

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**ЧАСТЬ 2**  
Учебное пособие

Изложены методы расчёта на прочность при сложном нагружении элементов конструкций. Даны примеры тестовых заданий.

Предназначено для студентов инженерных специальностей всех форм обучения.

## ВВЕДЕНИЕ

---

---

Расчёты на прочность, жёсткость, устойчивость элементов конструкции являются одной из важнейших задач при проектировании зданий, сооружений, устройств и приборов. Без этих знаний инженеру невозможно проектировать и создавать надёжные и долговечные конструкции.

В первой части данного издания были изложены материалы, посвященные растяжению (сжатию), сдвигу, кручению и изгибу, элементов конструкции. Вторая часть является ее продолжением, в ней рассмотрены задачи курса сопротивления материалов, посвященные расчетам на прочность и жесткость при сложном нагружении, статической неопределимости, динамической и ударной нагрузки, а также на устойчивость и усталость.

В работе дано подробное изложение материала с примерами решения практических задач курса сопротивление материалов, а также тестовые задания, которые помогут закрепить полученные навыки и подготовиться к сдаче зачёта и экзамена.

## 1. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

---

В данной главе речь пойдёт об одновременном действии деформаций бруса, что чаще встречается на практике. Каждый из простых видов деформации (растяжение или сжатие, сдвиг, кручение, изгиб) ранее был рассмотрен в отдельности. Исключением является прямой поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя при этом в сечениях возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила. Этот вид деформации рассматривают как простой потому, что в подавляющем большинстве случаев расчёты на прочность и жёсткость ведутся без учёта влияния поперечных сил, т.е. по одному силовому фактору – изгибающему моменту.

Случай сложного сопротивления разделяют на две группы.

К первой группе относятся кривой изгиб, а также внецентренное растяжение и сжатие. Это те случаи, при которых в опасных точках бруса напряжённое состояние является одноосным или одноосным с незначительным влиянием на прочность бруса касательных напряжений. В таких случаях при расчётах на прочность теории прочности не используются.

Ко второй группе относятся изгиб с кручением, сжатие (или растяжение) с кручением, а также сжатие (или растяжение) с изгибом и кручением. В этих случаях, в опасных точках бруса возникает плоское напряжённое состояние, и расчет на прочность выполняется с применением теорий прочности.

### 1.1. КОСОЙ ИЗГИБ

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении бруса, не совпадает ни с одной из его главных плоскостей.

Случай косоуго изгиба, когда в поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент, называется чистым косым изгибом.

Если в сечении наряду с изгибающим моментом действует поперечная сила, то этот вид изгиба называется поперечным косым изгибом.

Пусть имеется брус прямоугольного поперечного сечения с жёстко заделанным левым концом. К нему на свободном конце приложена сила  $P$ , причём линия действия силы отклонена от вертикальной оси  $y$  на угол  $\alpha$  (рис. 1.1).

В случае косоуго изгиба изгибающий момент необходимо разложить на два изгибающих момента  $M_x$  и  $M_y$ . При этом полный изгибающий момент

будет равен  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ , и он будет действовать в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей рассматриваемого сечения.

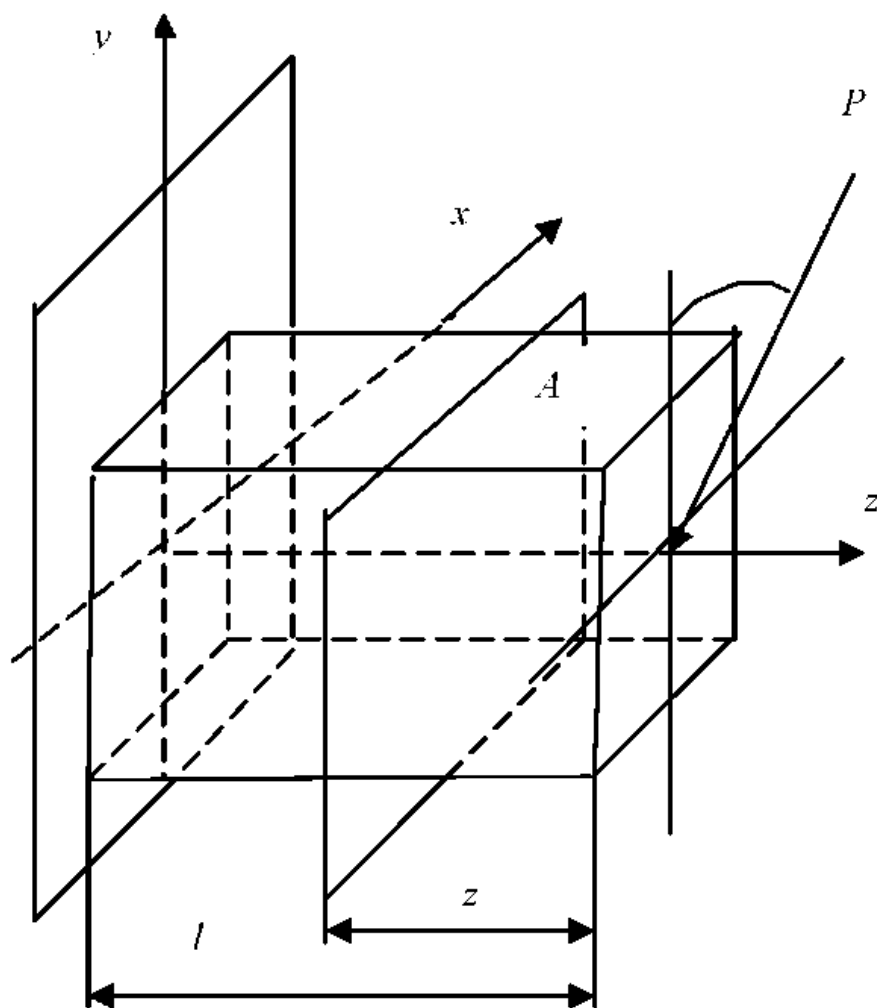


Рис. 1.1

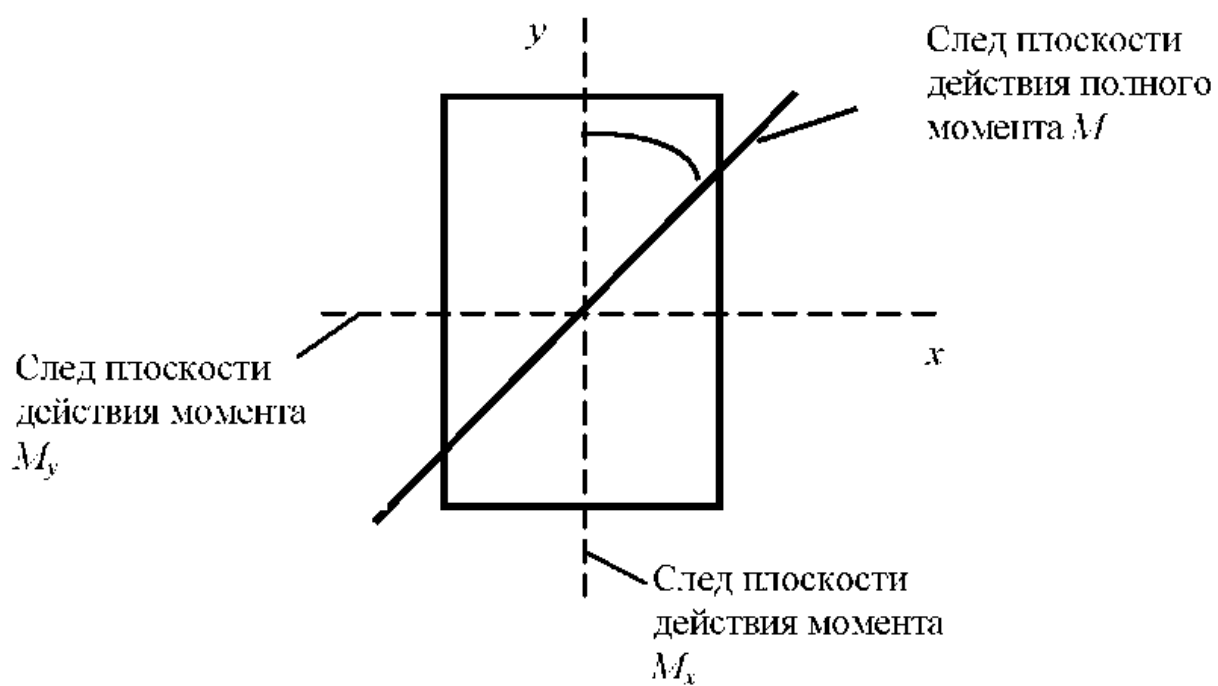


Рис. 1.2

Таким образом, кривой изгиб можно рассматривать как сочетание двух прямых изгибов, вызываемых изгибающими моментами, действующими относительно двух главных центральных осей инерции поперечного сечения  $x$  и  $y$ . Проекции силы  $P$  на соответствующие оси будут иметь следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= P \sin \alpha; \\ P_y &= P \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

На основании принципа независимости действия сил, полное нормальное напряжение в поперечном сечении равно сумме напряжений от раздельного действия моментов  $M_x$  и  $M_y$ . Следовательно, напряжение в любой точке поперечного сечения можно определить по формуле

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x. \quad (1.2)$$

В этой формуле значения  $x$  и  $y$  – это координаты выбранной точки поперечного сечения в системе координат  $xoy$ . В формулу подставлены абсолютные значения моментов  $M_x$  и  $M_y$ .

Полный изгибающий момент (рис. 1.2) связан с его составляющими  $M_x$  и  $M_y$  зависимостями

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cos \alpha; \\ M_y &= M \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

В нашем случае, в сечении  $A$  рис. 1.1:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= P_y z; \\ M_y &= P_x z. \end{aligned} \right\}$$

Вместо значений  $M_x$  и  $M_y$  в уравнение (1.2) подставим соответствующие выражения из системы:

$$\sigma = \pm M \left( \frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right). \quad (1.4)$$

В данной формуле  $\alpha$  – угол между вертикальной осью  $y$  и плоскостью действия полного момента.

При кривом изгибе нормальные напряжения в центре тяжести поперечного сечения равны 0. Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить в формулу (1.2) координаты центра тяжести  $x = 0$  и  $y = 0$ . Следовательно, при кривом изгибе нейтральная ось, также как и при прямом изгибе, проходит через центр тяжести поперечного сечения (рис. 1.3).

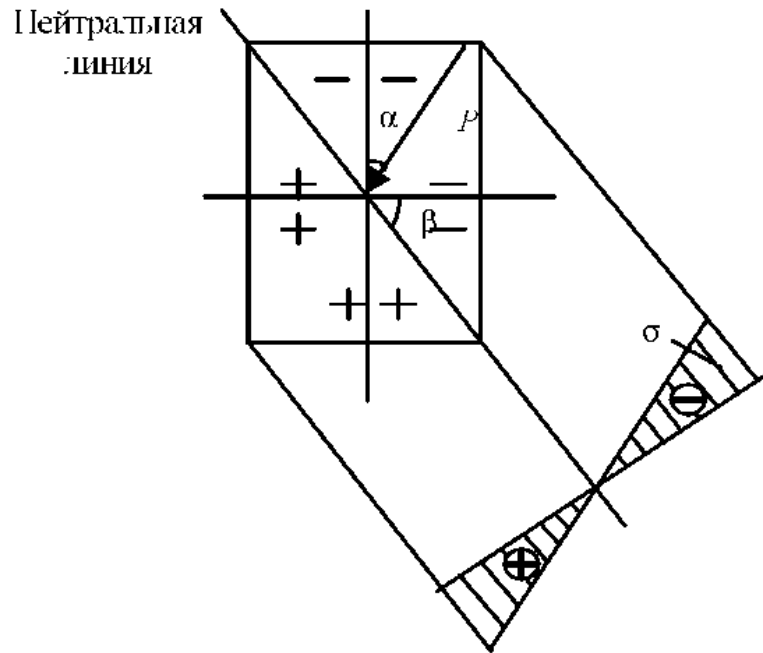


Рис. 1.3

Известно, что на нейтральной оси нормальные напряжения равны 0. поэтому для её нахождения приравняем к нулю формулу (1.4). Однако величина  $M \neq 0$ , поэтому для нейтральной оси можно записать:

$$\frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x = 0 .$$

При известных значениях  $\alpha$ .  $I_x$  и  $I_y$  это прямая, проходящая через начало координат:

$$y = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y} x .$$

Тангенс угла наклона  $\beta$  нейтральной оси к оси  $x$  равен  $-y/x$ , т.е.:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y} . \tag{1.5}$$

Эта формула служит для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.

Нейтральная ось всегда отклоняется от оси  $x$  на угол  $\beta$  в ту же сторону, в которую плоскость действия изгибающего момента отклоняется от оси  $y$  на угол  $\alpha$ .

Нормальные напряжения в точках поперечного сечения при косом изгибе прямо пропорциональны расстоянию от рассматриваемой точки до

нейтральной оси, следовательно, наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удалённых от нейтральной оси.

Для построения эпюры нормальных напряжений проводится прямая, перпендикулярная нейтральной оси и на ней откладываются значения нормальных напряжений.

Точки поперечного сечения, в которых при изгибе возникают наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения, являются опасными точками сечения. Для определения их положения необходимо по формуле (1.4) определить величину угла  $\beta$ , провести нейтральную ось, а затем параллельно ей провести линии, касающиеся контура сечения. Эти точки, наиболее удалённые от нейтральной оси, являются опасными точками сечения.

Для нахождения экстремальных значений напряжений в рассматриваемых точках необходимо подставить координаты этих точек в выбранной системе координат в формулу (1.2). Причём перед первым членом суммы проставляется знак (+), когда момент  $M_x$  вызывает растяжение в точках с положительными координатами  $y$ , а перед вторым членом – знак (+), когда момент  $M_y$  вызывает растяжение в точках с положительными координатами  $x$ . Таким образом, определение положения нейтральной оси необходимо для отыскания опасных точек сечения и последующего расчёта на прочность.

## 1.2. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ БРУСЬЕВ

При нагружении бруса внецентренно приложенной силой (рис. 1.4), параллельно его продольной оси получается сочетание изгиба с растяжением или сжатием. Применяв метод сечений, легко установить, что в любом поперечном сечении бруса возникают три внутренних силовых фактора (рис. 1.5):

$$\begin{aligned} N &= P; \\ M_x &= P y_p; \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$M_y = P x_p. \tag{1.7}$$

Сила  $P$  приложена в точке сечения  $A$ , причём эта точка удалена от осей  $x$  и  $y$  на расстояния  $x_p$ ,  $y_p$ . Это координаты точки приложения силы, проставленные с учётом знака в избранной системе координат (рис. 1.4).

Координаты  $x_p$  и  $y_p$  точки приложения силы называются эксцентриситетами этой силы относительно главных центральных осей инерции  $x$  и  $y$  соответственно. Точку  $A$  называют центром давления или полюсом.

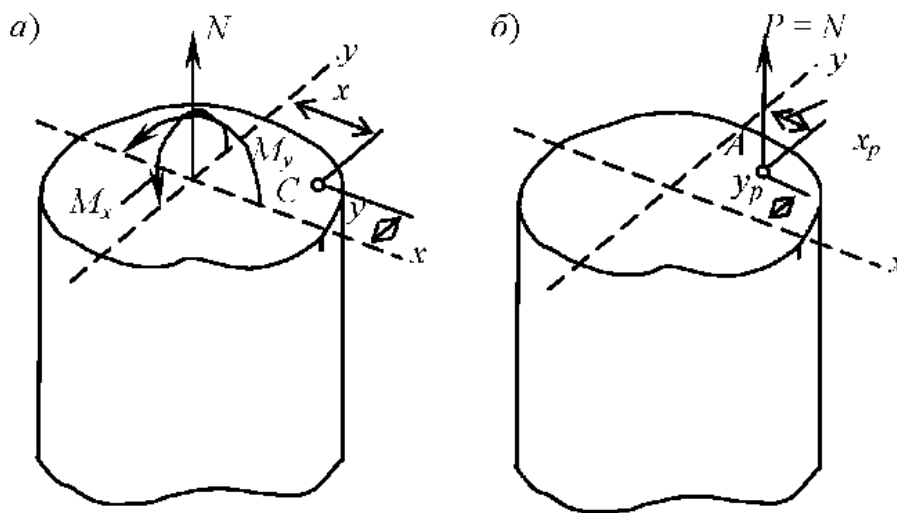


Рис. 1.4

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения определяется как алгебраическая сумма трёх напряжений:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{P}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x.$$

Подставим в это выражение значения  $M_x$  и  $M_y$ :

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P y_p}{I_x} y + \frac{P x_p}{I_y} x. \quad (1.8)$$

Формула для определения нормальных напряжений в любой точке поперечного сечения может быть представлена в другом виде:

$$\sigma = P = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} \right), \quad (1.9)$$

где  $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}$ ;  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$ .

Величины  $i_x$ ,  $i_y$  – радиусы инерции поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей инерции  $x$  и  $y$  соответственно.

Для определения положения нейтральной оси (нулевой линии), разделяющей положительные и отрицательные нормальные напряжения, приравняем к нулю уравнение (1.9):

$$\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} \right) = 0.$$



Очевидно, что левая часть этого произведения  $\frac{P}{F} \neq 0$ . Следовательно:

$$1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} = 0. \quad (1.10)$$

Данное выражение является уравнением прямой, так как координаты  $x$  и  $y$  входят в него в первой степени, и представляет собой уравнение нейтральной оси.

Для определения положения нейтральной оси найдём координату  $y_n$  точки пересечения её с осью  $y$ . Абсцисса этой точки  $x = 0$  и согласно выражению (1.10):

$$1 + \frac{y_p}{i_x^2} y_n = 0,$$

откуда

$$y_n = -\frac{i_x^2}{y_p}.$$

Покажем точку с координатами  $(0; y_n)$  на рис. 1.5 и обозначим её через  $B$ .

Абсцисса точки пересечения нейтральной оси с осью  $x = x_n$ , а ордината этой точки  $y = 0$ . Подставим значения  $x = x_n$ ,  $y = 0$  в выражение (1.10):

$$1 + \frac{x_p}{i_y^2} x_n = 0,$$

откуда

$$x_n = -\frac{i_y^2}{x_p}.$$

Итак, величины отрезков, отсекаемых нейтральной осью (нулевой линией) на осях координат, определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} y_n &= -\frac{i_x^2}{y_p}; \\ x_n &= -\frac{i_y^2}{x_p}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

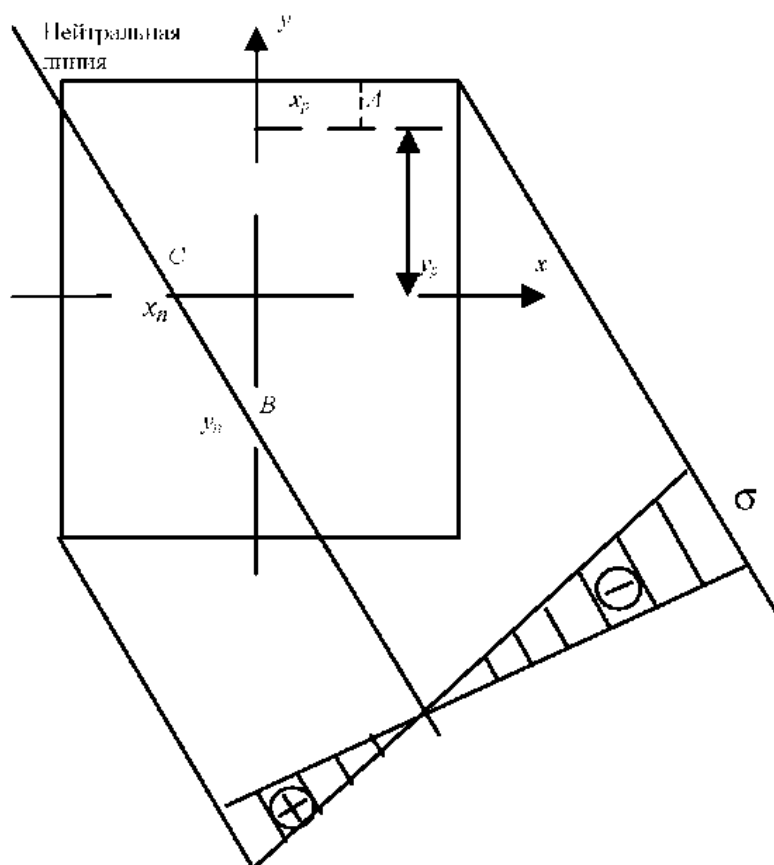


Рис. 1.5

1. Обозначим эту точку на рисунке через  $C$ . Через две точки  $B$  и  $C$  можно провести только одну прямую.

Нулевая линия и полюс лежат по разные стороны от начала координат.

Из этих выражений следует:

2. Положение нулевой линии не зависит от величины и знака силы  $P$ .

3. Чем дальше от начала координат расположен полюс (т.е. чем больше по абсолютной величине координаты  $x_p$  и  $y_p$ ), тем ближе к центру тяжести сечения проходит нейтральная ось и наоборот.

4. Если полюс расположен на одной из главных центральных осей инерции сечения, то нулевая линия перпендикулярна этой оси.

При внецентренном растяжении и сжатии нормальные напряжения в каждой точке поперечного сечения, как и при изгибе, прямо пропорциональны расстоянию от этой точки до нейтральной оси, следовательно, наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удалённых от нейтральной оси. Для построения эпюры нормальных напряжений необходимо провести нулевую линию, параллельно ей провести линии, касающиеся контура сечения. Эти точки являются наиболее опасными точками сечения. Для определения величин напряжений подставляют их координаты в формулу (1.9) и рассчитывают максимальные значения напряжений.

