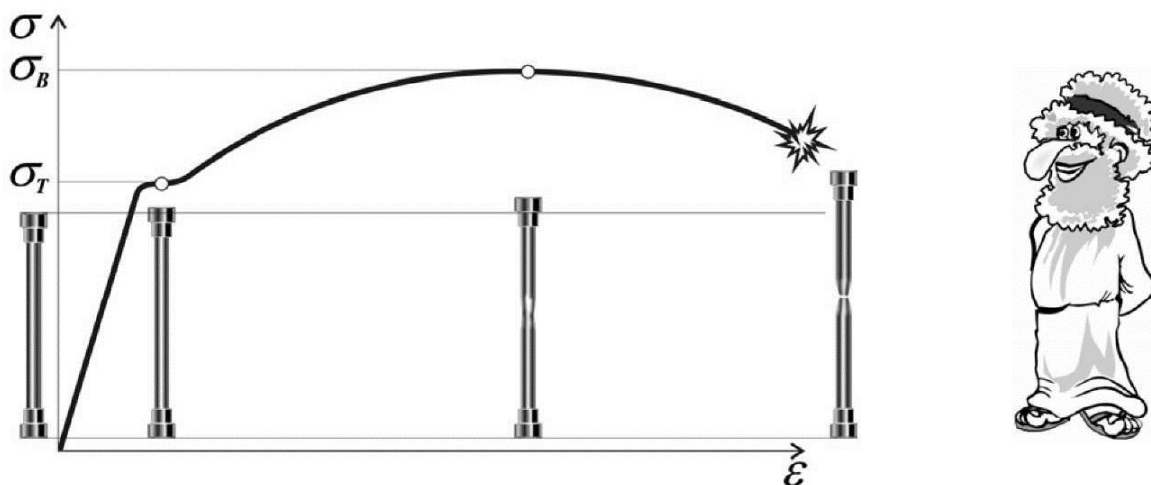


Рис.17. Диаграмма деформирования малоуглеродистой стали и изменение образца в процессе нагружения

Как видно, характеристики прочности  $\sigma_{0,2}$ ,  $\sigma_B$  представляют *предельные (опасные)* с точки зрения работоспособности конструкции величины напряжения ( $\sigma_{пр}$ ). Их значения вместе с некоторыми другими механическими характеристиками для нескольких марок сталей, сплавов цветных и легких металлов, а также чугунов приведены в Приложении 3.

– Конечно нет, повышать действующие напряжения вплоть до опасных нельзя – существует разброс механических свойств, нагрузки в эксплуатации могут отличаться от расчетных, да и формулы сопротивления материалов не являются абсолютно точными. Поэтому напряжения в конструкции ограничивают значениями, составляющими определенную долю предельных; их называют *допускаемыми*, т.е., допускаемые – это такие наибольшие напряжения, которые еще можно **допустить** в конструкции, чтобы она осталась **надежной**. Таким образом, для оценки прочности объекта действующее в каждой его точке напряжение следует сравнить с допускаемым или же найти опасную точку (или точки) с максимальным напряжением  $\sigma_{\max}$  и такое сравнение выполнить для нее (для них). В этом заключается суть метода *расчета на прочность по допускаемым напряжениям*.

– « » ?

### 3.2 Коэффициент запаса прочности – фактический и нормативный

Итак, конструкция не разрушится (в широком смысле, т.е., не утратит работоспособности), если отношение

$$k = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{max}}} > 1; \quad (4)$$

$k$  – коэффициент запаса прочности, или коэффициент безопасности (правда, выполнение этого условия еще не означает, что такое изделие **надежно**).

Если в процессе эксплуатации нагрузка изменяется, будет изменяться и зависящее от нее значение  $\sigma_{\max}$ , а, следовательно, и величина  $k$  (перед запуском машины нагрузка вообще отсутствует, тогда  $k = \infty$ ). Таким образом, параметр  $k$  характеризует запас прочности в **текущий** момент времени и называется *фактическим коэффициентом запаса прочности*.

На основе **опыта** проектирования и эксплуатации различных конструкций, машин, аппаратов устанавливают **минимально необходимые, экономически обоснованные** значения коэффициента запаса, которые разработчик **обязан** обеспечить при проектировании и доводке. Эти величины приводятся в соответствующих нормативных документах – нормах расчетов на прочность, методических указаниях, методических рекомендациях (обычно, отраслевых); сам же параметр  $[k]$  называется *нормативным коэффициентом запаса прочности*.

Тогда условие прочности, обеспечивающее заданную вероятность неразрушения, логично записать в виде

$$k \geq [k]$$

или, с учетом выражения (4),

$$k = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{max}}} \geq [k]. \quad (5)$$

В зависимости от того, какое напряжение считается опасным, определяют коэффициент запаса по пределу текучести (для пластичных материалов)

$$k = \frac{\sigma_{T(0,2)}}{\sigma_{\text{max}}}$$

или по пределу прочности (для материалов и хрупких, и пластичных)

$$k_{Bp} = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\text{max}}}, \quad k_{Bc} = \frac{\sigma_{BC}}{\sigma_{\text{max}}}$$

(последний обычно для хрупких, поскольку предел прочности  $\sigma_{BC}$  для пластичных материалов экспериментально не определяется).

— ?

– Вспомните лабораторную работу, в которой проводились испытания материалов при сжатии. Удалось ли тогда разрушить стальной цилиндрический образец, монотонно повышая нагрузку? То-то и оно!

—

?

– Величину нормативного коэффициента запаса **назначают** исходя из следующих соображений.



1. Нагрузки, возникающие в эксплуатации, могут отличаться от расчетных; кроме того, могут возникать усилия, которые в расчете не предусматривались вовсе (так называемые начальные усилия, см. выше).

2. Механические характеристики имеют определенный, вполне объективный, разброс; они могут изменяться в процессе обработки (например, в результате наклепа при штамповке) и эксплуа-

тации изделия (происходит деформационное старение материала – снижение характеристик пластичности, накопление повреждений в нем).

3. Расчетные схемы и формулы (Приложение 1) не являются абсолютно точными. Вспомните, к примеру, гипотезы, которые были приняты при выводе зависимостей для напряжений при растяжении-сжатии, кручении, изгибе, и связанные с ними ограничения.





4. Различные конструкции работают в различных условиях и обладают разной степенью ответственности. Разной является и тяжесть последствий аварии.



5. Учитываются



соображения экономического характера. Иногда выгоднее заменить деталь в процессе эксплуатации, а не закладывать для нее повышенные запасы прочности или жесткости.

Неудивительно, что величины нормативного коэффициента запаса для различных машин и условий эксплуатации изменяются в широких пределах. Для изделий общего машиностроения обычно назначают  $[k_B]=2,5\dots5$ ;  $[k_T]=1,5\dots3$ , однако тросы кабин пассажирских лифтов проектируют, принимая  $[k_T]=10$ , а элементы планера самолета –  $[k_T]=1,2\dots2,0$ . Последнее вовсе не означает, что авиационные конструкции менее надежны, конечно, нет. Коэффициент запаса еще образно называют «коэффициентом незнания». Его величину можно снизить за счет повышения точности используемых математических моделей материала и конструкции, экспериментальной доводки изделия, стабильности технологии и тщательного ее соблюдения, накопления и анализа статистики отказов. Недаром в авиационной и ракетно-космической отраслях сложилась одна из самых совершенных систем обеспечения прочности.



