

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**РАСЧЕТ БАЛОК ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ**  
**МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**  
Методические указания для расчетно-графической работы  
для студентов строительных специальностей

## Общие указания к выполнению расчетно-графических работ.

1. Расчетно-графическую работу выполняют на стандартных листах А4 (297 × 210 мм ), сшитых слева. Все записи должны производиться только на одной стороне страницы.
2. Оформление титульных листов стандартное:
  - название вуза и кафедры;
  - тема работы;
  - фамилия и инициалы студента, академ. группа;
  - фамилия и инициалы преподавателя, который руководит работой;
  - учебный год.
3. На первом листе пишут условие задачи, числовые данные, рисуют заданную схему.
4. Расчеты проводятся на программном комплексе FEMAP-NASTRAN и сопровождаются четкими пояснениями.

## **Расчет на прочность и жесткость балки при прямом изгибе.**

**Цель работы.** Выработка у студентов навыков конечно-элементного моделирования балок в условиях прямого изгиба для анализа их напряженно-деформированного состояния.

**Задачи.** Провести расчет на прочность и жесткость балки прямоугольного поперечного сечения закрепленной и нагруженной, как показано на рис. 1.

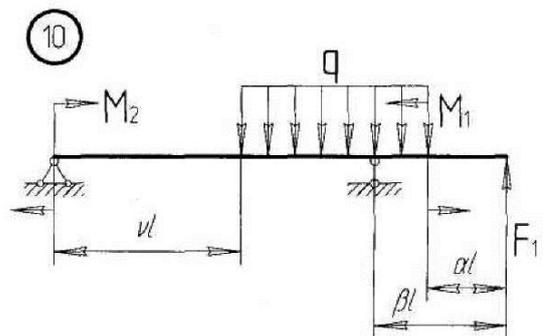
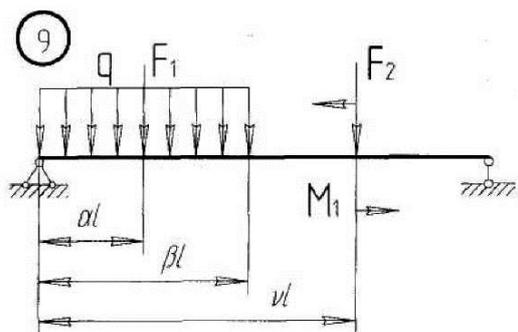
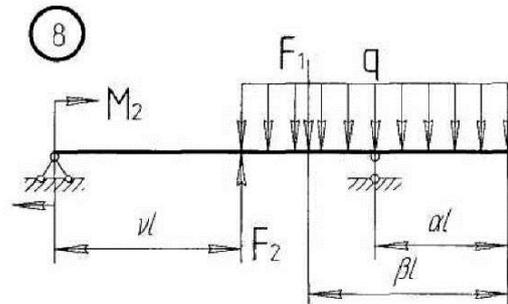
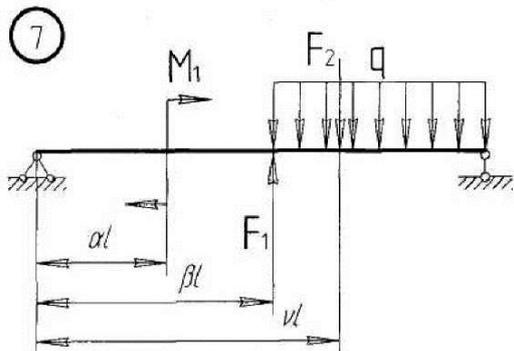
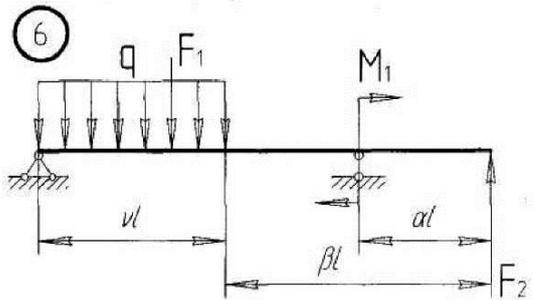
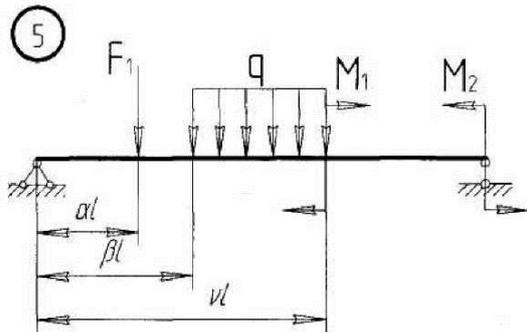
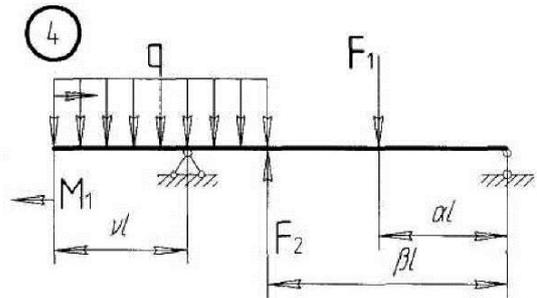
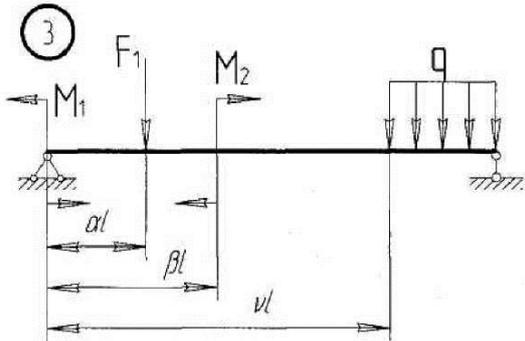
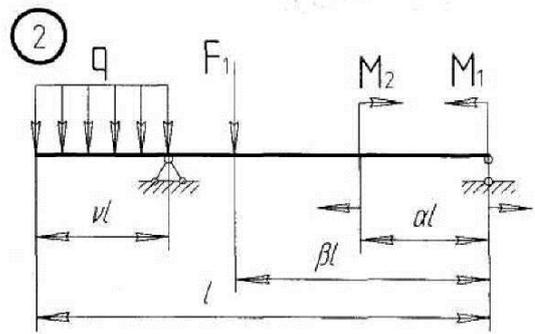
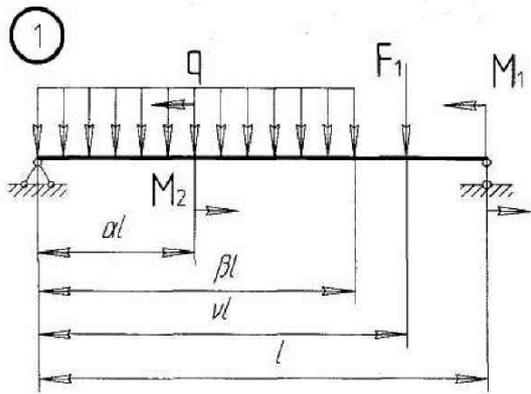
### **Последовательность расчета:**

1. Нарисовать схему в масштабе с указанием размеров и величины нагрузки.
2. Рассчитать заданную балку на прочность и жесткость аналитическими методами.
3. Построить геометрическую модель балки с помощью препроцессора FEMAP.
4. Ввести механические характеристики упругого изотропного материала балки и задать property линейного конечного элемента балки прямоугольного поперечного сечения.
5. Осуществить разбижку балки на конечные элементы.
6. Задать закрепления балки по узлам конечных элементов и нагрузки согласно расчетной схеме.
7. Провести статический расчет балки на прочность и жесткость с помощью программы NASTRAN NX.
8. С помощью постпроцессора FEMAP получить и распечатать цветную схему распределения поперечных сил, изгибающих моментов, эквивалентных напряжений по IV теории Губера - Мизеса, а также цветовую схему прогибов балки.
9. Сравнить результаты получены методом конечных элементов и аналитическим методом.

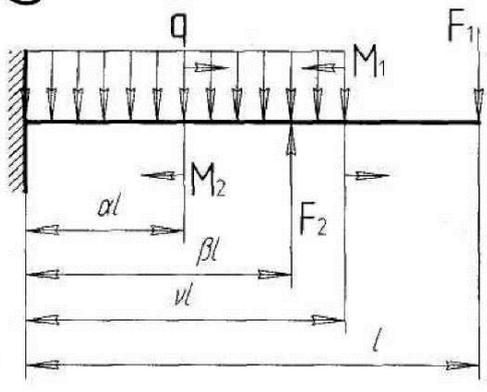
Числовые данные взять из таблицы 1.

Таблица. 1. Числовые значения геометрических параметров и нагрузок балки

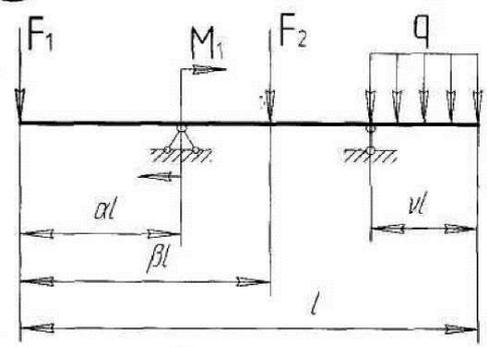
№ варианта	$F_1, kH$	$F_2, kH$	$M_1, kH \cdot$	$M_2, kH \cdot$	$q, kH/m$	$l_M$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	20	-15	60	-20	10	4,0	0,1	0,5	0,3
2	-30	60	40	15	-20	5,0	0,3	0,7	0,3
3	40	-25	-75	10	12	6,0	0,1	0,8	0,5
4	-20	50	-45	30	-24	4,5	0,2	0,8	0,4
5	10	45	30	-10	16	4,0	0,3	0,5	0,1
6	30	25	-50	35	10	5,5	0,2	0,6	0,4
7	-15	50	60	25	-20	5,0	0,3	0,2	0,1
8	20	-40	55	20	16	7,0	0,3	0,5	0,4
9	-25	60	20	50	22	6,5	0,2	0,6	0,4
10	10	25	-45	30	-16	4,5	0,4	0,2	0,2
11	-20	-30	20	45	10	5,0	0,3	0,7	0,1
12	30	15	-20	30	-12	6,5	0,6	0,2	0,8
13	60	-25	10	40	20	8,0	0,3	0,6	0,2
14	-40	30	25	20	-18	5,0	0,4	0,6	0,2
15	50	-35	40	-35	10	4,0	0,3	0,1	0,2
16	30	10	25	50	-8	4,5	0,6	0,2	0,8
17	-20	25	50	-10	12	7,0	0,2	0,5	0,3
18	40	-15	-30	35	20	5,0	0,3	0,7	0,3
19	-25	10	60	15	-16	5,5	0,4	0,6	0,2
20	-60	30	40	25	20	4,0	0,3	0,9	0,2
21	-15	20	80	15	-10	6,5	0,2	0,6	0,4
22	35	40	-25	30	16	5,0	0,1	0,5	0,3
23	-50	-15	30	25	14	6,0	0,3	0,7	0,2
24	25	20	40	35	-10	7,0	0,2	0,5	0,3
25	30	10	-40	25	14	8,0	0,3	0,1	0,2
26	-15	40	35	20	20	7,5	0,4	0,2	0,1
27	30	-25	40	10	-24	6,5	0,6	0,6	0,8
28	40	15	-20	35	10	5,5	0,3	0,2	0,2
29	-20	25	30	20	-12	4,5	0,2	0,8	0,4
30	50	10	25	-45	20	5,0	0,3	0,7	0,1



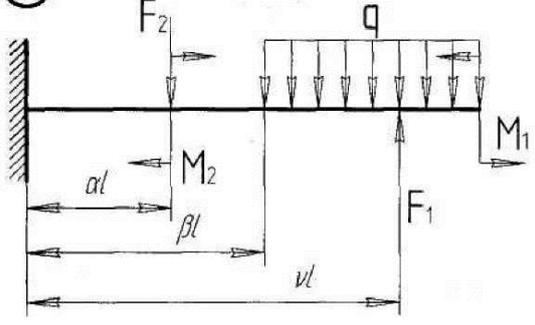
11



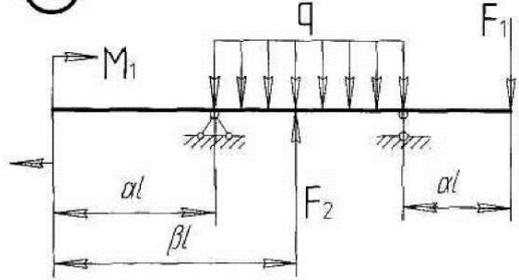
12



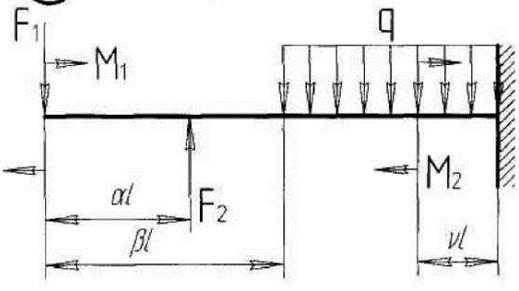
13



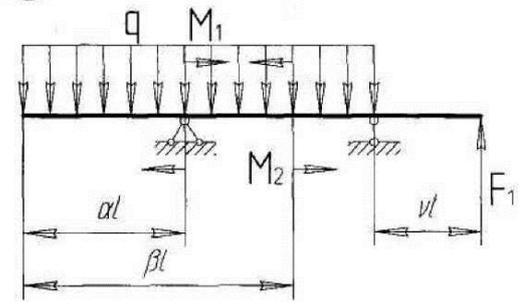
14



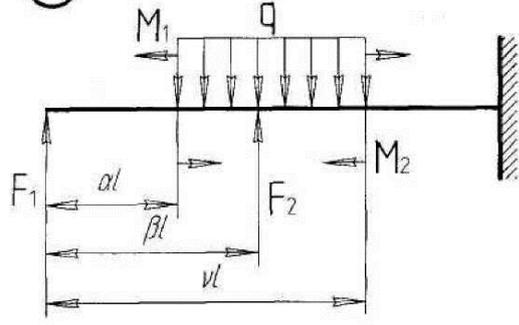
15



16



17



18

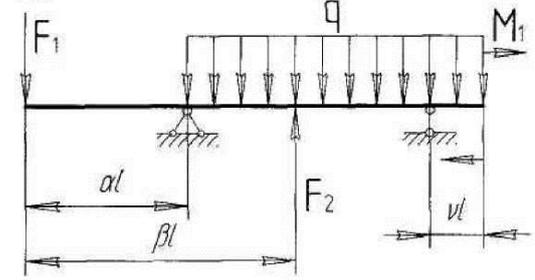


Рис. 1. Схемы балок.

## Основные теоретические сведения.

Стержень с прямой осью, работающий на изгиб, называется балкой. Изгиб балки вызывается сосредоточенными, распределенными нагрузками, а также внешними моментами, которые действуют в плоскости, проходящей через ось балки. Характерным признаком деформации изгиба балки является изменение кривизны ее оси. Плоскость, в которой действуют нагрузки, называется силовой плоскостью. Если искривленная ось балки лежит в силовой плоскости, то имеет место прямой изгиб балки. При прямом изгибе искривленная ось балки является плоской кривой, является геометрическим местом вертикальных перемещений точек оси балки. Эти перемещения называются прогибами балки. При прямом изгибе в поперечных сечениях балки возникают две внутренние силы: поперечная сила  $Q(x)$  и изгибающий момент  $M(x)$ . При поперечном изгибе балки в ее поперечных сечениях возникают нормальные и касательные напряжения.

Нормальное напряжение в произвольной точке сечения определяются по формуле

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_z},$$

где  $M(x)$  - изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки, значение которого берем с эпюры  $M(x)$ ;  $I_z$  - осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси  $z$ ;  $y$  - ордината точки сечения, в которой определяется напряжение.

В точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси, и в сечении с наибольшим по величине изгибающим моментом возникают наибольшие нормальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z},$$

де  $W_z$  - осевой момент сопротивления сечения относительно оси  $z$ .

Для прямоугольного сечения с шириной  $b$  и высотой  $h$ :  $W_z = \frac{bh^2}{6}$ ;  $I_z = \frac{bh^3}{12}$ .

Касательные напряжения в произвольной точке сечения (для нешироких балок) определяются по формуле Журавского

$$\tau_{xy} = \frac{Q(x)S_{\text{сидр}}}{bI_z},$$

где  $Q(x)$  – поперечная сила в сечении балки;  $b$  - ширина сечения в том месте, где находят напряжения;  $S_{z_{\text{отс}}}^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} \cdot y_c$  - статический момент отсеченной площади относительно оси  $z$ ;  $A_{\text{отс}}$  - отсеченная площадь (заштрихована на рисунке площадь, лежащая по одну сторону от точки, в которой определяют напряжения);  $y_c$  - координата центра отсеченной площади. Для прямоугольного поперечного сечения высотой  $h$  и шириной  $b$ :

$$A_{\text{отс}} = b \left( \frac{h}{2} - y \right); \quad y_c = \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right); \quad S_z^{\text{отс}} = \frac{1}{2} b \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Наибольшее напряжение  $\tau_{\text{max}} = \tau_{yx} |_{y=0} = \frac{3Q(x)}{2bh}$ .

По четвертой теории прочности условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

### Краткая характеристика программного обеспечения.

Национальный университет «Львовская политехника» благодарен компании Siemens PLM Software за любезно предоставленный программный комплекс FEMAP- NASTRAN.