### 1.3. ЯДРО СЕЧЕНИЯ

В центрально-сжатых элементах растягивающие напряжения не возникают, а потому они могут изготавливаться из таких материалов, как бетон, кирпичная кладка. Из таких материалов могут изготавливаться и внецентренно сжатые элементы, если в них не возникают растягивающие напряжения. Это происходит в случае, когда точка приложения сжимающей силы расположена внутри некоторой центральной области поперечного сечения, называемой ядром, или на границе этой области.

Ядром сечения называется его некоторая центральная область, обладающая тем свойством, что сжимающая сила, приложенная в любой её точке, вызывает во всех точках поперечного сечения бруса сжимающие напряжения, т.е. напряжения одного знака.

Если сила приложена за пределами ядра сечения, то в поперечном сечении возникают и сжимающие, и растягивающие напряжения. В этом случае, следовательно, нулевая линия пересекает поперечное сечение бруса. Если сила приложена на границе ядра сечения, то нулевая линия касается контура сечения (в точке или по линии); в месте касания нормальные напряжения равны нулю.

При расчёте внецентренно сжатых элементов, изготавливаемых из материала, плохо воспринимающего растягивающие напряжения, важно знать форму и размеры ядра сечения. Это позволяет, не вычисляя величин напряжений, по эксцентриситету сжимающей силы устанавливать, возникнут ли в поперечном сечении бруса напряжения или нет.

Методика построения ядра сечения.

1. Определяется положение центра тяжести сечения и главных центральных осей инерции сечения  $x$  и  $y$ , а также значения главных моментов инерции сечения  $I_x$  и  $I_y$ , и значения квадратов радиусов инерции ( $i_x^2, i_y^2$ ).

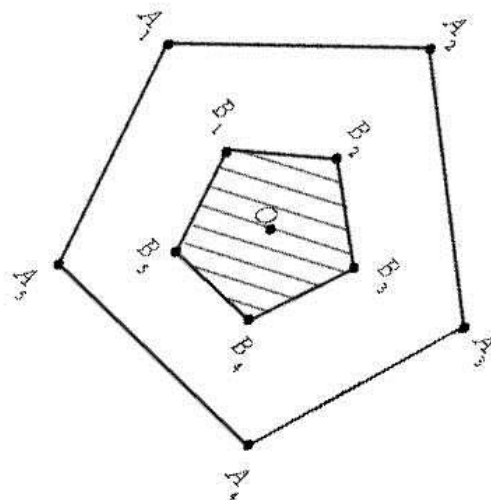


Рис. 1.6

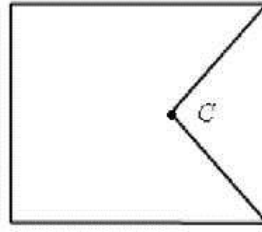


Рис. 1.7

2. Если сечение имеет вид многоугольника, то вершины его углов последовательно рассматриваются как полюсы, и для каждого такого полюса определяют положение нейтральной линии. Контур, ограниченный этими линиями, образует ядро сечения (рис. 1.6).

3. Если многоугольное сечение имеет внутренние углы, например, угол при вершине  $C$ , то эти углы при обходе вершин не рассматриваются как полюсы (рис. 1.7).

#### 1.4. РАСЧЁТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

Наиболее часто встречаются сочетания изгиба в одной или двух плоскостях и кручения брусев, например при расчёте валов редукторов. При решении подобных задач строятся эпюры  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  на всех участках бруса. После чего находится опасное сечение путем определения расчётного момента в нескольких сечениях по формуле

$$M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (1.12)$$

После этого определяется положение опасной точки сечения. При этом нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_i}{W_i},$$

где  $i = x$  или  $y$ .

Касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_z}{W_z}.$$

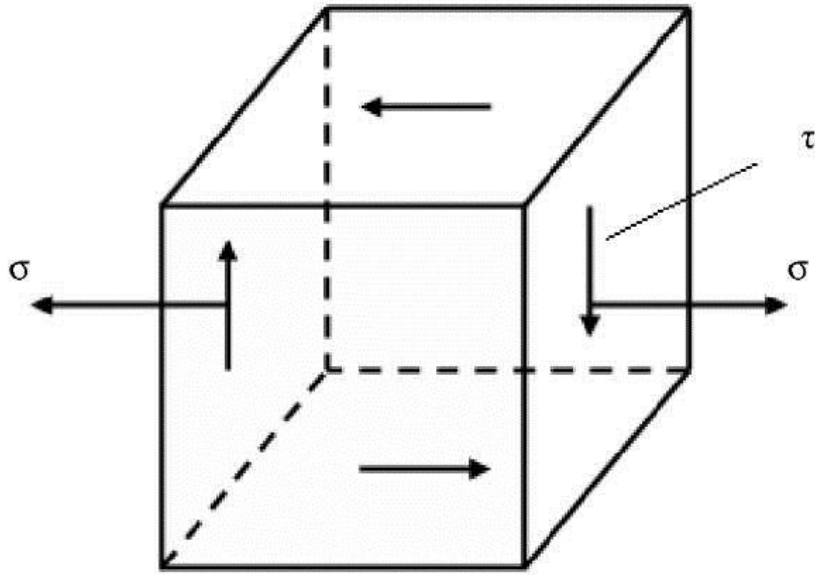


Рис. 1.8

Рассмотрим случай, когда по граням параллелепипеда действуют нормальные и касательные напряжения. При этом две боковые грани свободны от напряжений, т.е. создаётся плоское напряженное состояние (рис. 1.8).

При этом главные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} \left( \sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_2^2} \right);$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left( \sigma_1 + \sigma_2 + \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_2^2} \right).$$

Так как напряжение  $\sigma_2$ , действующее по боковым граням параллелепипеда, равно нулю, указанные зависимости примут вид:

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  можно определить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Расчёт брусев на прочность при изгибе с кручением производят по третьей и четвёртой гипотезам прочности.

Третья гипотеза прочности:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = [\sigma]. \quad (1.14)$$

Подставив в (1.14) зависимости из системы (1.13), получим:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1.15)$$

Для расчёта опасной точки по третьей теории прочности значения  $\sigma$  и  $\tau$  подставляются в формулу (1.15).

Четвёртая гипотеза прочности (энергетическая):

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma]. \quad (1.16)$$

Подставив в (1.16) значения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  из системы (1.13) и совершив несложные арифметические преобразования, получим:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1.17)$$

### 1.5. ПОРЯДОК ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ДЛЯ ЛОМАНОВОГО (ПРОСТРАНСТВЕННОГО) БРУСА

Проставляем оси координат на каждом из участков, начиная обход от защемлённого конца. При переходе на следующий участок, систему  $x$   $y$   $z$  следует повернуть относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой лежат эти два участка, направляя ось  $z$  вдоль оси бруса.

Правило знаков: в пространственных системах правило знаков такое же, что и для плоских систем, если смотреть на ось  $z$  так, чтобы она была направлена вправо, а начало координат считать расположенным в крайней левой точке участка.

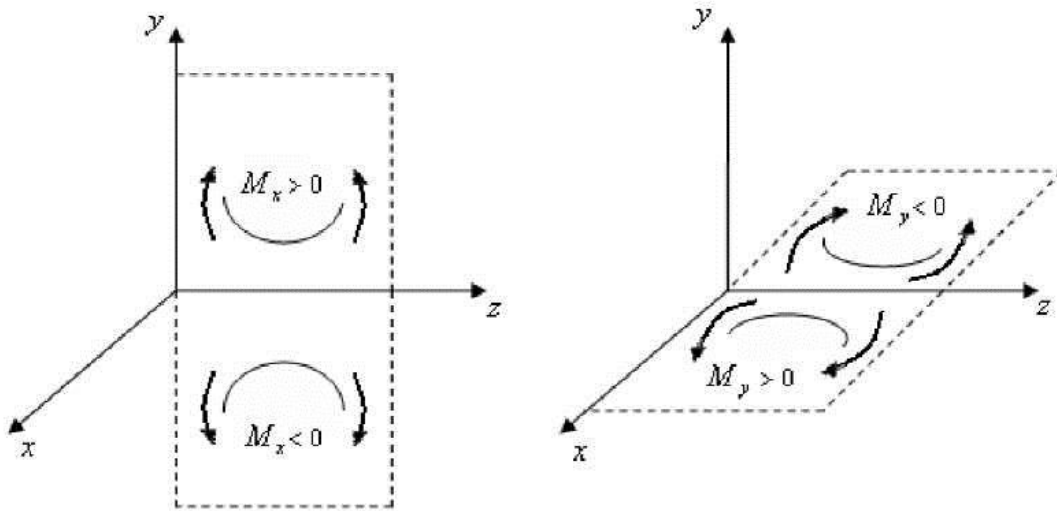


Рис. 1.9

Эпюра  $M_x$  строится в плоскости  $yoz$ . Эпюра  $M_y$  в плоскости  $xoz$  (рис. 1.9), причём положительные значения силовых факторов откладываются по положительному направлению соответствующей оси координат ( $y$  или  $x$ ).

Крутящий момент  $M_z$  действует в плоскости  $uox$ . Для крутящих моментов  $M_z$  используется произвольное правило знаков, которому следует придерживаться до конца решения задачи. Эпюра  $M_z$  строится в плоскости  $xoz$  или  $yoz$ .

## 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

---

### 2.1. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК

В основу энергетического метода определения перемещений положено условие равенства работы внешних сил, приложенных к упругой системе, и энергии деформации системы.

Внешние нагрузки, приложенные к любому элементу конструкции или конструкции в целом, вызывают его деформацию. При этом части конструкции выходят из состояния покоя и приобретают некоторые скорости и ускорения. Если нагрузка возрастает медленно, то ускорения невелики и можно пренебречь силами инерции, возникающими при переходе системы в деформированное состояние, таким образом медленно возрастающая нагрузка от нуля до своего конечного значения называется статической.

Работа статически приложенной внешней силы равна половине произведения конечного значения силы на конечное значение соответствующего перемещения:

$$A = P \Delta / 2, \quad (2.1)$$

где  $P$  – сила;  $\Delta$  – перемещение по направлению действия силы  $P$ .

В дальнейшем под силой будем понимать любое воздействие, приложенное к упругой системе, т.е. не только сосредоточенная сила, но и изгибающий момент, равномерно распределённая нагрузка и др.: перемещение – вид деформации, на которой обобщённая сила производит работу.

При статическом действии на сооружение группы внешних сил, работа этих сил равна половине суммы произведений каждой силы на величину соответствующего ей перемещения, вызванного действием всей группы сил. Например, при действии на балку сосредоточенных сил  $P_1$  и  $P_2$ , и сосредоточенных моментов  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 2.1), работа внешних сил будет иметь вид

$$A = P_1 \Delta_1 / 2 + P_2 \Delta_2 / 2 + M_1 \alpha_1 / 2 - M_2 \alpha_2 / 2.$$

Знак (–) перед последним членом суммы принят потому, что направление угла поворота  $\alpha_2$  поперечного сечения балки, в котором приложен изгибающий момент  $M_2$ , противоположно направлению этого момента.

Работу внешних сил на вызванных ими перемещениях можно выразить через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в поперечных сечениях стержней конструкции.



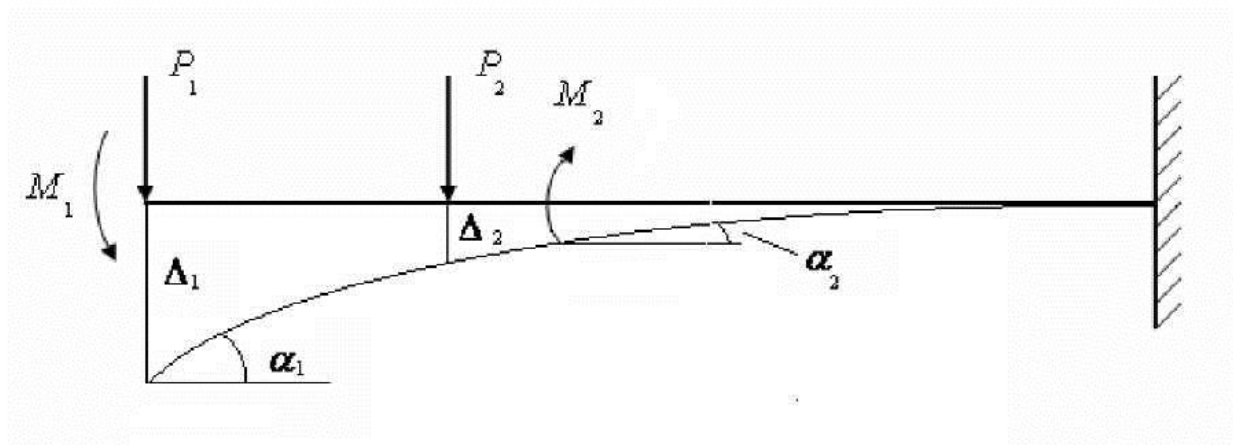


Рис. 2.1

Выделим из прямолинейного стержня двумя сечениями, перпендикулярными его оси, бесконечно малый элемент  $dz$ . К нему, в общем случае, приложены продольная сила  $N$ , поперечная сила  $Q$ , изгибающий момент  $M$ .

Усилия  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  являются внутренними по отношению к целому стержню, однако для выделенного элемента они – внешние (рис. 2.2). Следовательно, работу можно получить как сумму работ, совершённых статически возрастающими усилиями  $N$ ,  $M$ ,  $Q$ , на соответствующих деформациях всех элементов.

Рассмотрим отдельно влияние каждого из этих усилий на элемент  $dz$ .

Элемент  $dz$ , находящийся под воздействием продольных сил  $N$ , изображён на схеме (рис. 2.3).

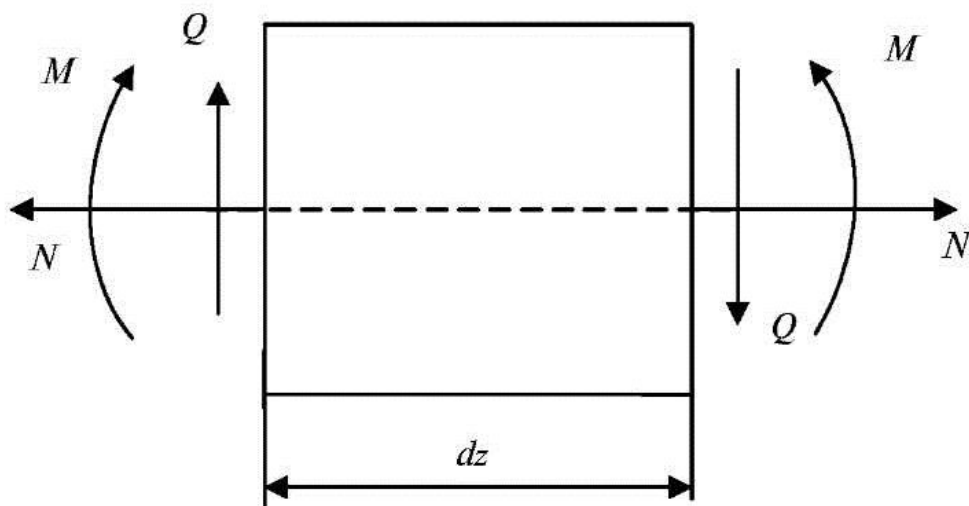


Рис. 2.2

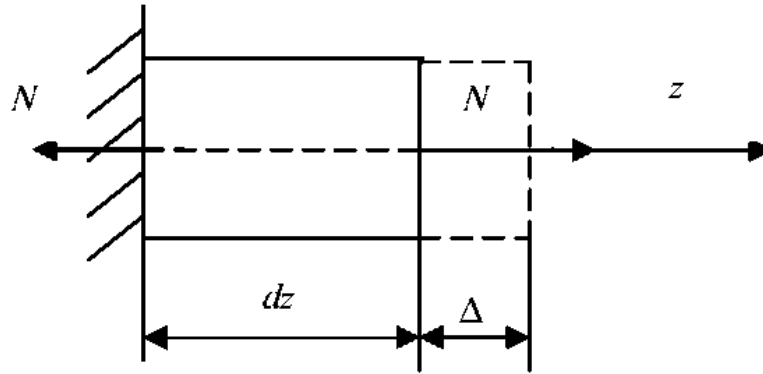


Рис. 2.3

Если левое сечение считать неподвижным, то правое под воздействием продольной силы  $N$  переместится на величину  $\Delta$  вправо, где:

$$\Delta = \frac{Ndz}{EF} .$$

На этом перемещении статически возрастающая сила  $N$  совершит работу:

$$dA_N = \frac{N\Delta}{2} = \frac{N^2 dz}{2EF} . \quad (2.2)$$

I. Элемент  $dz$  находится под действием изгибающего момента  $M$  (рис. 2.4).

II. Однако, в соответствии с зависимостью (2.1), имеем:

$$dA_M = \frac{M}{2} d\vartheta . \quad (2.3)$$

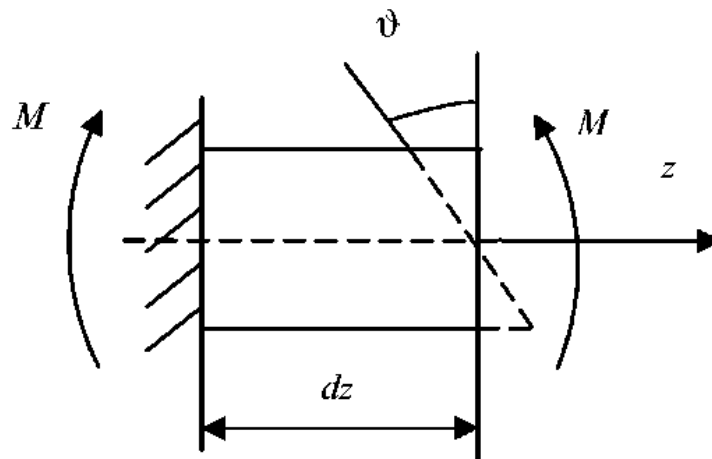


Рис. 2.4

Учитывая, что

$$dQ = \frac{Mdz}{EI},$$

получим:

$$dA_M = \frac{M^2}{2EI}. \quad (2.4)$$

III. Элемент  $dz$  находится под действием поперечных сил (рис. 2.5).

IV. К правому сечению приложено перерезывающее усилие  $Q$ . Пусть касательные напряжения распределены по сечению равномерно. Тогда перемещение, вызванное действием перерезывающей силы  $Q$ , представляет собой сдвиг торцевых сечений элемента  $dz$  относительно друг друга.

$$\Delta Q = dz\gamma.$$

Однако на основании закона Гука при сдвиге:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Следовательно

$$\Delta Q = \frac{\tau}{G} dz,$$

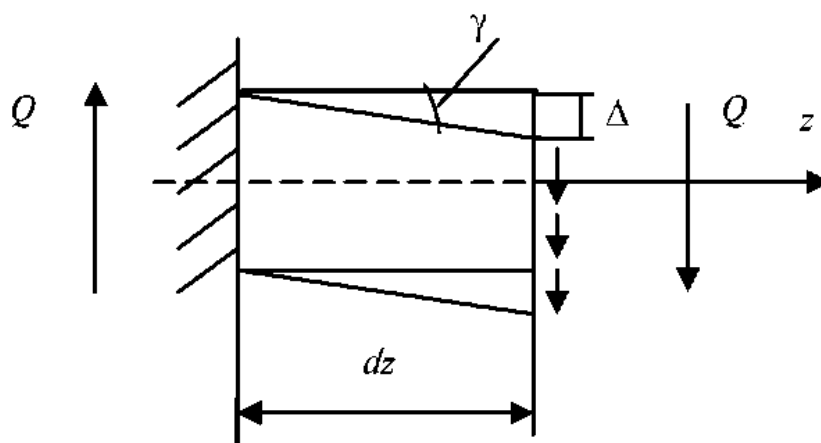


Рис. 2.5

а так как

$$\tau = \frac{Q}{F}.$$

то

$$\Delta Q = \frac{Q dz}{GF}.$$

Тогда работа от силы  $Q_y$ , на перемещении  $\Delta y$  будет иметь вид

$$dA_Q = \frac{Q^2 dz}{2GF}.$$

Вследствие неравномерности распределения касательных напряжений по площади сечения вводится дополнительный поправочный коэффициент  $\eta$ .

$$dA_Q = \eta \frac{Q^2 dz}{2GF}. \quad (2.5)$$

При плоском действии сил на элемент  $dz$ , полная работа внешних сил равна сумме работ:

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q.$$

В случае пространственной задачи работа внешних сил равна:

$$dA = dA_N + dA_{M_y} + dA_{M_x} + dA_{Q_y} + dA_{Q_x} + dA_{M_z}. \quad (2.6)$$

На основании закона сохранения энергии работа внешних сил переходит в потенциальную энергию деформации:

$$A = U.$$

Интегрируя выражение (2.6) в пределах длины каждого участка и производя суммирование по всем участкам системы, получаем следующую формулу для вычисления работы и потенциальной энергии деформации:

$$A = U = \int_l \frac{N^2 dz}{2EF} + \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \eta_y \int_l \frac{Q_y^2 dz}{2GF} + \eta_x \int_l \frac{Q_x^2 dz}{2GF} + \int_l \frac{M_z^2 dz}{2GI_p}. \quad (2.7)$$

Эта формула аналогична соответствующим формулам для случая центрального растяжения-сжатия и изгиба стержней. Она применима не только для прямых стержней, но и для стержней малой кривизны.

## 2.2. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Перемещения системы в результате её деформации условимся обозначать через  $\Delta_{ij}$ , где  $i$  указывает направление перемещения, а  $j$  соответствует причине, вызвавшей данную деформацию.

Любое перемещение может представлять собой либо линейное, либо угол поворота в зависимости от того, является ли усилие  $j$  сосредоточенной силой или изгибающим моментом. Таким образом, под силой  $j$  понимается любая нагрузка, действующая на сооружение.