Вернемся к условию прочности (5):

$$k = \frac{\sigma_{\text{уп}}}{\sigma_{\text{max}}} \geq [k], \quad \text{откуда} \quad \sigma_{\text{max}} \leq \frac{\sigma_{\text{уп}}}{[k]}.$$

— По-видимому, такая, действующие напряжения в каждой точке которой одинаковы. Подобная конструкция называется *равнопрочной*. Теоретически при одновременном достижении напряжением во всех точках предельного значения она должна «рассыпаться» в пыль. Поскольку среди равных друг

другу напряжений максимальное искать бессмысленно, для равнопрочной конструкции последнее условие в произвольной  $i$ -ой точке следует записать в виде

$$\sigma_i \leq \frac{\sigma_{пр}}{[k]} \quad (6)$$

Отношение  $[\sigma] = \frac{\sigma_{уп}}{[k]}$  и есть *допускаемое* напряжение. Используя это определение, условие прочности можно также записать в форме

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad (7)$$

—

?

### 3.3 Типы расчета на прочность

В зависимости от заданных и подлежащих определению величин расчет на прочность может быть проведен как

- *проверочный* (проверочный),
- *проектировочный*,
- с целью определения *грузоподъемности* системы
- и *подбора материала*.

Как вы помните, **величина нормативного коэффициента запаса должна быть известна всегда**. В таблице показано, какой именно параметр определяется в ходе расчета каждого типа, а какие должны быть известны.

Известные и подлежащие определению  
в результате расчетов на прочность параметры

Параметр		Размеры (площадь) сечения	Нагрузка	Предельное напряжение	Нормативный коэффициент запаса
Тип расчета	Проверочный ( $k \leftrightarrow [k]^*$ )	✓	✓	✓	✓
	Проектировочный	?	✓	✓	✓
	Определение грузоподъемности	✓	?	✓	✓
	Подбор материала	✓	✓	?	✓

\*Значок  $\leftrightarrow$  означает «сравнение» – «больше, меньше?»

Аналогично условию прочности можно записать условие жесткости

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon] \quad \text{или} \quad w_{\max} \leq [w],$$

где  $\varepsilon_{\max}$ ,  $w_{\max}$ ,  $[\varepsilon]$ ,  $[w]$  – максимальные и допускаемые деформации и перемещения, соответственно, и провести расчет на жесткость трех типов.

—

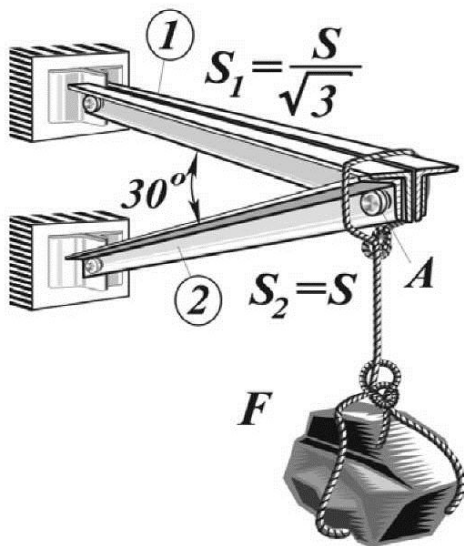
— ?

Дело в том, что единственной характеристикой жесткости материала, которую можно определить расчетом на жесткость в простейшей постановке, является модуль упругости, а он мало отличается у самых различных по прочностным свойствам сталей и сплавов (см. Приложение 3). Поэтому расчет с целью подбора материала даст неопределенный ответ.

—

?

### 3.4 Примеры расчетов на прочность по допускаемому напряжению



Дано:

$$F = 10 \text{ кН};$$

$$\sigma_T = 200 \text{ МПа};$$

$$[k] = 2.$$

Определить  
параметр  
площади  $S$

**Пример 1.** Давайте рассмотрим простой пример – двухстержневую конструкцию (ферму), нагруженную сосредоточенной силой (рис.18), – на котором познакомимся с основными этапами типового расчета.

Рис.18. Двухстержневая ферма, нагруженная сосредоточенной силой

Прежде всего, нужно решить, о каком расчете – на **прочность** или **жесткость** идет речь в нашей задаче. Посмотрите, на величину **какого характера** наложено ограничение. В условии задано предельное напряжение ( $\sigma_T$ ) для материала стержней, причем допускаемое напряжение должно быть вдвое ниже ( $[k]=2$ ). Кстати, судя по тому, что задан физический предел текучести, можно сделать вывод, что речь идет о материале пластичном, к тому же с площадкой текучести на диаграмме деформирования (см. рис.17). Очевидно, ограничение касается напряжения – величины **силового** характера, что является признаком прочностного расчета. Ограничение перемеще-



ния, деформации – величин **геометрического** характера – говорило бы о расчете на жесткость.

Структура исходных данных указывает на то, что предстоящий расчет – **проектировочного** типа (см. таблицу). Ну что ж, пора приступать к делу.

Соединения стержней между собой и с опорой выполнены с помощью цилиндрических шарниров, нагрузка приложена в месте соединения (узле *A*), поэтому расчетная схема конструкции практически очевидна (рис.19).

Итак, любой расчет на прочность начинается с ...

– ! – (6) (7)?

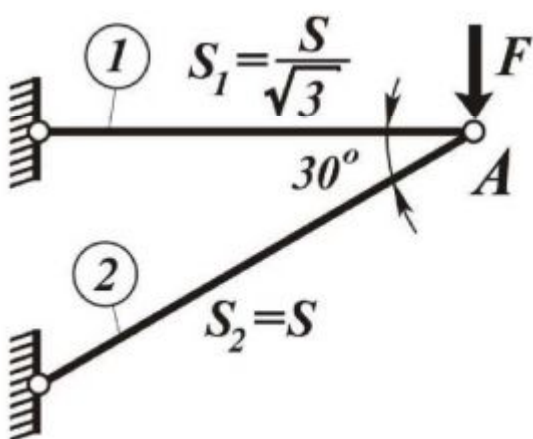


Рис.19. Расчетная схема двухстержневой фермы, нагруженной сосредоточенной силой

– По всем признакам наша ферма относится к **неравнопрочным** конструкциям, поэтому условие прочности запишем в виде (7)

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Далее конкретизируем правую и левую части неравенства, причем начинать можно с любой, например, с правой – она проще. Вспомним определение:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{[k]}; \text{ в данном случае } \sigma_{\text{пр}} \equiv \sigma_T. \quad (8)$$

Условие выбора  $\sigma_{\max}$  формально выглядит так:

$$\sigma_{\max} = \max (|\sigma_1|, |\sigma_2|). \quad (9)$$

Знак абсолютной величины поставлен потому, что пластичному материалу абсолютно «все равно», растягивающим или сжимающим будет наибольшее напряжение, ведь его пластическое течение (в данном случае это и есть предельное состояние) начинается примерно при одной и той же величине напряжения независимо от знака (принимается  $\sigma_T^{\text{раст}} = |\sigma_T^{\text{сж}}|$ ).

Двигаемся дальше. Как найти напряжения  $\sigma_i$  в каждом из стержней? Поскольку их соединения между собой и с опорой выполнены с помощью цилиндрических шарниров, а нагрузка приложена в узле (см. расчетную схему на рис.19), в поперечных сечениях элементов фермы будет существовать единственный внутренний силовой фактор – нормальная сила *N* (конечно, в



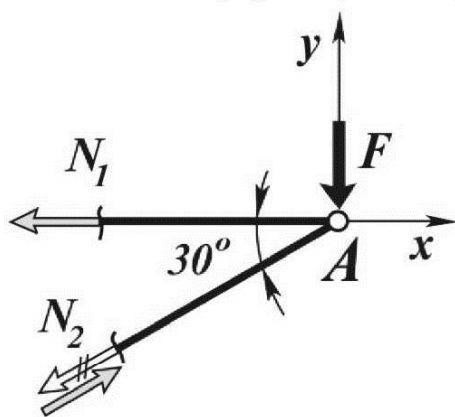
каждом своя). Напряжение при растяжении-сжатии определяется зависимостью (см. Приложение 1)

$$\sigma = \frac{N}{S}, \quad (10)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения.

