

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
Учебное пособие

Предисловие

При проектировании любой машины или конструкции необходимо обеспечить ее работоспособность и надежность в течении всего срока эксплуатации. Безотказная работа конструкции в первую очередь обеспечивается ее прочностью и жесткостью.

Прочностная подготовка инженера обеспечивается целым рядом дисциплин, таких как механика деформированного твердого тела, теория упругости, теория пластичности, реология, динамика и устойчивость машин и сооружений. строительная механика. Поскольку ни один серьезный расчет в настоящее время не ведется без использования компьютера, численные методы решения задач динамики и прочности рассматриваются в курсе вычислительной механики.

Данный курс сопротивления материалов ориентирован на использование компьютерных технологий в прочностных расчетах конструкций.

Сейчас в конструкторских бюро и на заводах почти никто не чертит вручную на кульмане, только на компьютерах, используя современные графические комплексы. Соответственно и прочностные расчеты выполняются на компьютерах. Для сравнительно простых расчетов и решения всевозможных уравнений, как правило, используется Mathcad. Для сложных комплексных расчетов конструкций используются современные вычислительные комплексы, использующие метод конечных элементов.

Особенности курса сопротивления материалов

Сопротивление материалов — своего рода азбука прочности. Здесь рассматриваются основные понятия, такие как напряжения, деформации, перемещения и другие, которые необходимы для изучения последующих дисциплин прочностного цикла.

В сопротивлении материалов вводится большое количество упрощающих расчет гипотез и допущений, что позволяет получить и использовать в расчетах простые инженерные формулы. При этом неизбежно уменьшается точность расчетов и уменьшается круг решаемых задач.

Формулы сопротивления материалов, как правило, используются на стадии эскизного проектирования для подбора основных размеров конструкции. При подготовке серийного производства на стадии изготовления чертежей конструкции необходимы уточненные расчеты с использованием метода конечных элементов и экспериментальная доводка изделия на испытательных стендах.

Содержание курса сопротивления материалов на этом диске соответствует программе министерства образования России.

В большинстве разделов учтены современные взгляды на решение прочностных задач.

В углубленной постановке рассмотрены вопросы учета пластических деформаций, благо Mathcad позволяет получать простые решения сложных (при решении вручную) задач теории пластичности.

Особое внимание обращается в книге на характер разрушения материалов (хрупкий или вязкий). Внезапный переход материала из пластического состояния в хрупкое ведет к аварии, часто с катастрофическими последствиями. Задача инженера-проектировщика гарантировать, что хрупкого разрушения конструкции не произойдет ни при каких обстоятельствах.

С точки зрения практических расчетов рассмотрены вопросы усталости материалов и механики разрушения тел с трещинами.

Определенное внимание уделено вопросам рационального и оптимального проектирования конструкций. Если рациональному выбору конструкции учит весь курс сопротивления материалов, то оптимальное проектирование основано на использовании математических методов поиска экстремума функции.

С позиций теории колебаний решаются вопросы динамического воздействия сил на конструкцию.

Освоение "азбуки прочности" требует решения большого количества простых примеров, чтобы понять и запомнить основные принципы решения прочностных задач. Решив определенное количество задач вручную, можно приступать к решению сложных задач с использованием компьютерных методов расчета.

В данном курсе почти не рассматриваются простые примеры. Для решения таких задач можно использовать другие учебники и пособия [1], [2], [4], [17], [19], [21], [22],[23].

С помощью формул и методов традиционного сопротивления материалов можно решать только сравнительно простые задачи. Как правило, это расчеты длинных и тонких стержней на растяжение, изгиб, кручение. С помощью Mathcad можно решать

значительно более сложные задачи, анализировать результаты расчета. Но все равно круг решаемых задач остается ограниченным многочисленными допущениями, рассмотренными в разделе 1.9. Практические задачи расчета прочности и жесткости конструкций, с которыми встречается инженер в своей работе, решаются методом конечных элементов (МКЭ) с использованием современных вычислительных комплексов. Для подготовки к работе с такими комплексами студент должен изучить основы метода конечных элементов, чтобы правильно сформулировать задачу, выбрать условия ее решения и проанализировать результаты расчета. Из сотен вариантов, предлагаемых многочисленными меню вычислительных комплексов, выбрать нужные, ведущие к правильному решению задачи.

Основные положения МКЭ изложены во второй части курса в главах 20 – 26. Для правильного понимания МКЭ в главах 20 и 25 рассмотрены необходимые уравнения теории упругости и теории пластичности в матричной постановке. Закачивается вторая часть рассмотрением возможностей современных вычислительных комплексов.

Особенности решения задач в Mathcad

Все примеры решения задач, расчетно-графических и курсовых работ по сопротивлению материалов выполнены в Mathcad и помещены в электронную книгу на компакт-диске.

Каждый пример электронной книги представляет собой программу для решения определенного класса задач и позволяет, задавая диапазоны изменения различных параметров, анализировать результаты расчета, способствуя выбору рациональной и даже оптимальной конструкции.

Кроме того, программы, приведенные в электронной книге можно использовать, как "электронные кубики" для сборки других программ. Такой метод позволяет многократно сократить время подготовки программ пользователя.

Приведенные в электронной книге примеры показывают, что при использовании Mathcad в сопротивлении материалов практически нет нерешаемых задач.

Выбор Mathcad в качестве средства решения задач объясняется его простотой и наглядностью. Ведь все математические выражения в Mathcad выглядят так же, как в книге или тетради.

Большое количество встроенных функций, наличие численного и символьного процессоров позволяет решать задачи как численно, так и аналитически. Наличие графического и текстового редакторов позволяют готовить технические документы непосредственно в оболочке Mathcad.

В некоторых разделах при выводе формул сопротивления материалов используется символьный процессор Mathcad для оценки выражений, вычисления интегралов и производных, решения уравнений в символьном виде. Однако проделать весь вывод какой-либо формулы в Mathcad, как правило, не удастся.

Главное достоинство Mathcad — простота и удобство вычислений.

Этому принципу должны быть подчинены все вычисления в Mathcad. **Если вручную выполнить вычисления быстрее и проще, чем в Mathcad, значит нечего и связываться с Mathcad.**

Именно так и обстоит дело с символьными вычислениями. Составить программу символьного вывода формулы конечно можно, но зачастую очень сложно. Вручную это делается гораздо быстрее. А вот для оценки выражений, вычисления интегралов, производных, пределов функций, решения уравнений в символьном виде очень даже удобно использовать Mathcad.

Что касается численных вычислений, то здесь Mathcad успешно справляется с поставленной задачей. Однако, на мой взгляд, в системе Mathcad имеется ряд недоработок, ограничивающих использование системы в инженерной практике. Это ограничения при использовании размерностей в расчетах, при решении дифференциальных уравнений, при анализе экспериментальных данных. Совершенно недооценены создателями системы Mathcad раздел программирование, находящийся в зачаточном состоянии. Но даже в таком виде с использованием Mathcad можно запрограммировать задачу любой сложности.

Практически все студенты (а я ежегодно обучаю сопротивлению материалов и работе в Mathcad около сотни студентов) в Mathcad считают так же, как вручную на микрокалькуляторах. Каждое слагаемое, каждый интеграл вычисляют отдельно.

Во всех 60 примерах, находящихся на компакт-диске, как и в своих книгах по использованию Mathcad [9], [10], я демонстрирую возможности записи в Mathcad универсальных выражений, каждое из которых многократно производит вычисление либо с использованием матричной записи выражений, либо с применением дискретной переменной, либо с записью операторов условия.

Используйте в работе векторные, матричные обозначения, знаки суммирования и произведения. Посмотрите как компактно и зачастую элегантно выглядят расчеты в электронной книге.

Усвойте основные принципы работы с Mathcad и совершенствуйте их дальше сами.

СОВЕТ

Для успешного освоения Mathcad рекомендую приобрести мою книгу "Инженерные расчеты в Mathcad 14", выпущенную издательством "Питер" или мои компакт-диски "Mathcad 14 — конструктор программ" и "Самоучитель Mathcad 14", выпущенные фирмой "Новый диск". Эти диски содержат раздел "Быстрый старт в Mathcad", и электронную книгу с описанием всех возможностей Mathcad и около 60 примеров сложных инженерных расчетов.

Чтобы решать задачи в Mathcad не надо быть большим специалистом. Достаточно изучить основы и иметь под рукой большой набор шаблонов для различных вычислений. Такими шаблонами являются программы, содержащиеся в электронных книгах на моих компакт-дисках.

Глава 1. Основные понятия

В этой главе рассматриваются понятия, являющиеся общими для всех (или большинства) разделов сопротивления материалов.

1.1 Реальный объект и расчетная схема

Сопротивление материалов не рассматривает реальные объекты со всеми их индивидуальными особенностями. Оно изучает расчетные схемы и типовые методы расчета. Задача расчетчика выбрать расчетную схему, наиболее близко подходящую к реальному объекту. Удачно выбранная расчетная схема даст результаты расчета, близкие к реальным. При неудачном выборе — результат далек от истины.

В качестве примера возьмем мостовой кран, установленный в пролете цеха (рис. 1.1, а). Различные элементы конструкции испытывают разные нагрузки и рассчитывать на прочность их надо отдельно.



Рис. 1.1 Реальная объект и расчетная схема

Груз весом Q висит на тросе и растягивает его, поэтому первой расчетной схемой логично взять стержень (трос), нагруженный растягивающей силой Q (рис. 1.1, б). Через трос нагрузка передается на барабан лебедки, далее на ось, подшипниковые опоры, зубчатые колеса и т.д.

Фактически каждую деталь лебедки надо рассматривать как отдельную расчетную схему. Лебедка установлена на раме, покрытой листом металла. Это лист можно рассчитать как пластину, нагруженную в 4-х точках крепления болтов (рис. 1.1, в). Колеса тележки мостового крана передают нагрузку на рельсы, которые можно рассматривать как балки на двух опорах. (рис. 1.1, г).

Точность расчета зависит от выбора расчетной схемы. Например, рельсы можно рассматривать как балку просто положенную на опоры, либо как балку, заделанную в кирпичную стену, либо приваренную к другой металлической конструкции. Результаты расчета будут различными.

1.2 Тела, рассматриваемые в сопротивлении материалов

В процессе схематизации конструкции элементы реального тела заменяются их упрощенными моделями. Перечислим основные объекты, рассматриваемые в сопротивлении материалов (рис. 1.2)



Рис. 1.2. Объекты в сопротивлении материалов

1. Брус — тело, у которого один из размеров много больше двух других (длинное, тонкое, в общем случае криволинейное тело).
2. Стержень — прямолинейный брус.
3. Балка — стержень, работающий на изгиб.
4. Оболочка — тело, у которого один из размеров много меньше двух других.
5. Пластина — частный случай оболочки, у которой срединная поверхность — плоскость.
6. Массивное тело.

1.3 Силы внешние и внутренние

Внешняя сила — это мера взаимодействия между телами. В задачах сопротивления материалов внешние силы считаются заданными. К внешним силам относятся также опорные реакции.

Внутренние силы — это мера взаимодействия между частицами одного тела. Внутренние силы самоуравновешенные. Поэтому они не видны на схеме и не влияют на условия равновесия тела.

Внешние силы делятся на *объемные* и *поверхностные*. *Объемные* силы приложены к каждой частице тела по всему его объему. Примером объемных сил являются силы веса и силы инерции.

Поверхностные силы делятся на *сосредоточенные* и *распределенные*. *Сосредоточенными* считаются силы, приложенные к малой поверхности, размеры которой малы по сравнению с размерами тела, например, на схеме мостового крана (рис. 1.1) вес поднимаемого груза передается на рельсы через колеса тележки. При расчете балки на прочность размер зоны контакта колес с балкой мал по сравнению с длиной балки и нагрузку можно считать сосредоточенной. Однако при расчете напряжений вблизи зоны контакта нагрузку следует считать распределенной. К сосредоточенным нагрузкам относят не только сосредоточенные силы, но и пары сил, примером которых можно считать нагрузку, создаваемую гаечным ключом при закручивании гайки.

Распределенные нагрузки бывают распределенными по длине и по площади. В результате действия внешних сил в теле возникают *внутренние* силы. *Внутренняя* сила — мера взаимодействия между частицами одного тела.

Все внешние нагрузки можно разделить на *статические* и *динамические*.

Статическими считаются нагрузки, в процессе приложения которых силы инерции малы и ими можно пренебречь. В противном случае нагрузки считаются *динамическими*.

1.4 Определение внутренних усилий методом сечений.

Внутренние силы определяются методом сечений.

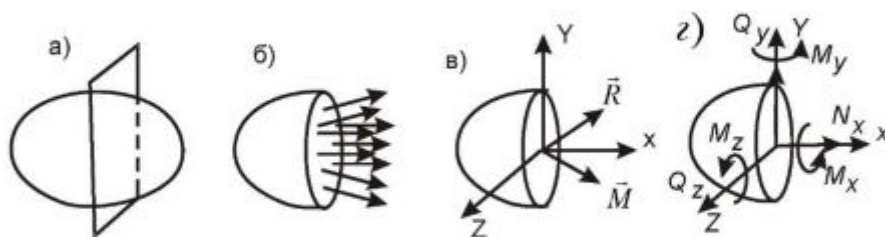


Рис. 1.3. Определение внутренних усилий методом сечений

Мысленно рассекаем тело произвольным сечением (рис. 1.3, а), отбрасываем одну часть тела и рассматриваем равновесие оставшейся части. Если бы не было внутренних сил, оставшаяся неуравновешенная часть тела начала бы двигаться под действием внешних сил. Поскольку сечение мысленное и тело находится в равновесии, действие отброшенной части тела заменяем внутренними силами (рис. 1.3, б), приложенными к каждой частице тела. Из теоретической механики известно, что любая система сил может быть приведена в любую точку пространства в виде главного вектора сил \vec{R} и главного момента сил \vec{M} (рис. 1.3, в). Модуль и направление этих векторов неизвестны. Удобнее всего определять проекции этих векторов на оси x, y, z , где ось x — нормаль к сечению, y и z — оси, лежащие в плоскости сечения. Начало координат в центре тяжести сечения (рис. 1.3, г)

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} N_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix}, \quad \vec{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}.$$

Проекции векторов R и M носят следующие названия:

- N_x — продольное усилие,
- Q_y и Q_z — поперечные силы соответственно вдоль осей y и z ,
- $M_x = M_x$ — крутящий момент,
- M_y и M_z — изгибающие моменты соответственно вокруг осей y и z

В общем случае определения внутренних усилий имеем шесть неизвестных, которые можно определить из шести уравнений равновесия

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow N_x \\ \sum F_y = 0 \rightarrow Q_y \\ \sum F_z = 0 \rightarrow Q_z \\ \sum M(F)_x = 0 \rightarrow M_x \\ \sum M(F)_y = 0 \rightarrow M_y \\ \sum M(F)_z = 0 \rightarrow M_z \end{cases}$$

Решая систему из шести уравнений с шестью неизвестными, определяем все внутренние усилия.

Пример

Для заданного стержня (рис. 1.4, а) найти внутренние усилия и построить их эпюры.

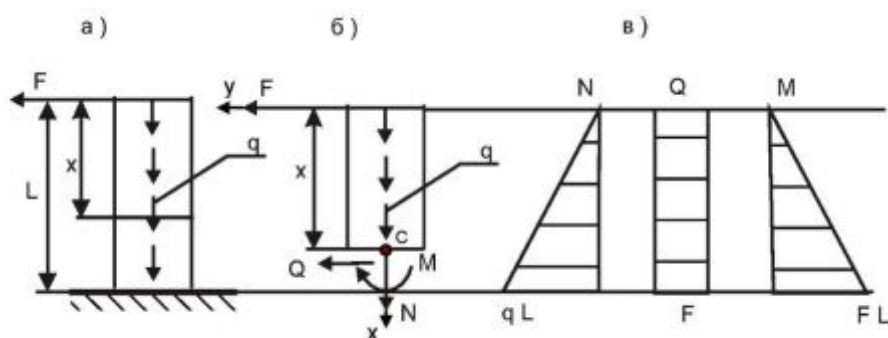


Рис. 1.4. Определение внутренних усилий в стержне

Отсекаем нижнюю часть стержня (рис. 1.4, б). Действие отброшенной части заменяем внутренними усилиями. В плоской задаче из шести внутренних усилий остается только три (продольное усилие N , поперечная сила Q и изгибающий момент M). Для их определения составляем три уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sum F_x = N + qx = 0 \\ \sum F_y = Q + F = 0 \\ \sum M(F)_c = Fx - M = 0 \end{cases} \quad \text{откуда находим} \quad \begin{cases} N = -q \cdot x \\ Q = -F \\ M = F \cdot x \end{cases}$$

Сумма моментов вычислена относительно центра тяжести сечения C .

Знак плюс свидетельствует о том, что направление внутреннего усилия на схеме показано верно. Знак минус говорит о том, истинное направление усилия противоположно выбранному.

Далее строим *эпюры внутренних усилий* (графики их изменения вдоль оси стержня) (рис.1.4, в).

Обычно эпюры внутренних усилий строятся с целью выбора опасного сечения и определения усилий в нем для последующего расчета на прочность.

На практике чаще всего поступают иначе. Отсеченную часть тела не рисуют. Поскольку метод называется "метод мысленных сечений", отсеченную часть тела отбрасывают мысленно и рассматривают сумму сил или моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. На схеме же нужно показать положение рассматриваемого сечения и его текущую координату. От выбора начала координат зависит вид выражения, но не зависит результат выражения.

ВАЖНОЕ ПРАВИЛО

Общее правило определения любого внутреннего усилия:

N_x, Q_y, Q_z равняются алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно на оси x, y или z .

M_x, M_y, M_z равняются алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно относительно осей x, y или z , проходящих через центр тяжести выбранного сечения.

При использовании приведенного правила необходимо принять правило знаков для внутренних усилий, так как в данном случае вектор на схеме не показан и его направление пока не известно.

Правило знаков для внутренних усилий будет введено позднее при рассмотрении деформаций растяжения, изгиба, кручения.

1.5 Напряжения

Напряжением называется интенсивность действия внутренних сил в точке тела или, проще говоря, внутреннее усилие, приходящееся на единицу площади.

Рассечем тело произвольным сечением (рис. 1.5). Выделим малую площадку ΔA . Внутреннее усилие, действующее на нее, обозначим ΔR . Полное среднее напряжение, на этой площадке $\bar{p} = \Delta R / \Delta A$. Найдем предел этого отношения при $\Delta A \rightarrow 0$. Это и будет напряжение в точке тела $\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$.

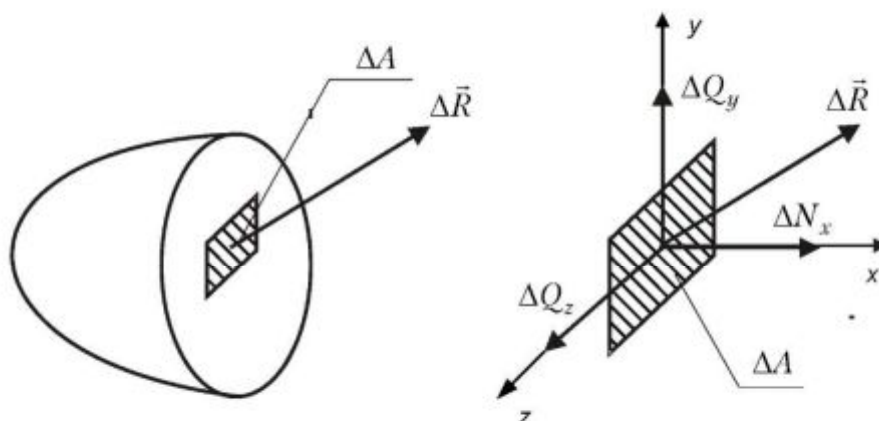


Рис. 1.5. Определение напряжений в точке тела

Чтобы задать вектор полного напряжения в точке надо задать его модуль и направление в пространстве, или задать его проекции на оси координат. Спроектируем вектор ΔR на оси x , y , z , из которых ось x направлена вдоль

нормали к сечению, а оси y и z лежат в плоскости сечения. $\bar{\Delta R} = \begin{bmatrix} \Delta N_x \\ \Delta Q_y \\ \Delta Q_z \end{bmatrix}$. Найдем

проекции полного напряжения на оси x , y , и z .

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N_x}{\Delta A} = \frac{dN_x}{dA} \text{ — нормальное напряжение;}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_y}{\Delta A} = \frac{dQ_y}{dA} \text{ — касательное напряжение вдоль оси } y; \quad (1.1)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_z}{\Delta A} = \frac{dQ_z}{dA} \text{ — касательное напряжение вдоль оси } z.$$

В названии касательного напряжения первый индекс указывает нормаль к площадке, второй индекс — направление касательного напряжения.

1.6 Условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий

В произвольном сечении тела вблизи произвольной точки выделим элементарную площадку dA (рис. 1.6) и покажем напряжения, действующие в выбранной точке.

Пусть закон изменения напряжений по сечению известен. Найдем внутренние усилия в выбранном сечении.

$$\text{Продольное усилие на площадке } dA \quad dN = \sigma_x dA;$$

Поперечная сила вдоль оси y $dQ_y = \tau_{xy} dA$;

Поперечная сила вдоль оси z $dQ_z = \tau_{xz} dA$.

Полные продольное усилие и поперечные силы для всего поперечного сечения есть интеграл от приведенных выражений по площади сечения A .

$$\begin{aligned} N_x &= \int_A \sigma_x dA \\ Q_y &= \int_A \tau_{xy} dA \\ Q_z &= \int_A \tau_{xz} dA \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обратите внимание, что к такому же результату приводит интегрирование выражений (1.1).

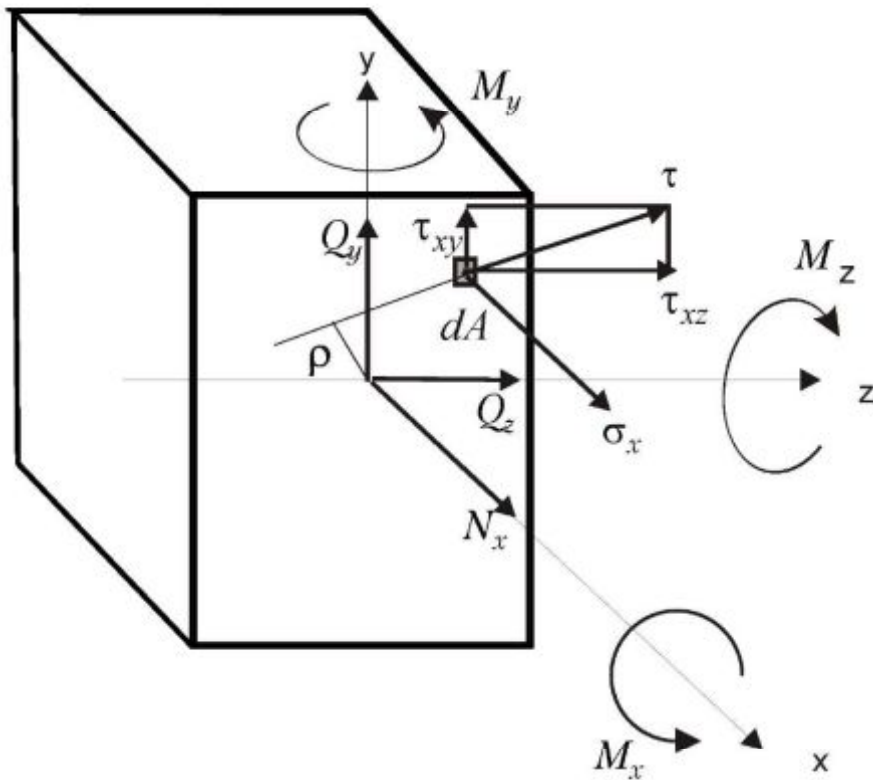


Рис. 1.6. Внутренние усилия и напряжения в точке тела

Найдем выражения для изгибающих и крутящего моментов.

Элементарные моменты вокруг осей x, y, z

$$\begin{aligned} dM_z &= \sigma_x dA \cdot y \\ dM_y &= \sigma_x dA \cdot z \\ dM_x &= \tau_{xz} dA \cdot y - \tau_{xy} dA \cdot z \end{aligned}$$

Выражение для крутящего момента становится проще, если предварительно найти суммарное касательное напряжение $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$. Тогда

$$dM_x = dM_x = \tau dA \cdot \rho.$$

Интегрируя элементарные моменты, получаем

$$\begin{aligned}
 M_z &= \int_A \sigma_x y \cdot dA \\
 M_y &= \int_A \sigma_x z \cdot dA \\
 M_x &= M_z = \int \tau_{xy} \cdot dA
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Выражения (1.2) и (1.3) представляют собой условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий. Каждое внутреннее усилие есть суммарный результат действия напряжений по всему поперечному сечению тела.

1.7 Деформации

Следует различать *деформации* и *перемещения*.

Перемещение — изменение положения точки в пространстве.

Деформация — изменение формы и размеров тела

В отдельных случаях их величины могут совпадать, например, при растяжении стержня, но в общем случае — это разные вещи.

Деформации линейные и угловые

Деформации могут быть *угловые* и *линейные* (рис. 1.7).

Линейная деформация характеризует изменение размеров тела. Она бывает абсолютная ΔL и относительная $\epsilon = \Delta L/L$. Использование относительной деформации предпочтительно, так как она не зависит от размеров тела.

Угловая деформация характеризует изменение формы тела и чаще всего называется углом сдвига.



Рис. 1.7. Линейная и угловая деформация

Угол сдвига — это изменение первоначально прямого угла. $\gamma = \alpha + \beta$.

Полная деформация — это сумма линейной и угловой деформации.

Деформации упругие и пластические

Деформации делятся на *упругие* и *пластические (остаточные)*.

Упругими называются деформации, исчезающие после снятия вызвавших их сил. В противном случае деформации называются *пластическими* или *остаточными*.

Типы деформаций

В зависимости от приложенных к телу нагрузок существуют несколько типов деформации, различающихся законом распределения напряжений по сечению тела.

1. *Растяжение-сжатие* — в поперечном сечении действует только одно внутреннее усилие, не равное нулю, — продольное усилие.
2. *Сдвиг* — в поперечном сечении действует только поперечная сила.
3. *Кручение* — в поперечном сечении действует только крутящий момент.
4. *Изгиб* — в поперечном сечении действуют изгибающий момент и поперечная сила.
5. *Сложное сопротивление* — одновременное действие нескольких типов простых деформаций — растяжения-сжатия, кручения, изгиба.

Для каждого из указанных типов деформации в последующих главах будут выведены свои формулы для расчета на прочность.

1.8. Потенциальная энергия упругой деформации

Целью прочностных расчетов обычно является определение перемещений, деформаций и напряжений в конструкции. Сопротивление материалов рассматривает сравнительно простые расчетные схемы, для которых указанные величины определяются по простым инженерным формулам. Для сложных реальных конструкций в общем случае расчет сводится к решению системы из 15 дифференциальных уравнений и, как правило, не имеет аналитического решения. Приближенное численное решение такой системы также сопряжено с большими трудностями.

Для решения сложных задач успешно применяется энергетический подход, в основе которого лежит определение работы внешних и внутренних сил, определение потенциальной энергии упругой деформации. Для успешного овладения энергетическими методами расчета в курсе сопротивления материалов для каждого вида деформации рассчитывается потенциальная энергия упругой деформации.

Рассмотрим общий подход к определению потенциальной энергии упругой деформации. Для ее расчета используется известный принцип механики:

НАЧАЛО ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Если тело находится в равновесии, то сумма работ внешних и внутренних сил, действующих на тело, равна нулю на любых возможных перемещениях.

Возможными считаются перемещения малые, согласованные со связями.

Заметим, что реальные перемещения конструкции всегда возможные.

$$\delta W^{\text{внеш}} + \delta W^{\text{внутр}} = 0,$$

где $\delta W^{\text{внеш}}$ и $\delta W^{\text{внутр}}$ — вариации (малые приращения) работы внешних и внутренних сил.

При упругой деформации знак вариации можно опустить, тогда

$$W^{\text{внеш}} + W^{\text{внутр}} = 0,$$

где $W^{\text{внеш}}$ и $W^{\text{внутр}}$ — работа внешних и внутренних сил.

Работа внешних сил затрачивается, в основном, на совершение упругой и

пластической деформации. При этом работа пластической деформации обычно во много раз больше упругой деформации. Работа пластической деформации переходит в тепло, а работа упругой деформации переходит в потенциальную энергию, которая постоянно находится в теле (как сжатая пружина) готовая при определенных условиях, например, при разрыве тела, высвободится, что при большом запасе энергии может привести к катастрофическим последствиям.

Далее рассматриваем лишь упругую деформацию тела. Тогда

$$W^{\text{внеш}} = -W^{\text{внутр}} = \Pi,$$

Где Π — потенциальная энергия упругой деформации, которая всегда положительная.

В случае действия одной силы F работа внешних сил равна произведению силы на перемещение Δ под силой, если $F = \text{const}$. В общем случае работа внешних сил равна площади диаграммы деформирования тела в координатах $F - \Delta$, как известно из курса математики (технические приложения определенного интеграла). При упругой деформации перемещение пропорционально нагрузке и на графике прямая линия (рис 1.8), тогда работа силы F

$$W^{\text{внеш}} = \int_0^{\Delta} F \cdot d\Delta = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$$

равна площади, ограниченной графиком подынтегральной функции и осью абсцисс, то есть площади заштрихованного треугольника.

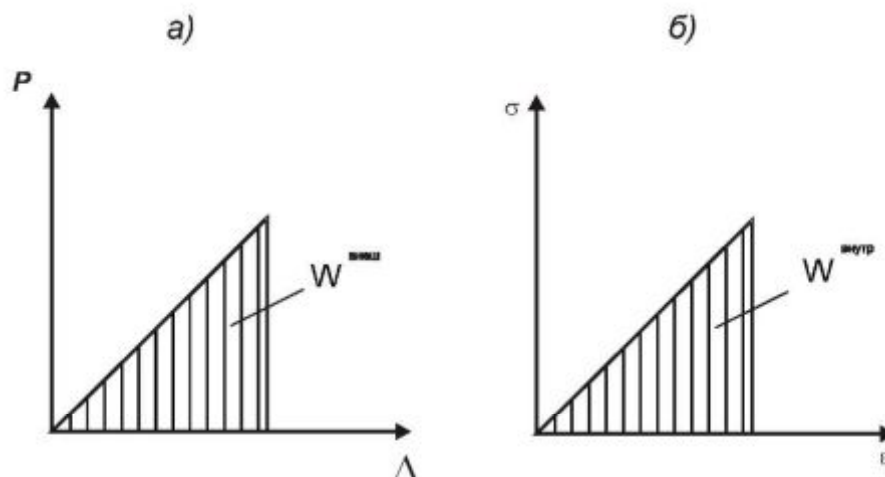


Рис. 1.8. Работа внешних (а) и внутренних (б) сил

В случае действия системы сил — сумме работ каждой силы в отдельности

$$W^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} \sum F \cdot \Delta.$$

Мерой внутренних сил в теле являются напряжения и потенциальную энергию упругой деформации, численно равную работе внутренних сил, можно связать с напряжениями, записав в виде

$$\Pi = \int_V \Pi_0 dV,$$

где Π_0 — удельная потенциальная энергия упругой деформации, накопленная в единице объема тела V .

При растяжении $\Pi_0 = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$ (равна площади треугольника на диаграмме деформирования в координатах $\sigma - \varepsilon$ (рис. 1.8 б)).

Величину Π_0 в дальнейшем для отдельных видов деформации выразим через напряжения и деформации. Используя начало возможных перемещений, получим связь между нагрузками, перемещениями, напряжениями и деформациями, которая и ляжет в основу энергетических методов расчета, включая метод конечных элементов, самый мощный метод расчета напряженно-деформированного состояния конструкций.

1.9 Гипотезы и допущения в сопротивлении материалов

Для расчета напряжений и деформаций в произвольном теле надо составить систему из 15 дифференциальных уравнений и решить ее. В общем случае такая задача неразрешима. Чтобы получить решение задачи, необходимо принять упрощающие гипотезы, которые сужают круг решаемых задач, но позволяют использовать для решения простые инженерные формулы. Перечислим основные гипотезы, используемые в курсе сопротивления материалов.

- *Гипотеза сплошности, однородности, изотропности материалов.*

Пренебрегая атомарной структурой материала, считаем его сплошным, однородным, изотропным.

Материал считается

- *сплошным*, если в теле нет разрывов,
- *однородным*, если его свойства во всех точках одинаковы,
- *изотропным*, если его свойства во всех направлениях одинаковы

- *Справедлив закон Гука.*

Перемещения точек тела пропорциональны приложенным нагрузкам. Деформации пропорциональны напряжениям.

- *Гипотеза малости деформаций.*

Для всякого твердого тела деформации малы по сравнению с размерами тела. При составлении уравнений равновесия тела изменением размеров тела вследствие деформации можно пренебречь.

- *Принцип независимости действия сил.*

Результат действия на тело системы сил не зависит от порядка приложения нагрузок и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности.

В качестве примера рассмотрим балку, нагруженную тремя нагрузками F , M и q (рис. 1.9). Суммарный прогиб конца балки (точки A) будет равен сумме прогибов балки от действия отдельно приложенных сил F , M и q . $\Delta_A = \Delta_A^F + \Delta_A^M + \Delta_A^q$.

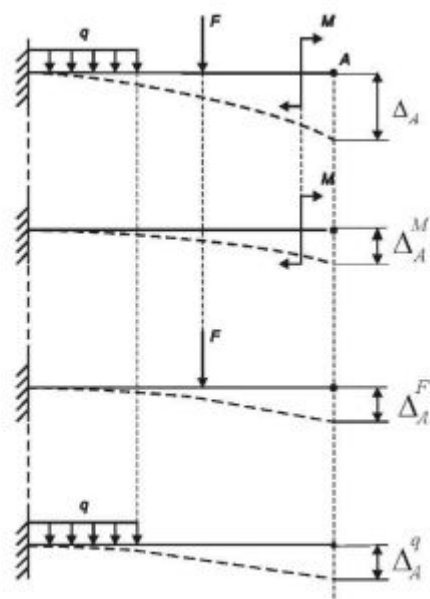


Рис. 1.9. Принцип независимости действия сил

Следующие две гипотезы относятся только к *длинным и тонким стержням*:

□ *Гипотеза плоских сечений.*

Сечения плоские до деформации остаются плоскими после деформации.

Эту гипотезу можно рассматривать как экспериментальный факт, наблюдаемый, например, при нанесении прямоугольной сетки на резиновый стержень (рис. 1.10). Например, при изгибе такого стержня продольные линии искривляются, в то время, как поперечные линии остаются прямыми.



Рис. 1.10. Гипотеза плоских сечений

□ *Гипотеза отсутствия боковых давлений.*

Волокна друг на друга не давят.

Гипотеза полагает, что нормальные напряжения σ действуют только вдоль продольной оси стержня и не действуют в поперечных направлениях. На самом деле σ в поперечных направлениях действуют, но они во много раз меньше, чем в продольном направлении и для упрощения расчетов ими можно пренебречь.

1.10 Условие прочности

При оценке работоспособности конструкции необходимо выбрать критерии выхода конструкции из строя. Это может быть разрушение конструкции на части, появление недопустимых пластических деформаций, недопустимых перемещений какой-то части конструкции, потеря устойчивости, перегрев конструкции, износ рабочей части и т.д.

Пусть $A_{\text{пред}}$ — критерий выхода из строя, $\max A$ — максимальное значение того же параметра в реальной конструкции. Тогда условие выхода из строя $\max A = A_{\text{пред}}$.

Условие невыхода из строя конструкции (гарантия работоспособности) $\max A \leq [A]$,

где $[A] = \frac{A_{\text{пред}}}{n}$ — допускаемое значение параметра A , n — коэффициент запаса,

выбираемый с учетом условий эксплуатации и многих других факторов.

В сопротивлении материалов, где оценивается, в первую очередь, прочность и жесткость конструкции, используют условие прочности и условие жесткости:

Условие прочности $\max \sigma \leq [\sigma]$, где $\max \sigma$ и $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$ — максимальное напряжение в конструкции, и допускаемое напряжение.

Более подробно о выборе допускаемого напряжения, рассказано в главе 5 (Механические характеристики материалов). До рассмотрения этого раздела допускаемое напряжение $[\sigma]$ считаем заданным. Максимальное напряжение в конструкции определяется по формулам сопротивления материалов.

Условие жесткости $u \leq [u]$, где u и $[u]$ — реальное и допускаемое перемещение выбранной точки конструкции.

Реальное перемещение определяется методами сопротивления материалов. Допускаемое перемещение задается из условий эксплуатации конструкции.

1.11. Виды опор, используемые в схемах сопротивления материалов

Реальные узлы крепления конструкции в схемах сопротивления материалов заменяются их условными обозначениями: заделкой и шарнирными опорами (рис.1.11).

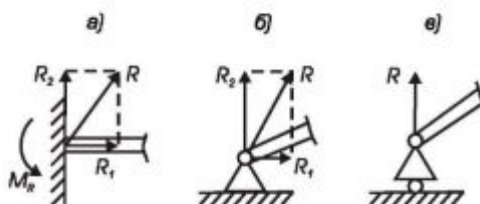


Рис. 1.11. Виды опор

При решении плоской задачи считается, что всякий элемент имеет 3 степени свободы (3 возможных перемещения, однозначно определяющих положение тела в пространстве): вращение вокруг точки и 2 линейных перемещения вдоль 2-х осей).

Всякая реакция возникает в местах наложения связей.

Если наложено ограничение на одно из указанных выше перемещений (чаще всего перемещение полагается равным нулю), то в этом направлении возникает реакция опоры: сосредоточенная сила при ограничении линейного перемещения и пара сил при ограничении углового перемещения.

В зависимости от налагаемых ограничений на перемещение тела различают следующие виды опор:

Заделка — нет перемещений (жесткое закрепление тела, например, сварка), возникают реакция неизвестной величины и направления R и реактивный момент M_R .

Неизвестную реакцию удобно представить в виде ее проекций на оси координат любого направления, например, для плоской системы горизонтальное R_1 и вертикальное R_2 . Итого: в плоской заделке возникают 3 неизвестные реакции — 2 силы и одна пара сил (рис. 1.11, а);

Неподвижная шарнирная опора — возможно вращение вокруг опоры, линейных перемещений нет, поэтому возникает реакция неизвестной величины и направления R , которую заменяют ее проекциями на оси координат. Для плоской системы

возникают 2 неизвестные реакции: R_1 и R_2 (рис. 1.11, б).

Примером шарнирной опоры можно считать подшипниковую опору. Внутреннее кольцо шарикового или роликового подшипника может поворачиваться относительно наружного на угол 2° . Этого достаточно, чтобы считать подшипник шарнирной опорой.

Подвижная шарнирная опора — возможно вращение вокруг опоры и перемещение вдоль одной из осей, например, плавающая подшипниковая опора. В ней возникает одна реакция R : сила в направлении ограничения движения (перпендикулярно направлению движения вдоль оси) (рис. 1.11, в).

1.12. Статически определимые и статически неопределимые системы

Система называется *статически определимой*, если число неизвестных в ней равно числу полезных уравнений равновесия.

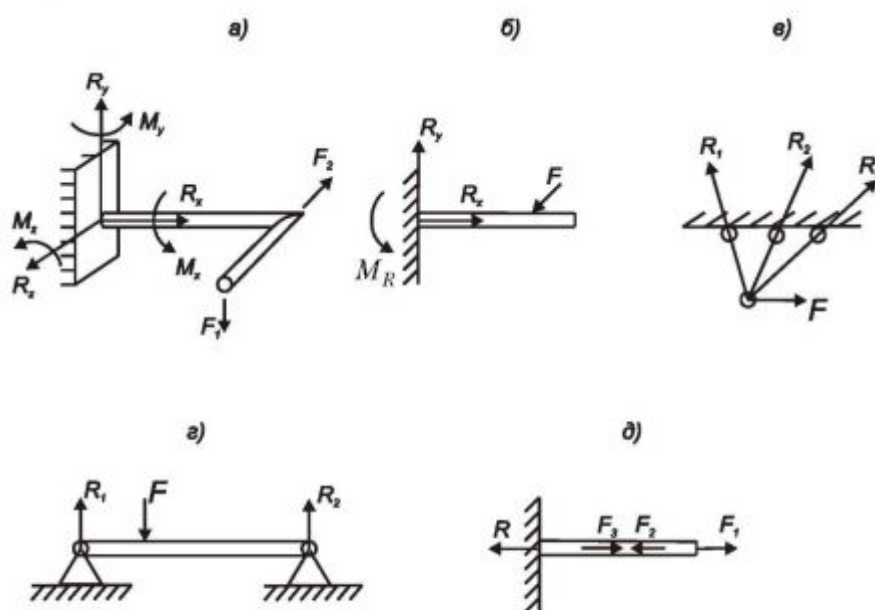


Рис. 1.12. Различные системы сил

Для всякой пространственной системы сил (рис. 1.12, а) можно составить систему из шести уравнений равновесия и, решив ее, найти шесть неизвестных сил. Однако среди этих уравнений могут быть тождества, обращающиеся в нуль при любых значениях нагрузок. Это бесполезные уравнения и, следовательно, число неизвестных сил должно быть равно числу уравнений минус число тождеств.

Для произвольной плоской системы сил (рис. 1.12, б) можно составить три уравнения, не являющихся тождествами, например, сумму проекций всех сил на две любые оси и одну сумму моментов всех сил, относительно какой-либо точки.

Для плоской системы сходящихся сил (рис.1.12, в) можно составить лишь два уравнения, не являющихся тождествами. Сумма моментов всех сил относительно точки их пересечения тождественно равна нулю. Из двух уравнений (любых) можно определить лишь две неизвестные силы.

Для плоской системы параллельных сил (рис.1.12, г) бесполезной оказывается сумма проекций на ось, перпендикулярную силам. Соответственно из 2-х любых уравнений равновесия можно найти лишь 2 неизвестные силы.

Для системы коллинеарных сил (действующих вдоль одной прямой линии) (рис. 1.12, д) можно составить лишь одно полезное уравнение — сумму проекций

всех сил на эту прямую, которая равна просто сумме сил.

Система называется *статически неопределимой*, если число неизвестных в ней больше числа полезных уравнений равновесия.

Степень статической неопределимости равна разности между числом неизвестных и числом полезных уравнений равновесия (не являющихся тождествами).

Для раскрытия статической неопределимости существуют разные способы, которые будут рассмотрены далее. Заметим лишь, что всякая реакция возникает в местах наложения внешних связей (ограничений движения системы). Нет ограничения — нет реакции. Есть ограничение — есть реакция. В то же время любая наложенная связь (любое ограничение движения) позволяет составить дополнительное уравнение, называемое уравнением совместности перемещений. В результате появляется возможность сделать число уравнений, равным числу неизвестных и решить систему уравнений.

На рис. 1.13 приведены примеры различных систем.

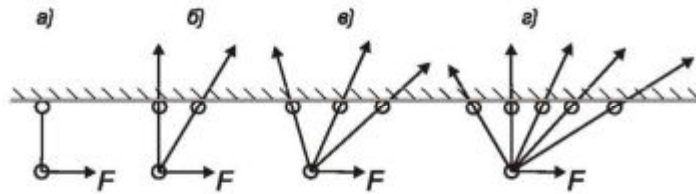


Рис. 1.13. Статически определимые и статически неопределимые системы

Схема а) — стержень недостаточно закреплен, он может свободно вращаться под действием силы. Это механизм. Такие задачи требуют учета сил инерции и рассматриваются в курсе теории машин и механизмов.

Схема б) — система из двух стержней статически-определимая, два усилия в двух стержнях определяются из двух уравнений равновесия.

Схема в) — система из трех стержней 1 раз статически-неопределима:

неизвестных усилий — 3, полезных уравнений равновесия — 2, степень статической неопределимости $3 - 2 = 1$.

Схема г) — система 3 раза статически-неопределима:

неизвестных усилий — 5, полезных уравнений равновесия — 2, степень статической неопределимости $5 - 2 = 3$.

При большом количестве опор и шарниров определить степень статической неопределимости довольно трудно. Проще это сделать следующим образом:

Мысленно отбрасываем связи по одной до тех пор, пока система не превратится в механизм. Верните на место одну связь (любую). Система станет статически определимой. В таком виде число отброшенных связей равно степени статической неопределимости системы.

Решение статически-неопределимых задач значительно более сложная и трудоемкая проблема. Практически без использования компьютера можно решить лишь 2 – 3 раза статически-неопределимые задачи, с использованием Mathcad можно решить задачи с большой степенью статической неопределимости.

1.13. Цели и задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов — это азбука расчетов на прочность. Здесь студенты знакомятся с основными понятиями и методами расчетов. Но этим не ограничивается предназначение сопротивления материалов. На стадии эскизного проектирования, приступая к работе над новой конструкцией, инженер с помощью простых формул сопротивления материалов определяет основные размеры конструкции или

допускаемые нагрузки, если размеры конструкции заданы заранее. Конечно, эти формулы приближенные. Они имеют определенные ограничения, вызванные большим количеством упрощающих расчет гипотез, но надо помнить, что условие прочности $\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$ состоит из левой и правой частей. Определяемая опытным путем величина $\sigma_{\text{пред}}$ уже содержит ошибку ~10%. Коэффициент запаса n вообще назначается почти "с потолка". В таком случае добиваться высокой точности расчета в левой части неравенства просто не имеет смысла и выдвигаемое обычно требование 5%-ной точности расчетов представляется несколько завышенным. Результаты, получаемые по формулам сопротивления материалов, всегда находятся в пределах здравого смысла.

На второй стадии проектирования после определения основных размеров и рабочих параметров конструкции проводится значительно более точный расчет прочностных и динамических характеристик конструкции с помощью современных компьютерных программ с использованием метода конечных элементов.

Для ответственных конструкций с целью уменьшения коэффициента запаса и, соответственно, веса конструкции, на заключительной стадии доводки изделия проводятся натурные стендовые испытания.

В процессе решения задачи, кроме определения внутренних усилий, как уже сказано, требуется подобрать размеры конструкции. Число неизвестных в задаче соответственно увеличивается. Потребуется дополнительные уравнения. Таким уравнением является условие прочности. Но оно одно, следовательно, допускает появление только одного неизвестного, чаще всего размера сечения. Если же неизвестных размеров несколько, то они должны быть связаны между собой из конструктивных соображений. Если размеры конструкции известны, условие прочности позволяет подобрать допускаемую нагрузку или, если и нагрузка известна, просто проверить выполнение условия прочности.

Во всех учебниках сопротивления материалов подробно описывается решение простых задач, поэтому в данной книге рассматриваются лишь сложные примеры (по возможности в общем виде, позволяющем решить широкий круг задач), решение которых без использования компьютера очень сложно, а иногда и невозможно.

Сопротивление материалов рассматривает в основном упругие стержневые системы. Расчет стержневых систем при упругопластических деформациях рассматривается в главе 8.

Для различных специальностей в курс сопротивления материалов включают различные дополнительные главы, в которых описывается расчет наиболее характерных для данной специальности элементов конструкций, таких как, тонкостенные оболочки, толстостенные трубы, тонкие пластины и др.

Сопротивление материалов рассматривает тела, находящиеся в равновесии. Как правило, — это неподвижные конструкции или движущиеся с постоянной скоростью. Однако, в принципе, с учетом сил инерции можно рассматривать и тела, движущиеся с ускорением (глава 14).

1.14. Неучитываемые факторы

Как уже говорилось, расчеты по формулам сопротивления материалов ведутся на стадии эскизного проектирования и носят приближенный характер. При этом не учитывается ряд факторов, существенно влияющих на работоспособность конструкции. Отметим наиболее важные из них.

1.14.1 Концентрация напряжений

В местах резкого изменения формы тела происходит резкое возрастание напряжений, называемое *концентрацией напряжений*.

Типичными концентраторами напряжений являются: отверстия, канавки (смазочные, для выхода резьбы), резьба, уступы и галтели, шлицы и шпоночные канавки и так далее.

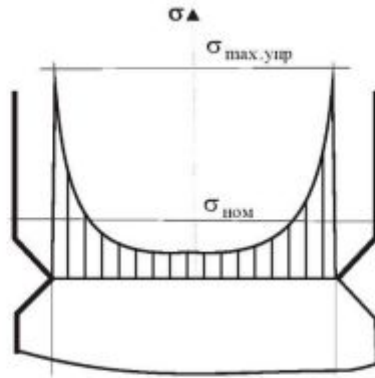


Рис. 1.14. Концентрация напряжений при растяжении полосы с надрезом

На рис. 1.14 приведен пример концентрации напряжений при растяжении плоской полосы с двумя боковыми надрезами.

В местах концентрации напряжений несправедлива гипотеза плоских сечений, лежащая в основе большинства расчетов в сопротивлении материалов. Скорость возрастания напряжений зависит, в основном, от кривизны поверхности. Чем меньше радиус кривизны, тем больше концентрация напряжений

Упругие напряжения вблизи концентраторов напряжений определяются методами теории упругости или экспериментально. Для оценки степени концентрации напряжений вводится теоретический коэффициент концентрации напряжений

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}},$$

где σ_{\max} — максимальное упругое напряжение, $\sigma_{\text{ном}}$ — номинальное (среднее) напряжение, рассчитываемое по простым формулам сопротивления материалов при растяжении, изгибе, кручении.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений α_{σ} может достигать очень больших значений. Так у края отверстий $1 < \alpha_{\sigma} < 3$ в зависимости от диаметра отверстия (чем меньше диаметр, тем больше концентрация напряжений). Вблизи вершины трещины коэффициент $\alpha_{\sigma} \approx 200$.

Степень опасности концентрации напряжений существенно уменьшается в условиях пластических деформаций, неизбежно возникающих вблизи концентраторов напряжений.

Для оценки реального влияния концентрации напряжений на прочность детали вводится эффективный коэффициент концентрации напряжений

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{пред.конц}}},$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ — разрушающее напряжение для детали без концентратора напряжений, $\sigma_{\text{пред.конц}}$ — разрушающее напряжение для детали с концентратором напряжений.

Эффективный коэффициент K_{σ} , как правило, намного меньше теоретического α_{σ} .

Для уменьшения влияния концентрации напряжений принимают конструктивные меры (увеличение радиуса кривизны) и технологические (поверхностное упрочнение).

При расчетах на прочность в условие прочности надо вводить поправку

$$K_{\sigma} \cdot \max \sigma_{\text{ном}} \leq [\sigma].$$

При статическом нагружении для деталей из пластичных материалов влияние концентрации напряжений мало и в расчетах полагают $K_{\sigma} = 1$, то есть влияние концентрации напряжений не учитывается.

При переменной нагрузке учет концентрации напряжений необходим. Реальные значения эффективного коэффициента концентрации напряжений в конструкциях $1 < K_{\sigma} < 3$.

1.14.2. Изменение механических свойств материала

В расчетах допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$ принимают величиной постоянной, заданной. Однако в реальной конструкции предельное напряжение $\sigma_{\text{пред}}$, вызывающее выход конструкции из строя, изменяется с изменением условий эксплуатации. Так предел текучести, чаще всего принимаемый в качестве $\sigma_{\text{пред}}$, при изменении скорости и температуры эксплуатации может, как увеличиться в несколько раз, так и уменьшиться в несколько раз.

Факторы, влияющие на механические свойства материала, рассматриваются в главе 17 этой книги.

1.14.3. Вероятность выхода из строя

Вероятность выхода конструкции из строя зависит как от погрешности расчетов, так и от ошибки в определении механических свойств материала. Для ее учета необходимо использовать сложные математические методы расчета надежности работы конструкции.

Приближенно вероятность выхода из строя можно задать с помощью коэффициента запаса в условии прочности.

Коэффициент запаса

- $n = 1$ соответствует вероятности выхода из строя 50%,
- $n = 1,2$ примерно соответствует вероятности невыхода из строя 90%,
- $n = 1,5$ примерно соответствует вероятности невыхода из строя 99%,
- $n = 2$ примерно соответствует вероятности невыхода из строя 99,9%.

Много это или мало 99,9%? Для неответственных деталей много, для ответственных мало. Так для каната подъема лифта это означает на 1000 подъемов одно падение, что недопустимо.

Для уменьшения вероятности разрушения обычно используют дублирующие устройства. Тогда вероятность разрушения равна произведению вероятностей всех устройств. Если для одного устройства вероятность разрушения 0,001, то для двух устройств уже 0,000 001, что гораздо надежнее.

1.14.4. Принцип Сен-Венана

На расстояниях, превышающих наибольший размер поперечного сечения тела, от места приложения нагрузки напряжения и деформации не зависят от способа приложения нагрузки.

На рисунке 1.15 два одинаковых стержня нагружены одинаковыми по величине нагрузками. Но одна из них — сосредоточенная сила, например, нажим иглой, другая — равномерно распределенная по всему сечению, например, нажим ладонью. Очевидно, что под иглой деформации и напряжения очень большие, а по краям сечения материал не деформируется. При нажме ладонью напряжения по всему сечению примерно одинаковые. Вдали от места приложения нагрузки влиянием способа приложения нагрузки можно пренебречь. Эпюры напряжений в сечении становятся одинаковыми.

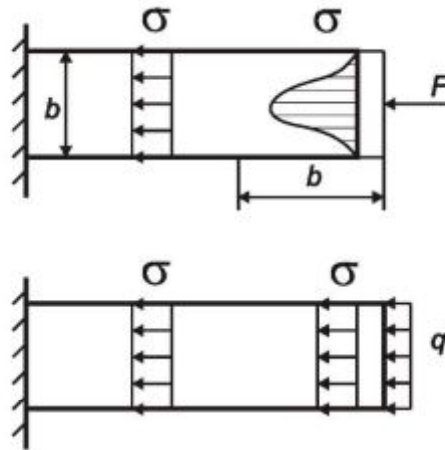


Рис. 1.15. Принцип Сен-Венана

ЗАМЕЧАНИЕ

Менее научно, но более понятно, принцип Сен-Венана можно сформулировать так:

Вблизи мест приложения нагрузок формулы сопротивления материалов несправедливы.

При использовании любых формул сопротивления материалов об этом принципе забывать нельзя и в местах приложения нагрузки предусматривать соответствующие места крепления, утолщения тела.

Глава 2. Геометрические характеристики поперечных сечений

Известны три геометрические характеристики, знакомые каждому — это длина, площадь, объем, которые имеют определенный физический смысл. В этой главе рассмотрим новые характеристики, которые будут использоваться в расчетных формулах сопротивления материалов: статические моменты и моменты инерции площади сечений. Эти характеристики не имеют физического смысла. Их нельзя измерить.

При выводе формул сопротивления материалов иногда случается, что часть формулы представляет собой интегральное выражение, зависящее только от формы и размеров сечения. Для упрощения последующего использования формул удобно такое выражение подсчитать заранее для различных форм сечений.

Статические моменты площади сечений используются при определении положения центра тяжести сечения, при расчете касательных напряжений при изгибе.

Моменты инерции используются при расчете напряжений и перемещений при изгибе, при кручении и т. д.

2.1 Статические моменты площади сечений

Статическими моментами площади сечений называются интегралы следующего вида

$$\begin{aligned} S_y &= \int_A z^2 dA \\ S_z &= \int_A y^2 dA \end{aligned} \quad (2.1)$$

У статических моментов нет физического смысла, но есть геометрическая интерпретация.

Рассмотрим сечение произвольной формы (рис. 2.1).

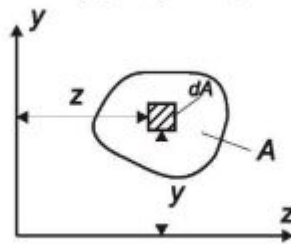


Рис.2.1. Геометрическая интерпретация статических моментов площади сечений

Выделим в сечении элементарную площадку dA с координатами y и z . Произведение площади dA на координату y есть элементарный статический момент dS_z относительно оси z . Это понятие аналогично моменту силы относительно оси. Если предположить, что A — это вес пластины, имеющей форму нашего сечения, то статический момент S_z — это момент силы тяжести пластины относительно оси z .

2.1.1. Свойства статических моментов площади сечения

1. Размерность статических моментов — [длина³], обычно [м³] или [см³].
2. Статические моменты могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.
Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*.
Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения*.
3. Статический момент составного сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения.

Это вытекает из свойств определенного интеграла, который можно вычислять по частям (в нашем случае по частям площади A).

2.1.2. Определение положения центра тяжести

Рассмотрим изменение статического момента при параллельном переносе осей координат (рис. 2.2). Расстояние между старыми и новыми осями координат обозначим a и b . Пусть известны статические моменты относительно старых осей координат $z-y$. Найти статические моменты относительно параллельно перенесенных осей координат z_1-y_1 .

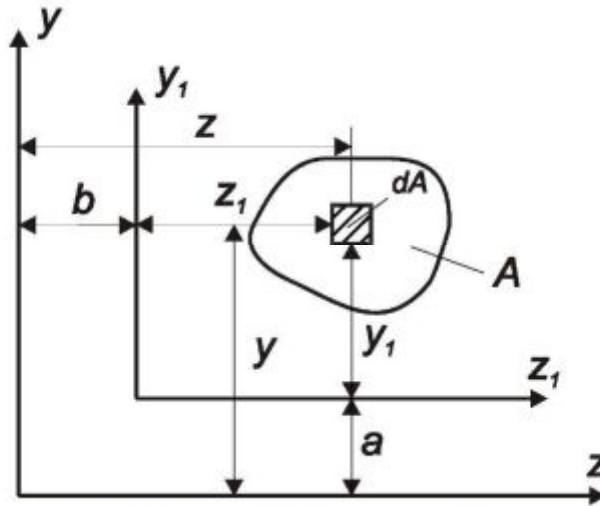


Рис.2.2. К определению статических моментов относительно параллельно перенесенных осей

По определению $S_{z_1} = \int_A y_1 dA$ $S_{y_1} = \int_A z_1 dA$.

Выделим элементарную площадку dA и запишем связь между координатами площадки в старой и новой системах координат $z_1 = z - b$ $y_1 = y - a$.

Тогда $S_{z_1} = \int_A (y - a) dA = \int_A y dA - a \int_A dA = S_z - aA$

Аналогично $S_{y_1} = \int_A (z - b) dA = \int_A z dA - b \int_A dA = S_y - bA$.

Найдем, на сколько надо сместить оси, чтобы они стали центральными.

$$S_{z_1} = S_z - aA = 0, \quad a = y_c = \frac{S_z}{A},$$

$$S_{y_1} = S_y - bA = 0, \quad b = z_c = \frac{S_y}{A}.$$

Здесь y_c и z_c — координаты центра тяжести, но найти их пока нельзя, ведь S_z и S_y неизвестны.

Чтобы найти их, используем способ Мюнхгаузена, который сам себя за волосы из болота вытащил.

Если не известны координаты центра тяжести всего сечения, то разобьем его на такие элементы, для которых эти координаты известны без расчетов, это — прямоугольник, круг, треугольник.

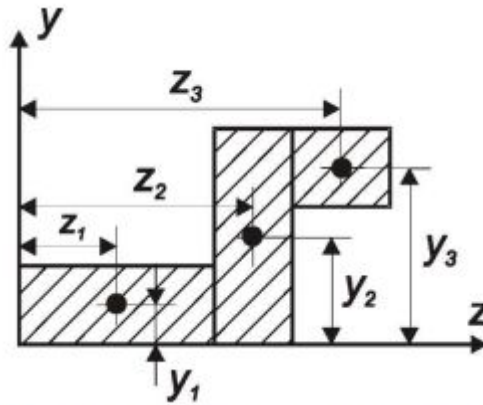


Рис. 2.3. Определение статических моментов составной фигуры

На рисунке 2.3 сечение разбито на три прямоугольника. Статический момент каждого элемента найдем по предыдущей формуле $S_z = y_c \cdot A$ и $S_y = z_c \cdot A$.

Суммарный статический момент всего сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения (по третьему свойству статических моментов)

$$S_z = S_{z1} + S_{z2} + S_{z3} = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} = A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 + A_3 \cdot z_3.$$

или $S_z = \sum S_{z_i}$ и $S_y = \sum S_{y_i}$.

Координаты центра тяжести всего сечения

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2.2),$$

где y_i , z_i , и A_i — координаты центра тяжести и площадь элементов, на которые разбито сечение, n — количество таких элементов.

2.2 Моменты инерции сечений

Моментами инерции сечений называются интегралы следующего вида

$$J_y = \int_A z^2 dA \quad \text{— осевой момент инерции сечения относительно оси } y,$$

$$J_z = \int_A y^2 dA \quad \text{— осевой момент инерции сечения относительно оси } z,$$

$$J_{yz} = \int_A yz dA \quad \text{— центробежный момент инерции сечения,} \quad (2.3).$$

$$J_p = \int_A \rho^2 dA \quad \text{— полярный момент инерции сечения.}$$

2.2.1. Свойства моментов инерции

1. Размерность моментов инерции — [длина⁴], обычно [м⁴] или [см⁴];
2. Осевые и полярный моменты инерции всегда положительные. Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции* сечения.

Оси симметрии всегда главные. Если из двух осей хотя бы одна является осью симметрии, то обе оси главные.

3. Момент инерции составного сечения равен сумме моментов инерции элементов этого сечения.
4. Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции.

Докажем последнее свойство. В сечении площадью A для элементарной площадки dA радиус-вектор ρ и координаты y и z (рис. 2.5) связаны. По теореме Пифагора $\rho^2 = y^2 + z^2$.

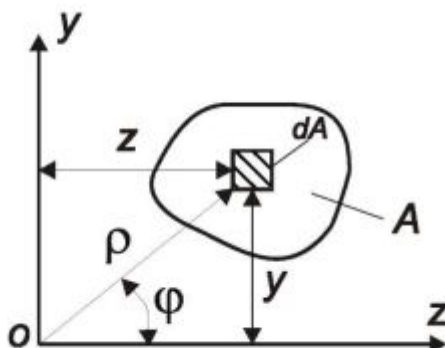


Рис. 2.4. Связь полярных и декартовых координат элементарной площадки

Тогда

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = J_z + J_y.$$

2.2.2. Моменты инерции простейших фигур

В этом разделе получим формулы для моментов инерции относительно собственных центральных осей простейших фигур: прямоугольника, круга, треугольника.

Прямоугольник

Пусть y и z — оси симметрии прямоугольного сечения. Выберем в сечении (рис. 2.5) элементарную площадку dA с координатами y и z . Площадь $dA = dy \cdot dz$.

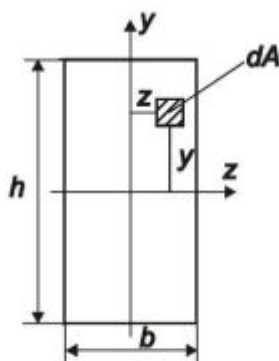


Рис.2.5. К определению моментов инерции прямоугольного сечения

Осевой момент инерции относительно оси y

$$J_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cdot dy \cdot dz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) z^2 dz = \frac{h}{3} \cdot \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) = \frac{hb^3}{12}.$$

Аналогично получаем момент инерции относительно оси z $J_z = \frac{bh^3}{12}$.

Поскольку y и z — оси симметрии, то центробежный момент $J_{zy} = 0$.

Круг и кольцо

Для круга диаметром d вычисления упрощаются, если использовать круговую симметрию. Возьмем в качестве элементарной площадки бесконечно тонкое кольцо с

радиусом ρ и толщиной $d\rho$ (рис. 2.6). Его площадь $dA = 2\pi\rho d\rho$. Тогда полярный момент инерции

$$J_p = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4.$$

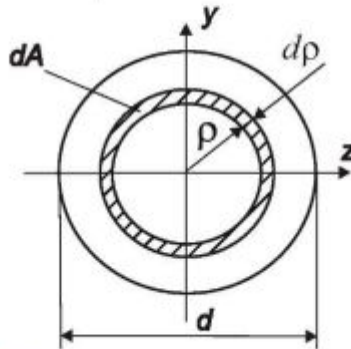


Рис. 2.6. К определению моментов инерции круга

Ввиду круговой симметрии осевые моменты инерции относительно любой центральной оси одинаковы.

$$J_y = J_z = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4.$$

Момент инерции кольца находим как разность моментов инерции двух кругов

$$J_y = J_{yD} - J_{yd} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4),$$

$$J_p = 2J_y = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4)$$

где $\alpha = \frac{d}{D}$.

Момент инерции треугольника

Найдем момент инерции треугольника относительно центральной оси z_0 , параллельной основанию (рис. 2.7). Выделим элементарную площадку dA параллельную основанию

$$dA = b(y) \cdot dy.$$

Из подобия треугольников $\frac{\frac{2}{3}h - y}{h} = \frac{b(y)}{b}$.

Откуда $dA = \left(\frac{2}{3}b - \frac{b}{h}y\right)dy$.

Момент инерции J_z вычисляем с помощью Mathcad символьным путем (рис. 2.8).

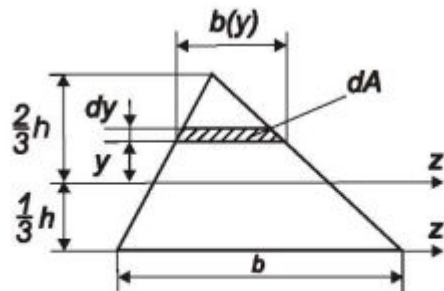


Рис. 2.7. К определению момента инерции треугольника

$$J_z(b, h) = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \left(\frac{2}{3}b - \frac{b \cdot y}{h} \right) dy \rightarrow \frac{1}{36} h^3 \cdot b \quad J_z(b, h) \rightarrow \frac{1}{36} h^3 \cdot b$$

Рис. 2.8 Символьное вычисление момента инерции треугольника

В формуле для J_z параметры можно не писать. Результат будет тот же, но выражение окрасится в красный цвет. Численное вычисление — запрещено, символьное — возможно.

2.2.3. Моменты инерции относительно параллельных осей

Пусть известны моменты инерции относительно центральных осей z_0 и y_0 для сечения площадью A . Найти моменты инерции относительно осей z_1 и y_1 , перенесенных параллельно z_0 и y_0 на расстояния a и b (рис. 2.9).

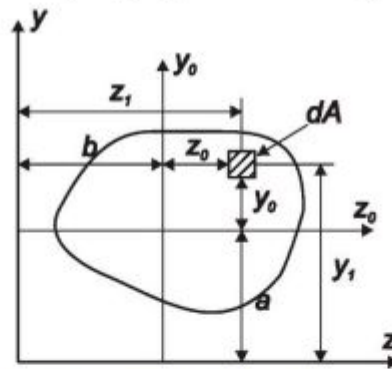


Рис. 2.9. К определению моментов инерции относительно параллельных осей

Запишем связь между координатами элементарной площадки dA в старой и новой системах координат

$$z_1 = z + b \quad y_1 = y + a.$$

Подставим выражения для координат z_1 и y_1 в формулу моментов инерции

$$J_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z + b)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2b \int_A z dA + b^2 \int_A dA = J_{y_0} + b^2 A + 2b S_{z_0}.$$

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA = J_{z_0} + a^2 A + 2a S_{y_0}.$$

$$J_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z + b)(y + a) dA = \int_A zy dA + b \int_A y dA + a \int_A z dA + ab \int_A dA = J_{z_0 y_0} + abA + b S_{z_0} + a S_{y_0}.$$

где $S_{z_0} = 0$ и $S_{y_0} = 0$ как статические моменты относительно центральных осей z_0 и y_0 .

Окончательно формулы для моментов инерции относительно параллельно перенесенных осей имеют вид

$$\begin{aligned} J_{y_1} &= J_{y_0} + b^2 A \\ J_{z_1} &= J_{z_0} + a^2 A \\ J_{z_1 y_1} &= J_{z_0 y_0} + abA \end{aligned} \quad (2.4).$$

Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс квадрат расстояния между осями.