Рассмотрим два состояния системы, находящейся в равновесии. В каждом из них на систему действует статическая нагрузка (рис. 2.6), например сила  $P_1$  или  $P_2$ .

$\Delta_{11}$  – перемещение по направлению силы  $P_1$  от действия силы  $P_1$ .

$\Delta_{12}$  – перемещение по направлению силы  $P_1$  от действия силы  $P_2$ .

$\Delta_{21}$  – перемещение по направлению силы  $P_2$  от действия силы  $P_1$ .

$\Delta_{22}$  – перемещение по направлению силы  $P_2$  от действия силы  $P_2$ .

Работу силы  $P_1$  на вызванном ею перемещении обозначим через  $A_{11}$ , а работу силы  $P_2$  на вызванном ею перемещении обозначим через  $A_{22}$ .

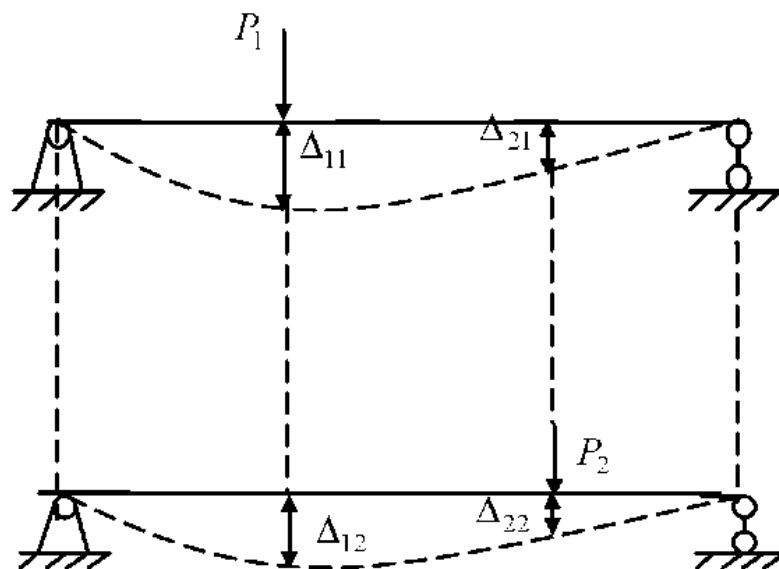


Рис. 2.6

Рассмотрим случай статического нагружения системы силами  $P_1$  и  $P_2$  в следующей последовательности: сначала прикладывается сила  $P_1$ , в результате её приложения деформация системы соответствует первому состоянию, затем на систему действует сила  $P_2$ , в результате её воздействия система получает дополнительные деформации и внутренние усилия, соответствующие деформациям и усилиям во втором состоянии (рис. 2.7). В процессе приложения силы  $P_2$  сила  $P_1$ , оставаясь постоянной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба  $\Delta_{12}$  и, следовательно, совершает дополнительную работу  $A_{12}$ .

Выражения для работ  $A_{11}$  и  $A_{22}$ :

$$A_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2};$$

$$A_{22} = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2}.$$

Таким образом, полная работа при последовательном нагружении системы силами  $P_1$  и  $P_2$ , выражается следующей зависимостью:

$$A = A_{11} + A_{22} + A_{12} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_1 \Delta_{12}. \quad (2.8)$$

Символ  $\frac{1}{2}$  при третьем слагаемом правой части формулы отсутствует потому, что сила  $P_1$  совершает работу на перемещении  $\Delta_{12}$ , оставаясь постоянной.

Рассмотрим четвёртое состояние системы (рис. 2.8), при котором вначале прикладывается сила  $P_2$ , в результате чего получается второе состояние системы, затем  $P_1$  и получается первое состояние системы и дополнительное перемещение  $\Delta_{21}$ .

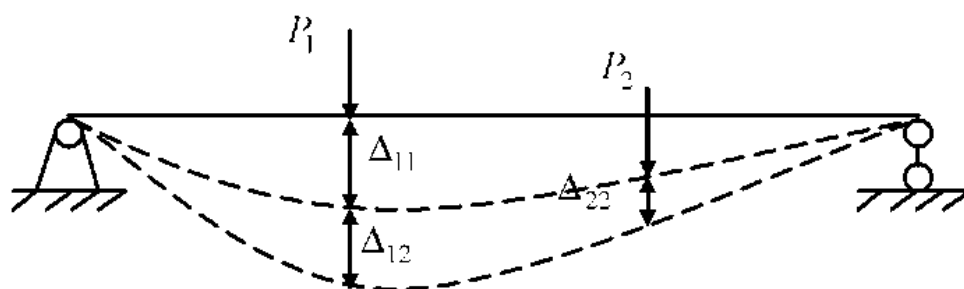


Рис. 2.7

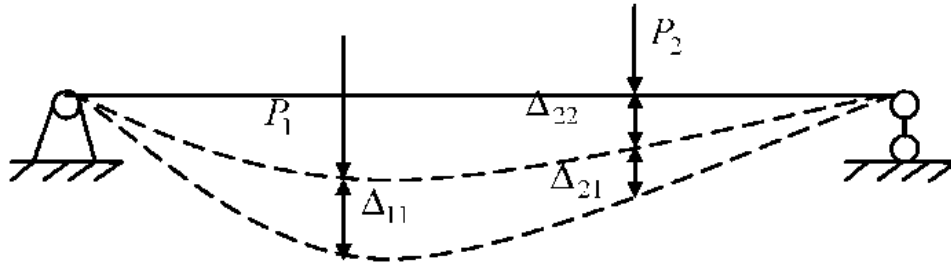


Рис. 2.8

Таким образом, полная работа в четвёртом случае определяется зависимостью:

$$A = A_{11} + A_{22} + A_{21} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_2 \Delta_{21}. \quad (2.9)$$

Согласно принципу независимости действия сил работы в третьем и четвёртом случае равны. Приравняв правые части выражений (2.8) и (2.9), получим:

$$A_{12} = A_{21}. \quad (2.10)$$

или

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}. \quad (2.11)$$

Выражения (2.10) и (2.11) являются математическими выражениями теоремы о взаимности работ.

Работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванная силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

### 2.3. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим два состояния системы (рис. 2.9). В первом состоянии к системе приложена сила  $P_1 = 1$ , а во втором состоянии  $-P_2 = 1$ . Перемещения, вызванные единичными силами или моментами будем обозначать через  $\delta$ , в отличие от перемещений, вызванных нес единичными силами и обозначаемых через  $\Delta$ .

На основании теоремы о взаимности работ для рассмотренных состояний:  $P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21}$ , а так как  $P_1 = P_2 = 1$ , то  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , или в общем случае при действии любых единичных сил:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \quad (2.12)$$

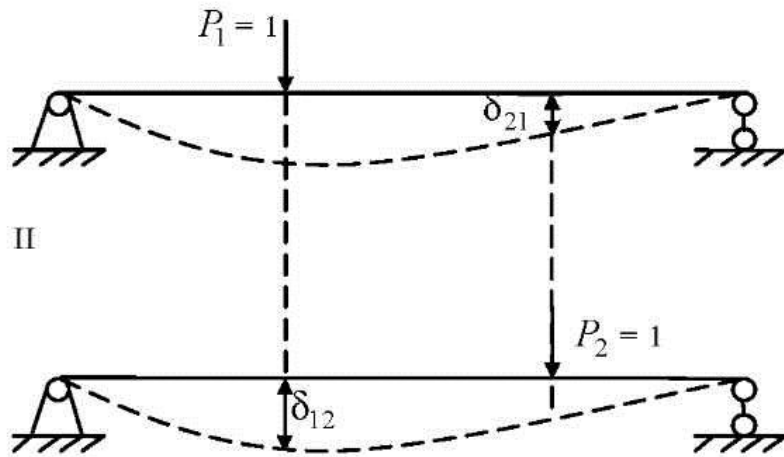


Рис. 2.9

Для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй единичной силы, вызванному первой единичной силой.

#### 2.4. ИНТЕГРАЛ МОРА

Рассмотрим два состояния системы для случая плоской задачи.

I. В первом состоянии на неё действует любое число каких угодно сил и моментов (рис. 2.10).

II. Во втором состоянии к системе приложена одна сосредоточенная сила  $P_2 = 1$  (рис. 2.11).

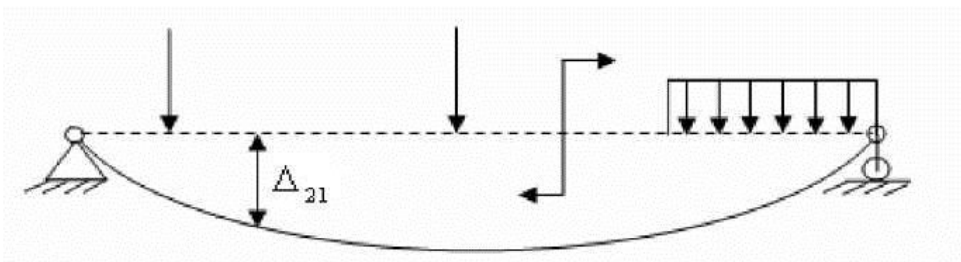


Рис. 2.10

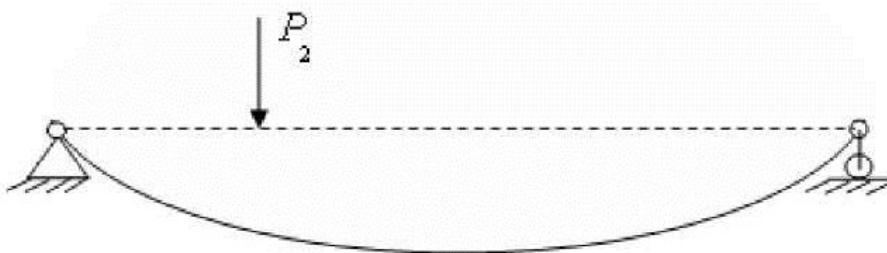


Рис. 2.11



Работа силы  $P_2$  на перемещении  $\Delta_{21}$  выразится следующим уравнением:

$$A_{21} = P_2 \Delta_{21} = \Delta_{21}.$$

Из формулы (2.9):

$$A_{21} = A - A_{11} - A_{22}, \quad (2.13)$$

где  $A$  – работа, совершённая силами первого и второго состояния.

Для плоской системы имеем:

$$A = \int_0^{\ell} \frac{(N_1 + N_2)^2 dz}{2EF} + \int_0^{\ell} \frac{(M_{x1} + M_{x2})^2 dz}{2EI_x} + \eta_y \int_0^{\ell} \frac{(Q_{y1} + Q_{y2})^2 dz}{2GF}.$$

Тогда

$$A_{11} = \int_0^{\ell} \frac{N_1^2 dz}{2EF} + \int_0^{\ell} \frac{M_{x1}^2 dz}{2EI_x} + \eta_y \int_0^{\ell} \frac{Q_{y1}^2 dz}{2GF};$$

$$A_{22} = \int_0^{\ell} \frac{N_2^2 dz}{2EF} + \int_0^{\ell} \frac{M_{x2}^2 dz}{2EI_x} + \eta_y \int_0^{\ell} \frac{Q_{y2}^2 dz}{2GF}.$$

Подставим три последних выражения в уравнение (2.13) и после соответствующих преобразований получим:

$$A_{21} = \int_{\ell} \frac{N_1 N_2 dz}{EF} + \int_{\ell} \frac{M_{x1} M_{x2} dz}{EI_x} + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_{y1} Q_{y2} dz}{GF}.$$

Обозначим внутренние усилия, вызванные действием единичной силы  $P_2 = 1$ , через  $\overline{N_2}$ ,  $\overline{M_{x2}}$  и  $\overline{Q_{y2}}$ . Тогда это выражение примет вид

$$A_{21} = \Delta_{21} = \int_{\ell} \frac{N_1 \overline{N_2} dz}{EF} + \int_{\ell} \frac{M_{x1} \overline{M_{x2}} dz}{EI_x} + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_{y1} \overline{Q_{y2}} dz}{GF}. \quad (2.14)$$

Таким образом, перемещение от любой нагрузки с помощью формулы (2.14) можно выразить через внутренние усилия, возникающие в данной системе от этой нагрузки и возникающие в ней же от единичной силы.

Если определяется прогиб, то единичная сила – безразмерная сосредоточенная сила, приложенная в месте определения прогиба.

Если определяется угол поворота сечения, то в качестве единичной силы используется безразмерный единичный момент, приложенный в рассматриваемой точке.

Состояние системы, вызванное действием единичной силы, называется единичным или фиктивным состоянием.

Состояние системы, вызванное действием внешней нагрузки, называется действительным или грузовым состоянием.

Выражение (2.14) носит название интеграла или формулы Мора.

Определение перемещений с помощью формулы Мора производится в следующей последовательности:

1. Находятся выражения внутренних усилий  $N$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$  от заданной нагрузки, как функции координаты  $z$  произвольного сечения.

2. По направлению искомого перемещения прикладывается соответствующая ему единичная сила (при определении угла поворота сечения – единичный момент).

3. Определяются выражения для  $\overline{M_x}$ ,  $\overline{Q_y}$ ,  $\overline{N}$ , от воздействия единичной силы, как функции координаты  $z$  произвольного сечения.

4. Найденные выражения для  $M_x$ ,  $Q_y$ ,  $N$ , а также  $\overline{M_x}$ ,  $\overline{Q_y}$ ,  $\overline{N}$  подставляются в выражение (2.14) и интегрированием по участкам определяется искомое перемещение.

Если  $\Delta$  положительно, то перемещение совпадает по направлению с направлением единичной силы. Если отрицательно, то перемещение противоположно этому направлению.

Практически в большинстве случаев плоской задачи используется лишь один член формулы перемещений. Например, если рассматривается сооружение, преимущественно работающее на изгиб (балки, плоские рамы), то в формуле перемещений можно оставить лишь интеграл, зависящий от изгибающих моментов. При расчёте сооружений, элементы которых работают на растяжение-сжатие, можно не учитывать деформации изгиба и сдвига. При этом в формуле перемещений остаётся лишь член, содержащий продольные силы.

В случае пространственной задачи, интеграл Мора содержит не три слагаемых, а шесть – по числу внутренних усилий в поперечном сечении элементов.

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_{\ell} \frac{M_x \overline{M_x}}{EI_x} dz + \int_{\ell} \frac{M_y \overline{M_y}}{EI_y} dz + \eta_y \int_{\ell} \frac{M_z \overline{M_z}}{EI_p} dz + \\ & + \int_{\ell} \frac{N \overline{N}}{EF} dz + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_x \overline{Q_x}}{GF} dz + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_y \overline{Q_y}}{EI_x} dz. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В большинстве случаев пространственной задачи используют или три первых члена формулы, когда элементы системы работают в основном на изгиб и кручение, или только четвёртый член при расчётах пространственных ферм.

Наиболее часто используют простые формулы перемножения эюр.

1. Обе эюры прямолинейны (формула трапеций, рис. 2.12).

$$\Delta = \frac{l}{6EI_x} (2ac + 2bd + ad + bc).$$

2. Прямолинейная и криволинейная эюры (формула Симпсона, рис. 2.13).

$$\Delta = \frac{l}{6EI_x} (M_{\text{л}} \overline{M_{\text{л}}} + M_{\text{пр}} \overline{M_{\text{пр}}} + 4M_{\text{ср}} \overline{M_{\text{ср}}}).$$

При расчёте перемещений по последним двум формулам значения с эюр должны браться с учётом знака.

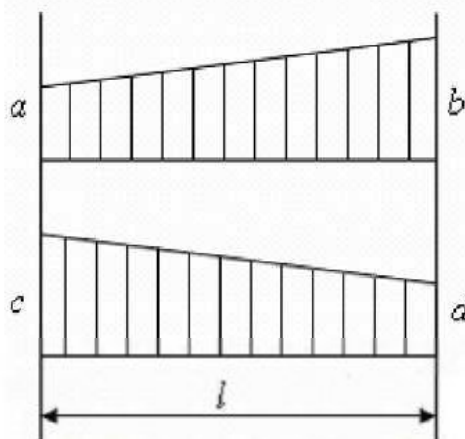


Рис. 2.12

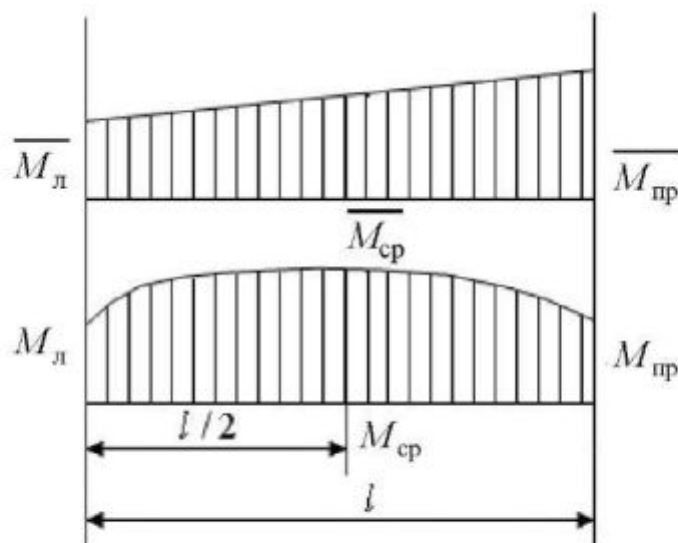


Рис. 2.13

### 3. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

#### 3.1. СТАТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Статически неопределимыми называют системы, в которых внутренние усилия невозможно определить из уравнений статики, а необходимо составить дополнительные уравнения – уравнения деформаций.

В дальнейшем мы будем рассматривать плоские задачи расчёта статически неопределимых систем. Плоской называется такая система, у которой центры тяжести всех поперечных сечений стержней расположены в одной плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого сечения. Причём все нагрузки действуют в той же плоскости.

Геометрически неизменяемой называется такая система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями её элементов.

Статически определимая система не имеет ни одной лишней связи. Удаление из неё хотя бы одной связи превращает её в геометрически изменяемую систему, т.е. в механизм.

Расчёт статически неопределимой системы начинается с определения степени статической неопределимости. Степень статической неопределимости равна числу «лишних» связей, удаление которых превращает систему в статически определимую и оставляет её геометрически неизменяемой. Степень статической неопределимости для балок и рам определяется по различным зависимостям. Для балок:

$$n = c - m - 2,$$

где  $n$  – степень статической неопределимости;  $c$  – число опорных звеньев;  $m$  – число одиночных шарниров.

Например (рис. 3.1),  $n = 3 - 2 = 1$ . Удаление правой или средней опоры приводит к тому, что конструкция становится статически определимой и геометрически неизменяемой.

$n = 4 - 1 - 2 = 1$ . Удаление правой опоры (рис. 3.2) невозможно, так как это приведёт к тому, что конструкция станет геометрически изменяемой. Удаление одной из средних опор – возможно.

Систему, состоящую из ряда элементов, жёстко связанных между собой и образующих замкнутую цепь, называют замкнутым контуром.

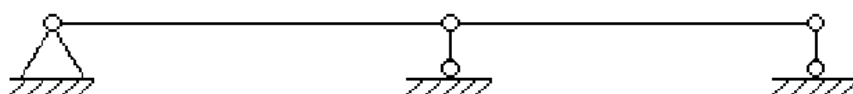


Рис. 3.1

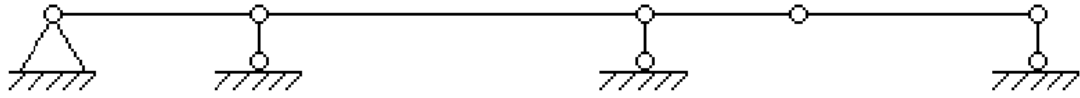


Рис. 3.2

Любой замкнутый контур трижды статически неопределим, так как при его разрезании возникают: продольная сила, поперечная сила, изгибающий момент (только для плоских систем) (рис. 3.3).

Если силы лежат не в плоскости замкнутого контура, то при разрезании возникает шесть внутренних усилий.

Если замкнутый контур снабжён шарниром (рис. 3.4), то в разрезе, проведённом по шарниру, действуют только два внутренних усилия  $N$  и  $Q_y$ .