Заметим, что во всех точках стержня напряжения будут одинаковы, поскольку ни нормальная сила, ни площадь сечения по длине не меняются. Таким образом, напряженное состояние всей конструкции будут характеризовать всего два числа:  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Сейчас уже стало видно, что наиболее трудоемкую часть задачи представляет определение усилий в стержнях – процедура, знакомая по разделу «Статика» курса теоретической механики. Вырежем узел  $A$  фермы и рассмотрим его равновесие (рис. 20). Обратите внимание, каким образом показаны нормальные силы – они приложены **к сечениям** (в произвольном направлении вдоль оси стержня) и никогда не изображаются **на самих стержнях**. Условие равновесия плоской системы сходящихся сил выразим двумя уравнениями в форме суммы проекций всех сил на ортогональные оси  $y$  и  $x$ :



$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = -F - N_2 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = -N_1 - N_2 \cos 30^\circ = 0.$$

Рис.20. Узел  $A$  находится в равновесии под действием внешней нагрузки и внутренних сил

Из первого уравнения следует, что  $N_2 = -2F$ , из второго  $-N_1 = 2F \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}F$ .

Знак «минус» в значении силы  $N_2$  означает, как вы догадываетесь, что направление этой силы первоначально было выбрано неверно, то есть, знаки, получаемые в результате решения уравнений, **могут** не соответствовать действительным знакам внутренних силовых факторов (помните, растягивающая нормальная сила считается положительной, а сжимающая – отрицательной). В общем, смысл знаков в ответе очень прост: «угадал – не угадал» (направление усилия).

Далее решение движется «обратным» [(10)→(9)⊕(8)→(7)] путем. Подсчитаем напряжения  $\sigma_i$  в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{\sqrt{3}F}{S/\sqrt{3}} = 3\frac{F}{S};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = -\frac{2F}{S},$$

затем выберем наибольшее по абсолютной величине значение

$$\sigma_{\max} = \max\left(\left|3\frac{F}{S}\right|, \left|-\frac{2F}{S}\right|\right) = 3\frac{F}{S}$$

и, наконец, подставим все известные величины в исходное условие прочности, с которого все начинается и им же заканчивается:

$$3\frac{F}{S} \leq \frac{\sigma_T}{[k]}, \quad \text{откуда} \quad S \geq \frac{3[k]F}{\sigma_T}.$$

Осталось лишь произвести вычисления, подставив заданные значения соответствующих величин в одной и той же системе размерностей (как правило, СИ):

$$[S] = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3 \text{ см}^2.$$

Данная задача является типовой (и, заметим, весьма простой), к ней вполне применим типовой порядок решения.

—

?

— Ну, вероятность встретиться и с той, что была только что решена, достаточно высока. Вместе с тем, при защите или на экзамене вам наверняка придется выполнять расчет балки при изгибе — ведь это одна из основных тем курса. Потому рассмотрим следующий пример.

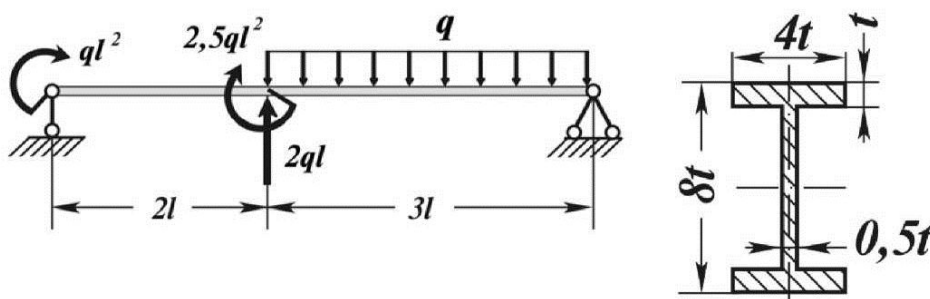


Рис. 21. Балка, нагруженная сосредоточенными и распределенными усилиями и схема ее поперечного сечения



**Пример 2.** Балка на двух шарнирных опорах, нагруженная сосредоточенными и распределенным усилиями, выполнена из профиля с сечением типа двутаврового (рис.21).

Требуется определить допускаемое значение параметра нагрузки  $q$ .

Материал – Сталь 40 с пределом текучести  $\sigma_{0,2} = 320 \text{ МПа}$ ; нормативный коэффициент запаса прочности  $[k] = 2$ ;  $l=0,5 \text{ м}$ ;  $t=8 \text{ мм}$ .

Судя по структуре исходных данных, ограничение накладывается на максимальное напряжение в конструкции – величину **силового** характера, что является признаком расчета на прочность, в нашем случае, с целью определения **грузоподъемности** системы (см. таблицу). Балка, работающая в условиях изгиба (чистого или поперечного – все равно), является конструкцией заведомо неравнопрочной: мало того, что внутренние силовые факторы в общем случае изменяются вдоль ее оси, так еще и напряжение по высоте любого сечения распределено неравномерно (см. Приложение 1). Тогда условие прочности (а именно с него начинается решение задачи) запишем в виде

$$\max \sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (11)$$

– – – ! «max»?

– Исключительно в методических целях. Давайте, конкретизируем обе части неравенства:

$$\max \sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{I_x} y_{\max}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{[k]}. \quad (12)$$

Таким образом, смысл первого из этих символов таков: «найди наиболее опасное сечение (сечение с **максимальным** значением изгибающего момента)». Отсюда следует необходимость построения соответствующей эпюры – ЭМ. Смысл второго вытекает из распределения напряжения по высоте сечения: «в опасном сечении найди наиболее опасную точку (или точки) – с координатой  $y_{\max}$ ». В общем, два символа «max» записали для того, чтобы задать «алгоритм» решения задачи, чтобы не думать: «А что же делать дальше?».

Итак, порядок решения ясен. Начнем с эпюры изгибающего момента; эта процедура была весьма подробно описана в подразделе 2.2 (Пример 2). Полученный результат приведен на рис. 22. Теперь легко определить величину максимального момента ( $M_{\max} = 2ql^2$ ), сечение, в котором она достигается, и положение растянутых и сжатых волокон в нем. Покажем характер распределения напряжения по высоте опасного сечения (рис. 23).

Что же дальше? Как подсказывает выражение (12), дальше нужно поработать с «геометрией»: определить координату  $y_{\max}$  точек, в которых напряжение максимально (как и в предыдущем примере, его знак не имеет значе-

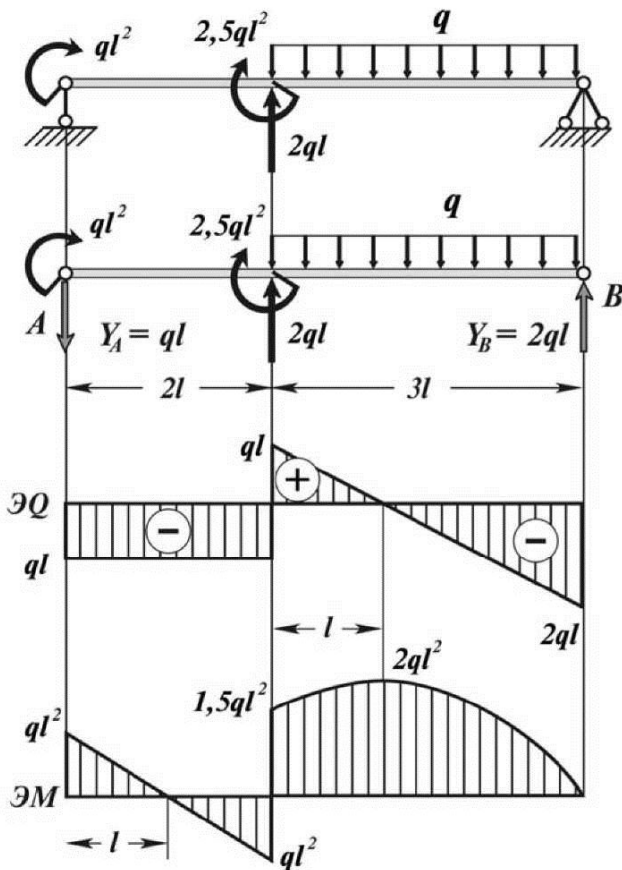


Рис. 22. Балка с приложенными к ней внешними нагрузками и эпюры внутренних силовых факторов

относительно которой происходит изгиб балки, совпадает с горизонтальной осью симметрии  $x$ ; соответственно, величина  $y_{\max} = 4t$  (см. рис. 23).