Надо иметь в виду, что относительно центральных осей моменты инерции имеют минимальные значения. Если решается обратная задача: зная моменты инерции

относительно какой-либо оси, найти моменты инерции относительно центральных осей, то в формулах (2.4) появляется знак минус вместо плюса.

2.2.4. Моменты инерции относительно повернутых осей

Пусть известны моменты инерции относительно центральных осей z и y для сечения площадью A . Найти моменты инерции относительно осей u и v , повернутых относительно осей z и y на угол α (рис. 2.10).

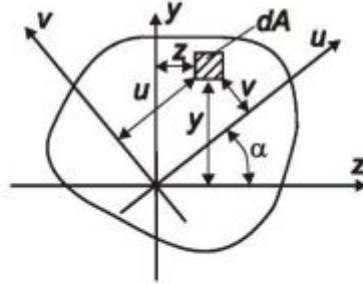


Рис. 2.10. К определению моментов инерции относительно повернутых осей

Запишем связь между координатами элементарной площадки dA в старой и новой системах координат

$$u = y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha) \quad v = y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha).$$

Подставим выражения для координат u и v в формулу моментов инерции

$$\begin{aligned} J_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha))^2 dA = \cos^2 \int_A y^2 dA - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \int_A zy dA + \\ &+ \sin^2(\alpha) \int_A z^2 dA = J_z \cos^2(\alpha) + J_y \sin^2(\alpha) - J_{zy} \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_v &= \int_A u^2 dA = \int_A (y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))^2 dA = \sin^2 \int_A y^2 dA + 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \int_A zy dA + \\ &+ \cos^2(\alpha) \int_A z^2 dA = J_z \sin^2(\alpha) + J_y \cos^2(\alpha) + J_{zy} \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{uv} &= \int_A uv dA = \int_A (y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha))(y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha)) dA = \\ &= \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left(\int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA \right) + (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) \int_A zy dA = \\ &= \frac{J_z - J_y}{2} \sin(2\alpha) + J_{zy} \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

Окончательно формулы для моментов инерции относительно повернутых осей имеют вид

$$\begin{aligned} J_u &= J_z \cos^2(\alpha) + J_y \sin^2(\alpha) - J_{zy} \sin(2\alpha) \\ J_v &= J_z \sin^2(\alpha) + J_y \cos^2(\alpha) + J_{zy} \sin(2\alpha) \\ J_{uv} &= \frac{J_z - J_y}{2} \sin(2\alpha) + J_{zy} \cos(2\alpha) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отметим, что если сложить первое и второе из выражений (2.5), то

$$J_u + J_v = J_z + J_y \quad (2.6)$$

Сумма осевых моментов инерции при повороте осей не меняется.

2.2.5. Главные оси и главные моменты инерции

Определим положение главных осей, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю $J_{uv} = 0$.

$$J_{uv} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin(2\alpha) + J_{zy} \cos(2\alpha) = 0.$$

$$\text{Откуда} \quad \operatorname{tg}(2\alpha_0) = -\frac{2J_{zy}}{J_x - J_y} \quad (2.7),$$

Где α_0 — угол, на который надо развернуть оси, чтобы они стали главными.

Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*. Чтобы определить их, надо в выражения (2.5) подставить значение α_0 , найденное по формуле (2.7).

Докажем, что относительно главных осей осевые моменты инерции имеют *экстремальные значения*. Вычислим первую производную от выражения J_u и приравняем ее нулю.

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = \frac{J_x - J_y}{2} 2\sin(2\alpha) - 2J_{zy} \cos(2\alpha) = 0.$$

$$\text{Откуда} \quad \operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{2J_{zy}}{J_x - J_y} \quad (2.8).$$

Сравнивая выражения (2.7) и (2.8), делаем вывод, что угол наклона главных осей α_0 равен углу наклона осей α , относительно которых моменты инерции принимают экстремальные значения.

Теперь можно уточнить формулировку главных осей.

Главными осями называются оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения.

Для определения главных моментов инерции существует и более простая формула. Для ее получения нужно найти из выражения (2.7) угол α_0 , подставить его в выражение (2.5). Затем исключить α_0 , используя выражения для $\cos(2\alpha)$ и $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

После упрощения получаем

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \quad (2.9).$$

Знак плюс перед вторым слагаемым относится к максимальному моменту инерции, знак минус — к минимальному.

Формула (2.9) (в отличие от формулы (2.5)) не позволяет сразу сказать относительно какой оси момент инерции максимальный. Для этой цели полезно использовать подсказки, основанные на результатах расчета:

Ось, относительно которой момент инерции максимальный,

- проходит через более узкую часть сечения ("поперек живота"),
- проходит через II–IV четверть поперечного сечения, если центробежный момент положительный и через I–III четверть, если центробежный момент отрицательный.

2.2.6. Радиус инерции сечения

Понятие радиус инерции встретится в разделе [устойчивость сжатых стержней](#) (глава 12).

Радиусом инерции называется математическое выражение следующего вида

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}.$$

Радиус инерции можно представить как расстояние от оси z до точки, в которой нужно сосредоточить всю площадь сечения, чтобы момент инерции этой точки был равен моменту инерции всего сечения.

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются *главными радиусами инерции*

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}} \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} .$$

Глава 3. Определение внутренних усилий

При расчете на прочность любой конструкции необходимо определить распределение внутренних усилий в ней, выбрать опасное сечение и затем усилия, действующие в опасном сечении, подставить в условие прочности, представляющее собой готовую формулу.

Определение внутренних усилий — это основная задача, требующая больших усилий, знаний и умения соображать, так как для каждой задачи количество сил и их расположение различно. Различны и способы крепления конструкций. В любой задаче сопротивления материалов 80% времени и сил тратится на определение внутренних усилий, остальные 20% уходит на подстановку найденных усилий в опасном сечении в готовые расчетные формулы, и определение по ним неизвестных параметров конструкции.

Использование Mathcad позволяет создать программы для расчета внутренних усилий, пригодные, конечно, не для всех случаев жизни, но все же для широкого круга задач. Такие программы приведены в примерах к этой главе в электронной книге.

Все нагрузки, действующие на любое тело, можно свести к парам сил, сосредоточенным силам и распределенным нагрузкам. Посмотрим, как зависят внутренние усилия от того или иного вида нагрузки.

Рассмотрим простые виды деформации: растяжение-сжатие, кручение, изгиб.

Напомним приведенное в первой главе, вытекающее из метода сечений правило определения любого внутреннего усилия.

ПРАВИЛО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

N_x, Q_y, Q_z равняются алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно на оси x, y или z .

M_x, M_y, M_z равняются алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, относительно осей x, y , или z , проходящих через центр тяжести выбранного сечения.

Рассмотрим простые виды деформации: растяжение-сжатие, кручение, изгиб.

3.1 Растяжение-сжатие

При растяжении-сжатии все силы направлены вдоль оси стержня. В поперечных сечениях стержня действует только одно внутреннее усилие: продольное. Возможно действие сосредоточенных и распределенных нагрузок. Из приведенного выше общего правила определения внутренних усилий выделим правило определения продольных усилий.

ПРАВИЛО

Продольное усилие равняется сумме сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Положительным считается растягивающее усилие, отрицательным — сжимающее.

Математически это правило можно записать следующим образом:

$$N(x) = \sum F_j + \sum \int q_i(x) \cdot dx.$$

3.2 Кручение

Кручение стержня вызывается парами сил, плоскость действия которых перпендикулярна продольной оси стержня. В этом случае в поперечных сечениях стержня действует только одно внутреннее усилие — крутящий момент M_k .

Внешними нагрузками при кручении могут быть сосредоточенные моменты M и распределенные моменты m .

Применительно к кручению правило определения внутренних усилий выглядит так:

ПРАВИЛО

Крутящий момент равен сумме моментов пар сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Правило знаков крутящего момента, в принципе безразлично, так как прочность при кручении не зависит от направления вращения. Важно лишь не спутать сумму или разность чисел. Тем не менее, для упорядочения расчетов рекомендуется принять:

Крутящий момент положительный, если, глядя с торца стержня, видим внешний момент, действующим против часовой стрелки.

Математически крутящий момент можно записать так

$$M_{\kappa}(x) = \sum M_i + \sum \int m_i(x) \cdot dx.$$

В реальных конструкциях нет сил и моментов, действующих в точке. Каждая сила действует на каком-то участке тела, как правило, малом по сравнению с размерами тела и, поэтому в расчетах заменяется сосредоточенной силой или парой сил, действующей в точке. При кручении распределенные моменты используются в расчетах крайне редко.

3.3 Изгиб

Рассмотрим плоский поперечный изгиб, при котором все силы лежат в одной плоскости и перпендикулярны продольной оси балки. В этом случае в поперечных сечениях действуют поперечная сила Q и изгибающий момент M . Продольное усилие $N = 0$. Возможно действие сосредоточенных и распределенных нагрузок. Согласно приведенному правилу определения внутренних усилий при плоском поперечном изгибе:

ПРАВИЛО

поперечная сила равняется сумме сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения;

изгибающий момент равен сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести сечения

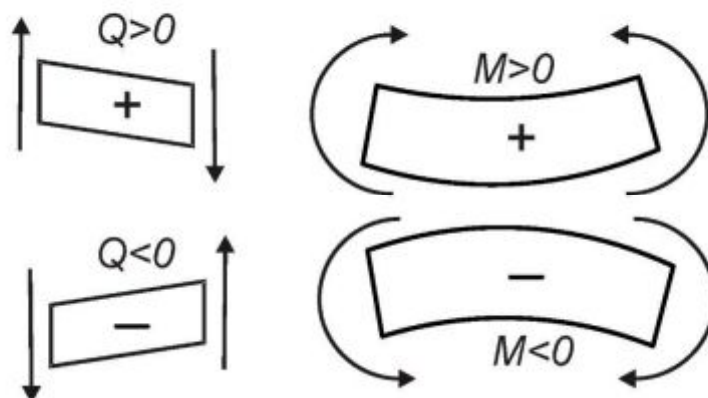


Рис. 3.1. Графическое правило знаков для поперечной силы Q и изгибающего момента M

Правило знаков для поперечной силы и изгибающего момента труднопроизносимые, и лучше всего запомнить это правило как графическое (рис. 3.1).

Математически внутренние усилия при изгибе можно записать следующим образом:

$$Q(x) = \sum F_i + \sum \int q_i(x) \cdot dx$$

$$M_z(x) = \sum M_i + \sum F_i \cdot h(x) + \sum \int q_i(x) \cdot h(x) \cdot dx,$$

где $h(x)$ — плечо силы.

Если с подсчетом суммы сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, все ясно, то подсчет суммы моментов требует дополнительных пояснений. Практика работы со студентами показывает, что больше всего ошибок студенты

делают при определении изгибающих моментов в сечениях балки, поэтому считаю необходимым повторить правило определения момента силы, известное из курсов физики и теоретической механики.

ПРАВИЛО

Для плоской задачи:

Момент силы относительно какой-либо точки равен произведению силы на плечо.

Плечо — перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы.

Для пространственной задачи:

Момент силы относительно какой-либо оси в пространстве равен произведению проекции силы на плоскость, перпендикулярную заданной оси, на плечо.

Плечо — кратчайшее расстояние в пространстве между линией действия силы и заданной осью.

Пара сил — это две одинаковые силы, находящиеся на фиксированном расстоянии друг от друга. Если задана пара сил, то *момент пары сил* — величина постоянная для любой точки.

3.4. Дифференциальные зависимости внутренних усилий от распределенной нагрузки

3.4.1. Растяжение-сжатие

Рассмотрим стержень, на который среди прочих нагрузок действует распределенная по любому закону нагрузка q_x , действующая вдоль оси стержня x (рис. 3.2).

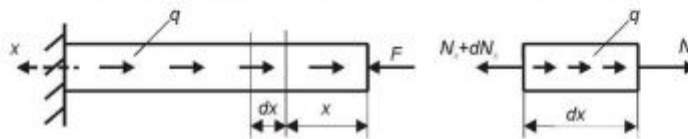


Рис. 3.2. К выводу дифференциальной зависимости между N_x и q_x

Выделим элемент стержня длиной dx в той части стержня, где действует распределенная нагрузка, и рассмотрим условия его равновесия. В пределах бесконечно малой длины dx здесь и далее интенсивность распределенной нагрузки можно считать постоянной. Тогда

$$\sum F_x = N_x + qdx - N_x - dN_x = 0,$$

откуда
$$q = \frac{dN_x}{dx}.$$

3.4.2. Кручение

Рассмотрим стержень, на который среди прочих нагрузок действует распределенная по любому закону нагрузка m_x , закручивающая стержень вокруг продольной оси стержня x (рис. 3.3). Выделим элемент стержня длиной dx , в той части стержня, где действует распределенный момент, и рассмотрим условия его равновесия.

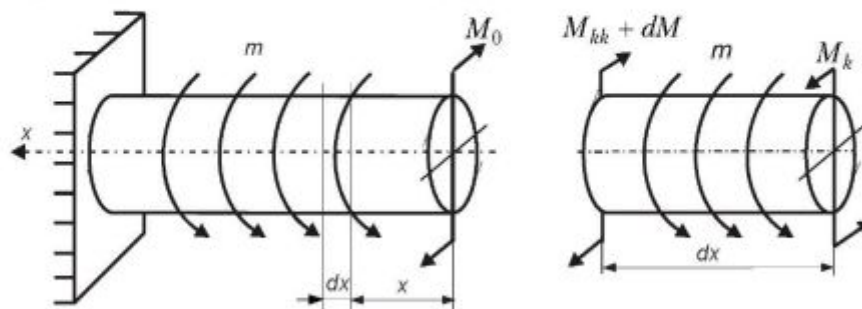


Рис. 3.3. К выводу дифференциальной зависимости между M_k и m_x

$$\sum M(F)_x = M_k + mdx - M_k - dM_k = 0,$$

откуда
$$m = \frac{dM_x}{dx}.$$

3.4.3. Изгиб

Возьмем балку, нагруженную различными нагрузками (рис. 3.19), вырежем элемент ее в той части балки, где действует распределенная нагрузка и запишем условия равновесия элемента балки

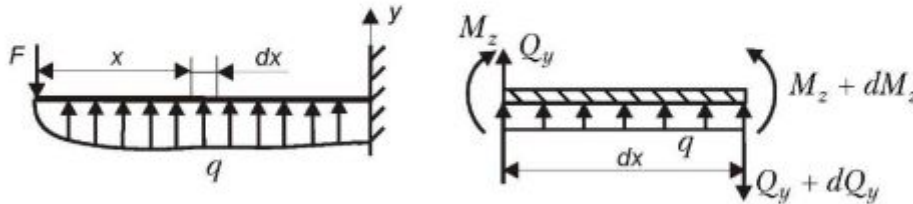


Рис. 3.4. К выводу дифференциальных зависимостей между M, Q и q

$$\sum F_y = Q_y + qdx - Q_y - dQ_y = 0$$

$$\sum M(F)_z = -M_z - Q_y dx - (qdx) \frac{dx}{2} + M_z + dM_z = 0$$

откуда

$$q = \frac{dQ_y}{dx} \quad Q_y = \frac{dM_z}{dx} \quad \text{или} \quad q = \frac{d^2 M_z}{dx^2}.$$

Найденные дифференциальные зависимости используются для проверки правильности построения эпюр внутренних усилий или для построения этих эпюр вообще без расчетов. Рассмотрим следствия из записанных дифференциальных зависимостей.

3.4.4. Следствия из дифференциальных зависимостей

Полученные дифференциальные зависимости справедливы при любом виде нагружения. Однако при растяжении и при кручении распределенная нагрузка встречается редко, поэтому все дальнейшие рассуждения проведем на примере изгиба.

В основе следствий лежит геометрический смысл производной и интеграла.

Производная от функции равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции.

Поперечная сила есть тангенс угла наклона касательной к эпюре изгибающих моментов.

Чем больше поперечная сила при изгибе, тем больше наклон эпюры изгибающих моментов. Если поперечная сила положительная, наклон эпюры изгибающих моментов положительный (против часовой стрелки) (рис. 3.20).

Интеграл от функции равен площади, ограниченной кривой подинтегральной функции и осью абсцисс.

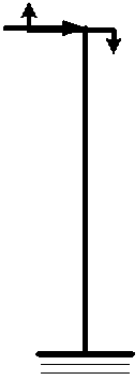
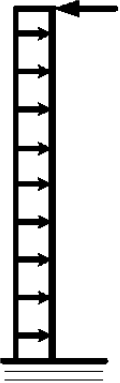

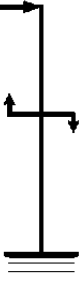
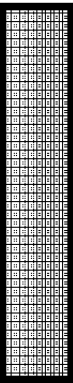
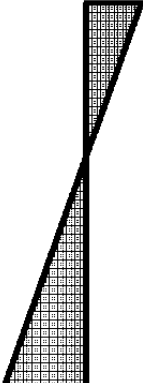
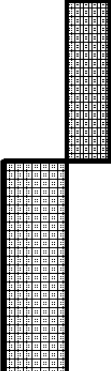
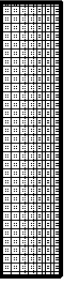
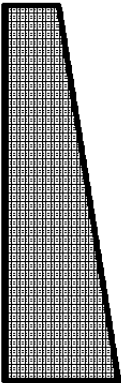
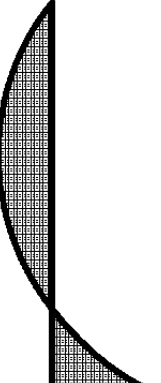
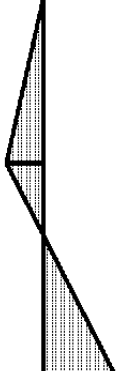
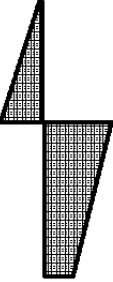
Проинтегрируем вторую дифференциальную зависимость

$$dM_z = Q_y dx \quad M_1 - M_2 = M_z(x_2) - M_z(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} Q_y dx$$

Приращение изгибающего момента между двумя сечениями равняется приращению площади эпюры поперечной силы между этими сечениями

Влияние каждого вида нагрузок на характер эпюр поперечной силы и изгибающего момента показано в таблице 3.1. Используйте эту таблицу для проверки правильности построения эпюр Q и M .

Таблица . 3.1 Влияние вида нагрузки на характер эпюр Q и M

На балке	Нет распределенной нагрузки 	Есть распределенная нагрузка $q = Const$ 	Есть сосредоточенная сила 	Есть пара сил 
На опоре Q	Прямоугольник 	Наклонная прямая 	Скачок на величину силы 	Никак не отражается 
На опоре M	Наклонная прямая 	Парабола 	Черезлом 	Скачок на величину момента пары сил 

Приведенные зависимости позволяют строить эпюры внутренних усилий без расчетов по характерным точкам.

Следует помнить, что любая эпюра с нуля начинается и нулем заканчивается, потому что она представляет собой графическое представление уравнения равновесия тела.

Расчет балки на изгиб начинают с построения эпюры поперечных сил Q . Последовательно переходя от одной характерной точки к другой, подсчитывают сумму сил, находящихся по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Перед построением эпюры изгибающих моментов M надо определить направление наклона эпюры M . Если $Q > 0$ — наклон положительный (вверх, если идем слева направо), $Q < 0$ — наклон отрицательный (рис. 3.5).

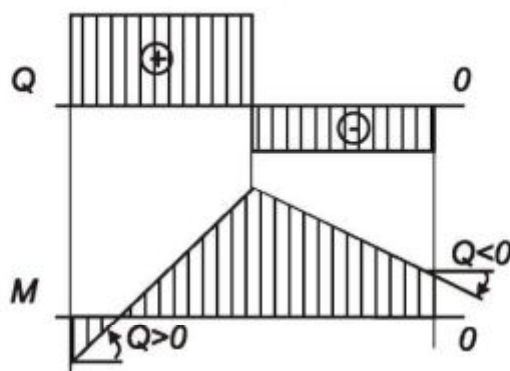


Рис. 3.5 Зависимость наклона эпюры M от знака Q

При построении эпюры M на конце балки $M_1 = 0$ (эпюра начинается с нуля). Для нахождения момента M_2 в следующем характерном сечении к значению M_1 добавить площадь эпюры Q между этими сечениями. Добавить со знаком плюс или минус — это зависит от определенного заранее направления наклона эпюры M .

В сечениях, где действуют пары сил, на эпюре M сделать скачок на величину момента пары сил.

При построении эпюр должны быть известны все нагрузки, действующие по одну сторону от рассматриваемого сечения, поэтому для балки с шарнирными опорами необходимо заранее найти реакции опор. Для балки, заделанной одним концом, эпюры строят, идя со свободного конца балки. При этом определение реакций в заделке не требуется. Они получаются автоматически как значения Q и M в заделке.

Напоминаю, что определение внутренних усилий — важнейший момент расчета конструкции на прочность. Необходимо свободно владеть навыками построения эпюр и правилами их проверки. Для этого необходим навык построения эпюр вручную (без компьютера).

Глава 4. Растяжение-сжатие

При растяжении и при сжатии в поперечных сечениях стержней действует только продольное усилие, определение которого рассмотрено в разделе 3.1. Расчетные формулы для растянутых и сжатых стержней одинаковы. Различаются только знаком продольного усилия.

ПРАВИЛО ЗНАКОВ

Растягивающее продольное усилие — положительное, сжимающее — отрицательное.

4.1 Внутренние усилия и напряжения

Рассмотрим стержень, нагруженный силой F (рис. 4.1). Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня определяются методом сечений. Из уравнений равновесия отсеченной части стержня продольное усилие $N = F$, поперечная сила $Q = 0$, изгибающий момент $M = 0$.

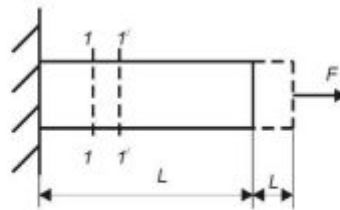


Рис. 4.1. Растяжение стержня

Продольное усилие N для рассматриваемого стержня не зависит от выбранного сечения и эпюра продольных усилий (график распределения продольного усилия по длине стержня) представляет собой прямоугольник.

Укажем на стержне произвольное поперечное сечение 1-1. Под действием силы F стержень удлинился на величину Δl . При этом сечение 1-1 переместилось в положение 1'-1', но в силу гипотезы плоских сечений осталось плоским и параллельным своему исходному положению. Перемещения всех точек поперечного сечения одинаковы, а, следовательно, деформации и напряжения (в силу закона Гука) также одинаковы.

Так как напряжение — это внутреннее усилие N , приходящееся на единицу площади A , формула для нормальных напряжений σ при растяжении

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Поперечная сила при растяжении $Q = 0$, следовательно, касательные напряжения $\tau = 0$.

При растяжении $\sigma > 0$, при сжатии $\sigma < 0$.

Условие прочности при растяжении-сжатии

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right| \leq [\sigma].$$

Выражение для σ_{\max} взято по модулю, так как допускаемое напряжение $[\sigma]$ всегда положительное.

4.2 Деформации

На рисунке 4.2 показан стержень до и после растяжения. Его длина увеличилась, а поперечный размер уменьшился. Введем понятия абсолютной и относительной деформации.

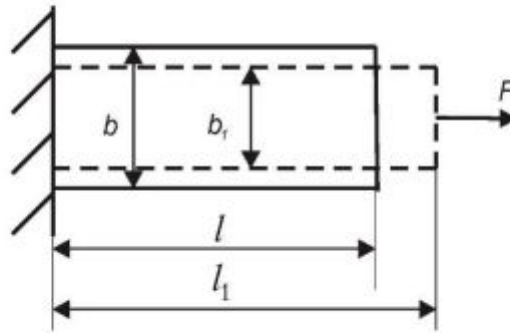


Рис.4.2. Деформации при растяжении стержня

$\Delta l = l_1 - l$ — абсолютная продольная деформация,

$\Delta b = b_1 - b$ — абсолютная поперечная деформация,

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ — относительная продольная деформация,

$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$ — относительная поперечная деформация.

Относительные поперечная и продольная деформации связаны между собой эмпирической зависимостью

$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon$, где μ — коэффициент Пуассона, определяемый опытным путем. Знак минус показывает, что при растяжении стержня его поперечное сечение сужается.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Коэффициент Пуассона является упругой константой материала. В дальнейшем (в главе 20) будет показано, что при упругой деформации $0 < \mu < 0,5$. Значения коэффициента μ для различных материалов приводятся в справочниках. Например,

для пробки $\mu \approx 0$,

для стали $\mu \approx 0,3$,

для резины $\mu = 0,49$.

4.3 Закон Гука

По закону Гука перемещения прямо пропорциональны нагрузкам.

$$F = K \Delta,$$

где F — сила, Δ — перемещение от этой силы, K — жесткость тела, зависящая не только от свойств материала, но и от формы и размеров тела.

На графике прямая пропорциональность изображается прямой линией (рис 4.3).

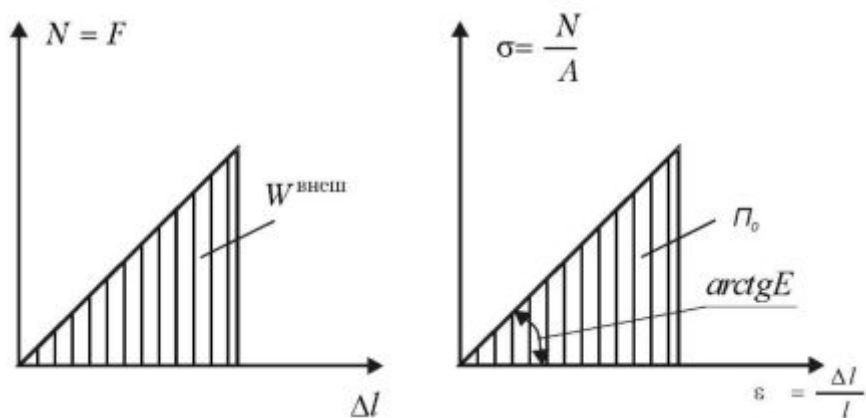


Рис. 4.3. Закон Гука при растяжении

Поскольку напряжения $\sigma = \frac{N}{A}$ и деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ есть нагрузка и перемещение, деленные на константы A и l , то и напряжения прямо пропорциональны деформациям. На графике (рис. 4.3) зависимость σ от ε изображается прямой линией. Следовательно, можно записать

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E — коэффициент пропорциональности, называемый модулем продольной упругости или *модулем Юнга*.

Модуль Юнга E — константа материала (как и коэффициент Пуассона μ) приводится в справочниках.

Для стали $E = 2 \cdot 10^5$ Мпа,

Для чугуна $E = 10^5$ Мпа,

Для дерева $E = 10^4$ Мпа.

На практике часто необходимо найти удлинение стержня под действием растягивающих или сжимающих нагрузок. По закону Гука $\sigma = E\varepsilon$. Подставим в это выражение $\sigma = \frac{N}{A}$ и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, тогда $\frac{N}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$, откуда

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Эта формула справедлива в случае действия одной сосредоточенной силы, то есть продольное усилие N постоянно по длине стержня.

Если на стержень действует несколько сосредоточенных сил, то стержень разбивается на несколько участков (от силы до силы) и полное удлинение равно сумме удлинений каждого участка в отдельности

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i},$$

где i — номер участка, n — количество участков.

В общем случае, если продольное усилие на некоторых участках величина переменная, то есть действует распределенная нагрузка, то удлинение

пропорционально площади эпюры продольных усилий $\int_l N(x)dx$

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_i(x)dx}{EA_i}.$$

4.4 Потенциальная энергия упругой деформации

Для определения потенциальной энергии воспользуемся, известным из теоретической механики началом возможных перемещений

НАЧАЛО ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Если тело находится в состоянии равновесия, то сумма работ внешних $W^{\text{внеш}}$ и внутренних сил $W^{\text{внутр}}$ равна нулю на любых возможных (согласованных со связями) перемещениях.

Заметим, что реальные перемещения — всегда возможные. При упругой деформации

$$W^{\text{внеш}} + W^{\text{внутр}} = 0.$$

Потенциальная энергия Π равна работе внутренних сил

$$\Pi = W^{\text{внутр}} = -W^{\text{внеш}}.$$

Потенциальная энергия не бывает отрицательной и численно равна площади диаграммы нагружения стержня (при упругой деформации площади треугольника (рис. 4.3))

$$\Pi = |W^{\text{внеш}}| = \int_{\Delta l} N \cdot d(\Delta l) = \frac{N \cdot \Delta l}{2}.$$

С учетом $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ получаем $\Pi = \frac{N^2 l}{2EA}$.

В общем случае нагружения ($N \neq \text{Const}$)

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \int \frac{N_i^2(x)dx}{2EA_i}.$$

Подсчитаем *удельную потенциальную энергию упругой деформации* Π_0 , то есть энергию Π , накопленную в единице объема V ,

$$\Pi_0 = \frac{\Pi}{V} = \frac{N\Delta l}{2Al}, \quad \text{но} \quad \frac{N}{A} = \sigma \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon, \quad \text{тогда}$$

$$\Pi_0 = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (\text{с учетом } \sigma = E\varepsilon)$$

4.5 Напряжения на наклонных площадках

Пусть стержень растягивается силой F . В поперечных сечениях стержня нормальные напряжения $\sigma = \frac{F}{A}$, где площадь поперечного сечения $A = b \cdot h$.

Найдем напряжения, действующие на площадке, наклоненной под углом α к поперечному сечению (рис. 4.4). Площадь наклонной площадки $A_\alpha = \frac{b \cdot h}{\cos \alpha}$.

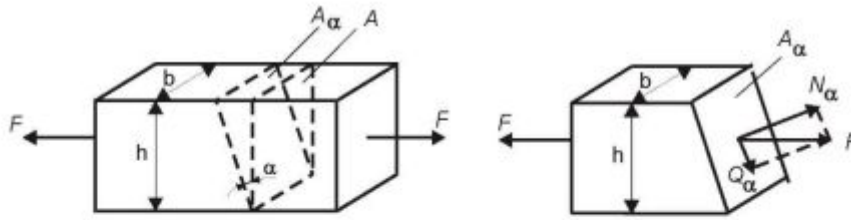


Рис. 4.4. Усилия в наклонном сечении стержня при растяжении

Согласно методу сечений мысленно рассекаем стержень по наклонному сечению, отбрасываем правую часть и рассматриваем равновесие левой части. Неизвестное внутреннее усилие в наклонном сечении раскладываем на 2 составляющие: вдоль нормали к сечению $N_\alpha = F \cdot \cos \alpha$ и по касательной к сечению $Q_\alpha = F \cdot \sin \alpha$. Из условия равновесия отсеченной части их геометрическая сумма равна F .

Напряжения на наклонной площадке

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A / \cos \alpha} = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\text{и} \quad \tau_\alpha = \frac{Q_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{A / \cos \alpha} = \frac{F}{A} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

$$\text{При } \alpha = 0 \quad \sigma_\alpha = \sigma = \sigma_{\max} \quad \tau_\alpha = 0,$$

$$\text{при } \alpha = 45^\circ \quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2} \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} = \tau_{\max},$$

$$\text{при } \alpha = 90^\circ \quad \sigma_\alpha = 0 = \sigma_{\min} \quad \tau_\alpha = 0 = \tau_{\min}.$$

В дальнейшем будет показано, что τ_{\max} всегда действует на площадках, наклоненных под углом 45° , к площадкам, где действует σ_{\max} и σ_{\min} .

4.6. Закон парности касательных напряжений

Найдем касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках (рис. 4.5)

$$\tau_\alpha = \sigma \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\tau_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma}{2} \sin(2\alpha + 180^\circ) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

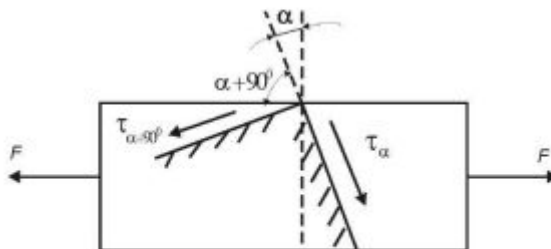


Рис. 4.5. Касательные напряжения на взаимно перпендикулярных сечениях

ЗАКОН ПАРНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

На взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и противоположны по направлению.

Этот закон часто используется в сопротивлении материалов при исследовании напряженного состояния в окрестностях некоторой точки тела.

4.7 Понятие о главных напряжениях

Подробно о главных напряжениях и их определении речь пойдет в главах 9 и 20. Здесь же пока без вывода приведем несколько необходимых для дальнейшего изложения положений.

- *Главной* называется площадка, где отсутствуют касательные напряжения.
- Нормальные напряжения на главной площадке называются *главными напряжениями*.
- В окрестностях любой точки можно провести 3 взаимно перпендикулярных главных площадки, на которых действуют соответственно 3 главных напряжения.

Главные напряжения обычно расставляются "по росту" и обозначаются $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ (с учетом знака). То есть σ_{\max} всегда обозначается σ_I .

В зависимости от величины главных напряжений можно выделить три вида напряженно-деформированного состояния (НДС) тела (рис. 4.6):

- *Линейное НДС* — два из трех главных напряжений равны нулю;
- *плоское НДС* — одно из трех главных напряжений равно нулю;
- *объемное НДС* — все три главных напряжения не равны нулю.

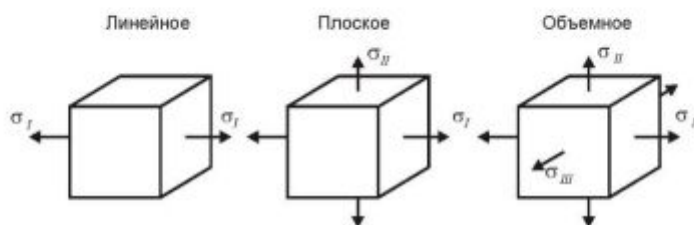


Рис. 4.6. Виды напряженно-деформированного состояния

Примеры различных НДС:

линейное — растяжение-сжатие, чистый изгиб;

плоское — сдвиг, кручение, изгиб, сложное сопротивление длинных и тонких стержней, деформация тонких пластин и оболочек;

объемное — деформация массивных тел.

Глава 5. Механические характеристики материалов

Все существующие и проектируемые конструкции должны удовлетворять условию прочности $\max \sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$, где $\max \sigma$ — максимальное рабочее напряжение в конструкции, $\sigma_{\text{пред}}$ — характеристика прочности материала, n — коэффициент запаса. Основные механические характеристики материалов определяются опытным путем по результатам испытаний стандартных образцов на растяжение. Остальные виды испытаний являются технологическими и в расчетах на прочность не используются.



Рис. 5.1. Образец для испытаний на растяжение

Образцы для испытаний чаще всего круглого поперечного сечения (рис. 5.1). Однако при изготовлении образцов из листового материала — поперечное сечение прямоугольник. Все образцы имеют рабочую часть длиной L_0 и постоянного диаметра d_0 и головки большего диаметра для крепления в захватах машины. Во избежание преждевременного разрушения в месте перехода от рабочей части к головке ГОСТ на образцы предусматривает наличие переходной конической части. На практике иногда вместо конической части выполняют переход от рабочей части к головке в виде скругления большим радиусом.

Для сопоставления результатов испытаний образцов разного диаметра соблюдается закон подобия образцов. Для стандартных образцов $L_0/d_0 = 10$. Это, так называемые, десятикратные образцы.

Машины для испытаний на растяжение осуществляют деформацию образца с постоянной сравнительно малой скоростью $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \approx 0,01$.

Результаты испытаний существенно различаются для материалов в пластичном и хрупком состояниях.

5.1 Признаки хрупкого и пластического разрушения материалов

В природе нет хрупких и пластичных материалов, а есть хрупкое и пластическое состояние материала. При изменении условий испытания один и тот же материал может разрушаться и хрупко и пластично. Например, углеродистая сталь, пластичная при комнатной температуре 20°C , разрушается хрупко при температуре жидкого азота (-196°C). Чугун, хрупкий при растяжении и кручении, разрушается пластично при сжатии. При испытании на твердость на прессе Роквелла такого хрупкого материала, как мрамор, на его поверхности остается вмятина, свидетельствующая о пластической деформации.

Хрупкое разрушение вызывается нормальными напряжениями σ и называется *отрывом*.

Пластическая деформация вызывается касательными напряжениями τ и называется *сдвигом*.

Пластическое разрушение носит сложный характер, если пластическая деформация, образование и развитие трещин вызывается τ , то разделение тела на части в

последний момент разрушения вызывается σ . Однако, пренебрегая моментом разрушения, можно сказать, что *пластическое разрушение вызывается касательными напряжениями τ и называется срезом.*

Знание признаков хрупкого и пластического разрушения чрезвычайно важно при анализе изломов конструкции. Анализируя вид излома, можно определить характер разрушения, вид нагрузки, ее величину и время ее действия.

Перечислим основные из этих признаков:

Таблица 5.1

Признак	Пластическое разрушение	Хрупкое разрушение
Пластические деформации	есть	Нет
Разрушающие напряжения	Касательные τ	Нормальные σ
Вид излома	матовый, волокнистый	блестящий, кристаллический

Что касается вида излома, то таким он является для металлических конструкций.

Пластическому разрушению предшествует появление видимых пластических деформаций. Его можно предотвратить.

Хрупкое разрушение происходит внезапно и часто сопровождается катастрофическими последствиями.

Одна из главных задач конструктора избежать опасности хрупкого разрушения, не допустить в процессе эксплуатации перехода материала из пластичного состояния в хрупкое.

Более подробно об особенностях хрупкого и пластического разрушения рассказано в главах 16 – 18.

5.2 Диаграмма деформирования мягкой стали

Определение механических характеристик материала рассмотрим на примере пластического разрушения мягкой стали. Приведенные для примера численные значения механических характеристик соответствуют стали Ст3.

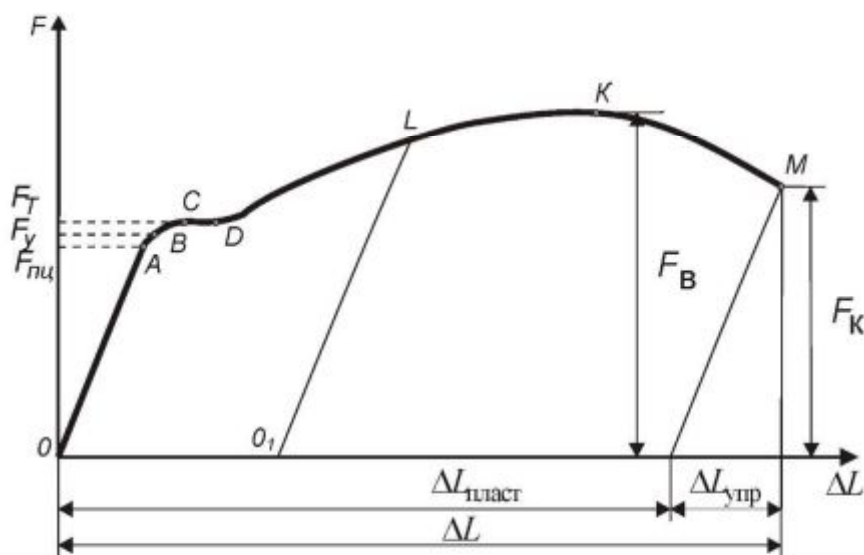


Рис.5.2. Диаграмма деформирования мягкой стали

В процессе испытания стандартный образец устанавливается в захватах машины и деформируется с постоянной скоростью до разрушения. Одновременно диаграммный аппарат испытательной машины записывает диаграмму зависимости нагрузки F от

абсолютного удлинения образца ΔL (рис. 5.2). По диаграмме деформирования определяются характеристики прочности материала, по непосредственным замерам образца до и после деформации определяются характеристики пластичности.

Диаграмма деформирования, нарисована испытательной машиной с большим искажением. На деформации образца накладываются упругие деформации рычагов и деталей машины. Вследствие этого наклон диаграммы на участке упругости резко возрастает. При внесении поправки, устраняющей податливость машины, участок ОА вследствие малости упругих деформаций почти сливается с осью нагрузок (рис. 5.3). Учет такой поправки рассмотрен в примере для главы 5 электронной книги.

$$\Delta L_1 := \Delta L - F \cdot \frac{\Delta L_2}{F_2} + \frac{F \cdot L_0}{E \cdot A_0} \quad \text{Учет податливости машины}$$

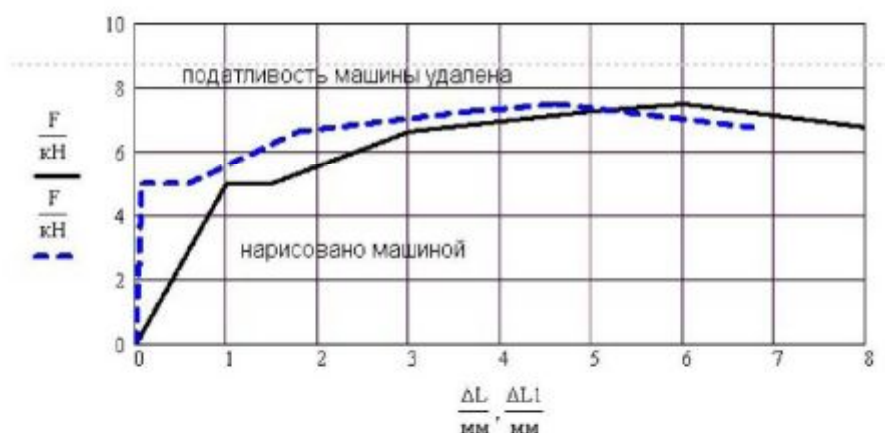


Рис. 5.3. Учет податливости машины на диаграмме деформирования

5.2.1. Характеристики прочности

Рассмотрим основные участки на этой диаграмме и дадим определения основных механических характеристик материала.

- Участок ОА — зона пропорциональности (на диаграмме прямая линия), заканчивается точкой А, соответствующей пределу пропорциональности.

Пределом пропорциональности называется наибольшее напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука.

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0},$$

где $F_{\text{пц}}$ — нагрузка, соответствующая окончанию прямой линии (точка А),

$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$ — площадь поперечного сечения образца до деформации.

Для стали Ст3 $\sigma_{\text{пц}} \approx 200$ МПа.

- Точка В соответствует пределу упругости материала.

Пределом упругости материала называется максимальное напряжение, до которого в материале отсутствуют остаточные (пластические) деформации.

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}, \quad \text{Для стали Ст3 } \sigma_y \approx 210 \text{ МПа.}$$

- Участок CD — площадка текучести (горизонтальная), соответствует физическому пределу текучести.

Физическим пределом текучести называется напряжение, при котором деформация растет без увеличения нагрузки.

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0} \quad \text{Для стали Ст3} \quad \sigma_T \approx 250 \text{ МПа.}$$

- Участок DK — зона упрочнения материала, заканчивается точкой К, соответствующей пределу прочности материала.

Пределом прочности или *временным сопротивлением* материала называется напряжение, соответствующее максимальной нагрузке на образец.

$$\sigma_B = \frac{F_B}{A_0} \quad \text{Для стали Ст3} \quad \sigma_B \approx 400 \text{ МПа.}$$

- Участок KM — зона местной деформации, заканчивается точкой М, соответствующей сопротивлению разрыву. На этом участке в образце образуется местное сужение (шейка) и почти вся деформация сосредоточена в шейке.

Сопротивлением разрыву называется напряжение в момент разрыва образца.

$$S_K = \frac{F_K}{A_K}$$

где A_K — площадь поперечного сечения образца в шейке в момент разрыва.

Для стали Ст3 $S_K \approx 800$ МПа.

Все перечисленные характеристики $\sigma_{\text{пл}}$, σ_y , σ_T , σ_B , S_K являются характеристиками прочности материала.

Предел пропорциональности $\sigma_{\text{пл}}$ и предел упругости σ_y близки друг к другу и обычно предел упругости в процессе испытаний не определяется.

Если в процессе испытания образец нагрузить выше предела текучести, а затем разгрузить, то линия разгрузки LO₁ на диаграмме (рис. 5.2) пойдет параллельно начальному участку, то есть при разгрузке имеет место чисто упругая деформация образца.

При нагрузке — деформация образца упругопластическая, при разгрузке чисто упругая (упругая деформация снимается, пластическая остается).

При повторной нагрузке линии нагрузки и предыдущей разгрузки образуют петлю гистерезиса, площадь которой равна работе, затраченной на пластическую деформацию образца при повторном нагружении. Площадь петли гистерезиса мала по сравнению с площадью диаграммы и внешне линии разгрузки и повторной нагрузки почти совпадают. Далее деформация образца продолжается так, как будто и не было промежуточной разгрузки. В результате при повторном нагружении у образца повысились характеристики прочности (предел пропорциональности, предел упругости), но уменьшился запас пластичности, то есть материал стал более прочным, но менее пластичным.

Явление повышения прочности при предварительной упруго-пластической деформации называется *наклепом*.

В технике явление наклепа используют для повышения предела пропорциональности материала пружин, цепей, канатов и др. Однако иногда наклеп материала нежелателен и после технологических операций обработки металлов резанием,ковки,штамповки деталь подвергают отжигу для снятия наклепа.

Площадка текучести имеется на диаграммах углеродистых сталей. На диаграммах легированных термообработанных сталей и большинства других материалов площадки текучести нет. В этом случае определяется условный предел текучести (рис. 5.4).

Условным пределом текучести называется напряжение, при котором остаточная деформация составляет 0,2% от первоначальной длины образца

Для определения условного предела текучести надо на оси деформаций отложить в масштабе $\Delta L = 0,002L$ и провести прямую OA_1 , параллельную начальному участку OA . Ордината точки пересечения этой прямой с диаграммой деформирования есть нагрузка $F_{0,2}$, соответствующая условному пределу текучести $\sigma_{0,2}$.

$$\sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0}.$$

Для большинства материалов в справочниках в качестве предела текучести приводится именно условный предел текучести.

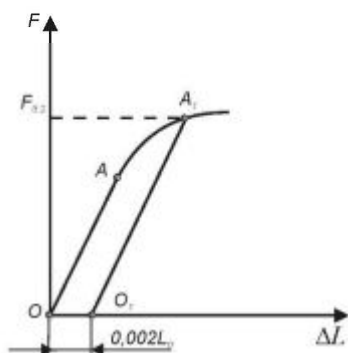


Рис. 5.4. Определение условного предела текучести

Следует отметить, что 4 характеристики: пределы пропорциональности, упругости, текучести и прочности характеризуют одно и то же свойство материала — сопротивление пластической деформации, но при различной допускаемой деформации

$\sigma_{\text{пц}}$ — соответствует $\varepsilon \approx 0,005\%$,

σ_y — соответствует $\varepsilon \approx 0,01\%$,

σ_T — соответствует $\varepsilon \approx 0,2\%$,

σ_B — соответствует $\varepsilon \approx 10\%$.

Лишь одна характеристика — сопротивление разрыву S_K характеризует сопротивление материала разрушению.

Предел прочности соответствует предельной нагрузке при растяжении, когда в образце начинает образовываться шейка, площадь поперечного сечения уменьшается и несмотря на некоторое снижение нагрузки, напряжения в шейке стремительно растут. В момент разрыва $S_K \approx 2\sigma_B$.

В реальных деталях машин и элементах конструкций шейка не образуется и для них именно сопротивление разрыву характеризует предельные напряжения в момент разрушения.

Значение сопротивления разрыву традиционно недооценивается.

5.2.2. Характеристики пластичности

По результатам замеров образцов до и после испытаний определяются две характеристики пластичности: относительное удлинение при разрыве δ и относительное сужение при разрыве ψ .

$$\delta = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_k - L_0}{L_0} 100\% \quad \psi = \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_0 - A_k}{A_0} 100\%.$$

Для стали Ст3 $\delta \approx 15\%$ и $\psi \approx 70\%$.

Заметим, что относительное удлинение при разрыве δ зависит от отношения длины рабочей части образца L_0 к диаметру d_0 . Размер шейки образца перед разрывом не зависит от длины образца, а зависит от его диаметра. Поэтому с ростом отношения L_0/d_0 величина δ уменьшается. Для десятикратных образцов относительное удлинение при разрыве меньше, чем для пятикратных.

Этого недостатка нет у относительного сужения при разрыве ψ , поэтому можно считать, что относительное сужение при разрыве ψ лучше всего характеризует запас пластичности материала.

Существует множество эмпирических формул для оценки прочности и долговечности элементов конструкций при статической и динамической нагрузке. В большинстве этих формул в качестве параметров используются сопротивление разрыву S_k и относительное сужение при разрыве ψ .

5.2.3. Работа разрушения при разрыве

Для оценки материала используют понятия: прочность, пластичность и вязкость. О прочности и пластичности сказано выше.

Вязкость материала характеризуется работой, затраченной на разрушение.

В высшей математике (свойства определенного интеграла) показано, что работа силы F на перемещении Δ равна площади диаграммы в координатах $F - \Delta$. Тогда работа, затраченная на разрушение образца в процессе испытаний на растяжение, равна площади диаграммы деформирования.

Чем больше площадь диаграммы, тем больше вязкость материала, тем лучше он сопротивляется воздействию динамических нагрузок.

Полная деформация образца складывается из упругой и пластической деформации.

$$\Delta L = \Delta L_{\text{упр}} + \Delta L_{\text{пласт}}.$$

Полная работа разрушения образца W складывается из работ упругой $W^{\text{упр}}$ и пластической деформации $W^{\text{пласт}}$.

$$W = W^{\text{упр}} + W^{\text{пласт}}.$$

В момент разрыва образца происходит его разгрузка: упругая деформация исчезает, пластическая остается. Поскольку разгрузка подчиняется закону Гука, работа упругой деформации равна площади треугольника $W^{\text{упр}} = \frac{1}{2} F_{\text{разр}} \Delta L_{\text{упр}}$.

Обычно работу разрушения образца оценивают путем сопоставления с площадью прямоугольника с размерами F_b и ΔL , используя коэффициент заполнения диаграммы η .

$$W = \eta F_b \Delta L.$$

Для стали Ст3 $\eta = 0,85 \dots 0,87$.

5.2.4. Диаграммы деформирования других материалов

Такую же диаграмму, как рассмотренная диаграмма деформирования мягкой стали, имеют большинство металлов и сталей после отжига. Диаграммы деформирования термически обработанных легированных сталей не имеют площадки текучести и для них определяется условный предел текучести. Кстати, в справочниках указанный предел текучести материала чаще всего является условным пределом текучести.

У материалов в хрупком состоянии практически отсутствуют пластические деформации, поэтому диаграмма деформирования имеет другой вид.

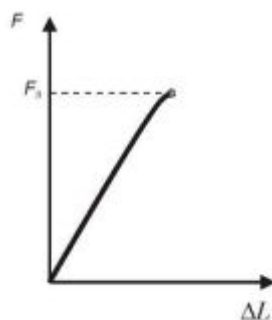


Рис. 5.5. Диаграмма растяжения чугуна

Диаграмма растяжения чугуна представлена на рис. 5.5. Она имеет вид почти прямой линии, слегка искривляющейся перед разрывом образца. При таком виде диаграммы определяются только одна характеристика прочности — предел прочности σ_b . Остальные характеристики определить невозможно. Характеристики пластичности у материалов в хрупком состоянии, как показывают замеры образцов до и после разрушения, близки к нулю.

5.3 Испытание материалов на сжатие

Испытание материалов на растяжение — основной вид испытаний материалов. Именно результаты испытаний на растяжение приводятся во всех справочниках как механические характеристики материалов.

Все другие виды испытаний являются технологическими и проводятся только в случае производственной необходимости. Тем не менее их изучение позволяет изучить поведение материалов при различных видах напряженно-деформированного состояния.

При сжатии образцов из мягкой стали и других высокопластичных материалов разрушения получить не удастся.

Поскольку объем образца при пластической деформации не меняется, с уменьшением высоты образца при сжатии площадь поперечного сечения увеличивается. Соответственно растет нагрузка, вызывающая пластическую деформацию. Диаграмма сжатия стали и вид образца до и после испытания показаны на рис. 5.6.

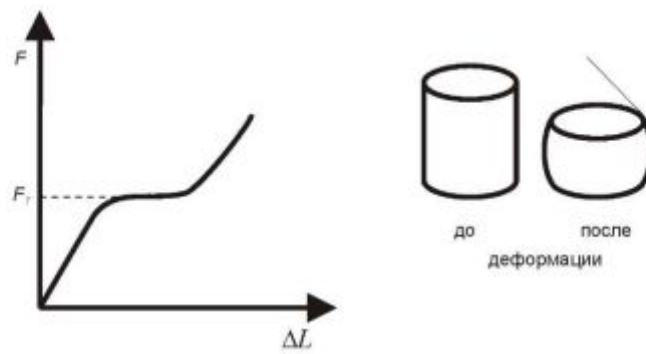


Рис. 5.6. Испытание стали на сжатие

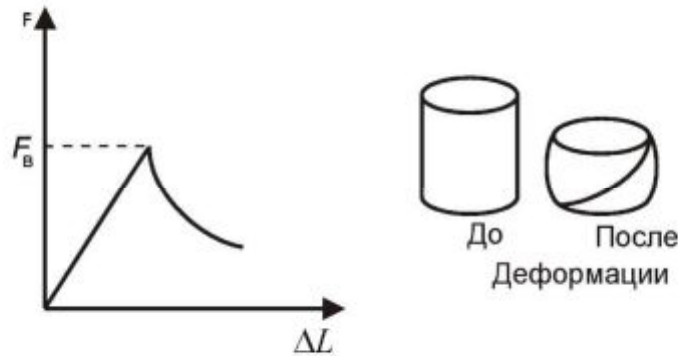


Рис. 5.7. Испытание чугуна на сжатие

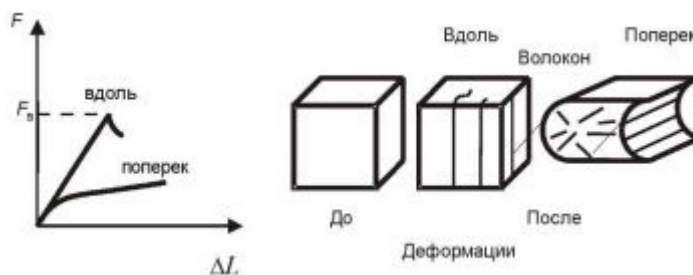


Рис. 5.8. Испытание дерева на сжатие

Поведение чугуна при сжатии резко отличается от его поведения при растяжении. Если для испытаний на растяжение используется образец, у которого $h/d = 10$, то для испытаний на сжатие берут $h/d = 1,5$, так как при сжатии более длинного образца при больших нагрузках возможна потеря устойчивости образца, то есть изгиб его в боковом направлении. Вид чугуниного образца до и после испытаний и его диаграмма сжатия показаны на рис. 5.7.

Цилиндрический образец (и стальной и чугуниный) при сжатии превращается в бочонок. При этом его высота значительно меньше, чем до испытаний, то есть налицо большая пластическая деформация чугуниного образца.

Бочкообразная форма образца вызвана силами трения между образцом и поверхностью пресса. Если уменьшить трение путем смазки торцов образца, например, парафином, то бочкообразность практически исчезает. Иногда для ее устранения используют тонкие медные прокладки толщиной 0,1мм, но при этом бочка может превратиться в рюмку.

Если стальной образец при сжатии не разрушается вовсе, то чугуниный разрушается

путем скола (среза) под углом порядка 30° к оси образца, а если уменьшить силу трения смазкой, то угол плоскости среза приближается к 45° . Следовательно при сжатии чугуна разрушение происходит путем среза под действием максимальных касательных напряжений. Напомню, при растяжении-сжатии плоскость действия максимальных касательных напряжений наклонена под углом 45° к оси стержня.

В изломе образца хорошо видны следы сдвига. Таким образом при сжатии чугунного образца наблюдаются все признаки пластического разрушения.

При растяжении чугун разрушается хрупко, при сжатии пластично. Более подробно об условиях перехода от пластического разрушения к хрупкому написано в главе 17.

Важно отметить, что прочность чугуна на сжатие в 4 раза больше, чем на растяжение. Сталь при сжатии не разрушается, а вот пределы пропорциональности и текучести при растяжении и при сжатии примерно одинаковы.

Примером хрупкого разрушения при сжатии может служить сжатие камня, бетона, стали после закалки без отпуска, дерева вдоль волокон. В этих случаях разрушение происходит по плоскостям параллельным оси образца путем расслоения образца на отдельные сегменты.

Причиной разрушения при этом является не σ_{\max} или τ_{\max} , а максимальная линейная деформация ϵ_{\max} . Речь о ней пойдет в разделе 9.6.

Отдельного рассмотрения заслуживает сжатие дерева. Дерево анизотропный материал, у которого свойства вдоль волокон и поперек волокон различны. Вид образцов до и после испытаний и диаграммы сжатия дерева вдоль и поперек волокон показаны на рис. 5.8.

Предел прочности дерева на растяжение примерно в два раза больше, чем на сжатие. Это объясняется тем, что при сжатии вдоль волокон дерево разрушается хрупко. Оно расслаивается на отдельные волокна, которые при дальнейшей деформации теряют устойчивость, изгибаются и переламываются.

При сжатии поперек волокон дерево деформируется пластично. Волокна сдвигаются друг относительно друга, образец сплющивается и в конце концов разваливается в силу недостаточной прочности скрепления волокон. Предел прочности дерева вдоль волокон примерно в 10 раз больше, чем поперек волокон.

5.4 Допускаемые напряжения

Понятие о допустимом напряжении уже давалось в разделе 1.10. Пришло время уточнить, что принять в качестве предельного напряжения.

При расчете конструкции на прочность и жесткость будем рассматривать два вида выхода конструкции из строя:

- разделение тела на части (хрупкое разрушение),
- Появление недопустимых пластических деформаций (пластическая деформация, но не разрушение).

В реальных условиях существует и много других видов выхода из строя, например, потеря устойчивости, износ, коррозия и др.

При расчетах на прочность условие выхода конструкции из строя $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{пред}}$.

Условие работоспособности конструкции $\sigma_{\max} = [\sigma]$.

Допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}$, где

- $\sigma_{\text{сред}} = \sigma_{\text{в}}$ — для материалов в хрупком состоянии
- $\sigma_{\text{сред}} = \sigma_{\text{т}}$ — для материалов в пластичном состоянии.

Коэффициент запаса n выбирается по справочникам в зависимости от условий эксплуатации конструкции и других факторов. Перечислим основные факторы, учитываемые при выборе коэффициента запаса.

- Точность знания нагрузок и их характера.
- Точность расчетных формул.
- Возможные последствия выхода из строя.

Коэффициент запаса иногда называют еще коэффициентом незнания. Чем меньше мы знаем, тем больше коэффициент запаса.

Если рассчитывается неответственная деталь, которую в случае поломки легко заменить, коэффициент запаса можно взять минимальным $n = 1,2 - 1,5$.

Если возможная поломка может вызвать гибель людей, например, трос подъема лифта, коэффициент запаса берется максимально большим $n = 10 - 15$.

Коэффициент запаса косвенным образом оценивает возможную вероятность выхода из строя конструкции, как сказано в разделе 1.13.3.

5.5 Диаграммы условных и истинных напряжений

В процессе испытаний изменяется площадь поперечного сечения образца. При подсчете напряжений в образце изменение площади сечения можно учитывать или не учитывать, получая соответственно условные или истинные напряжения

До образования шейки деформация по всей длине образца одинаковая. В процессе образования шейки деформация происходит только в области шейки.

Диаметр шейки уменьшается, диаметр остальной части образца не меняется. Соответственно деформации образца можно определять с учетом и без учета изменения диаметра, получая при этом условные или истинные деформации.

Условными называются *напряжения*, найденные как отношение нагрузки к первоначальной площади поперечного сечения $\sigma_{\text{усл}} = \frac{F}{A_0}$.

Условными называются *деформации*, найденные как отношение удлинения образца к его первоначальной длине $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$.

Истинными называются *напряжения*, найденные как отношение нагрузки к текущей площади поперечного сечения $\sigma_{\text{ист}} = \frac{F}{A_{\text{ист}}}$.

Истинными (логарифмическими) называются *деформации*, найденные как отношение приращения длины элемента образца к текущей длине этого элемента.

Чтобы определить истинные напряжения необходимо в процессе испытаний замерять диаметр образца в области шейки, что обычно не делается, а замеряется лишь диаметр шейки после разрыва.

Ввести понятие истинной деформации не так просто, ведь надо оценить деформации в шейке, которая образуется неизвестно где.

Рассмотрим элемент образца длиной dL_0 до деформации. В произвольный момент нагружения его длина становится равной dL . Дадим небольшое приращение нагрузки, длина элемента вырастет еще на $d(dL)$ (рис. 5.9). Тогда приращение деформации элемента $d\varepsilon_{ист} = \frac{d(dL)}{dL}$, а полная истинная деформация за все нагружение

$$\varepsilon_{ист} = \int_{dL_0}^{dL} \frac{d(dL)}{dL} = \ln \left(\frac{dL}{dL_0} \right).$$

Поскольку отношение приращений длины неизвестно, выразим его через известные величины.

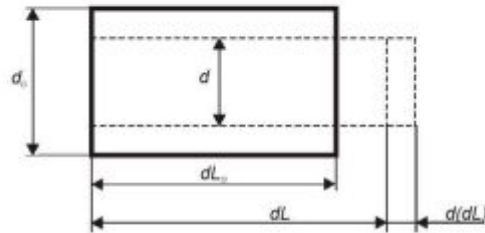


Рис. 5.9. К расчету истинных деформаций при растяжении

Пластическая деформация протекает без изменения объема тела. Упругим изменением объема пренебрегаем. Считаем объем тела dV в процессе деформации постоянным.

$$dV = A_0 dL_0 = AdL, \quad \text{откуда} \quad \frac{dL}{dL_0} = \frac{A_0}{A},$$

$$\text{тогда} \quad \varepsilon_{ист} = \ln \left(\frac{dL}{dL_0} \right) = \ln \left(\frac{A_0}{A} \right).$$

Чтобы найти истинную деформацию в момент разрыва надо знать площадь шейки при разрыве или, при использовании справочных данных, можно взять относительное сужение ψ

$$\psi = \frac{A_0 - A}{A_0} = 1 - \frac{A}{A_0} \quad \text{или} \quad \frac{A_0}{A} = \frac{1}{1 - \psi}, \quad \text{тогда}$$

$$\varepsilon_{ист} = \ln \left(\frac{dL}{dL_0} \right) = \ln \left(\frac{A_0}{A} \right) = \ln \left(\frac{1}{1 - \psi} \right).$$

Для пластичных сталей в момент разрыва $\psi \approx 0,6 - 0,7$ и $\varepsilon_{ист} \approx 1$, то есть деформация в шейке достигает 100%.

Свяжем истинные деформации $\varepsilon_{ист}$ и истинные напряжения $\sigma_{ист}$.

$$\sigma_{ист} = \frac{F}{A} = \frac{F}{A} \cdot \frac{A_0}{A_0} = \sigma_{усл} \frac{A_0}{A} = \sigma_{усл} e^{\varepsilon_{ист}}.$$

До образования шейки — деформация одинаковая по всей длине образца, тогда из условия постоянства объема образца

$$A_0 L_0 = AL, \quad \frac{A_0}{A} = \frac{L}{L_0} = \frac{L_0 + \Delta L}{L_0} = 1 + \varepsilon_{усл},$$

$$\varepsilon_{\text{ист}} = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \ln(1 + \varepsilon_{\text{усл}}) \approx \varepsilon_{\text{усл}},$$

$$\sigma_{\text{ист}} = \sigma_{\text{усл}} e^{\ln(1 + \varepsilon_{\text{ист}})} = \sigma_{\text{усл}} (1 + \varepsilon_{\text{ист}}).$$

Построение диаграммы истинных напряжений, выполненное в Mathcad, приведено в электронной книге в единственном примере для главы 5.

Диаграммы условных и истинных напряжений, полученные в указанном примере показаны на рис. 5.10. Диаграмма условных напряжений $\sigma_{\text{усл}} - \varepsilon_{\text{усл}}$ подобна диаграмме деформирования, нарисованной машиной в координатах нагрузка – удлинение ($F - \Delta L$). Действительно условные напряжения и деформация — это нагрузка и удлинение, деленные на постоянную величину, то есть фактически просто изменен масштаб диаграммы деформирования.

Диаграмма истинных напряжений в 5 – 7 раз длиннее и в 2 – 3 раза выше диаграммы условных напряжений.

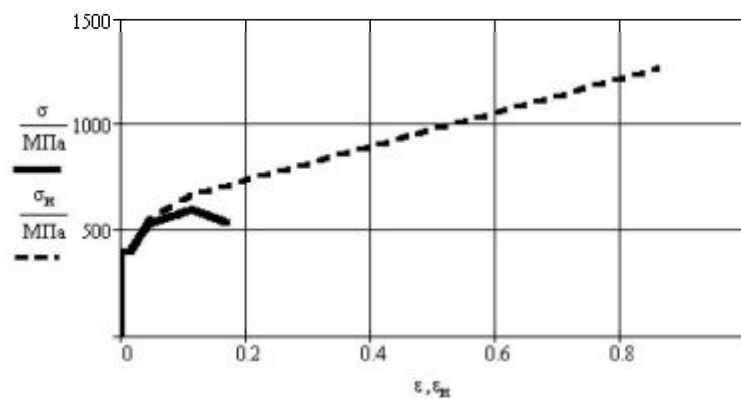


Рис. 5.10. Сопоставление диаграмм условных и истинных напряжений

В практических расчетах на прочность при необходимости учета пластических деформаций используются различные аппроксимации диаграммы деформирования. Используемые виды аппроксимации диаграммы деформирования описаны в разделе 8.1.

Глава 6. Сдвиг и кручение

Полная деформация любого тела складывается из линейной ε и угловой деформации γ . Линейная деформация ε вызывается нормальными напряжениями σ . Угловая деформация γ вызывается касательными напряжениями τ . Связь между σ и ε изучалась в главе 4 (растяжение-сжатие). В этой главе изучается связь τ и γ .

6.1 Сдвиг

Примером сдвига можно считать разрезание ножницами листа бумаги или металла. В очень узкой области между ножами создается область сдвига. Вырежем в этой области элемент тела и рассмотрим его деформацию (рис. 6.1). Грани элемента смещаются друг относительно друга под действием поперечной силы Q .

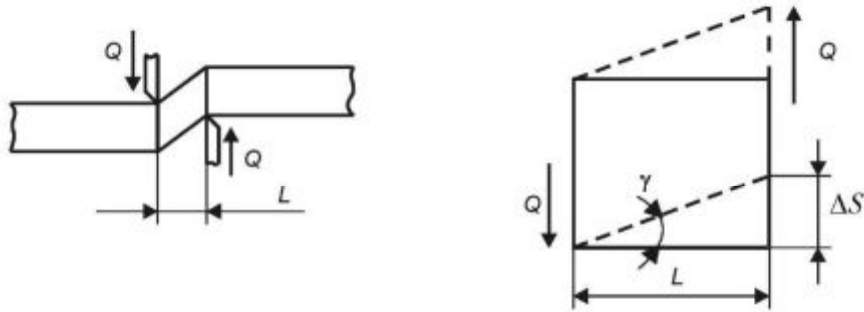


Рис. 6.1. Сдвиг

Абсолютный сдвиг ΔS – смещение граней элемента, неудобен в использовании, так как зависит от размеров тела.

Относительный сдвиг $\gamma = \frac{\Delta S}{l}$, называемый углом сдвига, не зависит от размеров тела.

Касательное напряжение на гранях элемента изменяется по довольно сложному закону, а на практике принимается постоянным. Хотя это и не верно, но допустимо. В практических расчетах ошибка компенсируется поправочными коэффициентами.

$$\tau = \frac{Q}{A},$$

где A — площадь сечения, испытывающего деформацию сдвига.

Закон Гука при сдвиге, означает линейную зависимость между касательным напряжением τ и углом сдвига γ

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (6.1),$$

где G — коэффициент пропорциональности, называемый *модулем сдвига*.