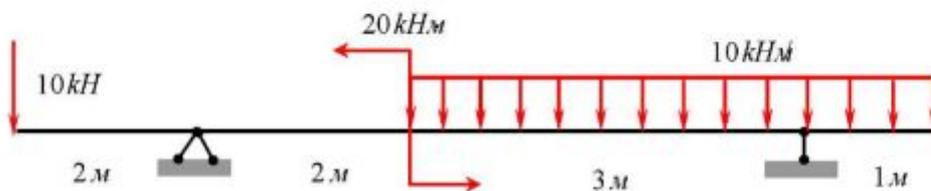
Компания Siemens обладает богатым опытом в области разработки систем конечно-элементного анализа (МСЕ), поставляет на рынок целый ряд взаимосвязанных систем, позволяющих решать широкий спектр инженерных задач практически во всех отраслях промышленности, науки, образования.

**FEMAP** – доступна простая в использовании программа для подготовки конечно-элементных моделей конструкций и соответствующих краевых задач для дальнейшего их расчета (Finite Element Modeling, препроцесор), а также для просмотра и документирования результатов расчетов (Postprocessing, постпроцесор), которая известна во всем мире как лучший CAD - независимый продукт для практически любого типа инженерного анализа.

FEMAP интегрирован с **NASTRAN** (NAsa STRuctural ANalysis) – самой многофункциональной и известной промышленной CAE - системой. Система работает в привычной среде Windows и обеспечивает удобство работы для специалистов различной квалификации. FEMAP - "обычное" приложение Windows, поэтому при ра-

боте с ним доступны все возможности этой операционной системы. В наиболее наукоемких отраслях - аэрокосмической отрасли и автомобилестроении - система NASTRAN является стандартом, и применяются в качестве эталона при сертификации. С помощью NASTRAN можно моделировать такие задачи, как расчет реакции ракеты на импульс тяги, анализ устойчивости навигационной системы к вибрации или способности монтажной платы выдерживать высокие температуры, моделировать взрывы или оптимизировать конструкцию и т. д.

### Пример решения задачи.



Определение опорных реакций:

$$\sum M_A = 0: -R_B \cdot 5 + 10 \cdot 4 \cdot 4 - 20 - 10 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_B = 24 \text{ kH};$$

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 5 + 10 \cdot 1 \cdot 0,5 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 - 20 - 10 \cdot 7 = 0 \Rightarrow R_A = 26 \text{ kH}.$$

Проверка правильности определения опорных реакций:  $\sum F_y = 0: R_A + R_B - 10 - 10 \cdot 4 = 0$ .

Построение эпюр:

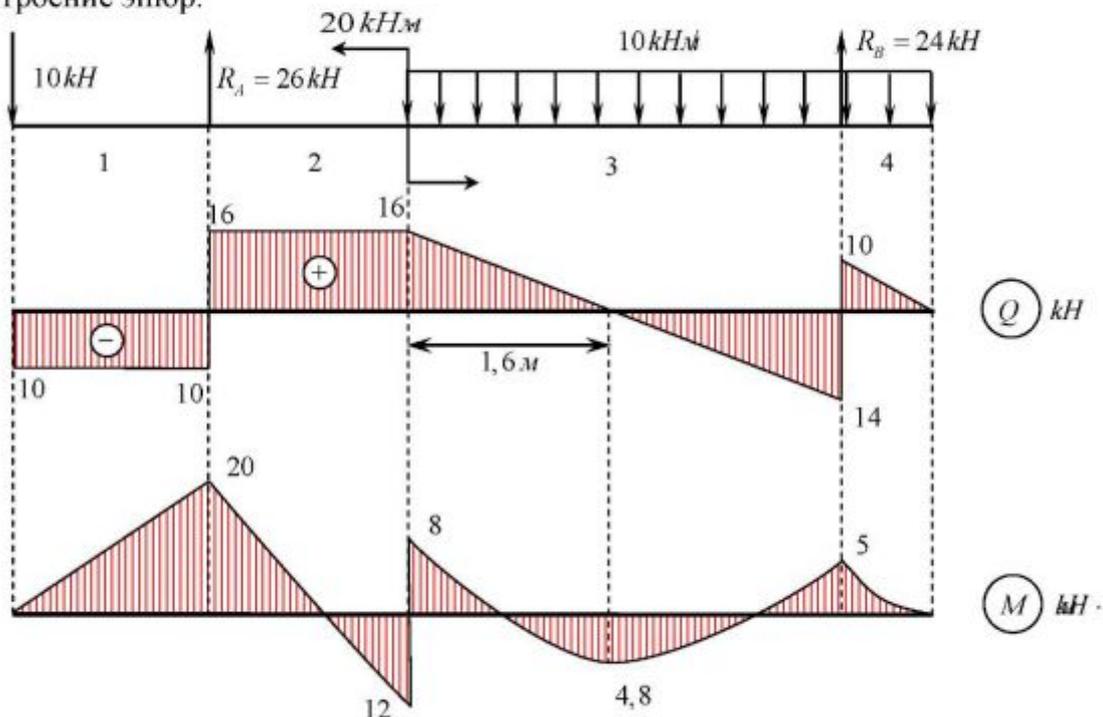


Рис. 2. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для заданной балки.

**Определения поперечных сил:**

$$Q_1(x) = -10 \text{ кН};$$

$$Q_2(x) = 26 - 10 = 16 \text{ кН};$$

$$Q_3(x) = 26 - 10 - 10 \cdot x = 16 - 10 \cdot x; \quad Q_3(0) = 16 \text{ кН}; \quad Q_3(3) = -14 \text{ кН};$$

$$Q_4(x) = -10 + 26 - 10 \cdot 3 + 24 - 10 \cdot x = 10 - 10 \cdot x; \quad Q_4(0) = 10 \text{ кН}; \quad Q_4(1) = 0 \text{ кН}.$$

**Определение изгибающих моментов:**

$$M_1(x) = -10 \cdot x; \quad M_1(0) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_1(2) = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_2(x) = -10 \cdot (2 + x) + 26 \cdot x; \quad M_2(0) = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2(2) = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_3(x) = -10 \cdot (4 + x) + 26 \cdot (2 + x) - 20 - 10 \cdot \frac{x^2}{2}; \quad M_3(0) = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3(3) = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_4(x) = -10 \cdot (7 + x) + 26 \cdot (5 + x) - 20 - 10 \cdot \frac{(3 + x)^2}{2} + 24 \cdot x; \quad M_4(0) = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4(3) = 0.$$

Определим максимальное значение изгибающего момента на третьем участке:

$$Q_3(x_0) = 0 \Rightarrow 16 - 10 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1,6; \quad M_3(1,6) = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

**Подбор прямоугольного сечения** при соотношении сторон  $h/b = 2$ .

$$M_{\max} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad Q_{\max} = 16 \text{ кН}.$$

По нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \Rightarrow W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^3 \geq \frac{6 \cdot M_{\max} \text{ см}}{4 \cdot [\sigma]} = \frac{6 \cdot 2000 \text{ кН} \cdot \text{м}}{4 \cdot 16 \text{ кН/см}^2} = 187,5 \text{ см}^3 \Rightarrow b \geq 5,724.$$

Выбираем сечение с размерами  $b = 6$ ;  $h = 12$ .

**Проверка по нормальным напряжениям:**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot 6}{b \cdot h^2} = \frac{2000 \cdot 6}{6 \cdot 12^2} = 13,89 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 13,89 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

**Проверка по касательным напряжениям:**

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q_{\max}}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{3 \cdot 16}{2 \cdot 6 \cdot 12} = 0,333 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 3,33 \text{ МПа} \leq \frac{1}{2} [\sigma] = 80 \text{ МПа}.$$

**Универсальное уравнение изогнутой оси балки** в данном случае имеет вид:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{EI_z} \left[ -10 \cdot \frac{(x)^3}{3!} + 26 \cdot \frac{(x-2)^3}{3!} - 20 \cdot \frac{(x-4)^2}{2!} - 10 \cdot \frac{(x-4)^4}{4!} + 24 \cdot \frac{(x-7)^3}{3!} \right]$$

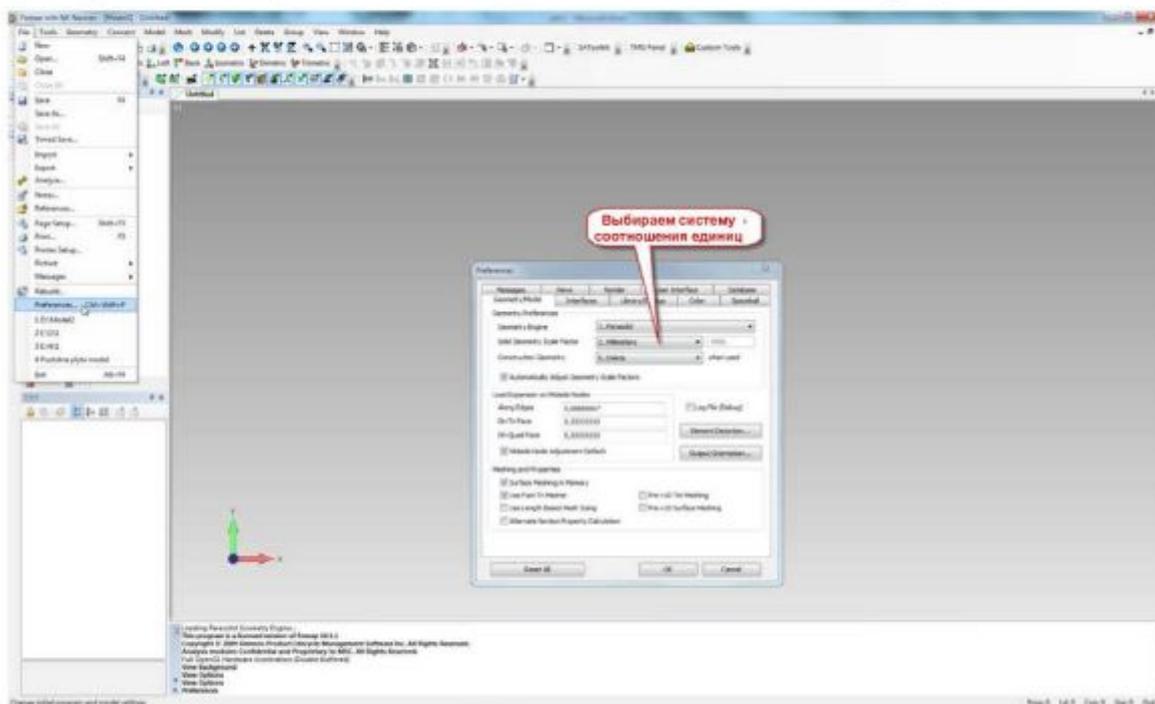
Для определения неизвестных констант используем условия:  $y(2) = 0$ ;  $y(7) = 0$ .

$y'(0) = 0,01625$ ;  $y(0) = -2,479$ . Подставляя эти значения в универсальное уравнение прогибов, вычисляем прогибы балки в характерных точках.

$y(0) = -2,479$  ;  $y(2) = 0$  ;  $y(4) = -0,145$  ;  $y(4,4) = -0,262$  ;  $y(7) = 0$  ;  $y(8) = -0,262$ .

### Решения задачи методом конечных элементов с помощью программ FEMAP 10.2 та NASTRAN NX 7.0

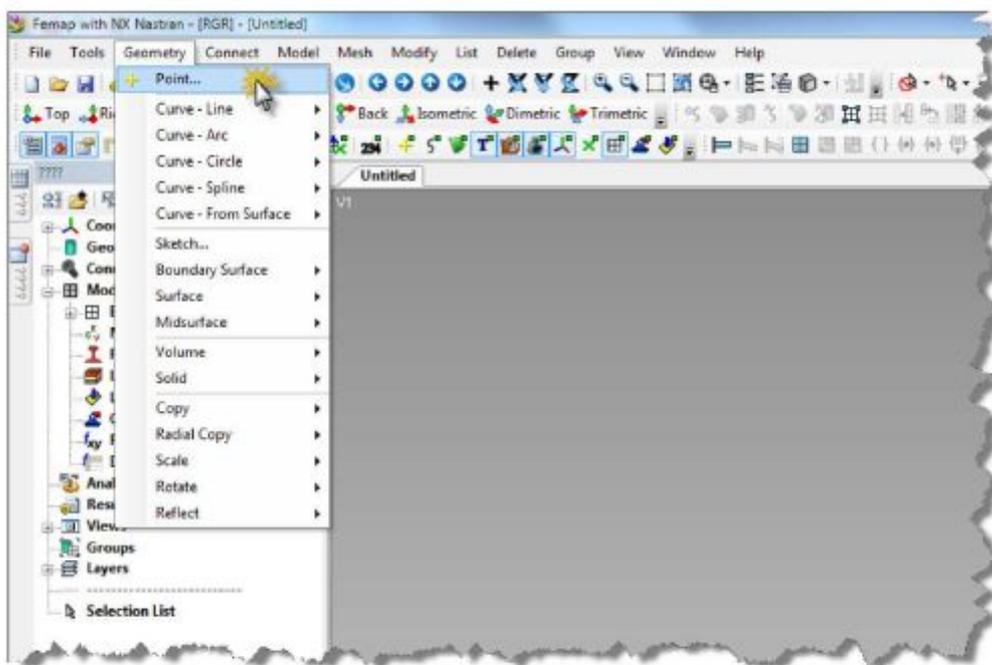
В программе FEMAP нет привязки к конкретным размерностям физических величин. При построении геометрической модели можно выбрать только несколько систем соотношений размерностей: «Дюйм - фунт» (используются программой по умолчанию) «метр - килограмм», «миллиметр - грамм». Перед началом работы выберем третью систему соотношения единиц, так как показано на рисунке.



## Принятые размерности физических и геометрических величин в программе FEMAP.

- ✓ длина  $l$  балки, конечного элемента, прогиб  $f$  – [мм]
- ✓ угол поворота  $\theta$  сечения балки – [рад]
- ✓ осевой момент инерции  $J$  сечения балки – [мм<sup>4</sup>]
- ✓ осевой момент сопротивления  $W$  сечения балки – [мм<sup>3</sup>]
- ✓ модуль Юнга  $E$  материала, напряжение – [МПа]
- ✓ распределенная нагрузка  $q$  – [Н/мм]
- ✓ сила  $P$ , реакция опоры  $R_y$  – [Н]
- ✓ изгибающий момент  $M$  – [Н·мм]

### 1. Построение геометрической модели.



Вводим последовательно координаты краев участков балки в миллиметрах.

Locate - Enter Coordinates or Select with Cursor

X 0 Y 0 Z 0

ID 1 CSys 0..Basic Rectangular Parameters... Methods ^

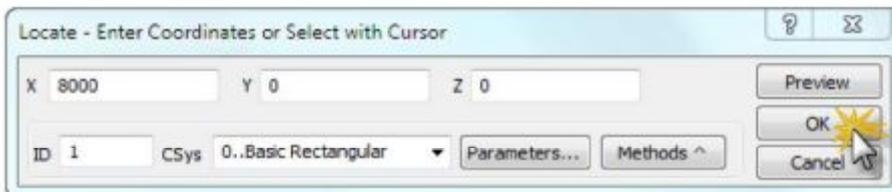
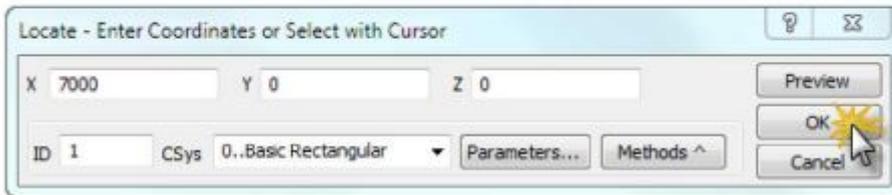
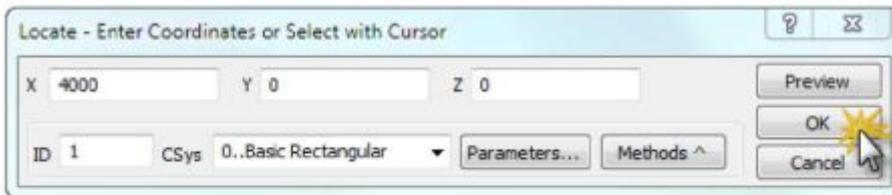
Preview OK Cancel