Приступаем к определению момента инерции сечения, представляющего, как видно, сложную фигуру. Момент инерции составной фигуры относительно выбранной оси можно найти как сумму моментов инерции фигур, ее составляющих, относительно той же оси. Соответствующую «теорию» опять же следует посмотреть в конспекте лекций или учебнике. Разбивка исходной фигуры, в принципе, может быть произвольной, однако не всегда очевидный вариант является лучшим. Приведем два выражения, дающие в итоге один и тот же результат.

**Вариант 1 (очевидный).** Сечение представлено набором трех прямоугольников размерами  $0,5t \times 6t$  и  $4t \times t$ :

$$I_x = \frac{0,5t(6t)^3}{12} + 2 \left[ \frac{4t \cdot t^3}{12} + (3,5t)^2 4t^2 \right] \cong 107,7t^4.$$

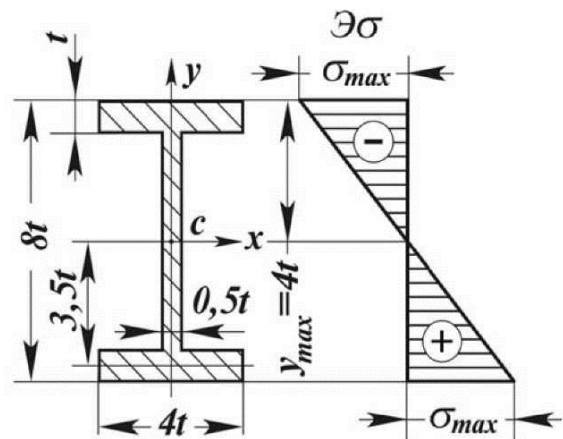


Рис. 23. Схема поперечного сечения балки и характер распределения нормального напряжения по высоте опасного сечения

ния: Сталь 40 – материал пластичный) и осевой момент инерции  $I_x$  сечения относительно его центральной главной оси. В силу симметрии фигуры положение центра тяжести (точка  $c$ ) очевидно – оно определяется пересечением осей симметрии. Таким образом, ось,

относительно которой происходит изгиб балки, совпадает с горизонтальной осью симметрии  $x$ ; соответственно, величина  $y_{\max} = 4t$  (см. рис. 23).

Приступаем к определению момента инерции сечения, представляющего, как видно, сложную фигуру. Момент инерции составной фигуры относительно выбранной оси можно найти как сумму моментов инерции фигур, ее составляющих, относительно той же оси. Соответствующую «теорию» опять же следует посмотреть в конспекте лекций или учебнике. Разбивка исходной фигуры, в принципе, может быть произвольной, однако не всегда очевидный вариант является лучшим. Приведем два выражения, дающие в итоге один и тот же результат.

**Вариант 1 (очевидный).** Сечение представлено набором трех прямоугольников размерами  $0,5t \times 6t$  и  $4t \times t$ :

$$I_x = \frac{0,5t(6t)^3}{12} + 2 \left[ \frac{4t \cdot t^3}{12} + (3,5t)^2 4t^2 \right] \cong 107,7t^4.$$

**Вариант 2 (неочевидный).** Сечение представляет «разность» сплошного размера  $4t \times 8t$  и двух полых ( $1,75t \times 6t$ ) прямоугольников с центрами тяжести, лежащими на центральной оси всего сечения в целом:



$$I_x = \frac{4t(8t)^3}{12} - 2 \frac{1,75t(6t)^3}{12} \cong 107,7t^4.$$

Даже при такой простой геометрии сечения второе выражение заметно проще. А если нет никакой разницы, зачем считать лишнее!

Итак, наступает самый волнующий момент – подставим все полученные величины в исходное условие прочности (11) с учетом выражений (12):

$$\max \sigma_{\max} = \frac{2ql^2}{107,7t^4} 4t \leq \frac{\sigma_{0,2}}{[k]};$$

выразим искомый параметр

$$q \leq 107,7 \frac{\sigma_{0,2} \cdot t^3}{8[k] \cdot l^2},$$

а затем вычислим его

$$[q] = 107,7 \frac{320 \cdot 10^6 (8 \cdot 10^{-3})^3}{8 \cdot 2 \cdot 0,5^2} = 4411,4 \frac{H}{M} \cong 4,41 \frac{kH}{M};$$

обозначение  $[q]$  по-прежнему имеет смысл допускаемой величины: это самая большая интенсивность распределенной нагрузки, которую еще можно **допустить**, не нарушая условия прочности.

–

?

– С нашим набором исходных данных – да.

–

?



– Как вы знаете, при поперечном изгибе в сечениях балки помимо изгибающего момента возникает еще один внутренний силовой фактор – поперечная (перерезывающая) сила (см. рис. 21). Она представляет интегральную характеристику распределенных по сечению касательных напряжений (см. Приложение 1). В тонкостенных сечениях эти напряжения могут достигать довольно высоких значений и вызывать пластический сдвиг элементов конструк-

ции (в случае разрушения говорят, что произошел срез детали). Следует также иметь в виду, что пластическое течение материала при сдвиге начинается при напряжениях заметно меньших, чем при растяжении или сжатии – сравните величины  $\tau_T$  и  $\sigma_T$  для разных сталей и сплавов (Приложение 3). Поэтому в объектах, подобных нашей балке, следует проверять, не превосходит ли максимальное касательное напряжение допускаемой величины:

$$\max \tau_{\max} \leq [\tau].$$

Смысл двух символов «max» остается прежним: «найди наиболее опасное сечение, а в нем – наиболее опасную точку (точки)».

Максимальное касательное напряжение определяется формулой Журавского (Приложение 1)

$$\max \tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x}{I_x b},$$

где  $Q_{\max}$  – наибольшее значение поперечной силы;  $S_x$  – статический момент отсеченной части сечения относительно его центральной главной оси;  $I_x$  – осевой момент инерции сечения;  $b$  – ширина сечения на том уровне, где определяется касательное напряжение. Характер распределения этого напряжения по высоте сечения показан на рис. 24. «Скачки» на  $\Delta\tau$  объясняются резким, скачкообразным (от  $4t$  до  $0,5t$ ) изменением ширины сечения.

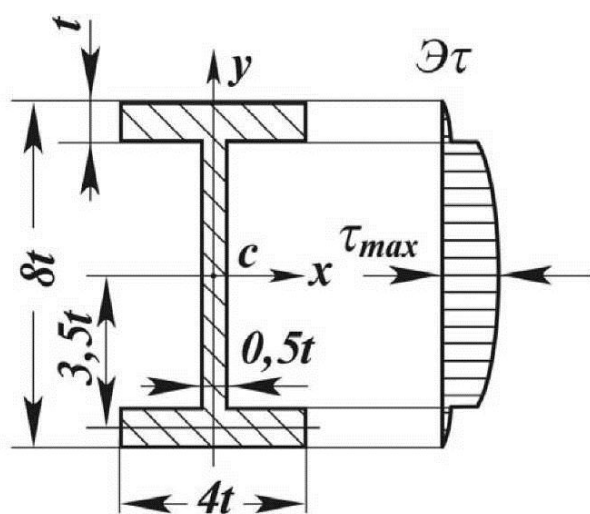


рис. 24. «Скачки» на  $\Delta\tau$  объясняются резким, скачкообразным (от  $4t$  до  $0,5t$ ) изменением ширины сечения.