Модуль сдвига — константа материала, которая определяется опытным путем и приводится в справочниках.

Мы рассмотрели три упругие постоянные материала: модуль Юнга E , модуль сдвига G , коэффициент Пуассона μ . Между ними существует теоретическая связь

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (6.2).$$

Например, для большинства сталей справочные значения $E = 2 \cdot 10^5$ Мпа, $\mu = 0.3$, $G = 8 \cdot 10^4$ Мпа. Формула (6.2) дает значение $\mu = 7,7 \cdot 10^4$ Мпа.

Из закона Гука при сдвиге (6.1), подставив в него выражения для τ и γ

$$\frac{Q}{A} = G \frac{\Delta S}{l},$$

можно получить выражение для абсолютного сдвига

$$\Delta S = \frac{Ql}{GA}$$

Потенциальная энергия упругой деформации при сдвиге Π , как и при растяжении, численно равна работе внешних сил $W^{\text{внеш}}$, которая, в свою очередь, равна площади диаграммы деформирования при сдвиге. При упругой деформации справедлив закон Гука и, следовательно, потенциальная энергия упругой деформации численно равна площади треугольника (рис.6.2)

$$\Pi \approx W^{\text{внеш}} = \frac{Q \cdot \Delta S}{2} = \frac{Q^2 l}{2GA} \quad (6.3)$$

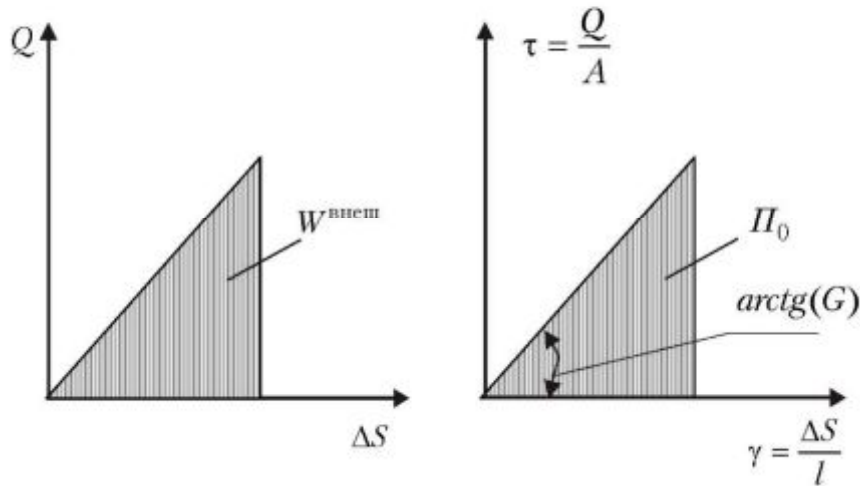


Рис. 6.2 Работа внешних сил при сдвиге

Удельная потенциальная энергия Π_0 , накопленная в единице объема V ,

$$\Pi_0 = \frac{\Pi}{V} = \frac{Q \cdot \Delta S}{2Al} = \frac{\tau \cdot \gamma}{2}$$

Или, с учетом, $\tau = G \cdot \gamma$

$$\Pi_0 = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} \quad (6.4)$$

Величина Π_0 численно равна площади диаграммы деформирования при сдвиге в координатах $\tau - \gamma$ (рис. 6.2).

ПРИМЕЧАНИЕ

Сдвиг — это деформация без разрушения материала. Разрушение при сдвиге носит название срез.

В заключение ведем понятие чистого сдвига.

Чистым называется *сдвиг*, при котором в поперечных сечениях отсутствуют нормальные напряжения. При сдвиге, вызванном двумя силами, направленными навстречу друг другу, материал в промежутке между силами, кроме сдвига, еще испытывает изгиб, вызывающий появление нормальных напряжений. Примером чистого сдвига является кручение.

6.2 Расчет простейших соединений

Приведенных сведений о расчетах на растяжение-сжатие и на сдвиг достаточно для расчета на прочность простейших соединений, таких как болты, штифты, заклепки, сварные швы и другие.

В основе расчета лежат условия прочности на растяжение, срез и смятие.

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{F}{A_{\text{раст}}} \leq [\sigma_{\text{раст}}] = \frac{\sigma_T}{n}$$

$$\tau_{\text{среза}} = \frac{F}{A_{\text{среза}}} \leq [\tau_{\text{среза}}] \approx (0,5 - 0,6) [\sigma_{\text{раст}}]$$

$$\sigma_{\text{смят}} = \frac{F}{A_{\text{смят}}} \leq [\sigma_{\text{смят}}] \approx 2 [\sigma_{\text{раст}}]$$

Здесь F — сила, вызывающая деформацию тела, $A_{\text{раст}}$, $A_{\text{среза}}$, $A_{\text{смят}}$ — площади поперечных сечений, испытывающих деформацию соответственно растяжения, среза, смятия. Выбор этих площадей будет далее пояснен на конкретных примерах.

Допускаемые напряжения на растяжение, срез, смятие выбираются с учетом опытных данных, позволяющих получить достаточно достоверные результаты.

В основе всех трех условий прочности лежит предположение о равномерности распределения напряжений по всему сечению. Если при растяжении подобная гипотеза справедлива (вдали от места приложения нагрузки), то в случае расчета на срез и смятие это не верно, но ... удобно и, учитывая приближенный характер расчетов, возможно.

Расчеты простейших соединений слишком просты, чтобы использовать Mathcad, и выполняются с использованием микрокалькулятора. Однако при наличии готовой программы можно ею воспользоваться. В электронной книге в разделе [Для главы 6](#) приведена программа расчета простейших соединений. Обратите внимание на форму записи условия прочности в Mathcad.

6.2.1. Расчет тяги

Схема соединения показана на рис. 6.3. Требуется определить из условия прочности диаметр тяги d , диаметр D и высоту h головки тяги при заданной силе F , растягивающей тягу.

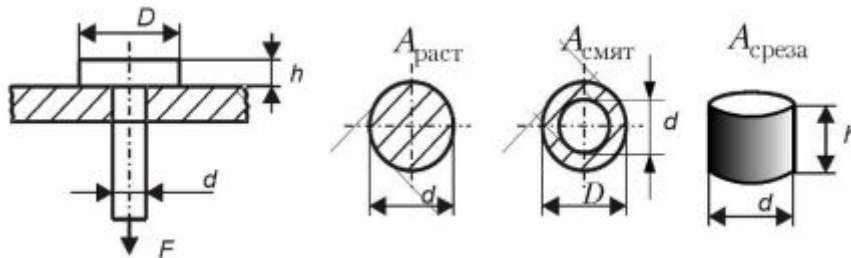


Рис. 6.3. Схема тяги

Примером тяги может служить болтовое соединение. Но болт имеет резьбу, в которой возникает концентрация напряжений. Как указано в разделе 1.14.1 при статическом нагружении влиянием концентрации напряжений можно пренебречь. При расчете болтовых соединений в курсе Деталей машин влияние резьбы учитывается поправочным коэффициентом.

Растяжение тяги

Диаметр тяги найдем из условия прочности на растяжение

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{F}{A_{\text{раст}}} \leq [\sigma_{\text{раст}}] = \frac{\sigma_T}{n}$$

Площадь сечения, где возможен разрыв тяги $A_{\text{раст}} = \frac{\pi d^2}{4}$.

Из условия прочности $A_{\text{раст}} \geq \frac{F}{[\sigma_{\text{раст}}]}$.

Приравняв два выражения для $A_{\text{раст}}$, находим диаметр тяги

$$d \geq \sqrt{\frac{4A_{\text{раст}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma_{\text{раст}}]}}$$

Найденный результат округляем в большую сторону, как правило, до целых миллиметров.

Смятие головки тяги

Диаметр головки тяги найдем из условия смятия

$$\sigma_{\text{смят}} = \frac{F}{A_{\text{смят}}} \leq [\sigma_{\text{смят}}] \approx 2[\sigma_{\text{раст}}]$$

В качестве площади смятия берем площадь опирания головки на лист металла

$$A_{\text{смят}} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

Из условия прочности $A_{\text{смят}} = \frac{F}{[\sigma_{\text{смят}}]}$

Приравняв два выражения для $A_{\text{смят}}$, находим диаметр D .

Срез головки тяги

Высоту головки тяги h найдем из условия прочности на срез

$$\tau_{\text{среза}} = \frac{F}{A_{\text{среза}}} \leq [\tau_{\text{среза}}] \approx (0,5 - 0,6)[\sigma_{\text{раст}}]$$

В качестве площади среза берем цилиндрическую поверхность диаметром d и высотой h , которая образовалась бы при протаскивании головки тяги через отверстие в листе металла $A_{\text{среза}} = \pi dh$.

Из условия прочности $A_{\text{среза}} \geq \frac{F}{[\tau_{\text{среза}}]}$

Приравняв два выражения для $A_{\text{среза}}$, находим высоту головки h .

6.2.2. Расчет штифта (заклепки)

Условия нагружения заклепок при заклепочном соединении двух листов металла и штифтов, соединяющих, например, обод зубчатого колеса с корпусом в планетарном редукторе, практически одинаковы. Схема штифтового соединения показана на рис. 6.4.

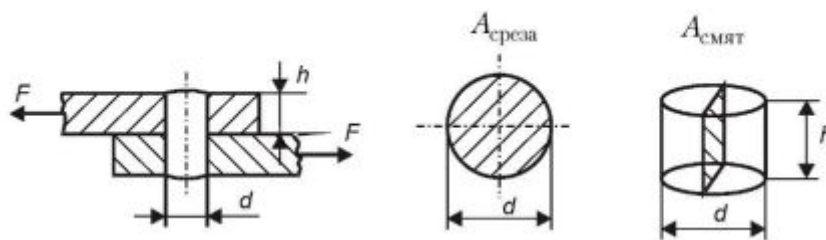


Рис. 6.4. Схема штифтового соединения

Расчет штифта на срез

Из условия прочности на срез $A_{\text{среза}} \geq \frac{F}{[\tau_{\text{среза}}]}$

Штифт может срезаться по круглому поперечному сечению.

Площадь среза $A_{\text{среза}} = \frac{\pi d^2}{4}$

Приравняв два выражения $A_{\text{среза}}$, определяем диаметр штифта d .

Расчет на смятие

Из условия смятия находим допускаемую площадь смятия $A_{\text{смят}} \geq \frac{F}{[\sigma_{\text{смят}}]}$.

Реальная площадь смятия определяется толщиной скрепляемых штифтом деталей. Истинная поверхность смятия — это зона контакта листа металла и штифта на поверхности цилиндра, но размер ее и распределение напряжений на ней неизвестно. Напряжения на поверхности контакта распределяются по сложному степенному закону.

Удовлетворительные результаты расчета получаются, если взять в качестве площади смятия проекцию криволинейной поверхности цилиндра на диаметральную плоскость $A_{\text{смят}} = d \cdot h$, где h — наименьшая из толщин соединяемых деталей.

Если детали разной прочности, то возможно потребуется проверка прочности на смятие обеих деталей.

Приравняв два выражения $A_{\text{смят}}$, находим допустимую толщину детали h .

Обычно толщина листов задана, тогда диаметр штифта или заклепки определяется дважды (из условий прочности на срез и на смятие). Окончательно принимают диаметр, удовлетворяющий обоим условиям прочности.

Расчет заклепочного соединения абсолютно аналогичен расчету штифтового соединения.

6.2.3. Расчет сварного соединения

Рассмотрим приварку пластины к листу угловым швом с обваркой по всему контуру (рис.6.5).

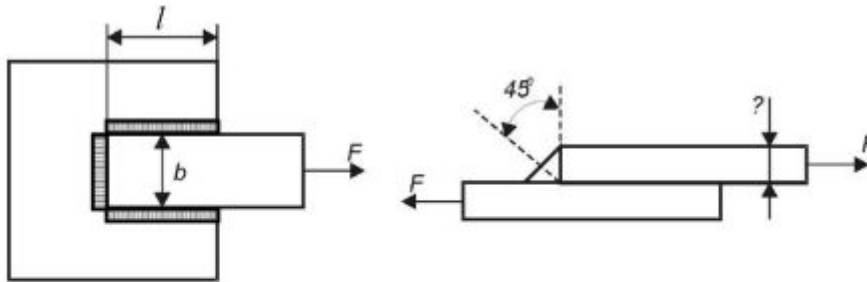


Рис. 6.5. Схема сварного соединения

Расчет пластины на растяжение

Сначала найдем необходимую ширину пластины b . Из условия прочности на растяжение $A_{\text{раст}} \geq \frac{F}{[\sigma_{\text{раст}}]}$.

Реальная толщина пластины $A_{\text{раст}} = h \cdot b$.

Приравняв два выражения для $A_{\text{раст}}$, находим ширину пластины b .

Расчет длины сварного шва

Из условия среза сварного шва найдем допускаемую площадь среза

$$A_{\text{среза}} \geq \frac{F}{[\tau_{\text{среза}}]}$$

Считается, что срез сварного шва происходит по наименьшей площади среза $A_{\text{среза}} = t \cdot L$, где t — длина перпендикуляра, опущенного из вершины шва на его поверхность, $L = 2l + b$ — полная длина контура обварки пластины.

Для равнобокого шва поверхность среза наклонена под углом 45° к плоскости листа. Тогда площадь среза шва $A_{\text{среза}} = L \cdot \delta \cos 45^\circ$, где δ — высота катета сварного

шва, обычно равная толщине листа.

Приравнивая два выражения для $A_{\text{среза}}$, находим длину l накладки пластины на лист.

Учитывая, что при подобных расчетах простейших соединений погрешность расчета велика, в реальных расчетах обычно вводится ряд поправочных коэффициентов, учитывающих специфику работы соединения.

6.3 Кручение стержней круглого поперечного сечения

Кручение — один из 4-х видов простых деформаций. При кручении стержень нагружен только парами сил, вращающими стержень вокруг продольной оси x . При этом в поперечных сечениях стержня действует только одно внутреннее усилие — *крутящий момент*, $M_k = M_x$, численно равный сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Знак крутящего момента обычно безразличен, так как прочность стержня при кручении зависит только от величины крутящего момента и не зависит от его направления. Тем не менее, для упорядочения расчетов в ряде учебников рекомендуется считать крутящий момент положительным, если при взгляде со стороны любого конца стержня мы видим внешний закручивающий момент, действующим против часовой стрелки.

В технике наиболее часто используются стержни круглого или кольцевого поперечного сечения. Оказывается и расчет таких стержней на кручение значительно проще, чем стержней с другой формой поперечного сечения. С этого случая и начнем изучение деформации кручения стержней.

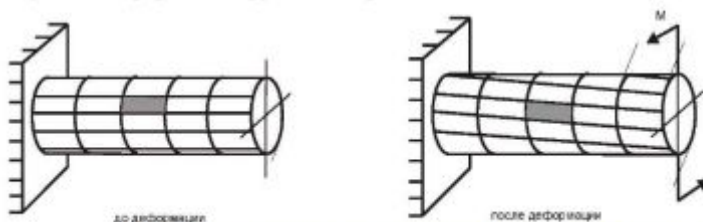


Рис. 6.6. Деформация прямоугольной сетки при кручении стержня

Рассмотрим результат следующего эксперимента. На поверхность резинового стержня круглого поперечного сечения нанесем прямоугольную сетку (рис. 6.6).

Нагрузим стержень парой сил, закручивающей стержень вокруг продольной оси. При этом поперечные сечения стержня поворачиваются относительно друг друга, и нанесенная сетка линий искажается. Первоначально прямоугольные элементы сетки становятся параллелограммами.

Изменение формы элемента сетки свидетельствует о деформации сдвига, происходящей при кручении стержня круглого поперечного сечения.

6.3.1. Касательные напряжения и угол закручивания

Основные гипотезы

Вывод формул для напряжений и перемещений при кручении начнем с гипотез, принимаемых для упрощения расчетов.

ЗАМЕЧАНИЕ

Справедливы все гипотезы из раздела 1.9. Далее рассмотрим только гипотезы, непосредственно используемые при выводе указанных формул.

- Расстояние между поперечными сечениями при кручении не меняется. Следовательно, деформация волокон стержня вдоль продольной оси x равна нулю $\varepsilon_x = 0$ и по закону Гука $\sigma_x = E\varepsilon_x$ нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня отсутствуют $\sigma_x = 0$.
- При кручении прямолинейные радиусы не искривляются, а только поворачиваются.

Круглое сечение остается круглым. Касательные напряжения τ перпендикулярны радиусам вращения.

Это аналог гипотезы плоских сечений. Стержень рассматриваем как набор жестких дисков, поворачивающихся друг относительно друга.

- *Волокна друг на друга не давят.*

Следовательно, нормальные напряжения в поперечном направлении отсутствуют $\sigma_y = \sigma_z = 0$.

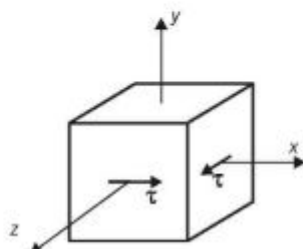


Рис. 6.7. Напряжения на гранях элемента при кручении

Итак на гранях элемента стержня, вырезанного плоскостями, перпендикулярными осям x , y , z , отсутствуют нормальные напряжения σ и действуют только касательные τ (рис. 6.7). Такой случай нагружения называется чистым сдвигом. Следовательно, *кручение — частный случай чистого сдвига* и все зависимости, полученные при рассмотрении деформации сдвига, могут быть использованы при кручении стержней.

Порядок вывода расчетных формул в сопротивлении материалов

При выводе любых аналитических зависимостей в сопротивлении материалов рассматриваются условия существования малого элемента тела с целью последовательного определения его перемещений, деформаций и напряжений в нем.

Далее проинтегрировав установленные зависимости по объему тела, находят связь напряжений с внешними силами.

Всякий расчет состоит из 4-х этапов.

1. *Геометрический анализ.* На этом этапе устанавливается связь между перемещениями и деформациями малого элемента тела.
2. *Физический анализ* — устанавливает связь между деформациями элемента и напряжениями в нем. При упругой деформации используется закон Гука.
3. *Статический анализ* — устанавливает связь напряжений с внешними нагрузками путем интегрирования уравнений равновесия элемента по всему объему тела с учетом граничных условий на поверхности. В сопротивлении материалов в роли таких интегралов выступают условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий, установленные в разделе 1.4.
4. *Синтез установленных зависимостей.* Подставляя одно в другое выражения, найденных на трех предыдущих этапах, и упрощая их, получают окончательные расчетные формулы.

Вывод расчетных формул для напряжений и угла закручивания стержня

Геометрический анализ.

Вырежем из стержня, испытывающего деформацию кручения (рис. 6.8) элемент длиной dx . В этом элементе на некотором расстоянии ρ от центра кручения выделим волокно ab и рассмотрим его перемещение.

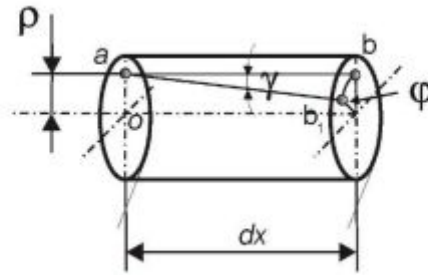


Рис.6.8. Элемент стержня, работающего на кручение

В процессе деформации крайние поперечные сечения элемента dx поворачиваются относительно друг друга. Мысленно остановим левое сечение. Тогда правое сечение повернется относительно него на угол $d\varphi$. При этом волокно ab поворачивается на угол сдвига γ и приходит в положение ab_1 .

Найдем связь между углом поворота сечения $d\varphi$ и углом сдвига волокна γ . Перемещение правого конца волокна (точки b)

$$bb_1 = \rho \cdot d\varphi = dx \cdot \gamma.$$

Откуда
$$\gamma = \frac{d\varphi}{dx} \rho \quad (6.5).$$

Физический анализ

Так как кручение — это частный случай чистого сдвига, при упругой деформации для связи деформаций и напряжений используем закон Гука при сдвиге с учетом выражения (6.5)

$$\tau = G \cdot \gamma = G \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (6.6).$$

Формула для касательных напряжений получена, но пользоваться ею нельзя, так как неизвестна величина $\frac{d\varphi}{dx}$. Однако логика подсказывает, что чем больше крутящий момент M_k , тем больше угол закручивания стержня φ .

Статический анализ

Воспользуемся условием эквивалентности напряжений и внутренних усилий для связи касательных напряжений с крутящим моментом. Крутящий момент есть результат действия касательных напряжений в поперечном сечении стержня

$$M_k = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = \int_A G \rho \frac{d\varphi}{dx} \rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA \quad (6.7).$$

В выражении (6.7) за знак интеграла вынесены величины постоянные, независимые от выбора площадки dA . Выражение под интегралом представляет собой полярный момент инерции поперечного сечения $J_p = \int_A \rho^2 dA$. Тогда

$$M_k = G \frac{d\varphi}{dx} J_p. \quad \text{Откуда} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{G \cdot J_p} \quad (6.8).$$

Подставив выражение (6.8) в выражение (6.6), находим

$$\tau = G \cdot \rho \frac{M_k}{G \cdot J_p}.$$

Сократив это выражение на модуль сдвига G , окончательно получаем

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} \rho \quad (6.9).$$

Формулу для угла закручивания стержня получаем путем интегрирования выражения (6.8)

$$\varphi = \int_l \frac{M_k \cdot dx}{G \cdot J_p},$$

где l — длина стержня.

Если на стержень действуют несколько внешних нагрузок, то

$$\varphi = \sum_l \int \frac{M_k \cdot dx}{G \cdot J_p} \quad (6.10),$$

где сумма берется по числу участков на стержне. Границами участков являются сечения, где либо приложены нагрузки, либо изменяются форма и размеры поперечного сечения.

Если крутящий момент по длине участка не меняется, то интеграл принимает вид суммы

$$\varphi = \sum \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \quad (6.11),$$

где l — длина соответствующего участка, сумма берется по количеству участков.

Условие прочности при кручении

Построим эпюру распределения касательных напряжений по сечению круглого стержня при кручении. В соответствии с формулой (6.9) касательные напряжения распределены по сечению по линейному закону и пропорциональны радиусу ρ (рис. 6.9).

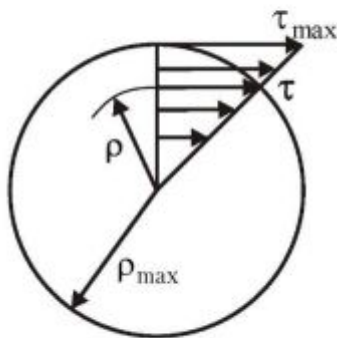


Рис. 6.9. Касательные напряжения в круглом сечении при кручении

При $\rho = 0$ (в центре круга) — $\tau = 0$.

$$\text{При } \rho = \rho_{\max} = \frac{d}{2} \text{ (на поверхности круга) — } \tau = \tau_{\max} = \frac{M_k}{J_p} \rho_{\max}$$

Введем новую геометрическую характеристику сечения $W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}$,

где W_p — момент сопротивления при кручении или полярный момент сопротивления.

Тогда на поверхности стержня

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_k}{W_p} \quad (6.12).$$

Для круглого поперечного сечения

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 \quad \rho_{\max} = \frac{d}{2}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 \quad (6.13).$$

Для кольца

$$J_p = \frac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{32} \approx 0,1D^4(1-\alpha^4) \quad \alpha = \frac{d}{D} \quad \rho_{\max} = \frac{D}{2}$$

$$W_p = \frac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{16} \approx 0,2D^3(1-\alpha^4) \quad (6.14).$$

Условие прочности при кручении $\tau_{\max} \leq [\tau]$ или с учетом (6.12)

$$\tau_{\max} = \left| \frac{M_k}{W_p} \right| \leq [\tau] \approx (0,5 - 0,6)[\sigma] \quad (6.15).$$

6.3.2 Потенциальная энергия при кручении стержня

Потенциальная энергия упругой деформации, численно равная работе внешних сил, может быть определена как площадь диаграммы деформирования. При упругой деформации — это площадь треугольника (рис. 6.10). Если стержень нагружен одной парой сил, то с учетом выражения (6.11)

$$\Pi = \frac{M_k \varphi}{2} = \frac{M_k}{2} \frac{M_k l}{G \cdot J_p} = \frac{M_k^2 l}{2G \cdot J_p}.$$

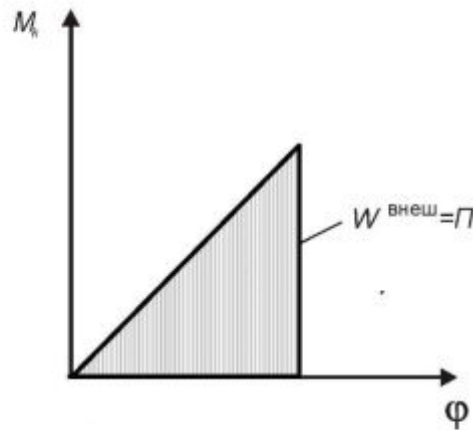


Рис.6.10. Диаграмма деформирования при кручении

В общем случае действия произвольной нагрузки, если $M_k \neq Const$

$$\Pi = \int_l \frac{M_k^2 dx}{2G \cdot J_p} \quad (6.16).$$

Рассмотрим второй (более общий) способ определения потенциальной энергии упругой деформации Π . Найдем ее как интеграл по объему V от удельной потенциальной энергии Π_0 $\Pi = \int_V \Pi_0 dV$.

С учетом $dV = dA \cdot dx$, $\Pi_0 = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}$ и $\tau = \frac{M_k}{J_p} \rho$

$$\Pi = \int_l \int_A \frac{\tau^2}{2G} dA \cdot dx = \int_l \int_A \frac{M_k^2}{J_p^2} \rho^2 \frac{1}{2G} dA \cdot dx = \int_l \frac{M_k^2}{2G \cdot J_p^2} \int_A \rho^2 dA \cdot dx.$$

Так как $J_p = \int_A \rho^2 dA$, то

$$\Pi = \int_l \frac{M_k^2}{2G \cdot J_p} dx,$$

что совпадает с выражением (6.16).

В случае действия нескольких нагрузок

$$P = \sum_i \int \frac{M_k^2}{2G \cdot J_p} dx \quad (6.17)$$

Здесь сумма берется по количеству участков.

6.4. Связь между крутящим моментом, мощностью и скоростью вращения вала

При расчете электропривода различных устройств, исходя из нагрузки на исполнительный орган, например, станок, требуется определить мощность электродвигателя.

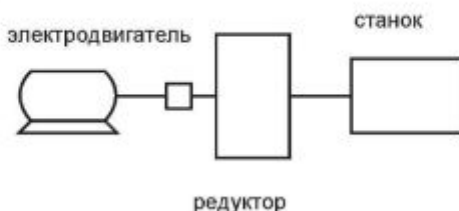


Рис. 6.11. Схема электропривода

На рисунке 6.13 изображена схема электропривода, где вращение электродвигателя через муфту и редуктор передается на станок.

Найдем связь между крутящим моментом на валу исполнительного органа и мощностью двигателя. Зная необходимый крутящий момент на валу станка и передаточное отношение редуктора, определяем момент на входном валу редуктора, а затем мощность электродвигателя.

Мощность N — это работа внешних сил $W^{\text{внеш}}$ в единицу времени t $N = \frac{W^{\text{внеш}}}{t}$.

Работа пары сил M_k на угле поворота вала φ $W^{\text{внеш}} = M_k \cdot \varphi$.

Откуда $N = \frac{W^{\text{внеш}}}{t} = \frac{M_k \varphi}{t} = \frac{M_k}{\omega}$,

Где $\omega = \frac{\varphi}{t}$ — угловая скорость вращения вала

Угловая скорость ω связана с числом оборотов вала в минуту n зависимостью

$\omega = \frac{2\pi n}{60}$. Тогда мощность $N = M_k \frac{2\pi n}{60}$, откуда

$M_k = \frac{60N}{2\pi n} \approx 9,65 \frac{N}{n}$ Нм, если мощность N введена в ваттах, то есть Нм/с.

При вводе N в квт и n в об/мин

$M_k = 9650 \frac{N}{n}$ Нм.

6.5. Кручение стержней некруглого поперечного сечения

При кручении стержней некруглого поперечного сечения оказывается несправедливой гипотеза плоских сечений. Происходит так называемая *депланация* (искривление) сечений (рис. 6.12).

В связи с развитием депланаций различают два вида кручения стержней некруглого поперечного сечения: *свободное* и *стесненное*.

Кручение называется свободным, если депланации всех поперечных сечений одинаковы по длине стержня. При переменных депланациях кручение называется *стесненным*.

При свободном кручении осевые смещения всех точек всех сечений одинаковы, следовательно, в поперечных сечениях действуют только касательные напряжения τ , а $\sigma = 0$ (рис. 6.12, а).

При стесненном кручении осевые смещения точек сечений различны, появляется осевые деформации и, следовательно, в поперечных сечениях действуют и касательные напряжения τ , и нормальные напряжения σ (рис. 6.12, б).

Приведенные далее в этом разделе расчетные формулы относятся к свободному кручению стержней.

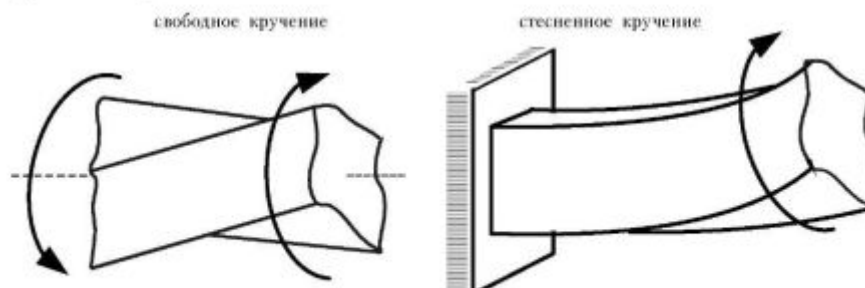


Рис. 6.12. Деформация прямоугольного сечения при кручении

Точное решение задачи кручения для некоторых типов поперечного сечения дается в теории упругости. Расчет стержня произвольного поперечного сечения на кручение сводится к решению уравнения Пуассона (формула 23.5 из раздела 23.6.1).

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0$$

где φ — функция напряжений, связанная с касательными напряжениями

$$\text{соотношениями } \tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Решение уравнения Пуассона методом конечных элементов рассматривается в разделе 23.6.3. Такому уравнению подчиняются многие явления природы и техники, что послужило поводом для проведения аналогий между различными явлениями. Рассматривая кручение стержней некруглого сечения, можно использовать в частности мембранную и гидродинамическую аналогии.

В мембранной аналогии касательные напряжения при кручении стержня пропорциональны углу наклона касательной к резиновой мембране, натянутой на отверстие, имеющее форму поперечного сечения стержня, и надутой внутренним давлением.

В гидродинамической аналогии распределение касательных напряжений при кручении стержня пропорционально распределению скоростей движения жидкости в бассейне, имеющем форму поперечного сечения стержня (рис. 6.13).

Методы аналогий лучше использовать для выбора опасных точек в поперечном сечении, а не для расчета напряжений. Определять же напряжения и перемещения лучше всего методом конечных элементов с использованием вычислительных комплексов.

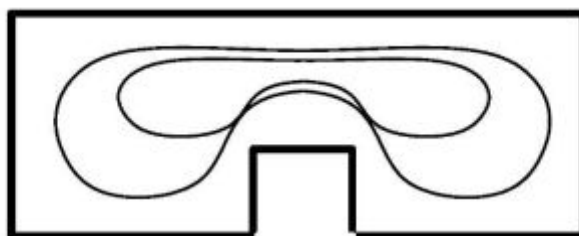


Рис. 6.13. Движение жидкости в бассейне

Для удобства использования результаты расчета стержней любого поперечного сечения принято представлять в той же форме, что и для стержней круглого поперечного сечения, а именно:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_k} \quad \tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k} \quad (6.18),$$

где J_k и W_k — эмпирические или расчетные коэффициенты, называемые соответственно момент инерции при кручении и момент сопротивления при кручении. Для стержней круглого или кольцевого сечения $J_k = J_p$ и $W_k = W_p$. Для стержней некруглого поперечного сечения чаще всего эти коэффициенты берутся из справочников.

Условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} = \left| \frac{M_k}{W_k} \right| \leq [\tau] \approx (0,5 - 0,6) [\sigma] \quad (6.19).$$

Приведем, имеющиеся в справочниках формулы для расчета J_k и W_k для наиболее часто применяемых форм поперечного сечения.

Прямоугольное сечение

На рисунке 6.14 приведены эпюры касательных напряжений по осям симметрии прямоугольного сечения и по диагонали.

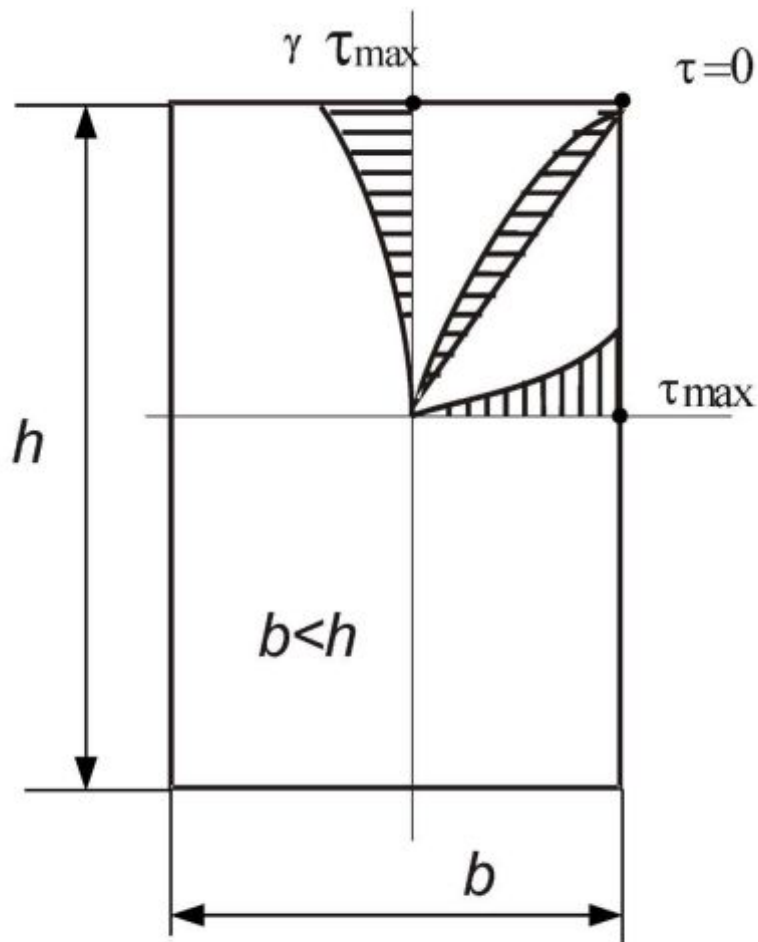


Рис. 6.14. Распределение касательных напряжений в прямоугольном сечении

Максимальные касательные напряжения τ_{\max} возникают в середине длинной стороны прямоугольного сечения.

В середине короткой стороны $\tau = \gamma \cdot \tau_{\max}$.

Момент инерции и момент сопротивления при кручении рассчитываются по формулам

$$J_k = \alpha hb^3 \quad \text{и} \quad W_k = \beta hb^2,$$

где коэффициенты α , β и γ определяются из справочника в зависимости от отношения сторон прямоугольника $\frac{h}{b}$, где h — большая сторона прямоугольника. Значения этих коэффициентов приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 Коэффициенты для расчета на кручение стержней прямоугольного сечения

h/b	α	β	γ	h/b	α	β	γ
1	0,141	0,208	1,000	4	0,281	0,282	0,745
1,5	0,196	0,231	0,859	6	0,299	0,299	0,743
2	0,229	0,246	0,795	8	0,307	0,307	0,743
2,5	0,249	0,256	0,766	10	0,313	0,313	0,743
3	0,263	0,267	0,753	∞	0,333	0,333	0,743

Тонкостенные сечения открытого профиля

К таким сечениям можно отнести прокатные профили: уголок, швеллер, двутавр, которые можно представить в виде набора прямоугольников. Для них

$$\text{Момент инерции } J_k = \eta \sum \frac{bh^3}{3}, \quad \text{момент сопротивления } W_k = \frac{J_k}{b_{\max}},$$

где b и h — ширина и высота каждого прямоугольника, входящего в состав сечения, η — поправочный коэффициент.

Для уголка $\eta = 1$, для швеллера $\eta = 1,12$, для двутавра $\eta = 1,2$.

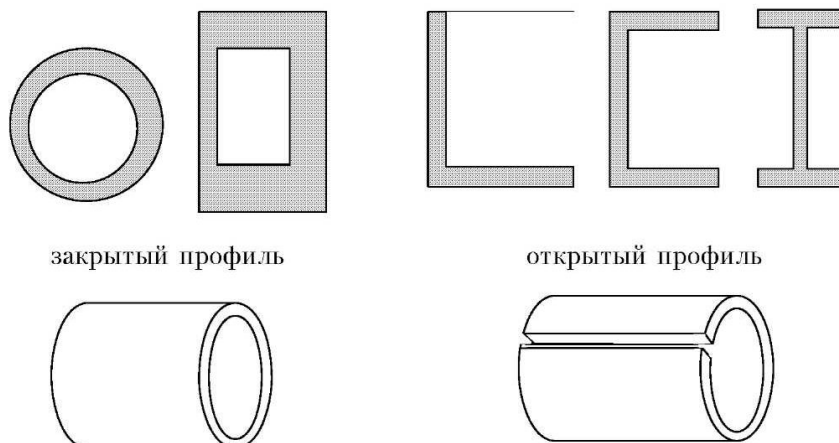


Рис. 6.15 Сечения стержней закрытого и открытого профиля

Тонкостенные сечения закрытого профиля

Примерами таких сечений являются кольцевое сечение и коробчатое сечение, состоящее из набора прямоугольников. Для них

$$\text{Момент инерции } J_k = \frac{4\delta \cdot A_{\text{сред}}^2}{\int_S \frac{dS}{\delta}}, \quad \text{момент сопротивления } W_k = 2\delta_{\min} \cdot A_{\text{сред}},$$

где S — длина средней линии тонкостенного сечения, $A_{\text{сред}}$ — площадь, ограниченная средней линией сечения, δ — толщина сечения.

Если толщина сечения постоянная, то

$$W_k = 2\delta_{\min} A_{\text{сред}}, \quad \text{и} \quad J_k = \frac{4\delta \cdot A_{\text{сред}}^2}{S}.$$

Следует отметить, что жесткость и прочность тонкостенных сечений закрытого профиля неизмеримо больше, чем сечений открытого профиля. Так при нанесении прорези на трубу при $d/D = 0,9$ жесткость трубы уменьшается почти в сто раз.

Глава 7. Плоский поперечный изгиб

Изгибом называется деформация, в процессе которой продольная ось бруса искривляется.

Стержень (прямолинейный брус), работающий на изгиб, называется *балкой*.

При упругой деформации продольную ось балки (линию, соединяющую центры тяжести поперечных сечений,) называют *упругой линией балки*.

Изгиб бывает *плоским* и *пространственным*. При плоском изгибе упругая линия балки — плоская кривая, при пространственном изгибе — пространственная кривая.

В этой главе рассмотрим лишь плоский поперечный изгиб. Пространственный изгиб бруса будет рассмотрен в главе 10, как частный случай сложного сопротивления.

Поперечным называется изгиб балки, вызванный силами, перпендикулярными продольной оси балки. Это условие необходимо, чтобы изгиб был поперечным, но недостаточно. Дополнительное условие будет сформулировано в разделе 7.1.

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки под действием внешних (поперечных) сил возникают два внутренних усилия: поперечная сила Q и изгибающий момент M , которые определяются методом сечений. Определение внутренних усилий при изгибе и построение эпюр Q и M рассмотрено в главе 3 (разделы 3.3 и 3.4). В этой главе рассмотрим напряжения в поперечных сечениях балки и перемещения балки при изгибе.

7.1 Нормальные напряжения при изгибе балки

Под действием изгибающего момента M в поперечных сечениях балки возникают нормальные напряжения σ , под действием поперечной силы Q — касательные напряжения τ . Чтобы упростить задачу определения напряжений, рассмотрим чистый изгиб балки.

Чистым называется изгиб, при котором в поперечных сечениях балки отсутствует поперечная сила.

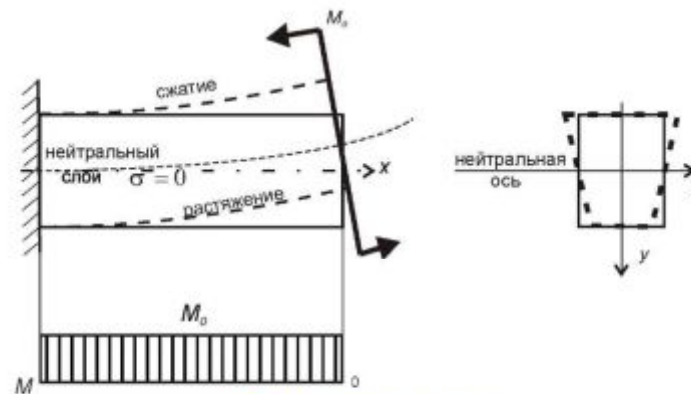


Рис. 7.1. Чистый изгиб балки

Пример чистого изгиба балки приведен на рис.7.1. Сплошной линией показан вид балки до деформации, пунктиром — после деформации. Под действием пары сил M балка изгибается. При этом верхние волокна сжимаются $\varepsilon < 0$, а нижние растягиваются $\varepsilon > 0$. В таком случае где-то в средней части балки есть волокна, где деформация $\varepsilon = 0$, а, следовательно, и напряжение $\sigma = 0$.

Слой волокон, в котором отсутствует нормальное напряжение, называется *нейтральным*.

След пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью*.

Форма поперечного сечения балки при изгибе также изменяется. В области сжатых волокон сечение становится шире, в области растянутых — уже, так как продольная и поперечная деформации связаны коэффициентом Пуассона $\varepsilon_{\text{попер}} = -\mu \cdot \varepsilon_{\text{прод}}$.

При расчете балки на изгиб будем считать, что справедливы все гипотезы из раздела 1.9. Из них выделим две гипотезы, которые будут использованы при выводе формулы нормальных напряжений при изгибе.

- *Гипотеза отсутствия боковых давлений* — волокна друг на друга не давят. В силу этой гипотезы при чистом изгибе волокна балки испытывают растяжение-сжатие $\sigma_z = \sigma_y = \tau = 0$ $\sigma_x = \sigma$, следовательно справедлив закон Гука при растяжении-сжатии $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- *Гипотеза плоских сечений* — сечения плоские до деформации остаются плоскими после деформации.

Как и при кручении вывод конечной формулы состоит из трех частей.

Геометрический анализ.

Вырежем из балки элемент длиной dx и рассмотрим его деформацию (рис. 7.2).

Предположим, что волокно ab — след нейтрального слоя, его положение еще предстоит определить. В нейтральном слое волокна не деформируются $\varepsilon = 0$ и $\sigma = 0$.

На некотором расстоянии y от ab возьмем волокно cd и рассмотрим его деформацию

$$ab = dx = \rho \cdot d\theta$$

$$cd = (\rho + y) \cdot d\theta$$

где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя.

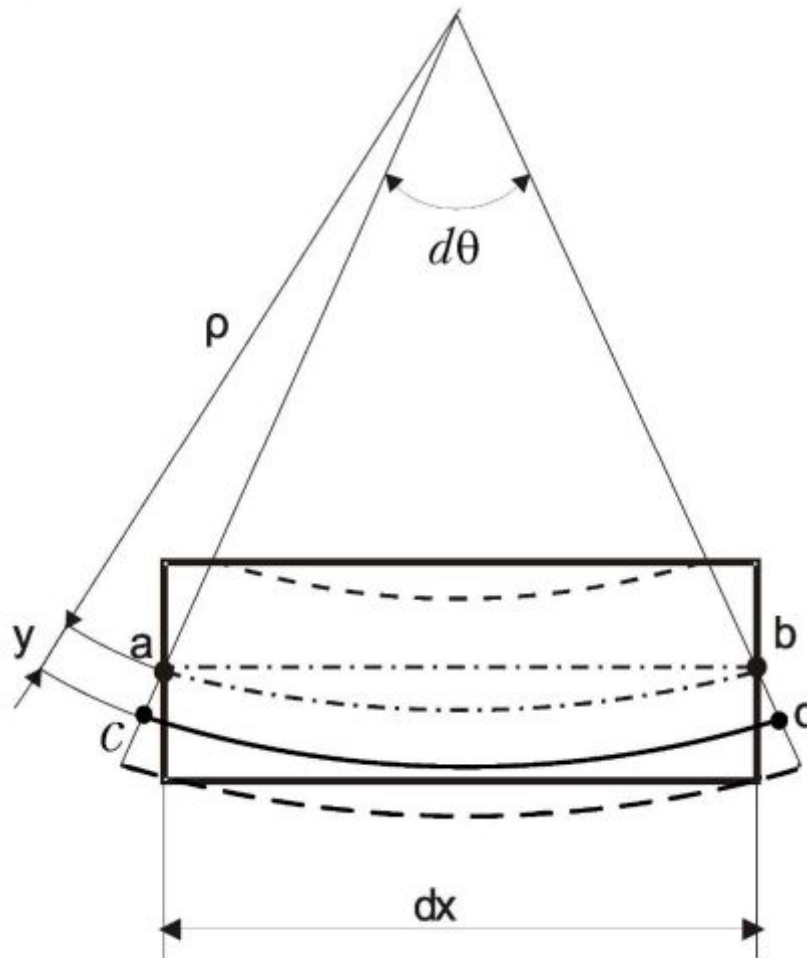


Рис. 7.2. К определению деформации при изгибе

Деформация волокна cd на расстоянии y от нейтрального слоя

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{cd - ab}{ab} = \frac{(\rho + y) \cdot d\theta - \rho d\theta}{\rho \cdot d\theta}.$$

Откуда после упрощения получаем
$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (7.1).$$

Физический анализ

Справедлив закон Гука. Следовательно, в силу гипотезы отсутствия боковых давлений

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (7.2)$$

Формула есть, но пользоваться ею нельзя, так как не известен радиус кривизны нейтрального слоя ρ . Чем больше нагрузка, тем меньше радиус кривизны. Найдем связь между ними.

Статический анализ. Изгибающий момент в сечении вызывает появление нормальных напряжений. Связь между ними устанавливает условие эквивалентности (1.3).

$$M_z = \int_A \sigma y \cdot dA.$$

С учетом (7.2)

$$M_z = \int_A \frac{E y^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} J_z, \quad (7.3)$$

где
$$J_z = \int_A y^2 dA.$$

Из выражения (7.3) находим кривизну балки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot J_z} \quad (7.4)$$

Подставляя (7.4) в (7.2) получаем
$$\sigma = \frac{M_z}{E \cdot J_z} E \cdot y$$

или окончательно

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y \quad (7.5)$$

Формула (7.5) выведена при чистом изгибе балки. При плоском поперечном изгибе гипотеза плоских сечений несправедлива и полученная формула дает ошибку.

Однако при отношении длины балки к высоте поперечного сечения $\frac{l}{h} > 10$ погрешность расчета не превышает 5%, что позволяет использовать полученную формулу при плоском поперечном изгибе длинных и тонких балок.

Завершая статический анализ задачи, рассмотрим еще два условия эквивалентности (1.2) и (1.3).

$$N = \int_A \sigma \cdot dA \quad (7.6)$$

Так как при изгибе нет продольных усилий, то $N = 0$. Подставим выражение (7.5) в (7.6)

$$N = \int_A \frac{M_z}{J_z} y \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} \int_A y \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} S_z = 0,$$

где
$$S_z = \int_A y \cdot dA$$
 — статический момент сечения относительно нейтральной оси.

Изгибающий момент M_z и момент инерции J_z не могут быть равны нулю, поэтому $S_z = 0$. Следовательно, *нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения*.

По условию эквивалентности (1.3)

$$M_y = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA. \quad (7.7)$$

Но $M_y = 0$, так как рассматриваем плоский изгиб балки. Тогда, подставляя в условие (7.7) выражение (7.5), получаем

$$M_y = \int_A \frac{M_z}{J_z} y \cdot z \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} \int_A y \cdot z \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} J_{yz} = 0,$$

где $J_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot dA$ — центробежный момент инерции сечения. Следовательно

$J_{yz} = 0$, а оси y и z являются главными осями инерции сечения балки.

Теперь можно сформулировать дополнительное условие существования плоского изгиба.

Изгиб является плоским, если все силы лежат в одной из главных плоскостей инерции балки, то есть в плоскости, проходящей через одну из главных осей инерции сечения и продольную ось балки.

7.1.1. Условие прочности при изгибе

Нормальные напряжения σ при изгибе в соответствии с формулой (7.5) распределяются по линейному закону (рис. 7.3). На уровне нейтральной оси при $y = 0$ $\sigma = 0$. В волокнах максимально удаленных от нейтральной оси, то есть на поверхности балки возникают максимальные напряжения σ_{\max} в области растянутых волокон и минимальные напряжения σ_{\min} в области сжатых волокон.

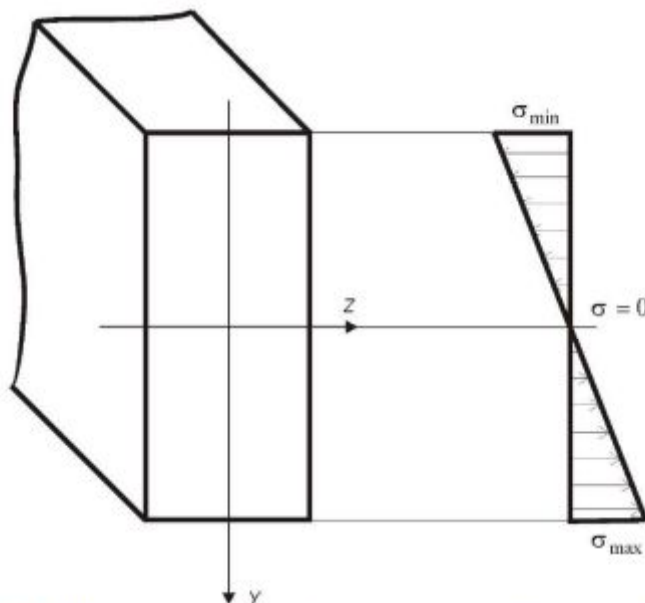


Рис. 7.3. Нормальные напряжений в поперечном сечении балки при изгибе

Условие прочности в сопротивлении материалов имеет вид $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$.

Запишем выражение для σ_{\max}

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_z} y_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z},$$

где $W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}$ — момент сопротивления при изгибе.

Окончательный вид условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (7.8).$$

Запишем моменты сопротивления для наиболее часто используемых сечений.

Для балки прямоугольного сечения $J_z = bh^3/12$

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12h/2} = \frac{bh^2}{6},$$

Для балки круглого сечения $J_z = \pi d^4/64$ $y_{\max} = d/2$

$$W_z = \frac{\pi d^4}{64d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3,$$

Для балки кольцевого сечения $\alpha = d/D$, $J_z = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4)$,

$$W_z = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4) \cdot \frac{1}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4).$$

Для стальных конструкций прочность материала на растяжение и на сжатие одинакова. Однако у некоторых материалов она различна.

У чугуна предел прочности на сжатие в 4 раза больше, чем на растяжение.

У дерева, наоборот, прочность на растяжение в 2 раза больше, чем на сжатие.

В таких случаях иногда приходится проверять два условия прочности: на растяжение и на сжатие.

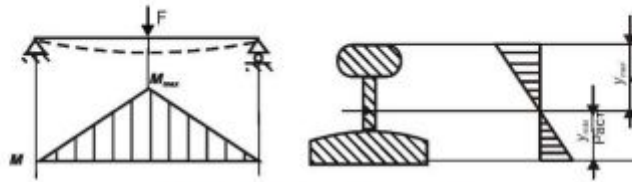


Рис. 7.4. Изгиб чугунного рельса

Рассмотрим чугунный рельс, лежащий на двух опорах, нагруженный посередине силой (рис. 7.4). Пример не очень корректный, так как в настоящее время используют стальные рельсы. Кроме того, рельс, лежащий на шпалах, надо рассматривать как балку на упругом основании, а это совсем другой расчет.

Под действием силы F рельс прогибается. Верхние волокна сжимаются, нижние растягиваются. Так как на сжатие прочность чугуна выше, чем на растяжение, желательно, чтобы сжимающие напряжения в балке были больше, чем растягивающие. Это достигается формой поперечного сечения рельса. Центр тяжести рельса смещен вниз в сторону массивного основания

Для чугунного рельса надо делать две проверки на прочность. Отдельно для сжатых и для растянутых волокон. Для сжатых

$$\sigma_{\text{сжат}} = \frac{M_{\max}}{J_z} y_{\text{сжат}} \leq [\sigma_{\text{сжат}}] = \frac{\sigma_{\text{в.сжат}}}{n}.$$

Для растянутых волокон

$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{M_{\max}}{J_z} y_{\text{раст}} \leq [\sigma_{\text{раст}}] = \frac{\sigma_{\text{в.раст}}}{n}.$$

7.1.2. Рациональная форма поперечного сечения

Рассмотрим балку прямоугольного сечения. Нормальные напряжения распределяются по сечению по линейному закону. Максимальные напряжения действуют на поверхности балки. На нейтральной оси (на уровне центра тяжести)

$\sigma = 0$. Другими словами вблизи центра тяжести сечения материал балки всегда недогружен.

С точки зрения экономии металла рационально вырезать часть металла вблизи нейтральной оси (рис. 7.5). Так прямоугольное сечение целесообразно заменить двутавровым. При этом момент сопротивления W_z сечения балки уменьшается незначительно, а площадь A уменьшается в несколько раз. Таким образом при тех же нагрузках вес балки резко уменьшается.

Тот же эффект получается при замене прямоугольного сечения швеллером, но в этом случае возможно скручивание балки, о чем будет сказано в следующем разделе.

Существенной экономии материала можно достигнуть также при замене прямоугольного сечения коробчатым (для деревянных балок) или кольцевым (балка — труба).

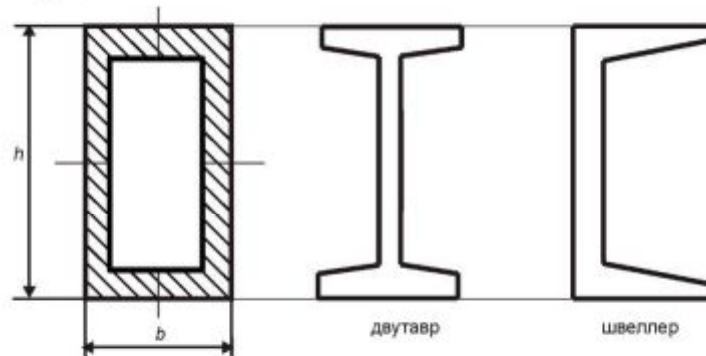


Рис. 7.5. Рациональные формы сечения балки

7.2 Касательные напряжения при изгибе

При поперечном изгибе в сечениях балки действуют два внутренних усилия: изгибающий момент, вызывающий появление нормальных напряжений σ и поперечная сила, вызывающая появление касательных напряжений τ .

По закону парности касательных напряжений появление τ в поперечных сечениях балки влечет за собой появление τ в продольных сечениях (вдоль волокон).

Рассмотрим две балки: одну сплошную (рис. 7.6, а) и другую, составленную из двух отдельных листов (рис. 7.6, б). Под действием поперечной нагрузки балки изгибаются. В балке, составленной из листов, хорошо видны сдвиги между листами. В сплошной балке таких сдвигов нет. Возникающие между слоями касательные напряжения компенсируют сдвиги, сохраняя неразрывность балки.

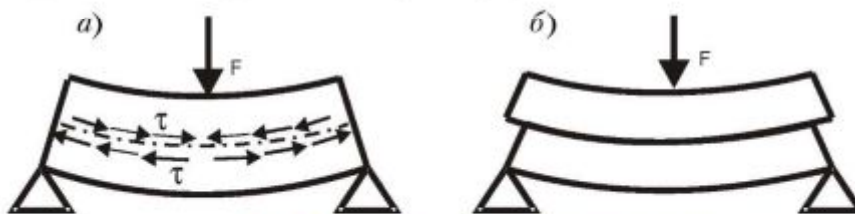


Рис. 7.6. Касательные напряжения при изгибе балки

Распределение τ по ширине сечения балки неизвестно, поэтому для решения поставленной задачи примем две гипотезы:

- Касательные напряжения по ширине сечения распределены равномерно,
- В поперечном сечении касательные напряжения параллельны линии действия поперечной силы.

В действительности эти гипотезы справедливы лишь для прямоугольного поперечного сечения. Однако выведенную с использованием этих гипотез формулу используют и для некоторых других форм поперечного сечения.

Для вывода формулы касательных напряжений τ для балки, нагруженной силой F , построим эпюры изгибающих моментов M_z и поперечных сил Q (рис. 7.7).

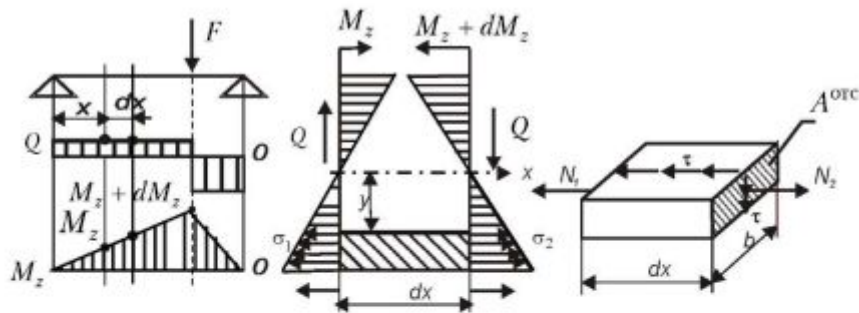


Рис. 7.7. К выводу формулы касательных напряжений при изгибе балки

Вырежем из сплошной балки элемент длиной dx . Внутренние усилия с левой и с правой сторон элемента различны. Слева действуют M_z и Q , справа $M_z + dM_z$ и Q .

От выбранного элемента на некотором расстоянии y от нейтральной оси продольным сечением отрезем нижнюю часть и рассмотрим ее равновесие.

$$\sum F_x = -N_1 - \tau \cdot b \cdot dx + N_2 = 0,$$

$$\text{где } N_1 = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma_1 \cdot dA = \int_{A^{\text{отс}}} \frac{M_z}{J_z} y \cdot dA = \frac{M_z}{J_z} S_z^{\text{отс}},$$

$$N_2 = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma_2 \cdot dA = \int_{A^{\text{отс}}} \frac{(M_z + dM_z)}{J_z} y \cdot dA = \frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z^{\text{отс}},$$

$$S_z^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} y \cdot dA.$$

$$\text{Тогда } \tau = \frac{N_2 - N_1}{b \cdot dx} = \frac{\frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z^{\text{отс}} - \frac{M_z}{J_z} S_z^{\text{отс}}}{b \cdot dx} = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{S_z^{\text{отс}}}{b \cdot J_z}.$$

$$\text{С учетом } Q = \frac{dM_z}{dx}$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^{\text{отс}}}{b \cdot J_z} \quad (7.9).$$

Полученная формула (7.9) носит название — формула Журавского.

В этой формуле:

- Q — поперечная сила в сечении,
- b — ширина сечения на том уровне, где определяются касательные напряжения,
- J_z — момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси,
- $S_z^{\text{отс}}$ — статический момент относительно нейтральной оси части сечения, расположенной выше или ниже уровня, где определяются касательные напряжения.

7.2.1. Распределение касательных напряжений в сечениях различной формы

Рассмотрим распределение касательных напряжений в сечениях различной формы.

Прямоугольное сечение

Дано: Q , b , h (рис. 7.8)

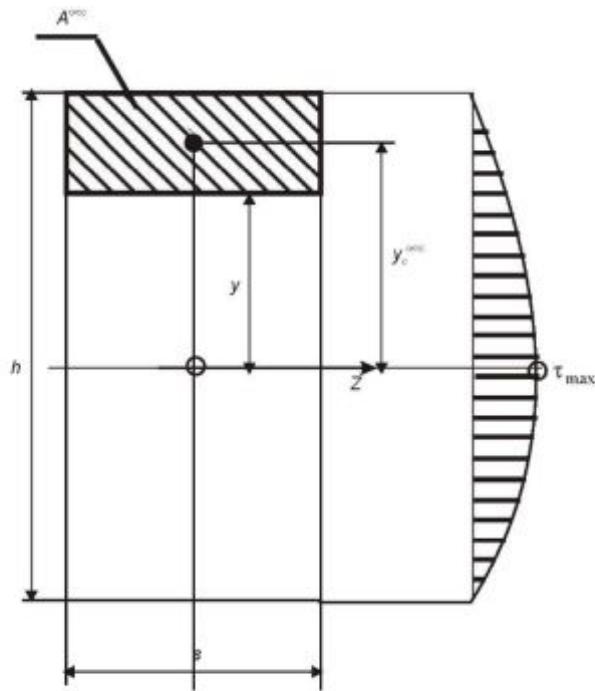


Рис. 7.8. Касательные напряжения в прямоугольном сечении балки при изгибе

$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$S_z^{\text{отс}} = A^{\text{отс}} \cdot y_c^{\text{отс}} = \frac{1}{2} b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (7.10),$$

где $A^{\text{отс}} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right)$ — площадь отсеченной части сечения,

$y_c^{\text{отс}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$ — расстояние от центра тяжести отсеченной части до нейтральной оси.

Выражение (7.10) представляет собой уравнение параболы. На поверхности балки при $y = \pm \frac{h}{2}$ $S_z^{\text{отс}} = 0$ $\tau = 0$. На нейтральной оси при $y = 0$ $S_z^{\text{отс}}$ достигает максимума.

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{Q \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}$$

Круглое и кольцевое сечения

Дано: Q, d .

Для круглого поперечного сечения несправедлива гипотеза о том, что касательные напряжения τ параллельны поперечной силе Q (рис.7.9).

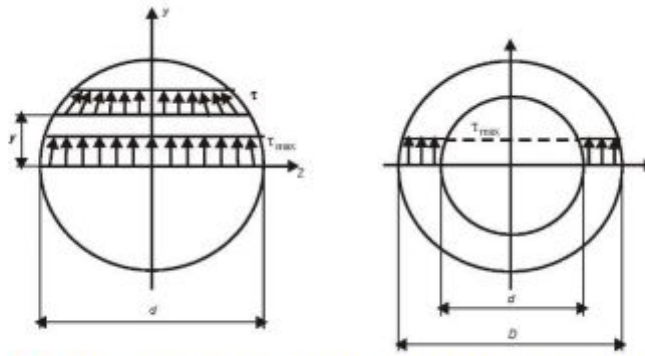


Рис. 7.9. Касательные напряжения в круглом сечении балки при изгибе

Закон распределения τ не может быть определен по формуле Журавского. Однако на уровне нейтральной оси, где все τ параллельны поперечной силе Q , можно по формуле Журавского определить максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot (S_z^{\text{отс}})_{\max}}{b \cdot J_z}$$

В этом выражении $b = d$ $J_z = \frac{\pi d^4}{64}$ $S_z^{\text{отс}} = \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{12}$

Тогда $\tau_{\max} = \frac{Q \cdot 64 \cdot d^3}{d \cdot \pi d^4 \cdot 12} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}$

Для кольцевого сечения, применяя формулу Журавского также можно найти τ_{\max} на уровне нейтральной оси, рассматривая кольцо как разность двух кругов. В зависимости от толщины кольца $\frac{4}{3} \frac{Q}{A} < \tau_{\max} < 2 \frac{Q}{A}$.

Для тонкостенных колец можно принять $\tau_{\max} \approx 2 \frac{Q}{A}$.

Двутавровое сечение

Двутавр приближенно можно рассматривать как сечение, состоящее из трех прямоугольников (рис. 7.10). В прямоугольном сечении касательные напряжения τ распределены по параболе.

На поверхности $\tau = 0$. На нейтральной оси $\tau = \tau_{\max}$. В месте перехода от полки к стенке двутавра его ширина b уменьшается примерно в 15 раз. Соответственно во столько же раз скачкообразно увеличиваются касательные напряжения.

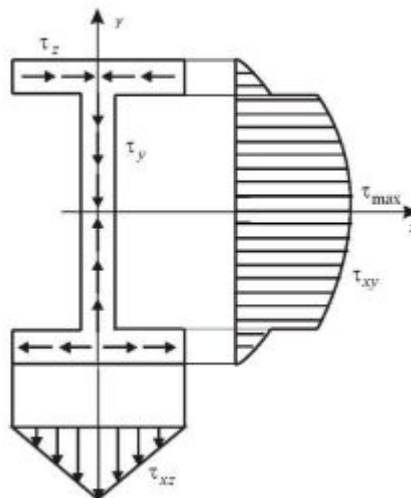


Рис. 7.10. Касательные напряжения в двутавровой балке при изгибе

Следует отметить, что в полках двутавра, кроме вертикальных касательных напряжений τ_y , действуют еще и горизонтальные τ_x , направленные, как показано на рис. 7.10. Они образуют поток касательных напряжений, который для двутавра является самоуравновешенным.

Швеллер

В швеллере касательные напряжения образуют неуравновешенный поток, который может вызвать скручивание балки (рис. 7.11, а). Чтобы компенсировать скручивающее действие касательных напряжений внешней силой рекомендуется прикладывать не в центре тяжести швеллера, а сместить так, чтобы момент силы относительно продольной оси уравновешивал поток касательных напряжений (рис. 7.11, б).

Точка, в которую надо сместить силу, чтобы она уравновешивала скручивающее действие потока касательных напряжений, называется *центром изгиба*.

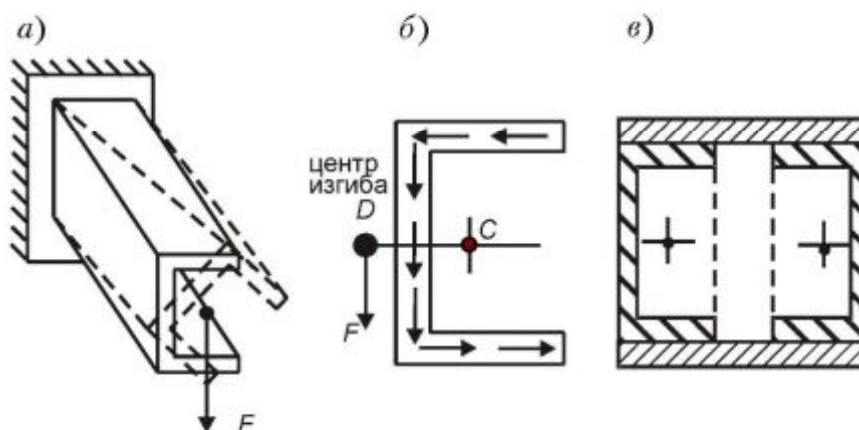


Рис. 7.11. Поток касательных напряжений в швеллере при изгибе

Теоретически положение центра изгиба определяется в теории расчета тонкостенных стержней открытого профиля. На практике не рекомендуется использовать один швеллер. Желательно, чтобы сечение балки было симметричным и, если нужно использовать швеллер, сделайте симметричное сечение из двух швеллеров (рис. 7.11, в).

7.2.2. Проверка прочности по касательным напряжениям

Для длинных балок максимальные касательные напряжения, как правило, значительно меньше максимальных нормальных напряжений. Так для балки круглого поперечного сечения, размеры которого подобраны из условия прочности по нормальным напряжениям, при $\sigma_{\max} = 100$ МПа величина $\tau_{\max} \approx 2$ МПа, то есть пренебрежимо мала.