Locate - Enter Coordinates or Select with Cursor

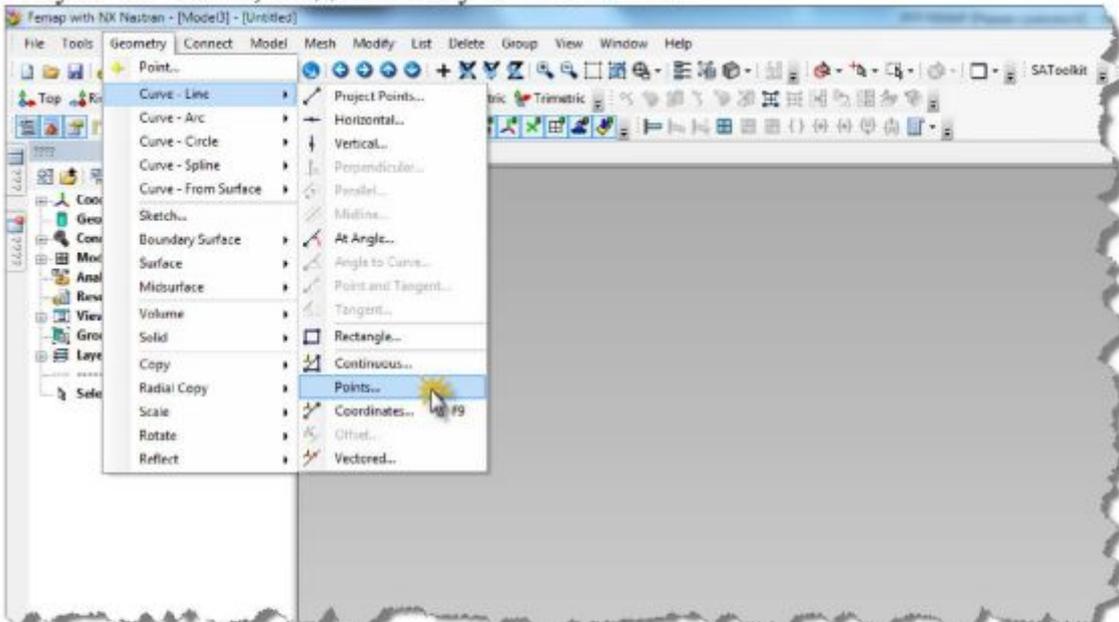
X 2000 Y 0 Z 0

ID 1 CSys 0..Basic Rectangular Parameters... Methods ^

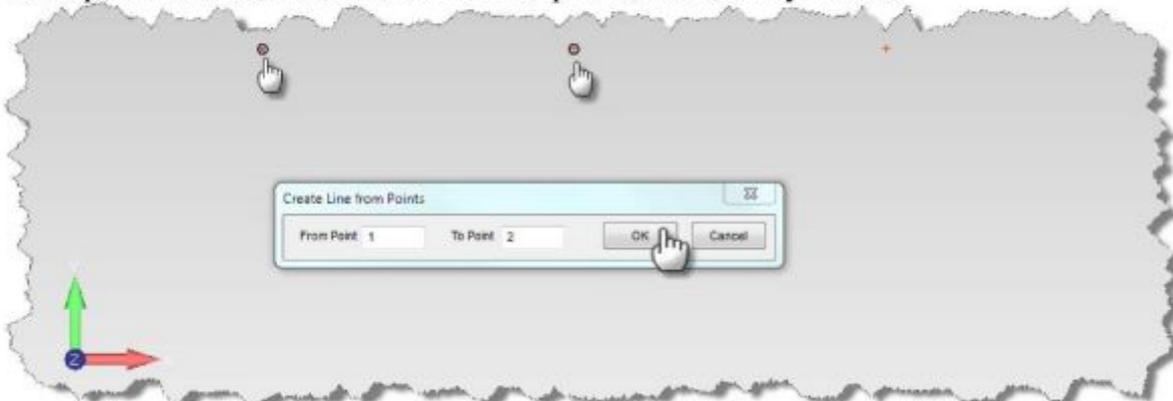
Preview OK Cancel



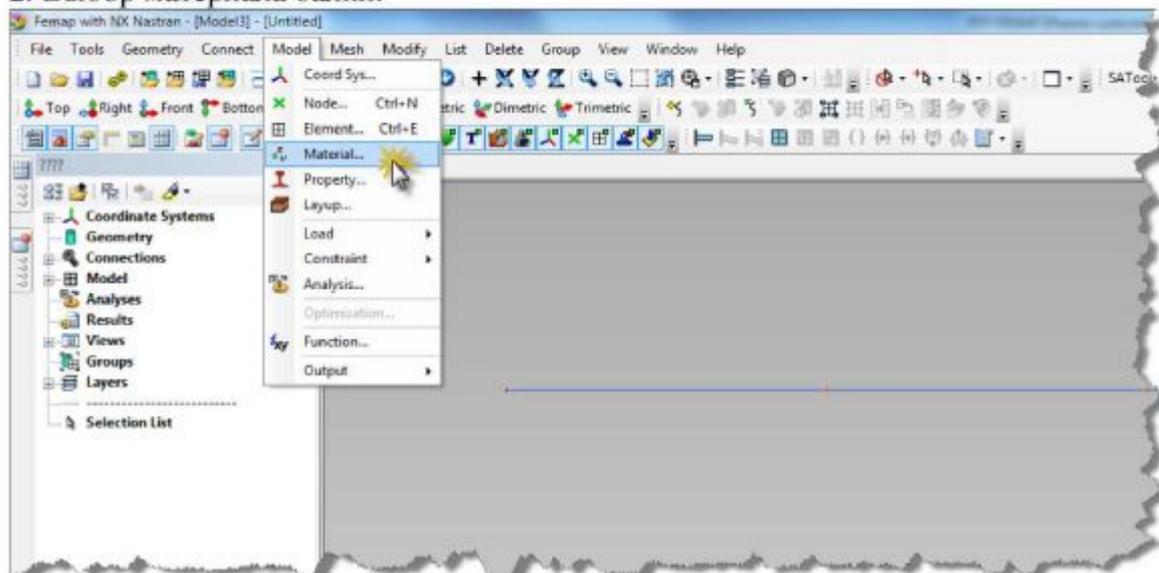
Рисуем ось балки, соединяя полученные точки.



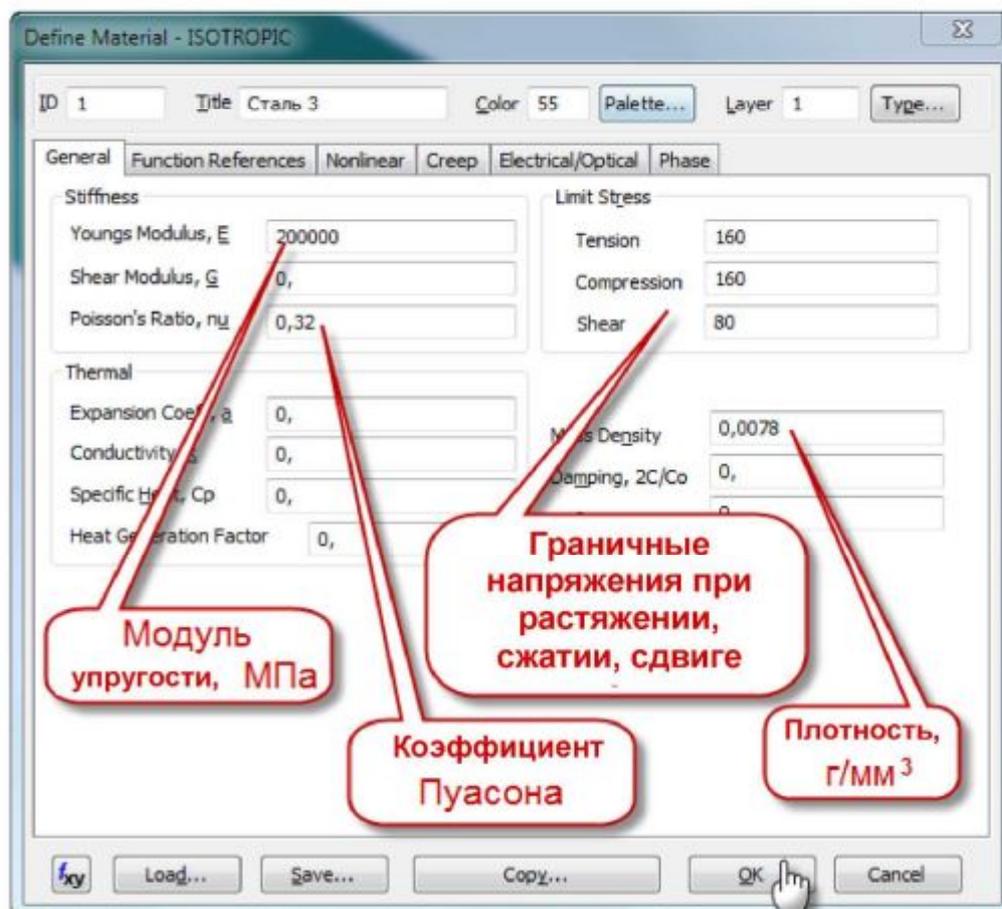
Выбираем последовательно точки на границе каждого участка.



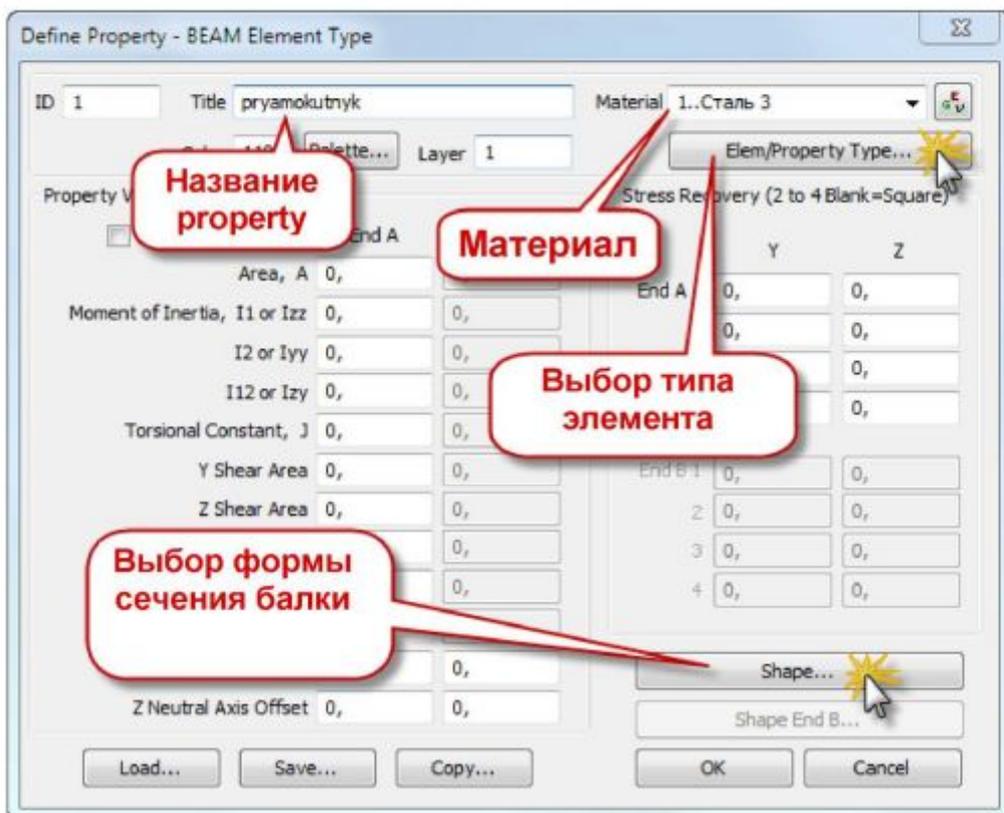
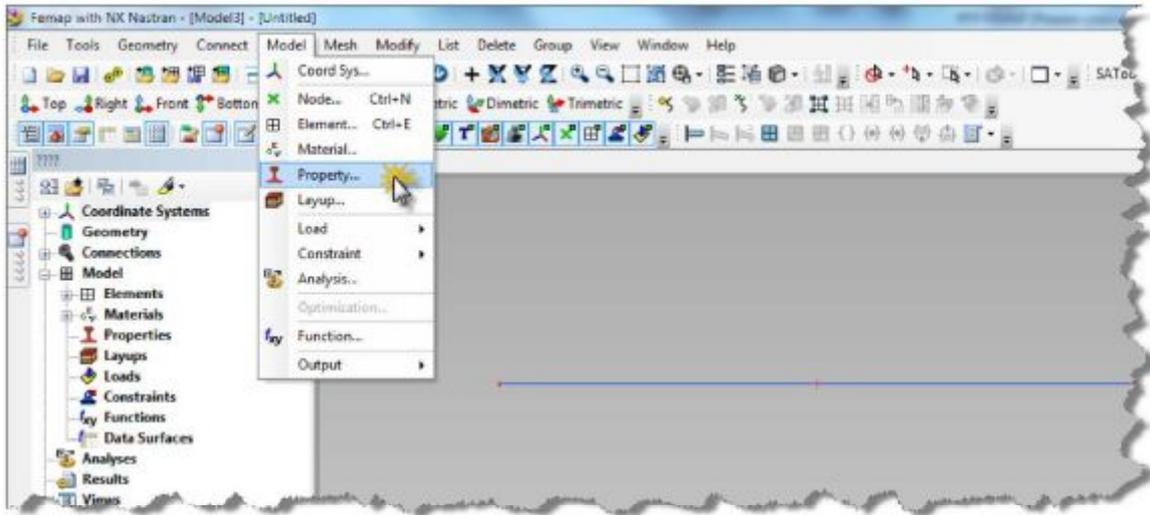
## 2. Выбор материала балки.



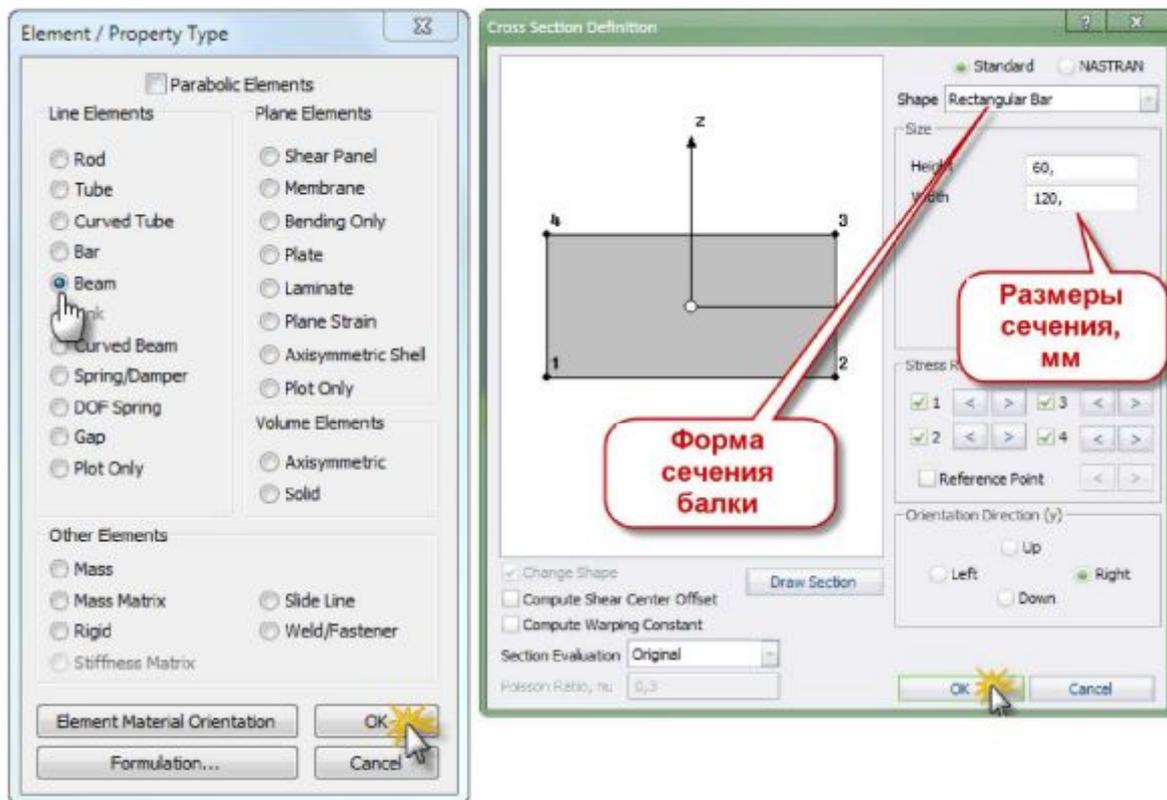
Механические характеристики можно ввести вручную или прочитать с небольшой базы данных встроенной в FEMAP. Введите механические характеристики материала балки так, как это показано на рисунке.



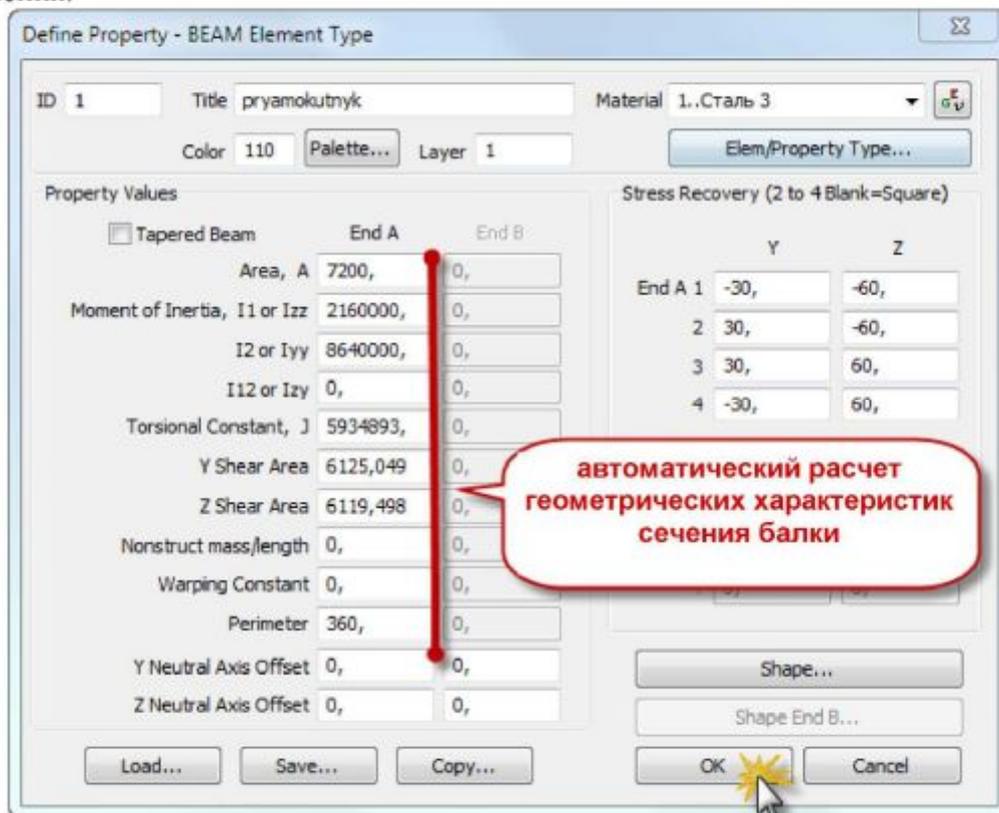
## 3. Задаем свойства конечных элементов.