Обратите внимание, что максимальная поперечная сила действует совсем не в том сечении, где реализуется максимальный изгибающий момент (рис. 22), более того, в этом сечении ( $B$ ) момент вообще отсутствует. Как следует из распределения  $\Delta\tau$ , максимум касательного напряжения достигается в середине сечения, в точках на

Рис. 24. Схема поперечного сечения балки и характер распределения касательного напряжения по высоте опасного сечения

оси  $x$ ; поэтому под отсеченной частью сечения, статический момент которой предстоит определять, понимается любая половина фигуры. Вычислим величину  $\max \tau_{\max}$  при найденном ранее значении  $[q]$ :

Рис. 24. Схема поперечного сечения балки и характер распределения касательного напряжения по высоте опасного сечения

$$\max \tau_{\max} = \frac{2ql(4t^2 \cdot 3,5t + 3t \cdot 0,5t \cdot 1,75t)}{107,7t^4 \cdot 0,5t} = \frac{2 \cdot 4,41 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 16,63}{107,7 \cdot 0,5 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^2} = 21,3 \cdot 10^6 \frac{H}{M^2};$$

$$\max \tau_{\max} = 21,3 \text{ МПа}$$

(статический момент **T**-образной отсеченной части относительно оси  $x$  подсчитан как сумма статических моментов двух прямоугольников, ее составляющих).

Далее этот результат следовало бы сопоставить с допускаемым напряжением  $[\tau]$ , однако в условии задачи оно не задано. Тем не менее, попробуем оценить, насколько опасна полученная величина – сравним ее с пределом текучести Стали 40 при сдвиге (Приложение 3):

$$k_{\tau} = \frac{\tau_T}{\max \tau_{\max}} = \frac{220}{21,3} \cong 10,3.$$

Безусловно, такой запас прочности более чем достаточен, и, значит, разрушение срезом нашей балке, по всей видимости, не грозит.

Вообще же в конструкциях, работающих при поперечном изгибе и выполненных из стандартных прокатных **тонкостенных** профилей (Z-образного, двутавра, швеллера), напряжения сдвига могут быть весьма значительны, поэтому их проверка на прочность по касательным напряжениям является обязательной.

– Да, конечно. Известно, что чугун – второй после стали по объему использования материал в машиностроении – обладает существенно различным сопротивлением растяжению и сжатию. Сравните соответствующие пределы прочности (Приложение 3): для чугунов различных марок они могут различаться очень сильно – в 2,5–5 раз. Эта особенность (*разнопрочность*) материала, безусловно, должна учитываться при оценке прочности конструкции. Продемонстрируем это на примере.

**Пример 3.** Балка на двух шарнирных опорах, нагруженная сосредоточенными и распределенными усилиями, выполнена из профиля таврового сечения (рис.25).

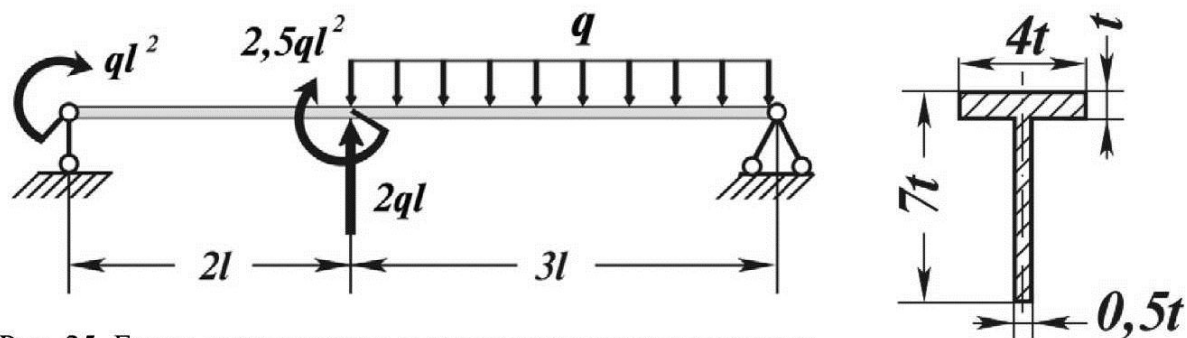


Рис. 25. Балка, нагруженная сосредоточенными и распределенными усилиями и схема ее поперечного сечения



Требуется указать рациональное положение сечения и определить, с каким коэффициентом запаса прочности работает конструкция.  
 Материал балки – чугун СЧ 24 с пределами прочности  $\sigma_B = 240 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{BC} = 800 \text{ МПа}$ ; параметр нагрузки  $q = 1,4 \text{ кН/м}$ ;  $l = 0,5 \text{ м}$ ;  $t = 8 \text{ мм}$ .

Перво-наперво, следует отметить, что в задаче речь идет, конечно же, о **фактическом** коэффициенте запаса – нормативный получить расчетным путем **невозможно** (см. подраздел 3.2). Таким образом, предстоящий расчет – **проверочный** (см. табл.). Вспомним определение (4)

$$k = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{max}}};$$

вот только предельных характеристик у чугуна СЧ 24 целых две –  $\sigma_B$ ,  $\sigma_{BC}$  и отличаются они более чем втрое. Придется находить не одно значение коэффициента запаса, а затем выбирать из них... какое?

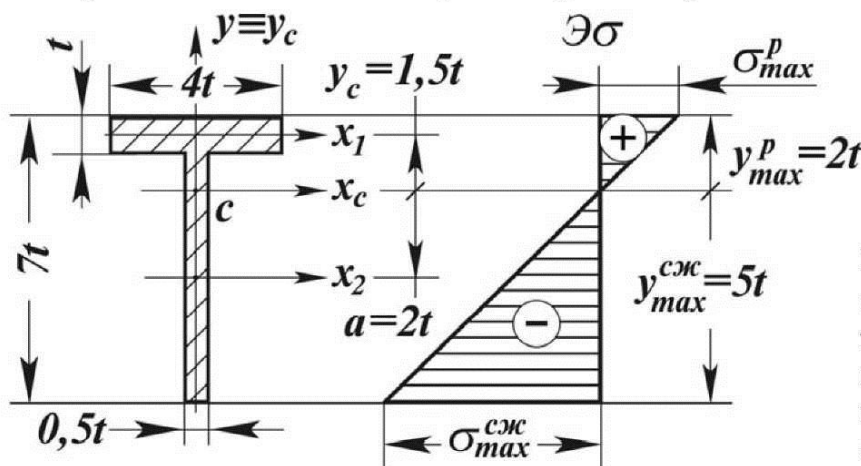
– !

– Потому, что чем больше запас, тем лучше?

– ?

– Посмотрите внимательно на определение коэффициента запаса; фактически он показывает, во сколько раз можно увеличить нагрузку, прежде чем элемент утратит работоспособность (разрушится). Перебирая расчетным – единственно доступным нам путем – различные ситуации, находим самую опасную, которой будет отвечать **минимальное** значение коэффициента запаса.

Нужно иметь в виду еще одно обстоятельство: при изгибе элементов конструкций из хрупкого материала рациональными с точки зрения материалоемкости оказываются сечения, **несимметричные** относительно оси изгиба, например, в виде тавра (рис.25). В связи с этим возникает проблема выбора положения сечения, с которой мы раньше не сталкивались.