Необходимо также учесть, что нормальные напряжения максимальны на поверхности балки и равны нулю на уровне нейтральной оси, а касательные напряжения равны нулю на поверхности и максимальны на уровне нейтральной оси. Нет точки, в которой одновременно действовали бы максимальные нормальные и максимальные касательные напряжения.

Как правило, проверка прочности балки по касательным напряжениям не производится. Однако в некоторых случаях все-таки приходится делать такую проверку.

Проверка прочности балки по касательным напряжениям производится в следующих случаях:

- Для коротких балок,
- Если силы приложены вблизи опор балки

Объяснение для обоих случаев одно. Рассмотрим две балки (рис. 7.12). Одна нагружена силой F посередине (рис. 7.12, а), другая двумя силами $F/2$,

приложенными на сравнительно малом расстоянии a от опор (рис. 7.12, б). Для первой балки M_{\max} значительно больше, чем для второй. Максимальная поперечная сила Q_{\max} для обеих балок одинакова. Размеры поперечного сечения подбираются по условию прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma].$$

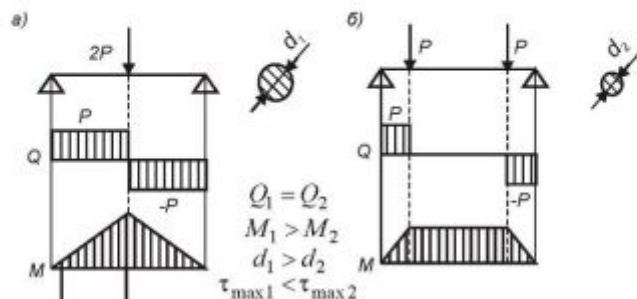


Рис. 7.12. Зависимость внутренних усилий от положения сил на балке

Следовательно для первой балки размеры сечения будут больше. При равенстве поперечных сил максимальные касательные напряжения будут больше в балки меньшего поперечного сечения, то есть во второй (правой) балке.

- Если сечение имеет вырез вблизи нейтральной оси.

Например, для двутавровой балки или балки коробчатого сечения, так как, согласно формуле Журавского, при уменьшении ширины поперечного сечения в несколько раз во столько же раз увеличиваются касательные напряжения и могут стать сопоставимы с нормальными напряжениями. Так для двутавровой балки, если $\sigma_{\max} = 100$ МПа, то $\tau_{\max} \approx 25$ МПа.

- Для материалов с пониженной сдвиговой жесткостью.

Например, для балок из пластмассы, дерева, композиционных материалов, где волокна с высоким модулем сдвига скреплены между собой связующим материалом с гораздо меньшим модулем сдвига.

7.3 Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе

Потенциальная энергия упругой деформации Π при изгибе численно равна работе внутренних сил, которая складывается из суммы работ (и соответственно суммы потенциальных энергий) изгибающего момента Π_M и поперечной силы Π_Q

$$\Pi = \Pi_M + \Pi_Q.$$

Потенциальную энергию Π_M , накопленную в теле, найдем как интеграл по объему от удельной потенциальной энергии Π_0 , которая вызывается нормальными

напряжениями и равна $\Pi_0 = \frac{\sigma^2}{2E}$, где $\sigma = \frac{M_z}{J_z} y$, а элементарный объем

$dV = dA \cdot dx$. Тогда

$$\Pi_M = \int_V \Pi_0^\sigma dV = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_l \int_A \left(\frac{M_z}{J_z} y \right)^2 \cdot \frac{1}{2E} dA \cdot dx = \int_l \frac{M_z^2}{J_z^2 2E} \left(\int_A y^2 dA \right) dx$$

где $\int_A y^2 dA = J_z$. Окончательно получаем

$$\Pi_M = \int_l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2E \cdot J_z}.$$

Удельная потенциальная энергия от действия поперечной силы Q вызывается касательными напряжениями и равна $\Pi_0^z = \frac{\tau^2}{2G}$, где $\tau = \frac{Q \cdot S_z^{\text{отс}}}{b \cdot J_z}$. Тогда

$$\Pi_Q = \int_V \Pi_0^z dV = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_{l,A} \frac{Q^2 (S_z^{\text{отс}})^2}{b^2 J_z^2 2G} dA \cdot dx \cdot \frac{A}{A}.$$

Для сохранения единообразия формул потенциальной энергии упругой деформации выражение Π_Q умножили и разделили на площадь поперечного сечения A . Тогда окончательно

$$\Pi_Q = k \int_l \frac{Q^2 dx}{2G \cdot A},$$

где $k = \frac{A}{J_z^2} \int_A \left(\frac{S_z^{\text{отс}}}{b} \right)^2 dA$ — коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений по сечению. Величина, в большинстве случаев, близкая к единице $k = 1 - 1,2$.

Выражение полной потенциальной энергии упругой деформации при изгибе имеет вид

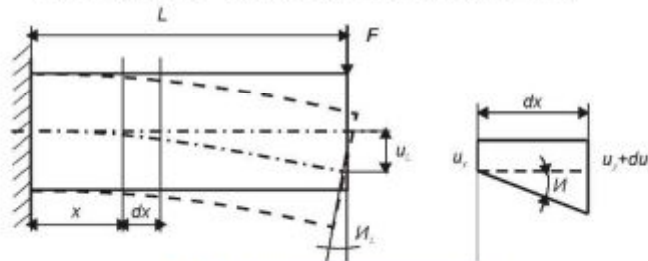
$$\Pi = \int_l \frac{M_z^2 \cdot dx}{2E \cdot J_z} + k \int_l \frac{Q^2 dx}{2G \cdot A}.$$

В случае наличия на балке нескольких участков с различной нагрузкой подсчитывается сумма интегралов по количеству участков

$$\Pi = \sum_l \int \frac{M_z^2 \cdot dx}{2E \cdot J_z} + \sum k \int \frac{Q^2 dx}{2G \cdot A} \quad (7.11).$$

7.4 Перемещения при изгибе

Балка при изгибе искривляется. При этом каждое сечение получает два перемещения: линейное — прогиб и угловое — угол поворота сечения (рис. 7.13).



7.13. Перемещения балки при изгибе

Пусть в сечении x прогиб балки u_y . В сечении $x+dx$ прогиб балки $u_y + du_y$. Тогда ввиду малости перемещений по сравнению с длиной балки угол наклона касательной к упругой линии балки

$$\theta \approx \text{tg}(\theta) = \frac{du_y}{dx} \quad (7.12),$$

Запишем уравнение упругой линии балки. По выражению (7.4) кривизна балки $\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot J_z}$.

С другой стороны, из аналитической геометрии

$$\frac{1}{\rho} = \frac{u_y''}{\left(1 + (u_y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Угол поворота сечения $\theta = u_y' \approx 0$ по сравнению с 1. Тогда кривизна балки $\frac{1}{\rho} \approx u_y''$.

Приравняв два выражения для кривизны балки получаем уравнение упругой линии балки

$$EJ_z u_y'' = M_z \quad (7.13).$$

Для определения прогиба балки необходимо дважды проинтегрировать уравнение упругой линии балки. Угол поворота сечения балки — это первая производная от прогиба (7.12).

С учетом дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки (3.12) можно составить систему дифференциальных уравнений упругой линии балки

$$u_y' = \theta \quad u_y'' = \frac{M_z}{EJ_z} \quad u_y''' = \frac{Q}{EJ_z} \quad u_y^{IV} = \frac{q}{EJ_z} \quad (7.14).$$

Перемещения при изгибе балок можно определить тремя способами:

1. Путем непосредственного интегрирования уравнения упругой линии балки;
2. Методом начальных параметров;
3. С помощью интеграла Мора.

Использование интеграла Мора будет рассмотрено в главе 11. Далее рассмотрим только два первых метода.

7.4.1. Непосредственное интегрирование уравнения упругой линии балки

Это самый простой способ определения перемещений балки при изгибе. Необходимо составить уравнение изгибающего момента для заданной балки и, записав уравнение (7.13), проинтегрировать его — получим уравнение углов поворота сечений балки. После второго интегрирования получим уравнение прогибов балки.

$$EJ_z u_y'' = M_z$$

$$EJ_z \theta = EJ_z u_y' = \int M_z dx + C$$

$$EJ_z u_y = \int \int M_z dx dx + Cx + D.$$

Произвольные постоянные интегрирования определяются из граничных условий закрепления балки. Если на балке n участков с различной нагрузкой, для каждого участка составляется свое уравнение упругой линии, дающее после интегрирования две произвольные постоянные.

Всего — $2n$ постоянных, для определения которых надо составить систему из $2n$ уравнений и решить ее. Это создает большие трудности при определении перемещений вручную с помощью микрокалькулятора.

При использовании Mathcad таких трудностей нет. Уравнение изгибающего момента единое для всех участков записывается с использованием операторов условия. А встроенная функция **Odesolve** легко решает любое дифференциальное уравнение.

7.4.2. Метод начальных параметров

Метод начальных параметров — это способ решения дифференциальных уравнений, при котором неизвестными параметрами являются значение функции и ее производных в начале координат. Для уравнения упругой линии — это будут прогиб и угол поворота в начале координат на левом конце балки.

Для балки с несколькими участками, для того чтобы произвольные постоянные интегрирования на всех участках были равны, надо, чтобы слагаемые уравнения изгибающих моментов не менялись при переходе от одного участка к другому. Для

этого используются два приема:

- Момент пары сил умножается на фиктивное плечо в нулевой степени
 $M = M_0(x - a_m)^0$;
- Распределенная нагрузка принимается действующей до конца балки. А чтобы не нарушить условия нагружения, в сечении, где заканчивается реальная нагрузка, прикладывается равная по величине распределенная нагрузка противоположного направления, также действующая до конца балки $M = q \frac{(x - a_q)^2}{2} - q \frac{(x - b_q)^2}{2}$.

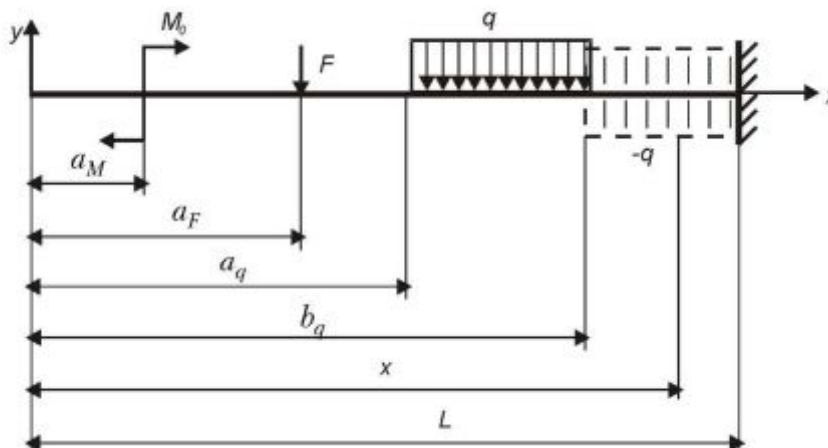


Рис. 7.14. Условная схема нагружения балки при изгибе

Рассмотрим балку длиной l , нагруженную парой сил M_0 , силой F и распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 7.14). Расстояния от левого конца балки до нагрузок M_0 , F , q обозначим соответственно a_m , a_F , a_q — до начала распределенной нагрузки, b_q — до конца распределенной нагрузки. Начало координат возьмем на левом конце балки.

Для сечения, взятого на последнем участке балки, уравнение изгибающего момента имеет вид

$$EJ_z u_y'' = M(x) = M_0(x - a_m)^0 - F(x - a_F) - q \frac{(x - a_q)^2}{2} + q \frac{(x - b_q)^2}{2}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем уравнение углов поворота сечений

$$EJ_z u_y' = EJ_z \theta(x) = M_0(x - a_m) - F \frac{(x - a_F)^2}{2} - q \frac{(x - a_q)^3}{6} + q \frac{(x - b_q)^3}{6} + C.$$

Интегрируя еще раз, получаем уравнение прогибов балки

$$EJ_z u_y(x) = M_0 \frac{(x - a_m)^2}{2} - F \frac{(x - a_F)^3}{6} - q \frac{(x - a_q)^4}{24} + q \frac{(x - b_q)^4}{24} + Cx + D.$$

Уравнения для других участков, согласно определению изгибающего момента, должны включать только слагаемые от нагрузок, находящихся по одну сторону (слева) от рассматриваемого сечения.

Определим смысл произвольных постоянных.

$$\text{При } x = 0 \quad EJ_z \theta_0 = C \quad EJ_z u_{y0} = D.$$

$$\text{Откуда} \quad \theta_0 = \frac{C}{EJ_z} \quad u_{y0} = \frac{D}{EJ_z},$$

где u_{y0} и θ_0 — прогиб и угол поворота сечения балки в начале координат.

В общем виде для случая действия любого количества нагрузок уравнение упругой линии балки принимает вид

$$EJ_z u_y = EJ_z u_{y0} + EJ_z \theta_0 x + \sum M_0 \frac{(x-a_m)^2}{2} + \sum F \frac{(x-a_F)^3}{6} + \sum q \frac{(x-a_{qi})^4}{24} - \sum q \frac{(x-b_q)^4}{24} \quad (7.15)$$

Это уравнение называется универсальным уравнением упругой линии балки или уравнением Крылова.

Данное уравнение составлено с учетом распределенной нагрузки постоянной интенсивности q . Если используется распределенная нагрузка переменной интенсивности $q(x)$ надо добавить слагаемые, содержащие первую, а если надо, то и вторую производную от $q(x)$.

Правила пользования уравнением Крылова

1. Начало координат всегда на левом конце балки. В этом случае знаки прогиба и угла поворота сечения совпадают, в противном случае знаки противоположны.
2. Составить уравнение Крылова для последнего участка балки. Уравнение для произвольного сечения балки должно включать в себя только слагаемые от нагрузок, находящихся слева от рассматриваемого сечения. Желательно записывать нагрузки в том порядке, в каком они стоят на балке, соблюдая форму записи, приведенную в уравнении (7.15).
3. Уравнение углов поворота сечений получится из уравнения прогибов путем дифференцирования.
4. Знак перед каждым слагаемым соответствует знаку изгибающего момента от данной нагрузки.
5. Начальные параметры u_{y0} и θ_0 определяются из граничных условий (рис. 7.15).

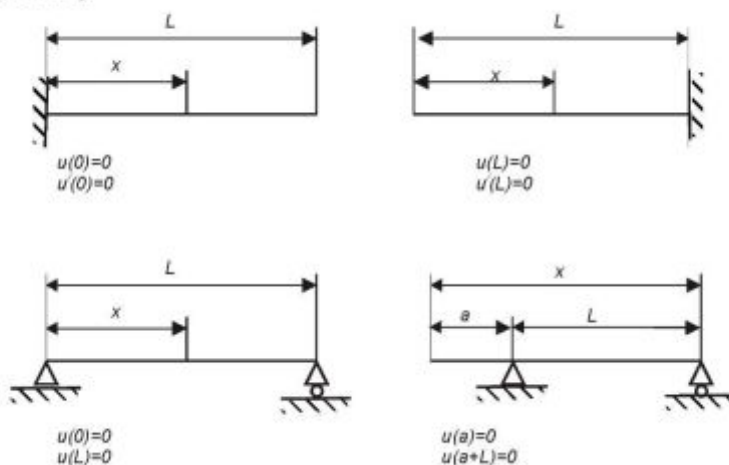


Рис. 7.15. Граничные условия для определения перемещений балки при изгибе

7.5 Изгиб кривых брусев

Нормальные напряжения в кривых брусках

В кривых брусках нормальные напряжения изменяются по гиперболическому закону (рис. 7.16), а нейтральная ось смещена в сторону центра кривизны на малую величину e . По мере увеличения радиуса кривизны бруса гипербола распрямляется, приближаясь к прямой линии, а нейтральная ось приближается к центру тяжести.

Различают кривые бруска большой и малой кривизны.

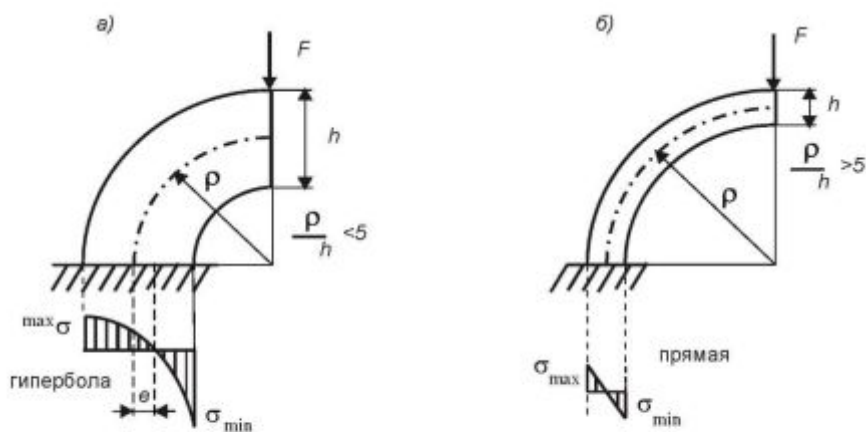


Рис. 7.16. Брусья большой и малой кривизны

Брусом большой кривизны считается брус, у которого отношение радиуса кривизны к высоте поперечного сечения $\rho/h < 5$ (рис. 7.16, а).

Брусом малой кривизны считается брус, у которого отношение радиуса кривизны к высоте поперечного сечения $\rho/h > 5$ (рис. 7.16, б).

При расчете на прочность брусев малой кривизны можно использовать формулу нормальных напряжений, выведенную для прямых балок $\sigma = \frac{M}{J}y$. При этом погрешность расчета менее 5%.

У брусев большой кривизны нормальные напряжения определяются по формуле $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot S}{r + y}$, где S — статический момент площади сечения относительно нейтральной оси, r — радиус кривизны нейтральной оси, y — расстояние от нейтральной оси до точки, где определяются напряжения.

В некоторых случаях, например, для диска с отверстием, максимальные напряжения могут примерно вдвое превышать напряжения, найденные по формуле, используемой для прямых брусев.

На практике брусья большой кривизны встречаются довольно редко. В качестве примера брусев большой кривизны можно привести крюк подъемного крана или звено якорной цепи. Расчет напряжений в брусьях большой кривизны не представляет большого практического интереса.

В курсе сопротивления материалов рассматривается прочность и жесткость в основном длинных и тонких стержней. Напомним, что формула для нормальных напряжений в прямых брусьях справедлива лишь при отношении длины к высоте поперечного сечения $h/b > 10$. В дальнейшем для расчета кривых брусев малой кривизны будем использовать формулу нормальных напряжений, выведенную для прямых брусев.

Внутренние усилия в кривых брусьях

Рассмотрим определение внутренних усилий в кривых брусьях. Внутренние усилия определяются методом сечений из условия равновесия отсеченной части стержня.

При плоском изгибе кривого бруса в поперечных сечениях возникают три внутренних усилия: продольное усилие N , поперечная сила Q и изгибающий момент M . Найдем внутренние усилия в бруссе, геометрическая ось которого представляет собой четверть круга (рис. 7.17).

Мысленно разрежем стержень произвольным сечением, полярные координаты которого ρ и φ . Действие отброшенной правой части в выбранном сечении заменим силой F и парой сил M . Силу F раскладываем на две составляющие: вдоль оси бруса N и по касательной к сечению Q $N = F \cdot \sin(\varphi)$ и $Q = F \cdot \cos(\varphi)$.

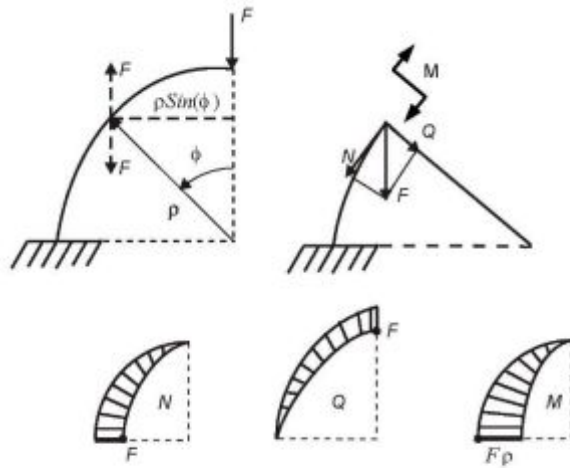


Рис. 7.17. Внутренние усилия в кривом бруссе

Пара сил M является изгибающим моментом в сечении и определяется как произведение силы на плечо $M_\varphi = F \cdot \rho \cdot \sin(\varphi)$, где плечо есть перпендикуляр, опущенный из центра тяжести рассматриваемого сечения на линию действия силы. Эпюры N , Q , M показаны на рис. 7.17.

Для брусев малой кривизны влиянием продольного усилия и поперечной силы обычно пренебрегают и эпюры N и Q не строят.

Если на кривой брус действует распределенная нагрузка, то ее обычно представляют в виде суммы двух проекций нагрузки интенсивностью q на две оси (в нашем случае y и z).

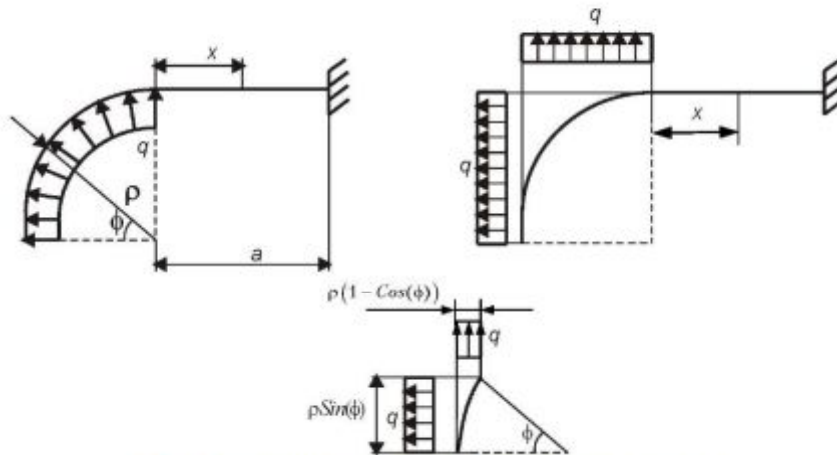


Рис. 7.18. Кривой брус, нагруженный распределенной нагрузкой

На рисунке 7.18 представлен брус, криволинейная часть которого нагружена нагрузкой, равномерно распределенной по радиусу.

На криволинейном участке бруса $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$M_\varphi = M_{qx} + M_{qy} = q \frac{\rho^2 \cdot \sin(\varphi)^2}{2} + q \frac{\rho^2 \cdot (1 - \cos(\varphi))^2}{2} = q \rho^2 (1 - \cos(\varphi)).$$

На прямолинейном участке бруса $0 < x < a$

$$M_x = M_{qx} + M_{qy} = q \frac{\rho^2}{2} + q \rho \left(\frac{\rho}{2} + x \right).$$

7.6 Расчет балок на упругом основании

В инженерной практике часто встречаются балки, лежащие на упругом основании. К таким балкам относятся шпалы железнодорожного пути, ленточные фундаменты зданий, фундаменты плотин и так далее.

Сюда же можно отнести и рельсы, у которых число опор велико, а расстояние между ними мало по сравнению с длиной рельсов. расчет балки на упругом основании не может быть выполнен с помощью уравнений равновесия.

Эта задача является статически-неопределимой. Величина реакции в каждой точке зависит от прогиба балки, а прогиб балки в свою очередь зависит от реакции со стороны основания.

Для решения задачи примем *гипотезу о пропорциональной зависимости между реакцией и осадкой основания*, впервые предложенную академиком Н.И.Фуссом и использованной Е. Винклером для расчета балок на упругом основании.

Согласно модели Винклера реальное основание как бы заменяется бесконечным числом упругих, не связанных между собой пружин (рис. 7.19). Реакция R в каждой точке основания балки будет пропорциональна прогибу u в этой точке, равному осадке основания

$$R = k \cdot b \cdot u,$$

где b — ширина балки, k — коэффициент жесткости упругого основания, называемый также коэффициент постели. Экспериментально он определяется путем вдавливания в грунт жесткого штампа. Так для песчаного грунта

$$k = 1 - 5 \text{ МН/м}^2 \text{ — песок рыхлый,}$$

$$k = 10 - 100 \text{ МН/м}^2 \text{ — песок утрамбованный,}$$

$$k < 250 \text{ — песок слежавшийся.}$$

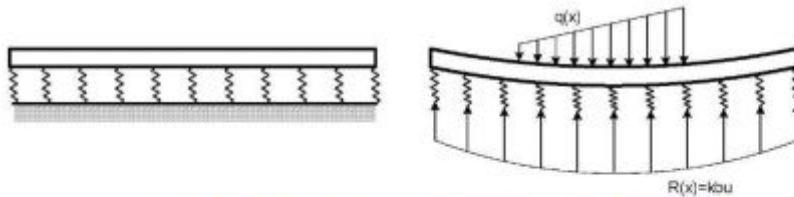


Рис. 7.19. Балка на упругом основании (модель Винклера)

С учетом внешней нагрузки и реакции упругого основания суммарная интенсивность распределенной нагрузки в некоторой точке балки

$$p = q - R = q - kbu.$$

Для получения дифференциального уравнения балки на упругом основании используем последнее из уравнений (7.14)

$$EJ_z u^{IV} = p = q - kbu. \text{ Откуда}$$

$$EJ_z u^{IV} + kbu = q \quad \text{или}$$

$$u^{IV} + \frac{kb}{EJ_z} u = \frac{q}{EJ_z} \quad (7.16).$$

Решая уравнение (7.16), находим перемещения балки u , по перемещениям определяем угол поворота сечения $\theta = u'$, изгибающий момент $M = \frac{u''}{EJ_z}$ и

$$\text{поперечную силу } Q = \frac{u'''}{EJ_z}.$$

Вот, собственно говоря, и вся теория расчета балок на упругом основании.

Все, что имеется в литературе по этому вопросу, относится к способам решения дифференциального уравнения четвертого порядка. Но ведь Mathcad сам в состоянии решить такое уравнение.

Глава 8. Учет пластических деформаций

В предыдущих главах расчеты на прочность велись с учетом только упругих деформаций. В этой главе будет рассмотрено влияние пластических деформаций на прочность конструкций. Вначале рассмотрим распределение напряжений в сечении стержня при упругопластической деформации растяжения-сжатия, изгиба, кручения. Затем рассмотрим приближенные методы оценки предельной нагрузки на стержень.

8.1 Связь напряжений и деформаций

В разделе 5.4 рассматривалось построение диаграммы истинных напряжений при растяжении. Для расчетов конструкций на прочность необходимо получить уравнение этой диаграммы. С этой целью используют четыре вида аппроксимации диаграммы деформирования.

- Диаграмма идеального упругопластического тела (диаграмма Прандтля) (рис. 8.1б) с бесконечно длинной площадкой текучести. Используется для материалов с площадкой текучести на диаграмме.

$$\text{При } \varepsilon < \varepsilon_T \quad \sigma = E \cdot \varepsilon,$$

$$\text{При } \varepsilon \geq \varepsilon_T \quad \sigma = \sigma_T$$

- Диаграмма упругопластического тела с линейным упрочнением (рис. 8.1в). Используется для материалов, не имеющих площадки текучести на диаграмме.

$$\text{При } \varepsilon < \varepsilon_T \quad \sigma = E \cdot \varepsilon,$$

$$\text{При } \varepsilon \geq \varepsilon_T \quad \sigma = \sigma_T + E_1 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_T),$$

Где $E_1 \approx 0,01E$ — модуль упрочнения;

- Диаграмма упругопластического тела со степенным упрочнением (рис. 8.1г). В расчетах конструкций используется редко, так как не вносит существенных изменений в распределение напряжений в конструкции, но усложняет проведение расчетов.

$$\text{При } \varepsilon < \varepsilon_T \quad \sigma = E \cdot \varepsilon,$$

$$\text{При } \varepsilon \geq \varepsilon_T \quad \sigma = \sigma_T + A \cdot \varepsilon^m,$$

Где A и m — эмпирические коэффициенты.

Получение уравнений для линейной и степенной аппроксимаций показано в примере к главе 5 [Построение диаграммы деформирования](#) в электронной книге. Линейная аппроксимация заменяет рассматриваемый участок диаграммы прямой линией. Степенная аппроксимация — кривой.

В добавление к трем указанным видам аппроксимации введем еще один:

- Диаграмма деформирования идеального жесткопластического тела, представляющая собой одну горизонтальную линию $\sigma = \sigma_T$ (рис.8.1а). При $\sigma < \sigma_T$ деформация $\varepsilon = 0$, то есть материал считается абсолютно жестким (недеформируемым). При $\sigma = \sigma_T$ деформация $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Последний вид аппроксимации используется в расчетах технологических процессов обработки металлов давлением и в расчетах конструкций по предельным нагрузкам.

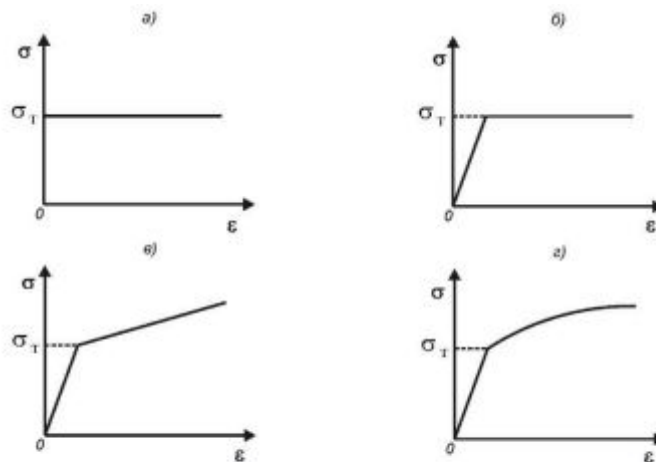


Рис. 8.1. Виды аппроксимации диаграммы деформирования

8.2 Учет пластических деформаций при растяжении-сжатии

При растяжении-сжатии распределение деформаций и напряжений по сечению стержня равномерное, то есть $\sigma = Const$ и $\varepsilon = Const$.

При растяжении-сжатии, как упругом, так и упругопластическом, нормальные напряжения во всех точках сечения одинаковы. Справедлива формула для

$$\text{напряжения } \sigma = \frac{N}{A}.$$

В статически определимых задачах из условий равновесия определяются продольные усилия N , а по ним напряжения σ . Определить удлинения стержней по старой формуле $\Delta L = \frac{NL}{EA}$, основанной на законе Гука, уже нельзя. Надо по диаграмме

деформирования, зная напряжения, найти деформацию $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ и по ней определить удлинение ΔL .

В статически неопределимых задачах под действием пластических деформаций происходит перераспределение напряжений, что ведет к изменению условий равновесия системы. Пример расчета напряжений с учетом пластических деформаций в статически неопределимой шарнирно-стержневой системе приведен в электронной книге в разделе [Для главы 8](#).

8.3 Учет пластических деформаций при изгибе

При изгибе статически определимых балок изгибающий момент определяется методом сечений, как указано в главе 2, независимо от величины деформации.

Характер распределения напряжений в поперечных сечениях балки оказывается различным при упругих и упругопластических деформациях.

ВАЖНАЯ ГИПОТЕЗА

В теории пластичности принято, что гипотеза плоских сечений справедлива как при упругих, так и упругопластических деформациях балки.

Это положение является основным при расчетах балок в упругопластической области, без принятия гипотезы о распределении деформаций расчет оказывается невозможным.

На основании этой гипотезы можно считать, что при изгибе по высоте сечения деформации распределены по линейному закону, как при упругой, так и при упругопластической деформации (рис. 8.2).

Для определения напряжений при упругопластической деформации надо по диаграмме деформирования для заданного значения деформации ε определить,

соответствующее ей значение напряжения σ . Величина этого напряжения будет зависеть от выбранного вида аппроксимации диаграммы деформирования (рис. 8.2).

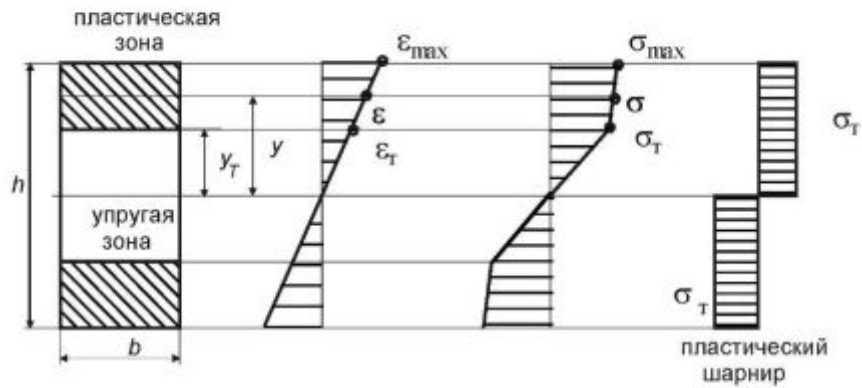


Рис. 8.2 Распределение деформаций и напряжений при упругопластическом изгибе балки

Будем постепенно увеличивать нагрузку на балку и соответственно изгибающий момент.

При чисто упругой деформации напряжения в сечении распределены по линейному закону, пока на поверхности балки они не достигнут предела текучести $\sigma_{\max} = \sigma_T$.

Найдем предельный изгибающий момент при упругой деформации

$$M_{\text{упр}} = \sigma_T W = \sigma_T \frac{bh^2}{6}.$$

При дальнейшем увеличении нагрузки у поверхности балки появляется пластическая зона, которая увеличивается с ростом нагрузки. В центре балки сохраняется упругая зона (рис. 8.2).

При дальнейшем увеличении нагрузки зона упругопластической деформации растет, постепенно захватывая почти все сечение.

Рассмотрим идеальный случай, когда все сечение пластически деформируется. Напряжения во всех точках сечения равны пределу текучести. Такое предельное состояние называется *пластический шарнир*. При постоянной нагрузке части балки слева и справа от сечения взаимно разворачиваются (балка представляет собой пластический механизм). Практически при любых максимальных деформациях на нейтральной оси деформация равна нулю и в центре сечения остается, пусть и маленькая, упругая зона.

Найдем предельный изгибающий момент, возникающий в пластическом шарнире.

Из условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий (1.3).

$$M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA.$$

При изгибе напряжения в верхних и нижних волокнах балки имеют различный знак. Однако в функциях аппроксимации диаграммы напряжения не меняют знак автоматически при перемене знака координаты y . Как следствие этого в пластическом шарнире $M = \int_A \sigma_T \cdot y \cdot dA = 0$.

Для возвращения к здравому смыслу возьмем сумму интегралов для сжатой и растянутой частей сечения

$$M_{\text{пласт}} = \int_{A_{\text{раст}}} \sigma_T \cdot y \cdot dA + \int_{A_{\text{сжат}}} \sigma_T \cdot y \cdot dA.$$

С учетом $dA = b \cdot dy$ выражение для предельно возможного изгибающего момента в прямоугольном поперечном сечении примет вид

$$M_{\text{пласт}} = 2 \int_0^{h/2} \sigma_T \cdot y \cdot b \cdot dy = \sigma_T \frac{bh^2}{4}.$$

В условиях пластической деформации балка может выдержать в полтора раза большую нагрузку, чем при упругой деформации

$$\frac{M_{\text{пласт}}}{M_{\text{упр}}} = 1,5.$$

Найдем изгибающий момент при упругопластическом изгибе

$$M_{\text{упр-пласт}} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA. \quad (8.1)$$

Напряжения σ по высоте сечения переменные.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \text{ если деформация упругая } \varepsilon < \varepsilon_T,$$

$$\sigma = \Phi(\varepsilon), \text{ если деформация упругопластическая } \varepsilon \geq \varepsilon_T. \quad (8.2)$$

Здесь $\Phi(\varepsilon)$ — уравнение диаграммы деформирования, зависящее от принятой аппроксимации диаграммы.

Mathcad позволяет записать зависимость σ от координаты выбранной точки y в виде одной функции с помощью условного оператора (см. примеры в электронной книге [Для главы 8](#)). Для этого надо знать координату границы упругой и упругопластической зон y_T .

На эпюре деформаций ε (рис. 8.2) рассмотрим три подобных треугольника. Запишем отношение их катетов

$$\frac{\varepsilon_{\text{max}}}{h/2} = \frac{\varepsilon_T}{y_T} = \frac{\varepsilon}{y}.$$

Из этого выражения находим величины ε и y_T в зависимости от ε_{max} .

$$y_T = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{\text{max}}} \frac{h}{2} \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{\text{max}}}{h/2} y \quad (8.3)$$

Здесь $\varepsilon_T = \sigma_T/E$ — деформация, соответствующая пределу текучести.

Решить упругопластическую задачу легче, задаваясь деформацией, а не нагрузкой.

Порядок расчета

Задаемся ε_{max} . По выражениям (8.3), затем (8.2) и (8.1) определяем изгибающий момент $M_{\text{упр-пласт}}$. Строим график M от ε и уже по графику для заданного момента определяем, соответствующую ему деформацию ε_{max} . Для найденного значения ε_{max} находим зависимость σ от y .

8.3.1. Остаточные напряжения при упругопластической деформации при изгибе

В пластически деформированной балке при разгрузке возникают остаточные напряжения. Определим величину остаточных напряжений.

При определении остаточных напряжений следует учесть, что *при нагрузке распределение напряжений упругопластическое, при разгрузке — чисто упругое.*

Пусть балку нагрузили моментом $M_{\text{нагр}}$. После разгрузки $M = 0$. Состояние разгрузки можно представить как сумму моментов нагрузки и разгрузки, равную нулю $M_{\text{нагр}} + M_{\text{разгр}} = 0$. Откуда

$$-M_{\text{нагр}} = -\int_A \sigma_{\text{пласт}} \cdot y \cdot dA = M_{\text{разгр}} = \sigma_{\text{max,разгр}} W \quad (8.4),$$

где W — момент сопротивления сечения. Для прямоугольного сечения $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$.

Из выражения (8.4) находим максимальное упругое напряжение при разгрузке $\sigma_{\text{max,разгр}}$. По высоте сечения упругие напряжения распределены по линейному

закону. Тогда из подобия треугольников $\sigma_{\text{разгр}} = \frac{\sigma_{\text{max.разгр}}}{h/2} y$.

Остаточные напряжения определяются как сумма напряжений нагрузки и разгрузки (рис. 8.3).

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma_{\text{нагр}} + \sigma_{\text{разгр}}.$$

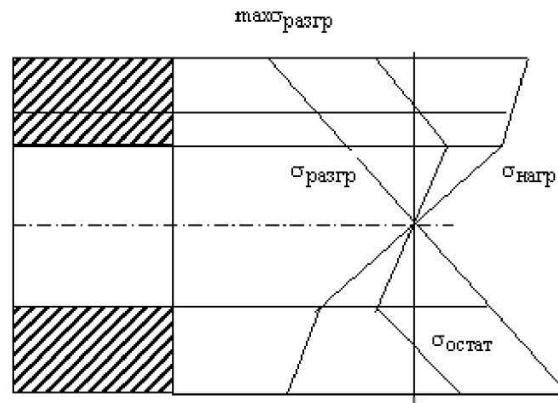


Рис. 8.3 Определение остаточных напряжений при упругопластическом изгибе балки

Пример расчета напряжений при изгибе балки с учетом пластических деформаций приведен в электронной книге в разделе Для главы 8.

8.4 Учет пластических деформаций при кручении

При кручении крутящий момент определяется методом сечений, как указано в главе 2, независимо от величины деформации, а вот характер распределения напряжений в поперечных сечениях стержня оказывается различным при упругих и упругопластических деформациях.

Как и при изгибе для облегчения расчетов примем дополнительную гипотезу, аналогичную гипотезе плоских сечений.

ГИПОТЕЗА

При кручении, прямолинейные радиусы остаются прямыми как при упругих, так и упругопластических деформациях балки.

На основании этой гипотезы можно считать, что при кручении деформации в круглом поперечном сечении распределены по линейному закону, как при упругой, так и при упругопластической деформации (рис. 8.4).

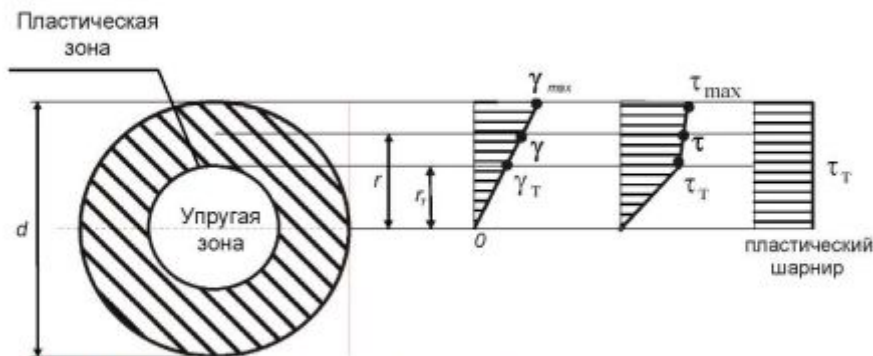


Рис. 8.4. Распределение деформаций и напряжений при упругопластическом кручении стержня

Для определения напряжений при упругопластической деформации надо построить

диаграмму деформирования в координатах $\gamma - \tau$ и по этой диаграмме для заданного значения деформации γ определить, соответствующее ей значение напряжения τ . Величина напряжения τ будет зависеть от выбранного вида аппроксимации диаграммы деформирования.

Будем постепенно увеличивать нагрузку на стержень и соответственно крутящий момент.

Деформации и напряжения в сечении распределены по линейному закону до тех пор, пока на поверхности стержня напряжения не достигнут предела текучести $\tau_{\max} = \tau_T$.

Найдем предельный крутящий момент при упругой деформации

$$M_{\text{к,упр}} = \tau_T W_p = \tau_T \frac{\pi d^3}{16}.$$

При дальнейшем увеличении нагрузки у поверхности стержня появляется пластическая зона, которая увеличивается с ростом нагрузки. В центре стержня сохраняется упругая зона (рис. 8.4).

При дальнейшем увеличении нагрузки зона упругопластической деформации растет, постепенно захватывая почти все сечение.

Рассмотрим идеальный случай, когда все сечение пластически деформируется. Напряжения во всех точках сечения равны пределу текучести. Как и при изгибе, такое предельное состояние называется *пластический шарнир*.

Пластическим шарниром считается состояние, при котором крутящий момент практически не растет и деформация происходит при постоянной нагрузке.

При постоянной нагрузке части стержня слева и справа от сечения взаимно разворачиваются (стержень превратился в пластический механизм).

Понятие пластический шарнир имеет смысл только при использовании диаграммы Прандтля.

Справедливости ради надо отметить, что и при использовании диаграммы Прандтля крутящий момент, хоть и очень медленно, но растет за счет уменьшения упругого ядра в центре сечения стержня.

Найдем предельный крутящий момент, возникающий в пластическом шарнире.

Из условия эквивалентности напряжений и внутренних усилий (1.3).

$$M_k = \int_A \tau \cdot r \cdot dA.$$

С учетом $dA = 2\pi r \cdot dr$ выражение для крутящего момента в круглом поперечном сечении примет вид

$$M_{\text{к,пласт}} = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \tau_T \cdot r^2 dr = \tau_T \frac{\pi d^3}{12}.$$

В условиях пластической деформации стержень может выдержать значительно большую нагрузку, чем при упругой деформации

$$\frac{M_{\text{к,пласт}}}{M_{\text{к,упр}}} = 1,33.$$

Найдем крутящий момент при упругопластическом кручении

$$M_{\text{к,пласт}} = \int_A \tau \cdot r \cdot dA. \quad (8.5)$$

Напряжения τ по высоте сечения переменные.

$$\tau = G \cdot \gamma, \text{ если деформация упругая } \gamma < \gamma_T,$$

$$\tau = \Phi(\gamma), \text{ если деформация упругопластическая } \gamma \geq \gamma_T. \quad (8.6)$$

Здесь $\Phi(\gamma)$ — уравнение диаграммы деформирования при кручении, зависящее от принятой аппроксимации диаграммы.

Mathcad позволяет записать зависимость τ от координаты выбранной точки r в виде одной функции с помощью панели программирования. Для этого надо знать координату границы упругой и упругопластической зон r_T .

На эпюре деформаций γ (рис. 8.4) рассмотрим три подобных треугольника. Запишем отношение их катетов

$$\frac{\gamma_{\max}}{d/2} = \frac{\gamma_T}{r_T} = \frac{\gamma}{r}.$$

Из этого выражения находим величины γ и r_T в зависимости от γ_{\max}

$$r_T = \frac{\gamma_T}{\gamma_{\max}} \frac{d}{2} \quad \gamma = \frac{\gamma_{\max}}{d/2} r \quad (8.7).$$

Здесь $\gamma_T = \tau_T/G$ — деформация, соответствующая пределу текучести.

Выберем переменную для расчета. Как и при изгибе, можно задаваться величиной деформации γ_{\max} и по ней находить распределение напряжений по сечению стержня и соответствующий ей крутящий момент, но при кручении удобнее задаваться углом поворота сечения ϕ .

Запишем связь между углами ϕ и γ . Как видно из рисунка 8.5

$$AA_1 = \gamma_{\max} \cdot L = \frac{d}{2} \cdot \phi \quad \text{откуда} \quad \phi = \frac{2\gamma_{\max}L}{d}. \quad (8.8).$$

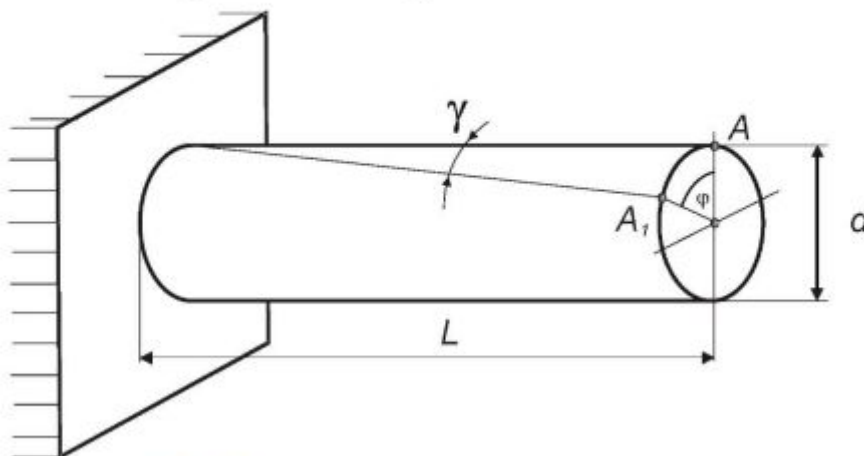


Рис. 8.5. Связь между углом закручивания ϕ и углом сдвига γ

Порядок расчета: Задаемся ϕ . По выражениям (8.8), затем (8.7), (8.6) и (8.5) определяем изгибающий момент $M_{к,упр-пласт}$.

Строим график зависимости M_k от ϕ и уже по графику для заданного момента определяем, соответствующий ему угол закручивания ϕ .

Для найденного значения ϕ находим зависимость τ от r .

Пример расчета напряжений при кручении стержня с учетом пластических деформаций приведен в электронной книге в разделе [Для главы 8](#).

8.5 Расчеты по предельной нагрузке

Рассмотрим приближенные методы оценки допустимой нагрузки на рассматриваемую конструкцию.

Во всех предыдущих разделах в качестве условия выхода конструкции из строя принималось $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{пред}}$. Где в качестве $\sigma_{\text{пред}}$ принимался предел прочности для материалов в хрупком состоянии или предел текучести для материалов в пластичном состоянии.

Другими словами, конструкция из пластичного материала выходит из строя, если в самой нагруженной точке напряжение достигает предела текучести. А условие прочности имеет вид $\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \sigma_T / n$, где n — коэффициент запаса.

Такой расчет носит название *расчет по допускаемым напряжениям*.

Однако, как видно из предыдущих параграфов этой главы, появление пластических деформаций в конструкции еще не означает выход конструкции из строя. Конструкция из пластичных материалов вполне может воспринимать нагрузку, гораздо большую, чем найденная расчетом по допускаемым напряжениям.

Был предложен другой метод расчета, названный *расчетом по несущей способности или расчетом по допускаемым нагрузкам*.

За выход из строя в этом методе принимается перемещение конструкции или части ее при постоянной нагрузке, то есть превращение системы в пластический механизм при появлении в ней пластических шарниров.

При этом условии выхода из строя $P = P_{\text{пред}}$.

Условие прочности $P \leq [P] = P_{\text{пред}} / n$, где $P_{\text{пред}}$ — нагрузка, при которой система превращается в пластический механизм.

В расчетах по допускаемым нагрузкам используется схематизированная диаграмма деформирования идеального жесткопластического тела (рис. 8.1, а), представляющая собой одну горизонтальную линию $\sigma = \sigma_T$ (без учета упругих деформаций).

При $\sigma < \sigma_T$ деформация $\varepsilon = 0$, то есть материал считается абсолютно жестким (недеформируемым). При $\sigma = \sigma_T$ деформация $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Возможны два состояния конструкции при использовании такой диаграммы:

- пластический шарнир уже есть, но система еще не механизм — это *статически возможное состояние*.

В статически возможном состоянии выполняются уравнения равновесия.

- система уже превратилась в пластический механизм — это *кинематически возможное состояние*.

В кинематически возможном состоянии выполняются уравнения неразрывности деформаций, так как разрушения конструкции не происходит.

В теории пластичности доказываются статическая и кинематическая теоремы [5], [15]. Приведем их формулировки без доказательств.

Статическая теорема.

Нагрузка, соответствующая статически возможному состоянию всегда меньше предельной нагрузки. Эта теорема — основа статического метода расчета (метода нижней оценки).

Кинематическая теорема.

Нагрузка, соответствующая кинематически возможному состоянию всегда больше предельной нагрузки. Эта теорема — основа кинематического метода (метода верхней оценки).

Для определения предельной нагрузки рассматриваются различные возможные состояния и определяется нагрузка для каждого из них

Наибольшая из всех статически возможных нагрузок ближе всего к предельной (метод нижней оценки).

В методе нижней оценки величина предельной нагрузки определяется из условий равновесия системы.

Наименьшая из всех кинематически возможных нагрузок ближе всего к предельной (метод верхней оценки).

В методе верхней оценки величина предельной нагрузки определяется из условия равенства работ внешних и внутренних сил при перемещении системы.

Рассмотрим примеры определения предельной нагрузки.

Пример 1

Рассмотрим балку, защемленную двумя концами, нагруженную силой F (рис. 8.6, а). В упругой постановке такая балка 2 раза статически неопределима. Решение такой задачи методом сил будет рассмотрено в главе 11.

На рис. 8.6, б приведена эпюра изгибающих моментов в сечениях балки, найденная методом сил при упругой деформации (при $c = 2a$). Однако предельную нагрузку на балку можно оценить методами верхней и нижней оценки (наличия упругого решения не требуется).

Метод нижней оценки (статический метод)

При постепенном увеличении нагрузки пластические шарниры образуются сначала в сечении D, затем в сечении B, затем в сечении A. Это три статически возможных состояния (с одним, двумя и тремя шарнирами). Предельным является состояние, когда в балке образуются 3 пластических шарнира. После этого система превращается в пластический механизм.

Рассматриваем предельное состояние, когда шарниры уже есть, но система еще не превратилась в пластический механизм. Схема нагружения балки в предельном состоянии (с тремя шарнирами) показана на рис. 8.6, в, эпюра изгибающих моментов в предельном состоянии — на рис. 8.6, г.

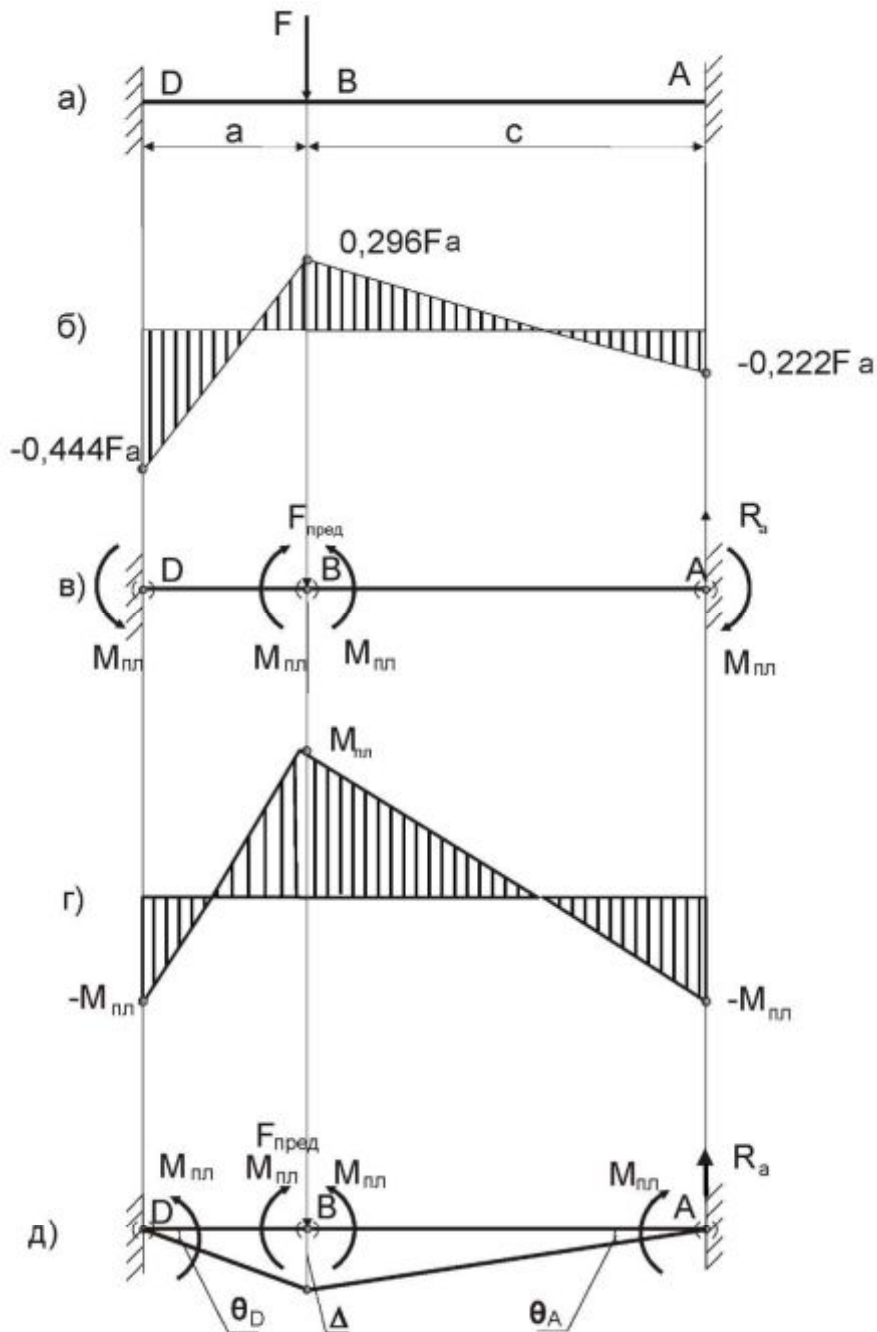


Рис. 8.6. Образование пластических шарниров в балке

В пластическом шарнире в каждой точке сечения $\sigma = \sigma_T$. Тогда изгибающий момент в пластическом шарнире

$$M_{\text{пл}} = \int_A \sigma_T y \cdot dA = 0, \text{ так как в этом выражении не учтен знак напряжения (плюс в}$$

растянутых волокнах и минус в сжатых). Запишем изгибающий момент как сумму моментов от напряжений в растянутых и сжатых волокнах.

$$M_{\text{пл}} = \int_{A_{\text{рст}}} \sigma_T y \cdot dA + \int_{A_{\text{сжат}}} \sigma_T y \cdot dA.$$

Для балки прямоугольного сечения это выражение примет вид

$$M_{\text{пл}} = 2 \int_{A/2} \sigma_T y \cdot dA = \sigma_T \frac{bh^2}{4} = \text{Const}.$$

Запишем условия равновесия балки в шарнирах A , B и D .

$$(1) \quad M_A = -M_{\text{пл}},$$

$$(2) \quad M_B = -M_{\text{пл}} + R_A \cdot c = M_{\text{пл}},$$

$$(3) \quad M_D = -M_{\text{пл}} + R_A(a+c) - F_{\text{пред}}a = -M_{\text{пл}}.$$

Из выражения (3)
$$R_A = F_{\text{пред}} \frac{a}{a+c}.$$

Из выражения (2)
$$2M_{\text{пл}} = R_A \cdot c = F_{\text{пред}} \frac{a \cdot c}{a+c},$$

$$F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пл}} \frac{a+c}{a \cdot c}.$$

При $c = 2a$
$$F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пл}} \frac{a+2a}{a \cdot 2a} = 3 \frac{M_{\text{пл}}}{a} = \frac{3}{4} \sigma_T \frac{bh^2}{a} \quad (8.10).$$

Метод верхней оценки (кинематический метод)

Есть три пластических шарнира. Система уже пластический механизм. Происходит перемещение при постоянной нагрузке (предельной). Шарнир B перемещается при постоянной нагрузке, его перемещение Δ в некоторый момент времени (рис. 8.6, д) Работа внешних сил (силы F)

$$A^{\text{внеш}} = F \cdot \Delta.$$

Участки AB и BD прямолинейные, так как используется диаграмма жесткопластического тела и при $\sigma < \sigma_T$ деформаций нет. Участок AB поворачивается на угол θ_A , участок BD поворачивается на угол θ_D .

Работа внутренних сил складывается из работ моментов в пластических шарнирах A , B , D . В среднем шарнире B взаимный угол поворота двух частей балки равен сумме углов θ_A и θ_D .

$$A^{\text{внутр}} = M_{\text{пл}}\theta_A + M_{\text{пл}}\theta_D + M_{\text{пл}}(\theta_A + \theta_D).$$

Найдем связь между углами θ_A и θ_D

$$\text{tg}(\theta_A) = \frac{\Delta}{c} \quad \text{tg}(\theta_D) = \frac{\Delta}{a}. \quad \text{Углы малы, так как рассматривается начальный момент образования пластического механизма, и } \theta \approx \text{tg}(\theta).$$

тогда $\Delta = c \cdot \theta_A = a \cdot \theta_D$, откуда $\theta_D = \theta_A \frac{c}{a}$.

Приравняв работу внешних и внутренних сил, находим предельную силу

$$F_{\text{пред}} c \cdot \theta_A = M_{\text{пл}} \left(2\theta_A + 2 \left(\theta_A \frac{c}{a} \right) \right).$$

Откуда
$$F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пл}} \left(\frac{a+c}{a \cdot c} \right).$$

При $c = 2a$
$$F_{\text{пред}} = \frac{3M_{\text{пл}}}{a} = \frac{3}{4} \sigma_T \frac{bh^2}{a}.$$

Значения предельной нагрузки $F_{\text{пред}}$, найденные кинематическим и статическим методами (верхней и нижней оценки) совпали, следовательно решение верное и полное.

Если решения не совпадают, следовательно рассмотрены не все возможные состояния системы и правильное решение находится как раз среди нерассмотренных состояний.

Следует отметить, что определение предельной нагрузки кинематическим методом

(верхней оценки), как правило, значительно проще, чем статическим методом (нижней оценки).

Рассмотрим еще один пример, где для определения предельной нагрузки надо рассмотреть несколько возможных состояний.

Пример 2

Рассмотрим раму, нагруженную двумя силами (рис. 8.7, а). Определим предельную нагрузку F кинематическим методом (верхней оценки).

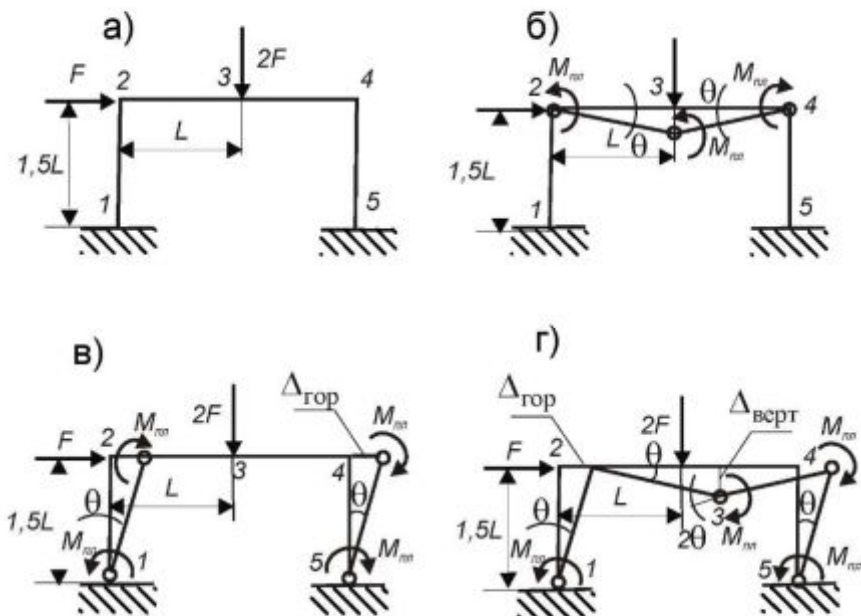


Рис. 8.7. Кинематически возможные состояния рамы

Обозначим места возможного образования пластических шарниров цифрами 1 – 5. Есть несколько вариантов превращения системы в пластический механизм.

Система превращается в механизм при образовании пластических шарниров в сечениях 2, 3, 4 (рис. 8.7, б). При этом верхняя часть рамы начинает перемещаться без увеличения нагрузки (балочный механизм).

Система превращается в механизм при образовании пластических шарниров в сечениях 1, 2, 4, 5 (рис. 8.7, в). Рама складывается как параллелограмм (механизм бокового смещения).

Система превращается в механизм при образовании пластических шарниров в сечениях 1, 3, 4, 5 (рис. 8.7, г). Это комбинированный механизм из двух предыдущих.

Определим предельную нагрузку в каждом из трех указанных возможных состояний системы.

Балочный механизм

$$A_{\text{внеш}} = 2F_{\text{пред}} \Delta_{\text{верт}} = 2F_{\text{пред}} \theta \cdot l = A_{\text{внутр}} = 4M_{\text{пл}} \theta.$$

$$F_{\text{пред}} = 2M_{\text{пл}} / l.$$

Вертикальная сила $2F$ совершает работу на вертикальном перемещении $\Delta_{\text{верт}}$. Горизонтальная сила F работу не совершает.

В пластических шарнирах 2 и 4 момент $M_{\text{пл}}$ совершает работу на угле поворота сечения θ . В шарнире 3 на взаимном угле поворота двух частей рамы 2θ .

Механизм бокового смещения

$$A_{\text{внеш}} = F_{\text{пред}} \Delta_{\text{гор}} = F_{\text{пред}} \theta \cdot 1,5l = A_{\text{внутр}} = 4M_{\text{пл}} \theta.$$

$$F_{\text{пред}} = 2,67M_{\text{пл}}/l.$$

Горизонтальная сила F совершает работу на горизонтальном перемещении $\Delta_{\text{гор}}$.
Вертикальная сила $2F$ работу не совершает.

В пластических шарнирах 1, 2, 4, 5 момент $M_{\text{пл}}$ совершает работу на угле поворота сечения θ .

Комбинированный механизм

$$A_{\text{внеш}} = 2F \cdot \Delta_{\text{верт}} + F \cdot \Delta_{\text{гор}} = 2F_{\text{пред}} \theta \cdot l + F_{\text{пред}} \theta \cdot 1,5l = A_{\text{внутр}} = 6M_{\text{пл}} \cdot \theta$$

$$F_{\text{пред}} = 1,71M_{\text{пл}}/l.$$

Вертикальная сила $2F$ совершает работу на вертикальном перемещении $\Delta_{\text{верт}}$.
Горизонтальная сила F совершает работу на горизонтальном перемещении $\Delta_{\text{гор}}$.

В пластических шарнирах 1 и 5 момент $M_{\text{пл}}$ совершает работу на угле поворота сечения θ . В шарнирах 3 и 4 на взаимном угле поворота двух частей рамы 2θ .

Для трех кинематически возможных состояний рамы найдено предельное значение силы F . Наименьшее из них $F_{\text{пред}} = 1,71M_{\text{пл}}/l$ ближе всего к действительному предельному значению.

По статическому методу (нижней оценки) решение задачи сводится к составлению уравнений равновесия и решению системы этих уравнений для каждого статически возможного состояния. Такое решение значительно более сложное, чем кинематический метод (верхней оценки), и здесь не рассматривается.

Пример 3

Статически неопределимая балка (рис. 8.8, а) нагружена распределенной нагрузкой. Требуется определить предельную величину интенсивности распределенной нагрузки. Найдём решение кинематическим методом (верхней оценки).

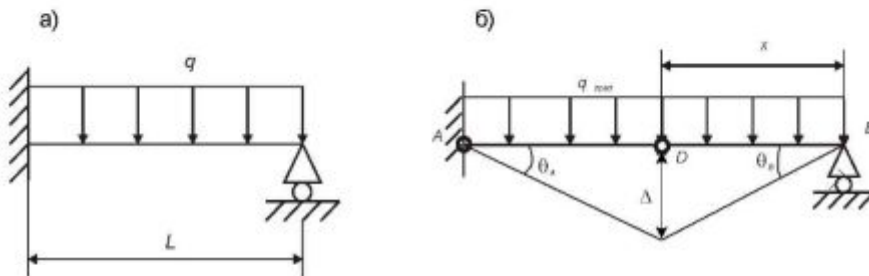


Рис. 8.8. Кинематически возможное состояние балки

Для различных кинематически возможных состояний переменными могут быть не только число пластических шарниров, но и их положение.

В нашей задаче система превращается в пластический механизм при образовании двух пластических шарниров: в точках А, и D (рис. 8.8, б). Положение шарнира D может быть различным. Обозначим его положение координатой x . Найти положение шарнира D, при котором предельная нагрузка на балку будет минимальной.

Подсчитаем работы внешних и внутренних сил.

$A_{\text{внеш}} = q\Omega = q \frac{\Delta \cdot L}{2}$, где Ω — площадь, ограниченная положениями балки до и после деформации.

$$A_{\text{внутр}} = M_{\text{пл}} (\theta_A + \theta_A + \theta_B).$$

Из равенства работ внешних и внутренних сил найдем

$$q = \frac{2M_{\text{пл}}}{\Delta \cdot L} (\theta_A + \theta_A + \theta_B).$$

Величина углов θ_A и θ_B зависит от x

$$\theta_A = \frac{\Delta}{L-x} \quad \theta_B = \frac{\Delta}{x}.$$

С учетом выражений для углов выражение для нагрузки q

$$q(x) = \frac{2M_{\text{пл}}}{L} \left(\frac{2}{L-x} + \frac{1}{x} \right).$$

Для нашего примера $M_{\text{пл}} = \sigma_1 \frac{bh^2}{4}$ — предельный пластический момент в прямоугольном сечении балки.

Далее надо построить график зависимости $q(x)$ по длине балки. Минимальное значение $q(x)$ на графике ближе всего к предельной нагрузке.

Решение этой задачи в Mathcad приведено в электронной книге в разделе [Для главы 8](#).

8.6. Понятие о приспособляемости конструкций

В этой главе говорилось о возможности и условиях возникновения пластических деформаций в конструкциях при статическом однократном нагружении. Однако практически любая конструкция испытывает многократное нагружение.

Так статически нагруженные здания и сооружения испытывают многократное температурное нагружение (зима – лето, ночь – день). Для трубопроводов повторной нагрузкой является периодическое изменение давления, для самолета — взлет – посадка и так далее.

При многократном нагружении пластическая деформация приводит к сравнительно быстрому разрушению конструкции.

Работа конструкций при повторных пластических деформациях недопустима.

В зависимости от условий эксплуатации возможны два варианта поведения конструкции при повторных нагружениях [8].

- Накопление пластических деформаций, ведущее к разрушению конструкции;
- Приспособление конструкции, когда после одного или нескольких циклов повторного нагружения пластические деформации исчезают и конструкция испытывает чисто упругое нагружение.