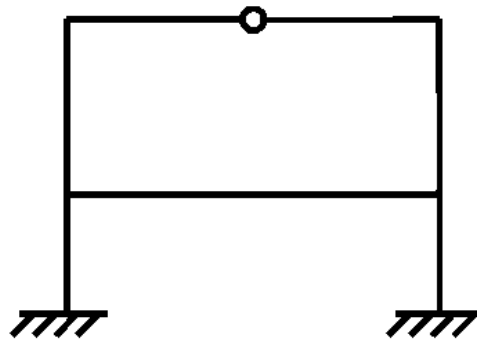


Рис. 3.3

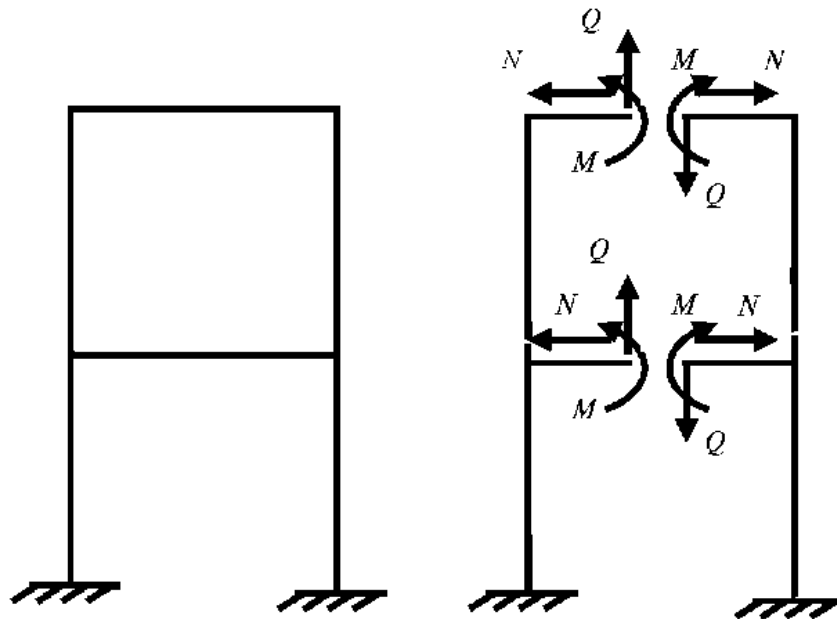


Рис. 3.4

Степень статической неопределённости для плоских рам:

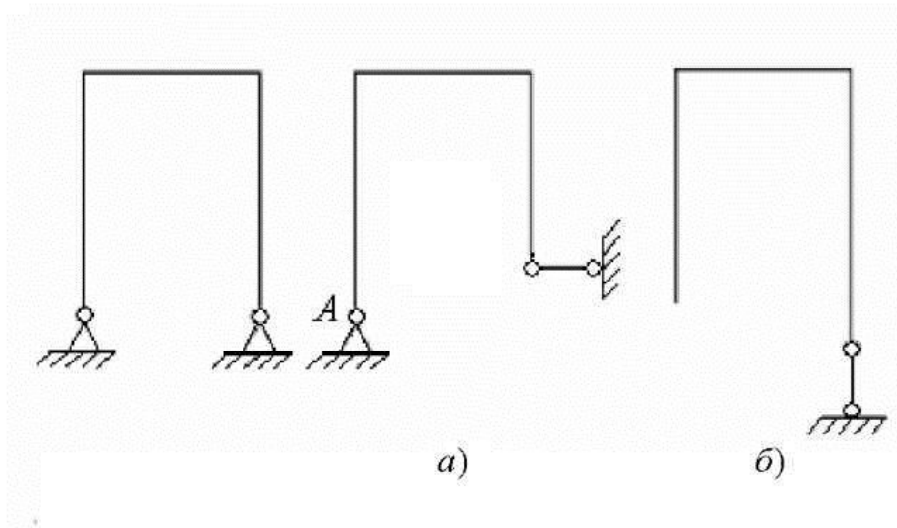
$$n = c + 3k - m - 3,$$

где  $k$  – число замкнутых контуров.

Связи, удаление которых превращает систему в геометрически изменяемую, называются абсолютно необходимыми, а связи, удаление которых не превращает статически неопределимую систему в геометрически изменяемую, называются условно необходимыми.

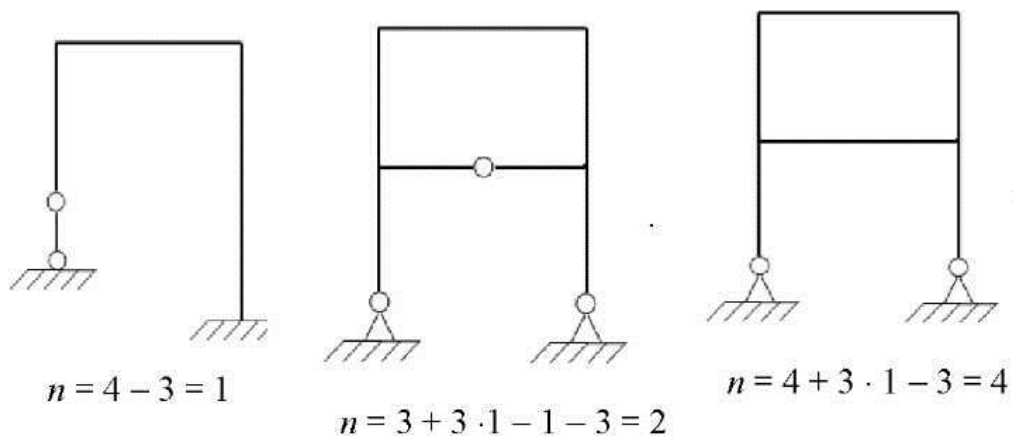
Удаление вертикального стерженька (рис. 3.5, *a*) приведёт к тому, что оставшиеся три реакции не препятствуют повороту рамы вокруг точки  $A$ , в которой пересекаются их оси. Правильный вариант удаления – рис. 3.5, *б*.

Рассмотрим примеры определения степени статической неопределённости для плоских рам (рис. 3.6).



$$n = 4 - 3 = 1$$

Рис. 3.5



$$n = 4 - 3 = 1$$

$$n = 3 + 3 \cdot 1 - 1 - 3 = 2$$

$$n = 4 + 3 \cdot 1 - 3 = 4$$

Рис. 3.6

### 3.2. МЕТОД СИЛ. ОСНОВНАЯ И ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СИСТЕМЫ

Для определения усилий в статически неопределимой системе необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения деформаций. Для этого необходимо превратить заданную статически неопределимую задачу в статически определимую удалением лишних связей. Полученная таким образом система называется основной системой (рис. 3.7).

Удаление каких-либо связей не изменяет внутренних усилий в системе и её деформаций, если к ней прикладываются дополнительные силы и моменты, являющиеся реакциями отброшенных связей. Поэтому, если к основной системе, кроме заданной нагрузки, приложить реакции устранённых связей, то её деформации и внутренние усилия будут такими же, как в заданной системе, т.е. обе системы будут эквивалентными.

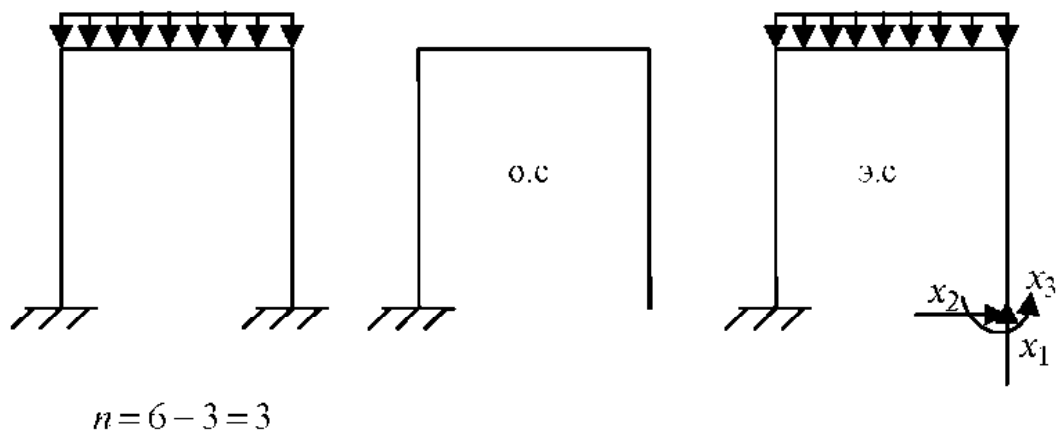


Рис. 3.7

В заданной системе в направлениях имеющихся связей перемещений быть не может, поэтому в эквивалентной системе перемещения по направлению отброшенных связей должны быть равны нулю. Следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равны нулю.

### 3.3. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Перемещения по направлению любой из отброшенных связей должны быть равны нулю, следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равны нулю. На основании принципа независимости действия сил:

$$\Delta_j = \Delta_{j1} + \Delta_{j2} + \dots + \Delta_{jm-2} + \Delta_{jm} + \Delta_{jp} = 0. \quad (3.1)$$

Первый индекс при  $\Delta$  – направление перемещения и одновременно номер отброшенной связи. Второй индекс – причина, вызвавшая переме-

щение. Обозначим через  $x_k$  – реакцию связи  $k$  и выразим перемещение  $\Delta_{ik}$  через единичное с помощью равенства:

$$\Delta_{ik} = x_k \delta_{ik}.$$

После подстановки в уравнение (3.1), получим следующую зависимость:

$$\Delta_i = x_1 \delta_{i1} + x_2 \delta_{i2} + \dots + x_{n-1} \delta_{i,n-1} + x_n \delta_{in} + \Delta_{ip} = 0.$$

Условие эквивалентности сводится к удовлетворению системы  $n$  -линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + \dots + x_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0; \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + \dots + x_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0; \\ \dots & \\ x_1 \delta_{n1} + x_2 \delta_{n2} + \dots + x_n \delta_{nn} + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.2) – дополнительные уравнения деформаций.

Первое уравнение выражает равенство нулю перемещения в основной системе по направлению первой отброшенной связи. Второе уравнение – по направлению второй и т.д. Уравнения (3.2) называются каноническими уравнениями метода сил. Число уравнений равно числу отброшенных связей, т.е. степени статической неопределимости системы.

Единичные перемещения  $\delta_{ij}$ , т.е. имеющиеся два одинаковых символа, называются главными, а имеющие два разных символа  $\delta_{ik}$ , называются побочными.

В соответствии с теоремой о взаимности перемещений:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Данная зависимость позволяет уменьшить объём вычислений при определении коэффициентов канонических уравнений.

Для определения коэффициентов  $\delta$  следует построить единичные эпюры  $\overline{M}$  изгибающих моментов в основной системе, т.е. от действия каждого неизвестного  $\overline{x} = 1$ , обозначив каждую эпюру номером неизвестного. Отдельно строится грузовая эпюра  $M_p$ . Единичное перемещение  $\delta_{ik}$  вычисляется умножением единичной эпюры  $\overline{M}_i$  на эпюру  $\overline{M}_k$ , а грузовое перемещение  $\Delta_{ip}$  умножением единичной эпюры  $\overline{M}_i$  на грузовую  $M_p$ . При перемножении эпюр необходимо учитывать знаки пере-



множаемых величин. После вычисления единичных и грузовых перемещений решают систему канонических уравнений и определяют значения неизвестных  $x_i$ .

Построение окончательной суммарной эпюры  $M$  для заданной статически неопределимой системы проводят следующим образом: к основной системе прикладываются найденные неизвестные усилия  $x_i$  и заданная нагрузка, а затем от их суммарного воздействия строят окончательную эпюру изгибающих моментов.

Для проверки правильности решения определяют перемещения в направлении неизвестных  $x_i$ , а так как это реакции опор, то они должны быть равны нулю. Для этого последовательно перемножают окончательную итоговую эпюру  $M$  на единичные и проверяют правильность решения.

### 3.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ

Симметричной называется такая система, у которой её правая часть может рассматриваться как зеркальное отражение левой части относительно плоскости симметрии, включая и жёсткость стержней.

Использование симметрии позволяет упростить расчёт системы за счёт снижения числа неизвестных силовых факторов  $x_1, x_2$  и т.д. Нагружение симметричной системы может быть симметричным и кососимметричным.

Симметричная нагрузка возникает, когда все внешние силы, приложенные к одной части рамы, являются зеркальным отображением силовых факторов, приложенных к другой части рамы (рис. 3.8).

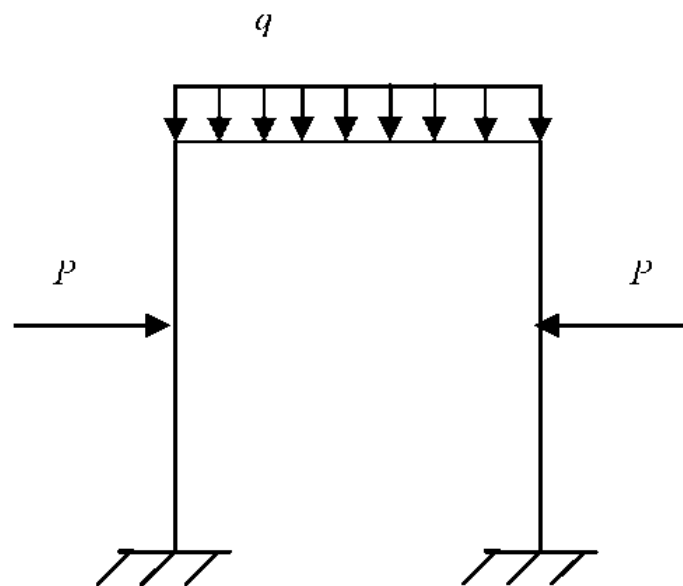


Рис. 3.8

Кососимметричная нагрузка (рис. 3.9) возникает, когда внешние силовые факторы, приложенные к одной части рамы, являются зеркальным отображением силовых факторов, приложенных к другой части рамы, но противоположны по знаку.

Для симметричных рам рациональная система возникает при разрезании её по оси симметрии, при этом возникают три неизвестных силовых фактора: изгибающий момент  $x_1$ , продольная сила  $x_2$  и поперечная сила  $x_3$  (рис. 3.10).

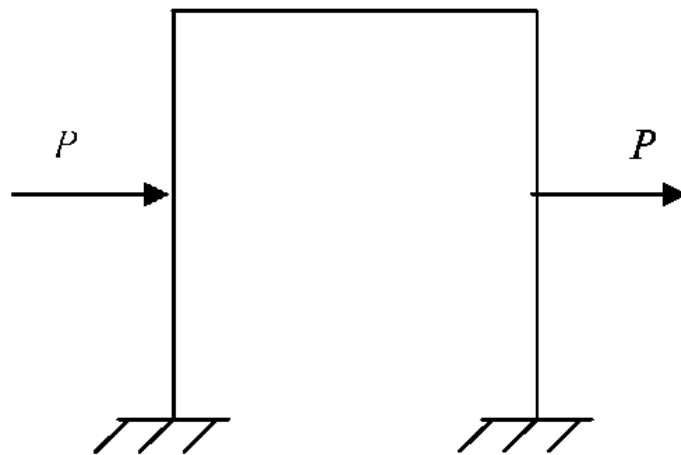


Рис. 3.9

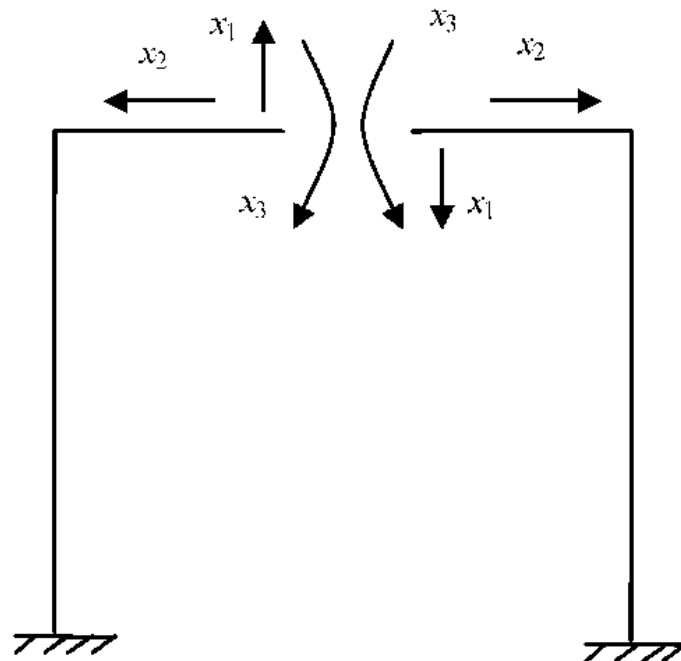


Рис. 3.10

Таким образом, необходимо составить и решить систему канонических уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + x_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + x_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ x_1 \delta_{31} + x_2 \delta_{32} + x_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Однако внутренние силовые факторы также можно разбить на симметричные и кососимметричные. К симметричным относятся: изгибающий момент  $x_3$  и продольная сила  $x_2$ ; к кососимметричным относится поперечная сила  $x_1$ .

При симметричном нагружении обращаются в ноль кососимметричные силовые факторы, а при кососимметричном нагружении симметричные силовые факторы.

Таким образом, для симметричной системы с симметричным нагружением вместо трёх остаются два канонических уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + x_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + x_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

При кососимметричном нагружении вместо трёх остаётся одно уравнение.

$$x_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0. \quad (3.4)$$

Наличие шарнира на оси симметрии системы (рис. 3.11) приводит к тому, что изгибающий момент  $x_3$  при разрезании симметричной системы обращается в ноль.

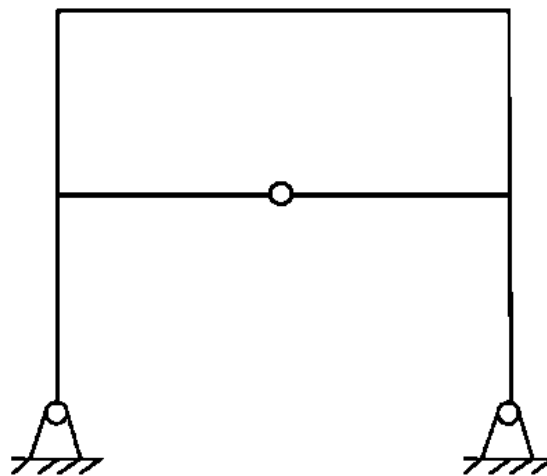


Рис. 3.11

Для симметричной рамы с замкнутым контуром рациональным является разрезание по оси симметрии верхней или нижней горизонтальной балки, в зависимости от того, где располагается шарнир, а также является ли нагрузка рамы симметричной или кососимметричной.

При построении всех эпюр они строятся для одной половины рамы, а для второй половины они являются либо симметричными, либо кососимметричными, в зависимости от типа внешней нагрузки.

### 3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

1. Путём отбрасывания лишних связей заданная статически неопределимая система превращается в статически определимую.

2. По направлению искомого перемещения к полученной статически определимой системе прикладывается единичная сила (при определении линейного перемещения – сосредоточенная сила, при определении угла поворота – единичный момент).

3. От приложенного единичного силового фактора строится единичная эпюра изгибающих моментов  $\bar{M}$  в статически определимой системе.

4. Путём умножения единичной эпюры  $\bar{M}$  на суммарную окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_p$  определяется искомое перемещение.

#### 4. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ

Для надёжной работы элементов конструкций необходимо обеспечить сохранение первоначальной формы равновесия как самих элементов, так и всей конструкции в целом.

Равновесие механической системы называется **устойчивым**, если при отклонении от положения равновесия система возвращается в первоначальное положение после устранения причин, вызывающих это отклонение.

Равновесие называется **неустойчивым**, если система не возвращается в исходное положение, а отклоняется от него ещё больше.

Равновесие называется **безразличным**, если новое положение системы после отклонения от исходного остаётся равновесным и после удаления внешнего воздействия.

Прямолинейная форма равновесия длинного стержня, подвергнутого осевому сжатию силой  $P$  (рис. 4.1), устойчива только до определённого значения сжимающей силы. Если такой стержень при малых значениях силы  $P$  отклонить от исходного положения, то при устранении причин прямолинейная форма восстановится.

При некотором значении силы  $P$ , называемом **критическим**, стержень не распрямится, а сохранит ту форму, которую ему придали при малом отклонении. При значении силы  $P$ , равном критическому ( $P = P_k$ ), стержень будет находиться в условиях безразличного равновесия.

Если сила  $P$  превысит критическое значение, прямолинейная форма равновесия станет неустойчивой.

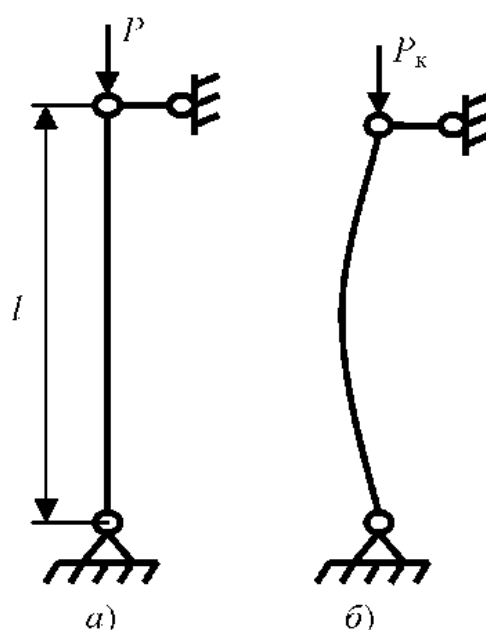


Рис. 4.1

Явление изгиба стержня продольной силой называется **продольным изгибом**.

Допускаемую нагрузку при расчёте на устойчивость определяют как часть критической:

$$P_{\text{доп}} = \frac{P_{\text{к}}}{n_{\text{у}}}, \quad (4.1)$$

где  $n_{\text{у}}$  – коэффициент запаса устойчивости.

Величина коэффициента запаса устойчивости принимается примерно равной запасу прочности. Например, для стали  $n_{\text{у}} = 2 \dots 4$  в зависимости от условий работы конструкции. Для неоднородных материалов запас устойчивости увеличивают.

#### 4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Предположим, что шарнирно закреплённый по концам прямой стержень, сжатый силой  $P = P_{\text{к}}$ , выведен некоторой горизонтальной силой из состояния прямолинейного равновесия и остался изогнутым после устранения горизонтальной силы (рис. 4.2).

Приближённое дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

$$EIy'' = \pm M(x). \quad (4.2)$$

В соответствии с правилом знаков для изгибающего момента:

$$M(x) = P_{\text{к}}y(x) > 0.$$

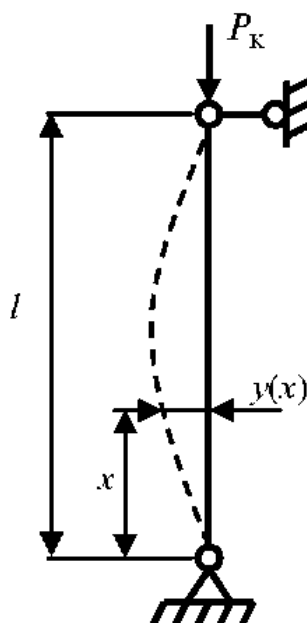


Рис. 4.2

Так как в выбранной системе координат кривизна оси является отрицательной ( $v'' < 0$ ), в правой части уравнения (4.2) следует поставить знак минус:

$$EIv'' = -P_k v.$$

Приняв  $P_k / EI = \alpha^2$ , получаем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$v'' + \alpha^2 v = 0, \quad (4.3)$$

общий интеграл которого

$$v(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x.$$

Здесь  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления стержня, так называемых граничных или краевых условий.