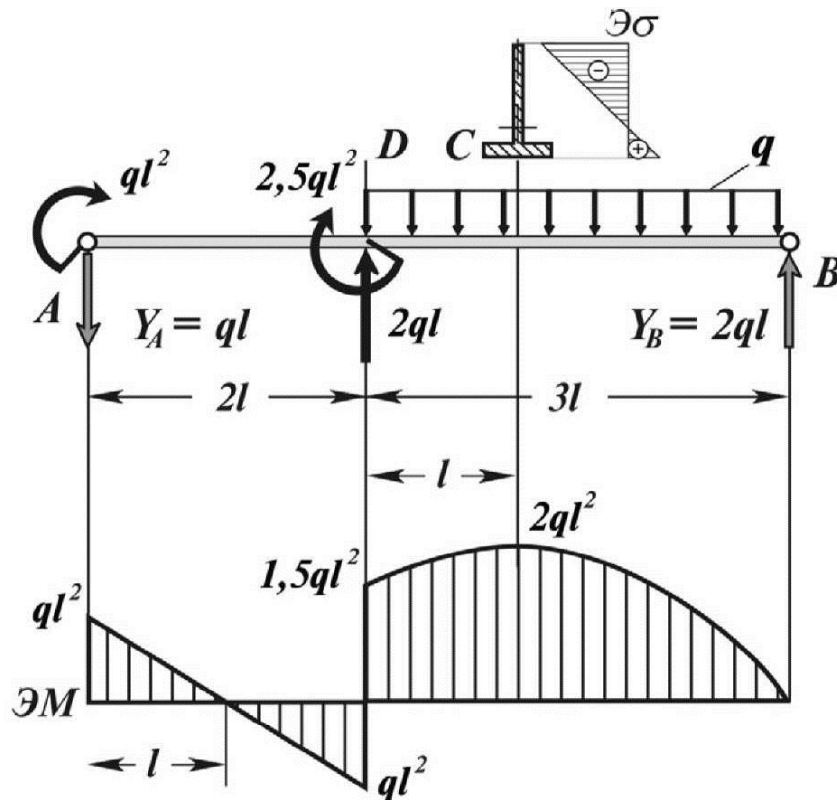


Именно с нее и начнем решение задачи – благо, дополнительных расчетов это не потребует. Изобра-

Рис. 26. Схема поперечного сечения балки и характер желаемого распределения нормального напряжения по высоте опасного сечения

зим характер распределения напряжения по высоте опасного сечения (рис. 26), при этом положение его центральной главной  $x_c$  оси можно пока задать «на глазок». Ясно одно:  $\Delta\sigma$  получится существенно несимметричной, максимальные напряжения в периферийных точках сечения (разумеется, разных знаков) будут отличаться более чем вдвое. Сопоставляя пределы прочности материала при растяжении и сжатии  $\left(\frac{\sigma_{BC}}{\sigma_B} = \frac{800}{240} = 3,333\right)$ ,

выбираем благоприятное с точки зрения прочностных свойств материала распределение растягивающих и сжимающих напряжений (см. рис. 26).



Теперь посмотрим, соответствует ли такое распределение положению растянутых и сжатых волокон в опасном сечении балки. Как вы понимаете, для этого придется построить эпюру изгибающего момента (см. подраздел 2.2, Пример 2). Результат представлен на рис. 27. Максимальное значение момента

$$M_{\max} = 2ql^2$$

реализуется в сечении  $C$ , причем сжатые волокна в нем находятся сверху. Таким образом, если сечение перевернуть «вверх тормашками», желаемое распределение напряжения

Рис. 27. Балка с приложенными к ней внешними нагрузками, эпюра изгибающего момента и рациональное положение сечения

будет соответствовать нагруженности балки.

Определим далее наибольшие напряжения  $\sigma_{\max}^p, \sigma_{\max}^{сж}$  с помощью выражения вида (12); для этого потребуются найти соответствующие координаты  $y_{\max}^p, y_{\max}^{сж}$  и осевой момент инерции  $I_{xc}$  сечения относительно центральной главной оси. Ее положение получим исходя из теоремы о статическом моменте составной фигуры и определения этого параметра (если нужно,

загляните в свой конспект лекций). В качестве исходной используем ось  $x_1$  (см. рис. 26):

$$y_c = \frac{S_{x_1}^T}{S^T} = \frac{S_{x_1} + S_{x_1}^I}{S + S^I} = \frac{4t^2 \cdot 0 + 6t \cdot 0,5t(-3,5t)}{4t^2 + 3t^2} = -1,5t;$$

символами «Т» обозначены величины, относящиеся ко всему сечению в целом, «-» и «I» – к горизонтальному и вертикальному прямоугольникам, на которые разбито сечение;  $S_x$  – статический момент;  $S$  – площадь. Вместе с тем становятся известны координаты  $y_{\max}^p = 2t$ ,  $y_{\max}^{сж} = 5t$  наиболее нагруженных точек. Зная момент инерции сечения относительно оси  $x_c$

$$I_{x_c}^T = I_{x_c}^- + I_{x_c}^I = (I_{x_1}^- + y_c^2 S^-) + (I_{x_2}^I + a^2 S^I) = \left( \frac{4t \cdot t^3}{12} + (1,5t)^2 4t^2 \right) + \left( \frac{0,5t(6t)^3}{12} + (2t)^2 3t^2 \right) = 30,3t^4, \text{ вычислим коэффициенты запаса в сечении } C:$$

$$k_B^{сж} = \frac{\sigma_{BC}}{\sigma_{\max}^{сж}} = \frac{\sigma_{BC}}{\frac{M_{\max}}{I_{x_c}} y_{\max}^{сж}} = \frac{\sigma_{BC}}{\frac{2ql^2}{30,3t^4} 5t} = \frac{800 \cdot 10^6}{\frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{30,3(8 \cdot 10^{-3})^3} 5} = 3,55;$$

$$k_B^p = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\max}^p} = \frac{\sigma_B}{\frac{M_{\max}}{I_{x_c}} y_{\max}^p} = \frac{\sigma_B}{\frac{2ql^2}{30,3t^4} 2t} = \frac{240 \cdot 10^6}{\frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{30,3(8 \cdot 10^{-3})^3} 2} = 2,66.$$

Интересно, что более опасными оказались крайние снизу растянутые волокна, хотя напряжение в этих точках в 2,5 раза меньше, чем в крайних сжатых волокнах.

– Ну, с этим уж ничего не поделаешь, не завернешь же чугунную балку «винтом», который недавно изобрел мой приятель Архимед! Но коль скоро такие, «неправильно» расположенные, сечения есть, определим коэффициент запаса для самого нагруженного из них – сечения **D** слева; заведомо опасными в нем будут точки с напряжением  $\sigma_{D \max}^p$  (объясните сами, почему):

$$k_B^p = \frac{\sigma_B}{\sigma_{D \max}^p} = \frac{\sigma_B}{\frac{M_D}{I_{x_c}} y_{D \max}^p} = \frac{\sigma_B}{\frac{ql^2}{30,3t^4} 5t} = \frac{240 \cdot 10^6}{\frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{30,3(8 \cdot 10^{-3})^3} 5} = 1,06.$$

Вот, собственно, и все, осталось лишь выбрать одно из трех найденных

значений  $k_i$ , которое отвечает фактическому коэффициенту запаса прочности всей конструкции в целом:

$$k = \min(k_i) = \min(3,35; 2,66; 1,06) \cong 1,1.$$

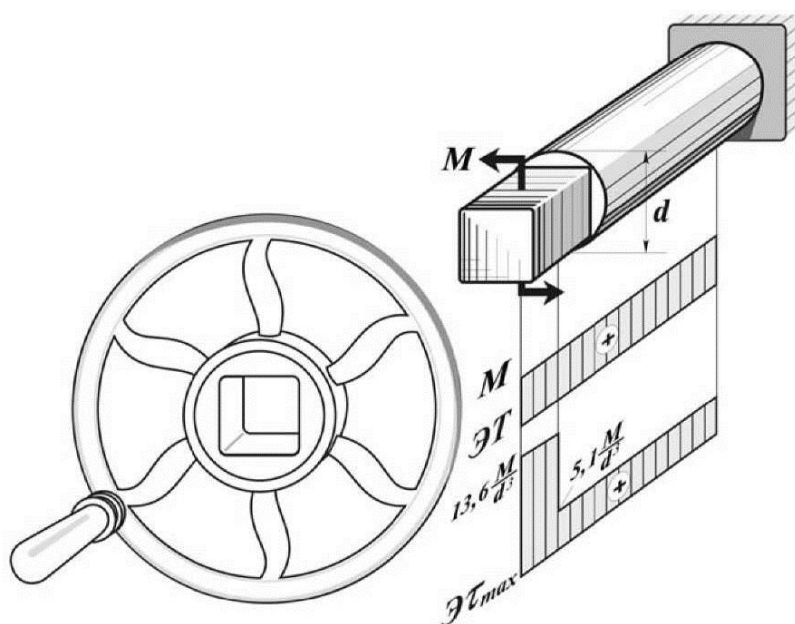
Если обратиться к подразделу 3.2, станет ясно, что подобная величина коэффициента запаса ни в коей мере не обеспечивает надежную работу системы – вот что значит нерационально (хоть и вынужденно) расположенное сечение. А ведь в сечении с **максимальным** моментом запас прочности был вполне достаточен –  $k_B = 2,66$ .