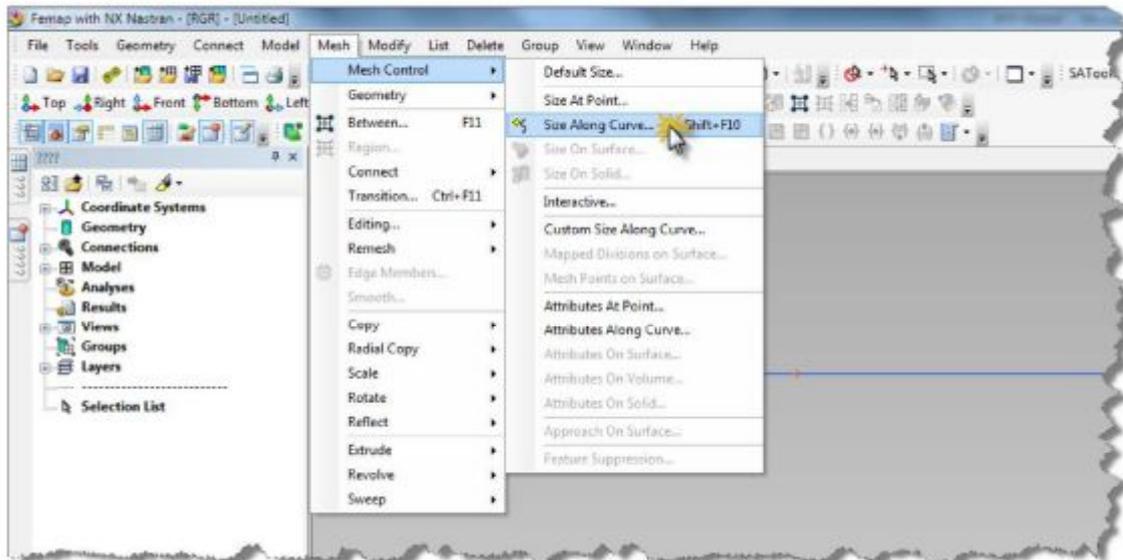
Выбираем конечные элементы типа «Beam», указываем на предварительно заданный материал балки и вводим название конечных элементов - «pryamokutnyk». Далее выбираем прямоугольную форму сечения и вводим его размеры в миллиметрах.



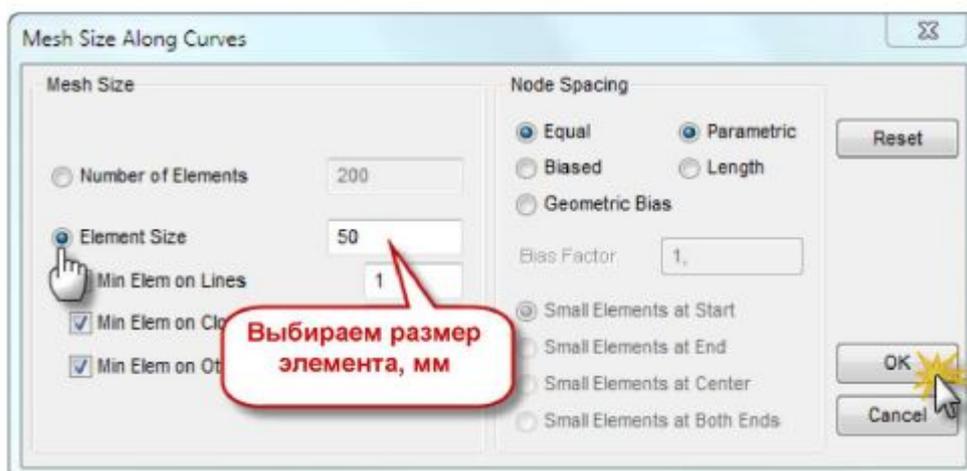
После этого нажимаем кнопку «Ок» и тип конечного элемента создан. При этом программа автоматически рассчитывает геометрические характеристики выбранного сечения.



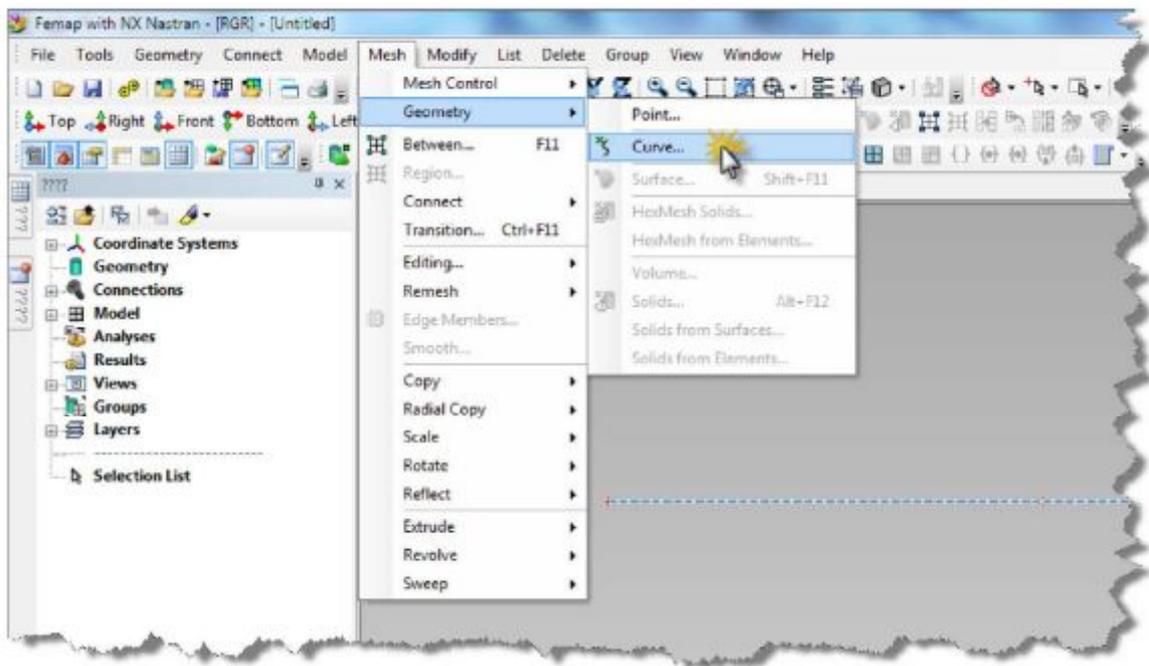
4. Построение сетки конечных элементов. Для этого нужно указать размер и «property» конечных элементов.



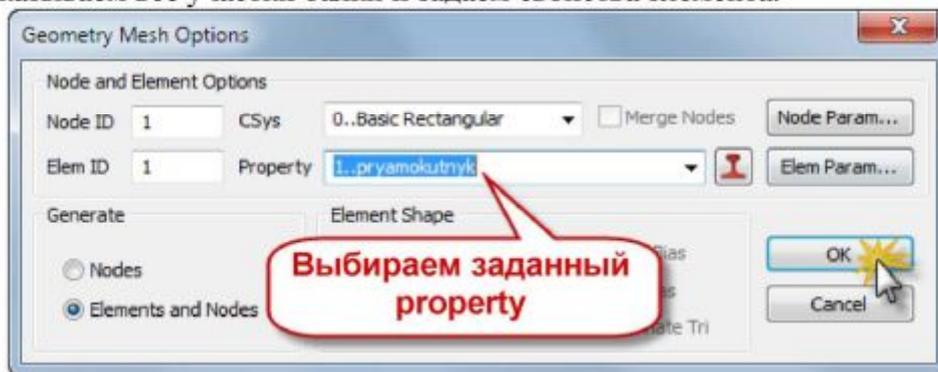
Указываем одним кликом левой клавиши мыши на все участки балки и нажимаем кнопку «Ок».



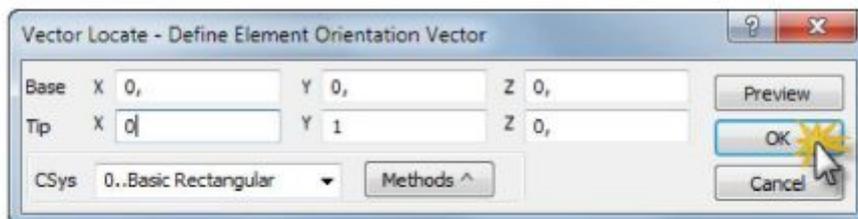
На геометрической модели появляется эскиз будущей сетки конечных элементов. Построим эту сетку в автоматическом режиме.



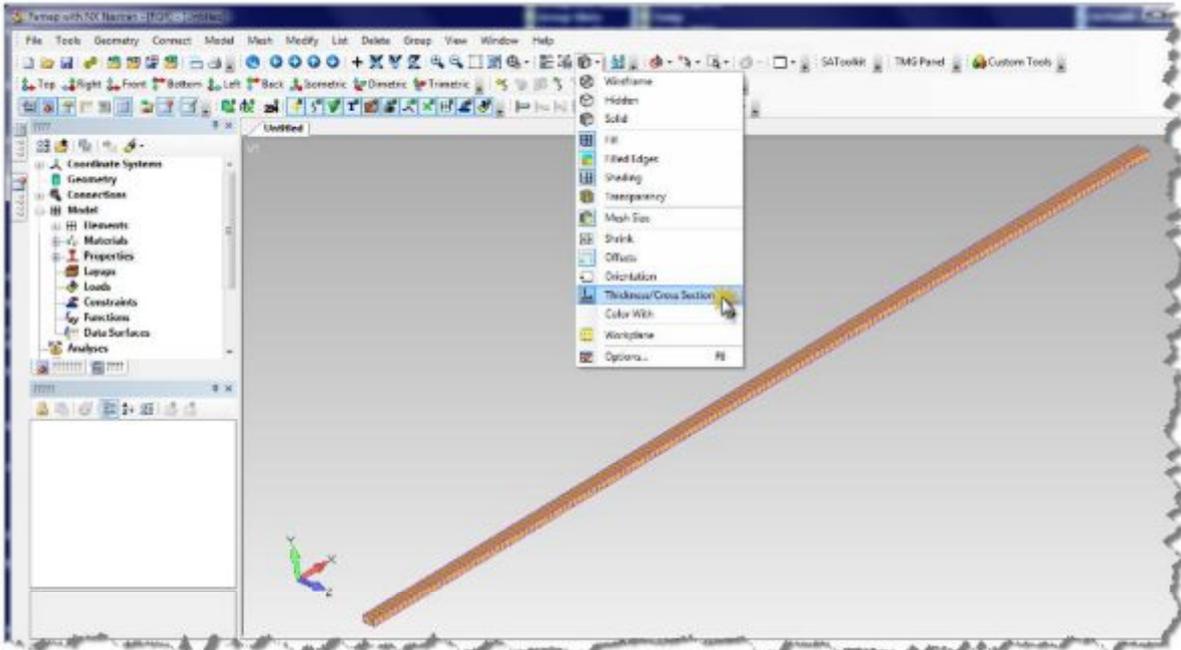
Вновь указываем все участки балки и задаем свойства элемента.



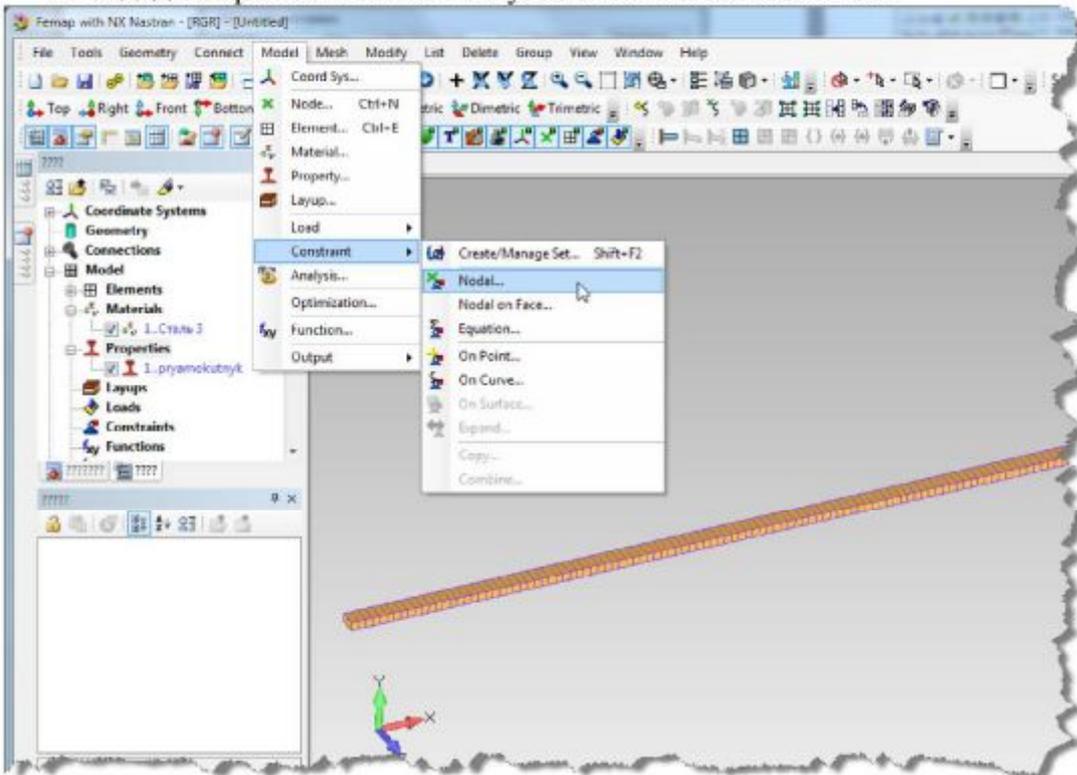
Далее нужно указать ориентацию линейного элемента относительно базовой системы координат в виде вектора. В этом направлении будет происходить построение эшпор.



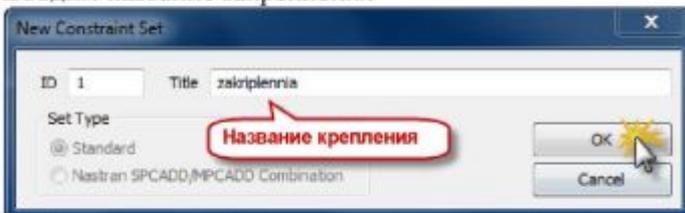
Получаем конечно-элементную модель твердого тела. Реалистичное отображение модели с учетом вида поперечного сечения получаем следующим образом.



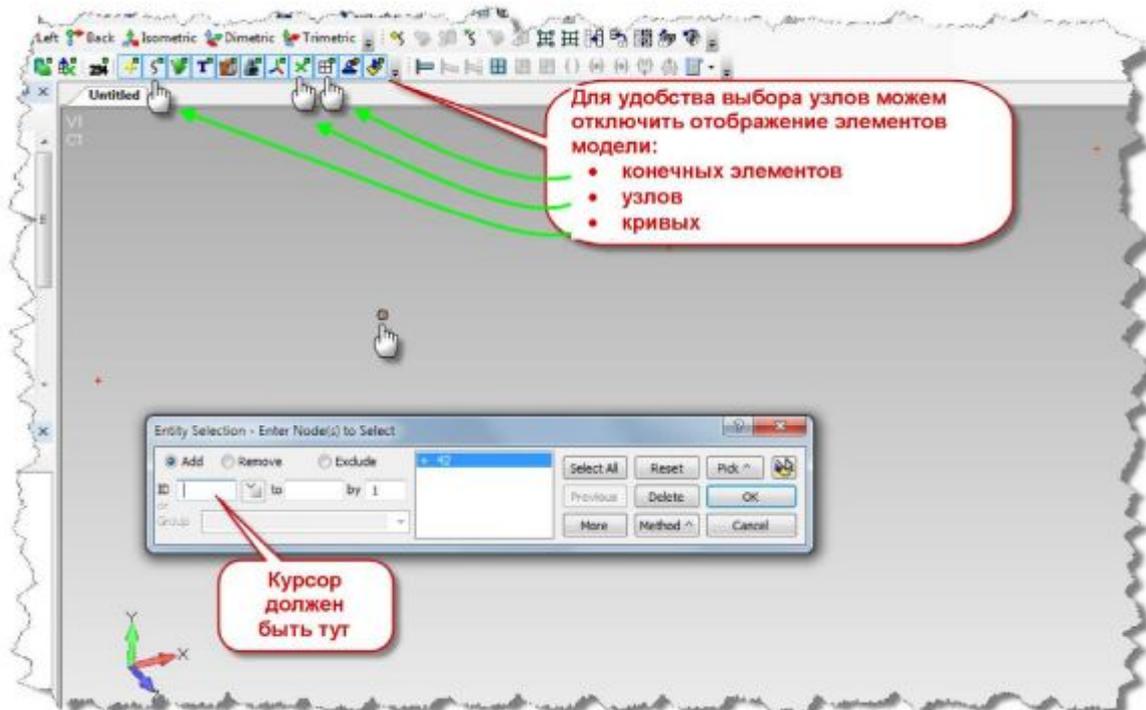
5. Зададим крепления балки по узлам конечных элементов.