Важнейшим фактором приспособляемости является наличие остаточных сжимающих напряжений в опасных местах конструкции. Остаточные напряжения сжатия складываются с рабочими растягивающими напряжениями. Их сумма должна оставаться меньше предела текучести материала.

Создание остаточных напряжений сжатия широко используется в промышленности. О технологических приемах создания остаточных напряжений сжатия говорится в главе 17.

В главе 5 при рассмотрении диаграммы деформирования мягкой стали говорилось о явлении наклепа. Нагружение образца выше предела текучести, разгрузка и повторное нагружение приводят к повышению пределов пропорциональности и текучести.

Предварительная пластическая деформация используется, в частности, для увеличения рабочего диапазона нагрузок пружин (заневоливание пружин).

Опрессовка труб и сосудов давлением, вызывающим в них появление пластической деформации, ведет к повышению допустимого рабочего давления.

Но не все так просто. Оптимальное давление опрессовки или нагрузка предварительной пластической деформации требуют тщательного, чаще всего экспериментального, определения оптимальной величины остаточных напряжений, дающей наибольший эффект упрочнения.

Для приспособляемости конструкции необходимо, чтобы рабочая нагрузка была меньше предельной, определяемой как описано в предыдущем разделе.

Есть и другие условия, ограничивающие приспособляемость конструкций, но они выходят за рамки курса сопротивления материалов.

Глава 9. Основы напряженно-деформированного состояния

В предыдущих главах были рассмотрены простые виды деформации: растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, изгиб, где в условии прочности входило одно напряжение: либо нормальное σ_{\max} , либо касательное τ_{\max} , так как второе напряжение было или мало по сравнению с первым, как при изгибе, или отсутствовало в рассматриваемом сечении, как при растяжении, сдвиге и кручении.

Чтобы перейти к рассмотрению общего случая нагружения тела (к сложному сопротивлению), при котором величины σ и τ в точке тела могут быть одного порядка, надо вначале получить общую форму записи условия прочности, в которой бы учитывалось влияние и σ и τ .

В общей постановке уравнения связи между перемещениями, деформациями, напряжениями и внешними нагрузками рассмотрены в главе 20. В этой главе приводятся только основные сведения, необходимые для решения текущих задач.

Рассмотрим напряжения и деформации, которые возникают в некоторой точке тела при произвольном нагружении.

9.1. Деформации

Под действием внешних нагрузок тело деформируется. Как следствие деформаций появляются напряжения в теле. Нет деформаций, нет и напряжений.

Напомним разницу между перемещением и деформацией.

Перемещение — изменение положения точки в пространстве.

Деформация — изменение формы и размеров тела.

Полная деформация тела складывается из линейной и угловой деформаций (рис. 9.1). Поскольку деформация тела, как правило, неоднородная, дальше будем говорить о деформации бесконечно малого элемента тела, выделенного в окрестности рассматриваемой точки тела



Рис. 9.1 Деформации

Линейная деформация — относительное изменение размеров элемента тела.

Угловая деформация — изменение первоначально прямого угла выделенного элемента тела.

Если элемент тела параллелепипед, ориентированный по осям x, y, z , то соответственно возникает три линейных деформации (вдоль осей x, y, z): $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, и три угловые деформации $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ в трех взаимно-перпендикулярных плоскостях.

Под действием указанных деформаций на гранях выделенного элемента возникают напряжения.

9.2. Напряжения

В теле произвольной формы, нагруженном произвольными силами выделим элементарный объем dV . По граням этого элемента действуют векторы полных напряжений $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ (рис. 9.2, а). Величина и направление полных напряжений неизвестны. Для определения этих векторов представим каждый из них в виде проекций на оси координат x, y, z (рис. 9.2, б).

Пусть объем выделенного элемента стремится к нулю, тогда можно считать, что напряжения на противоположных гранях элемента одинаковы и определяют напряженное состояние в точке тела, около которой выделен этот объем.

Запишем напряжения, действующие по граням элемента, в упорядоченном виде, в виде матрицы размерностью 3×3 . Каждый столбец этой матрицы представляет собой совокупность напряжений, действующих на одной из граней элемента. такая матрица называется *тензор напряжений*.

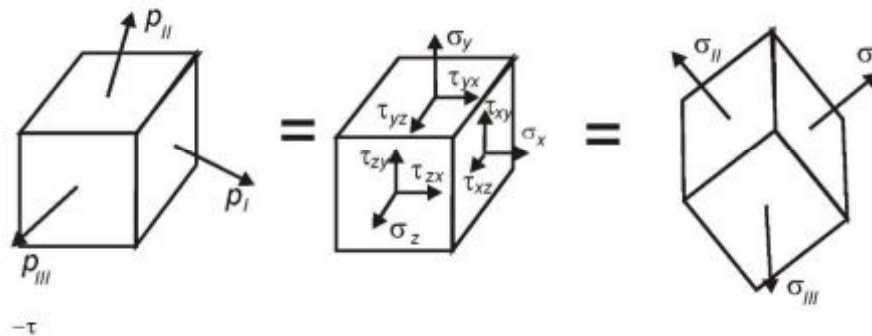


Рис. 9.2 Напряжения в точке тела

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Следует отметить, что тензор не просто матрица. Компоненты тензора подчиняются строгим правилам преобразования, излагаемым в тензорной алгебре. Механика деформируемого твердого тела, теория упругости, численная механика строятся на таких ключевых понятиях, как тензор напряжений и тензор деформаций. Без них невозможно создание численных методов расчета, таких, как метод конечных элементов и метод граничных элементов. Подробно о тензорах напряжений и деформаций говорится в главе 20.

При повороте осей координат, компоненты напряжений изменяются. Вращая выделенный элемент вокруг осей координат, можно найти такое положение элемента, при котором все касательные напряжения на гранях элемента равны нулю.

Площадка, на которой касательные напряжения равны нулю, называется *главной площадкой*.

Нормальное напряжение на главной площадке называется *главным напряжением*.

Нормаль к главной площадке называется *главной осью напряжений*.

В каждой точке можно провести три взаимно-перпендикулярные главных площадки.

При повороте осей координат изменяются компоненты напряжений, но не меняется напряженно-деформированное состояние тела (НДС).

Для расчетов на прочность можно использовать как тензор напряжений, содержащий 9 компонент, так и вектор из трех главных напряжений. Естественно работать с тремя неизвестными напряжениями значительно проще, чем с девятью, поэтому при решении сложных задач стараются использовать главные напряжения.

Для определения величины и направления главных напряжений используется метод Якоби. Рассмотрим основную идею этого метода.

Вращаем элемент последовательно вокруг трех осей координат, добиваясь того, чтобы касательные напряжения обратились в нуль. Строго говоря в алгоритме метода

нет последовательного вращения, а есть формула для определения угла, на который надо развернуть ось, чтобы касательные напряжения на двух площадках обратились в нуль.

В Mathcad метод Якоби реализуется в программе **eigenvals**, возвращающей величины трех главных напряжений, называемых собственными числами, и в программе **eigenvecs**, возвращающей косинусы углов между нормалью к главной площадке и исходными осями координат, называемые собственным вектор.

Найденные главные напряжения расставляются "по росту" (с учетом знаков) и обозначаются $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$.

Пример определения величины и направления главных напряжений в Mathcad приведен на рис.20.11.

9.3. Виды напряженного состояния

В зависимости от количества неравных нулю главных напряжений различают объемное, плоское и линейное напряженные состояния (рис. 9.3).

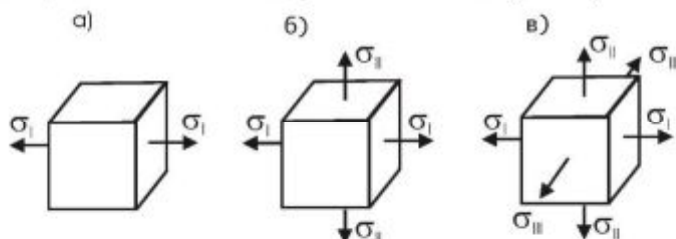


Рис. 9.3. Виды напряженного состояния

- *Линейное напряженное состояние* — одно главное напряжение не равно нулю (рис 9.3, а).

Примером линейного напряженного состояния являются растяжение-сжатие и чистый изгиб. При растяжении $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. При сжатии $\sigma_3 \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

- *Плоское напряженное состояние* — два главных напряжения не равны нулю (рис. 9.3, б).

Примером плоского напряженного состояния являются сдвиг, изгиб и кручение длинных и тонких стержней, тонкостенные пластины и оболочки.

- *Объемное напряженное состояние* — все три главных напряжения не равны нулю (рис. 9.3, в).

Примером объемного напряженного состояния является нагружение массивных тел.

Решение объемной задачи на порядок сложнее решения плоской задачи. Однако часто и для массивных тел можно использовать решения, найденные для плоского напряженного состояния.

Разрушение массивных тел чаще всего начинается с поверхности, а на поверхности одно из главных напряжений равно нулю. Следовательно вблизи поверхности можно использовать зависимости, полученные при плоском напряженном состоянии.

Кроме того, на практике часто встречаются частные случаи объемного напряженного состояния: плоское деформированное состояние и осесимметричное нагружение. для этих случаев используют уравнения плоского напряженного состояния с небольшой поправкой. Большинство расчетных программ, составленных для плоского напряженного состояния, как правило решают и задачи плоской деформации, и осесимметричного нагружения.

9.4. Плоское напряженное состояние

К плоскому напряженному состоянию относятся большинство рассматриваемых в сопротивлении материалов случаев нагружения стержней, поэтому плоскому напряженному состоянию уделим особое внимание.

Найдем связь между напряжениями на гранях выделенного элемента и

напряжениями на наклонной площадке. Рассмотрим прямую и обратную задачи.

9.4.1. Прямая задача

Предположим, что в какой-то точке тела известны главные напряжения $\sigma_I \neq 0$, $\sigma_{II} \neq 0$, $\sigma_{III} = 0$.

Требуется найти напряжения σ_α и τ_α на площадке, наклоненной под углом α к главной площадке (рис. 9.4, а).

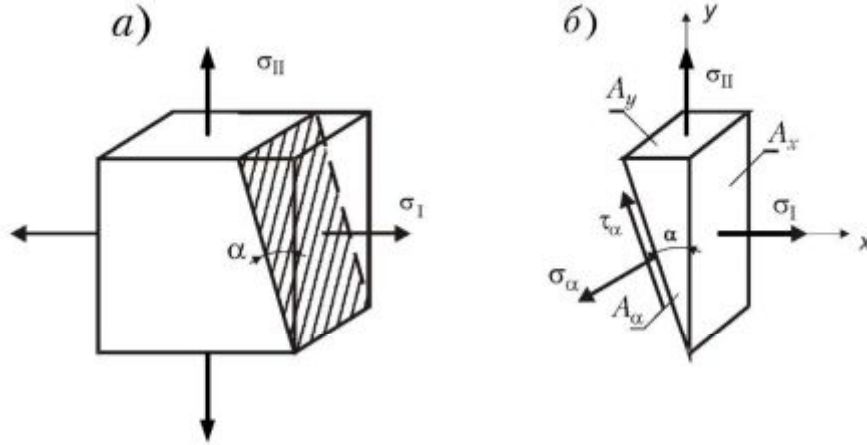


Рис. 9.4. Напряжения на наклонной площадке

Условимся, что знак касательного напряжения τ совпадает со знаком поперечной силы. Это не совпадает с правилом знаков для τ , принятым в теории упругости, но необходимо для построения круговой диаграммы Мора, о которой далее пойдет речь.

Рассмотрим равновесие части выделенного элемента, отрезанного сечением под углом α (рис. 9.4, б). Спроектируем силы, действующие на отрезанную часть элемента, на нормаль к наклонной площадке ν и на касательную к наклонной площадке $\nu + 90^\circ$.

Площади граней рассматриваемой части элемента обозначим A_α, A_x, A_y .

$$\sum F_\nu = \sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_I A_x \cos(\alpha) - \sigma_{II} A_y \sin(\alpha) = 0,$$

$$\sum F_{\nu+90^\circ} = \tau_\alpha A_\alpha - \sigma_I A_x \sin(\alpha) + \sigma_{II} A_y \cos(\alpha) = 0.$$

С учетом $\cos(\alpha) = \frac{A_x}{A_\alpha}$ и $\sin(\alpha) = \frac{A_y}{A_\alpha}$, разделив оба выражения на A_α , получаем

$$\sigma_\alpha = \sigma_I \cos^2(\alpha) + \sigma_{II} \sin^2(\alpha)$$

$$\tau_\alpha = (\sigma_I - \sigma_{II}) \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\text{С учетом } \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha), \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\text{и } \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad \text{получаем}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos(2\alpha) \tag{9.2}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin(2\alpha)$$

Уравнения (9.2) представляют собой параметрическое уравнение окружности типа

$$x = x_0 + R \cos(\alpha)$$

$$y = y_0 + R \sin(\alpha)$$

В выражении (9.2)

$\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$ — радиус окружности, $\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}$ — смещение центра окружности.

Построим такую окружность в координатах $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$ (рис. 9.5). Она называется *круговая диаграмма Мора*

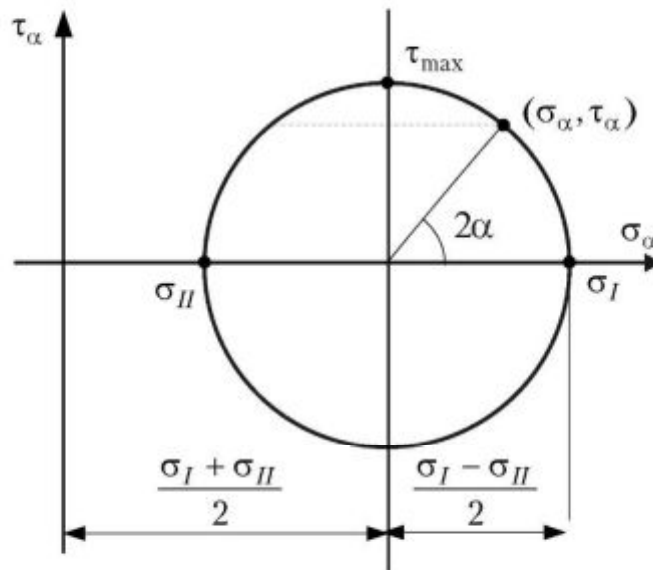


Рис. 9.5. Круговая диаграмма Мора

Чтобы с помощью круга Мора определить напряжения на площадке, наклоненной на угол α , надо из центра круга провести луч под углом 2α и определить координаты $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ точки пересечения луча с окружностью.

ПРИМЕЧАНИЕ

Точки, соответствующие напряжениям на двух взаимно-перпендикулярных площадках, лежат на одном диаметре.

В качестве примера построим круги Мора для растяжения и сжатия (рис.9.6).

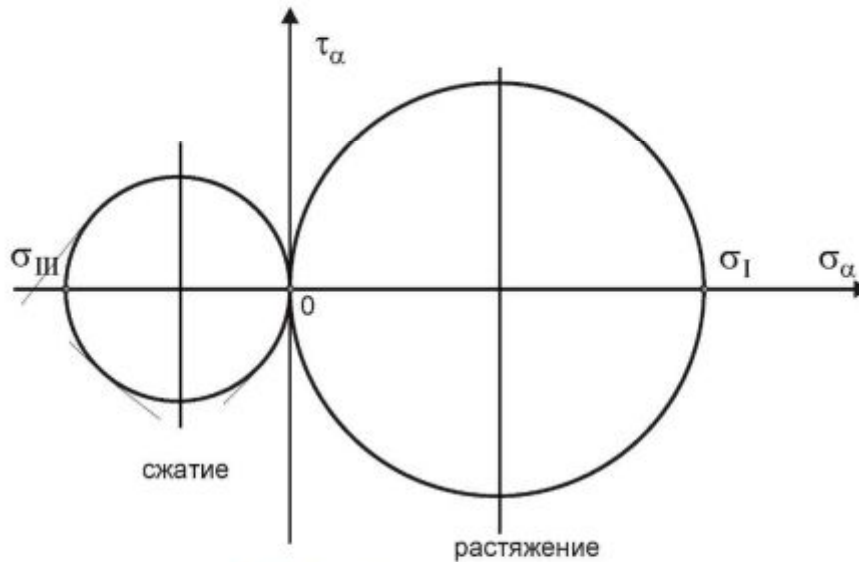


Рис. 9.6. Круги Мора для растяжения и сжатия

При растяжении $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$. На оси σ_α отложить напряжение σ_I . Радиус круга $\sigma_I/2$. Смещение центра круга $\sigma_I/2$. Строим круг Мора.

При сжатии $\sigma_{III} \neq 0, \sigma_I = \sigma_{II} = 0$. На оси σ_α отложить напряжение σ_{III} . Радиус

круга $\sigma_{III}/2$. Смещение центра круга $\sigma_{III}/2$. Строим круг Мора.

Круг Мора предназначен для определения напряжений при плоском напряженном состоянии, так как в построении используют напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках.

Для объемного напряженного состояния круг Мора можно применить для нахождения напряжений на площадках, параллельных одной из главных осей. В этом случае в построении круга будут участвовать напряжения только на двух площадках, как и при плоском напряженном состоянии.

На рисунке 9.7, а изображен элемент, ориентированный по главным площадкам, при объемном напряженном состоянии. Возьмем три площадки, каждая из которых параллельна одной из главных осей, и построим для них круги Мора (рис.9.7, б).

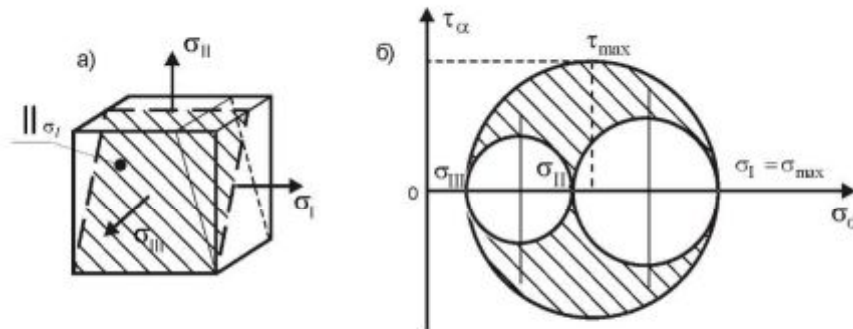


Рис. 9.7. Круговая диаграмма Мора при объемном напряженном состоянии.

Если площадка параллельна напряжению σ_I , то в построении круга участвуют напряжения σ_{II} и σ_{III} . Отложить на оси σ_α величины этих напряжений. Их разность — диаметр круга. Посередине — центр круга

Аналогично строятся круги Мора для площадок, параллельных осям σ_{II} и σ_{III} . Точки, соответствующие напряженному состоянию произвольных площадок лежат в заштрихованной области между тремя кругами.

Анализируя круговую диаграмму Мора для объемного напряженного состояния сделаем важный для последующего изложения вывод о максимальных напряжениях в точке тела.

$$\sigma_{\max} = \sigma_I \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (9.1).$$

Максимальные касательные напряжения всегда направлены под углом 45° к максимальным нормальным напряжениям.

9.4.2. Обратная задача

При плоском напряженном состоянии известны напряжения на гранях произвольно выделенного элемента σ_x, σ_y, τ (рис. 9.8, а). Требуется определить величину и направление главных напряжений $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$.

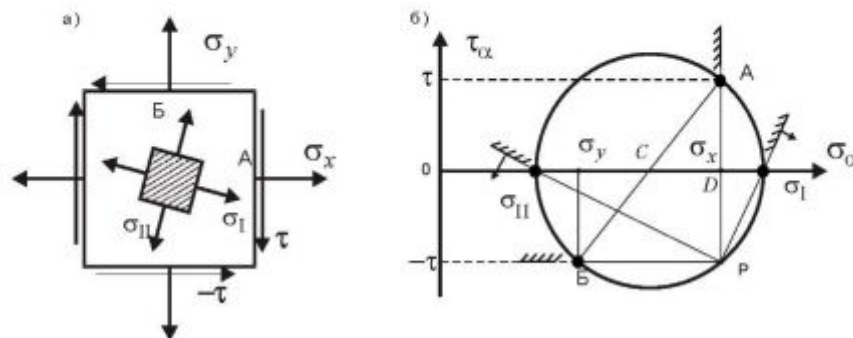


Рис. 9.8. Обратная задача построения круга Мора

Построим круг Мора (рис. 9.8, б).

На площадке А действуют напряжения σ_x и τ .

На площадке Б действуют напряжения σ_y и $-\tau$.

В системе координат $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$ отложим две точки, соответствующие напряженному состоянию на двух взаимно перпендикулярных площадках А и Б.

Эти две точки лежат на одном диаметре. Проведя прямую АБ, находим центр круга С на оси σ_α . Зная центр и радиус круга, проводим окружность. Точки пересечения круга с осью σ_α дают величину главных напряжений σ_I и σ_{II} .

Для определения направления главных напряжений через точки А и Б на окружности проведем прямые, параллельные площадкам А и Б до пересечения друг с другом. Точка пересечения Р лежит на окружности и называется полюсом круга.

Прямая, проведенная из полюса до любой точки окружности, будет параллельна площадке, напряженное состояние на которой соответствует точке пересечения с кругом.

Для наглядности по найденным направлениям внутри рассматриваемого элемента (рис. 9.8, а) построены главные площадки и показаны направления главных напряжений на них.

Прямые, проведенные из полюса до точек пересечения круга с осью σ_α , параллельны главным площадкам. Соответственно перпендикуляры к ним указывают направления главных напряжений σ_I и σ_{II} на этих площадках.

Обратите внимание, что оси $\sigma_\alpha - \tau_\alpha$ необязательно должны быть параллельны граням выделенного элемента.

Наклоните выбранный элемент на некоторый угол. Поменяйте величину и направления действующих на него напряжений. Постройте для него круг Мора и определите величину и направление главных напряжений. Найдите напряжения на произвольно выбранной вами площадке или для любой точки круга найдите направление соответствующей ей площадки.

Рассмотренный метод определения направлений площадок и напряжений прост и элегантен, но...не очень важен. Круги Мора крайне редко используются в инженерной практике.

Воспользуемся кругом Мора, чтобы получить расчетную формулу для определения главных напряжений при плоском напряженном состоянии.

$$\sigma_I = OC + AC \quad \sigma_{II} = OC - AC,$$

где $OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ — смещение центра круга, AC — радиус круга.

$$\text{По теореме Пифагора} \quad AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_{II} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \end{aligned} \quad (9.3).$$

Если одно из найденных главных напряжений меньше нуля, то с учетом $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, надо перенумеровать главные напряжения. Принять $\sigma_{II} = 0$, а найденное отрицательное главное напряжение станет σ_{III} .

Направление главных напряжений $\alpha_{\text{глав}}$ определим через тангенс двойного угла

$$\text{tg}(2\alpha_{\text{глав}}) = \frac{AD}{CD} = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (9.4).$$

В качестве примера рассмотрим определение главных напряжений при чистом сдвиге (рис. 9.9).

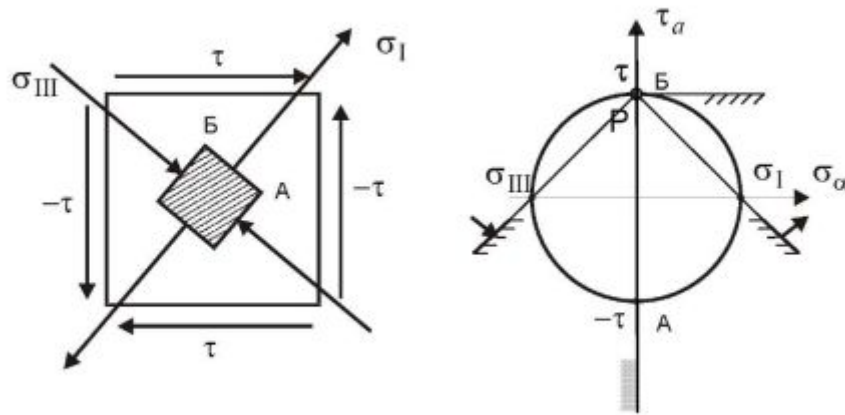


Рис. 9.9. Круг Мора при чистом сдвиге

На площадке *Б* действуют напряжения $\sigma = 0$ и τ .

На площадке *А* действуют $\sigma = 0$ и $-\tau$. Строим круг Мора, по которому определяем главные напряжения $\sigma_I = \tau$ и $\sigma_{III} = -\tau$.

9.5 Связь напряжений и деформаций. Обобщенный закон Гука

В предыдущих главах уже рассматривалась связь напряжений и деформаций при простых видах упругой деформации. Пришло время установить такую связь в общем случае нагружения. Напомним закон Гука при растяжении и при сдвиге

При растяжении (рис. 9.10, а) $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$.

В продольном направлении $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$.

В поперечном направлении $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$.

Следует отметить, что линейная деформация не вызывает сдвига. Прямые углы в растянутом элементе остаются прямыми.

При сдвиге (рис. 9.10, б) $\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$.

Откуда угол сдвига $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$.

Следует отметить, что сдвиг не вызывает линейной деформации. Размеры элемента при сдвиге не меняются, так как упругий сдвиг мал.

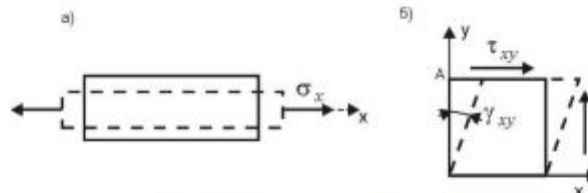


Рис. 9.10. Линейная и угловая деформации

В общем случае нагружения шесть компонент напряжений вызывают появление шести компонент деформации.

Каждое напряжение вносит свой вклад в каждую деформацию. На основании принципа независимости действия сил

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 B_{i,j} \sigma_j,$$

где $B_{i,j}$ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом податливости.

Запишем последнее выражение в упорядоченном виде (в виде таблицы 9.1)

Таблица 9.1

	от σ_x	от σ_y	от σ_z	от τ_{xy}	от τ_{yz}	от τ_{zx}
ε_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
ε_y	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
ε_z	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
γ_{xy}	0	0	0	$\frac{\tau_{xy}}{G}$	0	0
γ_{yz}	0	0	0	0	$\frac{\tau_{yz}}{G}$	0
γ_{zx}	0	0	0	0	0	$\frac{\tau_{zx}}{G}$

От нормальных напряжений возникает удлинение в продольном направлении и сужение в поперечном. Нормальные напряжения не вызывают сдвига.

От каждой пары касательных напряжений возникает сдвиг в одной плоскости и не возникает удлинений.

Каждую строчку таблицы запишем как сумму слагаемых (деформаций)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_z - \mu \sigma_x) & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y) & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (9.5).$$

Выражения (9.5) представляют собой обобщенный закон Гука для общего случая нагружения тела.

9.6 Гипотезы прочности и пластичности

При рассмотрении простых видов деформации в качестве условия выхода конструкции из строя принималось равенство максимальных (либо нормальных, либо касательных) напряжений в конструкции и предельных напряжений, определяемых опытным путем.

$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{пред}}$ — при растяжении и при изгибе,

$\tau_{\max} = \tau_{\text{пред}}$ — при сдвиге и при кручении.

Для материалов в хрупком состоянии в качестве критерия выхода из строя принимается разделение тела на части $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{в}}$.

Для материалов в пластичном состоянии в качестве критерия выхода из строя принимается появление недопустимых пластических деформаций $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_{\text{т}}$.

В общем случае нагружения в теле возникает девять компонент напряжений и задача определения критерия выхода из строя становится весьма сложной. С учетом закона парности касательных напряжений (раздел 4.6) $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$ и число неизвестных компонент тензора напряжений уменьшается до шести.

Задачу эту можно еще упростить, если вместо шести компонент напряжений рассматривать эквивалентные им три главных напряжения.

Как экспериментальный факт следует отметить, что момент выхода из строя зависит не только от величины, но и от соотношения действующих напряжений.

Например, при сжатии образцов из материала в хрупком состоянии $\sigma_I = \sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} < 0$ образец разрушается. Тот же образец, брошенный на дно океана (всестороннее сжатие), $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} < 0$ не разрушается.

Следовательно, в качестве критерия выхода из строя надо рассматривать функцию трех главных напряжений. Введем понятие эквивалентного напряжения.

Эквивалентным напряжением называется некоторая функция трех главных напряжений, которая в момент выхода из строя равна предельному напряжению при простом линейном растяжении.

Условие выхода из строя $\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_{\text{пред}}$.

В качестве критерия выбрано напряжение $\sigma_{\text{пред}}$ при растяжении, потому что эти характеристики есть во всех справочниках.

Чтобы конструкция гарантировано сохраняла работоспособность, надо снизить рабочие напряжения в n раз, где n — коэффициент запаса.

Условие прочности $\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_{\text{пред}} / n = [\sigma]$.

Различные варианты эквивалентного напряжения получаются на основании гипотез прочности, число которых велико (свыше 20). Ввиду большого многообразия материалов невозможно подобрать гипотезу, справедливую для всех материалов.

Для различных групп материалов, аморфных, таких как резина, глина, или лаки и краски, кристаллических, таких как металлы в хрупком состоянии или металлы в пластичном состоянии, применяются свои (кстати, тоже многочисленные) гипотезы.

9.6.1. Гипотезы прочности

Для материалов в хрупком состоянии, которые, разрушаясь, разваливаются на части, рассмотрим две *гипотезы прочности*.

1. Гипотеза максимальных нормальных напряжений

Конструкция из материала в хрупком состоянии выходит из строя (разваливается на части), когда максимальные нормальные напряжения в ней равны предельному напряжению при растяжении (пределу прочности).

Эту гипотезу в литературе называют *первой гипотезой прочности*.

Условие выхода из строя $\max \sigma_{\text{экв1}} = \sigma_I = \sigma_{\text{пред}} = \sigma_B$.

Условие прочности $\max \sigma_{\text{экв1}} = \sigma_I \leq [\sigma] = \sigma_B / n$.

Экспериментальное подтверждение — растяжение чугуна (рис. 9.11) (напряжение σ_I действует в плоскости поперечного сечения), кручение чугуна (σ_I действует по винтовой поверхности, наклоненной под углом 45° к плоскости поперечного сечения). Разрушение в этих случаях происходит под действием максимальных нормальных напряжений.

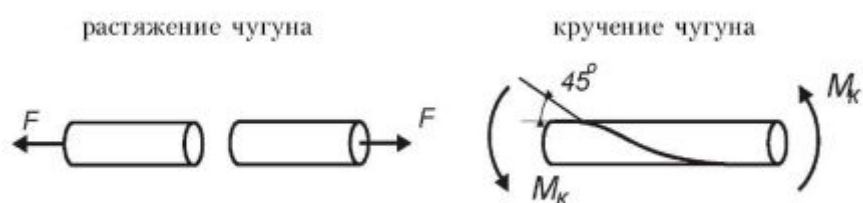


Рис. 9.11. Экспериментальное подтверждение первой гипотезы прочности

ПРИМЕЧАНИЕ

Напомним признаки хрупкого и пластического разрушения из раздела 5.1.

Хрупкое разрушение вызывается нормальными напряжениями и происходит без видимых пластических деформаций.

Пластическое разрушение вызывается (в основном) касательными напряжениями и сопровождается большой пластической деформацией

2. Гипотеза максимальных линейных деформаций

Конструкция из материала в хрупком состоянии разрушается, когда максимальные линейные деформации в ней равны осевой деформации в момент разрушения при растяжении.

Эту гипотезу в литературе называют второй гипотезой прочности.

Условие выхода из строя

$$\max \varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma_I - \mu\sigma_{II} - \mu\sigma_{III}) = \varepsilon_{\text{раст}} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{E} = \frac{\sigma_B}{E}$$

или, сократив слева и справа на E $\max \sigma_{\text{экв}2} = \sigma_I - \mu\sigma_{II} - \mu\sigma_{III} = \sigma_B$.

Условие прочности $\max \sigma_{\text{экв}2} = \sigma_I - \mu\sigma_{II} - \mu\sigma_{III} \leq [\sigma] = \sigma_B/n$.

Экспериментальное подтверждение — сжатие дерева вдоль волокон, камня, хрупкой стали (после закалки без отпуска) (рис.9.12).

сжатие дерева вдоль волокон

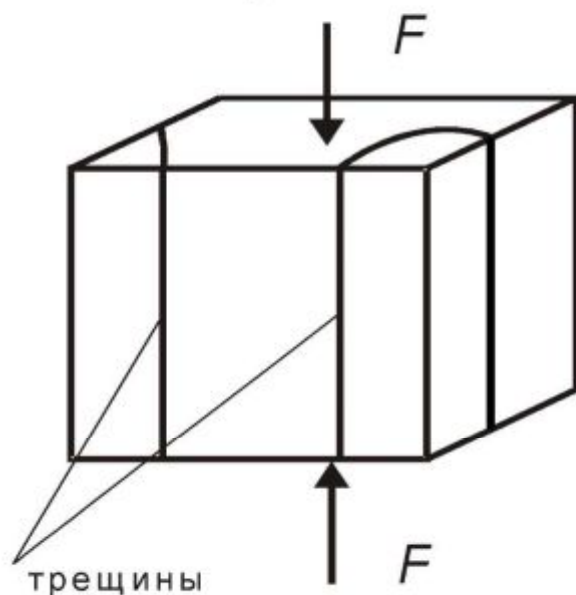


Рис. 9.12. Экспериментальное подтверждение второй гипотезы прочности

При сжатии напряжения $\sigma_I = \sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = -\frac{F}{A}$, деформации $\varepsilon_{III} = \frac{\sigma_{III}}{E} = -\frac{F}{E \cdot A}$,

$\varepsilon_I = \varepsilon_{II} = -\mu\varepsilon_{III} = \mu\frac{F}{E \cdot A}$. Следовательно в поперечном направлении действует максимальная растягивающая деформация. Она и является причиной разрушения образцов вертикальными трещинами.

9.6.2. Гипотезы пластичности

Конструкция из материала в пластичном состоянии выходит из строя при появлении недопустимых пластических деформаций. Для получения критерия появления пластических деформаций в теории пластичности вводится понятие поверхности пластичности.

Если в системе координат трех главных напряжений $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ откладывать точки, координаты которых соответствуют началу пластической деформации в теле при различных сочетаниях главных напряжений, то эти точки образуют поверхность, называемую *поверхностью пластичности*.

Точки внутри поверхности не вызывают пластических деформаций. Точки на поверхности соответствуют началу пластичности. Точки за пределами поверхности быть не может, а сама поверхность с ростом пластических деформаций расширяется так, чтобы точка оставалась на поверхности пластичности.

В этой главе рассматриваются лишь условия начала пластичности. Расширение поверхности пластичности необходимо для учета упрочнения материала в процессе пластического деформирования. Это будет сделано в главе 25.

Равномерное трехосное растяжение или сжатие $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ не вызывает появления касательных напряжений τ . Следовательно не может быть пластических деформаций, вызываемых τ .

Аналогом равномерного трехосного растяжения или сжатия является среднее напряжение $\sigma_0 = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$. Будучи приложенным по всем трем осям, среднее напряжение σ_0 не вызывает появления пластических деформаций. Чтобы исключить влияние среднего напряжения на условие пластичности поверхность пластичности должна представлять собой цилиндр, равнонаклоненный ко всем трем осям (рис. 9.14, а).

Рассмотрим сечение поверхности пластичности, перпендикулярное его оси (рис. 9.14, б). Это сечение и представляет собой условие пластичности.

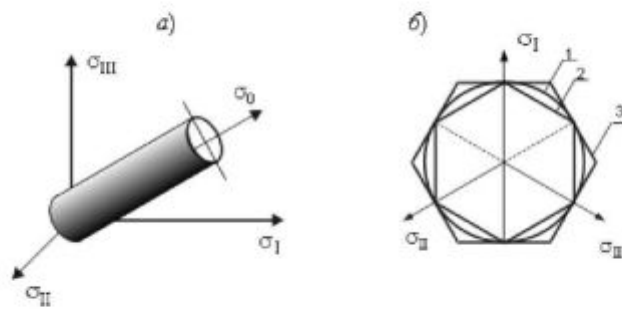


Рис. 9.14. Поверхность пластичности и ее сечение

Сечение цилиндра должно иметь шесть осей симметрии, так как три напряжения $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ равнозначны с точки зрения пластичности, кроме того, принимается, что пределы текучести при растяжении и при сжатии равны. При одноосной деформации условие пластичности $\sigma = \sigma_T$, поэтому поверхность пластичности отсекает на всех осях напряжение σ_T .

Различными авторами были предложены три формы сечения цилиндрической поверхности пластичности, удовлетворяющие указанным условиям:

1. окружность — гипотеза Мизеса,

ее уравнение $(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma_T^2$.

2. шестигранник, вписанный в окружность, — гипотеза Треска,

уравнение его граней $|\sigma_I - \sigma_{II}| = |\sigma_{II} - \sigma_{III}| = |\sigma_{III} - \sigma_I| = \sigma_T$

3. шестигранник, описывающий окружность, — гипотеза Ишлинского.

уравнение его граней $|\sigma_I - \sigma_0| = |\sigma_{II} - \sigma_0| = |\sigma_{III} - \sigma_0| = \frac{2}{3}\sigma_T$

Как показали экспериментальные данные лучше всего согласуется с опытом гипотеза Мизеса (окружность). Гипотеза Треска (вписанный шестигранник) дает заниженные значения (увеличивает коэффициент запаса). Гипотеза Ишлинского дает завышенные значения (уменьшает коэффициент запаса).

В практике расчетов гипотеза Ишлинского используется редко, и далее ее не рассматриваем.

Гипотеза Треска с учетом $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ дает условие пластичности, называемое *третьей гипотезой*.

$$\max \sigma_{\text{экв3}} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_T.$$

По ней условие прочности

$$\max \sigma_{\text{экв3}} = \sigma_I - \sigma_{III} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}.$$

Третья гипотеза называется также *гипотезой максимальных касательных напряжений*. Если разделить на 2 левую и правую часть условия пластичности, то получим

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \tau_T = \frac{\sigma_T}{2}.$$

Гипотеза Мизеса дает условие пластичности, называемое *четвертой гипотезой*,

$$\sigma_{\text{экв4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sigma_T$$

и условие прочности

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}.$$

Это же условие было получено другими исследователями при использовании в качестве критерия пластичности удельной потенциальной энергии изменения формы, поэтому и гипотеза получила название энергетическая.

Экспериментальным подтверждением третьей гипотезы (Треска) служат — растяжение мягкой стали, кручение стали, сжатие чугуна (рис. 9.13).

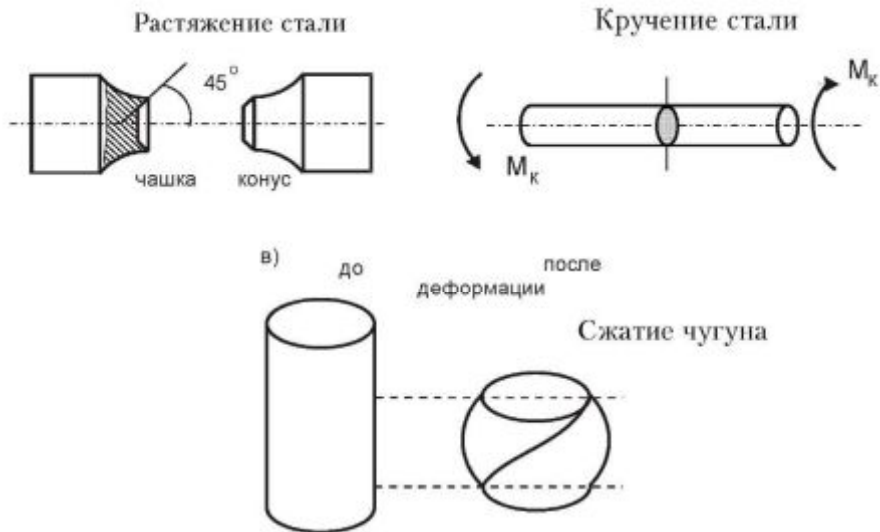


Рис. 9.13. Экспериментальное подтверждение третьей гипотезы прочности

При растяжении стали излом в шейке имеет вид чашка – конус с наклоном под 45° по конической поверхности действия максимальных касательных напряжений.

Разрушение образца — сложное. В центре шейки имеется перпендикулярная оси образца трещина, вызванная нормальными напряжениями вследствие объемного трехосного растяжения в центре шейки. Касательные напряжения в центре значительно меньше, чем у поверхности, где напряженное состояние плоское

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}.$$

У поверхности $\sigma_{III} = 0$, в центре $\sigma_{III} > 0$. Вблизи поверхности образца происходит пластическое разрушение от касательных напряжений τ , направленных под углом 45° к оси образца.

При кручении стали разрушение происходит от касательных напряжений в плоскости поперечного сечения, где $\sigma = 0$ $\tau \neq 0$.

При сжатии чугуна (в условиях смазки контактных поверхностей для уменьшения трения) разрушение происходит по плоскости действия максимальных касательных напряжений под углом 45° к оси образца при большой пластической деформации (высота образца намного уменьшилась).

У четвертой гипотезы нет таких наглядных экспериментальных подтверждений, как у трех первых гипотез. Тем не менее, многочисленные эксперименты многих ученых показали, что появление пластических деформаций при сложном напряженном состоянии лучше всего согласуется именно с четвертой гипотезой (Мизеса).

9.6.3. Гипотеза Мора

Рассмотрим еще одну гипотезу, которая может использоваться для материалов и в хрупком и в пластичном состоянии. В литературе ее называют пятой гипотезой прочности. Она выведена из рассмотрения огибающей кругов Мора при различных напряженных состояниях и не имеет четкой формулировки.

Условие прочности по гипотезе Мора имеет вид

$$\max \sigma_{\text{экв5}} = \sigma_I - \nu \sigma_{III} \leq [\sigma] = \sigma_{\text{пред}} / n,$$

где $\nu = \frac{\sigma_{\text{в.раст}}}{\sigma_{\text{в.сжат}}}$ — отношение пределов прочности материала при растяжении и при сжатии.

Для пластичных в обычных условиях материалов $\nu = 1$ и пятая гипотеза (Мора) превращается в третью гипотезу (максимальных касательных напряжений).

Для хрупких в обычных условиях материалов $\nu < 1$. Так для чугуна $\nu = \frac{1}{4}$. Для

идеально хрупкого тела $\nu = \frac{1}{8}$. В этих случаях пятая гипотеза приближается к первой (максимальных нормальных напряжений).

Подводя итог этого раздела следует отметить, что для материалов в хрупком состоянии вторая гипотеза практически не применяется, пятая применяется редко, так как не всегда можно отыскать в справочниках предел прочности материала при сжатии. Чаще всего используется первая гипотеза.

Рассчитывать на прочность конструкции из хрупких материалов приходится редко. Как правило, это неответственные конструкции.

В ответственных конструкциях возможное разрушение может привести к серьезным последствиям, поэтому материал конструкции всегда должен находиться в пластичном состоянии.

Для расчета конструкций из пластичных материалов используют третью и четвертую гипотезы прочности, причем одинаково часто.

9.7. Условие прочности при плоском напряженном состоянии

При плоском напряженном состоянии условия прочности по различным гипотезам прочности можно упростить.

При рассмотрении круговой диаграммы Мора были получены формулы для главных напряжений при плоском напряженном состоянии (9.3)

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{III} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{II} = 0$$

Подставив эти выражения в условия прочности по третьей и четвертой гипотезам прочности, получаем

По третьей гипотезе $\max \sigma_{\text{экр3}} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$.

По четвертой гипотезе

$$\max \sigma_{\text{экр4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

В большинстве задач сопротивления материалов и при расчетах многих деталей машин используются схемы с длинными и тонкими стержнями. При изгибе и кручении таких стержней считают, что волокна друг на друга не давят $\sigma_y = 0$.

Условие прочности для длинных и тонких стержней принимает вид

По третьей гипотезе $\max \sigma_{\text{экр3}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$ (9.5),

По четвертой гипотезе $\max \sigma_{\text{экр4}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$ (9.6).

Условия прочности (9.5) и (9.6) используются при расчете большинства конструкций и деталей машин.

Глава 10. Сложное сопротивление

Сложным сопротивлением называется одновременное действие нескольких простых видов деформации (растяжения, кручения и изгиба).

10.1. Внутренние усилия при сложном сопротивлении

Внутренние усилия определяются методом сечений. Пожалуйста, перечитайте раздел 1.4 (Определение внутренних усилий методом сечений).

В общем случае в произвольном сечении могут действовать 6 внутренних усилий: три проекции главного вектора сил N_x, Q_y, Q_z и три проекции главного момента сил M_x, M_y, M_z , которые определяются из условий равновесия отсеченной части тела.

Напомним приведенное во введении общее правило определения любого внутреннего усилия:

ПРАВИЛО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

N_x, Q_y, Q_z равняются алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно на оси x, y или z .

M_x, M_y, M_z равняются алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от выбранного сечения, соответственно относительно осей x, y или z , проходящих через центр тяжести выбранного сечения.

Три внутренних усилия являются результатом действия нормальных напряжений в сечении — это N_x, M_y, M_z .

Три внутренних усилия являются результатом действия касательных напряжений в сечении — это $Q_y, Q_z, M_x = M_k$.

Влиянием поперечных сил для длинных и тонких стержней пренебрегают, поскольку касательные напряжения от них малы по сравнению с нормальными напряжениями от M_y, M_z и касательными напряжениями от M_k .

Влиянием продольного усилия N_x , как правило, пренебрегают, поскольку нормальные напряжения от него малы по сравнению с нормальными напряжениями от M_y, M_z . Учитывать продольное усилие надо, если нет изгибающих и крутящего момента или они малы.

При сложном сопротивлении правило знаков для продольного усилия и крутящего момента то же, что и ранее при растяжении и при кручении. Для изгибающего момента вводится новое правило знаков.

ПРАВИЛО ЗНАКОВ

Продольное усилие положительное, если вызывает растяжение.

Изгибающий момент положительный, если вызывает растяжение в волокнах первой четверти. Первой четвертью считают часть поперечного сечения между положительными направлениями осей координат.

Знак крутящего момента безразличен, так как прочность стержня при кручении против часовой стрелки или по часовой стрелке одинакова. Важно лишь отличать сумму моментов от разности.

10.1.1. Построение эпюр внутренних усилий

При определении внутренних усилий методом сечений все силы, действующие по одну сторону от рассматриваемого сечения должны быть известны, поэтому в случае необходимости надо определить опорные реакции из условий равновесия системы.

Единственной целью построения эпюр внутренних усилий является выбор опасного

сечения, для которого будет произведен расчет на прочность.

Рассмотрим порядок построения эпюр для пространственной стержневой системы.

1. Разбить стержневую систему на участки. Границами участков являются сечения, где приложены нагрузки или резко изменяются форма и размеры сечения.
2. На каждом участке выбрать произвольное сечения и поместить в центр тяжести его систему координат. Направление осей координат может быть постоянным для всех участков. В таком случае легче построить эпюры изгибающих моментов в плоскостях изгиба.

В случае использования компьютерных программ ось x надо брать, совпадающей с осью стержня (нормалью к поперечному сечению). Оси y и z при этом лежат в плоскости рассматриваемого сечения и являются главными центральными осями инерции сечения. Для симметричных сечений это оси симметрии.

Для определения знака изгибающего момента на каждом участке надо отметить первую четверть сечения (между положительными направлениями осей координат).

3. Для каждого участка определить, действующие в произвольном сечении внутренние усилия: продольное усилие N_x , крутящий момент $M_x = M_k$, изгибающие моменты M_y и M_z (продольным усилием в большинстве расчетов на прочность можно пренебречь).
4. Построить эпюры внутренних усилий. Эпюры N_x и M_k строятся в произвольной плоскости.

Эпюры изгибающих моментов строятся в плоскости изгиба. Причем, если в машиностроительных вузах принято строить эпюры изгибающих моментов на сжатых волокнах, то в строительных вузах строят эпюры на растянутых волокнах. В принципе направление построенных эпюр не имеет никакого значения.

Рассмотрим пример построения эпюр внутренних усилий для пространственной рамы (рис. 10.1). Для каждого участка определяются 4 внутренних усилия N_x, M_x, M_y, M_z . Для этого подсчитывается сумма проекций всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на ось x и сумма моментов этих сил относительно осей x, y, z , проходящих через центр тяжести рассматриваемого сечения. В этом примере ось x на всех участках направлена вдоль оси стержня для последующего построения эпюр внутренних усилий в Mathcad.

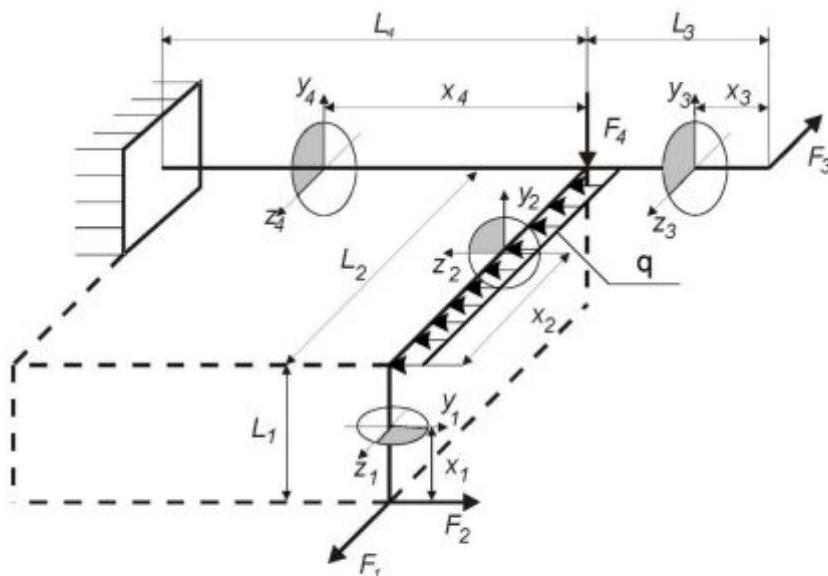


Рис. 10.1. Схема нагружения пространственной рамы

Напомним, что *момент* — это произведение силы на плечо. Плечо в случае

пространственного действия сил — кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью, относительно которой определяется момент.

Результаты определения усилий сведены в таблицу 10.1, в которой, кроме уравнений усилий, для построения эпюр (в скобках) приведены численные значения усилий в начале и в конце участка.

Таблица 10.1 Внутренние усилия в сечениях рамы (рис. 10.1)

Координата	N	$M_x=M_k$	M_y		M_z
			кНм		
$0 < x_1 < L_1$	0	0	$-F_1 x_1$ (0/-1)		$-F_2 x_1$ (0/-2)
$0 < x_2 < L_2$	F_1 (5/5)	$-F_2 L_1$ (-2/-2)	$-F_2 x_2 + \frac{q x_2^2}{2}$ (0/-2,1)		$-F_1 L_1$ (-1/-1)
$0 < x_3 < L_3$	0	0	$F_3 x_3$ (0/2,4)		0
$0 < x_4 < L_4$	F_2 (10/10)	$-F_1 L_1$ (-1/-1)	$-F_1 x_4 + F_2 L_2 + F_3(L_3 + x_4) - \frac{q L_2^2}{2}$ (4,5/7,3)		$F_4 x_4 - F_2 L_1$ (-2/2,8)

По результатам расчета построены эпюры внутренних усилий (рис. 10.2). Эпюра продольных усилий (горизонтальная) и эпюра крутящих моментов (вертикальная) показаны на рис. 10.2, а. Эпюры изгибающих моментов, построенные в плоскостях изгиба, показаны на рис. 10.2, б.

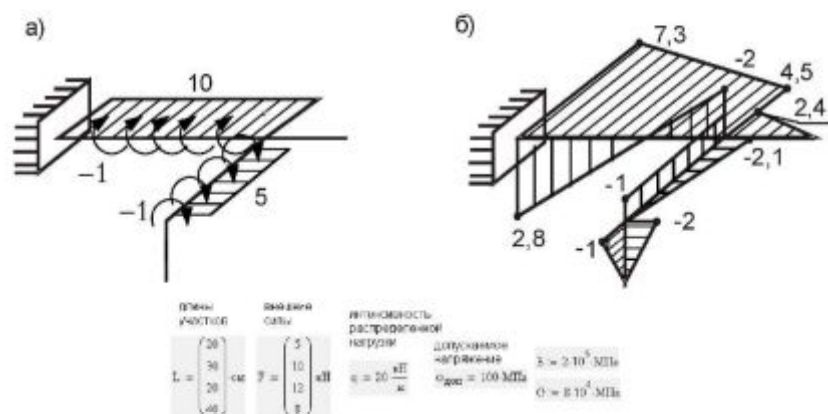


Рис. 10.2 Эпюры внутренних усилий для пространственной рамы

Опасным является сечение в заделке, где действуют:

$$N = 10 \text{ кН}, M_k = 1 \text{ кНм}, M_y = 7,3 \text{ кНм}, M_z = 2,8 \text{ кНм}.$$

В этом сечении необходимо произвести расчет на прочность.

10.2 Напряжения

Сложное сопротивление — общий случай нагружения длинных и тонких стержней. Напряженно-деформированное состояние при этом плоское, то есть одно из трех главных напряжений равно нулю. Для получения условия прочности при сложном сопротивлении надо получить выражения для напряжений, действующих в поперечных сечениях стержня, затем найти главные напряжения и, используя гипотезы прочности, составить условие прочности.

Гипотезы

Для упрощения расчетов вводятся гипотезы и допущения.

ПРИМЕЧАНИЕ

При сложном сопротивлении справедливы все гипотезы из раздела 1.9.

Далее рассмотрим только те гипотезы, которые непосредственно используются в расчетах.

- Справедлив закон Гука.

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E}(\sigma_i - \mu\sigma_j - \mu\sigma_k) \quad (10.1),$$

где $i, j, k = x, y, z$. Подставляя индексы x, y, z по правилу круговой подстановки получаем три физических уравнения связи деформаций и напряжений.

- Волокна друг на друга не давят (рис. 10.3).

Тогда из выражения (10.1)

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{или} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{как при простом растяжении-сжатии.}$$

- Гипотеза плоских сечений. Сечения плоские до деформации остаются плоскими после деформации (рис.10.4).

Линия пересечения сечений до и после деформации является нейтральной осью, так как на ней $\varepsilon = 0$ и $\sigma = 0$.

Чем дальше находится рассматриваемая точка от нейтральной оси, тем больше деформация и напряжения в этом волокне.

Наибольшие напряжения действуют в точке наиболее удаленной от нейтральной оси.

- Принцип независимости действия сил.

В любой точке поперечного сечения стержня напряжения равны сумме напряжений от действия каждого внутреннего усилия в отдельности.

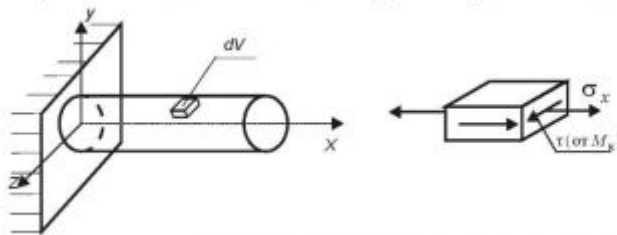


Рис. 10.3. Напряжения на гранях элемента

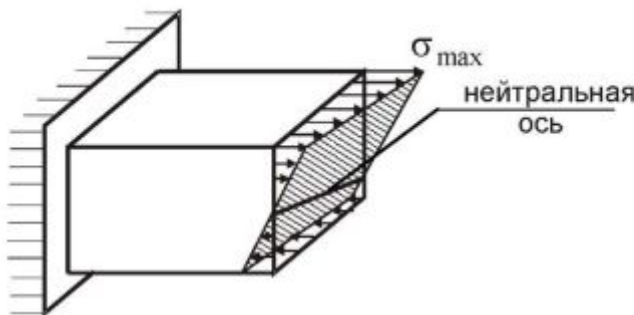


Рис. 10.4. Сечение стержня до и после деформации

Определим отдельно нормальные и касательные напряжения.

Нормальные напряжения

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_N + \vec{\sigma}_{M_y} + \vec{\sigma}_{M_z}.$$

Векторы напряжений $\vec{\sigma}_N, \vec{\sigma}_{M_y}, \vec{\sigma}_{M_z}$ направлены вдоль одной прямой (рис. 10.5),

следовательно, векторную сумму можно заменить алгебраической

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z}, \text{ где}$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} \text{ — напряжения при растяжении стержня,}$$

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{J_y} z \text{ — напряжения при изгибе в плоскости } yz,$$

$$\sigma_{M_z} = \frac{M_z}{J_z} y \text{ — напряжения при изгибе в плоскости } xy.$$

Окончательно получаем

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y \quad (10.2).$$

Уравнение нейтральной оси $\sigma = 0$ или

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_n + \frac{M_z}{J_z} y_n = 0 \quad (10.3),$$

где y_n, z_n — координаты точки, лежащей на нейтральной оси.

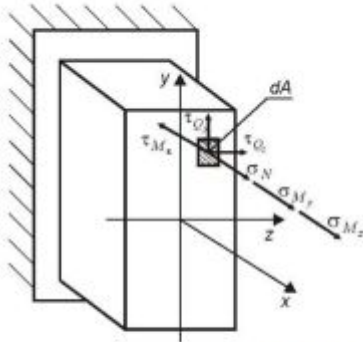


Рис. 10.5. Векторы напряжений в сечении стержня

Касательные напряжения

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{Q_y} + \vec{\tau}_{Q_z} + \vec{\tau}_{M_k} \quad (10.4).$$

Векторы напряжений $\vec{\tau}_{Q_y}, \vec{\tau}_{Q_z}, \vec{\tau}_{M_k}$ расположены в плоскости поперечного сечения стержня, но в разных направлениях (рис. 10.5), поэтому заменить геометрическую сумму алгебраической уже нельзя.

Слагаемые в выражении (10.4) имеют различный порядок. Касательные напряжения от поперечных сил малы по сравнению с касательными напряжениями от крутящего момента, поэтому в дальнейших расчетах ими пренебрегают.

Тогда $\tau \approx \tau_{M_k}$.

$$\text{Для стержней круглого поперечного сечения} \quad \tau = \frac{M_k}{J_p} \rho.$$

Для стержней некруглого поперечного сечения касательные напряжения определяются по формулам, взятым из справочников, или расчетом методом конечных элементов.

Условие прочности

При сложном сопротивлении длинных и тонких стержней в поперечных сечениях действуют только одно нормальное напряжение σ_x вдоль оси стержня ($\sigma_y = \sigma_z = 0$) и одно касательное напряжение τ_{M_k} (τ_{Q_y} и τ_{Q_z} малы).

Условие прочности при плоском напряженном состоянии записано в конце предыдущей главы.

По третьей гипотезе прочности

$$\max \sigma_{\text{экв}3} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

По четвертой гипотезе прочности

$$\max \sigma_{\text{экв}4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

10.3 Расчет на прочность при сложном сопротивлении

10.3.1. Стержень произвольного сечения

Оценивая прочность стержней при сложном сопротивлении надо:

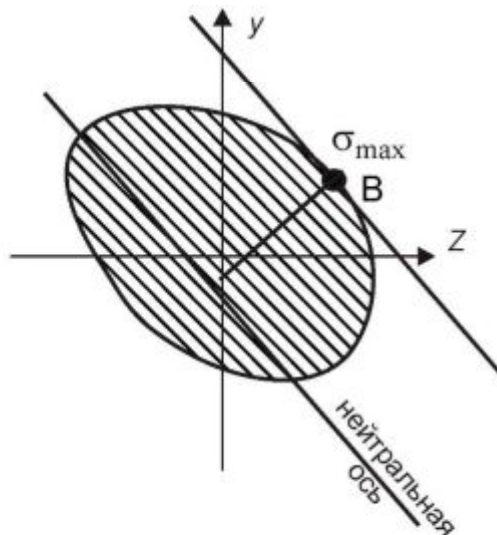
- Построить эпюры внутренних усилий и выбрать опасное сечение,
- В опасном сечении построить нейтральную ось.

В точке наиболее удаленной от нейтральной оси действуют максимальные нормальные напряжения σ_{max} . Эта точка является одной из опасных точек. Проведите касательную к сечению параллельно нейтральной оси (рис. 10.6). Точка пересечения касательной с контуром сечения — опасная точка. Подставьте координаты этой точки B в формулу (10.2) для нормальных напряжений

$$\sigma_B = \sigma_{\text{max}} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_B + \frac{M_z}{J_z} y_B.$$

Касательные напряжения в этой точке в общем случае неизвестны и определяются, как сказано ранее, методом конечных элементов.

- Кроме рассмотренной точки в опасном сечении могут оказаться и другие опасные точки. В каждой из них надо определить нормальные σ , касательные τ и эквивалентные напряжения либо по третьей, либо по четвертой гипотезам прочности. Выбрать максимальное эквивалентное напряжение.
- Из условия прочности определить какую-либо одну величину: либо размер сечения, либо допускаемую нагрузку.



□

Рис. 10.6. Выбор опасной точки в произвольном сечении

10.3.2. Прямоугольное сечение

В прямоугольном сечении главными центральными осями инерции являются оси

симметрии y и z , поэтому определяем изгибающие моменты относительно осей симметрии y и z . На рисунке 10.7 показаны эпюры нормальных и касательных напряжений, вызванных каждым из внутренних усилий отдельно. Из этого рисунка видно, что в прямоугольном сечении есть три точки, которые могут быть опасными. Это точки A , B , и C .

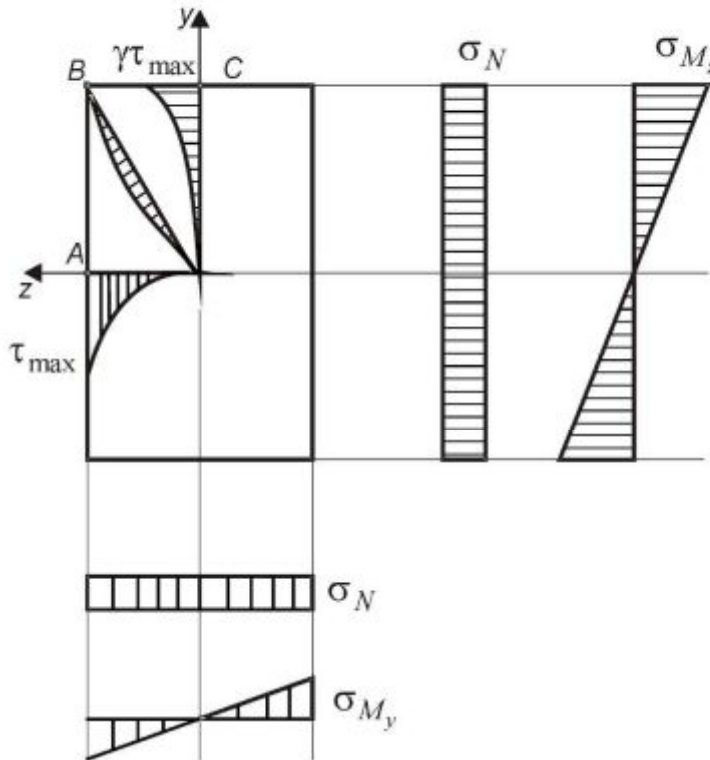


Рис. 10.7. Напряжения в опасных точках прямоугольного сечения

- В точке B (угловая), максимально удаленной сразу от двух осей y и z , действуют

$$\sigma_B = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_{\max} + \frac{M_z}{J_z} y_{\max} \quad \text{или}$$

$$\sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \quad (10.5),$$

$$\tau_B = 0 \quad \text{тогда} \quad (\sigma_{\text{экв}})_B = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_B^2} = \sigma_B.$$

- В точке A (посередине длинной стороны прямоугольника на оси z) $y_A = 0$, поэтому

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_{\max} \quad \text{или} \quad \sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y}$$

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad \text{где} \quad W_x = \beta \cdot b^2 h, \quad b \quad \text{— меньшая сторона}$$

прямоугольника, β — коэффициент, который берется из справочника в зависимости от отношения h/b .

Эквивалентное напряжение в точке A

$$(\sigma_{\text{экв}})_A = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2}.$$

- В точке C (посередине короткой стороны прямоугольника на оси y) $z = 0$, поэтому

$$\sigma_{C_{\text{эвз}}} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y_{\text{max}} \quad \text{или} \quad \sigma_{C_{\text{эвз}}} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z}$$

$$\tau_C = \gamma \cdot \tau_{\text{max}} = \gamma \frac{M_k}{W_k}$$

Эквивалентное напряжение в точке С

$$(\sigma_{\text{эвз}})_C = \sqrt{\sigma_C^2 + 4\tau_C^2}$$

Из трех значений $\sigma_{\text{эвз}}$ в точках А, В, С выбрать большее и подставить в условие прочности $(\sigma_{\text{эвз}})_{\text{max}} \leq [\sigma]$.

10.3.3. Круглое или кольцевое сечение

Для стержней такого сечения неприменима формула (10.5), так как в них не существует точки, одновременно находящейся на максимальном удалении от осей y и z (такая точка находится за пределами сечения).

Ввиду круговой симметрии моменты инерции относительно любой центральной оси одинаковы. С учетом этого удобно два изгибающих момента заменить их геометрической суммой $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ и далее рассмотреть плоский изгиб под действием $M_{\text{изг}}$ (рис. 10.8). Тогда максимальные нормальные напряжения действуют на поверхности круглого сечения в точке пересечения круга с плоскостью действия суммарного изгибающего момента (точке D).

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\text{изг}}}{W} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}$$

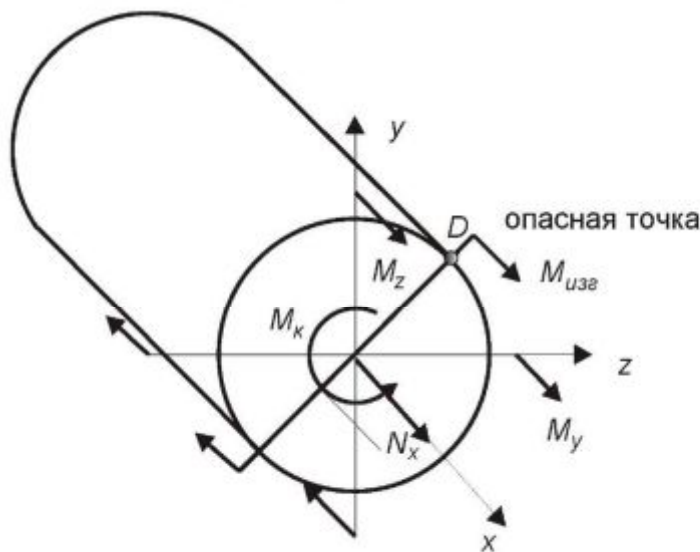


Рис. 10.8. Опасная точка в круглом поперечном сечении

Максимальные касательные напряжения от кручения стержня действуют во всех точках на поверхности круглого сечения и равны

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_k}{W_p}$$

Следовательно, на поверхности круглого сечения есть точка, где одновременно действуют σ_{max} и τ_{max} . Эта точка является опасной. Эквивалентное напряжение в ней

$$(\sigma_{\text{экр3}})_{\text{max}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 4\tau_{\text{max}}^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2}.$$

Упростим последнее выражение. Нормальное напряжение от продольного усилия во много раз меньше, чем от действия изгибающих моментов, поэтому продольным усилием можно пренебречь. Тогда с учетом $W_p = 2 \cdot W$ условие прочности для стержней круглого и кольцевого сечений по третьей гипотезе прочности примет вид

$$\sigma_{\text{max.экр3}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 4\tau_{\text{max}}^2} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_k^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (10.6).$$

По четвертой гипотезе прочности

$$(\sigma_{\text{экр4}})_{\text{max}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 3\tau_{\text{max}}^2} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75M_k^2}}{W} \leq [\sigma].$$

10.4. Частные случаи сложного сопротивления

- Косой изгиб — сочетание двух плоских изгибов. $N = 0$, $M_k = 0$, $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$.
- Внецентренное растяжение (изгиб с растяжением) — сочетание двух плоских изгибов и растяжения-сжатия. $M_k = 0$, $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$, $N \neq 0$.
- Изгиб с кручением — сочетание кручения и изгиба в двух плоскостях. Продольное усилие мало или отсутствует. $N = 0$, $M_k \neq 0$, $M_y \neq 0$, $M_z \neq 0$.