– ...

!

!

?



– Ну что ж, давайте рассмотрим еще один, пожалуй, последний, пример.

**Пример 4.** Какой величины момент можно приложить к цилиндрическому валу, обработанному «на квадрат» для насадки штурвального колеса (рис. 28)?

Диаметр вала  $d=30$  мм,  $[\tau]=60$  МПа.

Как нетрудно установить по структуре исходных данных, эта задача связана с расчетом на прочность с целью определения грузоподъемности системы.

Рис. 28. Расчетная схема цилиндрического вала, обработанного «на квадрат», и эпюры крутящего момента и максимальных касательных напряжений

Очевидно, все сечения вала нагружены одинаково: в них действует один-единственный внутренний силовой фактор – крутящий момент (см. эпюру ЭТ на рис. 28). Условие прочности следует записать в терминах касательных напряжений:

$$\max \tau_{\max} \leq [\tau];$$

$$\max \tau_{\max} = \max\left(\left|\tau_{\max}^{KB}\right|, \left|\tau_{\max}^{KP}\right|\right);$$

индексы «кв» и «кр» соответствуют участкам квадратного и круглого поперечного сечений; понятно, что знак касательного напряжения не имеет никакого значения, поскольку определяет лишь его направление. Максимальное касательное напряжение определяется выражением (Приложение 1)

$$\tau_{\max}^i = \frac{T}{W_k^i},$$

где  $T$  – крутящий момент;  $W_k$  – момент сопротивления сечения при кручении ( $W_k^{кв} = \alpha a^3$ , при соотношении сторон 1:1 коэффициент  $\alpha=0,208$ , см. Приложение 2;  $W_k^{кр} = \frac{\pi d^3}{16}$ ). Как видно, сторона  $a$  квадрата связана с диаметром  $d$

соотношением  $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$ .

Определим максимальные касательные напряжения на каждом из участков:

$$\tau_{\max}^{кв} = \frac{M}{0,208 \left( \frac{d}{\sqrt{2}} \right)^3} = 13,6 \frac{M}{d^3}, \quad \tau_{\max}^{кр} = \frac{M}{\pi \frac{d^3}{16}} = 5,1 \frac{M}{d^3} \quad (\text{см. эпюру } \tau_{\max} \text{ на рис. 28});$$

$$\max \tau_{\max} = \max\left(13,6 \frac{M}{d^3}; 5,1 \frac{M}{d^3}\right) = 13,6 \frac{M}{d^3}$$

и, наконец, снова обратимся к условию прочности:

$$13,6 \frac{M}{d^3} \leq [\tau],$$

$$\text{откуда } [M] = \frac{[\tau] d^3}{13,6} = \frac{60 \cdot 10^6 (30 \cdot 10^{-3})^3}{13,6} \cong 120 \text{ нм}.$$

Обратите внимание, насколько «подскочило» максимальное касательное напряжение после незначительной, казалось бы, обработки вала – в 2,67 раза! Ровно во столько же – то есть, почти втрое – снизилось и допускаемое значение момента  $M$ . Будьте осторожны при проектировании деталей, работающих на кручение!



– !  
?

– Да, а вместе с ней подошел к концу и наш, надеюсь, не скучный рассказ о методах и наиболее распространенных приемах оценки прочности, применяемых в курсе «Сопротивление материалов». Если теперь решение, скажем, типовых задач стало понятней, можете спать спокойно – вам нечего бояться защиты или экзамена.

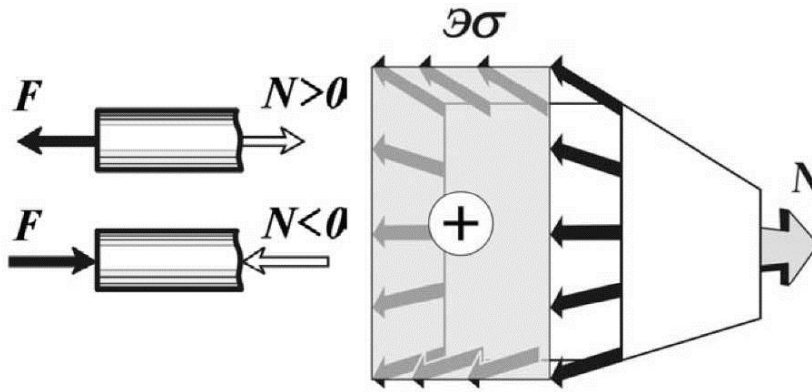


— Это вполне естественно — ведь вы учитесь. В конце концов, Наставник — это всего лишь придуманный нами образ, однако за ним всегда стоит реальный человек — ваш преподаватель, который ведет этот курс. А уж к нему-то можно обратиться всегда, без всякой машины времени.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. — М.: Наука и Гл. ред. физ.-мат. лит. и 197г. — 544 с.
- г. Методические указания и задания для расчетно-графических работ по сопротивлению материалов/Составители: ВхГПодойникови КхМЖкононови ЭхФЧерн ев; Под редх ОхССадаковах — Чел бинск: ЧГТУи199гхг — 8т сх

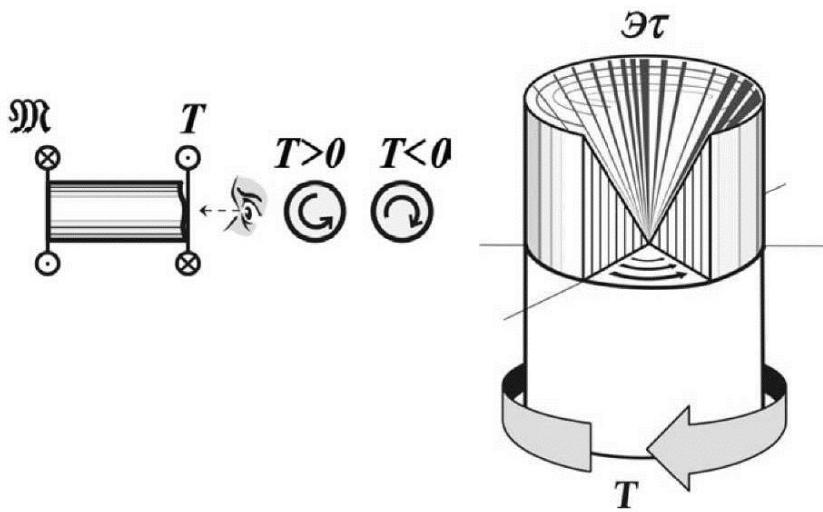
НЕКОТОРЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И  
ХАРАКТЕР ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО СЕЧЕНИЮ  
ПРИ ПРОСТЫХ ВИДАХ НАГРУЖЕНИЯ



Нормальное напряжение от нормальной силы при растяжении-сжатии

$$\sigma = \frac{N}{S},$$

где  $N$  – нормальная сила;  $S$  – площадь поперечного сечения.