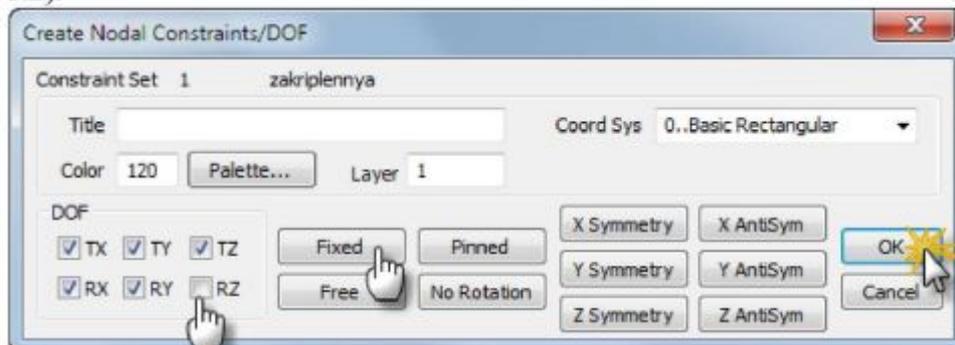
Вводим название закрепления



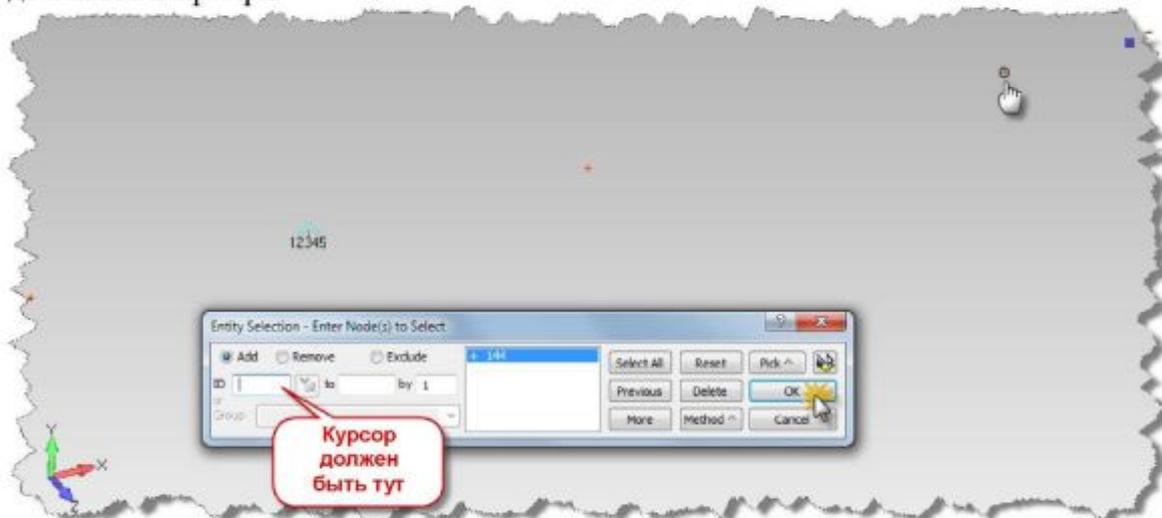
Выбираем мышкой конец первого участка так как показано на рисунке для установления неподвижного шарнира.



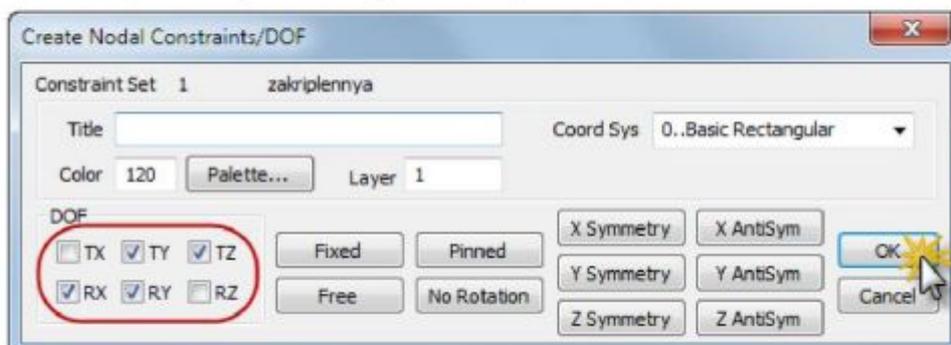
Фиксируем все степени свободы кроме поворотов вокруг оси z (это можно сделать нажатием кнопки «Fixed» для полной фиксации узла, а затем снять галочку в поле Rz).



Затем аналогичным образом выбираем конец третьего участка для установки подвижного шарнира.



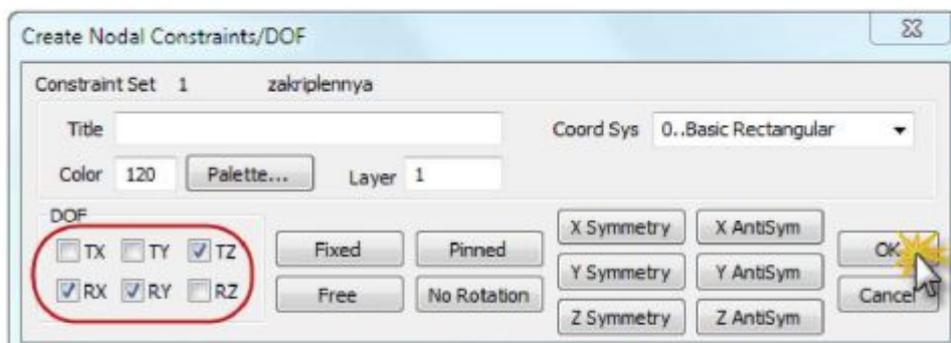
Подвижный шарнир устанавливается путем освобождения перемещений по оси x (поле Tx) и поворотов вокруг оси z (поле Rz).



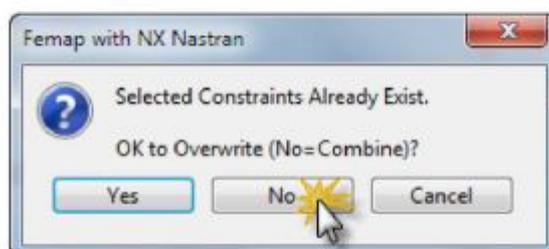
Далее нужно зафиксировать все лишние степени свободы во всех узлах балки, поскольку решаем плоскую задачу.



Выбираем все узлы и фиксируем перемещения по оси z (поле Tz) и повороты вокруг осей x и y (поля Rx та Rz).

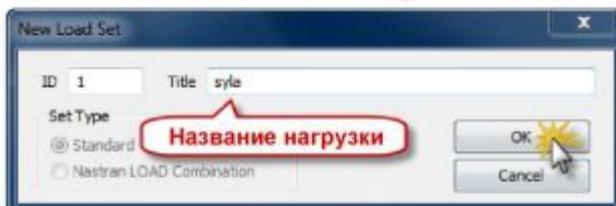
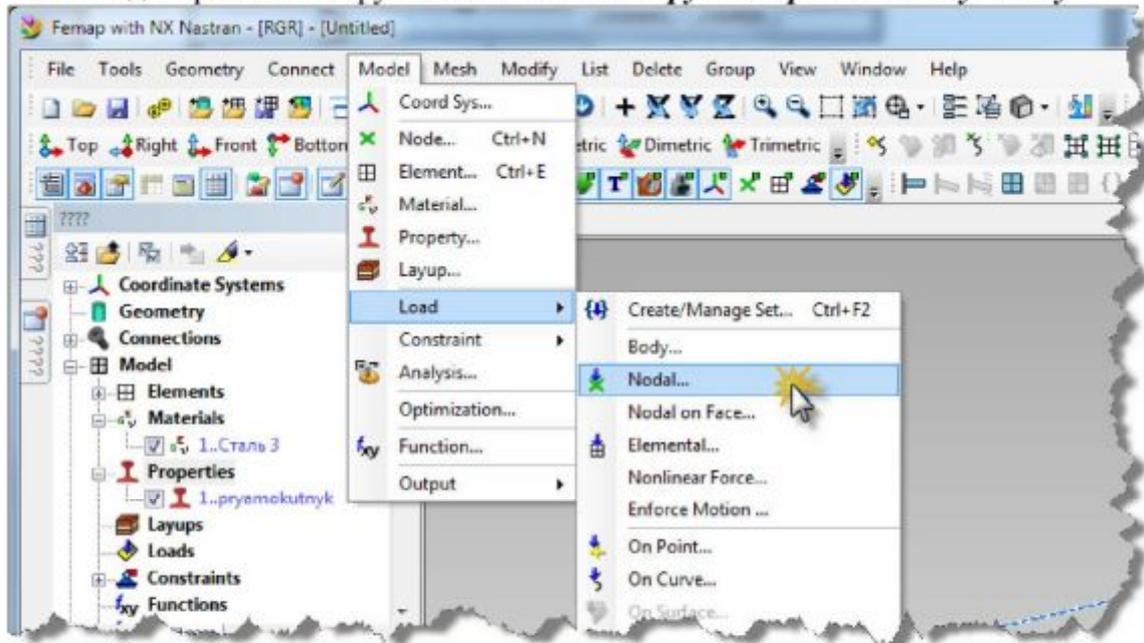


На уточнение о комбинации закреплений надо ответить нажатием кнопки «No».

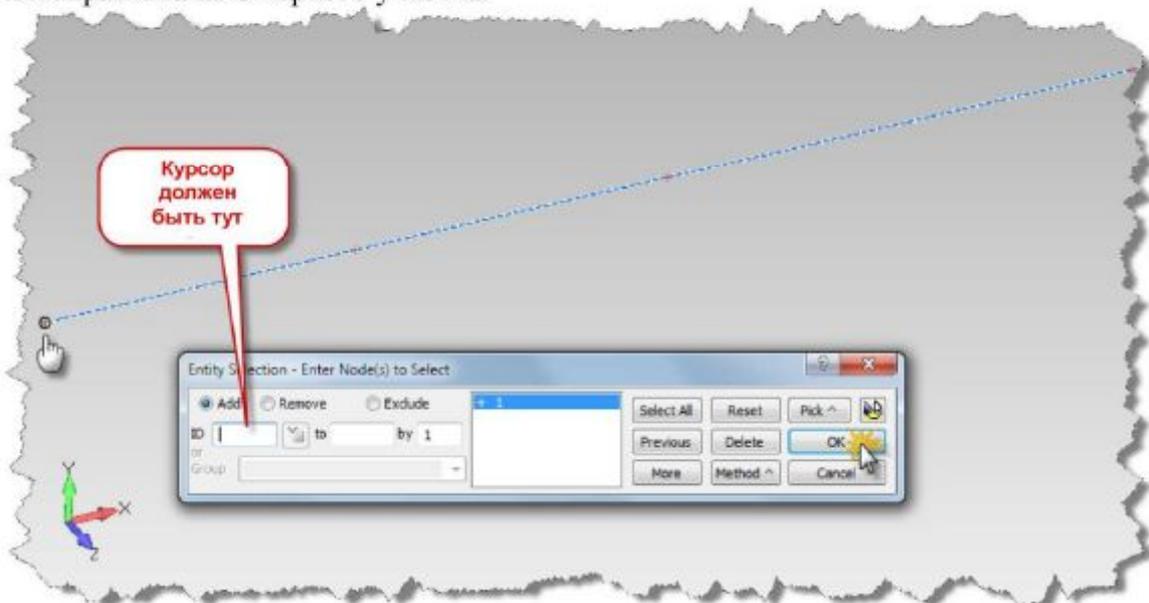


Далее с помощью кнопки  на панели инструментов отключим отображение закреплений узлов для удобства приложения нагрузки балки.

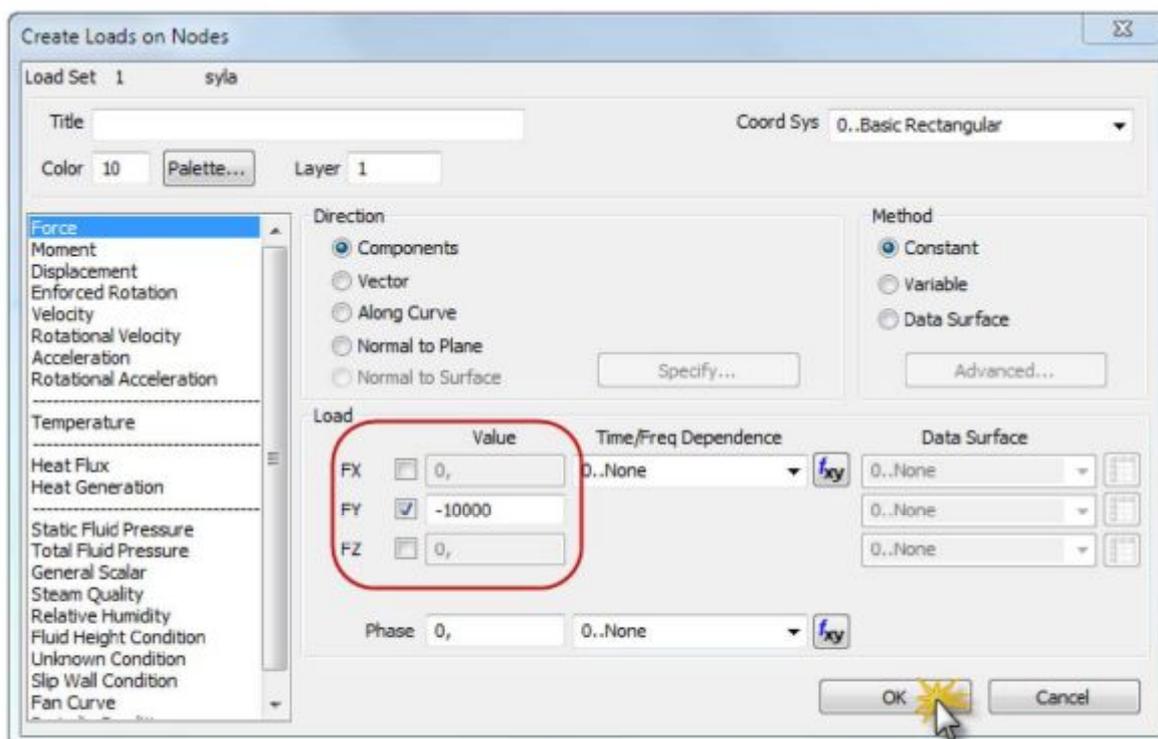
## 6. Моделирование нагрузки к балке. *Моделируем сосредоточенную силу.*



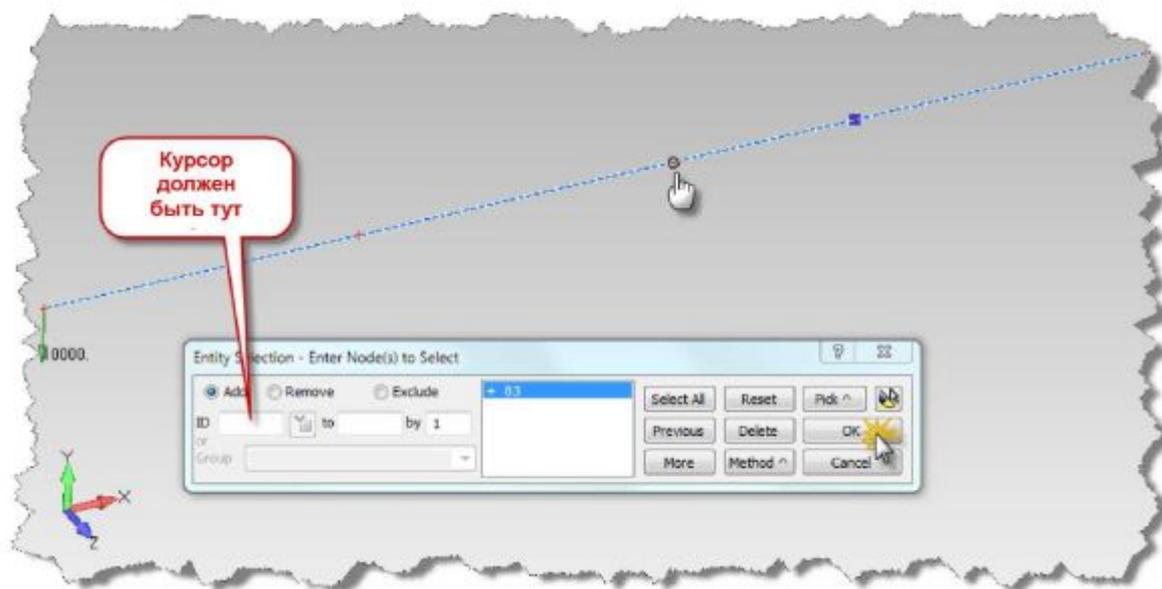
Выбираем начало первого участка.