Расчетные формулы для напряжений и условия прочности для частных случаев сложного сопротивления получаются из общих формул, записанных в предыдущем разделе, в которых надо приравнять нулю отсутствующие внутренние усилия.

Для построения нейтральной оси в поперечном сечении надо приравнять нулю выражение для нормальных напряжений $\sigma = 0$, подставить все известные величины и получив линейную зависимость y_n от z_n , построить соответствующую прямую линию, как правило, по двум любым точкам.

10.5. Понятие о ядре сечения

При эксплуатации строительных сооружений, зданий, колонн из кирпича или бетона важно, чтобы в таких конструкциях отсутствовали растягивающие напряжения, так как эти материалы разрушаются при приложении сравнительно небольших растягивающих напряжений. Рассмотрим, как должна быть приложена нагрузка к элементам таких конструкций, чтобы удовлетворить указанному требованию.

Нормальные напряжения во всем поперечном сечении будут одного знака, если нейтральная ось проходит за пределами сечения, в крайнем случае, касается сечения.

Введем понятие о ядре сечения.

Ядром сечения называется область поперечного сечения стержня, внутри которой должна прилагаться сила, чтобы нормальные напряжения во всем сечении были одного знака.

Рассмотрим случай приложения внецентренной сжимающей нагрузки к колонне прямоугольного поперечного сечения (рис. 10. 9). Напряжения в сечении будут одного знака, если нейтральная ось не пересекает поперечное сечение или касается его.

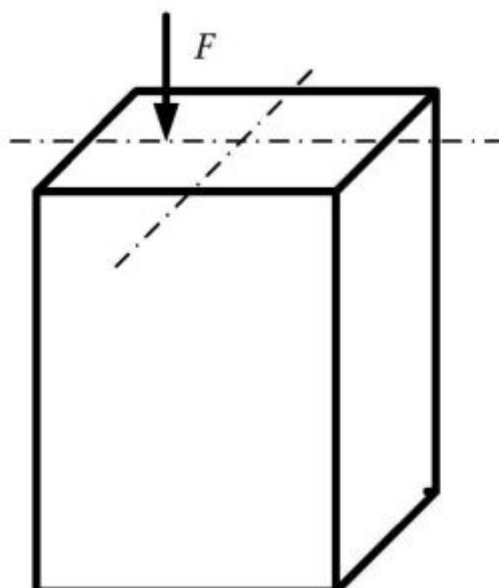


Рис. 10.9. Внецентренное сжатие стержня

Поставим обратную задачу. Какому положению силы соответствует совпадение нейтральной оси с одной из сторон прямоугольного сечения (рис. 10.10).

Уравнение нейтральной оси (10.3) $\sigma = 0$

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z_n + \frac{M_z}{J_z} y_n = 0.$$

Рассмотрим четыре случая касания нейтральной осью сечения стержня:

1. Сила приложена в точке 1. Нейтральная ось занимает положение 1 – 1. Тогда

$$N = F, \quad M_y = F \cdot z_{F1}, \quad M_z = 0, \quad z_n = -\frac{b}{2},$$

$A = b \cdot h$, $J_x = \frac{bh^3}{12}$, $J_y = \frac{b^3h}{12}$. Подставив найденные значения в уравнение нейтральной оси, получаем

$$\frac{F}{bh} + \frac{F \cdot z_{F1}}{b^3h/12} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = 0. \text{ Откуда } z_{F1} = \frac{b}{6}.$$

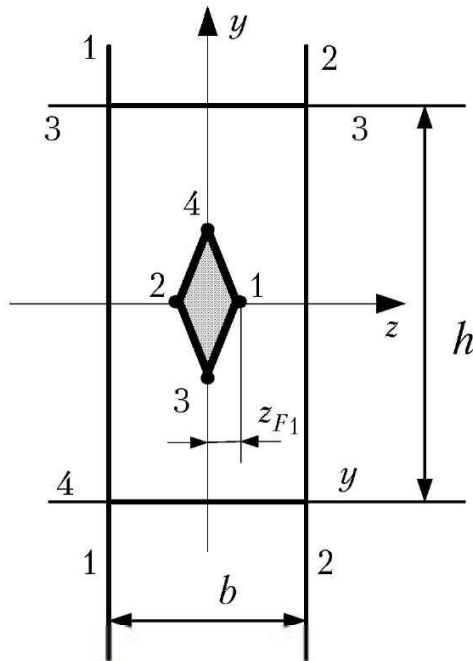


Рис. 10.10. Определение положения ядра сечения

2. Сила приложена в точке 2. Нейтральная ось занимает положение 2 – 2.

$$N = F, \quad M_y = F \cdot z_{F2}, \quad M_z = 0, \quad z_n = \frac{b}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\frac{F}{bh} + \frac{F \cdot z_{F2}}{bh^3/12} \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = 0. \text{ Откуда } z_{F2} = -\frac{b}{6}.$$

3. Сила приложена в точке 3. Нейтральная ось занимает положение 3 – 3.

$$N = F, \quad M_y = 0, \quad M_z = F \cdot y_{F3}, \quad y_n = \frac{h}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\frac{F}{bh} + \frac{F \cdot y_{F3}}{b^3h/12} \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = 0. \text{ Откуда } z_{F2} = -\frac{h}{6}.$$

4. Сила приложена в точке 4. Нейтральная ось занимает положение 4 – 4.

$$N = F, \quad M_y = 0, \quad M_z = F \cdot y_{F4}, \quad y_n = -\frac{h}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\frac{F}{bh} + \frac{F \cdot y_{F4}}{b^3h/12} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) = 0. \text{ Откуда } z_{F2} = \frac{h}{6}.$$

Найдем, как перемещается точка приложения силы, если нейтральная ось поворачивается вокруг угловой точки. Пусть в угловой точке с координатами $y = h/2$ и $z = b/2$ напряжение $\sigma = 0$. Тогда по формуле (10.2)

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y = \frac{F}{bh} + \frac{F \cdot z_F}{b^3h} \cdot \frac{b}{2} + \frac{F \cdot y_F}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = 0 \text{ Откуда}$$

$1 + \frac{6z_F}{b} + \frac{6y_F}{h} = 0$. Это уравнение прямой линии, не проходящей через начало координат. Следовательно, при перемещении точки приложения осевой силы вдоль прямой линии нейтральная ось поворачивается вокруг точки. Если, например, точка приложения силы перемещается вдоль прямой 1 – 4, то нейтральная ось поворачивается вокруг нижнего левого угла сечения.

Соединяя прямыми линиями точки 1, 4, 2, 3, 1 на рис. 10.10, получаем ядро сечения в виде ромба для прямоугольного поперечного сечения.

Для круглого поперечного сечения ядро сечения также круг диаметром $d/3$.

Глава 11. Энергетический метод расчета упругих систем

При изучении простых видов деформации: растяжения-сжатия, сдвига, кручения, плоского изгиба каждый раз определялась потенциальная энергия упругой деформации с целью получения в дальнейшем энергетического метода расчета упругих систем. Этот метод часто используется в практике инженерных расчетов при решении сложных задач.

Особенностями этого метода являются универсальность и простота использования. Формулы и уравнения этого метода справедливы при любых видах деформации, в том числе и при сложном сопротивлении, при решении как статически определимых, так и статически неопределимых задач.

Для объяснения этого универсального метода введем универсальные обозначения.

Обозначим

- F — *любой силовой фактор* (сосредоточенную силу, пару сил, распределенную нагрузку) и назовем его *обобщенная сила*, хотя это и не совсем верно с точки зрения теоретической механики;
- Δ — перемещение, на котором совершает работу обобщенная сила, назовем его *обобщенное перемещение*.

Каждой силе соответствует свое обобщенное перемещение.

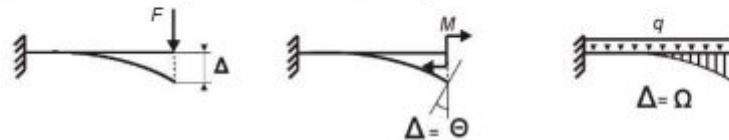


Рис. 11.1. Обобщенные перемещения от различных нагрузок

Сосредоточенная сила F совершает работу на линейном перемещении Δ (рис. 11.1, а). Работа $W^{\text{внеш}}$ внешней сосредоточенной силы $W^{\text{внеш}} = F \cdot \Delta$ имеет размерность ньютон \times метр.

Пара сил $F = M$ совершает работу на угловом перемещении $\Delta = \theta$ (рис. 11.1, б). Тогда работа пары сил $W^{\text{внеш}} = F \cdot \Delta = M \cdot \theta$ также имеет размерность ньютон \times метр.

Для распределенной нагрузки $F = q$ обобщенным перемещением является площадь Ω , ограниченная упругой осью балки до и после деформации (рис. 11.1, в). Работа, совершенная распределенной нагрузкой $W^{\text{внеш}} = F \cdot \Delta = q \cdot \Omega$ имеет размерность ньютон \times метр.

Введем понятие перемещения от единичной силы.

При упругой деформации, когда справедлив закон Гука, перемещение прямо пропорционально приложенной нагрузке. Это перемещение Δ можно записать как произведение нагрузки на перемещение от единичной силы

$$\Delta = F \cdot \delta,$$

где δ — перемещение от единичной силы $F = 1$, которому в дальнейшем дадим название *коэффициент податливости*.

Например, при растяжении стержня силой F

$$\Delta = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} = F \cdot \frac{1 \cdot L}{E \cdot A} = F \cdot \delta, \quad \text{где } \delta = \frac{1 \cdot L}{E \cdot A},$$

при изгибе консольной балки, нагруженной на конце силой F

$$\Delta = \frac{F \cdot L^3}{3E \cdot J} = F \cdot \frac{1 \cdot L^3}{3E \cdot J} = F \cdot \delta, \quad \text{где } \delta = \frac{1 \cdot L^3}{3E \cdot J}.$$

Введем основные понятия, необходимые для объяснения энергетического метода

расчета упругих систем, перейдем к выводу формулы для определения упругих перемещений.

11.1 Интеграл Мора

При сложном сопротивлении в поперечных сечениях стержня действуют шесть внутренних усилий $N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$. В соответствии с принципом независимости действия сил потенциальная энергия упругой деформации равна сумме потенциальной энергии от всех шести внутренних усилий. Запишем потенциальную энергию упругой деформации при сложном сопротивлении, используя выражения, полученные в предыдущих разделах.

$$\Pi = \sum \int_L \frac{N^2 dx}{2E \cdot A} + \sum k_y \int_L \frac{Q_y^2 dx}{2G \cdot A} + \sum k_z \int_L \frac{Q_z^2 dx}{2G \cdot A} + \sum \int_L \frac{M_k^2 dx}{2G \cdot J_k} + \sum \int_L \frac{M_y^2 dx}{2E \cdot J_y} + \sum \int_L \frac{M_z^2 dx}{2E \cdot J_z}$$

В механике есть теорема Кастильяно, позволяющая находить перемещения, как производную от потенциальной энергии по обобщенной силе $\Delta_i = \frac{\partial \Pi}{\partial F_i}$.

Приведем пример использования теоремы Кастильяно.

Для консольной балки, нагруженной силой на конце, изгибающий момент в произвольном сечении x равен $M = F \cdot x$.

Потенциальная энергия упругой деформации

$$\Pi = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2E \cdot J} = \int_0^L \frac{(F \cdot x)^2 dx}{2E \cdot J}.$$

Перемещение под силой

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial F} = \int_0^L \frac{2Fx \cdot x dx}{2E \cdot J} = \frac{F \cdot L^3}{3E \cdot J}.$$

Если надо определить перемещение в точке, где не приложено никакой силы, надо в этой точке приложить фиктивную силу $F_\Phi \rightarrow 0$, настолько малую, чтобы она не изменила величину перемещения от других сил. Тогда изгибающий момент в произвольном сечении равен сумме изгибающих моментов от внешних сил и от фиктивной силы F_Φ

$$M = M_F + M_\Phi = M_F + F_\Phi \cdot \bar{M},$$

где \bar{M} — изгибающий момент от $F_\Phi = 1$, так как внутренние усилия пропорциональны приложенной силе F_Φ . Поскольку реально фиктивной силы нет, в выражении для перемещения надо положить $F_\Phi = 0$.

Тогда перемещение точки приложения фиктивной силы

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial F_\Phi} = \sum \frac{\partial}{\partial F_\Phi} \int_L \frac{(M_F + F_\Phi \bar{M})^2 dx}{2EJ} = \sum \int_L \frac{2(M_F + F_\Phi \bar{M}) \bar{M} dx}{2EJ} = \sum \int_L \frac{M_F \bar{M} dx}{EJ}.$$

Последнее выражение есть частный случай интеграла Мора для изгиба балок.

По аналогии:

при растяжении продольное усилие $N = N_F + F_\Phi \bar{N}$, где \bar{N} — продольное усилие от $F_\Phi = 1$,

при кручении крутящий момент $M_k = M_{kF} + F_\Phi \bar{M}_k$, где \bar{M}_k — крутящий момент от $F_\Phi = 1$.

Проделав описанные выше преобразования, получаем выражения для расчета перемещений при растяжении и при кручении.

В общем случае при действии шести внутренних усилий перемещение в точке, где

приложена фиктивная сила

$$\Delta = \sum_L \int \frac{N_F \bar{N} dx}{EA} + \sum k_y \int_L \frac{Q_{yF} \bar{Q}_y dx}{GA} + \sum k_z \int_L \frac{Q_{zF} \bar{Q}_z dx}{GA} + \sum_L \int \frac{M_{yF} \bar{M}_y dx}{EJ_y} + \sum_L \int \frac{M_{zF} \bar{M}_z dx}{EJ_z} + \sum_L \int \frac{M_{кF} \bar{M}_к dx}{GJ_к} \quad (11.1).$$

Это выражение представляет собой интеграл Мора для определения перемещения в самом общем случае нагружения (при сложном сопротивлении).

В этом выражении $N_{xF}, Q_{yF}, Q_{zF}, M_{yF}, M_{zF}, M_{кF}$ — внутренние усилия в произвольном сечении от действия всех внешних сил, $\bar{N}_x, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z, \bar{M}_y, \bar{M}_z, \bar{M}_к$ — внутренние усилия в произвольном сечении от действия $F_{\text{ф}} = 1$ (от единичной силы).

Каждый интеграл вносит свой вклад в перемещение, но этот вклад различный. Если есть хоть один момент (изгибающий или крутящий), то влиянием первых трех слагаемых (от продольного усилия и от поперечных сил) можно пренебречь.

На практике не приходится рассчитывать все шесть интегралов.

При растяжении-сжатии используется только первый интеграл (в сечениях действует только продольное усилие N_x).

При кручении только шестой интеграл.

При плоском изгибе влиянием поперечной силы можно пренебречь, тогда в расчет включается только один пятый интеграл от изгибающего момента.

При сложном сопротивлении учитываются три интеграла от двух изгибающих моментов и крутящего момента.

Интеграл Мора можно использовать для определения перемещений как прямолинейных, так и криволинейных стержневых систем.

Поскольку интеграл Мора вычисляется по длине, для криволинейных стержней вместо dx в подынтегральном выражении используется элемент длины дуги $ds = \rho \cdot d\varphi$, где ρ — радиус кривизны стержня. Он может быть постоянным, а может быть функцией от угловой координаты φ .

Перепишем выражение (11.1) в общем виде, справедливом как для прямолинейных, так и для криволинейных стержней

$$\Delta = \sum_L \int \frac{N_F \bar{N} ds}{EA} + \sum k_y \int_L \frac{Q_{yF} \bar{Q}_y ds}{GA} + \sum k_z \int_L \frac{Q_{zF} \bar{Q}_z ds}{GA} + \sum_L \int \frac{M_{yF} \bar{M}_y ds}{EJ_y} + \sum_L \int \frac{M_{zF} \bar{M}_z ds}{EJ_z} + \sum_L \int \frac{M_{кF} \bar{M}_к ds}{GJ_к} \quad (11.1a),$$

где $ds = dx$ — для прямолинейных стержней и $ds = \rho \cdot d\varphi$ — для криволинейных стержней.

Пример вычисления интеграла Мора

Для консольной балки (рис. 11.2) найти прогиб посередине балки Δ_B и угол поворота конца балки θ_D

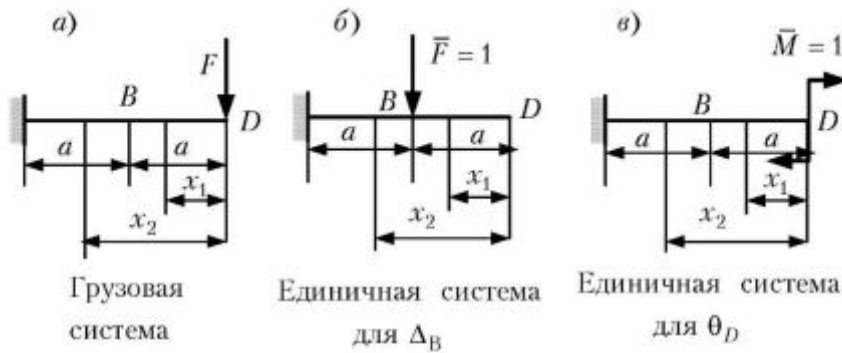


Рис. 11.2. Грузовая и единичные системы для вычисления перемещений консольной балки

Балку, нагруженную внешней силой F , будем называть *грузовой системой* (рис. 11.2, а). Нарисуем балку, нагруженную единичной силой в точке, где ищем перемещение. Назовем ее *единичной системой*. Поскольку ищем два перемещения, для каждого перемещения надо нарисовать свою единичную систему (рис. 11.2, б) и (рис. 11.2, в).

Для определения линейного перемещения единичную систему нагружают сосредоточенной единичной силой $\bar{F} = 1$, для определения угла поворота сечения единичную систему нагружают единичным моментом $\bar{M} = 1$.

Разобьем балку на два участка. Произвольные сечения на этих участках обозначим x_1 и x_2 . Запишем изгибающие моменты на каждом участке от внешних сил и от единичных сил

$$\begin{array}{ll}
 0 < x_1 < a & a < x_2 < 2a \\
 M_{F1} = F \cdot x_1 & M_{F2} = F \cdot x_2 \\
 \bar{M}_{11} = 0 & \bar{M}_{21} = 1(x_2 - a) \\
 \bar{M}_{12} = 1 & \bar{M}_{22} = 1
 \end{array}$$

Подставляем найденные выражения для изгибающих моментов под интеграл Мора

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \frac{M_{Fi} \bar{M}_{i1} dx}{EJ} = \int_0^a \frac{Fx_1 \cdot 0 \cdot dx_1}{EJ} + \int_a^{2a} \frac{Fx_2 \cdot 1x_2 \cdot dx_2}{EJ} = \frac{5 Fa^3}{6 EJ},$$

$$\theta_D = \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \frac{M_{Fi} \bar{M}_{i2} dx}{EJ} = \int_0^a \frac{Fx_1 \cdot 1 \cdot dx_1}{EJ} + \int_a^{2a} \frac{Fx_2 \cdot 1 \cdot dx_2}{EJ} = \frac{1 Fa^2}{2 EJ}$$

11.1.1. Определение перемещений в кривом брус

Для кривого бруса в форме четверти круга (рис. 11.3) найти горизонтальное перемещение точки А. Нарисуем вспомогательную единичную систему и нагрузим ее горизонтальной единичной силой в точке А.

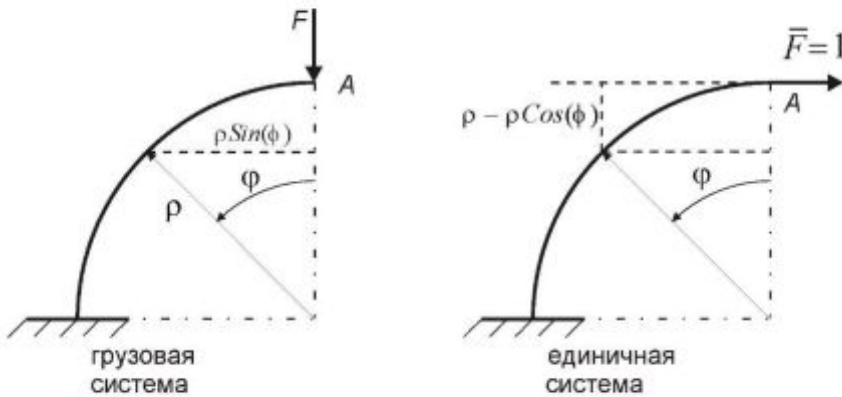


Рис. 11.3. Грузовая и единичная системы для вычисления перемещений кривого бруса

В полярной системе координат положение произвольного сечения характеризуется

радиусом-вектором ρ (в нашей задаче $\rho = Const$ — радиус круга) и углом φ от произвольно выбранной начальной точки дуги.

Изгибающие моменты от внешних сил $M_{F\varphi} = F \cdot \rho \cdot \sin(\varphi)$,

от единичной силы $\bar{M}_\varphi = 1 \cdot \rho \cdot (1 - \cos(\varphi))$.

Горизонтальное перемещение точки А

$$\Delta_{A\text{гор}} = \int_L \frac{M_{F\varphi} \bar{M}}{EJ} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{F \rho \sin(\varphi) \cdot 1 \rho (1 - \cos(\varphi))}{EJ} \rho d\varphi = \frac{F \rho^3}{2EJ}.$$

ВНИМАНИЕ

При вычислении интеграла Мора для криволинейных брусьев не забудьте дифференциал ds писать, как $ds = \rho d\varphi$. Если записать дифференциал просто $d\varphi$, это приведет к различным размерностям слагаемых для прямолинейных и для криволинейных участков одного и того же бруса и невозможности правильно определить перемещение.

11.1.2. Порядок определения перемещений с помощью интеграла Мора

1. Изобразить отдельно заданную систему, нагруженную всеми внешними силами (грузовую систему) и систему, нагруженную одной единственной единичной силой (единичная система).

Единичная система нагружается сосредоточенной силой $\bar{F} = 1$, если определяется линейное перемещение, и парой сил $\bar{M} = 1$, если определяется угловое перемещение.

Единичная сила $\bar{F} = 1$ или единичный момент $\bar{M} = 1$ прикладывается в точке, где ищем перемещение в направлении этого перемещения.

2. Определить, если нужно, опорные реакции отдельно для грузовой системы и для единичной системы с помощью уравнений равновесия.

Для балок и рам, заземленных одним концом, определение реакций в заделке нецелесообразно. В этом случае внутренние усилия определяют, рассматривая свободную (без заделки) часть балки или рамы, на которой известны все действующие силы.

3. Разбить заданную систему на участки и указать текущую координату в произвольном сечении каждого участка

Количество участков и их границы должны быть одинаковы для грузовой и единичной системы.

4. Для каждого участка записать внутренние усилия от внешних сил для грузовой системы и от единичной силы или момента для единичной системы.

Правило знаков для внутренних усилий может быть произвольным, но постоянным для рассматриваемой задачи, так как важен лишь знак произведения усилий.

Произведение усилий, например, $M_F \cdot \bar{M}$, положительное, если изгибающие моменты действуют в одном направлении, и отрицательное, если в разных.

5. определить искомое перемещение, используя интеграл Мора, например,

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \frac{M_{Fi} \bar{M}_i dx}{EJ}, \text{ где } n \text{ — число участков, на которые разбита система, } i \text{ — номер участка.}$$

Примеры вычисления перемещений с помощью интеграла Мора приведены в электронной книге в разделе [Для главы 11](#).

11.2 Метод сил

Метод сил и метод перемещений — основные методы, используемые в строительной механике для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций. При упругой деформации в выражении закона Гука

- в методе сил известны перемещения, надо найти нагрузки,
- в методе перемещений известны нагрузки, надо найти перемещения.

Метод перемещений более удобен при расчете конструкции методом конечных элементов. Метод сил проще при расчете вручную с использованием микрокалькулятора.

Метод перемещений не включается в основной курс сопротивления материалов, поскольку требует более глубоких знаний теории упругости и строительной механики. Основное уравнение метода перемещений приведено в разделе 21.3. Применение метода перемещений в методе конечных элементов показано в главах 22 – 24.

В сопротивлении материалов метод сил используется для раскрытия статической неопределенности стержневых систем.

11.2.1. Степень статической неопределенности

Прежде чем приступить к рассмотрению сущности метода сил, напомним, приведенное во введении (раздел 1.7) определение статической неопределенности.

Статически неопределимой называется система, в которой число неизвестных больше, чем число полезных уравнений равновесия.

Система на рисунке 11.4, а три раза статически неопределима. В ней неизвестных реакций 6 (по 3 в каждой заделке). Уравнений равновесия 3, как для всякой плоской системы. Степень статической неопределенности $6 - 3 = 3$. Для решения системы надо построить еще 3 дополнительных уравнения.

Степень статической неопределенности системы возрастает, если в системе есть замкнутые контуры.

Всякий плоский замкнутый контур три раза статически неопределим. Дополнительными неизвестными становятся внутренние усилия в сечениях контура: продольное усилие N , поперечная сила Q и изгибающий момент M .

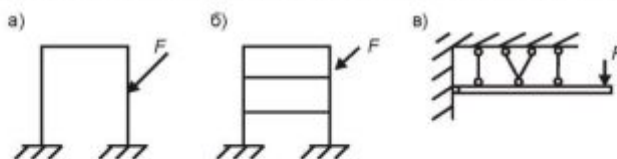


Рис. 11.4. Примеры статически неопределимых систем

Система на рисунке 11.4, б девять раз статически неопределима. В ней неизвестных реакций 6 (по 3 в каждой заделке) и два замкнутых контура по три дополнительных неизвестных в каждом контуре. Всего неизвестных сил $6 + 6 = 12$. Уравнений равновесия 3, как для всякой плоской системы. Степень статической неопределенности $12 - 3 = 9$. Для решения системы необходимы еще 9 дополнительных уравнений.

Степень статической неопределенности системы уменьшается, если в системе есть промежуточные (подвесные) шарниры.

Всякий подвесной шарнир дает дополнительное уравнение равновесия — равенство нулю изгибающего момента в шарнире, то есть равенство нулю суммы моментов всех сил, расположенных по одну сторону от шарнира, относительно шарнира. Если шарнирно соединены n стержней, то это можно считать наложением шарниров друг на друга. Такое шарнирное соединение стержней дает $n - 1$ дополнительное уравнение.

Система на рисунке 11.4, в три раза статически неопределима. В ней неизвестных реакций 10 (по 2 в каждой шарнирной опоре). Уравнений равновесия: 3 — как для всякой плоской системы и 4 дополнительных уравнения дают подвесные шарниры (1 — в шарнире В, 2 — в шарнире С, 1 — в шарнире D). Всего 7 уравнений равновесия. Степень статической неопределенности $10 - 7 = 3$. Для решения системы надо построить еще 3 дополнительных уравнения.

Нельзя ли проще определить степень статической неопределенности? Можно. В статически неопределимой системе отбрасывайте связи по одной до тех пор, пока система не превратится в механизм (что-нибудь упадет). Это не допустимо. Верните на место одну из отброшенных связей. Предельное состояние, когда система еще не механизм, — это статически определимая система. Все остальные отброшенные

связи считаются лишними. Число лишних отброшенных связей равно степени статической неопределимости системы. Проверьте это правило на приведенных примерах.

11.2.2. Перемещение от единичной силы (коэффициент податливости)

Рассмотрим прогиб консольной балки под действием приложенной на конце силы F (рис. 11.5, а).

$$\Delta = \frac{FL^3}{3EJ} = F \frac{1L^3}{3EJ} = F\delta,$$

где $\delta = \frac{1L^3}{3EJ}$ — перемещение от единичной силы.

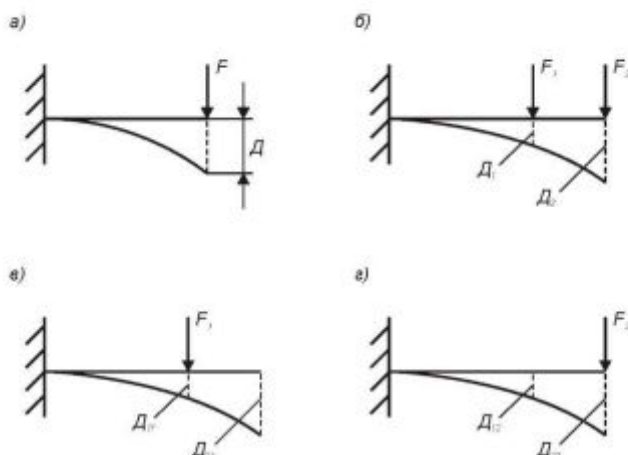


Рис. 11.5. К определению перемещений балки

Пусть на эту балку действуют две силы (рис. 11.5, б). Найдем прогибы балки в точках приложения каждой силы.

Согласно принципу независимости действия сил, прогиб балки от двух сил равен сумме прогибов балки от каждой силы в отдельности (рис. 11.5, в и 11.5, г)

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} = F_1\delta_{11} + F_2\delta_{12}$$

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} = F_1\delta_{21} + F_2\delta_{22}$$

Для системы n сил

$$\begin{cases} \Delta_1 = F_1\delta_{11} + F_2\delta_{12} + \dots + F_n\delta_{1n} \\ \Delta_2 = F_1\delta_{21} + F_2\delta_{22} + \dots + F_n\delta_{2n} \\ \dots \\ \Delta_n = F_1\delta_{n1} + F_2\delta_{n2} + \dots + F_n\delta_{nn} \end{cases} \quad (11.2),$$

где $\delta_{i,j}$ — коэффициент податливости — перемещение по направлению i от силы $F_j = 1$.

В общем виде формула (11.2) принимает вид

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n F_j \delta_{i,j}.$$

Выражение (11.2) представляет собой закон Гука для внешних сил. В матричном виде этот закон записан в разделе 21.3.

11.2.3. Канонические уравнения метода сил

СУЩНОСТЬ МЕТОДА СИЛ

Заданную статически неопределимую систему заменить статически определимой, ей эквивалентной, путем отбрасывания лишних связей и замены их неизвестными силами. Величину этих сил определяем из условий эквивалентности.

Две системы считаются *эквивалентными*, если напряжения, деформации и перемещения в них одинаковы.

Если системы упругие, для их эквивалентности достаточно, чтобы перемещения в них были одинаковы.

Реализацию описанной идеи рассмотрим на примере два раза статически неопределимой системы (рис. 11.6, а). Отбросим две связи (любые), система станет статически определимой. Назовем ее *основной системой*.

Из одной заданной системы можно получить несколько основных (статически определимых систем) путем отбрасывания разных связей. Выбранная основная система (рис. 11.6, б) обеспечивает более простое решение.

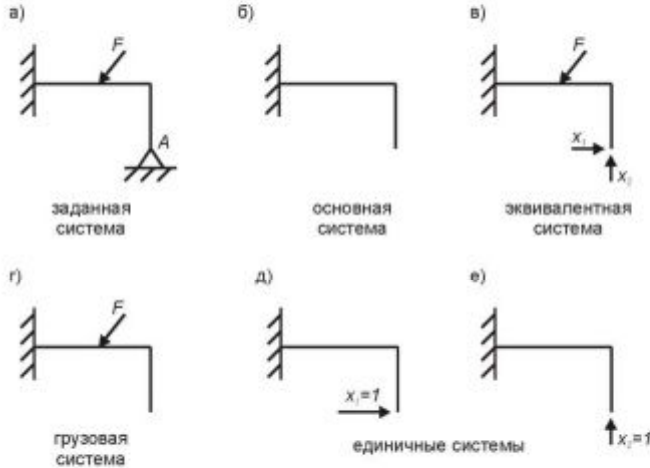


Рис. 11.6. Расчетные схемы, используемые в методе сил

Нагрузим основную систему всеми внешними силами, действие отброшенных связей заменим неизвестными силами X_1 и X_2 , получим эквивалентную систему (рис. 11.6, в).

На опоре A линейные перемещения равны нулю. Используем равенство нулю этих перемещений в качестве условий эквивалентности

$$\Delta_{A, \text{верт}} = 0$$

$$\Delta_{A, \text{гор}} = 0$$

Согласно принципу независимости действия сил и закона Гука (11.2)

$$\begin{aligned} \Delta_{A, \text{гор}} &= X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1F} = 0 \\ \Delta_{A, \text{верт}} &= X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2F} = 0 \end{aligned} \quad (11.3),$$

где $\Delta_{1F} = \sum_{k=1}^3 \int \frac{M_{F,k} \bar{M}_{1,k} dx}{EJ}$ и $\Delta_{2F} = \sum_{k=1}^3 \int \frac{M_{F,k} \bar{M}_{2,k} dx}{EJ}$ — перемещения по направлениям 1 и 2 от внешних сил,

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^3 \int \frac{\bar{M}_{1,k}^2 dx}{EJ} \quad \delta_{22} = \sum_{k=1}^3 \int \frac{\bar{M}_{2,k}^2 dx}{EJ} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{k=1}^3 \int \frac{\bar{M}_{1,k} \bar{M}_{2,k} dx}{EJ} \quad —$$

коэффициенты податливости, учитывающие только изгиб элементов рамы.

k — номер участка, $M_{F,k}$ — изгибающий момент от внешних сил на участке k , $\bar{M}_{1,k}$ и $\bar{M}_{2,k}$ — изгибающие моменты от единичных сил $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ на участке k .

Для определения указанных изгибающих моментов на рис. 11.6 нарисованы еще три системы: грузовая (рис. 11.6, г) и две единичные от силы $X_1 = 1$ (рис. 11.6, д) и от силы $X_2 = 1$ (рис. 11.6, е).

Решая систему уравнений (11.3) определяем неизвестные силы X_1 и X_2 . Статическая неопределимость раскрыта.

моментов в эквивалентной системе, найденные ранее.

11.2.4. Учет монтажных и температурных напряжений

При необходимости учета температурных или монтажных напряжений соответствующие слагаемые добавляются в канонические уравнения метода сил (11.4 и 11.5).

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n X_j \delta_{i,j} + \Delta_{i,F} + \Delta_{i,t} + \Delta_{i,\text{монт}} = 0.$$

здесь $\Delta_{i,t}$ и $\Delta_{i,\text{монт}}$ — перемещения точки приложения силы X_i в направлении этой силы соответственно от действия температуры и от монтажной погрешности при сборке конструкции, n — степень статической неопределенности.

$$\Delta_{i,t} = \sum_{k=1}^m \alpha \bar{L}_k \Delta t, \text{ где } \alpha \text{ — коэффициент температурного расширения материала}$$

стержней, Δt — приращение температуры, \bar{L}_k — расстояние от неподвижной точки до точки приложения силы X_j в направлении этой силы, $\Delta_{i,\text{монт}}$ — монтажная погрешность при сборке (задается). Определение температурного смещения точки приложения силы X_i должно быть тщательно продумано. Примеры учета воздействия изменения температуры и монтажных погрешностей приведены в электронной книге в разделе [Для главы 11](#).

11.2.5. Учет симметрии в методе сил

Степень статической неопределенности системы уменьшается в случае симметрии системы. Если система геометрически симметрична, но нет симметрии нагрузок (рис. 11.7, а), то в этом случае степень статической неопределенности не меняется. Система на рисунке 3 раза статически неопределима.

При наличии геометрической симметрии и симметрии нагружения различают системы *прямосимметричные* и *кососимметричные*.

Если при сложении половинок системы по геометрической оси симметрии, направления внешних сил совпадают, то такая система называется *прямосимметричной* (рис. 11.7, б), если направления внешних сил противоположны, то система называется *кососимметричной* (рис. 11.7, в).

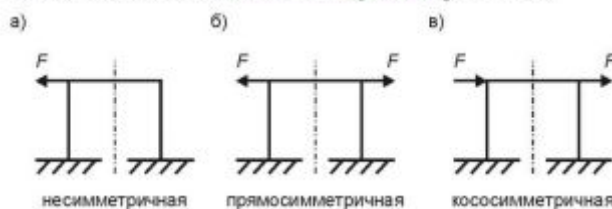


Рис. 11.7. Несимметричная, прямосимметричная и кососимметричная системы

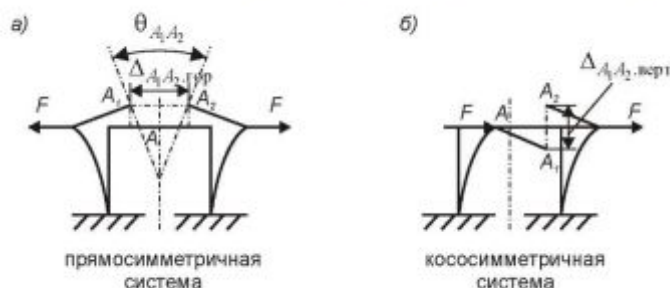


Рис. 11.8. Учет симметрии в методе сил

Прямосимметричную систему разрежем по оси симметрии и посмотрим на перемещения половинок системы (рис. 11.8, а). Точка A , лежащая на оси симметрии при этом превращается в две точки $A1$ и $A2$ соответственно на левой и правой половинах системы.

По вертикали точки $A1$ и $A2$ остаются на одном уровне $\Delta_{A1,A2,\text{верт}} = 0$, следовательно сила, стягивающая вместе две половинки в этом случае равна нулю $Q = 0$.

По горизонтали точки A_1 и A_2 разошлись, следовательно надо приложить горизонтальную силу, чтобы свести две половинки вместе $N \neq 0$.

Поперечные сечения в точках A_1 и A_2 развернулись друг относительно друга на некоторый угол $\theta_{A_1 A_2} \neq 0$. Чтобы этот угол был равен нулю, надо приложить пару сил $M \neq 0$.

Рассматриваемая прямосимметричная система стала два раза статически неопределимой. В качестве эквивалентной системы можно взять одну половину системы и в месте разреза приложить неизвестные силы $X_1 = N$ и $X_2 = M$.

Кососимметричную систему разрежем по оси симметрии и посмотрим на перемещения половинок системы (рис. 11.8, б).

По вертикали точки $A1$ и $A2$ расходятся $\Delta_{A_1 A_2 \text{ верт}} \neq 0$, следовательно необходима сила, стягивающая вместе две половинки $Q \neq 0$.

По горизонтали точки $A1$ и $A2$ находятся на одном уровне, следовательно горизонтальная сила, сводящая две половинки вместе равна нулю $N = 0$.

Поперечные сечения в точках $A1$ и $A2$ развернулись на один и тот же угол. Следовательно взаимный угол поворота сечений $\theta_{A_1 A_2} = 0$ и пара сил, сводящая две половинки вместе равна нулю $M = 0$. Рассматриваемая кососимметричная система стала один раз статически неопределимой. В качестве эквивалентной системы можно взять одну половину системы и в месте разреза приложить неизвестную силу $X_1 = Q$.

ПРАВИЛО

При разрезании системы по оси симметрии:

в прямосимметричной системе обращаются в нуль кососимметричные усилия (поперечная сила Q и крутящий момент M_K),

в кососимметричной системе обращаются в нуль прямосимметричные усилия (продольное усилие N и изгибающий момент M).

11.2.6. Проверка правильности решения системы

Если подставить найденные значения сил в канонические уравнения, то ответ должен быть равен нулю, то есть перемещения в местах раскрепления системы должны быть равны нулю.

Проверку желательно делать при другом раскреплении системы (для другой эквивалентной системы). Если определять перемещения в местах раскрепления первоначальной эквивалентной системы, то при этом проверяется лишь правильность решения системы канонических уравнений.

При выборе для проверки другой эквивалентной системы внутренние усилия в ней остаются такими же, как в первоначально взятой эквивалентной системе, а вот усилия от единичной силы становятся другими. Хотя единичная сила теперь прикладывается в другой точке раскрепления, текущие координаты x_j берутся также, как при раскрытии статической неопределимости. Это необходимо, чтобы использовать уже готовые выражения для эквивалентных моментов.

11.2.7. Порядок решения статически неопределимой задачи методом сил

- Изобразить основную статически определимую систему, полученную из заданной путем отбрасывания лишних связей.
- Изобразить систему, эквивалентную заданной, нагруженную всеми внешними силами и реакциями отброшенных связей.
- Изобразить грузовое и единичное состояние основной системы. Количество единичных состояний равно степени статической неопределимости заданной системы.
- Для каждого участка грузового и всех единичных состояний основной системы указать текущую координату для произвольного сечения (x — для прямолинейных и φ — для криволинейных участков).

- Найти опорные реакции отдельно для грузового состояния и всех единичных состояний. Если основная система закреплена одним концом, реакции в заделке можно не определять.
- Для произвольного сечения на каждом участке основной системы записать выражения для внутренних усилий (как правило, только для изгибающих и крутящих моментов) для грузового и всех единичных состояний.
- Записать систему канонических уравнений метода сил (11.4) для эквивалентной системы. Определить коэффициенты податливости (11.7) и перемещения от внешних сил (11.6), входящие в канонические уравнения. Решив систему канонических уравнений, определить все неизвестные силы.
- Последующие действия производятся с эквивалентной системой.
 - Найти внутренние усилия (11.8).
 - Определить необходимые перемещения. При этом в качестве усилий от внешних сил берутся усилия в эквивалентной системе. Единичное состояние основной системы соответствует искомому перемещению.
 - Произвести расчет на прочность с использованием условия прочности.

11.3. Определение перемещений систем из нескольких элементов

Энергетический метод позволяет определить перемещения любых упругих систем. Для систем, собранных из большого количества элементов сохраняется тот же порядок расчета, но общий объем расчетов многократно увеличивается.

Порядок расчета перемещений обычный для энергетического метода.

- Нарисовать грузовую и единичную системы. Единичную систему нагрузить единичной силой в точке, где ищем перемещение в направлении перемещения.
- Определить внутренние усилия в элементах системы для грузового и единичного состояния.
- Определить перемещение с помощью интеграла Мора.

Для определения внутренних усилий в элементах системы ее надо разобрать и рассмотреть силы, действующие на каждый элемент в отдельности.

В качестве примера рассмотрим перемещение плоской системы. Рассмотрим систему, состоящую из балок, связанных между собой стержнями и пружинами.

Вклад в общее перемещение изогнутых балок определяется по формуле

$$\Delta = \sum \int_L \frac{M_F \bar{M}}{EJ} dx.$$

Вклад в перемещение сжатых или растянутых стержней

$$\Delta = \sum \int_L \frac{N_F \bar{N}}{EA} dx.$$

В стержнях, соединяющих балки, продольное усилие постоянное $N = Const$ и может быть вынесено из под знака интеграла

$$\Delta = \sum \frac{N_F \bar{N}}{EA} L = \sum \frac{N_F \bar{N}}{K_{ст}},$$

где $K_{ст} = \frac{EA}{L}$ — жесткость стержня.

По аналогии для пружин, нагруженных осевой нагрузкой

$$\Delta = \frac{N_F \bar{N}}{K_{пр}},$$

Жесткость пружины $K_{пр}$ выбирается по справочникам при подборе пружины или рассчитывается.

пружины или рассчитывается.

ПРИМЕЧАНИЕ

В роли пружины может выступать "черный ящик", сложная конструкция, жесткость которой трудно рассчитать, но легко определить опытным путем. Достаточно

приложить известную нагрузку, чаще всего вес груза, и измерить перемещение по направлению действия нагрузки.

Формула для определения перемещения сложной системы принимает вид

$$\Delta = \sum \frac{N_F \bar{N}}{K_{ст}} + \frac{N_F \bar{N}}{K_{пр}} + \sum \int_L \frac{M_F \bar{M}}{EJ} dx \quad (11.9).$$

Определим перемещение системы, состоящей из двух балок, связанных пружиной и стержнем (рис. 11.9, а). Задана геометрия системы (длины участков, форма и размеры поперечных сечений, для пружины задана ее жесткость $K_{пр}$), материал, нагрузка F . Требуется определить угол поворота сечения балки на опоре D.

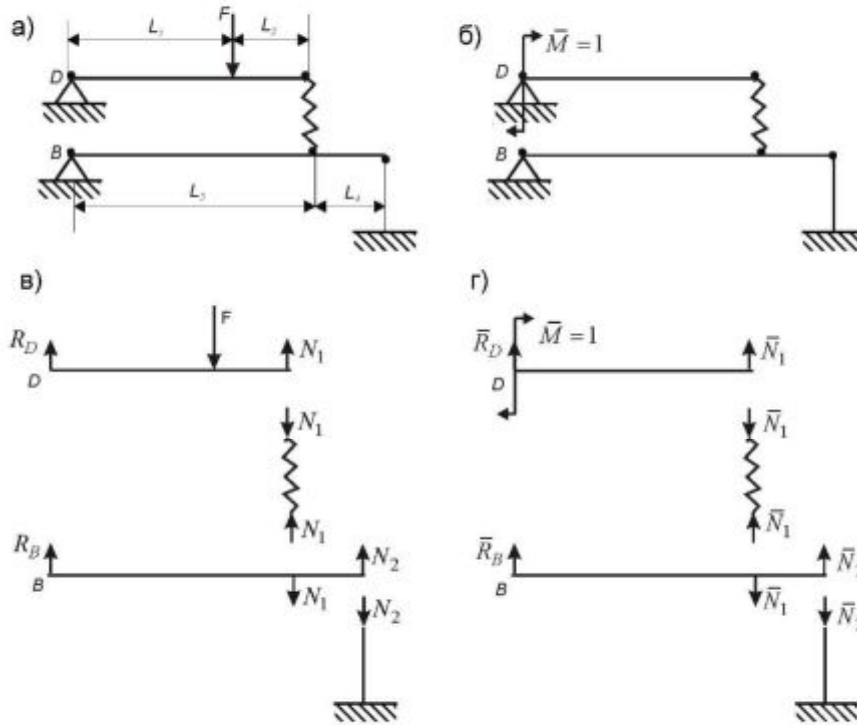


Рис. 11.9. Расчетные схемы для определения перемещения системы из нескольких элементов

Заданная система является грузовой (рис. 11.9, а). Для определения угла поворота на опоре D нарисована единичная система (рис. 11.9, б).

Для определения внутренних усилий разберем на отдельные элементы каждую из нарисованных систем (грузовую и единичную) и из уравнений равновесия каждого элемента определим внутренние усилия. Детализировка грузовой и единичной системы показана на рис. 11.9, в и г.

Из условия равновесия балок (верхней и нижней) найдем усилия N_1 и N_2 , действующие на пружину и стержень, а также опорные реакции. Далее запишем изгибающие моменты на всех четырех участках грузовой и единичной систем. Подставив выражения для найденных внутренних усилий в формулу (11.9), найдем угол поворота на опоре D. Подробное решение этой задачи приведено в электронной книге.

Таким же образом, разбивая систему на элементы, можно решить и статически неопределимую систему, но объем расчетов при этом значительно возрастет.

Глава 12. Устойчивость сжатых стержней

Под *механической устойчивостью* будем понимать способность тела сохранять заданную форму равновесия.

Потеря механической устойчивости — резкое изменение вида деформации. Приведем несколько примеров потери устойчивости.

На рисунке 12.1,а показана потеря устойчивости цилиндрической оболочки при сжатии. В момент потери устойчивости сжатие оболочки сменяется ее изгибом. Правда на практике чаще имеет место чашечная потеря устойчивости оболочек. Вспомните, как выглядит банка из-под пива, на которую наступили ногой.

На рисунке 12.1,б показан изгиб швеллера. При достижении критического значения изгибающей силы балка скручивается.

На рисунке 12.2 показано сжатие стержня. При некотором критическом значении сжимающей силы происходит изгиб стержня.

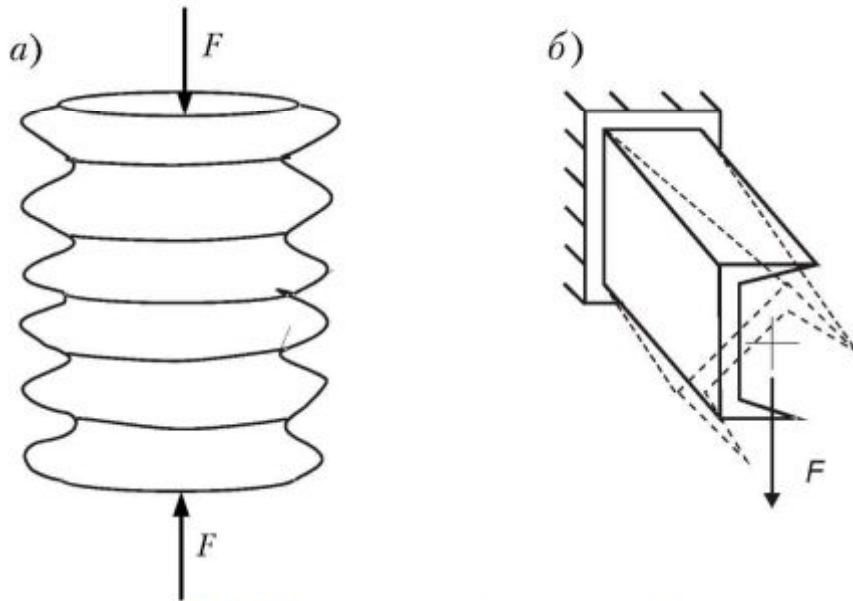


Рис 12.1. Примеры потери устойчивости конструкций

Критической называется минимальная нагрузка, при которой система теряет устойчивость.

Далее в этой главе рассмотрим только устойчивость сжатых стержней.

Нагрузим стержень сжимающей силой (рис. 12.2) меньше критической $F < F_{кр}$. Выведем стержень из состояния равновесия (подтолкнем в бок рукой). Уберем руку, стержень возвратится в состояние равновесия (изгиб исчезнет).

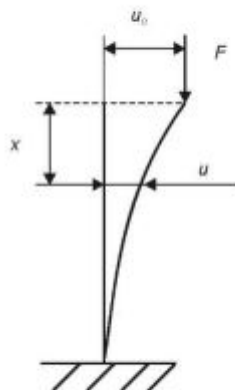


Рис 12.2. Потеря устойчивости сжатого стержня

При изгибе стержня возникает изгибающий момент $M_{внеш} = F(u_0 - u)$. Ему противодействует момент внутренних сил $M_{внут} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$.

Если $M_{изг} = M_{упр}$, то стержень находится в равновесии.

Если $M_{изг} > M_{упр}$, произойдет потеря устойчивости.

Если $M_{изг} < M_{упр}$, выведенный из равновесия стержень

возвращается в исходное прямолинейное состояние.

Поставим задачу определить критическую силу, при которой стержень теряет устойчивость.

12.1. Определение критической силы. Формула Эйлера

Рассмотрим стержень на двух шарнирных опорах, нагруженный сжимающей силой (рис. 12.3). При увеличении нагрузки в какой-то момент стержень теряет устойчивость и изгибается в направлении наименьшей жесткости J_{\min} .

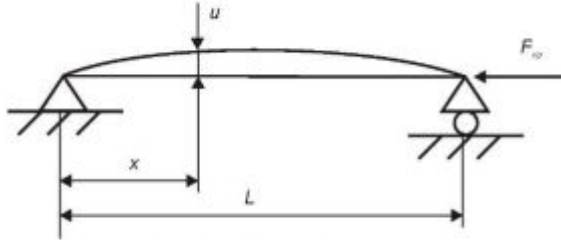


Рис. 12.3 Схема Эйлера потери устойчивости сжатого стержня

В разделе 7.1 получено выражение, связывающее изгибающий момент с кривизной балки,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_{\min}}.$$

Там же приведено выражения для кривизны стержня, взятое из

аналитическое геометрии
$$\frac{1}{\rho} = \frac{u''}{(1+(u')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Приравнивая два выражения для кривизны и пренебрегая первой производной от прогиба (углом поворота) по сравнению с единицей, получаем уравнение упругой линии балки (7.13)

$$EJ_{\min}u'' = M.$$

При $F = F_{\text{кр}}$ изгибающий момент в произвольном сечении стержня

$$M_z = -F_{\text{кр}}u.$$

Знак минус в выражении изгибающего момента поставлен для согласования знаков прогиба и его второй производной. На рис. 12.3 прогиб балки u положительный, а вторая производная отрицательная, так как функция имеет максимум. Если прогиб будет отрицательным, то функция будет иметь минимум, то есть вторая производная положительна.

Уравнение изогнутой оси стержня принимает вид

$$EJ_{\min}u'' = M = -F_{\text{кр}}u.$$

Приведем это уравнение к стандартному виду, разделив его на EJ_{\min}

$$u'' + \frac{F_{\text{кр}}}{EJ_{\min}}u = 0.$$

Введем $k = \sqrt{\frac{F_{\text{кр}}}{EJ_{\min}}}$ (12.1).

тогда уравнение примет стандартный вид

$$u'' + k^2u = 0 \quad (12.2).$$

Решение уравнения (12.2) ищем в виде

$$u = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx).$$

Произвольные постоянные интегрирования находим из граничных условий

При $x = 0$ $u_0 = 0$, следовательно $C_1 = 0$.

При $x = L$ $u_L = 0$. Тогда либо $C_2 = 0$, либо $\sin(kL) = 0$.

C_2 не может быть равно нулю, так как в этом случае не может быть потери устойчивости. Следовательно $\sin(kL) = 0$. Тогда $kL = \pi n$ и $k = \frac{\pi n}{L}$,

где n — любое целое число. Но n не может быть равно нулю по вышеуказанной причине. При $n = 1$ критическая сила минимальна и реально имеет место. На практике могут быть реализованы и другие значения $n > 1$, об этом будет сказано далее.

Приравняем ранее принятое значение k (12.1) и только что найденное

$$k = \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ_{min}}} = \frac{\pi n}{L}.$$

$$\text{Откуда} \quad F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{L^2} n^2 \quad (12.3).$$

Минимальному значению критической силы соответствует $n = 1$. Тогда формула Эйлера для определения критической силы принимает вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{L^2} \quad (12.4).$$

Рассмотренную схему нагружения стержня будем называть схема Эйлера.

Изогнутая ось стержня в схеме Эйлера представляет собой половину синусоиды

$u = C_2 \sin(kx)$. В этом выражении коэффициент C_2 не может быть определен из граничных условий. Поэтому максимальный прогиб стержня неопределенный.

Считается, что при достижении критической силы прогиб стержня возрастает до бесконечности, то есть стержень ломается.

В действительности этого не происходит. Причина в использовании приближенного выражения связи кривизны и прогиба. При использовании точного выражения

$$\frac{1}{\rho} = \frac{u''}{(1 + (u')^2)^{3/2}}$$

получается большое, но конечное значение прогиба.

12.2. Определение критической силы при других видах закрепления

Формула Эйлера может быть использована для определения критической силы и при других видах закрепления.

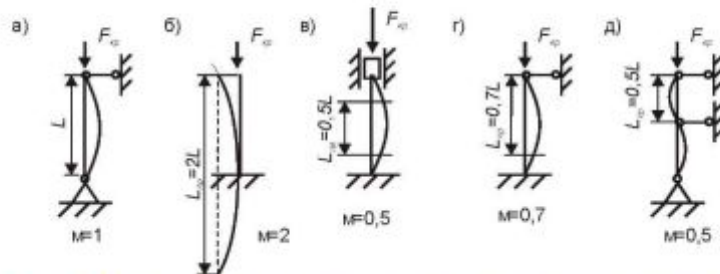


Рис. 12.4. Приведенная длина стержня при различных способах его закрепления

На рис. 12.4 показано несколько различных способов закрепления сжатого стержня. Для стержня, защемленного одним концом (рис. 12.4, б) изогнутая ось стержня в момент потери устойчивости представляет собой $1/4$ волны синусоиды.

Критическую силу для этого (и всех последующих случаев) найдем путем сравнения изогнутой оси стержня со схемой Эйлера (рис. 12.4, а).

Формула Эйлера выведена для случая, когда изогнутая ось стержня представляет собой половину синусоиды. В нашем случае $\frac{1}{4}$ волны. Введем понятие приведенной (к схеме Эйлера) длины стержня. Построим изогнутую ось стержня так, чтобы на ней уложилось половина синусоиды. Длина построенного стержня и есть приведенная длина $L_{пр} = \mu L$.

Определим критическую силу по формуле Эйлера, используя в качестве длины стержня его приведенную длину

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{L_{пр}^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu L)^2} \quad (12.5),$$

где μ — коэффициент закрепления стержня, показывающий во сколько раз надо увеличить длину стержня, чтобы на нем уложилось половина синусоиды.

На рис. 12.4, в и 12.4, г отмечено половина синусоиды на изогнутой оси стержня и записан коэффициент закрепления $\mu = 0,5$ и $\mu = 0,7$.

Кстати коэффициент n в выражении (12.3) соответствует числу половин на изогнутой оси стержня.

Если посередине стержня добавить связь, удерживающую стержень в исходном положении, то при потере устойчивости изогнутая ось стержня будет содержать две половины синусоиды, соответственно критическая сила возрастет в 4 раза, в то время как реакция добавленной связи практически равна нулю. Схема Эйлера с добавленной связью посередине показана на рис. 12.4, д. Эта схема соответствует $n = 2$ в выражении (12.4).

Чтобы изогнутая ось стержня содержала три половины синусоиды надо добавить две связи. Такая схема будет соответствовать $n = 3$. При этом критическая сила возрастет в 9 раз.

12.3. Критические напряжения

Поскольку мы рассматриваем устойчивость стержней при сжатии, то напряжения в момент потери устойчивости определяем по формуле сжатия $\sigma = \frac{F}{A}$.

В критическом состоянии

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu L)^2 A}.$$

Введем понятие гибкости стержня. Обозначим $\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}}$, где $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$ — минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня, и назовем коэффициент λ гибкостью стержня. Тогда формула критического напряжения примет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (12.6).$$

Итак, мы имеем две формулы Эйлера: формулу критической силы (12.5) и формулу критического напряжения (12.6).

Формулой Эйлера можно пользоваться только при упругой деформации, то есть в том случае, если критическое напряжение меньше предела пропорциональности материала $\sigma_{кр} < \sigma_{пл}$.

В основе вывода формулы Эйлера лежит уравнение упругой линии стержня. Ограничивает применение формулы также присутствие в ней модуля Юнга, коэффициента пропорциональности в законе Гука.

Анализируя формулу (12.6), отметим, что с уменьшением гибкости критическое напряжение возрастает, а гибкость уменьшается с уменьшением длины стержня. Чем короче стержень, тем больше критическое напряжение, при котором он теряет устойчивость.

Потерю устойчивости стержней в условиях пластических деформаций изучали многие ученые. Было предложено много различных формул для расчета критических напряжений. Все они имеют ограниченное применение.

Наибольшее распространение получила эмпирическая формула Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (12.7),$$

где a , b и c — эмпирические коэффициенты (для каждого материала свои), которые берутся по справочникам. Например, для стали ст3 $\sigma_{кр} = (310 - 1,14\lambda)$ МПа.

12.4. Расчет сжатых стержней на устойчивость

Рассмотрим диаграмму зависимости критического напряжения от гибкости стержня (рис. 12.5).

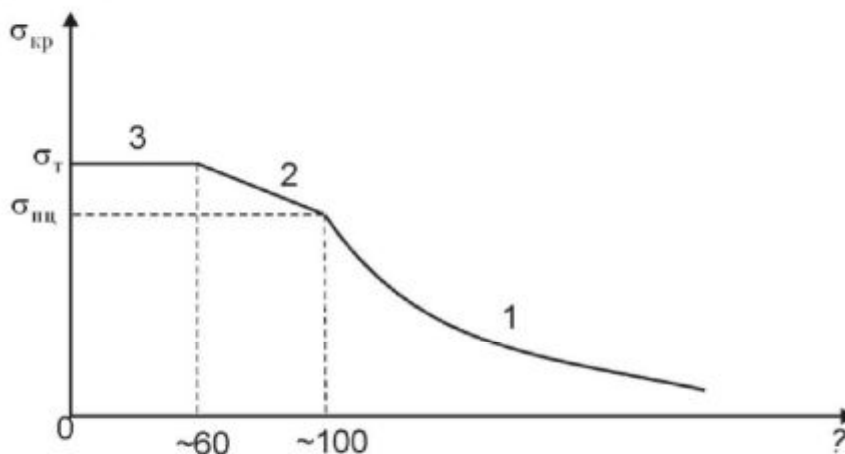


Рис. 12.5. Диаграмма зависимости критического напряжения от гибкости стержня

При большой гибкости (участок 1 на диаграмме) (для сталей $\lambda > 100$) критическое напряжение меньше предела пропорциональности $\sigma_{кр} < \sigma_{шц}$ и определяется по формуле Эйлера (12.6). Для стальных стержней круглого сечения для этого участка отношение длины стержня к диаметру $L/d > 25$.

Условие устойчивости стержня на этом участке имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{уст}] = \frac{\sigma_{кр.Эйлера}}{n_{уст}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 n_{уст}} \quad (12.8),$$

где $n_{уст}$ — коэффициент запаса устойчивости.

При средней гибкости (участок 2 на диаграмме) (для сталей $60 < \lambda < 100$) критическое напряжение лежит в диапазоне $\sigma_{шц} < \sigma_{кр} < \sigma_t$ и определяется по эмпирической формуле Ясинского. Для круглых стальных стержней на этом участке $15 < L/d < 25$.

Условие устойчивости стержня на этом участке имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{уст}] = \frac{\sigma_{кр.Ясинского}}{n_{уст}} = \frac{a - b\lambda + c\lambda^2}{n_{уст}} \quad (12.9),$$

При малой гибкости (участок 3 на диаграмме), ($\lambda < 60$) критическое напряжение уже превышает предел текучести и соответственно наибольшую опасность представляет появление недопустимых пластических деформаций, а не потеря устойчивости.

В этой области расчет ведется не по критическому напряжению, а по пределу текучести. Для этого участка диаграммы отношение $L/d < 15$.

Условие устойчивости стержня на этом участке имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{сж}] = \frac{\sigma_t}{n_t} \quad (12.10),$$

При расчете стержня на устойчивость прежде всего надо определить его гибкость, чтобы выбрать одно из трех условий устойчивости.

Существует однако *объединенное условие прочности и устойчивости*

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{уст}] = \varphi [\sigma_{стк}] \quad (12.11).$$

Здесь φ — коэффициент снижения допускаемых напряжений, определяемый по справочникам в зависимости от материала и от гибкости стержня λ .

Таблица коэффициентов $\varphi(\lambda)$ рассчитана по формулам Эйлера и Ясинского. График $\varphi(\lambda)$, построенный в Mathcad по данным указанной таблицы (электронная книга, раздел **Для главы 12**), очень похож на диаграмму критических напряжений (рис. 12.5) и также состоит из трех участков, соответствующих расчету на текучесть и на устойчивость по формулам Ясинского и Эйлера.

12.4.1. Примечания к расчету на устойчивость

1. Нерационально использовать длинные тонкие стержни с гибкостью $\lambda > 200$, так как при этом $\varphi \rightarrow 0$ и допускаемая нагрузка на стержень очень мала.
2. Нерационально использовать для сжатых стержней высокопрочные стали, так как модуль Юнга E , входящий в формулу критической силы, почти не зависит от прочности стали.
3. Рационально использовать составные сечения, у которых осевые моменты инерции равны $J_{\max} = J_{\min}$.

Для увеличения критической силы при той же площади сечения надо увеличить момент инерции сечения. С этой целью надо раздвинуть элементы сечения.

4. Сечения открытого профиля плохо работают на устойчивость. Если в трубе сделать продольный разрез, то критическая сила при сжатии такой трубы уменьшится раз в 100.

Если размеры стержня известны и требуется определить критическую силу, то расчет весьма прост. Надо определить гибкость стержня, по гибкости выбрать нужную формулу (Эйлера или Ясинского) и по ней рассчитать критическую силу, или по гибкости найти коэффициент снижения допускаемых напряжений и по нему определить допускаемую силу.

Если размеры сечения неизвестны, то расчет значительно сложнее. Не зная размеров сечения, невозможно найти гибкость стержня. В этом случае расчет ведется итерационным методом.

В первом приближении задаются коэффициентом снижения допускаемого напряжения φ_1 . Поскольку $0 < \varphi < 1$, лучше брать для первого приближения $\varphi_1 \approx 0,5$.

Зная коэффициент φ_1 из условия прочности определяется площадь поперечного сечения стержня $A = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma_{уст}]}$ и размеры сечения.

Далее определяются момент инерции J_{\min} и радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}.$$

Подсчитывается гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}}$.

По гибкости из справочника определяется коэффициент снижения допускаемого напряжения φ_2 и сравнивается с φ_1 , принятым в начале приближения.

Для второго приближения можно задаться коэффициентом $\varphi_1 = \varphi_2$, но в этом случае число итераций, необходимое для получения достоверного результата довольно велико. Расчет сходится значительно быстрее, если для второго приближения взять $\varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$. Для достижения погрешности в 1% достаточно

3–4 итераций. Пример подбора размеров поперечного сечения сжатого стержня

приведен в электронной книге.

12.5 Энергетический метод определения критической силы

Рассмотренный выше метод расчета на устойчивость предполагает знание гибкости стержня $\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}}$. Но в справочниках можно найти значения коэффициента μ лишь

для нескольких случаев закрепления стержней постоянного сечения. Для стержней переменного сечения невозможно найти критическую силу изложенным методом.

Энергетический метод позволяет приближенно определить критическую силу для стержней любого сечения и любого закрепления. Он основан на использовании начала возможных перемещений. Напомним его упрощенную формулировку.

НАЧАЛО ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Если тело находится в равновесии, то сумма работ внешних и внутренних сил равна нулю на любых возможных перемещениях.

Эта формулировка справедлива при упругой деформации системы. Перемещения, вызванные деформацией системы, всегда являются возможными.

Согласно этому принципу $W^{\text{внеш}} + W^{\text{внутр}} = 0$. При упругой деформации работа внутренних сил равна по модулю потенциальной энергии упругой деформации Π , которая не бывает отрицательной $|W^{\text{внутр}}| = \Pi$. Тогда $W^{\text{внеш}} = -W^{\text{внутр}} = \Pi$.

Подсчитаем отдельно работу внешних $W^{\text{внеш}}$ и внутренних сил $W^{\text{внутр}}$, равную потенциальной энергии упругой деформации.

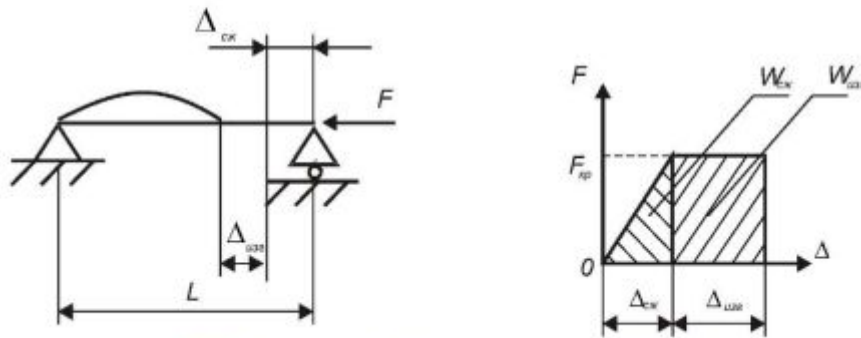


Рис. 12.6. Работа силы F при потере устойчивости стержня

На рис. 12.6 показана схема деформации стержня. Сжимающая сила F совершает работу на перемещении подвижной опоры. При постепенном увеличении нагрузки стержень деформируется упруго, оставаясь прямолинейным. На диаграмме $F - \Delta$ работа силы F на упругом перемещении опоры Δ равна площади треугольника.

При достижении критического значения сжимающей силы стержень изгибается при постоянной нагрузке $F = F_{\text{кр}}$. Работа изгиба равна площади прямоугольника на диаграмме $F - \Delta$.