Касательное напряжение от крутящего момента при кручении стержня кругового сечения

$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho,$$

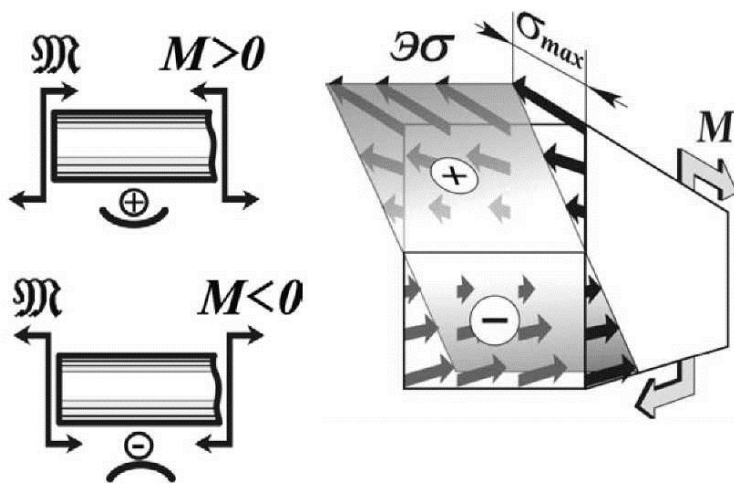
где  $T$  – крутящий момент;  $I_p$  – полярный момент инерции сечения;  $\rho$  – текущий радиус-вектор.



Максимальное касательное напряжение при кручении стержня произвольного сечения

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_k};$$

$W_k$  – момент сопротивления сечения при кручении.



Нормальное напряжение от изгибающего момента

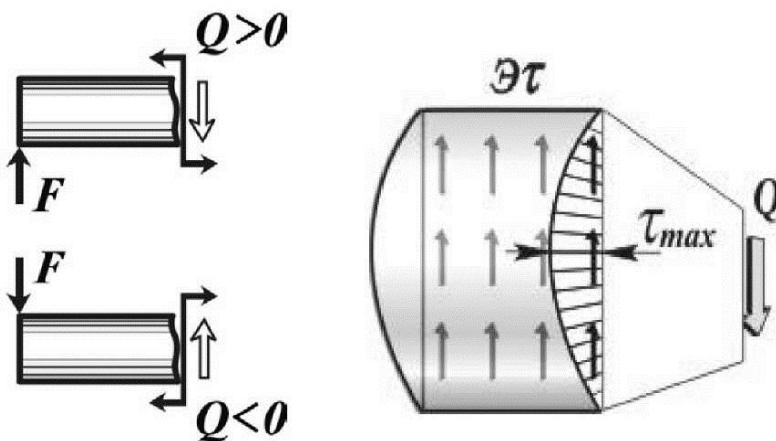
$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y,$$

где  $M_x$  – изгибающий момент;  $I_x$  – осевой момент инерции сечения относительно центральной главной оси;  $y$  – координата точек, в которых подсчитывается напряжение.

Максимальное нормальное напряжение –

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x};$$

$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$  – осевой момент сопротивления сечения.



Касательное напряжение при поперечном изгибе от перерезывающей силы

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x}{I_x \cdot b}$$

формула Д.И.Журавского; здесь  $Q$  – значение поперечной силы;  $S_x$  – статический момент отсеченной части

сечения относительно центральной главной оси;  $I_x$  – осевой момент инерции сечения;  $b$  – ширина сечения на том уровне, где определяется касательное напряжение.

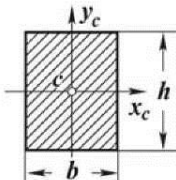
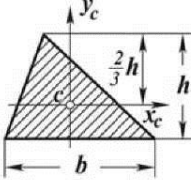
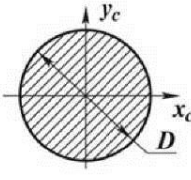
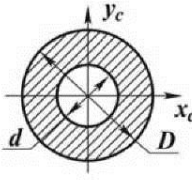
Таблицы с выражениями для моментов инерции и моментов сопротивления простейших сечений и некоторыми другими геометрическими характеристиками приведены в Приложении 2.



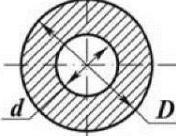
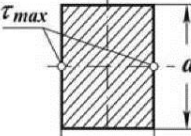
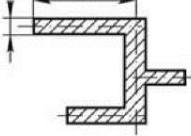
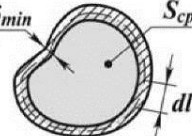
## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СЕЧЕНИЙ

#### ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ СЕЧЕНИЙ

Сечение				
	Прямоугольное	Треугольное	Круглое сплошное	Кольцеобразное
Осевой момент инерции $I_{x_c}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right)$
Осевой момент сопротивления $W_{x_c}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{\pi D^3}{32}$	$\frac{\pi D^3}{32} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right)$

#### МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ СЕЧЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ

Сечение				
	Кольцеобразное	Прямоугольное	Тонкостенное открытое	Тонкостенное замкнутое
Момент инерции сечения при кручении $I_k$	$\frac{\pi D^4}{32} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right)$	$\beta b^3 a$	$\frac{1}{3} \sum_i^n \delta_i^3 l_i$	$\frac{4 S_{cp}^2}{\int \frac{dl}{\delta}}$
Момент сопротивления сечения при кручении $W_k$	$\frac{\pi D^3}{16} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right)$	$\alpha b^2 a$	$\frac{I_k}{\delta_{max}}$	$2 S_{cp} \delta_{min}$

#### ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СООТНОШЕНИЯ СТОРОН ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

$a/b$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\eta$	1,00	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ МАРОК СТАЛЕЙ, СПЛАВОВ ЦВЕТНЫХ И ЛЕГКИХ МЕТАЛЛОВ, СЕРЫХ ЧУГУНОВ

Материал	Марка	$\sigma_{T(0,2)}$ , МПа	$\sigma_B$ , МПа	$\tau_T$ , МПа	$E \cdot 10^{-5}$ , МПа	$\mu$
Пластичные материалы						
Стали углеродистые	Ст.3	230	380-470	160	2,0	0,28
	Ст.4	240	430-550	170	2,0	0,28
	Ст.5	280	520-650	190	2,0	0,28
	Сталь 20	220	400-500	160	2,0	0,28
	Сталь 40	320	650	220	2,0	0,28
	Сталь 45	320	600-750	220	2,0	0,28
Стали легированные	20ХН	600	800	350	2,1	0,31
	40Х	800	1000	440	2,1	0,31
	40ХН	750	900	390	2,1	0,31
	12ХН3А	700	950	400	2,1	0,31
Сплавы алюминиевые	АЛ-4	200	260	120	0,72	0,30
	АК-4	310	400	180	0,72	0,30
	Д-16	330	470	200	0,72	0,30
Титановый сплав	ВТ-3	950	1100	500	1,2	0,26
Магниевый сплав	МА-5	220	300	160	0,72	0,27
Латунь (медный сплав)	Л-68	330	450	200	1,2	0,36

Материал	Марка	$\sigma_B$ , МПа	$\sigma_{BC}$ , МПа	$E \cdot 10^{-5}$ , МПа	$\mu$
Хрупкие материалы					
Серые чугуны	СЧ 12	120	500	1,2	0,25
	СЧ 15	150	600	1,2	0,25
	СЧ 18	180	670	1,2	0,25
	СЧ 24	240	800	1,2	0,25
	СЧ 35	350	900	1,2	0,25

Принятые обозначения:  $\sigma_{T(0,2)}$  – предел текучести;  $\sigma_B$ ,  $\sigma_{BC}$  – временное сопротивление при растяжении и сжатии, соответственно;  $\tau_T$  – предел текучести при сдвиге;  $E$  – модуль упругости первого рода (модуль Юнга);  $\mu$  – коэффициент Пуассона.