Горизонтальное смещение нижнего конца стержня равно нулю, т.е. при  $x=0$  прогиб  $v=0$ . Это условие выполняется, если  $B=0$ . Следовательно, изогнутая ось стержня является синусоидой:

$$v(x) = A \sin \alpha x. \quad (4.4)$$

Горизонтальное смещение верхнего конца стержня также равно нулю, поэтому  $v(l) = A \sin \alpha l = 0$ .

При  $A=0$  возможна только прямолинейная форма равновесия. Поэтому  $\sin \alpha l = 0$  или  $\alpha l = \pi n$ .

Приравняв  $\alpha l = \pi n$  и подставив  $\alpha = \sqrt{\frac{P_k}{EI}}$ , получим:

$$P_k = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) называется **формулой Эйлера**.

$P_k$  — критическая сила при выпучивании стержня в одной из двух главных его плоскостей. Выпучивание стержня происходит в сторону наименьшей жёсткости, если нет специальных устройств, препятствующих изгибу стержня в этом направлении. Поэтому в формулу Эйлера следует подставлять меньший из главных центральных моментов инерции поперечного сечения стержня  $I_{\min}$ .

Величина критической силы зависит от коэффициента  $n$ . Найдём смысл этого коэффициента.

Уравнение (4.4) можно записать как

$$y(x) = A \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (4.6)$$

Синусоиды для  $n = 1$  и  $n = 2$  изображены на рис. 4.3, т.е. величина  $n$  представляет собой число полуволн синусоиды, по которой изогнется стержень.

Очевидно, стержень всегда изогнётся по наименьшему числу полуволн, допускаемому его опорными устройствами, так как по формуле (4.5) наименьшему  $n$  соответствует наименьшая критическая сила.

Формула (4.5) справедлива не только для стержня с шарнирно закреплёнными концами, но и для любого стержня, который изогнётся при выпучивании по целому числу полуволн.

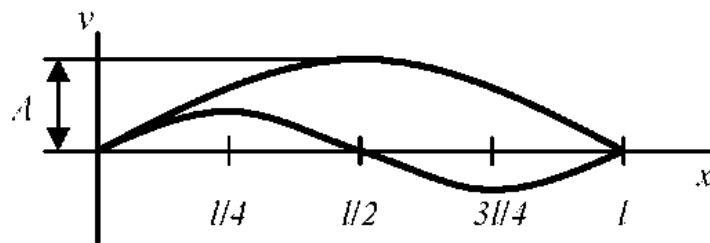


Рис. 4.3

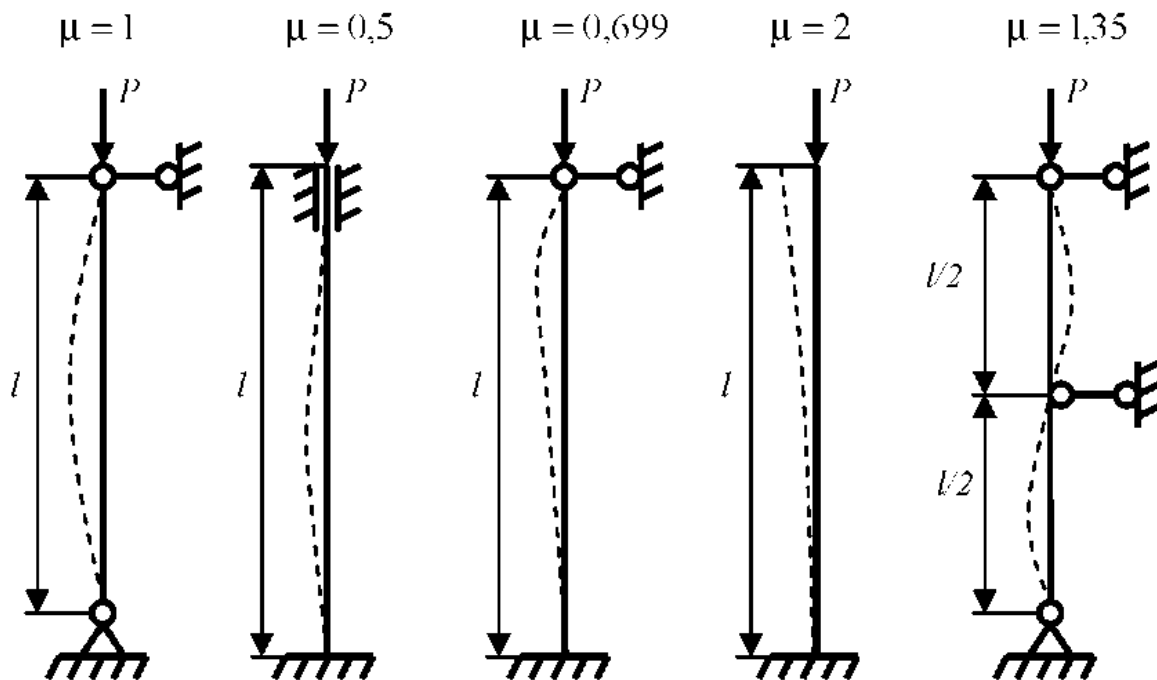


Рис. 4.4



Формулу Эйлера можно обобщить на случай любых опорных устройств, если записать как

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (4.7)$$

где  $\mu = 1/n$  — величина постоянная, обратная числу полувольт  $n$  синусоиды, по которой изогнётся стержень. Постоянная  $\mu$  называется коэффициентом приведения длины, а  $\mu l$  — приведённая длина стержня, которая является длиной полуволны синусоиды, по которой изгибается стержень.

Случай шарнирного закрепления концов стержня является основным. Значения коэффициента приведения  $\mu$  для некоторых случаев закрепления стержня приведены на рис. 4.4.

## 4.2. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Формула Эйлера основана на дифференциальном уравнении упругой линии балки, которое справедливо только в пределах упругих деформаций. Следовательно, критические напряжения, определяемые по этой формуле, не должны превосходить предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пл}}$ :

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 F} \leq \sigma_{\text{пл}}.$$

Используя соотношение  $i_{\min}^2 = I_{\min} / F$ , где  $I_{\min}$  — наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня, можем записать следующее

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} \leq \sigma_{\text{пл}} \quad \text{или} \quad \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пл}}, \quad (4.8)$$

Безразмерная величина  $\lambda$  называется гибкостью стержня и равна

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (4.9)$$

Гибкость зависит от длины стержня, геометрических параметров поперечных сечений, условия его закрепления и вида нагружения.

Обозначим значение гибкости стержня, при котором  $\sigma_k = \sigma_{\text{пл}}$ ,  $\lambda_0$ .

Тогда

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пл}}}}. \quad (4.10)$$

Формула Эйлера применима для стержней, гибкость которых

$$\lambda \geq \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{мц}}}} .$$

Например, для конструкционной малоуглеродистой стали с  $\sigma_{\text{мц}} = 210$  МПа и  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа формулой Эйлера можно пользоваться лишь при гибкости стержня

$$\lambda \geq \lambda_0 = 3,14 \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{210}} \approx 100 ,$$

а для алюминиевого сплава Д16Т с  $\sigma_{\text{мц}} = 200$  МПа и  $E = 0,75 \cdot 10^5$  МПа при

$$\lambda \geq \lambda_0 = 3,14 \cdot \sqrt{\frac{0,75 \cdot 10^5}{200}} \approx 60 .$$

#### 4.3. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ. ПОЛНАЯ ДИАГРАММА КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Для стержней средней и малой гибкости формула Эйлера даёт значения критических нагрузок, превышающие их действительные значения. Поэтому для практических расчётов на устойчивость при  $\lambda < \lambda_0$  часто пользуются либо непосредственно экспериментальными данными, либо эмпирическими формулами.

Наибольшее распространение имеет формула, предложенная Ф.С. Ясинским:

$$\sigma_{\text{к}} = a - b\lambda , \quad (4.11)$$

где  $\lambda$  – гибкость стержня, а  $a$  и  $b$  – коэффициенты, зависящие от свойств материала. Например, для Ст3 при  $\sigma_{\text{В}} = 380$  МПа и  $\sigma_{\text{Т}} = 240$  МПа формула (4.11) имеет вид

$$\sigma_{\text{к}} = 310 - 1,14\lambda .$$

По формуле (4.11) проводится расчёт на устойчивость стержней средней гибкости, разрушение которых при сжатии сопровождается значительным боковым выпучиванием.

Для стержней малой гибкости ( $\lambda < \lambda_1$ ) понятие потери устойчивости неприменимо в том смысле, в каком применяется для стержней большой гибкости. Стержни, у которых длина невелика относительно размеров

поперечного сечения, выходят из строя главным образом из-за того, что напряжения сжатия в них достигают предела текучести  $\sigma_T$  (при пластичном материале) или предела прочности  $\sigma_B$  (при хрупком материале). Поэтому для стержней малой гибкости в качестве критического напряжения принимается предел текучести  $\sigma_T$  или предел прочности  $\sigma_B$ . Чёткой границы между стержнями малой и средней гибкости провести нельзя. В расчётах принимают  $\lambda_1 = (0,2...0,4)\lambda_0$ .

Зависимость критических напряжений  $\sigma_k$  от гибкости  $\lambda$  изображается графически в виде полной диаграммы критических напряжений. Такая диаграмма для стали представлена на рис. 4.5.

Для стержней малой гибкости зависимость  $\sigma_k$  от  $\lambda$  выражена горизонтальной прямой, для стержней средней гибкости – наклонной прямой, формула (4.11), а для стержней большой гибкости – гиперболой Эйлера.

Таким образом, при расчёте на устойчивость прежде всего необходимо определить гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

Если  $\lambda > \lambda_0$ , то формула Эйлера применима, и  $P_{\text{доп}}$  можно найти из условия

$$P_{\text{доп}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{n_y (\mu l)^2} \quad (4.12)$$

Если  $\lambda < \lambda_0$ , то формула Эйлера не применима, и для определения  $P_{\text{доп}}$  применяется формула (4.11).

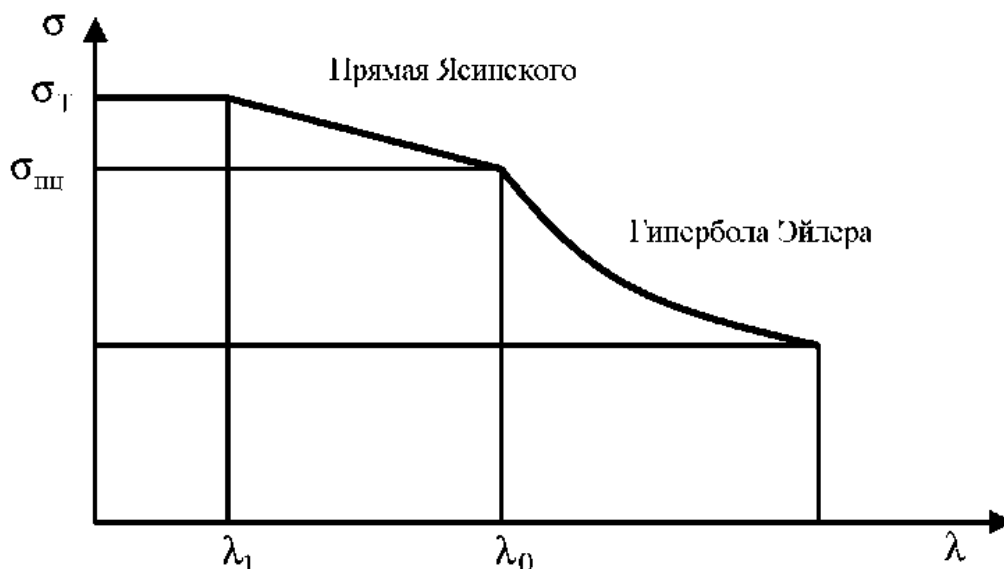


Рис. 4.5

#### 4.4. РАСЧЁТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ С ПОМОЩЬЮ КОЭФФИЦИЕНТА СНИЖЕНИЯ ОСНОВНОГО ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ

При расчёте на устойчивость широко используется следующая зависимость:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma], \quad (4.13)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержня;  $\varphi$  – коэффициент снижения основного допускаемого напряжения (или коэффициент продольного изгиба);  $[\sigma]$  – основное допускаемое напряжение на сжатие.

Величина  $\varphi$  зависит от материала и гибкости стержня. Значения  $\varphi$  приведены в табл. 4.1.

#### 4.1. Значения коэффициента $\varphi$ снижения основного допускаемого напряжения для некоторых материалов

$\lambda$	Сталь		Стали повышенного качества $\sigma_{\text{min}} > 320 \text{ МПа}$	Чугун	Дерево
	Ст1, Ст2, Ст3, Ст4	Ст5			
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	Го,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,3	–	0,25
120	0,45	0,37	0,30	–	0,22
130	0,40	0,33	0,26	–	0,18
140	0,36	0,29	0,23	–	0,16
150	0,32	0,26	0,21	–	0,14
160	0,29	0,24	0,19	–	0,12

$\lambda$	Сталь		Стали повышенного качества $\sigma_{\text{инт}} > 320 \text{ МПа}$	Чугун	Дерево
	Ст1, Ст2, Ст3, Ст4	Ст5			
170	0,26	0,21	0,17	–	0,11
180	0,23	0,19	0,15	–	0,10
190	0,21	0,17	0,14	–	0,09
200	0,19	0,16	0,13	–	0,08

Величина  $\varphi[\sigma]$  рассматривается как допускаемое напряжение при расчёте на устойчивость, т.е.

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma]. \quad (4.14)$$

Для подбора сечения неравенство (4.13) приводят к виду:

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}.$$

При этом значением  $\varphi$  приходится задаваться, так как гибкость  $\lambda$  неизвестна. В качестве первого приближения рекомендуется принимать  $\varphi_1 = 0,5$ . Затем определяют величины  $I_{\text{мин}}$ ,  $i_{\text{мин}}$ ,  $P$ ,  $\lambda$  и по табл. 4.1 находим соответствующее значение  $\varphi'_1$ .

Расчёт повторяется до тех пор, пока неравенство (4.13) не будет удовлетворено.

## 5. РАСЧЁТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ, ДВИЖУЩИХСЯ С УСКОРЕНИЕМ

### 5.1. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Расчёт деталей машин на динамическую нагрузку более сложен, чем расчёт на статическую нагрузку. Во-первых, более сложный метод определения внутренних усилий и напряжений, возникающих от действия динамической нагрузки, и, во-вторых более сложное определение механических свойств материалов. Так, при действии ударной нагрузки многие материалы, которые при статическом нагружении были пластичными, работают как хрупкие. Также известно, что при ударном растяжении предел текучести повышается на 20...70%, а предел прочности на 10...30% по сравнению со статическим растяжением. Пластичность с увеличением скорости деформирования убывает и при сравнительно невысоких скоростях нагружения наблюдается склонность материала к хрупкому разрушению. Поэтому допускаемые напряжения при динамическом нагружении должны задаваться в зависимости от скорости нагружения. В первом приближении в этих случаях можно использовать характеристики механических свойств материала, полученные при статическом нагружении.

Для определения усилий, возникающих в движущемся теле, широко используется *принцип Даламбера*, который формулируется следующим образом.

Если движущееся тело (систему тел) в какой-то момент времени представить находящимся в состоянии покоя, но помимо сил, производящих движение, приложить к нему силы инерции, то в нём будут действовать такие же внутренние усилия, напряжения и деформации, какие имеют место во время его движения.

### 5.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ПРИВОДИМЫЕ К ЗАДАЧАМ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЁТА СИСТЕМ

Рассмотрим балку постоянного сечения, подвешенную на тросе крана (рис. 1.14, а); эта балка изогнута в результате действия её собственного веса. После включения двигателя крана сечение *A* балки, в котором к ней прикреплен трос, начинает подниматься с некоторым ускорением. При этом возникают силы инерции, распределённые по длине оси балки. Интенсивность их определяется формулой

$$p_i = \frac{dP_i}{dx} \frac{\gamma V}{g} a ,$$

где  $dP_i$  – сила инерции, действующая на элемент стержня длиной  $dx$ ;  $\gamma$  – объёмный вес материала;  $F$  – площадь поперечного сечения стержня;  $g$  – ускорение свободного падения;  $a$  – ускорение.

На рисунке 5.1 показаны нагрузки, действующие на балку. Равномерно распределённая нагрузка интенсивностью  $q$  представляет собой собственный вес балки, а нагрузка  $p_i$  – инерционные силы. Сила  $S$  (усилие в тросе) равна по величине равнодействующей нагрузок  $q$  и  $p_i$  направлена в противоположную сторону, т.е. уравнивает эти нагрузки.

Инерционные силы  $p_i$  возникают после включения двигателя крана и вызывают изгиб балки (дополнительно к изгибу от действия собственного веса  $q$ ). В результате изгиба различные сечения балки перемещаются при подъеме с различными ускорениями  $a$ . Поэтому в общем случае интенсивность  $p_i$  инерционной нагрузки переменна по длине балки.

В частных случаях, например когда жёсткость балки при изгибе весьма велика или когда сечение  $A$ , в котором балка прикреплена к тросу, поднимается на значительную высоту с постоянным ускорением, влиянием деформаций балки, вызванных инерционными силами  $p_i$  на величины ускорений  $a$ , можно пренебречь. В этих случаях можно считать, что ускорения всех сечений балки одинаковы и равны ускорению сечения  $A$ , а нагрузка  $p_i$  равномерно распределена по длине балки.

Аналогично и при решении ряда других динамических задач можно пренебрегать влиянием деформаций системы на распределение в ней ускорений, а следовательно, и на распределение инерционных сил.

В качестве примера рассмотрим расчёт вертикального бруса постоянного сечения, поднимаемого вверх силой  $S$ , превышающей вес бруса  $G$  (рис. 5.1). Кроме силы  $S$  на брус действуют равномерно распределённая по его длине вертикальная нагрузка интенсивностью  $q = G/l$  от собственного веса бруса и инерционная нагрузка  $p_i = (q/g)a$ .

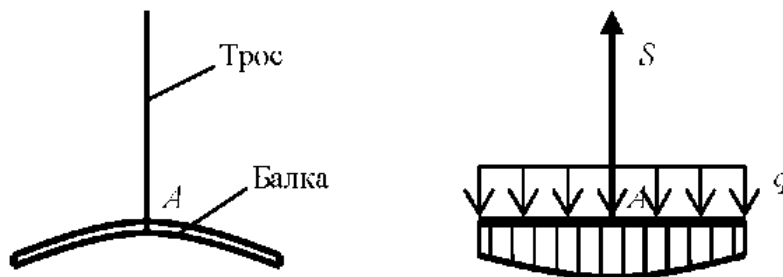


Рис. 5.1

Ускорение  $a$  направлено в сторону действия силы  $S$ , т.е. вверх, величину его принимаем одинаковой для всех поперечных сечений бруса. Поэтому нагрузка  $p_i$  равномерно распределена по длине бруса и направлена в сторону, противоположную ускорению, т.е. вниз.

Составляем уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось  $x$ :

$$\sum X = S - G - p_i l = 0, \text{ откуда } p_i = (S - G)/l.$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении бруса, отстоящем на расстояние  $x$  от его нижнего конца,

$$\sigma = (q + p_i) \frac{x}{F} = \left( \frac{G}{l} + \frac{S - G}{l} \right) \frac{x}{F} = \frac{S}{l} \frac{x}{F} = \frac{S}{F} \frac{x}{l}.$$

Наибольшее напряжение возникает в верхнем сечении бруса:

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{F}.$$

### 5.3. РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ УДАРЕ

Под ударной понимается всякая быстроизменяющаяся нагрузка. При ударе различные точки системы получают некоторые скорости, так что системе придаётся кинетическая энергия, которая переходит в потенциальную энергию деформации конструкции, а также в другие виды энергии – прежде всего в тепловую.

При определении динамических допускаемых напряжений следует учитывать изменение механических характеристик материала. Однако ввиду недостаточной изученности этого вопроса расчёт на прочность при динамической нагрузке обычно ведут по статическим характеристикам, т.е. условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{дmax}} \leq [\sigma]. \quad (5.1)$$

При ударе возникают местные деформации в зоне контакта и общие деформации системы. Условимся рассматривать только общие деформации системы, и предположим, что динамические напряжения не превосходят предела пропорциональности материала.

Для приближённого определения напряжений и перемещений сечений в момент наибольшей деформации системы в практических расчётах применяется энергетический метод, который применим в тех случаях, когда скорость ударяющего тела мала по сравнению со скоростью распространения ударной волны, а время соударения значительно больше времени распространения этой волны по всей системе.



Указанное ограничение даёт основание считать, что при ударе деформации распространяются мгновенно по всей стержневой системе и все её точки начинают движение одновременно.

Таким образом, простейшая теория удара основана на следующих допущениях:

1. Удар считается **неупругим**, т.е. ударяющее тело продолжает двигаться вместе с ударяемой конструкцией, не отрываясь от неё. Иными словами ударяющее тело и ударяемая конструкция имеют общие скорости после удара.

2. Ударяемая конструкция имеет лишь одну **степень свободы**, и вся масса конструкции сосредоточена в точке удара.

3. Рассеянием энергии в момент удара пренебрегают, считая, что вся кинетическая энергия ударяющего тела переходит в потенциальную энергию деформации ударяемой конструкции, движение которой происходит при отсутствии сил сопротивления.

4. Ударяемая конструкция считается **идеально упругой**.