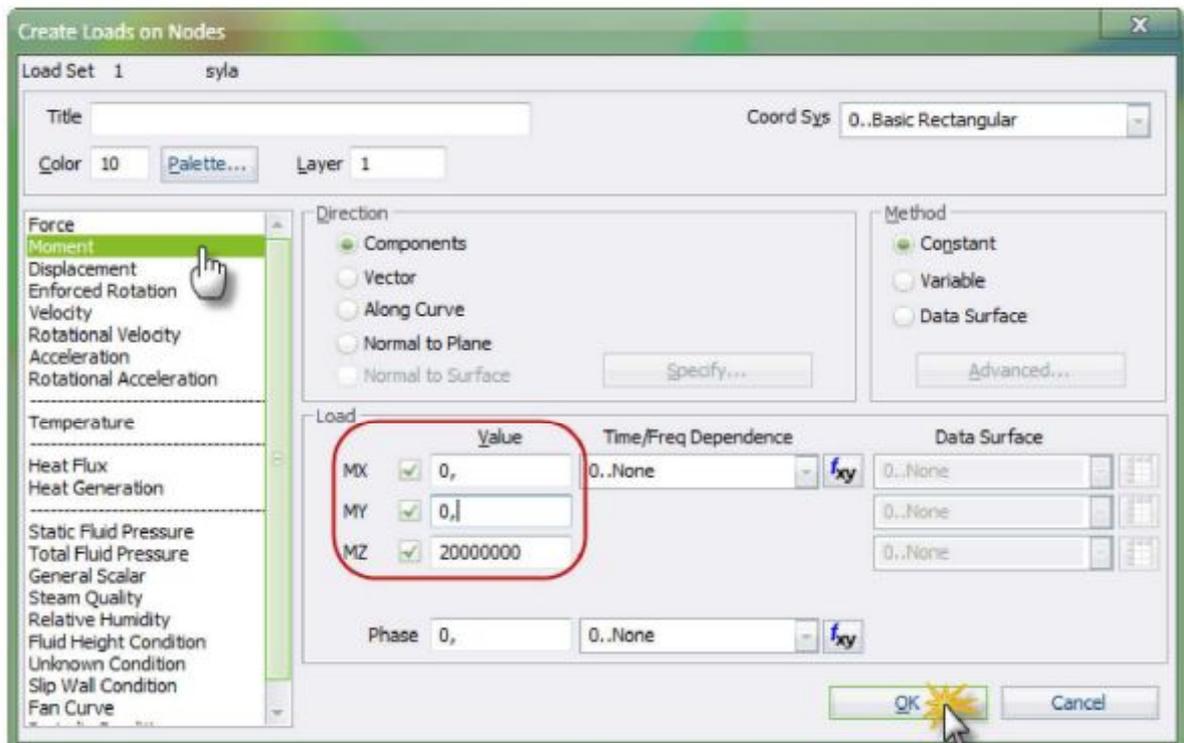


Вводим значение силы в Ньютонах в поле FY и со знаком «-», поскольку сила направлена в противоположном направлении к оси y.

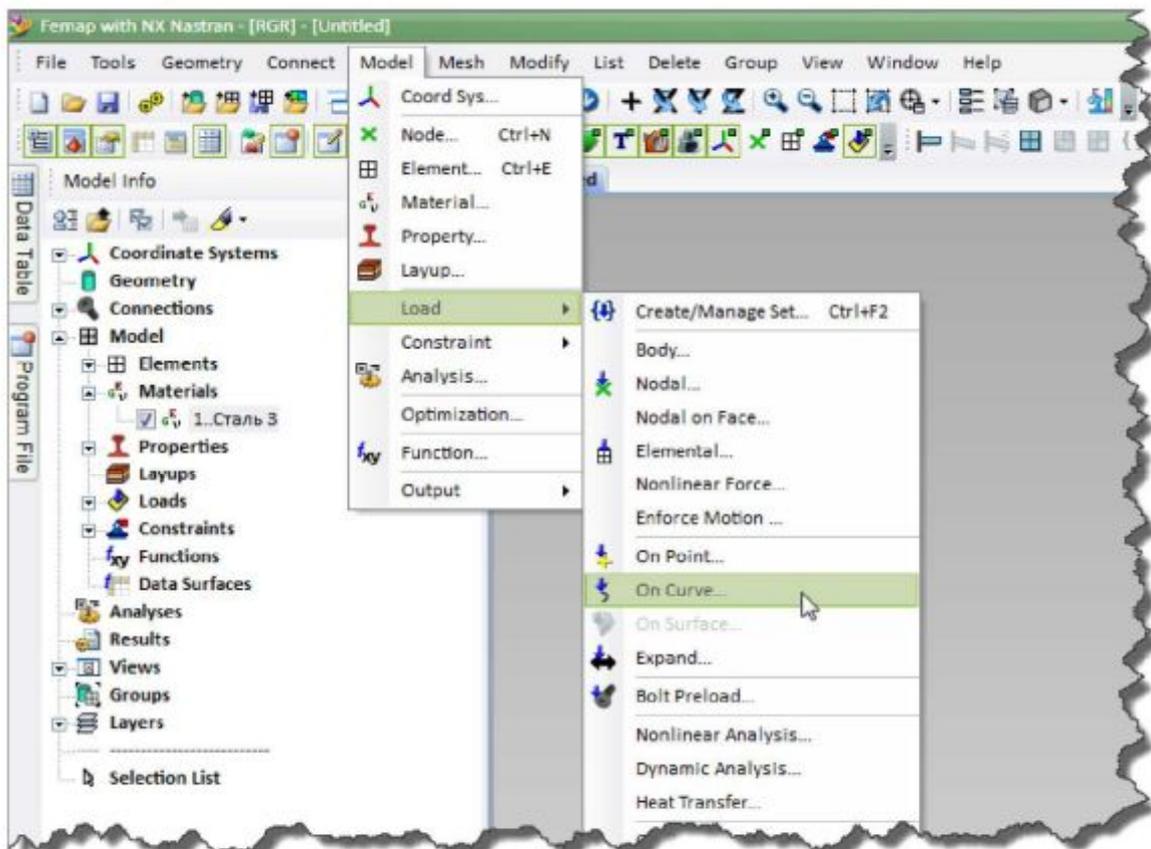


*Моделируем изгибающий момент.* Для этого выбираем узел, совпадающий с концом второго участка балки, и вводим значение изгибающего момента относительно оси z в Н\*мм со знаком «+», поскольку момент в данном случае направлен против часовой стрелки.

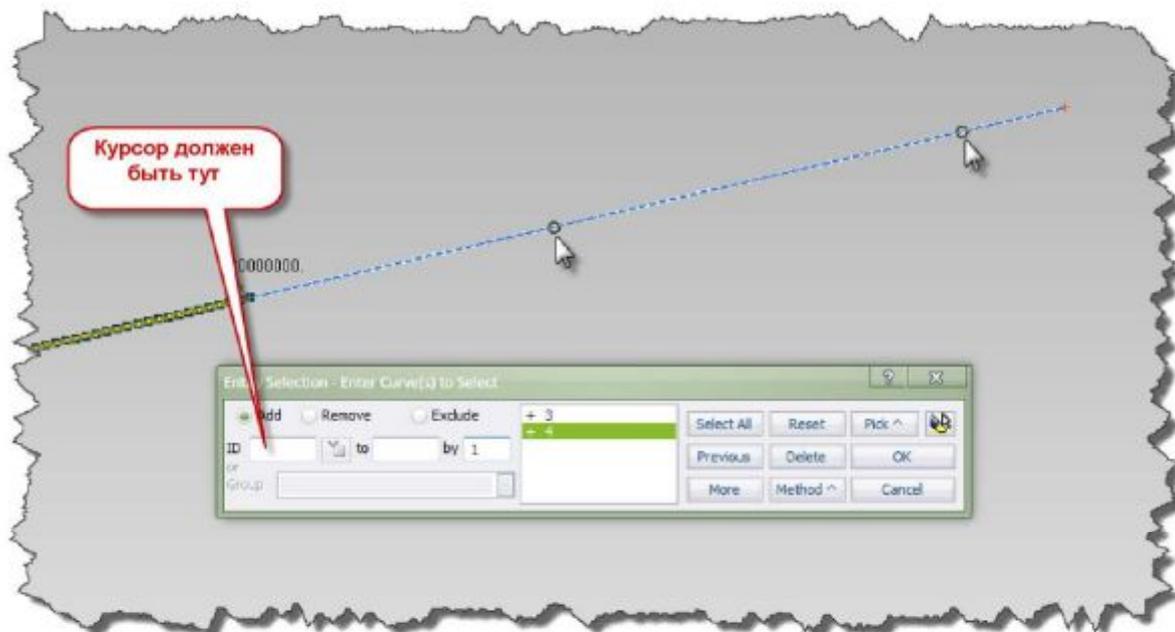




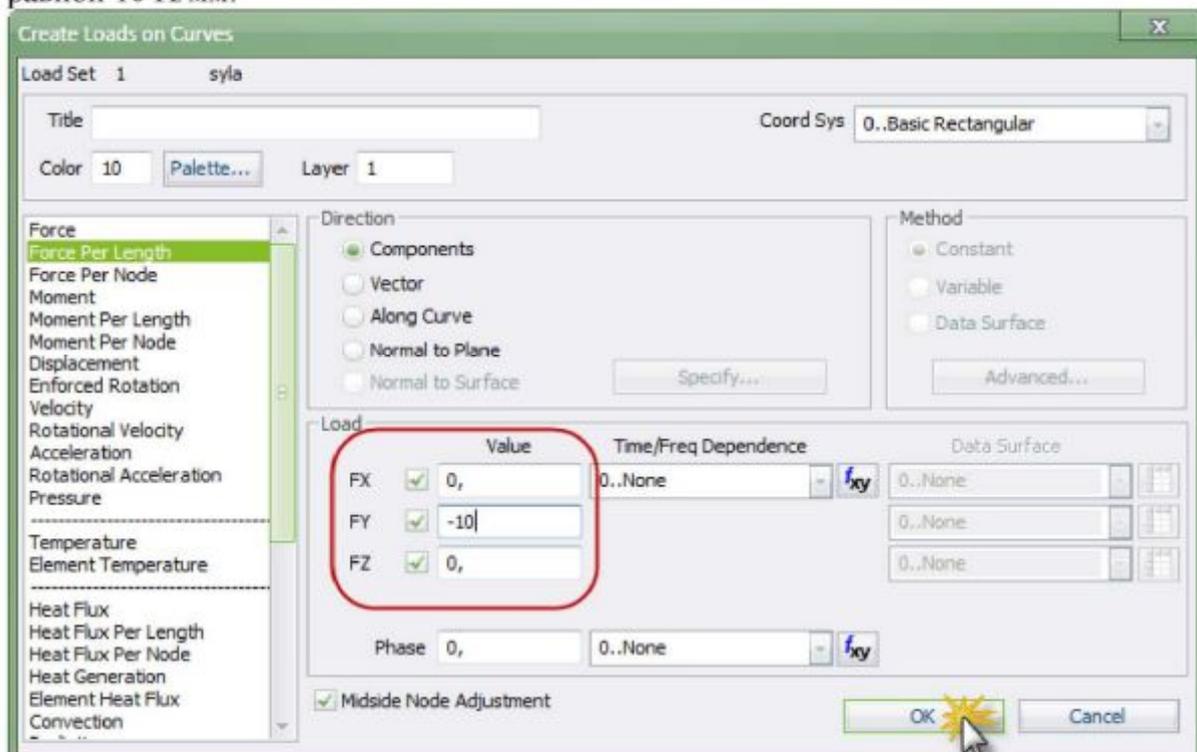
Моделируем распределенную нагрузку. Для этого выбираем действие нагрузки методом «по кривой».



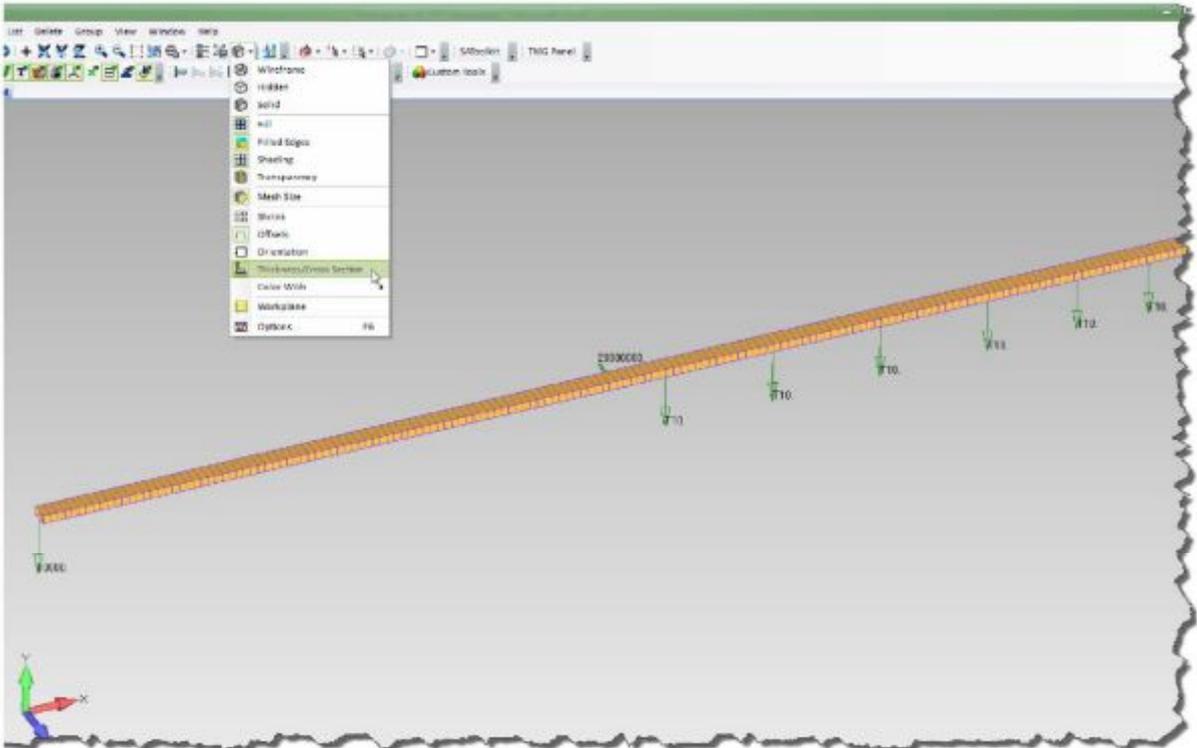
Выбираем мышкой третий и четвертый участки балки.



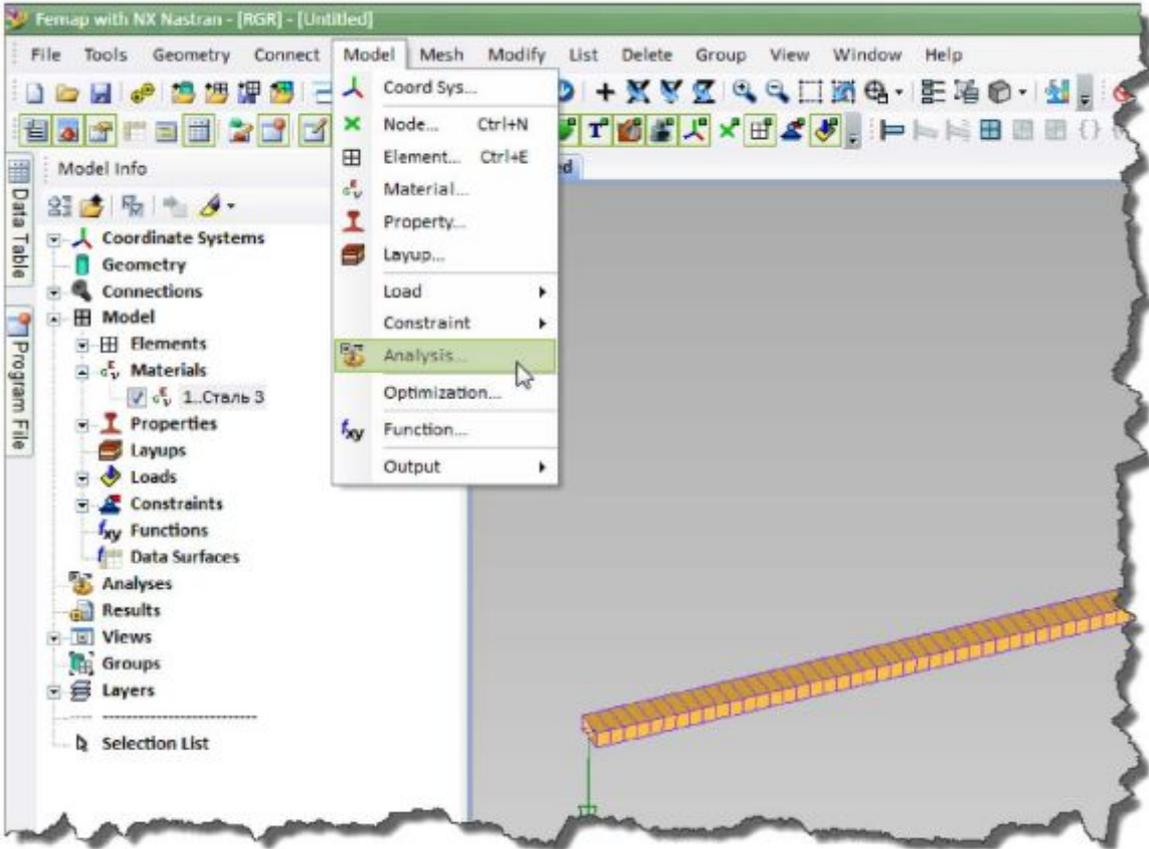
Вводим значение силы направленной в противоположном направлении к оси  $u$  и равной 10 Н/мм.