Запишем равенство

$$W^{\text{внеш}} = W^{\text{сжат}} + W^{\text{изг}} = \Pi = \Pi^{\text{сжат}} + \Pi^{\text{изг}}.$$

Работа сжатия равна потенциальной энергии сжатия $W^{\text{сжат}} = \Pi^{\text{сжат}}$, соответственно $W^{\text{изг}} = \Pi^{\text{изг}}$. Раскроем это выражение

$$W^{\text{сжат}} = \frac{F_{\text{кр}} \cdot \Delta_{\text{сжат}}}{2} = \Pi^{\text{сжат}} = \int_l \frac{N^2 dx}{2EA}.$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = E \cdot \varepsilon = E \frac{\partial u_x}{\partial x} = E \cdot u'_x. \text{ Тогда } N = EAu'_x. \text{ С учетом этого}$$

$$W^{\text{сжат}} = \Pi^{\text{сжат}} = \frac{1}{2} \int_l EA(u'_x)^2 dx \quad (12.12).$$

Использованное здесь выражение $\varepsilon = \frac{\hat{c}u_x}{\hat{c}x}$ выводится в теории упругости (раздел 20.1.3).

При определении критической силы деформацию сжатия можно не учитывать, однако ее придется учитывать при решении задачи устойчивости стержневых систем методом конечных элементов.

Работа сжимающей силы при изгибе

$$W^{\text{см}} = F_{\text{кр}} \Delta_{\text{изг}}. \quad (12.13),$$

$$\text{Потенциальная энергия, накопленная при изгибе } \Pi^{\text{изг}} = \int_L \frac{M^2 dx}{2EJ}.$$

С учетом уравнения изогнутой оси балки при изгибе $EJ \frac{d^2 u}{dx^2} = M$, где u — прогиб стержня при изгибе, тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L EJ (u'')^2 dx \quad (12.14).$$

Подсчитаем перемещение подвижной опоры при изгибе Δ .

Вырежем элемент стержня длиной dx , которая в процессе изгиба не меняется, ведь $F_{\text{кр}} = \text{Const}$. Найдем сближение концов элемента при изгибе $d\Delta_{\text{изг}} = dx(1 - \text{Cos}(\theta))$, где θ — угол поворота элемента стержня при изгибе, равный углу поворота сечения.

Используем разложение $\text{Cos}(\theta)$ в ряд Тэйлора $\text{Cos}(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}$.

Включим в расчет только два первых слагаемых разложения $\text{Cos}(\theta)$ в ряд Тэйлора

$$d\Delta_{\text{изг}} \approx dx \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = dx \frac{\theta^2}{2}. \text{ Но угол поворота сечения равен производной от}$$

$$\text{прогиба (при малых перемещениях) } \theta \approx \frac{du}{dx} = u', \text{ тогда } d\Delta_{\text{изг}} \approx \frac{1}{2} (u')^2 dx.$$

Работа силы $F_{\text{кр}}$ при изгибе

$$W^{\text{см}} = F_{\text{кр}} \Delta_{\text{изг}} \approx \frac{1}{2} F_{\text{кр}} \int_L (u')^2 dx \quad (12.15).$$

Приравняв выражения (12.14) и (12.15), получаем формулу для определения критической силы энергетическим способом

$$F_{\text{кр}} = \frac{\int_L EJ (u'')^2 dx}{\int_L (u')^2 dx} \quad (12.16).$$

Эта формула называется *формулой Рэлея* для определения критической силы при продольном изгибе стержня.

Чтобы воспользоваться ею, надо задаваться формой изгиба $u(x)$. Чем точнее выбрана форма изогнутой оси стержня, тем точнее будет найдена критическая сила.

Если для схемы Эйлера задаться формой изогнутой оси в виде синусоиды, то значение критической силы, найденное по формуле Рэлея (12.16), совпадает со значением, найденным по формуле Эйлера (12.6).

Любая ошибка в выборе уравнения изогнутой оси стержня ведет к завышению

критической силы. Ведь отклонение изогнутой оси от своего естественного положения равносильно наложению дополнительных связей, что ведет к увеличению критической силы. Пример определения критической нагрузки с помощью формулы Рэлея приведен в электронной книге.

12.6 Продольно-поперечный изгиб

Иногда на практике встречаются случаи, когда сжатый стержень испытывает еще и действие поперечных нагрузок (рис. 12.7).

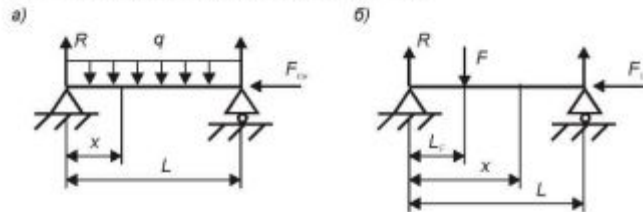


Рис. 12.7 Примеры продольно-поперечного изгиба стержней.

Если сжимающая нагрузка близка к критической, то действие даже небольшой поперечной нагрузки вызывает значительное увеличение прогиба стержня. Принцип независимости действия сил в этом случае не выполняется.

Такой вид деформации называется продольно-поперечным изгибом.

Определим прогиб стержня при продольно-поперечном изгибе.

Изгибающий момент в сечениях стержня складывается из суммы моментов $M_{\text{попер}}$ от поперечной силы $F_{\text{попер}}$ и момента $M_{\text{сж}}$ от продольной сжимающей силы $F_{\text{сж}}$

$$M = M_{\text{попер}} + M_{\text{сж}} = M_{\text{попер}} + F_{\text{сж}} u.$$

Если кривизна стержня сравнительно мала, то можно воспользоваться уравнением изогнутой (7.13) оси из раздела 7.4 $EJu''(x) = M$.

$$EJu''(x) + F_{\text{сж}} u = -M_{\text{попер}} \quad (12.17).$$

С учетом дифференциальных зависимостей $q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$

$$EJu''' + F_{\text{сж}} u' = q \quad (12.18).$$

Решая уравнения (12.17) или (12.18), определяем прогиб стержня при продольно-поперечном изгибе.

Зная прогиб стержня, можно определить изгибающий момент в сечениях стержня

$$M = EJu''.$$

Зная изгибающий момент и момент сопротивления сечения стержня можно определить максимальные напряжения в сечениях стержня

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W}.$$

Примеры расчета напряжений в стержнях при продольно-поперечном изгибе приведены в электронной книге.

Глава 13. Расчет тонкостенных оболочек

В общей постановке расчет оболочек — это исключительно сложный раздел строительной механики. В этой главе рассмотрим частный случай — тонкостенные осесимметричные оболочки. Для их расчета с помощью упрощающих расчет гипотез будут получены простые инженерные формулы.

Тонкостенные оболочки встречаются в технике повсюду. Это сосуды сжатого газа, резервуары жидкости, корпуса подводных лодок, ракет и самолетов.

Общей чертой таких оболочек является малая толщина стенки δ по сравнению с общими габаритами оболочки. Стенки таких сосудов испытывают под действием внутреннего или наружного давления двухстороннее растяжение или сжатие. По форме они представляют собой тела вращения.

13.1 Безмоментная теория тонкостенных оболочек

13.1.1. Гипотезы и допущения

1. Оболочка считается *тонкостенной* (рис.13.1), если отношение наименьшего радиуса кривизны ρ_{\min} к толщине стенки δ
$$\frac{\rho_{\min}}{\delta} > 20.$$

В этом случае погрешность расчета по полученным в этой главе формулам не превысит 5%.

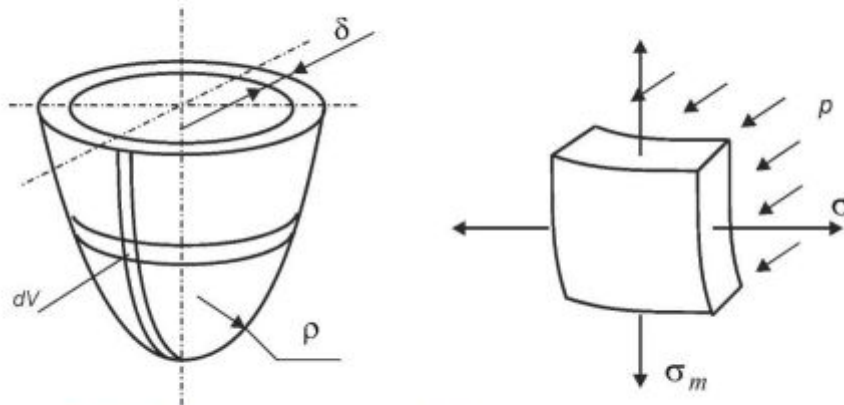


Рис. 13.1. Расчетная схема тонкостенной оболочки

2. Оболочка — осесимметричная, нагруженная внутренним или наружным давлением.

В этом случае напряжения в точках оболочки не зависят от угловой координаты.

3. Форма оболочки под давлением не меняется.

При вырезании элемента оболочки двумя меридиональными (вдоль образующих) и двумя коническими сечениями (перпендикулярными поверхности оболочки) форма вырезанного элемента также не меняется, меняются только размеры. Тогда касательные напряжения, которые вызывают изменение формы тела, на гранях элемента отсутствуют $\tau = 0$, а нормальные напряжения σ — главные (рис. 13.1).

Обозначим: σ_m — меридиональные напряжения (вдоль образующей оболочки), σ_t — тангенциальные (окружные) напряжения, σ_r — радиальные напряжения.

4. Радиальными напряжениями в оболочке пренебрегаем.

При внутреннем давлении p на внутренней поверхности оболочки $\sigma_r = p$, на наружной поверхности $\sigma_r = 0$ (рис. 13.2).

Как показывают практические расчеты, давление в тонкостенных оболочках, как правило, не превышает 10 атмосфер (1 МПа). При этом тангенциальные напряжения могут достигать величины $\sigma_t \approx 100$ МПа. Следовательно,

радиальными напряжениями σ_r можно пренебречь. В таком случае тонкостенная оболочка находится в плоском напряженном состоянии.

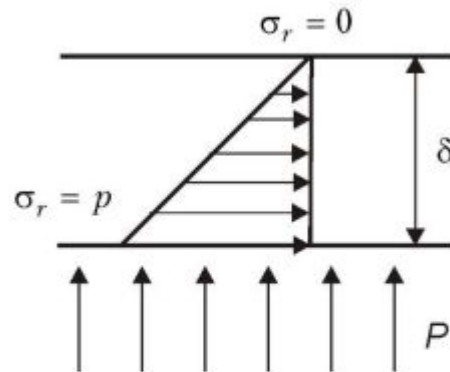


Рис.13.2. Распределение радиальных напряжений по толщине оболочки

5. Напряжения по толщине оболочки не меняются.

Если нормальные напряжения по толщине оболочки переменные, то результатом действия напряжений будут продольное усилие N и изгибающий момент M (рис. 13.3, а).

Поскольку оболочка тонкостенная, напряжения по толщине оболочки можно считать постоянными (рис.13.3, б). Результатом действия напряжений в этом случае будет только продольное усилие N , а изгибающий момент $M = 0$.

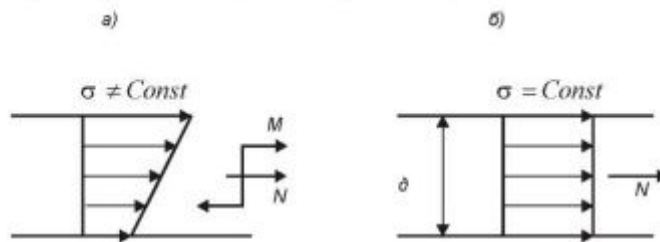


Рис. 13.3. Внутренние усилия в поперечных сечениях оболочки

Основанная на этом предположении теория называется *безмоментная* теория оболочек. Она значительно проще моментной теории и позволяет получить простые инженерные формулы для расчета тонкостенных оболочек.

13.1.2. Формула Лапласа

Рассмотрим равновесие элемента, вырезанного из оболочки двумя меридиональными и двумя коническими сечениями, перпендикулярными поверхности оболочки. На рис. 13.4 этот элемент изображен в трех проекциях.

На этом рисунке p — давление жидкости или газа в сосуде, $\rho_m, d\alpha_m, \sigma_m$ — соответственно радиус кривизны, угол охвата элемента и нормальное напряжение в меридиональном направлении; $\rho_t, d\alpha_t, \sigma_t$ — то же самое в тангенциальном направлении.

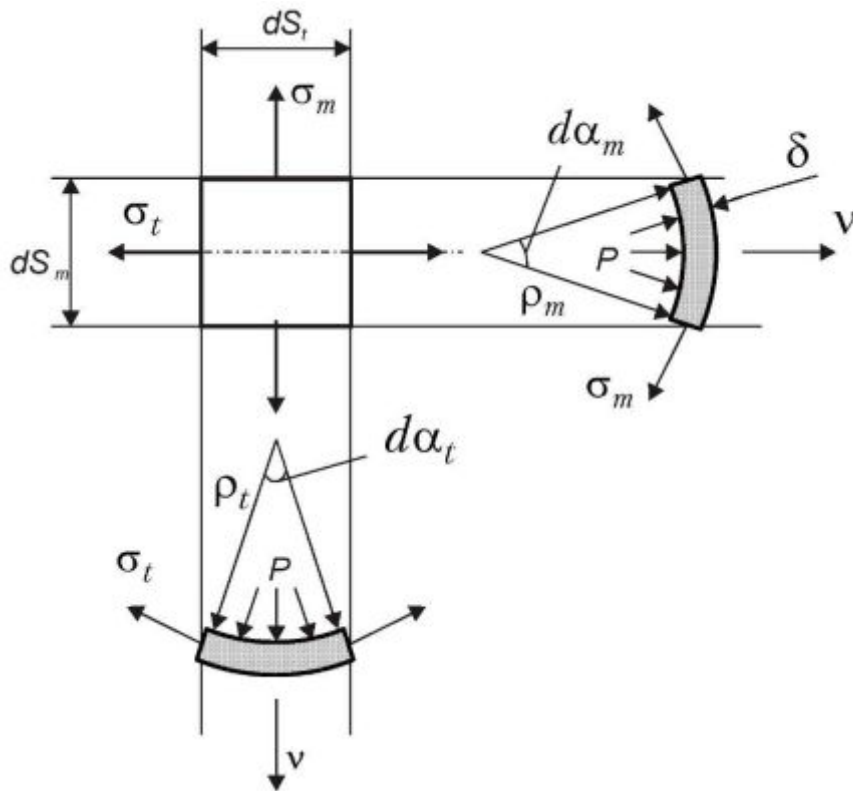


Рис. 13.4 Нагрузки, действующие на вырезанный элемент оболочки

Спроектируем все силы, действующие на элемент, на нормаль к поверхности элемента v .

$$\sum F_v = p dS_t dS_m - 2\sigma_t dS_m \delta \sin\left(\frac{d\alpha_m}{2}\right) - 2\sigma_m dS_t \delta \sin\left(\frac{d\alpha_t}{2}\right) = 0.$$

С учетом $\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \approx \frac{d\alpha}{2}$ и $dS = \rho d\alpha$ получаем

$$p \rho_t d\alpha_t \rho_m d\alpha_m = 2\sigma_t \rho_m d\alpha_m \delta \frac{d\alpha_t}{2} + 2\sigma_m \rho_t d\alpha_t \delta \frac{d\alpha_m}{2}.$$

Разделив это выражение на $\rho_m \rho_t \delta$ находим

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta} \quad (13.1).$$

Выражение (13.1) носит название формула Лапласа для тонкостенных оболочек.

В формуле Лапласа два неизвестных напряжения. Чтобы их найти необходимо второе уравнение. Составим уравнение равновесия части оболочки, отсеченной коническим сечением, перпендикулярным поверхности оболочки, на том уровне, где хотим определить напряжения (рис. 13.5).

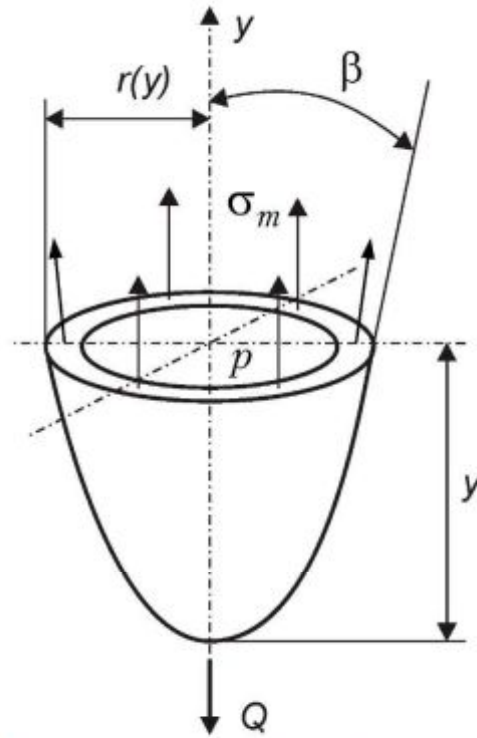


Рис. 13.5. Схема нагружения отсеченной части оболочки

Запишем сумму проекций на ось симметрии оболочки всех сил приложенных к отсеченной части оболочки

$$\sum F_y = \sigma_m 2\pi r \delta \cos(\beta) - p\pi r^2 - Q = 0.$$

Отсюда
$$\sigma_m = \frac{P+Q}{2\pi r \cos(\beta)} \quad (13.2),$$

Где P — проекция сил внутреннего или внешнего давления на ось симметрии оболочки, Q — вес отсеченной части оболочки.

Если сосуд находится под давлением газа, то $P = p\pi r^2$.

Если в сосуд налита жидкость, то P — вес столба жидкости, который давит на дно сосуда.

13.1.3. Частные случаи тонкостенных оболочек

Для всех тонкостенных оболочек принято $\sigma_r = 0$, поэтому для наиболее часто используемых в технике оболочек определим σ_t и σ_m .

Сферическая оболочка

В сферической оболочке (рис. 13.6, а) по симметрии $\rho_t = \rho_m = r$, где r — радиус сферы и $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$.

Из формулы Лапласа $\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}$ находим $2\frac{\sigma}{r} = \frac{p}{\delta}$.

Откуда

$$\sigma = \sigma_t = \sigma_m = \frac{pr}{2\delta} \quad (13.3).$$

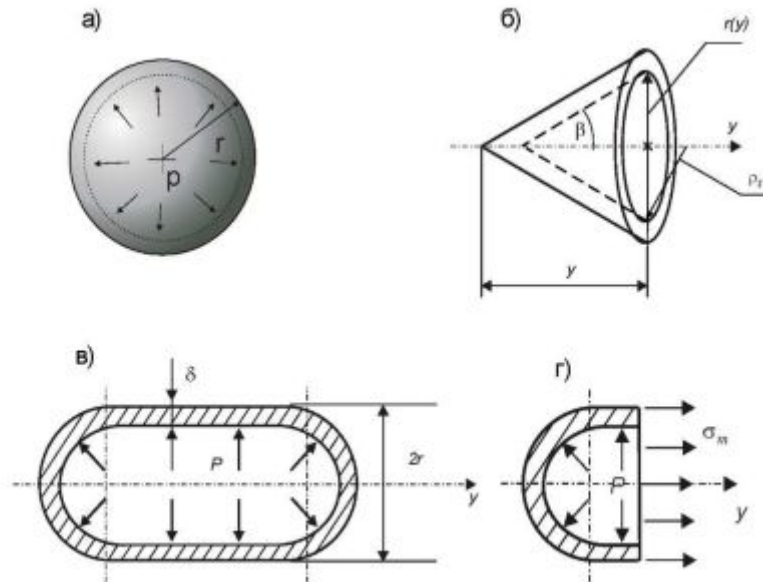


Рис. 13.6. Сферическая, цилиндрическая и коническая оболочки

Цилиндрическая оболочка

В цилиндрической оболочке (рис. 13.6, в) $\rho_m = \infty$ (образующая — прямая линия), $\rho_t = r$.

Тогда по формуле Лапласа
$$\frac{\sigma_t}{r} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{\delta}$$

$$\sigma_t = \frac{pr}{\delta} \quad (13.4).$$

Для определения меридионального напряжения σ_m рассмотрим равновесие отсеченной части цилиндра (рис. 13.6, г).

Откуда $\sum F_x = \sigma_m 2\pi r \delta - p\pi r^2 = 0$ и меридиональное напряжение

$$\sigma_m = \frac{pr}{2\delta} \quad (13.5).$$

Коническая оболочка

В конической оболочке (рис. 13.6, б) $\rho_m = \infty$, $\rho_t = \frac{r(y)}{\cos(\beta)}$, $r(y) = r_0 \frac{y}{L}$,

где L — длина конической части оболочки.

Тогда из формулы Лапласа

$$\sigma_t = \frac{pr(y)}{\delta \cos(\beta)} = \frac{pr_0}{\delta L \cos(\beta)} y \quad (13.6).$$

Меридиональное напряжение определяем из условия равновесия отсеченной части оболочки

$$\sum F_y = \sigma_m 2\pi r(y) \delta \cdot \cos(\beta) - F = 0,$$

где $F = \pi r(y)^2$ — сила давления газа, если сосуд находится под давлением сжатого газа, или

$$F = \gamma \pi \left((r(y))^2 \frac{y}{3} + (r(y))^2 (L - y) \right) — \text{вес столба жидкости, действующий на}$$

отсеченную часть оболочки, если в сосуд налита жидкость плотностью γ .

13.1.4. Расчет на прочность

Из выражений (13.1) и (13.2) определяем напряжения σ_t и σ_m . Поскольку оболочка находится в плоском напряженном состоянии, для условия прочности необходимо определить эквивалентные напряжения.

По третьей гипотезе $\max \sigma_{\text{экв3}} = \sigma_I - \sigma_{III} \leq [\sigma]$.

По четвертой гипотезе

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} \leq [\sigma].$$

Поскольку принято расставлять главные напряжения "по росту" $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, то $\sigma_I = \sigma_t$, $\sigma_{II} = \sigma_m$, $\sigma_{III} = \sigma_r = 0$.

Тогда по третьей гипотезе прочности

$$\max \sigma_{\text{экв3}} = \sigma_t \leq [\sigma] \quad (13.7),$$

По четвертой гипотезе прочности

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_m^2 - \sigma_t \sigma_m} \leq [\sigma] \quad (13.8).$$

Из условия прочности, подставив в него найденные значения напряжений, можно определить толщину оболочки при заданном давлении, либо давление для заданной оболочки.

13.2 Расчет распорного кольца

В местах резкого изменения формы оболочки появляется изгибающий момент. Для его компенсации ставят распорное кольцо, принимающее на себя дополнительную нагрузку.

Рассмотрим часть оболочки влево и вправо от места резкого изменения формы (рис. 13.7). Считаем, что левое и правое крайние сечения настолько близки, что радиус r обоих сечений одинаков.

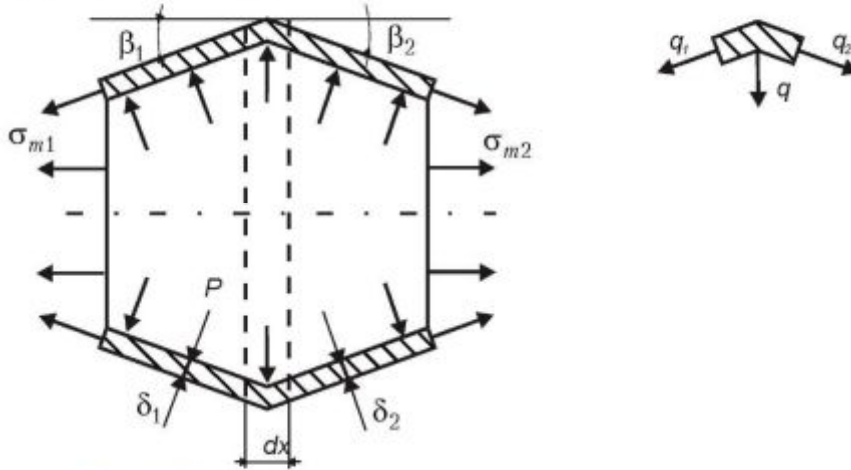


Рис. 13.7. Элемент оболочки с резким изменением ее формы

Составим уравнение равновесия вырезанной части оболочки.

$$\sum F_x = \sigma_{m1} 2\pi r \delta_1 \cos(\alpha_1) - \sigma_{m2} 2\pi r \delta_2 \cos(\alpha_2) = 0. \quad \text{Откуда}$$

$$\sigma_{m1} \delta_1 \cos(\alpha_1) = \sigma_{m2} \delta_2 \cos(\alpha_2).$$

Обозначим $q_1 = \sigma_{m1} \delta_1$ и $q_2 = \sigma_{m2} \delta_2$ — погонная нагрузка на единицу длины окружности. В результате действия q_1 и q_2 появляется радиальная нагрузка $q = q_1 \sin(\alpha_1) + q_2 \sin(\alpha_2)$, вызывающая изгиб оболочки.

Если p — внутреннее давление, нагрузка q направлена к центру оболочки (сжимает ее), если p — наружное давление, q направлена от центра оболочки.

Для разгрузки от радиальной нагрузки q ставят распорное кольцо (рис.13.8). В силу круговой симметрии нагружения, изгибающий момент в кольце отсутствует. При внутреннем давлении кольцо сжато, при наружном давлении растянуто. Из условия равновесия половинки кольца найдем продольное усилие в кольце

$$\sum F_y = 2N - q2r = 0. \text{ Откуда } N = qr.$$

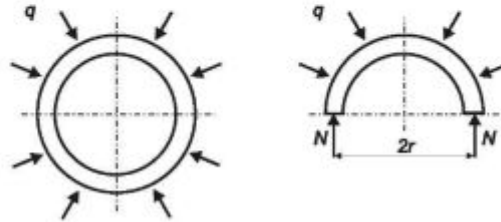


Рис.13.8. Схема нагружения распорного кольца

Из условия прочности найдем площадь поперечного сечения распорного кольца

$$\max \sigma = \frac{N}{A} = \frac{qr}{A} \leq [\sigma] \quad A \geq \frac{qr}{[\sigma]} \quad (13.9).$$

Технологически роль распорного кольца может выполнить отбортовка края оболочки, удваивающая толщину оболочки в месте сварки двух ее частей.

13.3 Деформация трубы под давлением

Определим изменение радиуса тонкостенной оболочки под давлением. Для этого запишем окружную (тангенциальную) деформацию оболочки, равную отношению изменению длины окружности,

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}.$$

С другой стороны из закона Гука

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_m - \mu\sigma_r).$$

Для цилиндрической оболочки при $\mu = 0,3$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\frac{pr}{\delta} - 0,3 \frac{pr}{2\delta} \right) = \frac{\Delta r}{r}. \quad (13.10).$$

Приращение радиуса $\Delta r = 0,85 \frac{pr^2}{E\delta}.$

13.4 Краевой эффект

Рассмотрим длинную цилиндрическую трубу, две части которой соединены жестким фланцем. Если бы фланцев не было, то под действием давления в трубе ее диаметр увеличился бы по всей длине одинаково. Но фланец жесткий. Его радиус не изменяется, поэтому вблизи фланца оболочка изгибается (рис. 13.9). Это явление носит название краевого эффект.

Для определения изгибающего момента рассмотрим деформацию узкой полоски, вырезанной вдоль образующей оболочки вблизи жесткого фланца (рис. 13.10, а).

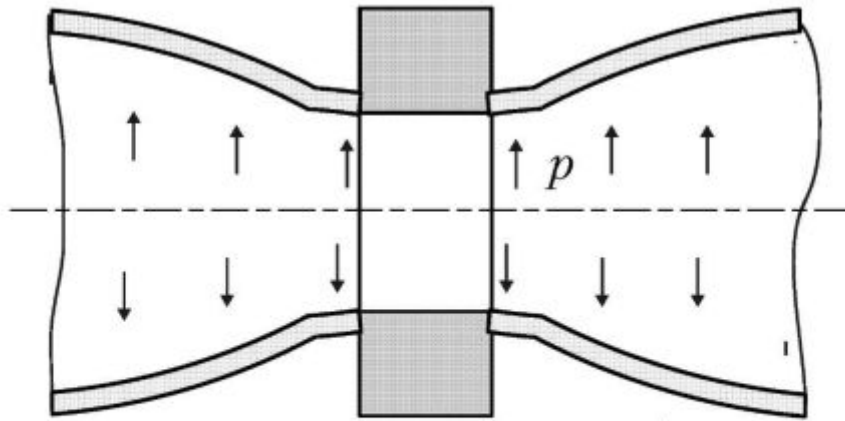


Рис. 13.9. Труба с жестким фланцем под давлением

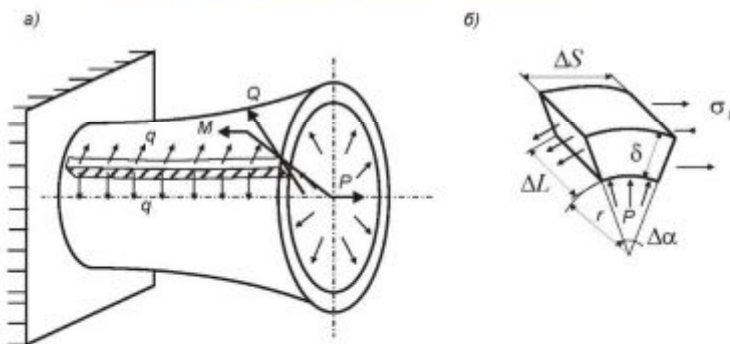


Рис. 13.10. К расчету краевого эффекта в цилиндрической оболочке

Со стороны оболочки на вырезанную полоску действуют усилия $\sigma_r \delta \cdot \Delta L$, которые играют роль упругой реакции. Определим погонную реакцию оболочки q на единицу длины оболочки $\Delta L = 1$ (рис. 13.10,б)

$$q = 2\sigma_r \delta \sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right).$$

Здесь окружное напряжение $\sigma_r = E\varepsilon_r = E\frac{u}{r}$, u — радиальное смещение
полоски единичной ширины $\Delta S = 1$, $\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{\Delta S}{2r} = \frac{1}{2r}$.

Погонная реакция оболочки

$$q = 2E\frac{u}{r}\delta\frac{1}{2r} = E\frac{u}{r^2}\delta.$$

Поскольку реакция оболочки линейно зависит от перемещения оболочки, рассматриваемую полоску можно рассматривать, как балку на упругом основании и использовать уравнение изогнутой оси такой балки (7.15)

$$u^{IV} + \frac{kb}{EJ_z}u = \frac{q}{EJ_z},$$

$$\text{где } k = \frac{\delta E}{r^2}, \quad J = \frac{\delta^3}{12}.$$

Решая это уравнение, определяем прогиб оболочки. Изгибающий момент пропорционален второй производной от прогиба $M = EJ_z u''$.

Решение этой задачи приведено в электронной книге.

Результаты расчета приведены на рис. 13.11. Вблизи жесткого фланца наблюдается резкий всплеск изгибающего момента и резкое уменьшение прогиба до нуля (краевой эффект). Размер зоны краевого эффекта мал.

При $\frac{r}{\delta} \approx 100$ $h \approx \frac{r_0}{4}$,

при $\frac{r_0}{\delta} \approx 20$ $h \approx \frac{r_0}{2}$,

при $\frac{r_0}{\delta} \approx 10$ $h \approx \frac{3}{4}r_0$.

Функции прогиба и изгибающего момента имеют волновой быстро затухающий характер. Амплитуда каждой последующей полуволны примерно в 10 раз меньше амплитуды волны предыдущей. На рис 13.11, слева изображены полные графики прогиба u и изгибающего момента M . Справа те же графики в увеличенном масштабе. При увеличении масштаба в 10 раз на графике появляется очередная полуволна.

Внизу рис. 13.11 приведен расчет максимальных напряжений в месте соединения оболочки с фланцем. Они в 3 раза превышают напряжения вдали от края оболочки.

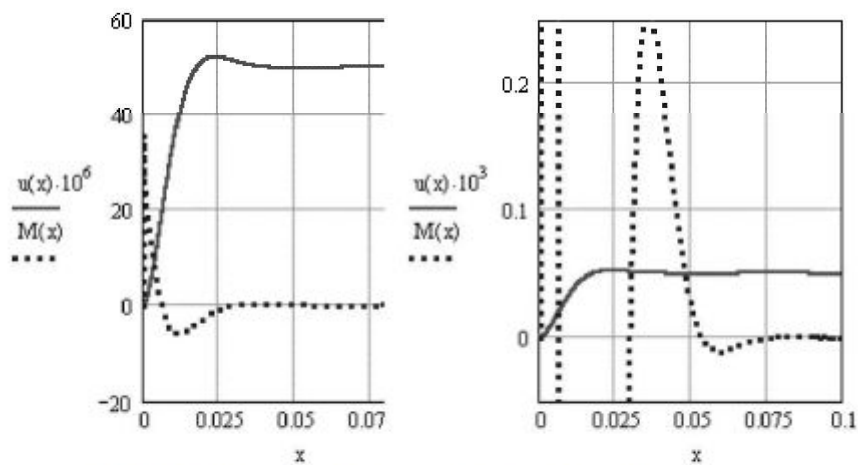


Рис. 13.11 Краевой эффект в оболочке с жестким фланцем

Следует отметить, что в этом расчете не учтено влияние меридионального напряжения σ_m , которое растягивает вырезанную из оболочки полосу. При этом поперечный размер полосы уменьшается, что эквивалентно уменьшению упругой реакции оболочки или, что то же самое, уменьшению давления в оболочке.

Учет меридионального напряжения несколько уменьшает краевой эффект, но не меняет характер краевого эффекта, что можно наблюдать в примере, приведенном в электронной книге.

Глава 14. Динамика упругих систем

Рассмотрим особенности динамического поведения конструкций.

1. Появление сил инерции и необходимость их учета при определении деформаций и напряжений.

В основе динамических расчетов лежит принцип Д'Аламбера. Согласно этому принципу движущееся тело можно рассматривать как находящееся в равновесии под действием внешних сил и сил инерции.

Динамическим считаем нагружение, при котором силы инерции сопоставимы со статическими нагрузками, или даже значительно превосходят их.

2. Учет сил сопротивления движению. Силы сопротивления движению тела уменьшают скорость движения, вызывают затухание колебаний. К силам сопротивления относятся

- сопротивление внешней среды (газа или жидкости) движению тела.

Сила сопротивления газа примерно пропорциональна скорости движения тела $R_{\text{сопр}} \propto V$,

сила сопротивления жидкости пропорциональна квадрату скорости (гидравлический тормоз) $R_{\text{сопр}} \propto V^2$.

- сила трения. Силу сухого трения в расчетах обычно берут постоянной $R_{\text{сопр}} \propto \text{Const}$.

- сила внутреннего трения пропорциональна скорости деформации тела $R_{\text{сопр}} \propto V$. Причина внутреннего трения — в микропластических деформациях, происходящих в микрочастицах металла.

3. Нагрузки, перемещения, деформации и напряжения зависят от времени.

14.1. Учет сил инерции при движении тела

При движении тела возникающие силы инерции рассматриваются как обычные внешние силы, действующие на тело. Силы инерции всегда противоположны ускорению тела. $F_{\text{ин}} = m \frac{d^2 u}{dt^2}$. При движении тела с постоянной скоростью силы инерции отсутствуют. При равноускоренном (равнозамедленном) движении сила инерции складывается с внешними силами (рис. 14.1).

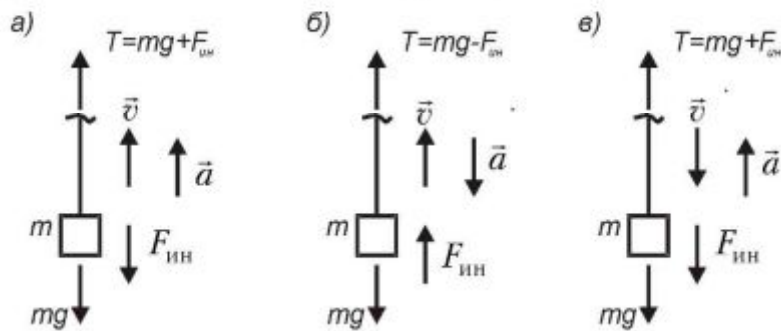


Рис. 14.1. Силы инерции при равноускоренном подъеме груза

Усилие в тросе при равноускоренном подъеме (рис. 14.1,а) (скорость направлена вверх, ускорение вверх, сила инерции противоположна ускорению) или равнозамедленном спуске (рис. 14.1,в)

$$N = Q + F_{\text{ин}} = mg + ma = mg \left(1 + \frac{a}{g} \right) = Q \cdot k_d,$$

где $k_d = 1 + \frac{a}{g}$ — коэффициент динамичности.

При упругой деформации, когда справедлив закон Гука, коэффициент динамичности k_d показывает во сколько раз нагрузки, перемещения, деформации и напряжения

возрастают по сравнению со статическим нагружением конструкции.

При равнозамедленном подъеме (рис. 14.1,б) или равноускоренном спуске

$$N = Q - F_{ин} = mg \left(1 - \frac{a}{g} \right) = Q \cdot k_A, \quad \text{где } k_A = 1 - \frac{a}{g}.$$

При вращении конструкции возникает центробежная сила. При вращении с постоянной угловой скоростью ω центробежная сила $F_{ц} = m\omega^2 R$, где R — радиус вращения (рис. 14.2).

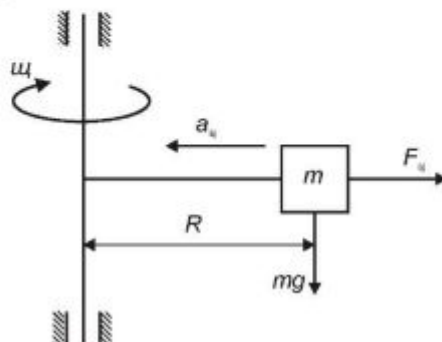


Рис. 14.2. Учет сил инерции при вращении системы

14.2. Колебания упругой системы

В этом разделе рассмотрим колебательное движение системы с одной степенью свободы.

Под степенью свободы понимаем число независимых координат, однозначно определяющих положение тела в пространстве.

Система с одной степенью свободы (рис. 14.3, а) — это система, вся масса которой сосредоточена в одной точке и перемещение происходит по одному направлению.

Если в системе три сосредоточенные массы, каждая из которых движется по одному направлению (рис. 14.3, б), — это система с тремя степенями свободы.

Если в системе одна масса, но надо учитывать два движения: поступательное и вращательное, — это система с двумя степенями свободы (рис. 14.3, в).

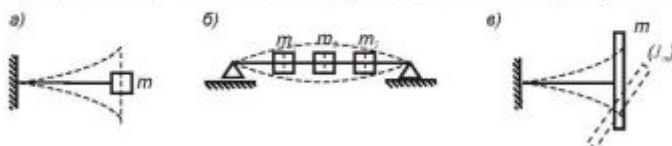


Рис. 14.3. Системы с различным числом степеней свободы

Если масса распределена по всему объему тела, то число степеней свободы такого тела бесконечно велико.

Далее в этой главе будем рассматривать лишь простейший случай колебательного движения системы с одной степенью свободы.

Если система имеет несколько степеней свободы, то сложность расчета многократно увеличивается и составлять сложные аналитические уравнения для решения задачи нерационально. Лучше воспользоваться методом конечных элементов, где число степеней свободы не имеет значения (Глава 24).

Примеры динамических расчетов методом конечных элементов на базе Mathcad приведены в электронной книге в разделе [Метод конечных элементов](#).

14.2.1. Уравнение движения системы с одной степенью свободы

Рассмотрим модель простейшей колебательной системы с одной степенью свободы. Каждое реальное тело можно представить как набор элементов, соединенных между собой последовательно или параллельно. Критерий правильности выбора модели поведения тела — совпадение или близость поведения реального тела и его модели.

В нашем случае модель (рис. 14.4) составлена из трех элементов: инерционного элемента (масса m), упругого элемента (пружина) с жесткостью k и демпфера с коэффициентом демпфирования d .

Рассечем модель произвольным сечением и рассмотрим равновесие отсеченной части под действием внешних и внутренних сил.

Внешними являются вынуждающая сила $F(t)$ и сила инерции $F_{ин} = m \frac{d^2 u}{dt^2}$, направленная противоположно ускорению движения системы.

Внутренними являются упругая сила пружины $F_{упр} = ku$ и сила сопротивления, вызванная внутренним трением между частицами тела $R_{сопр} = d \frac{du}{dt} = 2hm \frac{du}{dt}$.

Коэффициент демпфирования d в расчетах обычно заменяют величиной $2hm$, где h — коэффициент затухания колебаний. Такая форма записи более удобна при решении дифференциального уравнения движения тела.

Здесь и далее u — перемещение массы по направлению степени свободы тела.

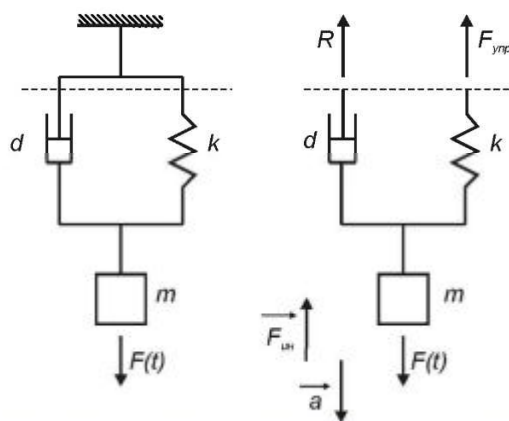


Рис. 14.4. Модель простейшей колебательной системы с одной степенью свободы

Запишем уравнение равновесия отсеченной части модели

$$\sum F_y = F_{ин} + R_{сопр} + F_{упр} - F(t) = 0.$$

Подставим аналитические выражения этих сил

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + 2hm \frac{du}{dt} + ku = F(t) \quad (14.1).$$

Полученное выражение (14.1) называется уравнением движения системы с одной степенью свободы. Решение этого уравнения рассматривается в курсе физики и в теоретической механике, поэтому здесь приведем лишь результаты его решения.

Представим уравнение в стандартном виде, разделив все его члены на m

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2h \frac{du}{dt} + \omega^2 u = \frac{F(t)}{m} \quad (14.2),$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — собственная частота колебаний тела.

Отметим частные случаи этого уравнения.

- Уравнение (14.1) описывает вынужденные затухающие колебания системы.
- Если $F(t) = 0$, то свободные затухающие колебания.
- Если $F(t) = 0$ и $h = 0$, то свободные незатухающие колебания.

Решение уравнения (14.1) складывается из общего решения дифференциального уравнения (без правой части) и частного решения, то есть $u = u_{общ} + u_{част}$.

14.2.2. Свободные затухающие колебания.

Частное решение равно нулю. Полное решение равно общему $u = u_{общ}$. Решение ищем в виде

$$u = e^{-ht} (C_1 \cos(\lambda t) + C_2 \sin(\lambda t)) \quad (14.3),$$

$$\text{или } u = A e^{-ht} \sin(\lambda t + \varepsilon) \quad (14.4),$$

где $\lambda = \sqrt{\omega^2 - h^2}$, где ω — собственная (круговая) частота колебаний системы, h — коэффициент затухания колебаний системы.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий.

При $t = 0$ 1) перемещение $u = u_0$, 2) скорость $\frac{du}{dt} = V_0$.

Тогда из первого условия $C_1 = u_0$.

Из второго условия

$$\frac{du}{dt} = -h e^{-ht} (C_1 \cos(\lambda t) + C_2 \sin(\lambda t)) + e^{-ht} (-C_1 \lambda \sin(\lambda t) + C_2 \lambda \cos(\lambda t)).$$

$$\text{При } t = 0 \quad V_0 = -h C_1 + C_2 \lambda, \quad C_2 = \frac{V_0 + h C_1}{\lambda} = \frac{V_0 + h u_0}{\lambda}.$$

$$\text{В уравнении (14.4)} \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \varepsilon = \arctg\left(\frac{C_1}{C_2}\right),$$

Или с учетом значений C_1 и C_2

$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{V_0 + h u_0}{\lambda}\right)^2} \quad \varepsilon = \arctg\left(\frac{u_0 \lambda}{V_0 + h u_0}\right) \quad (14.5).$$

На рис. 14.5 показаны графики затухающих $h \neq 0$ и незатухающих $h = 0$ колебаний, построенных по уравнению (14.4).

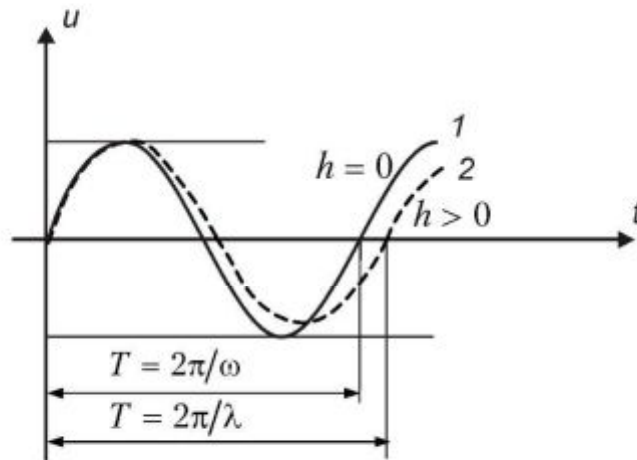


Рис. 14.5. Диаграммы затухающих (кривая 2) и незатухающих (кривая 1) колебаний

Период затухающих колебаний больше, чем период незатухающих колебаний. Из выражения $\lambda = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ следует, что $\lambda \leq \omega$.

Для оценки затухания колебаний введем $\frac{h}{\omega}$ — относительный коэффициент затухания.

По экспериментальным данным:

- Для стальных балок, где колебания затухают довольно медленно $\frac{h}{\omega} \approx 0,02$,
- Для автомобильного амортизатора, отличающегося быстрым затуханием

колебаний $\frac{h}{\omega} \approx 0,2$.

- В большинстве случаев $0,01 < \frac{h}{\omega} < 0,3$.

Сравним значения λ и ω при $\frac{h}{\omega} = 0,3$

$$\lambda = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{h}{\omega}\right)^2} = \omega \sqrt{1 - 0,09} = 0,95\omega, \text{ то есть } \lambda \approx \omega.$$

Для стальных конструкций $\frac{h}{\omega} \approx 0,02$ практически нет разницы между λ и ω .

Особым случаем являются гидравлические устройства. Для гидробуфера $\frac{h}{\omega} > 1$.

14.2.3. Опытное определение коэффициента затухания колебаний

Затухание колебаний оценивается логарифмическим декрементом

$$\delta = \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} \quad (14.6),$$

где u_i и u_{i+1} — амплитуда двух соседних пиков свободных затухающих колебаний (рис. 14.6).

Запишем отношение амплитуд колебаний с использованием выражения (14.4)

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = e^{\delta} = \frac{Ae^{-ht} \text{Sin}(\lambda t + \varepsilon)}{Ae^{-h(t+T)} \text{Sin}(\lambda(\tau+T) + \varepsilon)} = e^{hT},$$

где T — период колебаний. Тогда $\delta = hT = h \frac{2\pi}{\lambda}$. Откуда $h = \frac{\delta \lambda}{2\pi}$.

С учетом $\lambda \approx \omega$
$$\frac{h}{\omega} = \frac{\delta}{2\pi} \quad (14.7).$$

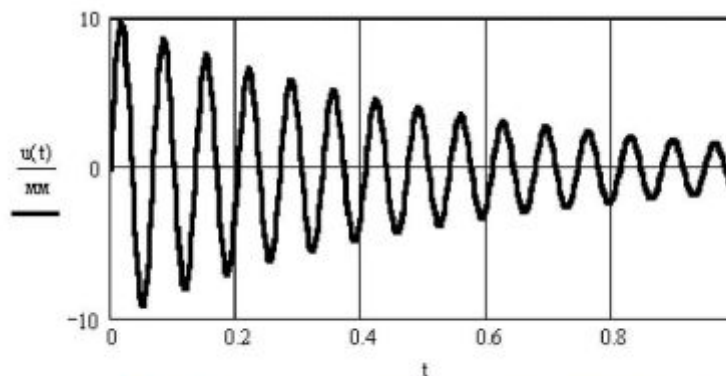


Рис. 14.6. Экспериментальная диаграмма затухающих колебаний

Для определения коэффициента затухания надо иметь график затухающих колебаний. Например, стукнуть кулаком по балке и записать изменение амплитуды колебаний на диаграмму или осциллограмму (рис. 14.6). Определить логарифмический декремент δ по формуле (14.6) и коэффициент затухания h/ω по формуле (14.7).

14.3. Определение собственной частоты системы с одной степенью свободы

Рассмотрим два варианта определения собственной частоты: без учета собственной массы системы и с учетом этой массы.

14.3.1. Без учета собственной массы системы

Для системы с одной степенью свободы собственная частота ω определяется по уравнению (14.2) как

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14.8),$$

где k — жесткость системы, m — сосредоточенная масса, собственной массой системы пренебрегаем (рис. 14.7).



Рис. 14.7. К расчету собственной частоты без учета массы системы

По закону Гука $\Delta = \delta \cdot F$ или $F = k \cdot \Delta$. Жесткость системы k величина, обратная податливости δ , а податливость — это статическое перемещение от единичной силы

$$\bar{F} = 1, \text{ определяемое чаще всего с помощью интеграла Мора } \delta_{11} = \sum \int_L \frac{\bar{M}^2 dS}{EJ}.$$

Для определения жесткости системы нагрузим ее сосредоточенной силой (любой), приложенной в точке, где находится сосредоточенная масса, в направлении перемещения точки в процессе колебаний.

По закону Гука $F = k\Delta_{\text{стат}}$, тогда $k = \frac{F}{\Delta_{\text{стат}}} = \frac{1}{\delta_{11}}$, где $\Delta_{\text{стат}}$ или δ_{11} определяются с помощью интеграла Мора.

Если при определении жесткости в качестве силы взять вес груза, формулу (14.8) можно упростить. Пусть $F = mg = k\Delta_{\text{стат}}$, тогда $k = \frac{mg}{\Delta_{\text{стат}}}$, где $\Delta_{\text{стат}}$ — перемещение от веса груза. Подставив k в формулу (14.8), получаем собственную (круговую) частоту системы

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{стат}}}} \quad (14.9),$$

где $\Delta_{\text{стат}}$ — вертикальное перемещение от веса сосредоточенной массы.

Зная круговую частоту ω , можно определить частоту колебаний f (герц) и период колебаний T

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{и} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (14.10).$$

14.3.2. С учетом собственной массы системы

Рассмотрим консольную балку массой m_0 с сосредоточенной массой m на конце балки (рис. 14.8). Если массу балки m_0 считать распределенной, система имеет бесконечное число степеней свободы.

Чтобы рассматривать ее как систему с одной степенью свободы, надо распределенную массу заменить сосредоточенной, приложенной в той же точке, что и масса m . Собственную частоту определим для системы с сосредоточенной массой $m + k_{\text{пр}}m_0$, где $k_{\text{пр}}$ — коэффициент приведения массы.

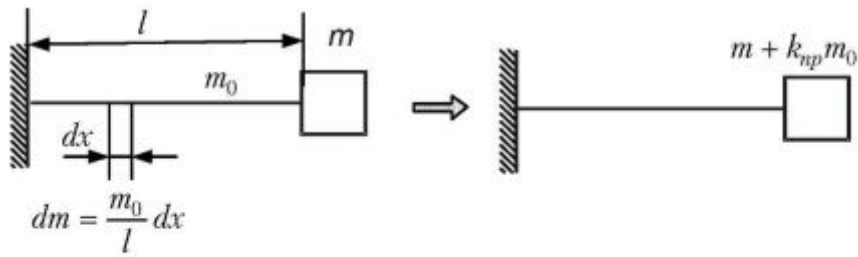


Рис. 14.8. К расчету собственной частоты с учетом массы системы

Условием приведения массы является равенство кинетических энергий систем с распределенной $T_{\text{распред}}$ и с сосредоточенной приведенной $T_{\text{сосред}}$ массой (в нашем случае балки с распределенной массой m_0 и балки с сосредоточенной массой $k_{\text{пр}}m_0$).

$$T_{\text{распред}} = \int_m \frac{dm V^2}{2} = \int_L \frac{m_0 dx \cdot V^2}{2L},$$

$$T_{\text{сосред}} = \frac{1}{2} k_{\text{пр}} m_0 V_0^2$$

Приравняв кинетические энергии $T_{\text{распред}} = T_{\text{сосред}}$, находим коэффициент приведения массы

$$k_{\text{пр}} = \frac{1}{m_0} \int_m \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 dm.$$

Распределение скоростей по длине балки неизвестно. Примем гипотезу:

распределение скоростей пропорционально распределению перемещений по длине балки.

Эта гипотеза справедлива для достаточно жестких тел при сравнительно малых собственных частотах (порядка первой собственной частоты). Тогда

$$\frac{V}{V_0} \approx \frac{\Delta}{\Delta_0} \text{ и коэффициент приведения массы примет вид}$$

$$k_{\text{пр}} = \frac{1}{m_0} \int_m \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^2 dm \quad (14.11).$$

В этих выражениях m_0 — масса балки, Δ и V — перемещение и скорость произвольной точки балки, Δ_0 и V_0 — скорость и перемещения точки приведения массы балки, $dm = \rho A(x) dx$.

Если сечение по длине балки постоянное $A = \text{Const}$, то $dm = \frac{m_0}{L} dx$ и коэффициент приведения массы примет вид

$$k_{\text{пр}} = \frac{1}{L} \int_L \left(\frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^2 dx \quad (14.12).$$

После приведения всех масс в одну точку получили систему с одной степенью свободы. Ее собственная частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + k_{\text{пр}}m_0}} \quad (14.13).$$

Если определить перемещение $\Delta_{\text{стат}}$ от веса груза, выражение для собственной частоты колебаний системы с учетом $k = \frac{mg}{\Delta_{\text{стат}}}$ примет вид

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{стат}}} \cdot \frac{m}{m + k_{\text{уп}} m_0}} \quad (14.14)$$

14.3.3. Крутильные колебания

При крутильных колебаниях роль массы m исполняет момент инерции массы J_m . Уравнение колебательного движения имеет вид

$$J_m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2hJ_m \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = M(t).$$

Здесь k — жесткость стержня при кручении. Жесткости при кручении и при изгибе — разные.

Решение этого уравнения аналогично решению уравнения (14.1). Соответственно подобным получается и выражение для круговой частоты ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{J_m + k_{\text{уп}} J_{m_0}}}.$$

14.3.4. Замечания к расчету собственных частот колебаний

В этом разделе рассматривается только определение собственной частоты системы с одной степенью свободы, как правило, для прямых стержней. Для рам и кривых брусьев движение точек в процессе колебаний происходит по сложным криволинейным траекториям и следует учитывать несколько степеней свободы. В этом случае расчет многократно усложняется.

Расчет колебаний систем с большим числом степеней свободы лучше всего производить с использованием метода конечных элементов, как описано в главе 24. Примеры динамических расчетов методом конечных элементов приводятся в электронной книге в разделе [Метод конечных элементов](#). Для различных случаев колебания двух-трех массовых систем готовые формулы для определения собственных частот можно найти в справочниках.

Следует иметь в виду, что от того, что мы решили рассмотреть балку, как систему с одной степенью свободы, она не перестала быть системой с бесконечным числом степеней и с бесконечным количеством собственных частот.

На рис. 14.9 приведены формы колебания на первых трех собственных частотах консольной балки. Собственные частоты ω_i и максимальные амплитуды колебаний A_i приведены для линейки из оргстекла длиной 0,5 м. Заметим, что никакой кратности собственных частот не наблюдается. Амплитуда колебаний максимальна для первой (нижней) собственной частоты. Для второй уже в три раза меньше, для третьей в 10 раз меньше, чем для первой. Для четвертой собственной частоты амплитуда исчезающе мала. Если дотронуться рукой можно ощутить дрожание линейки, но померить амплитуду колебаний уже нельзя.

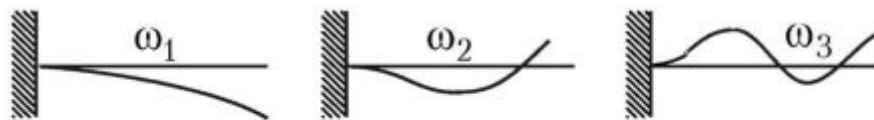


Рис. 14.9. Формы колебания консольной балки

Наибольшие деформации и напряжения в любой системе возникают при резонансе на первой собственной частоте, поэтому для расчета на прочность важно знать именно первую (нижнюю) собственную частоту.

Формулы (14.8) и (14.13) можно использовать и при расчете рам для определения первой собственной частоты. При этом ошибка может быть довольно большой.

Не следует забывать, что расчеты на прочность вообще не отличаются высокой точностью. Какими бы точными не были расчетные формулы, ошибка в определении механических свойств материала и в выборе коэффициента запаса, необходимость учета вероятности разрушения не позволяют достигнуть высокой точности расчета.

Ориентировочно можно определить и первую собственную частоту сложной конструкции. Допустим: перед вами "черный ящик" — сложная конструкция с исполнительным органом-рычагом. Для оценки его собственной частоты определим жесткость конструкции. Подвесим на рычаг любой груз весом F и измерим

перемещение $\Delta_{\text{стат}}$ под действием этого груза. Тогда жесткость $k = \frac{F}{\Delta_{\text{стат}}}$. По формуле (14.8) определяем ориентировочную низшую собственную частоту конструкции.

Частота колебаний исполнительного органа при эксплуатации не должна приближаться к собственной частоте колебаний конструкции. Если простейший расчет по формуле (14.8) показывает близость таких частот, надо изменить жесткость системы или ее массу.

Порой достаточно положить на раму мешок с песком, чтобы резко уменьшить собственную частоту конструкции, или приварить какую-нибудь перекладину, чтобы увеличить жесткость и собственную частоту.

14.4. Ударная нагрузка

Действие на систему с одной степенью свободы ударной нагрузки рассмотрим как частный случай колебаний.

Далее излагается приближенная теория удара, основанная на ряде упрощающих расчет допущений.

- Ударяющее тело абсолютно жесткое.
- Удар происходит без отскока, то есть практически ударяющее тело прилипает к ударяемому.
- Справедлив закон Гука. Пластических деформаций нет
- Не учитывается волновой характер удара.

Есть некоторые особенности в рассмотрении вертикального, горизонтального и крутящего удара.

14.4.1. Вертикальный удар

Пусть на горизонтальную балку падает с высоты H груз массой m (рис. 14.10). Максимальное перемещение точки соударения при ударе обозначим $\Delta_{\text{дин}}$.

После удара начинается совместное колебательное движение системы груз-балка. Перемещение точки соударения u во времени показано справа на рис. 14.9.

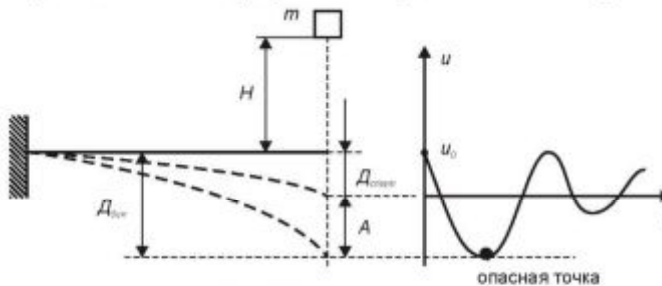


Рис. 14.10. Перемещения при вертикальном ударе

Колебания — затухающие. После остановки колебаний точка соударения займет положение $\Delta_{\text{стат}}$, соответствующее статической нагрузке $Q = mg$. Это положение примем за нуль отсчета перемещений u . Тогда при $t = 0$ $u_0 = \Delta_{\text{стат}}$.

При затухающих колебаниях максимальная амплитуда колебаний достигается в первом полупериоде. Соответственно в этот момент динамические напряжения в балке будут наибольшие. Дальнейшие колебания можно не учитывать. Такой процесс называют квазистатическим.

Затуханием колебаний в этом процессе можно пренебречь. Коэффициент затухания колебаний в дальнейших расчетах полагаем равным нулю $h = 0$.

Динамическое перемещение точки соударения представим как сумму статического перемещения $\Delta_{\text{стат}}$ и амплитуды колебаний A

$$\Delta_{\text{дин}} = \Delta_{\text{стат}} + A$$

По формуле (14.5)

$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{V_0 + hu_0}{\lambda}\right)^2}.$$

С учетом $u_0 = \Delta_{\text{стат}}$ и $\lambda \approx \omega$

$$\Delta_{\text{дин}} = \Delta_{\text{стат}} + \sqrt{\Delta_{\text{стат}}^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}} \quad (14.14).$$

В этом выражении V_0 — скорость движения системы груз-балка в начальный момент колебаний. Для ее нахождения воспользуемся теоремой о количестве движения.

$$mV = (m + k_{\text{пр}}m_0)V_0.$$

Здесь mV — количество движения падающего груза перед ударом,

$(m + k_{\text{пр}}m_0)V_0$ — количество движения системы груз-балка в момент начала колебаний. Тогда

$$V_0 = \frac{mV}{m + k_{\text{пр}}m_0} \quad (14.15).$$

Подставим выражения V_0 (14.15) и ω (14.13) в выражение $\Delta_{\text{дин}}$ (14.14)

$$\Delta_{\text{дин}} = \Delta_{\text{стат}} + \sqrt{\Delta_{\text{стат}}^2 + \frac{m^2V^2\Delta_{\text{стат}}(m + k_{\text{пр}}m_0)}{(m + k_{\text{пр}}m_0)^2 gm}}.$$

После упрощения получаем

$$\Delta_{\text{дин}} = k_d \Delta_{\text{стат}} = \Delta_{\text{стат}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{\text{стат}}} \cdot \frac{m}{m + k_{\text{пр}}m_0}} \right).$$

В этом выражении

$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{\text{стат}}} \cdot \frac{m}{m + k_{\text{пр}}m_0}}$ — коэффициент динамичности, показывающий во сколько раз динамические перемещения больше статических.

Выразим скорость движения груза V через высоту его падения H

$V = \sqrt{2gH}$. Тогда формула для коэффициента динамичности k_d примет вид

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{\text{стат}}} \cdot \frac{m}{m + k_{\text{пр}}m_0}} \quad (14.16).$$

Поскольку деформации при ударе считаем упругими, то напряжения пропорциональны перемещениям и возрастают при ударе во столько же раз, что и перемещения

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{дин}} &= k_d \Delta_{\text{стат}} \\ \sigma_{\text{дин}} &= k_d \sigma_{\text{стат}} \end{aligned} \quad (14.17).$$

14.4.2. Горизонтальный удар

Рассмотрим вертикальную балку, в которую ударяется груз массой m , движущийся горизонтально (рис. 14.11).

После совместного колебания система груз-балка останавливается в положении $\Delta_{\text{стат}} = 0$. Поэтому динамическое перемещение точки соударения равно максимальной амплитуде колебаний $\Delta_{\text{дин}} = A$. Тогда выражение (14.14) примет вид

$$\Delta_{\text{дин}} = \sqrt{\frac{V^2}{\omega^2}}$$

Подставим выражения V_0 (14.15) и ω (14.13) в выражение $\Delta_{\text{дин}}$ получаем

$$\Delta_{\text{дин}} = \Delta_{\text{стат}} \sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{\text{стат}}} \cdot \frac{m}{m + k_{\text{вр}}m_0}}$$

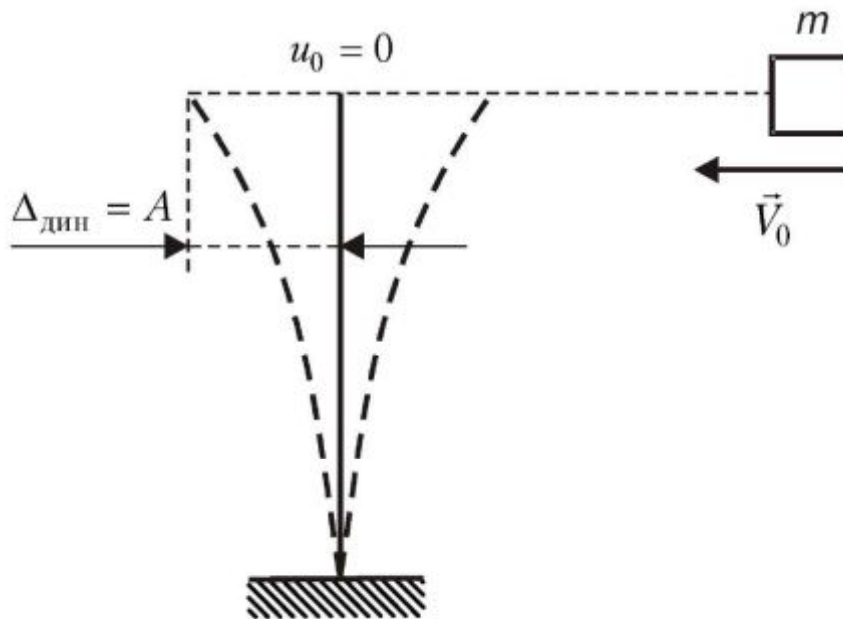


Рис. 14.11. Перемещения при горизонтальном ударе

Окончательно для расчета при горизонтальном ударе получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{дин}} &= k_d \Delta_{\text{стат}} \\ \sigma_{\text{дин}} &= k_d \sigma_{\text{стат}} \end{aligned} \quad \text{и} \quad k_d = \sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{\text{стат}}} \cdot \frac{m}{m + k_{\text{вр}}m_0}} \quad (14.18).$$

14.4.3. Крутящий удар

При крутящем ударе нет понятия коэффициент динамичности, так как энергию вращающегося тела нельзя связать с какой-либо статической нагрузкой. В такой задаче надо использовать закон сохранения энергии $T = \Pi$. Кинетическая энергия ударяющего тела T равна потенциальной энергии упругой деформации Π системы тел (ударяющего и ударяемого).

Общей формулы для решения задач на крутящий удар нет.

Рассмотрим резкое торможение вращающегося вала с маховиком (рис. 14.12).

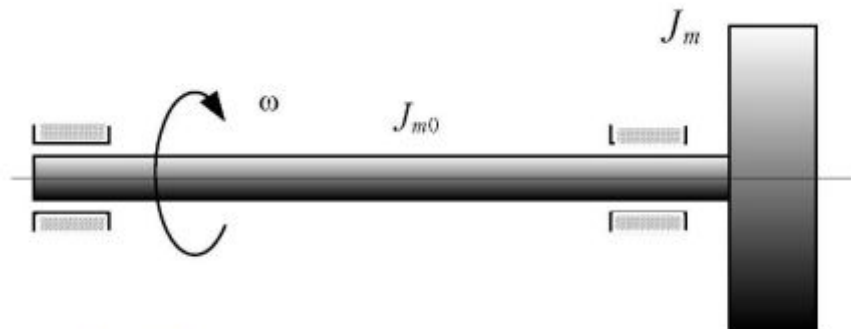


Рис. 14.12 Схема вращающегося вала с маховиком

Кинетическая энергия вращающегося вала

$$T = \frac{(J_m + k_{\text{вр}}J_{m_0})\omega^2}{2},$$

где J_m и J_{m_0} — моменты инерции массы маховика и вала, ω — угловая скорость вращения вала.

Потенциальная энергия вала в момент остановки

$$\Pi = \frac{M_{к.д} \Phi_d}{2} = \frac{M_{к.д}^2}{2k},$$

где $M_{к.д}$ и Φ_d — динамические крутящий момент и угол закручивания стержня,

$$k = \frac{GJ_p}{L} \text{ — жесткость вала при кручении.}$$

Тогда из условия $T = \Pi$ находим $M_{к.д} = \sqrt{2kT}$.

Максимальное динамическое напряжение при ударе $\tau_{max,д} = \frac{M_{к.д}}{W_p}$.