Это означает, что зависимость между динамическими усилиями и ими вызванными перемещениями, точно так же подчиняется закону Гука, как и при статическом действии нагрузок (рис. 5.2).

Отношение динамических и статических перемещений называется коэффициентом динамичности или динамическим коэффициентом

$$k_{\text{д}} = \frac{\delta_{\text{д}}}{\delta_{\text{ст}}} \quad (5.2)$$

В соответствии с законом Гука

$$k_{\text{д}} = \frac{R_{\text{д}}}{R_{\text{ст}}} = \frac{\sigma_{\text{д}}}{\sigma_{\text{ст}}}, \quad (5.3)$$

где  $\sigma_{\text{д}}$  — динамические напряжения;  $\sigma_{\text{ст}}$  — статические напряжения.

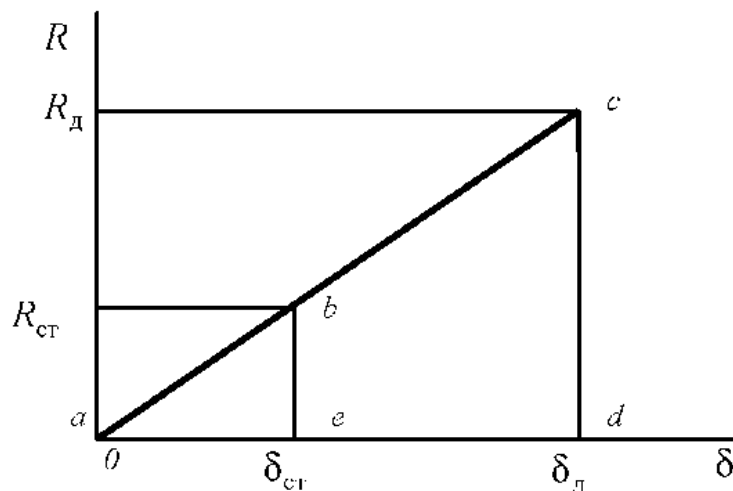


Рис. 5.2

#### 5.4. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР

Предположим, что груз массой  $m$  падает с некоторой высоты  $h$  на упругую систему, масса которой мала по сравнению с массой груза. Упругую систему будем считать невесомой (рис. 5.3, а, б).

Груз в процессе падения выполняет работу

$$A = \frac{Q}{h + \delta_d}, \quad (5.3)$$

где  $\delta_d$  – динамический прогиб системы (перемещение точки удара) в момент наибольшей деформации.

На рисунке 5.4 показано, что работа соответствует площади прямоугольника  $abde$ , так как величина веса груза  $Q$  в процессе удара не меняется.

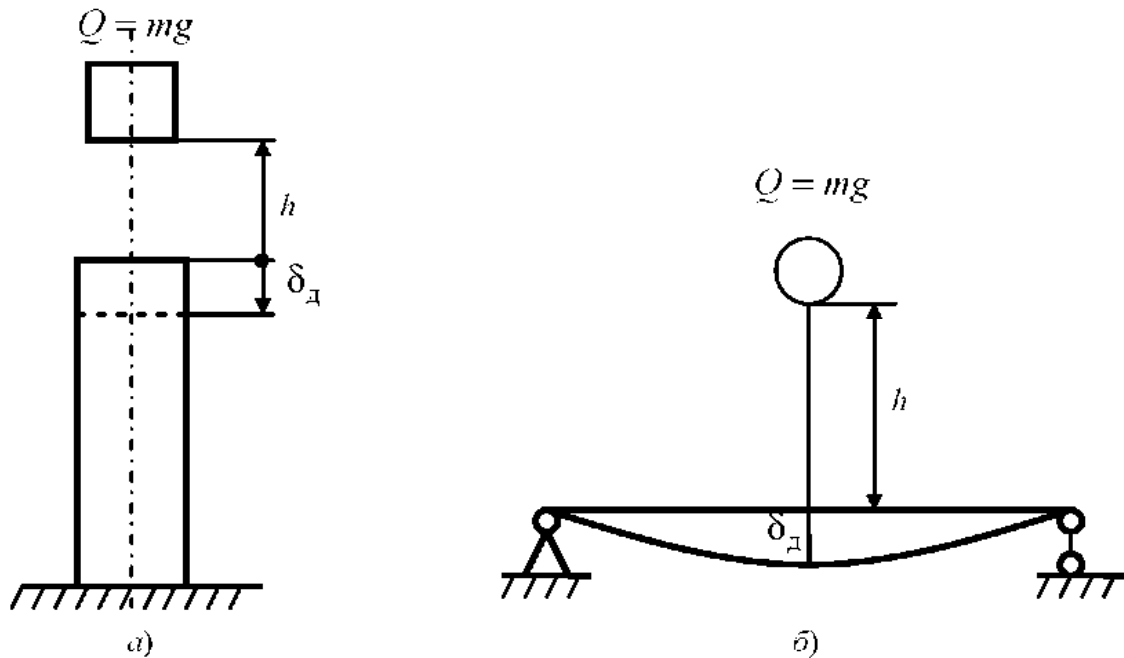


Рис. 5.3

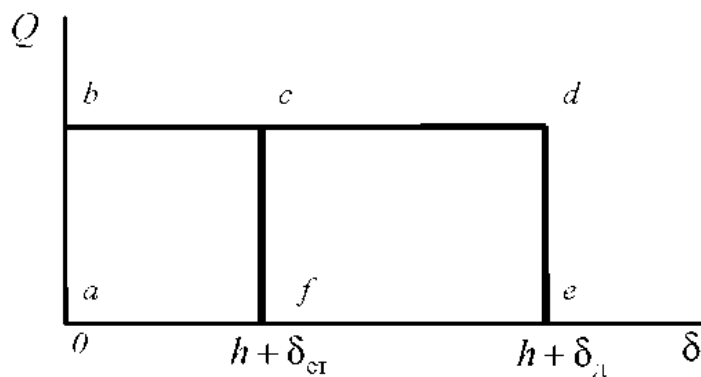


Рис. 5.3

Данная работа накапливается в системе в виде потенциальной энергии, которая равна работе внутренней силы  $R$ , вызывающей прогиб  $S$  при ударе. На рисунке 5.2 эта потенциальная энергия с учётом принятых выше допущений соответствует площади треугольника  $acd$ , так как сила  $R$  изменяется от нуля до конечного значения, равного  $R_d$ , по линейному закону. Таким образом, потенциальная энергия равна

$$U = \frac{R_d \delta_d}{2}. \quad (5.5)$$

Приравняв выражения (5.4) и (5.5), с учётом уравнений (5.2) и (5.3) имеем

$$Q \left( \frac{h}{\delta_{ст}} + k_d \right) = \frac{R_{ст} k_d^2}{2},$$

а при  $Q = R_{ст}$

$$\frac{h}{\delta_{ст}} + k_d = \frac{k_d^2}{2}. \quad (5.6)$$

Решая квадратное уравнение относительно  $k_d$ , получим

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}}. \quad (5.7)$$

Положительный знак перед радикалом взят потому, что искомыми являются наибольшие деформации. Если груз после удара остаётся на упругой системе, то при отрицательном знаке перед радикалом решение данного уравнения даёт наибольшее отклонение точки удара при возвратном движении.

После нахождения  $k_d$ , по уравнениям (5.2), (5.3) могут быть определены динамические напряжения и деформации системы, которые будут в  $k_d$  раз больше тех, которые имели бы место в системе при статическом приложении груза  $Q$ .

Заметим, что упругие свойства системы, как видно из формулы (5.7), смягчают удар и, наоборот, сила удара тем больше, чем больше жёсткость системы.

Частный случай ударного нагружения – **внезапное приложение груза**, когда  $h = 0$ . В этом случае  $k_d = 2$  и  $a_d = 2a_{ст}$ .  $\delta_d = 2\delta_{ст}$ , т.е. при внезапном приложении нагрузки напряжения и деформации системы в два раза больше, чем при статическом нагружении.

## 5.5. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР ВСЛЕДСТВИЕ ВНЕЗАПНОЙ ОСТАНОВКИ ДВИЖЕНИЯ

Удар вследствие внезапной остановки движения возникает, например, в тросе лифта при внезапной остановке кабины или в балке, на которой закреплён груз  $Q$  при жёсткой посадке самолёта, имеющего вертикальную посадочную скорость (рис. 5.5).

Использовать формулу (5.7) для определения коэффициента динамичности нельзя, так как к моменту удара балка уже воспринимает статическую нагрузку  $Q$ . Кинетическая энергия движущейся вертикально конструкции равна  $T = QV^2 / 2g$ , работа груза на дополнительном перемещении  $(\delta_d - \delta_{ст}) - A = Q(\delta_d - \delta_{ст})$  (площадь прямоугольника  $cdef$  рис. 5.4). Работа переходит в дополнительную потенциальную энергию деформации балки:

$$U = \frac{1}{2}(R_d + R_{ст})(\delta_d - \delta_{ст}),$$

соответствующей площади трапеции  $bcde$  на рис. 5.2. Приравнявая  $T + A = U$  с учётом уравнений (5.2), (5.3), получим квадратное уравнение:

$$\frac{V^2}{g\delta_{ст}} + 2(k_d - 1) = (k_d + 1)(k_d - 1),$$

решая которое, получим коэффициент динамичности при внезапной остановке движения:

$$k_d = 1 + \frac{V}{\sqrt{g\delta_{ст}}}. \quad (5.8)$$

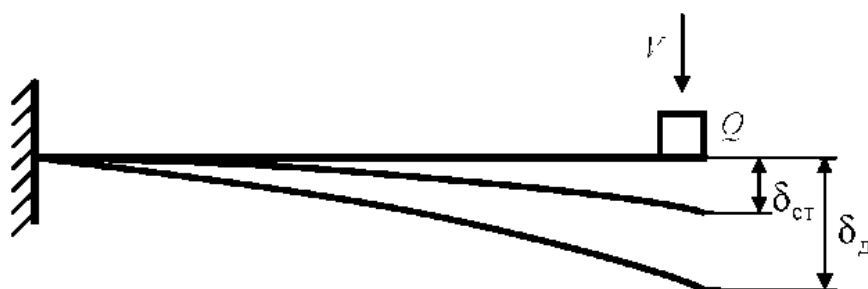


Рис. 5.5

## 5.6. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ УДАР

Потенциальная энергия, накопленная в системе к моменту возникновения наибольшей деформации  $\delta_d$ , равна кинетической энергии системы в момент соприкосновения с ней массы  $m$  (рис. 5.6):

$$T = \frac{mV^2}{2} = U = \frac{R_d \delta_d}{2}.$$

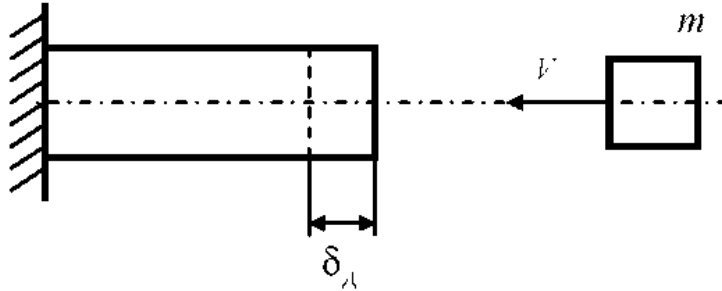


Рис. 5.6

С учётом уравнений (5.2) и (5.3), а также, принимая условно  $R_{ст} = mg$ , получим

$$\frac{V^2}{2} = \frac{k_d^2 mg \delta_{ст}}{2},$$

откуда определяем коэффициент динамичности при горизонтальном ударе:

$$k_d = \frac{V}{\sqrt{g \delta_{ст}}}, \quad (5.9)$$

где  $\delta_{ст}$  – перемещение точки системы в месте приложения к ней статической силы  $mg$ .

## 5.7. СКРУЧИВАЮЩИЙ УДАР

Напряжения и деформации при ударном кручении определяются так же, как и при ударном растяжении (сжатии) или ударном изгибе. При ударном кручении применимы формулы для определения коэффициента динамичности (5.5), (5.7).

Например, при ударном скручивании вследствие резкого торможения быстро вращающегося вала, несущего маховик (рис. 5.9), кинетическая энергия  $T$  маховика переходит в потенциальную энергию  $U$  деформации вала:

$$T = \frac{I_m \omega^2}{2},$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения маховика;  $I_m = \iint_F r^2 dm =$

$$= 4\rho t \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} d\varphi = \rho t \frac{\pi R^4}{2} = \frac{mR^2}{2} = \frac{QD^2}{8g} \quad \text{– момент инерции маховика;}$$

$dm = \rho t r dr d\varphi$  – элементарная масса;  $m = \rho t \frac{\pi D^2}{4}$  – масса маховика;

$Q = mg$  – вес маховика;  $\rho$  – плотность материала маховика.

Потенциальная энергия деформации вала с учётом уравнений (5.2), (5.3):

$$U = \frac{M_{кр,l} \varphi_{,l}}{2} = \frac{k_{дl} M_{кр} \varphi}{2}.$$

Так как угол закручивания при кручении вала круглого профиля равен

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p},$$

имеем

$$U = \frac{k_{д}^2 M_{кр}^2 l}{2GI_p}.$$

Приравняв  $T = U$ , после преобразований, получим формулу для определения коэффициента динамичности при скручивающем ударе:

$$k_{д} = \frac{\omega}{M_{кр}} \sqrt{\frac{GI_p I_m}{l}}. \quad (5.10)$$

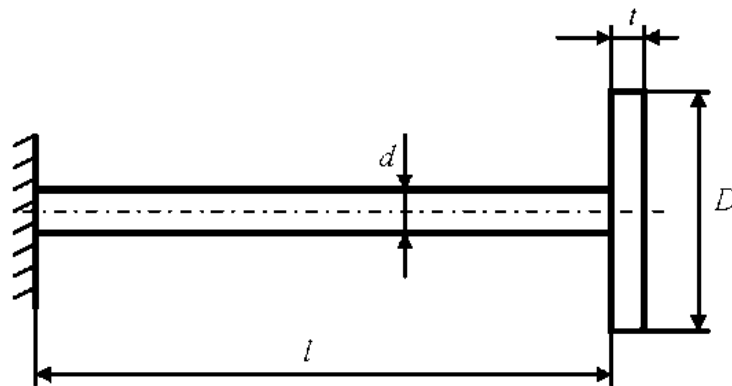


Рис. 5.7

Динамические касательные напряжения  $\tau_d$  и динамический угол закручивания  $\varphi_d$  вала определяются из следующих уравнений:

$$\tau_d = k_d \tau_{ст} = \frac{\omega}{W_p} \sqrt{\frac{GI_p I_m}{l}} = \frac{\omega D^2}{2d} \sqrt{\frac{Gt\rho}{l}}; \quad (5.11)$$

$$\varphi_d = k_d \varphi_{ст} = \frac{\omega}{GI_p} \sqrt{\frac{GI_p I_m}{l}} = \frac{\omega l D^2}{d^2} \sqrt{\frac{Gt\rho}{l}}. \quad (5.12)$$

## 6. УСТАЛОСТЬ

---

При эксплуатации машин и конструкций напряжения в их многочисленных элементах могут многократно изменяться как по величине, так и по направлению.

Детали, подвергающиеся воздействию переменных напряжений, разрушаются при напряжениях, значительно меньших значений предела прочности, а иногда и предела пропорциональности материала.

Явление разрушения под действием переменных напряжений называется усталостью материала.

Если значения переменных напряжений превышают некоторый предел, то в материале происходит процесс постепенного накопления повреждений, который приводит к образованию субмикроскопических трещин. Трещина становится концентратором напряжений, что способствует её дальнейшему росту. Это ослабляет сечение и в некоторый момент времени вызывает внезапное разрушение детали, которое нередко становится причиной аварий.

Процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств материала, образованию трещин и разрушению детали, называется *усталостным разрушением (усталостью)*.

Испытания образцов на усталость проводятся на специальных установках. Наиболее простой является установка, предназначенная для испытаний на переменный изгиб с вращением при симметричном циклическом изменении напряжений.

### 6.1. РАСЧЁТ ВАЛА НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Проверочный расчёт вала на усталостную прочность учитывает все основные факторы, влияющие на усталостную прочность: характер изменения напряжений, абсолютные размеры вала, обработку поверхностей и прочностные характеристики материалов, из которых изготавливаются валы. Таким образом, перед расчётом вала на усталость необходимо полностью уточнить конструкцию вала.

Расчёт на выносливость заключается в определении действительных коэффициентов запаса усталостной прочности для выбранных предположительно опасных сечений и является поэтому уточнённо-проверочным.

Следует помнить, что при ступенчатой форме вала наличие концентраторов напряжений (таких как переход сечения с галтелями, напрессованные детали, шпоночные пазы, шлицы или зубья, отверстия, канавки, резьба и т.д.) опасным необязательно будет то сечение, где суммарный момент имеет наибольшую величину. Поэтому коэффициент запаса уста-



лостной прочности определяется в нескольких сечениях вала, выбранных с учётом концентраторов, а также эпюр моментов и сравнивают его с допускаемым.

При совместном действии изгиба и кручения принимают, что нормальные напряжения меняются по симметричному циклу рис. 6.1, а касательные по пульсирующему рис. 6.2.

$$\sigma_a = \sigma^{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{ос}}}, \quad (6.1)$$

где  $M_{\text{изг}}$  – суммарный изгибающий момент;  $W_{\text{ос}}$  – осевой момент сопротивления опасного сечения вала  
или

$$\tau_a = \tau_m = \frac{M_Z}{2W_{\text{кр}}}, \quad (6.2)$$

где  $M_Z$  – крутящий момент в опасном сечении;  $W_{\text{кр}}$  – момент сопротивления вала при кручении;  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$  – амплитуда цикла соответственно симметричного и пульсирующего;  $\sigma_m$ ,  $\tau_m$  – среднее напряжение цикла соответственно симметричного и пульсирующего.

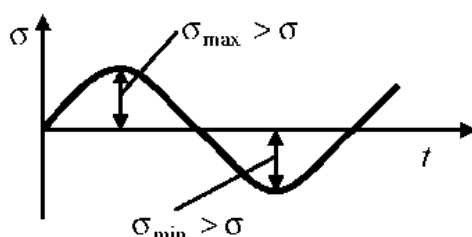


Рис. 6.1

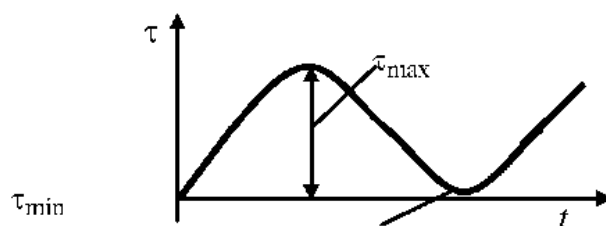


Рис. 6.2

## Запас усталостной прочности по нормальным напряжениям

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}, \quad (6.3)$$

где  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости при симметричном цикле изгиба; для углеродистых конструкционных сталей  $\sigma_{-1} = 0,43\sigma_B$  МПа; для легированных  $\sigma_{-1} = 0,35\sigma_B + (70...120)$  МПа;  $k_{\sigma}$  – эффективный коэффициент концентрации нормальных напряжений;  $\varepsilon_{\sigma}$  – масштабный коэффициент для нормальных напряжений;  $\beta$  – коэффициент, учитывающий шероховатость поверхности; при  $R_a = 0,32...2,5$  мкм принимают  $\beta = 0,9...0,97$ ;  $\sigma_a$  – амплитуда цикла нормальных напряжений, равная наибольшему напряжению изгиба  $\sigma_P^{\max}$  в рассматриваемом сечении;  $\sigma_m$  – среднее напряжение цикла нормальных напряжений; если осевая нагрузка  $F_a$  на вал отсутствует или пренебрежимо мала, то  $\sigma_m = 0$ ; в противном случае

$$\sigma_m = \frac{4F_a}{\pi d^2}, \quad (6.4)$$

где  $\psi_{\sigma}$  – коэффициент чувствительности к асимметрии цикла

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (6.5)$$

для углеродистых сталей, имеющих  $\sigma_B = 650...750$  МПа, принимают  $\psi_{\sigma} = 0,2$ ; для легированных сталей  $\psi_{\sigma} = 0,25...0,30$ .

## Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}\beta} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}, \quad (6.6)$$

где  $\tau_{-1}$  – предел выносливости при симметричном цикле кручения; для углеродистых конструкционных сталей  $\tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1}$ ; остальные обозначения в формуле имеют тот же смысл, что и в (6.3), с той разницей, что они относятся к напряжениям кручения.

По полученным значениям (6.3) и (6.6) определяем общий коэффициент запаса прочности в опасных сечениях

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (6.7)$$

Расчётное значение  $n$  должно быть не ниже допускаемого  $[n] = 2,5$ , т.е.  $n > [n]$ .

Для повышения усталостной прочности валов необходимо принимать минимальную разность смежных участков, увеличивать радиусы галтелей, избегать применения резьбы для крепления деталей на участках опасных сечений и стремиться к наименьшей шероховатости поверхностей на валах.

### Пример.

Расчитать вал на усталостную прочность в сечении червячного колеса. Ширина червячного колеса  $b_2 = 50$  мм; диаметр червячного колеса  $d_2 = 200$  мм; усилия в зацеплении  $F_{t2} = 2450$  Н,  $F_{r2} = 891,8$  Н,  $F_{\alpha 2} = 1000$  Н; крутящий момент на валу  $M_2 = 245$  Н·м; консольная нагрузка  $Q = 3913$  Н; момент  $m_{\alpha 2} = 100$  Н·м; диаметр вала под ступицей червячного колеса  $d_V = 60$  мм; глубина шпоночного паза  $t_1 = 5,5$  мм. Длины участков указаны на рис. 6.3.

*Определим реакции в опорах.*

1. Рассмотрим вертикальную плоскость  $YOZ$ .