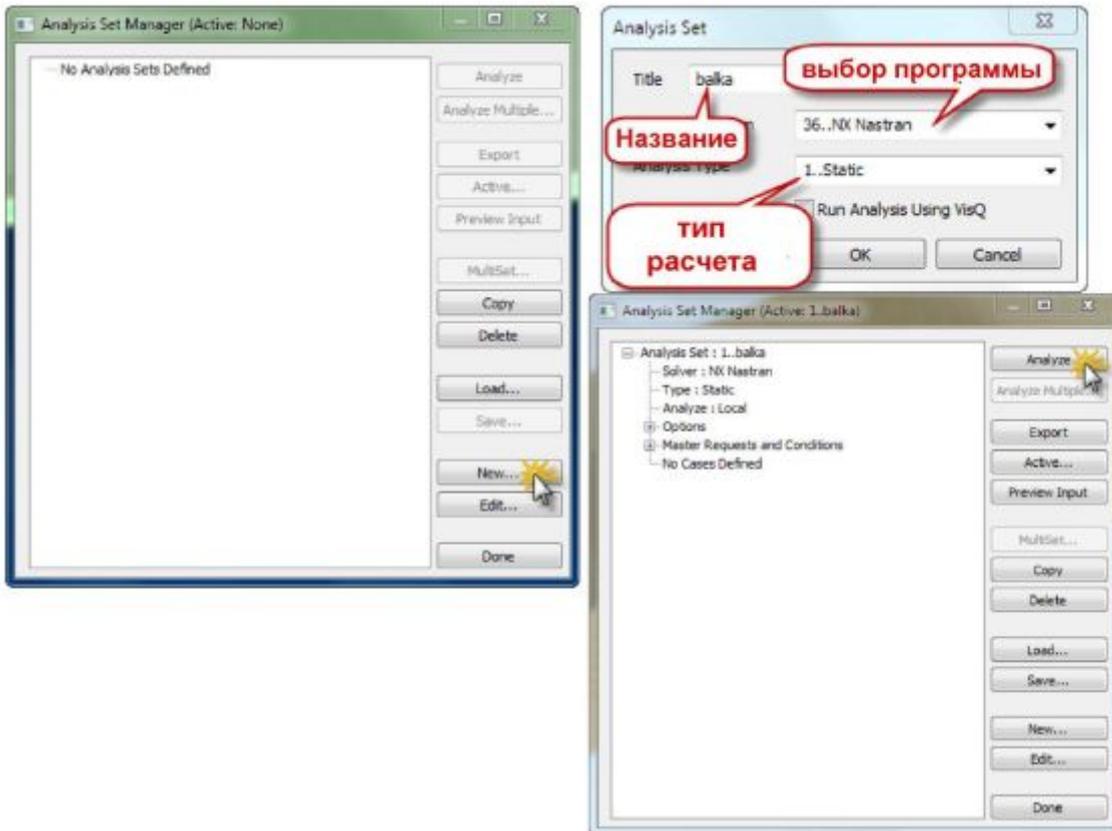


Окончательный вид модели балки получим, включив отображение «Thickness/Cross Section».

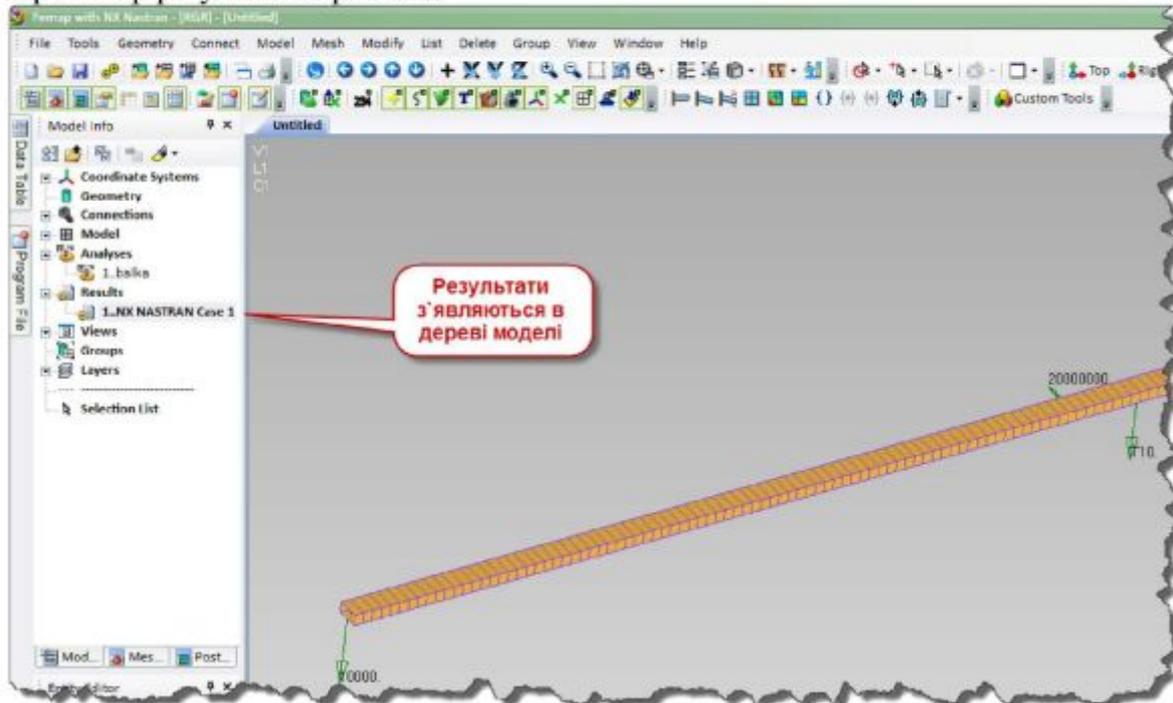


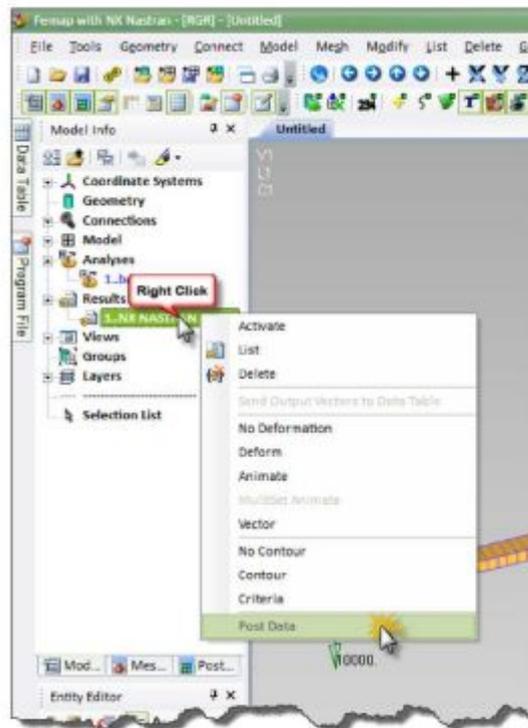
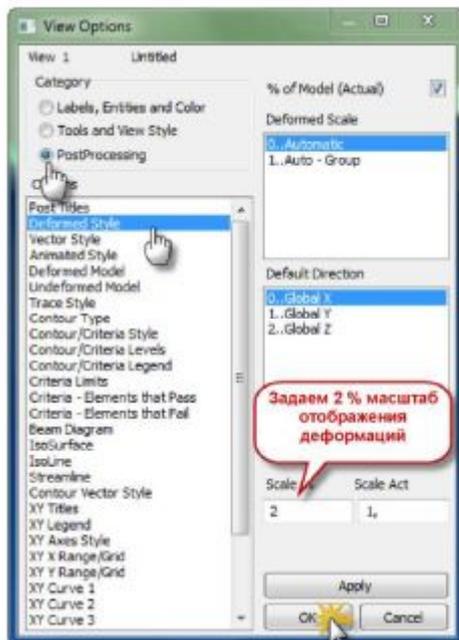
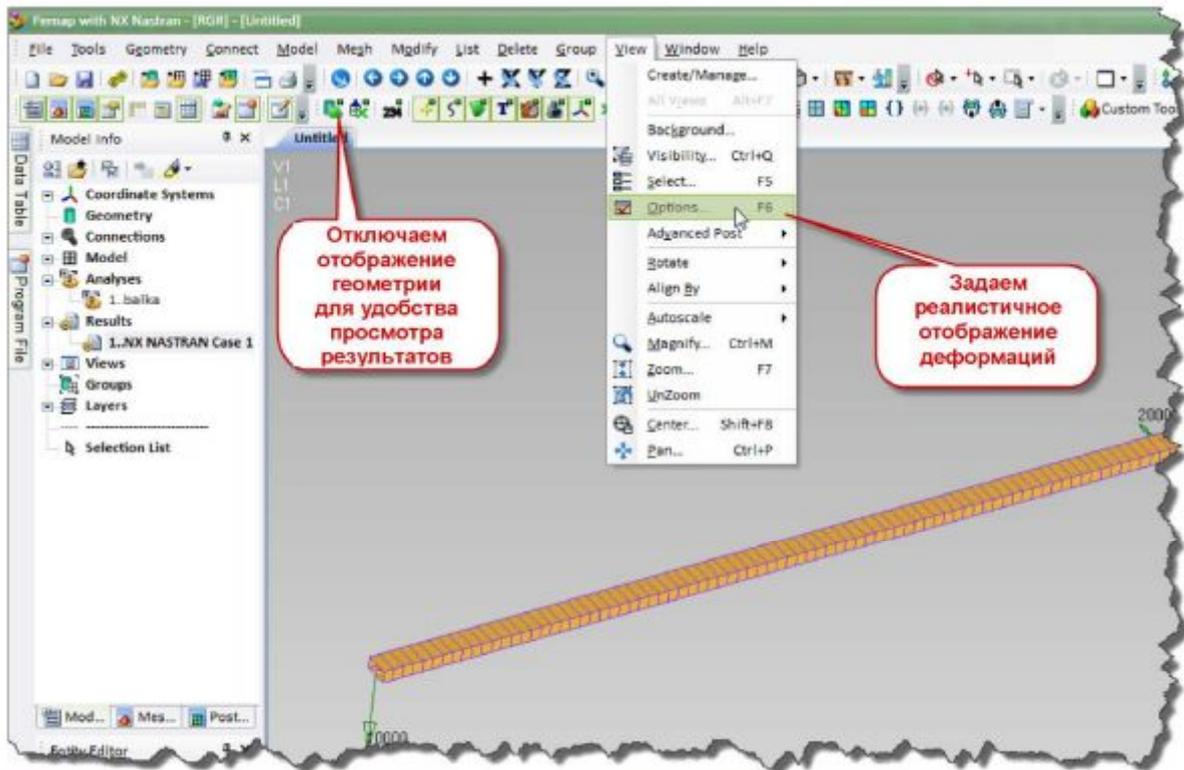
Статический расчет балки с помощью программы NASTRAN NX.





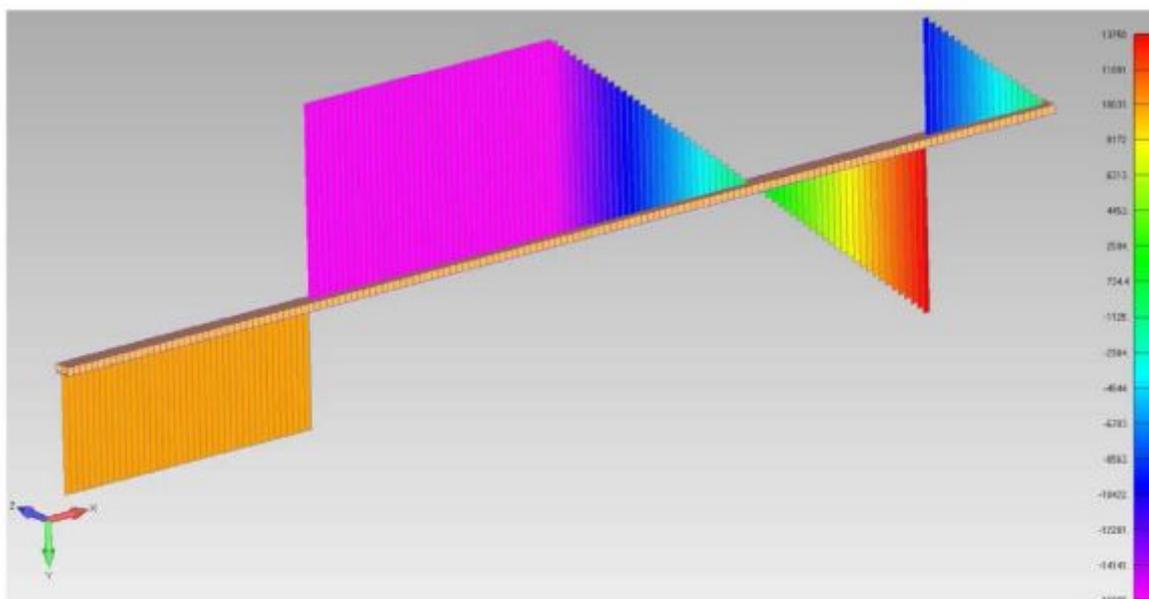
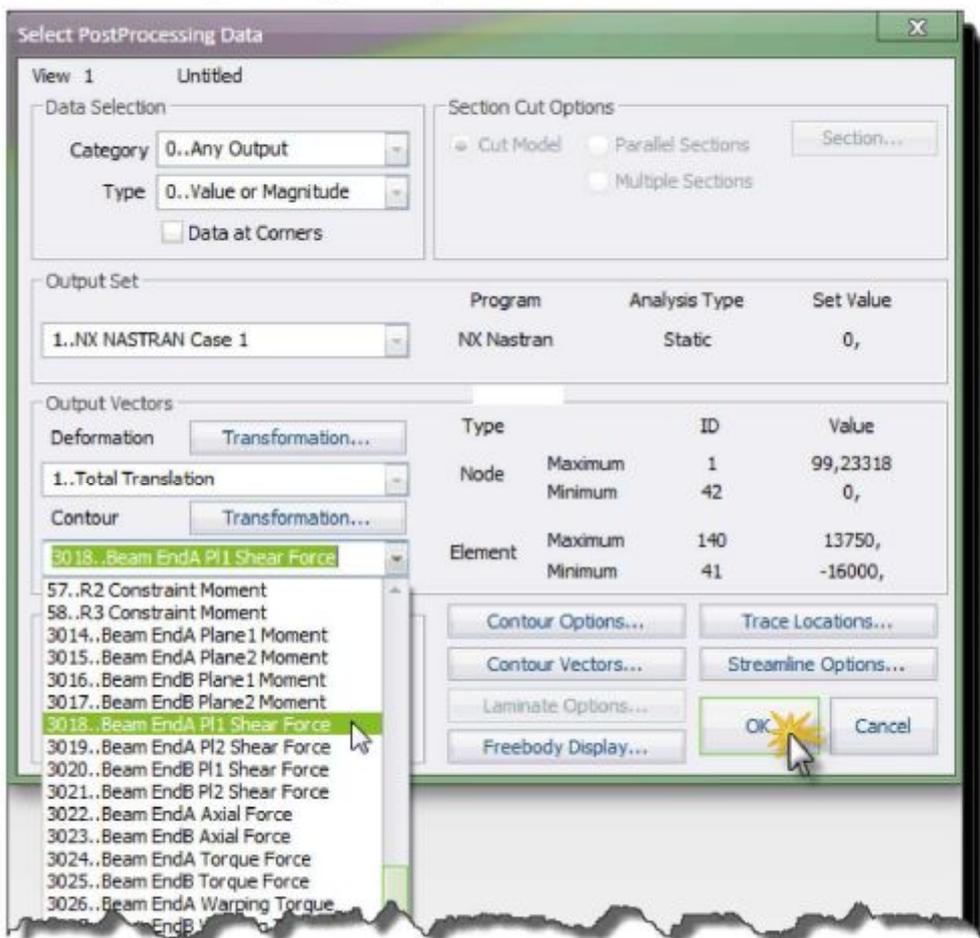
Просмотр результатов расчета.