Определим реакции в опорах в плоскости

$$\sum M_A = 0 : -0,1Y_C + 0,18Q + 0,05F_{r2} + m_{\alpha 2} = 0,$$

откуда

$$Y_C = \frac{0,18Q + 0,05F_{r2} + m_{\alpha 2}}{0,1} = \frac{0,18 \cdot 3913 + 0,05 \cdot 891 + 100}{0,1} = 8489 \text{ Н.}$$

$$\sum M_C = 0 : 0,1Y_A + 0,08Q - 0,05F_{r2} + m_{\alpha 2} = 0,$$

откуда

$$Y_A = \frac{-0,08Q + 0,05F_{r2} - m_{\alpha 2}}{0,1} = \frac{-0,08 \cdot 3913 + 0,05 \cdot 891 - 100}{0,1} = -3685 \text{ Н.}$$

Получили отрицательное значение, меняем знак и направление силы.

$$Y_A = 3685 \text{ Н.}$$

Проверка  $\sum Y = 0$

$$-Y_A - F_{r2} + Y_C - Q = 0 ;$$

$$-3685 - 891 + 8489 - 3913 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

2. Рассмотрим горизонтальную плоскость  $XOZ$ .

Определим реакции в опорах в плоскости.

Так как зубчатое колесо расположено симметрично относительно опор, то

$$X_A = X_C = \frac{F'_{t2}}{2} = \frac{2450}{2} = 1225 \text{ Н.}$$

Строим эпюру изгибающего момента  $M_x$ .

Участок  $AB$  :  $0 \leq z_1 \leq 0,05$  ;

$$M_x = -F_{t1} z_1 ;$$

$$z_1 = 0, \quad M_x = 0 ;$$

$$z_1 = 0,05, \quad M_x = -3685 \cdot 0,05 = -184,26 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Участок  $CD$  :  $0 \leq z_2 \leq 0,08$  ;

$$M_x = -Q z_2 ;$$

$$z_2 = 0, \quad M_x = 0 ;$$

$$z_2 = 0,08, \quad M_x = -3913 \cdot 0,08 = -313,04 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Участок  $BC$  :  $0 \leq z_3 \leq 0,05$  ;

$$M_x = Q(0,08 + z_3) - F_C z_3 ;$$

$$z_3 = 0, \quad M_x = -313,04 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

$$z_3 = 0,05,$$

$$M_x = 3913 \cdot 0,13 - 8489 \cdot 0,05 = -84,25 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Строим эпюру изгибающего момента  $M_y$ .

Участок  $AB$  :  $0 \leq z_1 \leq 0,05$  ;

$$M_y = X_A z_1 ;$$

$$z_1 = 0, \quad M_y = 0 ;$$

$$z_1 = 0,05, \quad M_x = 1225 \cdot 0,05 = 61,25 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Участок  $BC$  :  $0 \leq z_2 \leq 0,05$  ;

$$M_y = X_C z_2 ;$$

$$z_2 = 0, \quad M_y = 0 ;$$

$$z_2 = 0,05, \quad M_x = 1225 \cdot 0,05 = 61,25 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

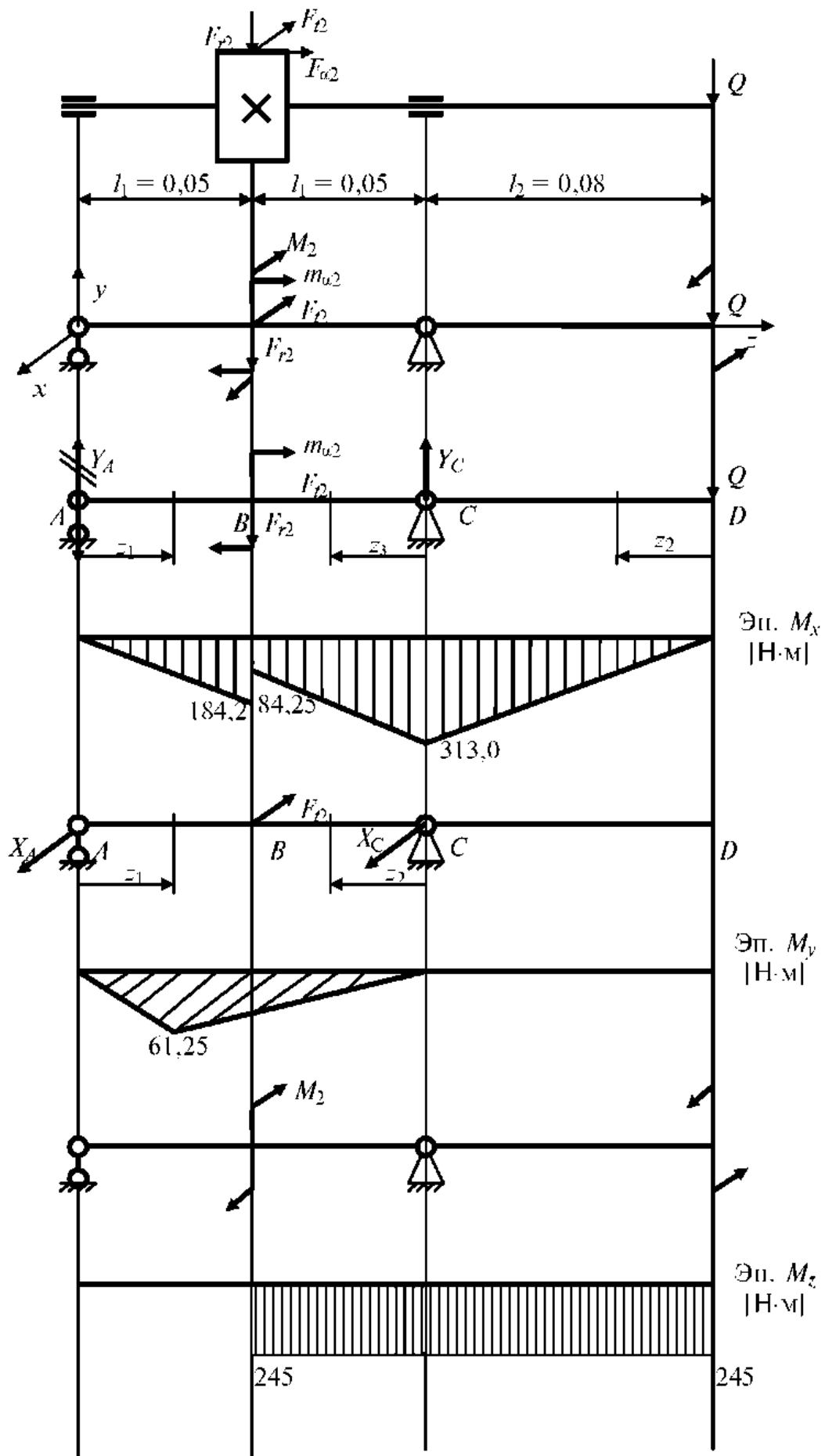


Рис. 6.3

Строим эпюру крутящего момента  $M_z$ .

Участок  $AB$ :  $M_z = 0$  Н·м.

Участок  $BC$  и  $CD$ :  $M_z = M_2 = 245$  Н·м.

Рассчитываем суммарный изгибающий и крутящий момент в сечениях  $B$  и  $C$ :

$$M_P^B = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{184,25^2 + 64,25^2 + 245^2} = 312 \text{ Н·м};$$

$$M_P^C = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{313,04^2 + 245^2} = 397 \text{ Н·м.}$$

Сечение в т.  $C$  – опасное, так как суммарный момент в нём больше.  
Напряжение в опасном сечении

$$\sigma^{\max} = \frac{M_P^C}{W_{OC}},$$

где  $W_{OC}$  – момент сопротивления  $W_{OC} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 45^3}{32} = 8942 \text{ мм}^3$ .

$$\sigma^{\max} = \frac{M_P^C}{W_{OC}} = \frac{397 \cdot 10^3}{8942} = 44,4 \text{ Н·мм}^2.$$

Расчётный запас прочности в опасном сечении

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma^{\max}} = \frac{\sigma_r}{\sigma^{\max}} = \frac{280}{44,4} = 6,3 \geq [n]$$

Запас статической прочности обеспечен.

Расчёт вала на усталостную прочность.

Расчёт проводится в сечении концентратора напряжений, в которых обусловлена наличием шпоночного паза. Принимаем, что нормальные напряжения меняются по симметричному циклу, а касательные по пульсирующему.

Нормальное напряжение в опасном сечении

$$\sigma^{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{OC}},$$

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2} = \sqrt{184,25^2 + 61,25^2} = 194 \text{ Н·м,}$$

где  $W_{OC}$  – момент сопротивления изгибу в опасном сечении

$$W_{OC} = \frac{\pi d_V^3}{32} - \frac{b_1 t_1 (d_V - t_1)^2}{2 d_V} = \frac{3,14 \cdot 60^3}{32} - \frac{14 \cdot 5,5 \cdot (60 - 5,5)^2}{2 \cdot 60} = 19\,289 \text{ мм}^3;$$

$$\sigma^{\max} = \frac{M_{изг}}{W_{OC}} = \frac{194 \cdot 10^3}{19\,290} = 10,06 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

Касательное напряжение в опасном сечении

$$\tau_a = \tau_m = \frac{M_z}{2W_P},$$

где  $W_P$  – момент сопротивления кручению в опасном сечении

$$W_P = \frac{\pi d_V^3}{16} - \frac{b_1 t_1 (d_V - t_1)^2}{2 d_V} = \frac{3,14 \cdot 60^3}{16} - \frac{14 \cdot 5,5 \cdot (60 - 5,5)^2}{2 \cdot 60} = 41\,062 \text{ мм}^3;$$

$$\tau_a = \tau_m = \frac{M_z}{2W_P} = \frac{245 \cdot 10^3}{2 \cdot 41\,062} = 2,98 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

Коэффициент усталостной прочности по нормальным напряжениям

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a};$$

для выбранной марки стали

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a} = \frac{250}{\frac{1,6}{0,97 \cdot 0,8} 10,06} = 12,05.$$

Коэффициент усталостной прочности по касательным напряжениям

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} \tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \frac{150}{\frac{1,5}{0,7} \cdot 2,98 + 0,1 \cdot 2,98} = 22,44.$$

Общий запас усталостной прочности

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{12,05 \cdot 22,44}{\sqrt{12,05^2 + 22,44^2}} = 10,61 \geq [n],$$

$$[n] = 2,5.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

Решение вопросов расчёта на прочность является необходимым условием эффективной работы инженера на любом производстве. Актуальной задачей на сегодняшний момент при подготовке высококвалифицированных инженеров в условиях модернизации отечественного производства является не только получение и знание теоретических аспектов деятельности предприятия, но и приобретение в процессе обучения практических навыков, в частности расчёта и конструирования типовых механических устройств, используемых в машинах, измерительных приборах и средствах автоматизации.

Многообразие решений задач расчёта механических устройств, деталей и узлов открывает огромные возможности для будущего инженера при проведении модернизации существующего или конструировании совершенно нового оборудования с учётом современных требований к работоспособности, экономичности, технологичности и надёжности. Обучающиеся знакомятся с источниками информации по сопротивлению материалов, появлением новых и развитием известных теорий, гипотез, представлений и проверки их опытным путём, методами расчёта элементов конструкций на прочность и жёсткость, проблемными вопросами прочностных расчётов. Студент в результате изучения представленного материала должен уметь оценивать работоспособность деталей по критериям прочности, самостоятельно конструировать простейшие механические узлы. Студент получает представление об основных задачах, решаемых данной наукой, о возможностях применения знаний, полученных в данном курсе, об основных законах данного курса и навыки определения основных конструктивных параметров и расчёта широко распространённых деталей машин (приборов) и аппаратов.



## ГЛОССАРИЙ

---

---

**Балка** – брус, работающий в основном на изгиб.

**Брус** – элемент конструкции, длина которого значительно больше его поперечных размеров.

**Вал** – деталь в форме тел вращения, предназначенная для поддержания вращающихся деталей и для передачи вращающего момента от одной детали к другой (в осевом направлении).

**Виброустойчивость** – способность работать в нужном диапазоне режимов без недопустимых колебаний.

**Внутренние силы** – силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

**Временное сопротивление (предел прочности)** – напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца.

**Выносливость** – способность материала противостоять действию повторно переменных напряжений.

**Главные напряжения** – максимальные и минимальные нормальные напряжения.

**Главные площадки** – площадки, по которым касательные напряжения равны нулю.

**Деформация** – изменение формы и объёма тела под действием внешних сил.

**Деформированное состояние** – совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям для одной точки.

**Долговечность** – способность сохранять заданные показатели до предельного состояния с необходимыми перерывами для ремонтов и технического обслуживания.

**Жёсткость** – способность детали сопротивляться любой деформации.

**Идеализация** – подход к решению задачи, при котором опускаются все частности, не оказывающие влияния на решение поставленной задачи.

**Изгиб** – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты.

**Износостойкость** – способность сохранять первоначальную форму своей поверхности, сопротивляясь износу.

**Косой изгиб** – случай, когда внешние силы, перпендикулярные оси стержня, не лежат в плоскости, проходящей через главную ось его поперечного сечения.

**Кручение** – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только крутящий момент.

**Метод сечений** – приём определения внутренних усилий.

**Надёжность** – свойство изделия выполнять свои функции в течение заданного срока или наработки, сохраняя в заданных пределах эксплуатационные показатели.

**Напряжённое состояние** – совокупность напряжений, действующих по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку.

**Нормальное напряжение** – интенсивность нормальных сил в рассматриваемой точке сечения.

**Обобщённый закон Гука** – выражения, устанавливающие связь между деформациями и напряжениями при пространственном напряжённом состоянии.

**Прочность** – способность детали сопротивляться разрушению или необратимому изменению формы (деформации).

**Расчётная схема** – реальный объект, освобождённый от несущественных особенностей.

**Сложное сопротивление** – случаи, когда в поперечных сечениях стержня одновременно действуют, несколько внутренних силовых факторов (внутренних усилий), одновременно учитываемых при расчёте на прочность.

**Сопротивление материалов** – наука о том, как реагируют элементы конструкций (механизмов, машин, сооружений) на воздействие нагрузок и как обеспечить их соответствие своему назначению и работоспособность.

**Старение** – явление изменения механических свойств.

**Упругое тело** – тело, которое после снятия внешней нагрузки восстанавливает свои размеры и форму, существовавшие до нагружения.

**Усталость материала** – явление разрушения материала детали под действием периодически меняющихся (циклических) напряжений.

**Хрупкость** – свойство твёрдых тел мгновенно разрушаться под действием внешних сил без заметной пластичной деформации.

**Цикл напряжения** – совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения.

**Циклическая нагрузка** – нагрузка, изменяющаяся по определённому закону.

## ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ УСВОЕННЫХ ЗНАНИЙ

---

---

1. Способность твёрдого тела (конструкции) сохранять своё состояние (равновесия или движения) при внешних воздействиях называется...

- а) прочностью;
- б) выносливостью;
- в) жёсткостью;
- г) устойчивостью.

2. Изменение размеров или формы реального тела, подверженного действию внешних сил, называется...

- а) перемещением;
- б) пластичностью;
- в) упругостью;
- г) деформацией.

3. Принцип, утверждающий, что результат действия системы сил равен сумме результатов действий каждой силы в отдельности, называется...

- а) принципом начальных размеров;
- б) принципом Сен-Вена;
- в) все утверждения верны.

4. Модели материала в расчётах на прочностную надёжность детали (элемента конструкции) принято считать...

- а) прочными и упругими;
- б) хрупкими и идеально упругими;
- в) сплошными, однородными, изотропными и линейно-упругими;
- г) пластичными и изотропными.

5. Проекция главного вектора  $R$  внутренних сил, действующих в рассматриваемом сечении на ось стержня, называется...

- а) нормальным напряжением;
- б) поперечной силой;
- в) напряжённым состоянием в точке;
- г) продольной силой.

6. Проекция главного вектора  $R$  внутренних сил на ось ( $x$  или  $y$ ), лежащую в плоскости сечения, называется...

- а) напряжённым состоянием;
- б) поперечной силой  $Q_x$  (или  $Q_y$ );
- в) продольной силой  $N$ ;
- г) касательным напряжением.

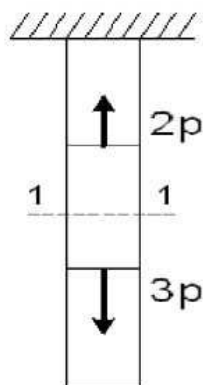
7. Деформации (линейные и угловые) считаются практически малыми, если они не превосходят...

- а) 0,12 (или 12%);
- б) 0,05 (или 5%);
- в) 0,2 (или 20%);
- г) 0,1 (или 10%).

8. Способность материала сопротивляться разрушающему воздействию внешних сил называется ...

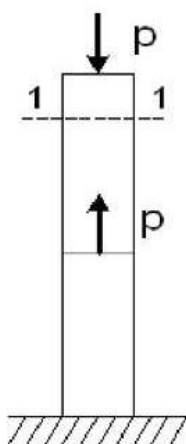
- а) вязкостью;
- б) твёрдостью;
- в) прочностью;
- г) упругостью.

9. Для стержня, схема которого изображена на рисунке, деформации, возникающие в сечении 1–1, будут...



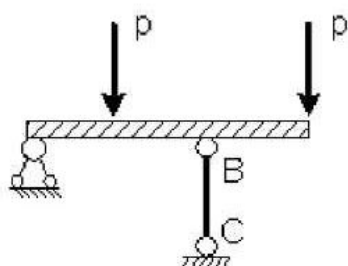
- а) равны нулю;
- б) растягивающими и сжимающими;
- в) сжимающими;
- г) растягивающими.

10. Для стержня, схема которого изображена на рисунке, нормальное усилие в сечении 1–1 будет...



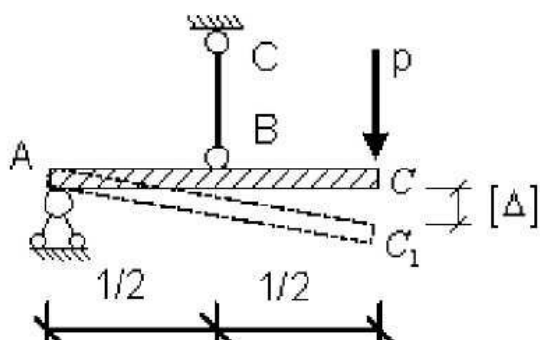
- а) сжимающим;
- б) растягивающим;
- в) равно 0;
- г) растягивающим и сжимающим.

11. Если стержень *BC* одинаково работает на растяжение и сжатие, то проверку прочности проводят по условию...



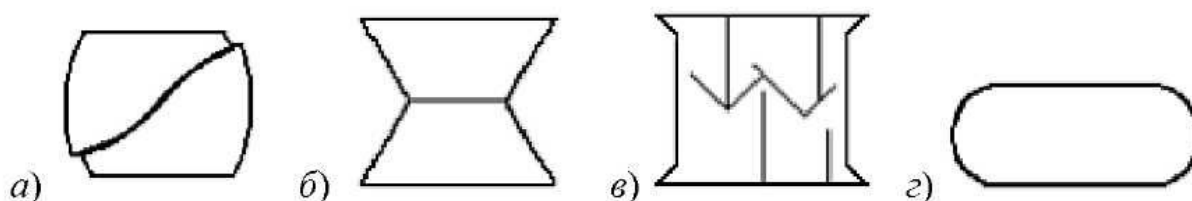
- а)  $\sigma \leq \sigma_{\text{пц}}$ ;
- б)  $\sigma = \sigma_T$ ;
- в)  $\sigma > [\sigma]$ ;
- г)  $\sigma \leq [\sigma]$ .

12. Если стержень  $BC$  одинаково работает на растяжение и сжатие, то проверку на жёсткость проводят по условию...



- а)  $\Delta l_{BC} \leq 2[\Delta]$ ;
- б)  $\Delta l_{BC} \leq \frac{[\Delta]}{2}$ ;
- в)  $\Delta l_{BC} \leq \frac{[\Delta]}{4}$ ;
- г)  $\Delta l_{BC} > \frac{[\Delta]}{2}$ .

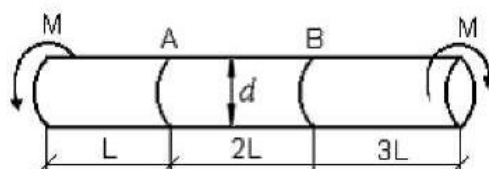
13. Формула растяжения деревянного образца при испытаниях на сжатие вдоль волокон имеет вид...



14. Крутящим моментом называется...

- а) равнодействующий момент касательных и нормальных напряжений;
- б) равнодействующий момент нормальных напряжений;
- в) равнодействующий момент касательных напряжений;
- г) равнодействующий момент продольных сил относительно оси стержня.

15. Известен взаимный угол поворота сечений  $A$  и  $B$ . Модуль сдвига материала образца можно определить из формулы...

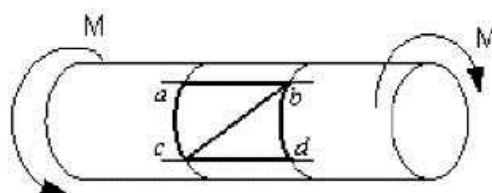


- а)  $\varphi_{A-B} = \frac{7ML}{GI_p}$ ;
- б)  $\varphi_{A-B} = \frac{5ML}{GI_p}$ ;
- в)  $\varphi_{A-B} = \frac{4ML}{GI_p}$ ;
- г)  $\varphi_{A-B} = \frac{2ML}{GI_p}$ .

16. Условие жёсткости стержня при кручении имеет вид...

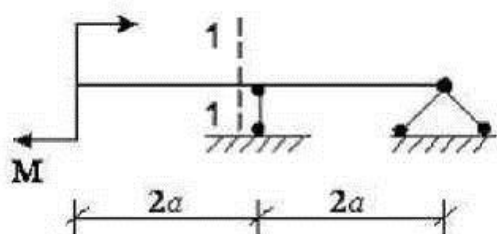
- а)  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ ;
- б)  $\tau_{\max} \leq \sigma_{\max}$ ;
- в)  $\Theta_{\max} \leq [\Theta]$ ;
- г)  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ .

17. В процессе скручивания стержня диагональ ( $cb$ )...



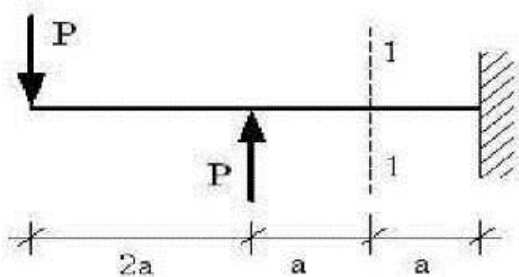
- а) искривляется;
- б) размер и форма диагонали не изменяются;
- в) укорачивается;
- г) удлиняется.

18. В сечении 1–1 имеют место внутренние силовые факторы ...



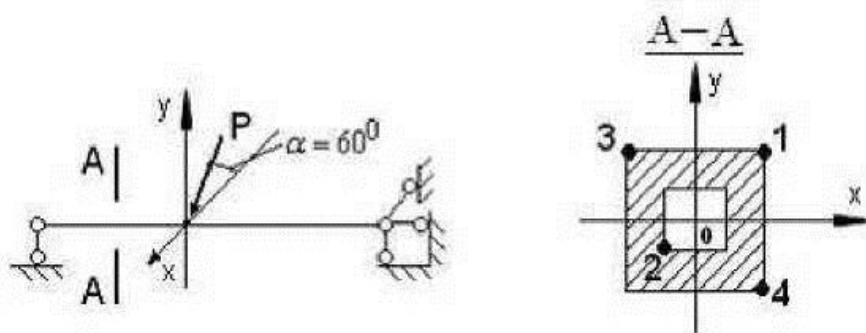
- а)  $M \neq 0, Q \neq 0$ ;
- б)  $M \neq 0, Q = 0$ ;
- в)  $M = 0, Q \neq 0$ ;
- г)  $M = 0, Q = 0$ .

19. В сечении 1–1 имеют место внутренние силовые факторы ...



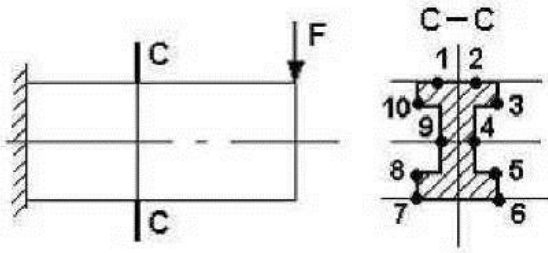
- а)  $M \neq 0, Q \neq 0$ ;
- б)  $M \neq 0, Q = 0$ ;
- в)  $M = 0, Q \neq 0$ ;
- г)  $M = 0, Q = 0$ .

20. В сечении А–А наиболее опасными являются точки ...



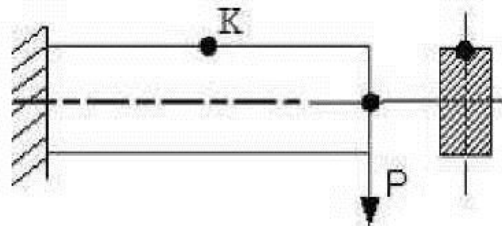
- а) 3 и 4;
- б) 1 и 3;

21. Максимальные нормальные напряжения действуют в точках ...



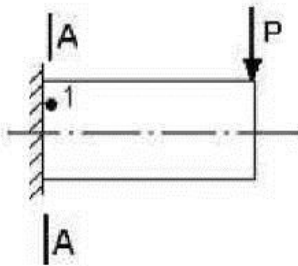
- а) 8, 5;
- б) 9, 4;
- в) 1, 2, 7, 6;
- г) 10, 3, 8, 5.

22. Тип (вид) напряжённого состояния в окрестности точки К консольной балки – ...



- а) линейное (одноосное растяжение);
- б) плоское (двухосное растяжение – сжатие);
- в) линейное (одноосное сжатие);
- г) плоское (чистый сдвиг).

23. В точке 1 поперечного сечения А–А балки ...



- а) действуют касательные напряжения  $\tau$  ;
- б) действуют нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения;
- в) действуют нормальные напряжения  $\sigma$  ;
- г) нет напряжений.

24. Статический момент сечения относительно оси x выражается соотношением...

а)  $S_x = \int_F y dF$  ; б)  $S_y = \int_F x dF$  ; в)  $I_x = \int_F y^2 dF$  ; г)  $I_y = \int_F x^2 dF$  .

25. Осевой момент инерции сечения относительно оси y выражается соотношением...

а)  $I_y = \int_F x^2 dF$  ; б)  $I_\rho = \int_F \rho^2 dF$  ; в)  $I_{yx} = \int_F yx dF$  ; г)  $I_x = \int_F y^2 dF$  .

26. Полярный момент инерции сечения относительно некоторой точки выражается соотношением...

а)  $I_\rho = \int_F \rho^2 dF$  ; б)  $I_y = \int_F x^2 dF$  ; в)  $I_x = \int_F y^2 dF$  ; г)  $S_x = \int_F y dF$  .

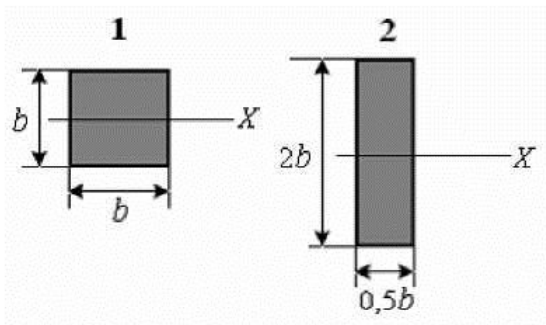
27. Центробежный момент инерции сечения относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей выражается соотношением...

а)  $I_{yx} = \int_F yx \, dF$ ; б)  $S_y = \int_F x dF$ ; в)  $I_x = \int_F y^2 dF$ ; г)  $S_x = \int_F y dF$ .

28. Осевые моменты инерции прямоугольника относительно осей  $y$  и  $x$ , проходящие через центр тяжести параллельно сторонам прямоугольника выражаются соотношением...

а)  $I_x = \frac{bh^3}{12}$ ; б)  $I_y = \frac{hb^3}{12}$ ; в)  $I_x = \frac{bh^3}{3}$ ; г)  $I_x = \frac{hb^3}{3}$ .

29. Размеры прямоугольника изменились согласно рисунку. Тогда момент инерции относительно оси  $X$ ...



- а) увеличился в 4 раза;
- б) не изменился;
- в) увеличился в 2 раза;
- г) уменьшился в 2 раза.

30. Под *напряжённым состоянием* в какой-либо точке деформируемого тела следует понимать...

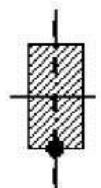
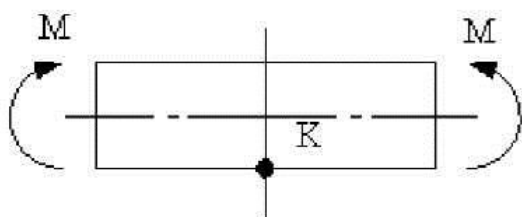
- а) совокупность нормальных и касательных напряжений в любом сечении стержня;
- б) совокупность нормальных и касательных напряжений на любых трёх элементарных плоскостях, проходящих через эту точку;
- в) совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по множеству элементарных площадок, проходящих через точку;
- г) совокупность нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении стержня.

31. Тензор напряжений – это...

- а) совокупность нормальных и касательных напряжений на любых трёх элементарных плоскостях в окрестности рассматриваемой точки;
- б) совокупность нормальных и касательных напряжений в любом сечении стержня;
- в) совокупность нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении стержня;
- г) совокупность нормальных и касательных компонентов напряжений на трёх взаимно перпендикулярных элементарных плоскостях, проходящих через точку тела.

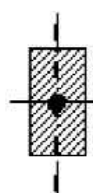
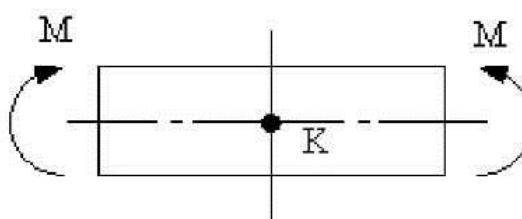


32. Тип (вид) напряжённого состояния в окрестности точки  $K$  – ...



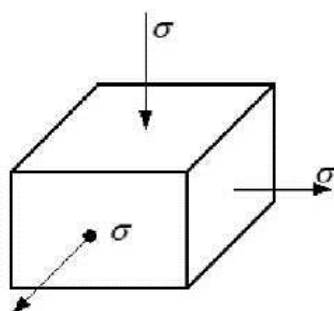
- а) плоское (чистый сдвиг);
- б) плоское (двухосное растяжение);
- в) линейное (сжатие);
- г) линейное (растяжение).

33. Вид (тип) напряжённого состояния в окрестности точки  $K$  – ...



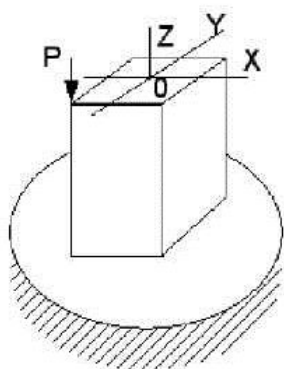
- а) нулевое (напряжения отсутствуют);
- б) линейное (растяжение);
- в) линейное (сжатие);
- г) плоское (чистый сдвиг).

34. При сложном напряжённом состоянии эквивалентное напряжение по теории прочности Мора ( $\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 = k\sigma_3$ , материал серый чугун,  $k = 0,2$ ) равно...



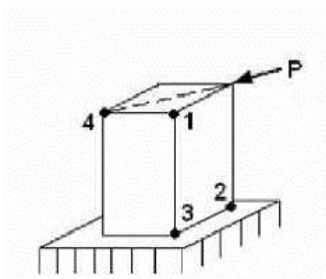
- а)  $1,2\sigma$  ;
- б)  $2,2\sigma$  ;
- в)  $1,8\sigma$  ;
- г)  $1,66\sigma$  .

35. Для нагруженного стержня вид сложного сопротивления называется...



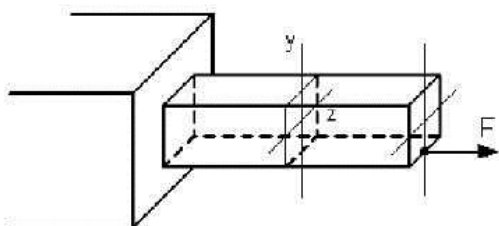
- а) косым изгибом;
- б) внецентренным сжатием;
- в) изгибом с кручением;
- г) общим случаем сложного сопротивления.

36. На схеме, изображённой на рисунке, наиболее опасной точкой является...



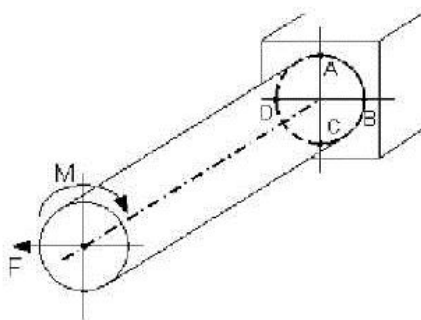
- а) точка 2;
- б) точка 4;
- в) точка 3;
- г) точка 1.

37. В поперечном сечении стержня, изображённого на рисунке, действуют внутренние силовые факторы...



- а)  $N$  и  $M_z$ ;
- б)  $N$  и  $M_y$ ;
- в)  $M_z$  и  $Q_y$ ;
- г)  $M_z$  и  $M_{кр}$ .

38. Опасными точками являются точки...



- а)  $B$  и  $D$ ;
- б)  $D$  и  $C$ ;
- в)  $A$  и  $C$ ;
- г)  $A$  и  $B$ .

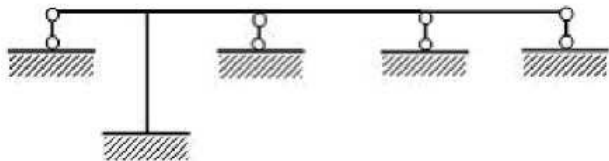
39. При расчёте методом сил составляются...

- а) канонические уравнения;
- б) трансцендентные уравнения;
- в) дифференциальные уравнения;
- г) канонические и дифференциальные уравнения.

40. Коэффициент  $\delta_{11}$  в каноническом уравнении  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$  определяет...

- а) суммарное перемещение от действия силы  $X_1$  и внешней нагрузки;
- б) обобщённое единичное перемещение в направлении действия силы  $X_1$  от силы  $\overline{X_1} = 1$ ;
- в) реакцию от действия силы  $X_1$ ;
- г) грузовое перемещение.

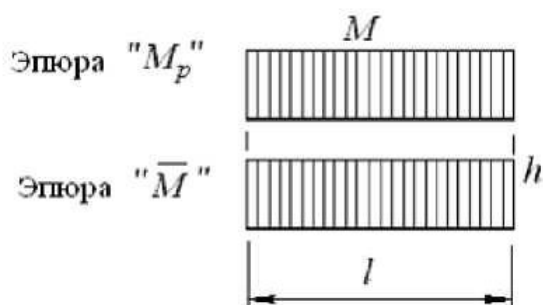
41. Степень статической неопределимости системы, изображённой на рисунке, равна...



- а) 4;
- б) 5;
- в) 1;
- г) 2.

42. При нагружении стержня получены эпюры изгибающих моментов от внешних сил  $M_p$  и от единичной силы  $\bar{M}$ , приведённые на рисунке. Результат вычисления интеграла  $\int_l M_p \bar{M} dz$  по способу Верещагина

имеет вид...



- а)  $Mlh$ ;
- б)  $Ml \frac{2}{3} h$ ;
- в)  $\frac{1}{2} Ml \frac{h}{2} h$ ;
- г)  $Ml \frac{h}{2}$ .

43. Критическая сила сжатого стержня определяется по формуле...

- а) Журавского;
- б) Верещагина;
- в) Эйлера;
- г) Гука.

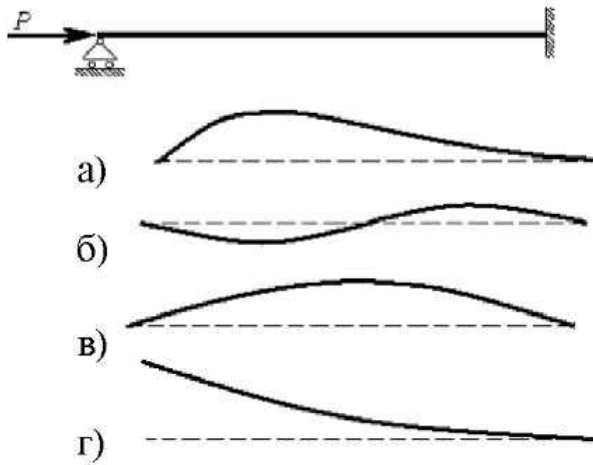
44. В формуле Эйлера для критической силы сжатого стержня

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

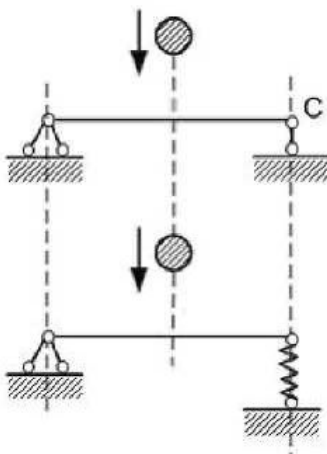
произведение  $EI_{\min}$  есть...

- а) жёсткость сечения при изгибе относительно оси с наибольшим моментом инерции;
- б) жёсткость сечения при сжатии;
- в) жёсткость сечения при изгибе относительно оси с наименьшим моментом инерции;
- г) жёсткость стержня при сжатии.

45. При сжатии упругого стержня, показанного на рисунке, силой  $P \geq P_{кр}$  форма потери устойчивости стержня имеет вид ...



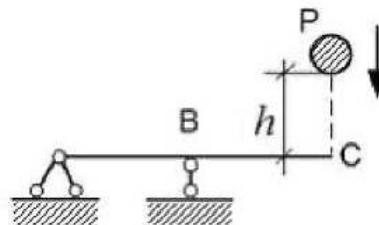
46. На балку падает груз. Если абсолютно жёсткую опору  $C$  заменить пружиной, то динамические напряжения в балке...



- а) увеличатся в 2 раза;
- б) увеличатся;
- в) останутся неизменными;
- г) уменьшатся.

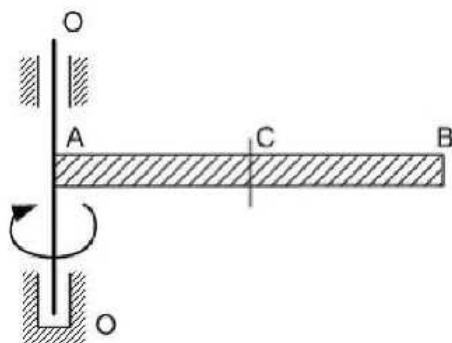
47. На балку падает груз весом  $P$ . Динамический коэффициент определяется по формуле  $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}$ . Физическим смыслом величины

$\Delta_{ст}$  является...



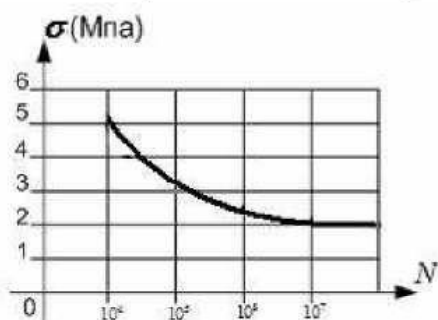
- а) статический угол поворота сечения  $C$ , вызванный силой  $P$ ;
- б) статический угол поворота сечения  $B$ , вызванный силой  $P$ ;
- в) статический прогиб сечения  $C$ , вызванный силой  $P$ ;
- г) статический прогиб сечения  $C$ , вызванный максимальной силой взаимодействия между грузом и балкой.

48. Стержень  $AB$  постоянного поперечного сечения вращается вокруг оси  $O-O$ . Максимальное нормальное напряжение от сил инерции действует в сечении...



- а)  $B$ ;
- б)  $C$ ;
- в) все сечения равноопасны;
- г)  $A$ .

49. На рисунке показана кривая усталости стальных образцов предел выносливости приблизительно равен ...



- а) 2 МПа;
- б) 4 МПа;
- в) 5 МПа;
- г) 3 МПа.

50. С увеличением размеров деталей величина предела выносливости...

- а) уменьшается;
- б) не изменяется;
- в) увеличивается;
- г) изменяется незначительно.

51. При расчёте на усталостную прочность определяют предел ...

- а) выносливости;
- б) прочности;
- в) упругости;
- г) текучести.

52. Нагрузка, изменяющаяся по определённому закону, это ...

- а) циклическая нагрузка;
- б) симметричная нагрузка;
- в) распределённая нагрузка;
- г) сосредоточенная нагрузка.

53. Явление разрушения материала детали под действием периодически меняющихся (циклических) напряжений – ...

- а) усталость материала;
- б) отпуск материала;
- в) выносливость материала;
- г) сопротивление материала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
2. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1989. – 623 с.
3. Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М. : Высшая школа, 1983. – 303 с.
4. Агамиров, Л.В. Сопротивление материалов. Краткий курс. Для студентов вузов / Л.В. Агамиров. – М. : АСТ, 2003. – 256 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ .....	4
1.1. Косой изгиб .....	4
1.2. Внецентренное растяжение и сжатие брусьев .....	8
1.3. Ядро сечения .....	12
1.4. Расчёты на прочность при изгибе с кручением .....	13
1.5. Порядок построения эпюр для ломаного (пространственного) бруса ..	15
2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ .....	17
2.1. Энергия деформации при статическом действии нагрузок .....	17
2.2. Теорема о взаимности работ .....	22
2.3. Теорема о взаимности перемещений .....	23
2.4. Интеграл Мора .....	25
3. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ .....	29
3.1. Статическая неопределимость .....	29
3.2. Метод сил. Основная и эквивалентная системы .....	32
3.3. Капониические уравнения метода сил .....	32
3.4. Использование симметрии .....	34
3.5. Определение перемещений в статически неопределимых системах ...	37
4. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ .....	38
4.1. Определение критической силы. Формула Эйлера .....	39
4.2. Пределы применимости формулы Эйлера .....	42
4.3. Устойчивость сжатых стержней за пределами упругости. Полная диаграмма критических напряжений .....	43
4.4. Расчёт на устойчивость с помощью коэффициента снижения основного допускаемого напряжения .....	45
5. РАСЧЁТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ, ДВИЖУЩИХСЯ С УСКОРЕНИЕМ .....	47
5.1. Внутренние силы, вызванные движением. Силы инерции .....	47
5.2. Динамические задачи, приводимые к задачам статического расчёта систем .....	47
5.3. Расчёт на прочность при ударе .....	49
5.4. Вертикальный удар .....	51
5.5. Вертикальный удар вследствие внезапной остановки движения .....	53
5.6. Горизонтальный удар .....	54
5.7. Скручивающий удар .....	54
6. УСТАЛОСТЬ .....	57
6.1. Расчёт вала на усталостную прочность .....	57
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	65
ГЛОССАРИЙ .....	66
ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ УСВОЕННЫХ ЗНАНИЙ .....	68
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	79