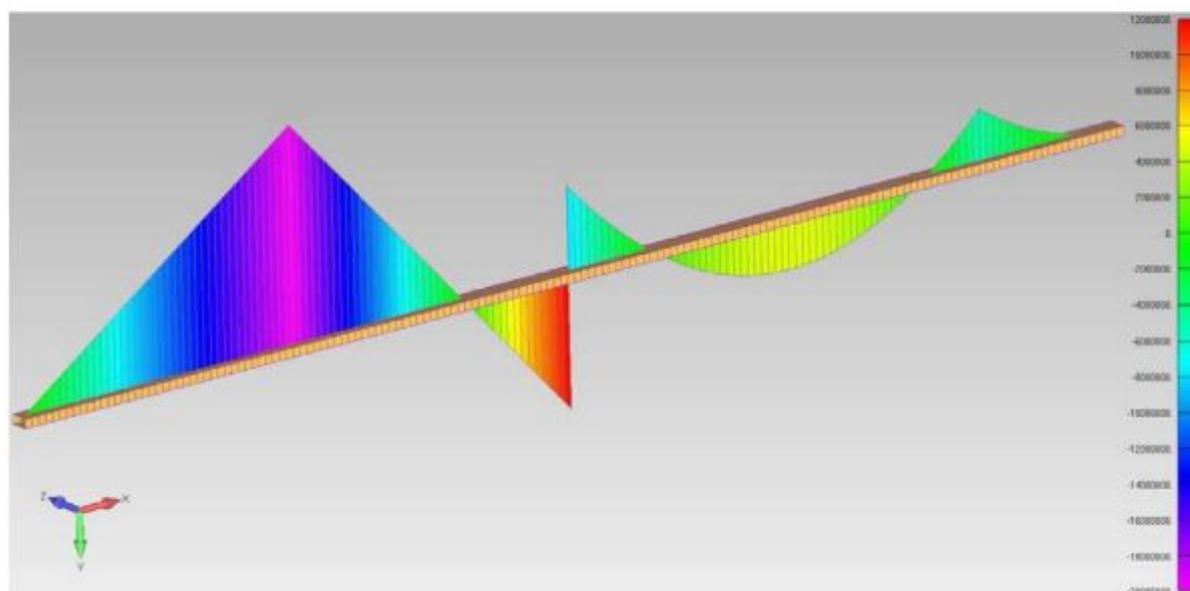
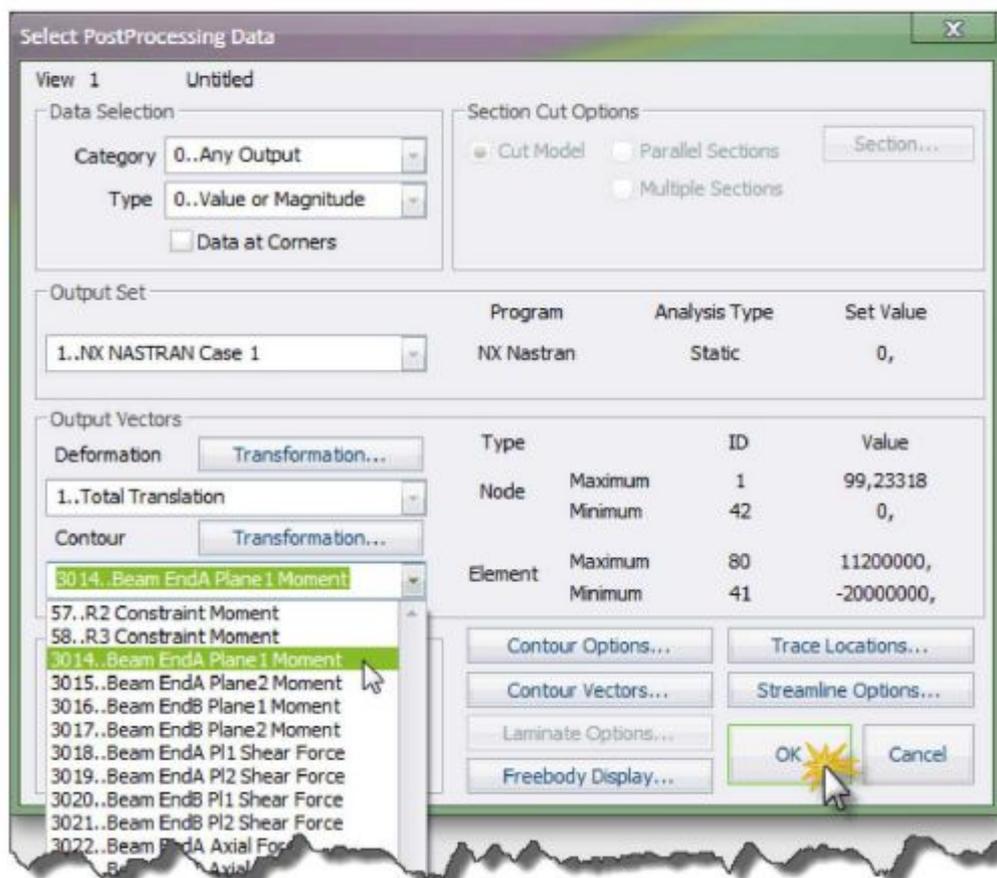


Выбор величин для отображения с помощью цветовой схемы.

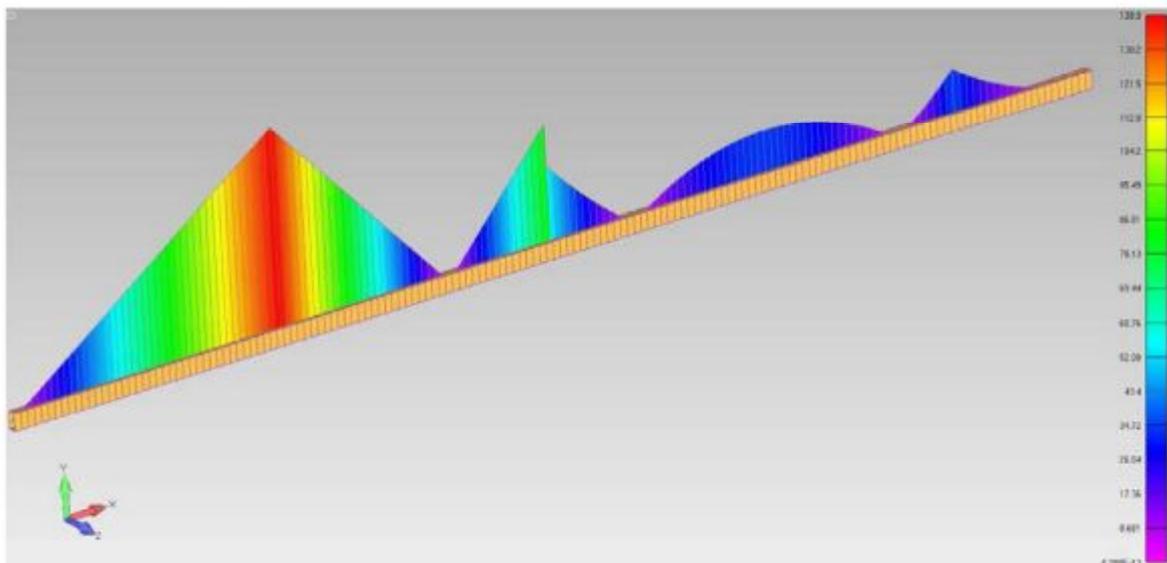
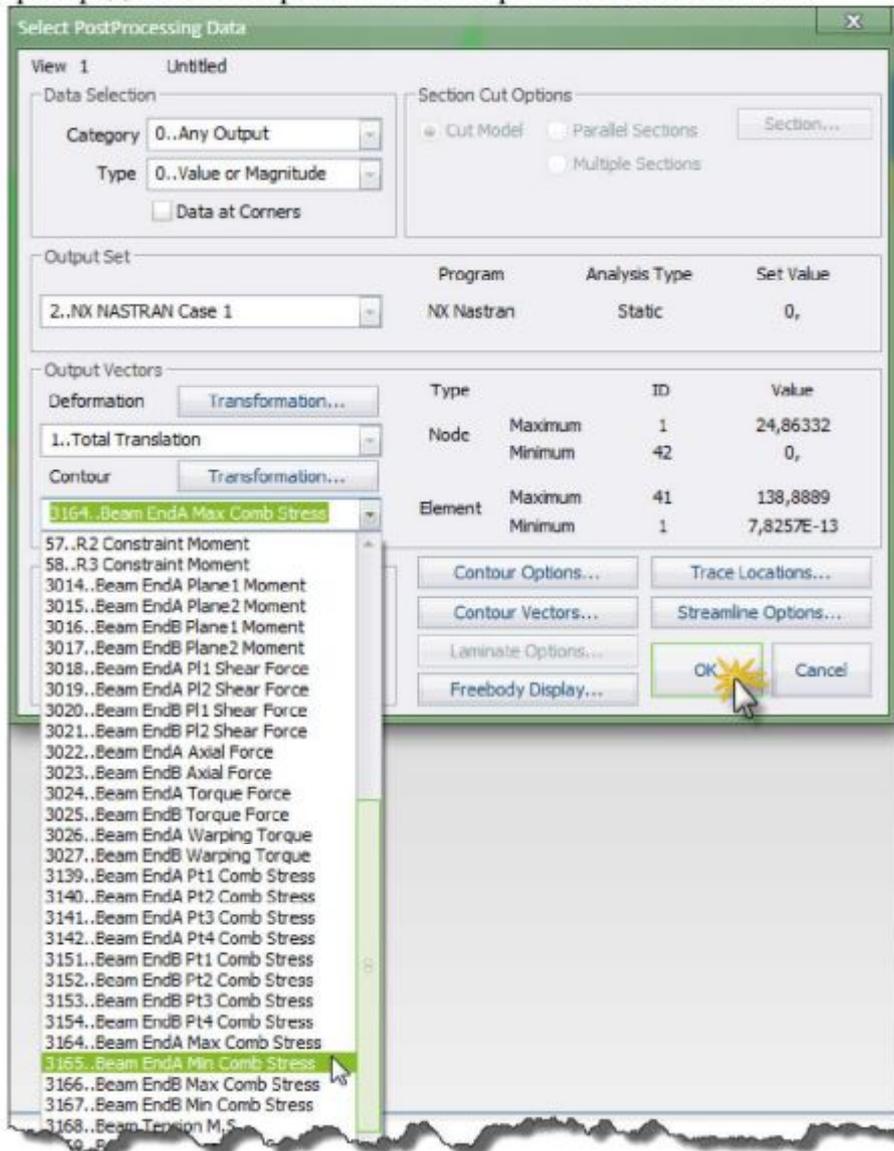
Выводим на экран эпюру поперечных сил.



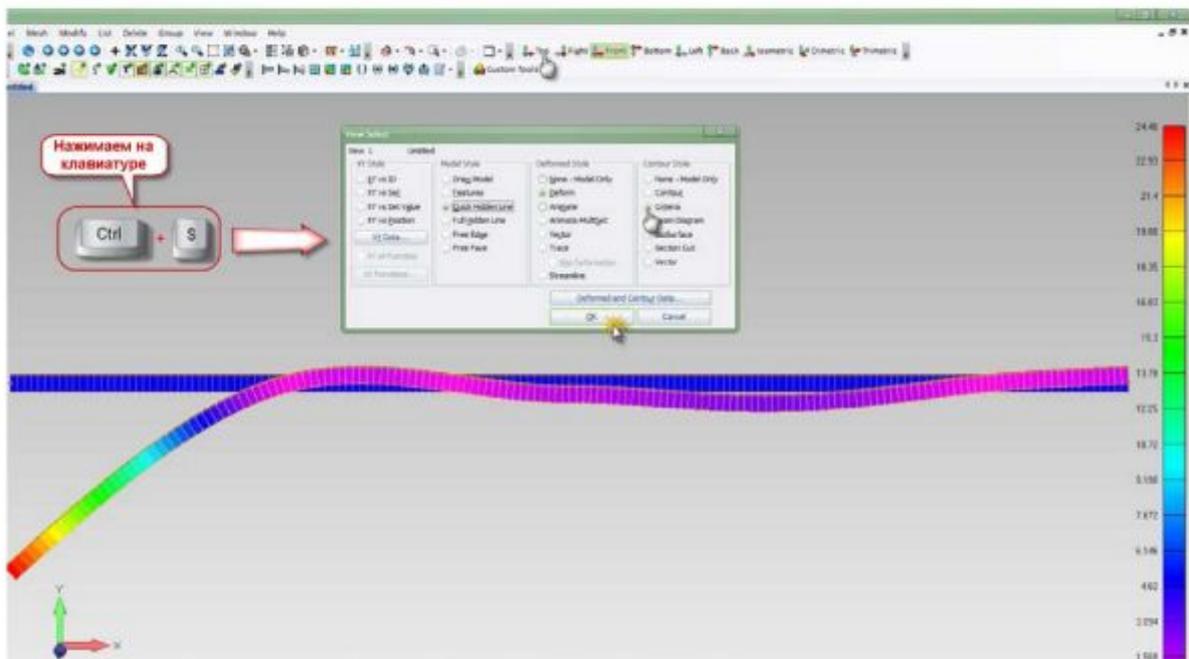
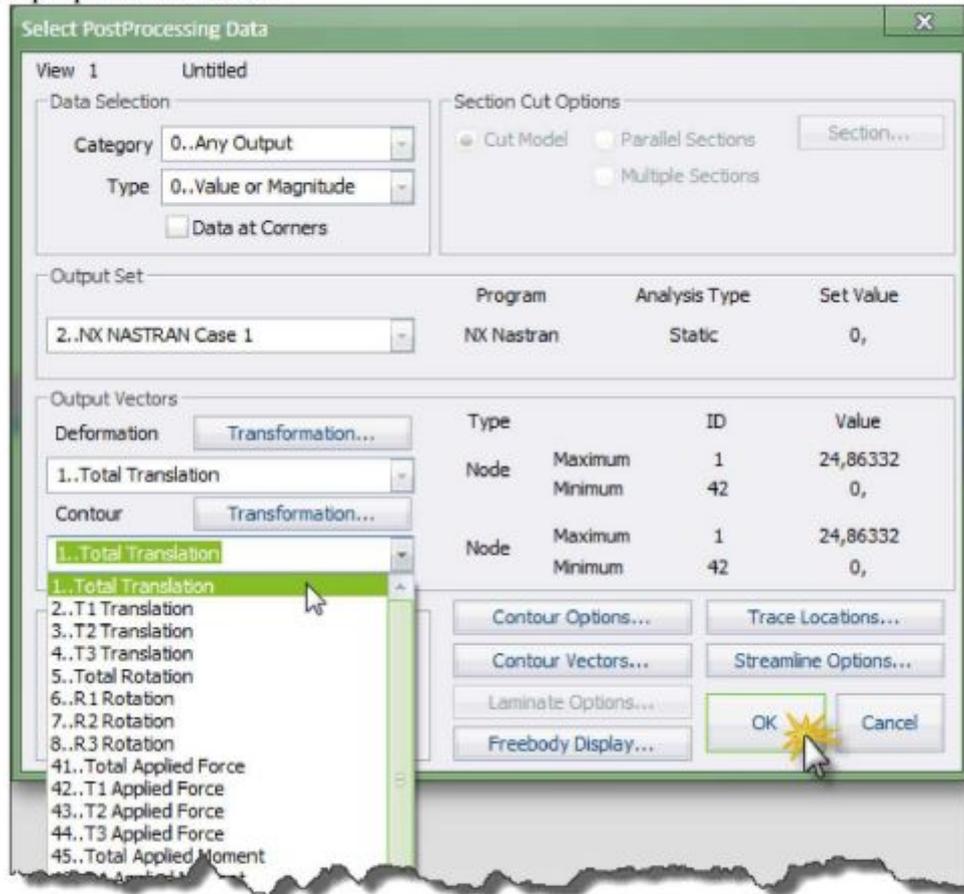
Выводим на экран эпюру изгибающих моментов



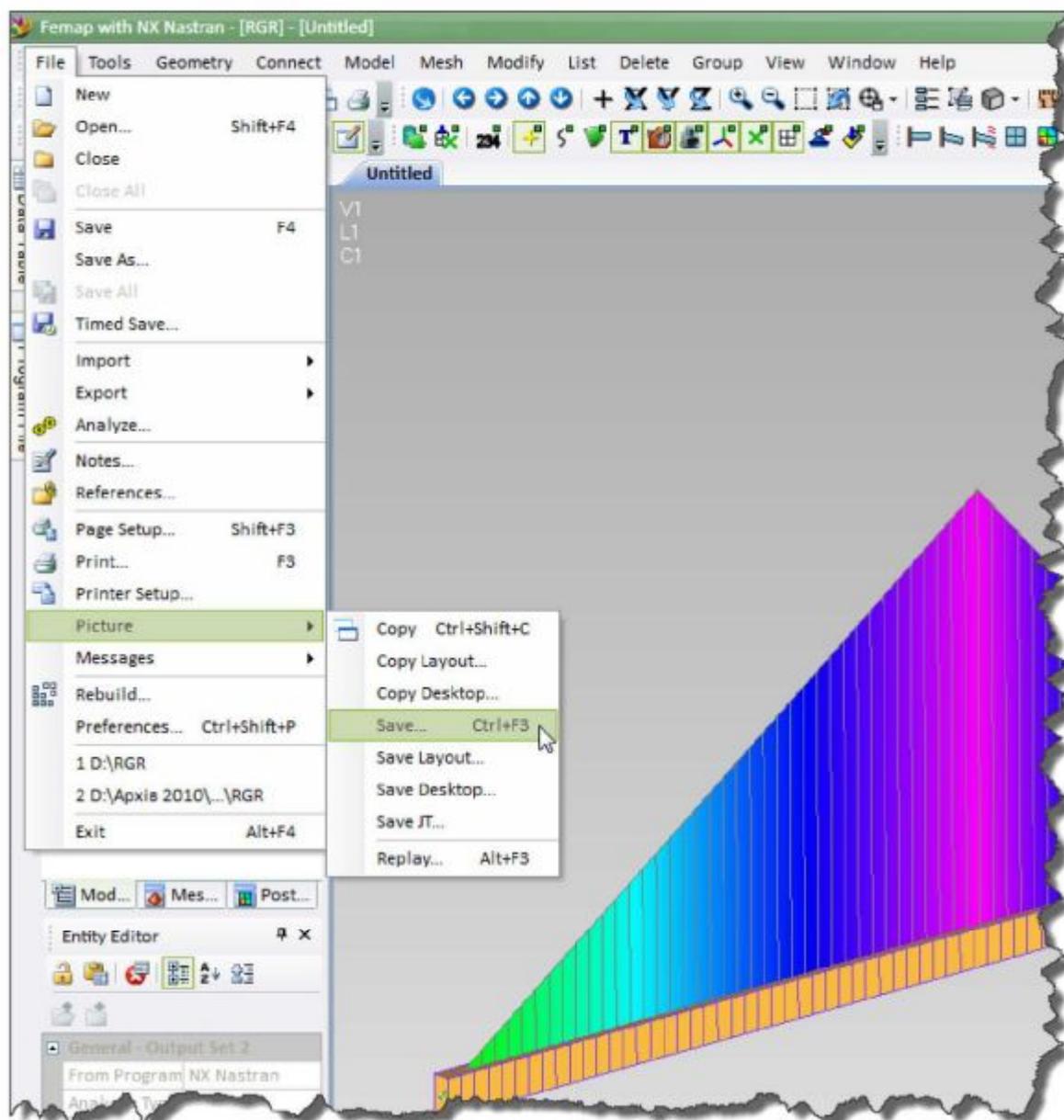
Просмотр распределения напряжений в поперечном сечении балки.



## Просмотр прогибов балки.



Сохранение полученных результатов в виде фотографий.



## Литература.

1. Шимкович Д. Г. Femap & Nastran. Инженерный анализ методом конечных элементов. - М.: ДМК Пресс, 2008. - 704 с. (Серия „Проектирование“).
2. Рудаков К. М. Femap 9.3 Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. - К., 2009. - 296 с.