14.4.4. Замечания к расчетам на ударную нагрузку

В силу принятых допущений расчет получается неточным. В месте удара, как правило, остается вмятина, свидетельствующая о наличии пластических деформаций, увеличивающих величину $\Delta_{дин}$. Упругий удар всегда происходит с отскоком падающего груза. Распространение ударных волн и их интерференция может резко изменить картину удара.

Реально коэффициент динамичности меньше, найденного по формулам (14.16) и (14.18).

В силу приближенности расчета в формуле (14.16) можно пренебречь единицами под корнем квадратным и перед корнем при $\frac{2H}{\Delta_{стат}} > 100$

$$k_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{стат}} \cdot \frac{m}{m + k_{тр} m_0}}.$$

Зачастую можно в первом приближении пренебречь собственной массой системы по сравнению с массой падающего груза. Тогда

$$\text{При вертикальном ударе} \quad k_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{стат}}} \quad (14.19),$$

$$\text{При горизонтальном ударе} \quad k_d = \sqrt{\frac{V^2}{g \Delta_{стат}}} \quad (14.20).$$

Расчет по формулам (14.19) и (14.20) приводит к завышенным значениям динамических напряжений и перемещений.

14.5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим общий случай решения дифференциального уравнения движения (14.1) под действием вынуждающей силы $F(t)$, изменяющейся во времени

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + 2hm \frac{du}{dt} + ku = F(t).$$

Решение этого уравнения состоит из общего и частного

$$u = u_{общ} + u_{част}.$$

Общее решение было получено в разделе (14.2)

$$u = Ae^{-kt} \sin(\lambda t + \epsilon).$$

Частное решение зависит от вида правой части уравнения, то есть от характера вынуждающей силы $F(t)$. Рассмотрим некоторые виды вынуждающей силы.

14.5.1. Импульс силы

Стукнем молотком по концу консольной балки (рис. 14.13, а).

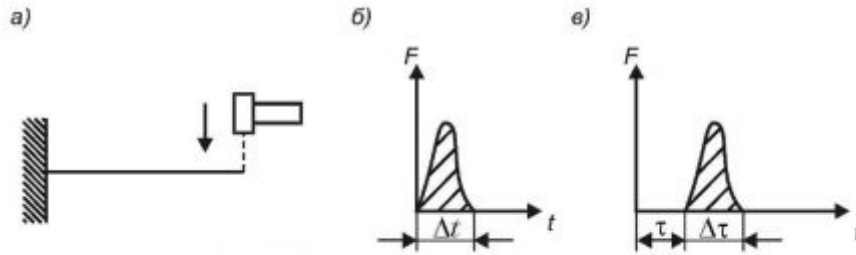


Рис. 14.13. Импульс силы, приложенный к балке

Продолжительность действия силы Δt мала. Величина импульса силы равна площади диаграммы $P - \Delta t$ (рис. 14.13, б)

$$S = \int_0^{\Delta t} F dt.$$

По окончании действия силы происходят свободные колебания балки.

Определим начальные условия свободных колебаний: перемещение $u_{\Delta t}$ и скорость $V_{\Delta t}$ в конце времени действия импульса силы Δt .

Представим силу как произведение массы на ускорение

$$F = m \frac{d^2 u}{dt^2} = m \frac{dV}{dt}. \text{ Тогда импульс силы}$$

$$S = \int_0^{\Delta t} m \frac{dV}{dt} dt = m(V_{\Delta t} - V_0).$$

До приложения импульса силы скорость равна нулю $V_0 = 0$. Тогда $V_{\Delta t} = \frac{S}{m}$.

С учетом инерционности системы при малом времени действия силы $\Delta t < 0,2T$ можно принять $u_{\Delta t} \approx 0$.

По окончании действия импульса силы свободные колебания начинаются при начальных условиях $u_0 = u_{\Delta t} = 0$ $V_0 = V_{\Delta t} = \frac{S}{m}$. Перемещения описываются общим решением уравнения (14.1)

$$u = Ae^{-ht} \text{Sin}(\omega t + \varepsilon), \text{ где } \lambda \cong \omega,$$

$$A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{V_0 + hu_0}{\omega}\right)^2} = \frac{V_0}{\omega} = \frac{S}{m\omega}$$

$$\varepsilon = \text{arctg}\left(\frac{u_0 \omega}{V_0 + hu_0}\right) = 0. \text{ Тогда}$$

$$u = \frac{S}{m\omega} e^{-ht} \text{Sin}(\omega t).$$

Рассмотрим сдвиг по времени. Пусть импульс силы прикладывается к системе при $t = \tau$ (рис. 14.13, в). Тогда

$$u = \frac{S}{m\omega} e^{-h(t-\tau)} \text{Sin}(\omega(t-\tau)) \quad (14.21).$$

14.5.2. Произвольная нагрузка

Представим произвольную нагрузку (рис. 14.14) как сумму импульсов, а перемещение от произвольной нагрузки как сумму перемещений от всех импульсов.

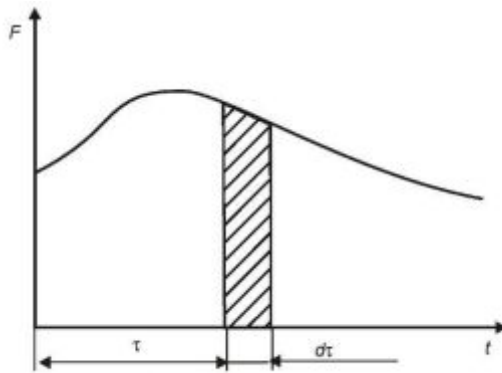


Рис. 14.14. Представление произвольной нагрузки как суммы импульсов

Вклад в перемещение отдельно взятого импульса, приложенного в момент времени τ и продолжительностью $d\tau$

$du = \frac{dS}{m\omega} e^{-h(t-\tau)} \text{Sin}(\omega(t-\tau))$, где $dS = F_\tau d\tau$. Тогда полное перемещение

$$u = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_\tau e^{-h(t-\tau)} \text{Sin}(\omega(t-\tau)) \cdot d\tau \quad (14.22).$$

Последнее выражение называется *интеграл Дюамеля*.

Вернемся к полному решению уравнения движения (14.1).

$$u = u_{\text{общ}} + u_{\text{част}}.$$

Общее решение $u = Ae^{-ht} \text{Sin}(\omega t + \varepsilon)$ со временем быстро затухает и, если вынуждающая сила действует длительное время, полное решение равняется частному $u \approx u_{\text{част}}$. Частное решение — это есть интеграл Дюамеля.

Интеграл Дюамеля описывает отклик системы с одной степенью свободы на любую вынуждающую силу. Примеры использования интеграла Дюамеля приведены в электронной книге в разделе [Динамика упругих систем \(Для главы 14\)](#).

14.5.3. Гармоническое действие силы

На практике часто встречается гармоническое действие вынуждающей силы, когда величина силы изменяется по синусоиде.

$F(t) = F_0 \text{Sin}(\nu t + \varepsilon)$. Для упрощения вывода формул в этом случае часто предыдущее выражение записывают через комплексные числа $F(t) = F_0 e^{i\nu t}$.

Уравнение колебательного движения системы с одной степенью свободы имеет вид (14.2)

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2h \frac{du}{dt} + \omega^2 u = \frac{F(t)}{m} = \frac{F_0}{m} e^{i\nu t} \quad (14.23).$$

Решение этого уравнения состоит из общего и частного

$$u = u_{\text{общ}} + u_{\text{част}}.$$

Общее решение было получено в разделе (14.2)

$$u = Ae^{-ht} \text{Sin}(\lambda t + \varepsilon)$$

При продолжительном действии периодически повторяющейся нагрузки общее решение быстро затухает, стремится к нулю и им можно пренебречь. Тогда полное решение равно частному. Частное решение зависит от вида правой части уравнения. Пусть

$$u_{\text{част}} = Ae^{i\nu t} \quad (14.24),$$

где A — амплитуда колебаний.

Подставив частное решение (14.24) в уравнение колебательного движения (14.23) после упрощений, получаем выражение для коэффициента динамичности

$$k_d = \frac{\Delta_{\text{дин}}}{\Delta_{\text{стат}}} = \frac{|A|}{\Delta_{\text{стат}}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\omega}\right)^2\left(\frac{v}{\omega}\right)^2}} \quad (14.25).$$

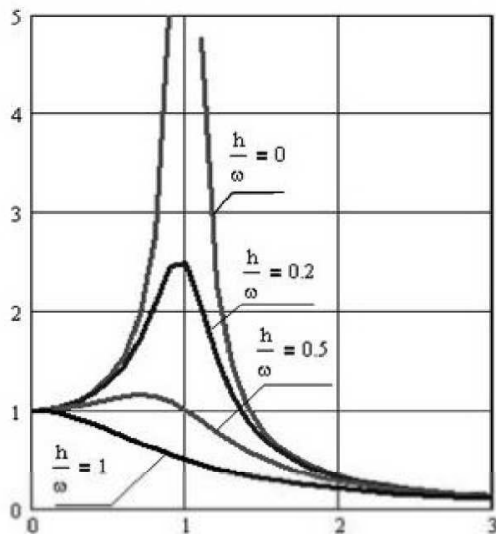


Рис. 14.15 Амплитудно-частотная характеристика

Коэффициент динамичности k_d показывает во сколько раз возрастает динамическое перемещение по сравнению со статическим.

В момент резонанса $v = \omega$, тогда $k_d = \frac{1}{2h/\omega}$ (14.26).

Взяв из справочника приближенное значение отношения h/ω , можно определить динамические перемещения и напряжения в конструкции.

Выражение (14.25) не зависит от вида колеблющейся системы. График, построенный по этому выражению, называется амплитудно-частотной характеристикой (рис. 14.15).

14.5.4. Критическая скорость вращения вала

Быстровращающиеся детали машин не могут быть идеально сбалансированы и, практически всегда, при их вращении возникает вынуждающая центробежная сила, вызывающая поперечные колебания конструкции.

Если на валу установлен маховик с небольшим эксцентриситетом e , то при вращении вала с угловой скоростью ω возникает центробежная сила $F_{\text{ц}} = m\omega^2 e$. Тогда по любому направлению на вал действует переменная возмущающая сила $F(t) = m\omega^2 e \cdot \sin(\omega t)$.

В случае, когда частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных поперечных колебаний вала, наступает состояние резонанса. Амплитуда колебаний вала резко возрастает.

Такая частота называется *критической скоростью вращения вала*.

Для уменьшения опасности резонанса критическую скорость вращения вала стараются сместить в сторону меньших частот, подальше от диапазона рабочих частот вала. Тогда будет меньше центробежная сила и, соответственно, амплитуда колебаний и напряжения.

Поскольку $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, для уменьшения критической скорости конструктивно

уменьшают жесткость опор вала и тем самым уменьшают жесткость k , в формуле собственной частоты. Примером может служить подвеска электромотора и центрифуги стиральной машины на резиновых тягах. При неуравновешенной загрузке белья в центрифугу резонанс происходит при малой скорости вращения, практически перед самой остановкой центрифуги.

Глава 15. Усталость материалов

Под действием **повторяющихся** нагрузок в материале конструкции накапливаются повреждения, ведущие к преждевременному разрушению конструкции. Рассмотрим расчет конструкций на прочность и долговечность при действии переменных нагрузок. Введем некоторые основные понятия.

- Усталость — снижение прочности конструкции под действием переменных нагрузок.
- Выносливость — способность материала и конструкции выдерживать, не разрушаясь, определенное число циклов переменных нагрузок
- Долговечность — число циклов нагружения до разрушения конструкции (иногда срок службы конструкции в часах).

Усталость и выносливость — две стороны одного и того же явления. Расчет конструкции на усталость и на выносливость — это одно и то же.

15.1. Механизм усталостного разрушения

В каждой детали есть макро и микродефекты, вблизи которых возникает концентрация напряжений. Макродефекты — это отверстия, резкие изменения формы и площади поперечного сечения, в валах — шпоночные канавки, отверстия для смазки и т.п. Микродефекты: вакансии, дислокации, неметаллические включения, усадочные раковины, закалочные трещины;

При действии переменных нагрузок дефекты структуры материала претерпевают изменения. В частности, увеличивается плотность дислокаций, особенно у границ зерен и включений, растут напряжения у скоплений дислокаций и возникают микротрещины, постепенно сливаясь и образуя макроскопические трещины. Развитие последних приводит к разрушению деталей. Эти процессы усиливаются и протекают интенсивнее в области концентрации напряжений.

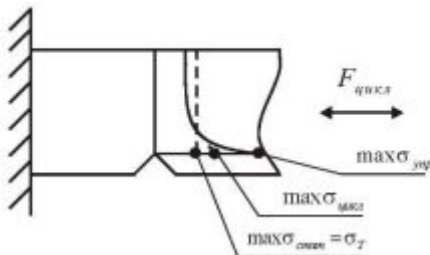


Рис. 15.1 Распределение напряжений вблизи опасного дефекта

Рассмотрим распределение напряжений вблизи опасного дефекта (рис. 15.1). Под действием нагрузок вблизи дефекта происходит всплеск напряжений. У вершины микротрещины напряжения могут возрасти в 200 раз по сравнению с номинальными $\max \sigma_{\text{упр}} \approx 200 \sigma_{\text{ном}}$.

При статическом однократном напряжении, достигнув предела текучести, напряжения дальше не растут $\max \sigma_{\text{пласт}} = \sigma_T$.

При переменной нагрузке, максимальные напряжения постепенно возрастают, становясь больше предела текучести, но меньше $\max \sigma_{\text{упр}}$.

Рост усталостной трещины начинается в самом опасном дефекте, там, где действуют максимальные напряжения. Чем опаснее самый опасный дефект в детали, тем меньше ее долговечность.

Отметим особенности усталостного разрушения:

- усталостное разрушение носит статистический характер и сопровождается

огромным разбросом по долговечности (до 10 раз) для одинаковых образцов или деталей;

- усталостное разрушение всегда начинается с поверхности, что трудно объяснить, но — факт;
- накопление микрповреждений (микросдвиги) вызывается касательными напряжениями τ , развитие трещин и разрушение в основном определяется нормальными напряжениями σ .

Процесс усталостного разрушения можно условно разбить на 3 стадии:

1. накопление микрповреждений до образования видимых трещин;
2. развитие усталостной трещины;
3. мгновенный хрупкий долом.

Продолжительность первых двух стадий зависит от вида образца или детали. Если для гладких деталей 70–90% срока службы деталь работает без видимых трещин (первая стадия разрушения), то у деталей с концентраторами напряжений трещина появляется уже после 10–15% срока службы

Третья стадия — хрупкий долом (разделение тела на части) протекает в течение одного-двух циклов нагружения. В зоне долома $\sigma_{\text{ном}} \approx S_x$.

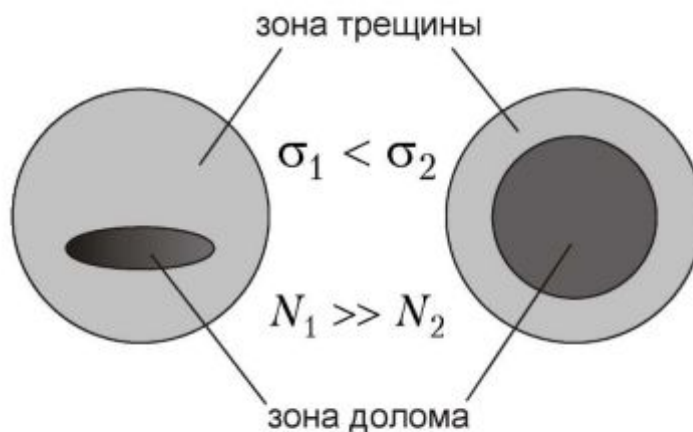


Рис. 15.2 Вид усталостного разрушения образца

Анализ внешнего вида излома детали позволяет проанализировать историю усталостного разрушения. В изломе отчетливо видны как минимум 2 зоны:

- зона развития трещины — блестящая, отшлифованная многократным захлопыванием трещины при переменной нагрузке;
- зона хрупкого долома — матовая, волокнистая, с рваными краями вследствие мгновенного разрушения отрывом.

При внимательном рассмотрении можно заметить в изломе ступеньки, вызванные изменением величины или направления нагрузки, перерывами в работе.

На рисунке 15.2 показаны два излома образцов, испытанных при изгибе с вращением. В первом образце видна большая зона развития трещины и малая зона долома. Это свидетельствует о большом числе циклов до разрушения N_1 и сравнительно малом максимальном напряжении σ_1 .

Во втором образце, наоборот, малая зона развития трещины и большая зона долома. Это свидетельствует о значительно меньшем числе циклов до разрушения N_2 и сравнительно большом максимальном напряжении σ_2 . С ростом нагрузки гладкая зона развития трещины уменьшается.

15.2. Характеристики цикла нагружения

Рассмотрим вращение вала под нагрузкой (рис. 15.3). Выделим на поверхности вала точку A и найдем напряжения в этой точке при вращении вала.

В исходном положении точка A находится на нейтральной оси и напряжения в ней $\sigma = 0$. При повороте на 90° градусов точка перейдет в положение A_1 в область сжатых волокон. Напряжения в ней $\sigma = \max \sigma_{\text{сжат}}$.

Через четверть оборота точка A приходит в положение A_2 на нейтральной оси. Напряжения в ней вновь $\sigma = 0$. Еще четверть оборота и в положении A_3 напряжения растягивающие $\sigma = \max \sigma_{\text{раст}}$.

Завершая оборот точка вновь оказывается в положении A и вновь в ней напряжения $\sigma = 0$. Как видно из графика на рис. 15.3 за один оборот совершается один полный цикл нагружения по синусоидальному закону.

Число оборотов, совершенное валом за все время работы, есть число циклов нагружения вала.

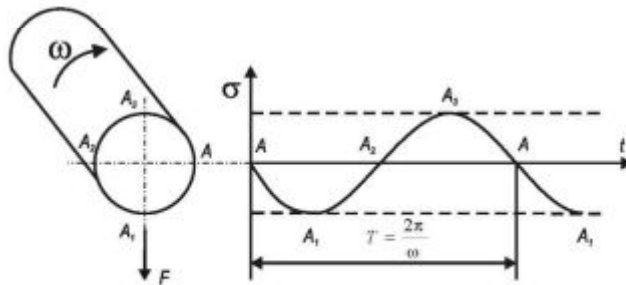


Рис. 15.3 Изменение напряжений при вращении вала

ПРИМЕЧАНИЕ

Долговечность детали практически не зависит от формы цикла нагружения и скорости нагружения, а зависит только от числа циклов.

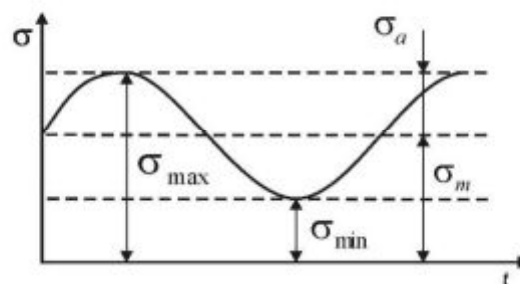


Рис. 15.4 Характеристики цикла нагружения

Введем характеристики цикла нагружения. На рисунке 15.4 показан произвольный асимметричный цикл нагружения и отмечены размерными стрелками 4 характеристики цикла:

- σ_{\max} — максимальное напряжение цикла,
- σ_{\min} — минимальное напряжение цикла,
- σ_a — амплитуда цикла,
- σ_m — среднее напряжение цикла.

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$$

Введем коэффициент асимметрии цикла $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся виды циклов нагружения, показанные на рис. 15.5.

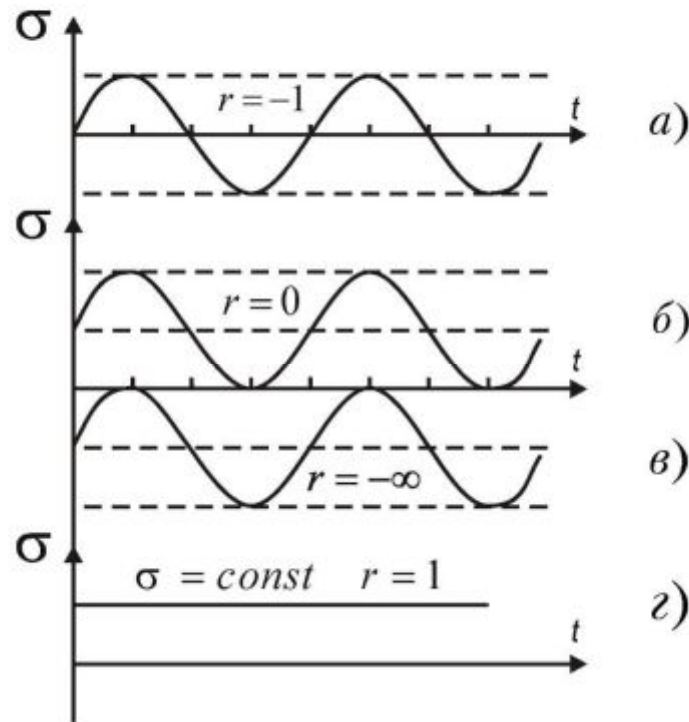


Рис. 15.5 Виды циклов нагружения

- Симметричный цикл нагружения (рис. 15.5, а) $\sigma_a = \sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, $\sigma_m = 0$, $r = -1$ испытывают все вращающиеся детали.
- Пульсирующий (отнулевой) цикл нагружения растяжением (рис. 15.5, б) $\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2}$, $\sigma_{\min} = 0$, $r = 0$ — зубчатые колеса (точки на растянутой стороне зубьев).
- Пульсирующий (отнулевой) цикл нагружения сжатием (рис. 15.5, в) $\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\min}}{2}$, $\sigma_{\max} = 0$, $r = -\infty$ — зубчатые колеса (точки на сжатой стороне зубьев).
- Постоянная нагрузка (рис. 15.5, г) $\sigma_m = \sigma_{\min} = \sigma_{\max}$, $\sigma_a = 0$, $r = 1$.

Коэффициент асимметрии r может принимать значения $-\infty < r \leq 1$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Любой цикл нагружения можно представить как сумму симметричного цикла (σ_a) и постоянной нагрузки (σ_m).

15.3. Диаграммы усталостной прочности

Для расчетов деталей на прочность и долговечность рассмотрим две основные

диаграммы усталостной прочности.

15.3.1. Усталостная кривая

Эта диаграмма показывает зависимость числа циклов до разрушения N от максимальных напряжений в детали σ . Впервые такая диаграмма была построена немецким инженером Велером и по его имени названа диаграмма Велера. Диаграмма строится по результатам лабораторных испытаний серии образцов.

Для построения одной кривой испытывается серия образцов. Каждая точка на диаграмме соответствует испытанию до разрушения одного образца.

Образец испытывается при циклической нагрузке с постоянной величиной максимального напряжения цикла σ , записывается число циклов до разрушения N . Точка с координатами σ, N наносится на график.

На графике по экспериментальным точкам проводится усредняющая их кривая (рис. 15.6). При некотором значении σ долговечность (число циклов до разрушения) N стремится в бесконечность.

Пределом выносливости (усталости) называется максимальное напряжение, при котором образец не разрушается при числе циклов, равном бесконечности.

Обозначение предела выносливости σ_r , где r — характеристика цикла нагружения, например: σ_{-1} — при симметричном цикле, σ_0 — при пульсирующем цикле.

На диаграмме Велера трудно одновременно показать точки с малым и большим числом циклов до разрушения. Так точки с долговечностью $N < 1000$ циклов практически сливаются с осью σ .

Чтобы раздвинуть точки на графике, на практике усталостную кривую строят в логарифмических координатах $\lg \sigma - \lg N$, в которых кривая аппроксимируется прямой линией. Наклонная прямая, соответствует, так называемой, ограниченной выносливости образцов, когда испытание заканчивается разрушением образца. Горизонтальная прямая на рис. 15.7 соответствует пределу выносливости.

Усталостная кривая, на самом деле, является кривой линии, но ввиду огромного разброса опытных данных, ее можно аппроксимировать прямой линией.

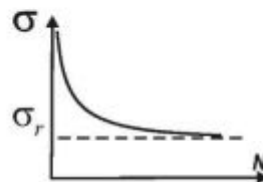


Рис. 15.6 Кривая Велера

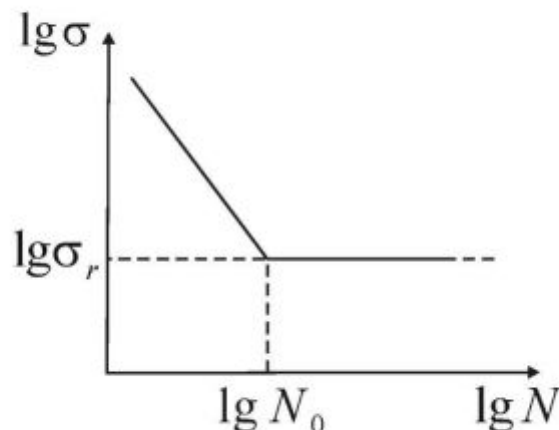


Рис. 15.7 Усталостная кривая в логарифмических координатах

Долговечность, соответствующая пересечению прямых называется *базовым числом циклов* N_0 . При приближенном построении усталостной кривой принимают $N_0 \approx 2 \cdot 10^6$ циклов для всех черных металлов (чугуна и сталей).

Для цветных металлов, а также при испытании черных металлов в коррозионных средах, предел выносливости не существует и вторая прямая не горизонтальная, а наклонная (ее угол наклона в несколько раз меньше, чем для первой прямой).

Для определения предела выносливости и построения усталостной кривой необходимо испытать около 20 образцов. Чаще всего образец нагружается изгибом при вращении образца или плоским изгибом (оборудование для таких испытаний наиболее простое).

Для первого образца устанавливается нагрузка, создающая в образце напряжения $\max \sigma = 0,5(\sigma_B + \sigma_T)$. Образец испытывается до разрушения и записывается число циклов до разрушения образца.

Для второго образца нагрузка снижается, Образец также испытывается до разрушения. Число циклов до разрушения при этом увеличивается.

Результаты испытаний наносятся на график в логарифмических координатах. Несмотря на существенный разброс опытных точек их аппроксимируют усредняющей прямой линией. Часто используется статистическая обработка результатов испытаний методом наименьших квадратов.

Если образец не сломался после 10 млн циклов, испытание прекращается. Считается, что достигнут предел выносливости, но для статистической обработки на этом же уровне нагрузки или близких к нему испытывается еще несколько образцов.

Для испытаний используются стандартные полированные образцы диаметром $d_0 = 5 - 7,5$ мм. Требования к изготовлению образцов и методика испытаний на выносливость (усталость) изложены в ГОСТ 25.504–82.

Для расчетов на ограниченную выносливость, то есть для деталей, испытывающих за весь срок службы меньше 2 млн циклов, записывают уравнение для наклонного участка усталостной кривой. В логарифмических координатах

$\lg N = \lg A - m \cdot \lg \sigma$, где A и m — эмпирические коэффициенты. Отсюда $N\sigma^m = Const = N_0\sigma_r^m$ — уравнение усталостной прочности.

Зная предел выносливости σ_r и базовое число циклов $N_0 = 3 \cdot 10^6$ можно найти долговечность при заданном напряжении

$$N = N_0 \left(\frac{\sigma_r}{\sigma} \right)^m \quad (15.1)$$

или напряжение, соответствующее заданной долговечности

$$\sigma = \sigma_r \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}} \quad (15.2)$$

Коэффициент m часто берется из справочников. Обычно $m = 8 - 12$. При отсутствии экспериментальных данных предел выносливости при симметричном цикле часто оценивают по приближенным формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{-Изгиба}} &\approx (0,4 - 0,5)\sigma_B \\ \sigma_{\text{-Растяжения}} &\approx (0,7 - 0,8)\sigma_{\text{-Изгиба}} \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\tau_{\text{-Кручения}} \approx 0,5\sigma_{\text{-Изгиба}}$$

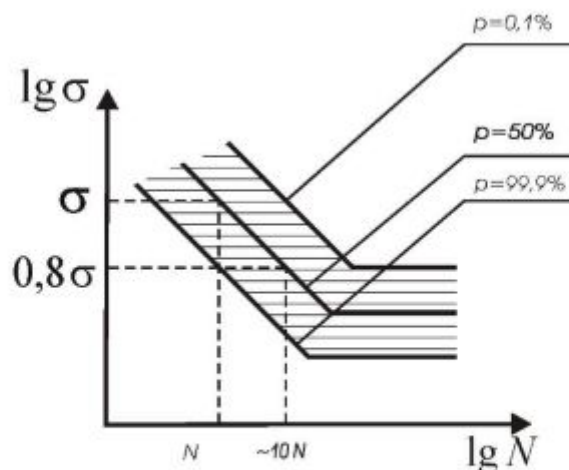


Рис. 15.8 Рассеивание результатов испытаний на усталость.

Поскольку усталостное разрушение сопровождается огромным разбросом по долговечности, при обработке результатов испытаний желательна статистическая обработка результатов (обычно методом наименьших квадратов).

На рис.15.8 показана зона рассеивания результатов испытаний на усталость. Ее верхняя граница соответствует вероятности неразрушения $p = 0,1\%$, нижняя — $p = 99,9\%$. Обработка результатов испытаний серии образцов с построением доверительного интервала долговечности приведена в электронной книге в разделе Для главы 15.

Следует отметить, что разброс данных по долговечности во много раз больше, чем по напряжениям. Так снижение напряжений на 20% ведет к увеличению средней долговечности примерно в 10 раз.

Если статистическая обработка не производится, вероятность неразрушения можно увеличить с помощью коэффициента запаса. При использовании в расчетах средневероятностной усталостной кривой коэффициент запаса по напряжениям $n = 1$ соответствует вероятности неразрушения 50%, $n = 1,5$ — 99%, $n = 2$ — 99,9%.

15.3.2. Диаграмма предельных амплитуд

Для определения предела выносливости при асимметричном цикле необходимо проведение испытаний при соответствующей характеристике цикла r .

Определив пределы выносливости при нескольких значениях коэффициента r , можно построить диаграмму для определения предела выносливости при любом асимметричном цикле, называемую диаграммой предельных амплитуд. Получить опытные данные для такой диаграммы чрезвычайно сложное и трудоемкое дело и на практике используют приближенную диаграмму, построенную по 2-м или 3-м точкам (рис. 15.9).

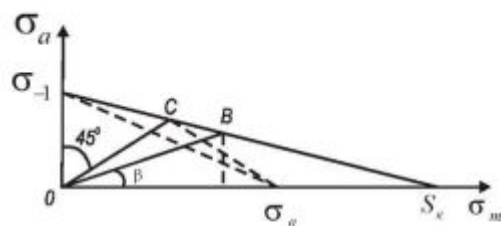


Рис. 15.9 Диаграмма предельных амплитуд

Диаграмма строится в координатах $\sigma_a - \sigma_m$. Отрезки, отсекаемые диаграммой на

осях координат: σ_{-1} — на оси σ_a (при $\sigma_m = 0$) и σ_b — на оси σ_m (при $\sigma_a = 0$). Для определения предела выносливости при заданном значении r надо из начала координат провести луч под углом β , для которого

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}{(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})} = \frac{1-r}{1+r} \quad (15.4).$$

Сумма координат точки B пересечения луча OB с диаграммой предельных амплитуд представляет собой предел выносливости при заданном коэффициенте r $\sigma_r = \sigma_m^B + \sigma_a^B$.

Для построения диаграммы по 2-м точкам чаще всего используют предел прочности σ_b и предел выносливости при симметричном цикле σ_{-1} . На осях координат откладывают σ_b и σ_{-1} и соединяют две точки прямой линией. В этом случае уравнение диаграммы предельных амплитуд

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi \cdot \sigma_m \quad (15.5),$$

где $\psi = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_b}$ — угловой коэффициент.

В наших расчетах вместо предела прочности при построении диаграммы предельных амплитуд используется сопротивление разрыву S_k . Ведь предел прочности σ_b характеризует сопротивление пластической деформации, а S_k — сопротивление разрушению. Эксперименты показали, что использование сопротивления разрыву при построении усталостной кривой и диаграммы предельных амплитуд позволяет значительно повысить точность оценки усталостной прочности. В этом случае

$$\psi = \frac{\sigma_{-1}}{S_k}.$$

В расчетах деталей машин на усталостную прочность часто используют аппроксимацию Серенсена С.В., в которой в качестве третьей точки при построении диаграммы предельных амплитуд используется предел выносливости при пульсирующем цикле σ_0 ($r=0$, точка С на рис. 15.9). Тогда аппроксимация диаграммы представляет собой два отрезка прямых линий. Расчетное уравнение диаграммы имеет тот же вид, что и в случае 2-х точек, но $\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \approx 0,1 - 0,3$.

Чаще всего величина ψ берется из справочников. Аппроксимация Серенсена С.В. дает почти те же результаты, что и использование S_k при построении диаграммы предельных амплитуд.

СОВЕТ

При отсутствии в справочнике сопротивления разрыву S_k можно приближенно принять $S_k \approx 2 \cdot \sigma_b$ или $S_k / \sigma_b \approx 1 + 1,4 \cdot \psi_k$.

15.3.3. Приближенное построение диаграмм усталостной прочности

Для приближенной оценки долговечности конструкций и деталей машин необходимо уметь приближенно строить диаграммы усталостной прочности, без проведения длительных испытаний на усталость, только с использованием данных, приведенных в справочниках. Там, как правило, нет других механических характеристик, кроме предела текучести и предела прочности.

Рассмотрим пример построения таких диаграмм. Для большей наглядности построения расчет произведен в числах.

Для стали 40Х улучшенной (термообработка — закалка с высоким отпуском)

$\sigma_n = 1000$ Мпа определить предел ограниченной выносливости для долговечности $N = 10^5$ циклов при изгибе симметричным циклом нагружения $r = -1$ и асимметричным циклом $r = 0,5$.

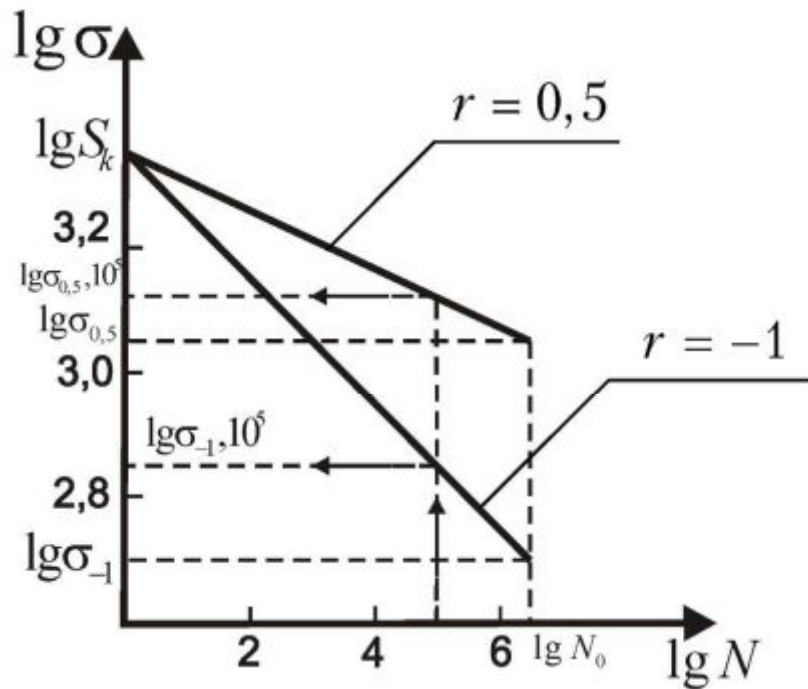


Рис. 15.10. Усталостная кривая при симметричном и асимметричном циклах нагружения

Построим усталостную кривую в логарифмических координатах приблизительно по 2-м точкам, соответствующим статическому разрыву и пределу выносливости при симметричном цикле (рис. 15.10).

Статическому разрыву соответствуют $1/4$ или $1/2$ цикла нагружения. Поскольку расчет очень приближенный, принимаем для статического разрыва $N = 1$. Пределу выносливости на усталостной кривой соответствует точка с координатами σ_{-1} и $N_0 = 3 \cdot 10^6$ циклов для сталей.

- $N = 1 \quad \sigma = S_k \approx 2\sigma_b = 2 \cdot 1000 = 2000$ Мпа.
- $N = N_0 \approx 3 \cdot 10^6$ циклов $\sigma = \sigma_{-изгиб} \approx 0,5\sigma_b = 500$ МПа.

Через две точки проводим прямую линию (наклонный участок усталостной кривой). На ней находим графически напряжения $\sigma = \sigma_{-1,10^5} = 686$ МПа, соответствующие долговечности $N = 10^5$ циклов. Это первый ответ задачи.

Далее строится диаграмма предельных амплитуд по двум точкам (рис. 15.11):

- при $\sigma_a = 0 \quad \sigma_m = S_k = 2000$ МПа
- при $\sigma_m = 0 \quad \sigma_a = \sigma_{-1} = 500$ МПа.

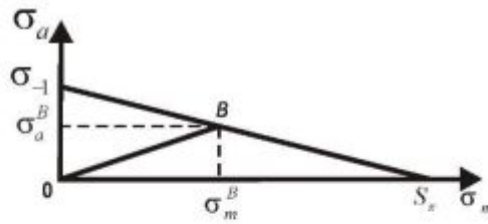


Рис. 15.11. Диаграмма предельных амплитуд

Из начала координат проводим луч OB под углом β , для которого $\operatorname{tg}(\beta) = \frac{1-r}{1+r} = \frac{1}{3}$. Сумма координат, точки B пересечения луча с диаграммой предельных амплитуд есть предел выносливости при асимметричном цикле

$$\sigma_r = \sigma_a^B + \sigma_m^B = 286 + 857 = 1143 \text{ МПа.}$$

Затем по двум точкам строится усталостная кривая при заданном $r = 0,5$ (рис. 15.24):

- $N = 1 \quad \sigma = S_x \approx 2\sigma_0 = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ Мпа.}$
- $N = N_0 \approx 3 \cdot 10^6 \text{ циклов} \quad \sigma = \sigma_r = 1143 \text{ МПа.}$

Через две точки проводим прямую (наклонный участок усталостной кривой). На этой прямой при $N = 10^5$ определяем графически предел ограниченной выносливости $\sigma = \sigma_{r,10^5} = 1298 \text{ МПа.}$

15.4. Расчет на усталость при нестационарной нагрузке

В процессе эксплуатации элементы конструкции, как правило, испытывают разные по величине нагрузки. Встает задача определения долговечности при нестационарных нагрузках.

На каждом цикле нагружения деталь получает небольшое повреждение, сумма которых, в конце концов, приводит к разрушению детали. Введем параметр ω , называемый *повреждаемостью материала*. Примем, что до начала нагружения $\omega = 0$ — нет повреждения, в момент разрушения $\omega = 1$.

Особенности накопления повреждений изучались многими исследователями, предложившими различные гипотезы их суммирования. Каждая из них справедлива лишь для определенных видов нагружения. Обычно в расчетах используют *гипотезу линейного накопления повреждений*.

Объясним суть этой гипотезы. Пусть для данного образца или детали построена усталостная кривая, тогда при максимальном напряжении цикла σ_i разрушение произойдет после N_i циклов. Если реальное число циклов $N < N_i$, то принимают величину повреждения пропорционально отработанному числу циклов $\omega = \frac{N}{N_i}$.

Накопленное повреждение после нескольких уровней нагружения различными нагрузками

$$\omega = \sum \omega_i = \sum \frac{N}{N_i} \quad (15.6)$$

В момент разрушения, согласно линейной гипотезе, $\omega = 1$. Однако на практике $\omega = a$, где a принимает значения от 0,25 до 4 в зависимости от истории

нагружения. Существуют эмпирические формулы для поправки a для отдельных режимов нагружения.

Линейная гипотеза очень неточная, но и другие гипотезы не лучше. Все они дают удовлетворительные результаты лишь для отдельных режимов нагружения.

При случайном нагружении, которое часто встречается на практике, линейная гипотеза дает хорошие результаты при $a=1$, в других случаях используют эту гипотезу с учетом поправки a .

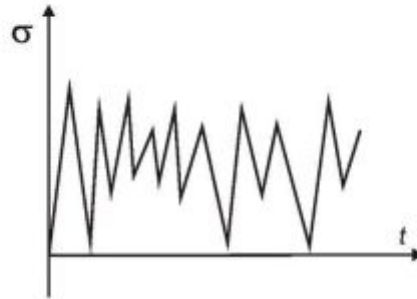


Рис. 15.12 Циклограмма нагружения

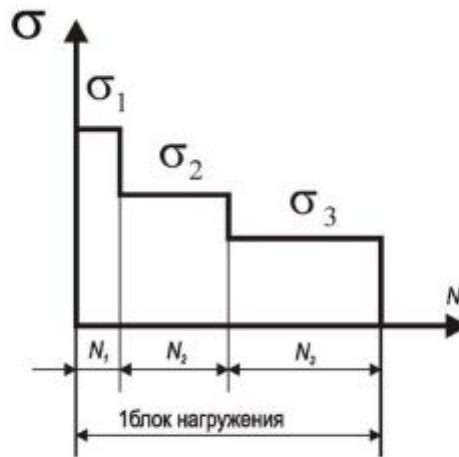


Рис. 15.13 Гистограмма нагружения

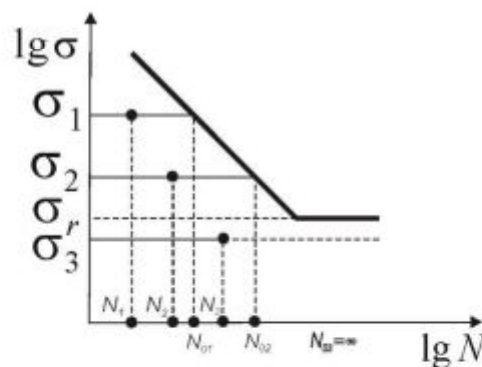


Рис. 15.14 Оценка повреждения по усталостной кривой

При случайном нагружении надо записать циклограмму нагружения (рис. 15.12). Обработать ее и построить гистограмму нагружения (рис. 15.13), выбрав несколько характерных уровней нагружения и, подсчитав число циклов, отработанных деталью при каждом уровне нагружения.

Обычно весь срок службы детали делят на временные блоки (допустим 1 час нагружения) и гистограмму нагружения строят для одного блока нагружения.

Далее по усталостной кривой определяется число циклов до разрушения на каждом уровне нагрузки (рис. 15.14).

Для гистограммы на рис. 15.13 повреждение детали за 1 блок нагружения

$$\omega_B = \frac{N_1}{N_{01}} + \frac{N_2}{N_{02}} + \frac{N_3}{N_{03}}.$$

Так как $\sigma_3 < \sigma_r$, то повреждение на этом уровне нагрузки равно нулю $N_{03} \rightarrow \infty$. Число блоков до разрушения n (фактически срок службы детали) определяют из условия $\omega = n \cdot \omega_B = a$, где, чаще всего, $a = 1$.

15.5. Факторы, влияющие на предел выносливости

Все значения пределов выносливости, которые можно найти в справочниках, найдены по результатам испытаний стандартных образцов на усталость. Задача конструктора определить предел выносливости конкретной детали.

С учетом различных факторов определяются поправочные коэффициенты, связывающие пределы выносливости стандартных образцов и деталей [8]. Рассмотрим основные факторы, влияющие на предел выносливости деталей машин.

15.5.1. Концентрация напряжений

В местах резкого изменения формы тела происходит резкое увеличение напряжений, названное концентрацией напряжений. Типичные концентраторы напряжений — это отверстия, проточки, галтели, трещины, следы механической обработки. Характер распределения напряжений при растяжении образца с острым надрезом показан на рис. 15.15.

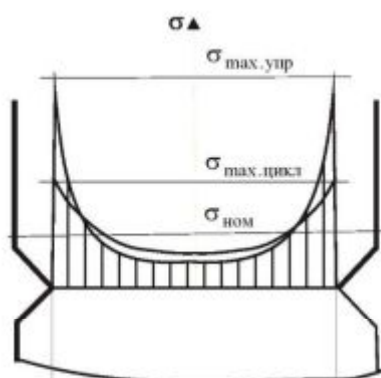


Рис. 15.15. Распределение напряжений вблизи концентратора напряжений

Для оценки концентрации напряжений используется теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}$, где σ_{\max} — максимальное упругое напряжение в детали, $\sigma_{\text{ном}}$ — номинальное напряжение в детали, рассчитанное по формулам сопротивления материалов без учета концентрации напряжений.

$$\sigma_{\text{ном}} = \frac{F}{A} \text{ — при растяжении, } \sigma_{\text{ном}} = \frac{M}{W} \text{ — при изгибе.}$$

Считается, что при статической нагрузке пики напряжений в местах их концентрации резко снижаются. Достигнув предела текучести σ_T , напряжения дальше не растут.

При циклической нагрузке происходит постепенное исчерпание пластичности и максимальное циклическое напряжение принимает значения где-то между σ_{\max} и σ_T .

Влияние концентрации напряжений на предел выносливости при симметричном цикле оценивается эффективным коэффициентом концентрации напряжений $K_\sigma = \frac{\sigma_{-1, \text{глад}}}{\sigma_{-1, \text{конц}}} > 1$, где $\sigma_{-1, \text{глад}}$ — предел выносливости при симметричном цикле гладкого стандартного образца, $\sigma_{-1, \text{конц}}$ — предел выносливости образца с концентратором напряжений, с таким же коэффициентом α_σ , что и рассматриваемая деталь.

Значения теоретических и эффективных коэффициентов концентрации напряжений собраны в книге Петерсона "Концентрация напряжений" [18], а также приводятся во всех учебниках и справочниках по деталям машин и сопротивлению материалов [19]. Экспериментальная зависимость K_σ от α_σ показана на рис. 15.16. Она имеет экстремум для деталей с острым надрезом и может быть описана степенной зависимостью $K_\sigma = \alpha_\sigma^\gamma$, где γ — чувствительность материала к концентрации напряжений, величина постоянная для каждого материала [11].

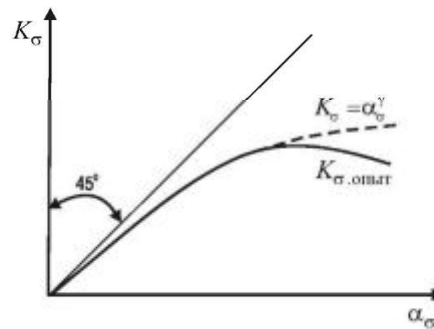


Рис. 15.16. Связь эффективного и теоретического коэффициентов концентрации напряжений

15.5.2. Размеры детали

С увеличением размеров детали ее предел выносливости уменьшается. Как уже было сказано, усталостное разрушение детали определяется наличием в ней опасных дефектов структуры.

Чем опаснее дефект, тем меньше усталостная прочность. Вероятность наличия в детали опасного дефекта увеличивается с ростом размеров детали. По этой же причине разброс результатов испытаний уменьшается с ростом размеров детали (рис. 15.17) При вероятности неразрушения 99% можно считать, что размеры детали не влияют на предел выносливости.

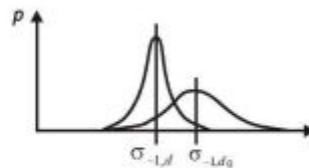


Рис. 15.17. Сравнение плотностей вероятности разрушения образцов различных размеров

Влияние размеров детали на средневероятностный предел выносливости при симметричном цикле оценивается коэффициентом $K_d = \frac{\sigma_{-1,d}}{\sigma_{-1,d_0}} < 1$, где $\sigma_{-1,d}$ и σ_{-1,d_0} — пределы выносливости при симметричном цикле детали размером d и стандартного образца диаметром d_0 .

Существует статистическая теория усталостного разрушения, согласно которой усталостная прочность во многом зависит от градиента напряжений в опасных точках детали.

Размеры детали и наличие концентрации напряжений влияют на величину градиента напряжений, поэтому часто их влияние на предел выносливости при симметричном цикле объединяют в единый коэффициент K_{σ}/K_d . Графики и таблицы для его определения приводятся в справочниках по деталям машин, эмпирические формулы — в ГОСТ 25.504–82.

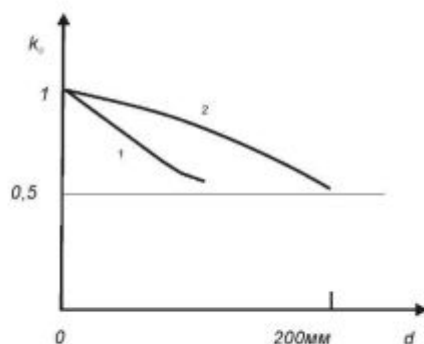


Рис. 15.18. Влияние размеров детали на усталостную прочность (1 — углеродистая сталь, гладкие образцы, 2 — легированная сталь, образцы с надрезом)

Характер влияния размеров детали на усталостную прочность показан на рис. 15.18. При малых размерах детали ($d < 30$ мм) можно принять $K_d = 1$. Однако при увеличении размеров детали до 150 мм предел выносливости ее может уменьшиться в 2 раза.

15.5.3. Состояние поверхности

Усталостное разрушение всегда начинается с поверхности детали. Следы механической обработки на поверхности являются концентраторами напряжений и снижают усталостную прочность.

Наибольшей прочностью обладают полированные детали, наименьшей — после грубой черновой обточки.

Степень концентрации напряжений у поверхности детали определяется размером шероховатости поверхности. Влияние состояния поверхности на предел выносливости при симметричном цикле оценивается коэффициентом

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1, \text{полир}}} < 1, \text{ где } \sigma_{-1} \text{ и } \sigma_{-1, \text{полир}} \text{ — пределы выносливости стандартных образцов с заданной поверхностной обработкой и полированных.}$$

образцов с заданной поверхностной обработкой и полированных.

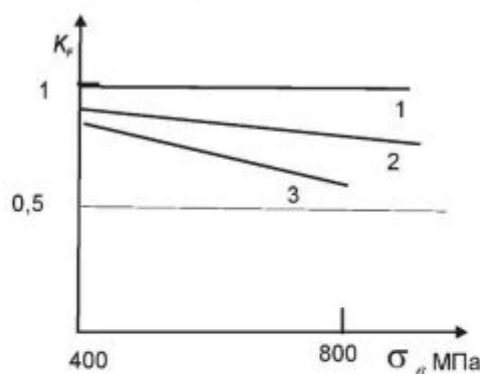


Рис. 15.19. Влияние состояния поверхности детали на усталостную прочность (1 — полированные детали, 2 — шлифованные, 3 — грубая обточка)

Эмпирические формулы для расчета коэффициента K_{σ} приведены в ГОСТ 25.504–82. Характер зависимости предела выносливости детали от вида механической обработки показан на рис. 15.19.

Полировка поверхности детали обеспечивает наивысшую усталостную прочность ($K_F = 1$), шлифовка незначительно снижает ее ($K_F > 0,9$), грубая токарная обработка может снизить предел выносливости почти в 2 раза.

15.5.4. Поверхностное упрочнение

Существенное влияние на усталостную прочность оказывают остаточные напряжения в поверхностном слое детали. На рисунке 15.20 показано распределение напряжений при растяжении упрочненной детали с концентратором напряжений.

Остаточные напряжения сжатия, накладываясь на рабочие напряжения растяжения в детали, вызывают снижение пиков напряжений и, как следствие, повышают усталостную прочность детали.

Остаточные напряжения растяжения, наоборот, увеличивают пики напряжений и снижают усталостную прочность.

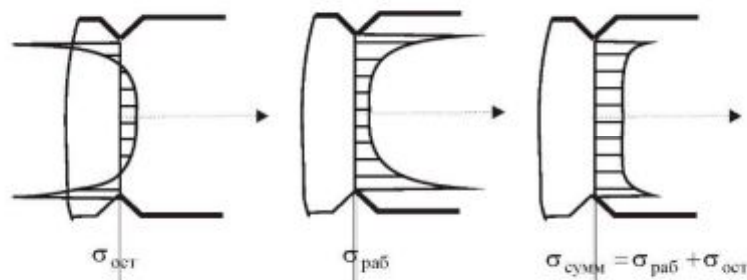


Рис. 15.20. Распределение напряжений при растяжении упрочненной детали с концентратором напряжений

Для создания в поверхностном слое остаточных напряжений сжатия, а также для увеличения прочности поверхностного слоя используют различные способы поверхностного упрочнения:

- механические (дробеструйный наклеп, обкатка роликами);
- термические (поверхностная закалка токами высокой частоты ТВЧ);
- химико-термические (азотирование, цементирование, цианирование)

Некоторые виды поверхностной обработки вызывают появление в поверхностных слоях остаточных напряжений растяжения, снижающих прочность. Это — шлифование, хромирование, никелирование, воронение. Для снятия остаточных напряжений в этих случаях необходим отжиг детали после обработки.

При токарной обработке острым резцом возможно появление остаточных напряжений растяжения. При грубой обточке тупым резцом с уменьшенным углом наклона задней грани резца вследствие пластической деформации могут возникнуть остаточные напряжения сжатия, повышающие прочность.

Влияние поверхностного упрочнения оценивается коэффициентом $K_V = \frac{\sigma_{-1\text{упроч}}}{\sigma_{-1\text{неупроч}}} > 1$, где $\sigma_{-1\text{упроч}}$ и $\sigma_{-1\text{неупроч}}$ — пределы выносливости при симметричном цикле соответственно упрочненного и неупрочненного образцов.

Эффект упрочнения особенно велик для деталей с концентраторами напряжений $K_V \approx 2 - 3$, тогда как для гладких деталей $K_V < 1,4$.

15.5.5. Влияние коррозии

Воздействие коррозионной среды существенно снижает усталостную прочность. В условиях коррозии исчезает само понятие предела выносливости, то есть разрушение происходит и при числах циклов $N \square 10^8 - 10^{12}$ циклов, значительно

превосходящих базовое $N_0 = 2 \cdot 10^6$ циклов. В этих случаях усталостную кривую изображают в виде двух наклонных прямых (рис. 15.21).

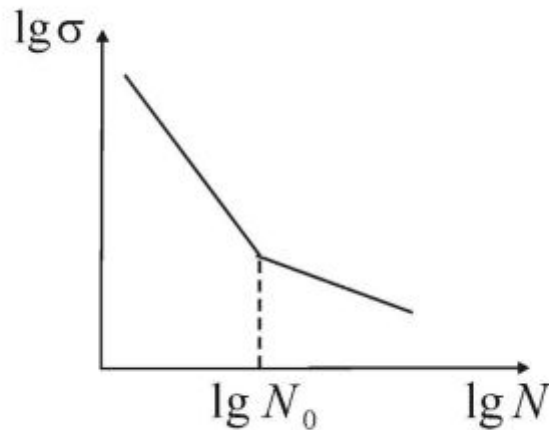


Рис. 15.21. Влияние коррозии на усталостную кривую

15.5.6. Влияние температуры

С понижением температуры прочность материалов сильно возрастает, если материал находится в пластичном состоянии, и очень медленно растет, если материал находится в хрупком состоянии. Это относится ко всем характеристикам прочности: и к пределу текучести, и к пределу прочности, и к пределу выносливости (глава 17, рис. 17.2).

С повышением температуры предел выносливости материалов убывает, с понижением температуры растет.

В интервале температур от -200°C до 200°C (рис. 17.2) зависимость предела выносливости от температуры можно приближенно описать выражением [12]

$$\sigma_{-1T} = \sigma_{-1T_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\beta},$$

где $\beta = 0,7 - 0,003 \cdot \sigma_{\text{в}}$, σ_{-1T} и σ_{-1T_0} — пределы выносливости при симметричном цикле при температурах T и $T_0 = 293\text{K}$ (20°C)

15.6. Предел выносливости детали

Перечисленные факторы могут в несколько раз уменьшить предел выносливости детали по сравнению с пределом выносливости стандартного образца. Для учета влияния всех факторов при расчете на усталостную прочность используется поправочный коэффициент K по ГОСТ 25.504-82.

$$K = \left(\frac{K_{\sigma}}{K_d} + \frac{1}{K_F} - 1 \right) \frac{1}{K_V \cdot K_A}.$$

Коэффициент K_A предназначен для учета прочих факторов, неучтенных остальными коэффициентами.

Предел выносливости детали при симметричном цикле нагружения $\sigma_{-1}^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}}{K}$, где σ_{-1} — предел выносливости стандартного образца $d_0 = 5$ мм.

При проведении расчетов на усталостную прочность полагают, что перечисленные факторы не влияют на прочность при постоянной статической нагрузке. Так как любой цикл нагружения можно представить как наложение симметричного цикла

(σ_a) на постоянную нагрузку (σ_m), то предел выносливости детали при асимметричном цикле нагружения

$$\sigma_r^{\text{дет}} = \sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}} = \frac{\sigma_a}{K} + \sigma_m, \text{ где } \sigma_a \text{ и } \sigma_m \text{ — амплитуда и среднее напряжение}$$

цикла, соответствующие пределу выносливости стандартного образца при том же коэффициенте асимметрии цикла r , что и у рассматриваемой детали.

15.7. Расчет на усталостную прочность

Построим диаграмму предельных амплитуд детали по двум точкам (рис. 15.22), отложив на осях $\sigma_{-1}^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}}{K}$ и S_k . На оси σ_m отметим точку $\sigma_m = \sigma_T$ и проведем через нее прямую под углом 45° . Для любой точки на этой прямой $\sigma_{\text{max}} = \sigma_a + \sigma_m = \sigma_T$.

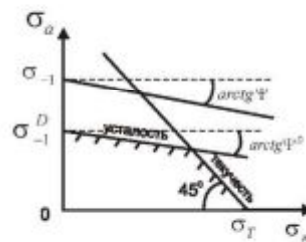


Рис. 15.22. Области расчета на усталость и текучесть на диаграмме предельных амплитуд детали

Если предел выносливости детали $\sigma_r^{\text{дет}} = \sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}} < \sigma_T$, расчет ведется на усталостную прочность.

Если $\sigma_r^{\text{дет}} = \sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}} > \sigma_T$, расчет ведется на статическую прочность по пределу текучести.

Расчет на усталостную прочность обычно проводят в два этапа:

- Подбор размеров детали из условия статической прочности при заниженных допускаемых напряжениях $\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$, где $n = 6 - 8$ — коэффициент запаса.
- Проверка на усталостную прочность по коэффициенту запаса усталостной прочности $n_y = \frac{\sigma_r^{\text{дет}}}{\max \sigma_{\text{раб}}} \geq [n_y]$, где $[n_y]$ — допускаемый коэффициент запаса, выбираемый по справочникам [8], [19]. $\max \sigma_{\text{раб}}$ — максимальные рабочие напряжения в детали.

Рассмотрим проверку по усталостной прочности.

$$\text{При симметричном цикле } n_y = \frac{\sigma_r^{\text{дет}}}{\max \sigma_{\text{раб}}} = \frac{\sigma_{-1}}{K \cdot \max \sigma_{\text{раб}}} \geq [n_y].$$

При асимметричном цикле предел выносливости детали определяем с помощью диаграммы предельных амплитуд детали (рис. 15.23). Для заданного коэффициента асимметрии r проведем луч OAB , для которого $\text{tg } \beta = \frac{1-r}{1+r}$. На этом луче точка A соответствует реальным рабочим напряжениям в детали, Точка B соответствует разрушающим напряжениям (пределу выносливости детали).

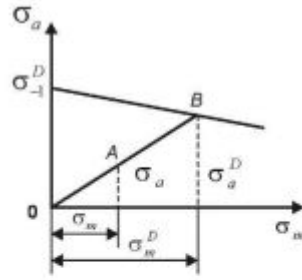


Рис. 15.23. К определению коэффициента запаса усталостной прочности

Если максимальные напряжения в детали $\max \sigma = \sigma_a + \sigma_m$, а предел выносливости детали $\sigma_r^{\text{дет}} = \sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}}$, то из подобия треугольников коэффициент запаса усталостной прочности по нормальным напряжениям

$$n_y = \frac{\sigma_r^{\text{дет}}}{\max \sigma} = \frac{\sigma_a^{\text{дет}} + \sigma_m^{\text{дет}}}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{\sigma_a^{\text{дет}}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_m^{\text{дет}}}{\sigma_m} = \frac{OB}{OA}.$$

Откуда $\sigma_a^{\text{дет}} = n_y \cdot \sigma_a$; $\sigma_m^{\text{дет}} = n_y \cdot \sigma_m$

$$\sigma_{-1}^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}}{K}; \quad \psi^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}^{\text{дет}}}{S_k} = \frac{\sigma_{-1}}{S_k \cdot K} = \frac{\psi}{K},$$

где $\psi^{\text{дет}}$ и ψ — тангенс угла наклона диаграммы предельных амплитуд соответственно для детали и для стандартного образца.

Уравнение диаграммы предельных амплитуд

$$\sigma_a^{\text{дет}} = n_y \cdot \sigma_a = \sigma_{-1}^{\text{дет}} - \psi^{\text{дет}} \cdot \sigma_m^{\text{дет}} = \frac{\sigma_{-1}}{K} - \frac{\psi}{K} \cdot n_y \cdot \sigma_m.$$

Откуда коэффициент запаса усталостной прочности

$$n_y = \frac{\sigma_r^{\text{дет}}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{K \cdot \sigma_a + \psi \cdot \sigma_m} \geq [n_y],$$

где $\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m$ — рабочие напряжения в детали.

При сложном напряженном состоянии коэффициент запаса определяется по эмпирической формуле Гафа и Полларда

$$\frac{1}{n_y^2} = \frac{1}{n_{y\sigma}^2} + \frac{1}{n_{y\tau}^2},$$

где $n_{y\sigma}$ — коэффициент запаса по нормальным напряжениям (при изгибе и при растяжении), выше обозначенный n_y . $n_{y\tau}$ — коэффициент запаса по касательным напряжениям (при кручении и при сдвиге), определяемый аналогично $n_{y\sigma}$

$$n_{y\sigma} = \frac{\sigma_r^{\text{дет}}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \cdot \sigma_a + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} \quad n_{y\tau} = \frac{\tau_r^{\text{дет}}}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau \cdot \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m}.$$

В электронной книге в разделе **Для главы 15** приведено несколько примеров расчета деталей на усталостную прочность.

15.8. Понятие о малоцикловой усталости

Малоцикловой усталостью называют циклическое нагружение материала, при котором максимальное напряжение цикла превышает предел текучести $\sigma_{\max} > \sigma_T$.

Долговечность при малоцикловой усталости $N < 10^5$ циклов.

При обычной многоцикловой усталости напряжения в конструкции определяют по формулам сопротивления материалов. В качестве предельного напряжения берут предел выносливости или предел ограниченной выносливости при расчетах на долговечность.

При малоцикловой усталости необходим учет пластических деформаций. Расчет напряжений и деформаций производится методами теории пластичности. Особенность, резко усложняющая расчет, состоит в нестабильности диаграммы деформирования. Она изменяется от цикла к циклу.

Графически зависимость напряжений от деформаций при малоцикловой усталости представляет собой петлю гистерезиса (рис. 15.24), изменяющуюся от цикла к циклу.

Она характеризуется шириной петли ε^P и максимальным напряжением σ_{\max} .

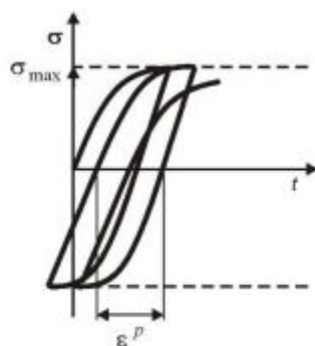


Рис. 15.24. Петля гистерезиса при малоцикловой усталости

По результатам экспериментальных замеров петель гистерезиса строится обобщенная кривая циклического деформирования. Она представляет собой половинки петель гистерезиса.

При совмещении петель, записанных при различных действующих нагрузках, но одинаковом номере полуцикла деформации кривые петель гистерезиса совпадают, образуя единую *обобщенную диаграмму циклического деформирования* (ОДЦД) для данного номера полуцикла нагружения (рис. 15.25).

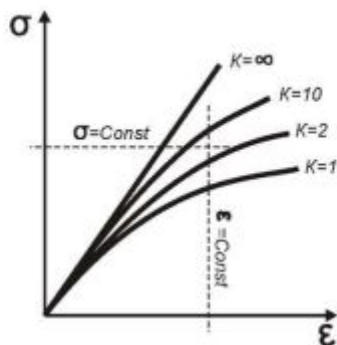


Рис. 15.25. Обобщенная диаграмма циклического деформирования

Для экспериментальных ОДЦД выбирается аппроксимация, линейная или степенная, как описано в разделе 8.1.

С использованием ОДЦД методами теории пластичности определяются максимальные упругопластические напряжения и деформации в конструкции σ_{\max} и ε_{\max} .

По результатам испытаний на малоцикловую усталость строится усталостная кривая в координатах $\varepsilon_a - N$ или $\sigma_a - N$, где ε_a, σ_a — амплитудные значения разрушающих деформаций или напряжений, N — число циклов до разрушения.

Далее определяются коэффициенты запаса по деформациям или напряжениям $n_\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_a^g} = n_\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_a^g} \geq [n_\varepsilon, n_\sigma]$ и коэффициенты запаса по долговечности $n_N = \frac{N}{N^g} \geq [n_N]$, где $\varepsilon_a^g, \sigma_a^g, N^g$ — эксплуатационные значения амплитуды деформаций, напряжений и числа циклов нагружения.

Допускаемые значения коэффициентов запаса

$$[n_\varepsilon] = [n_\sigma] \approx 1,5 - 2, \quad [n_N] \approx 3 - 10.$$

При заданных значениях коэффициентов запаса по расчетно-экспериментальным формулам строится кривая, связывающая допускаемые значения деформаций $[\varepsilon]$, напряжений $[\sigma_a]$ и долговечности $[N]$ (рис. 15.26).

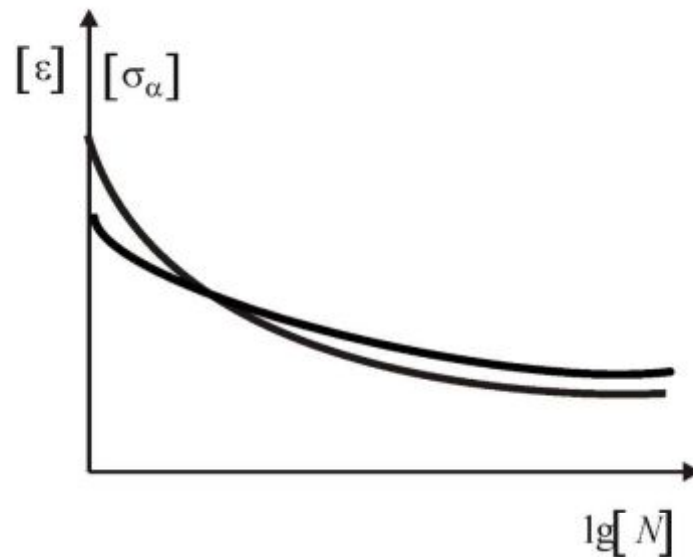


Рис. 15. 26. Связь допускаемых величин при заданном коэффициенте запаса

Расчет на малоцикловую усталость очень сложный. Он требует глубоких знаний теории пластичности, метода конечных элементов, большого количества экспериментальных данных и выходит далеко за рамки курса сопротивления материалов.

Для чего нужен такой расчет? В особо ответственных конструкциях (в космической технике, ядерной энергетике, при создании современного вооружения) ставится задача увеличения нагрузок при снижении веса конструкции, повышения надежности работы изделия. Для этого приходится уменьшать коэффициенты запаса, вторгаться в область пластических деформаций.

Если нет таких суровых требований к конструкции, то можно или уменьшить рабочие нагрузки, или увеличить толщину стенок конструкции, прибавив ее вес, выйти из области малоциклового в область многоциклового усталости и провести сравнительно простой расчет по формулам сопротивления материалов.

Глава 16. Природа разрушения твердых тел

16.1. Природа упругой деформации

По своей структуре твердые тела бывают кристаллические и аморфные. Все металлы и сплавы имеют кристаллическое строение. Атомы в кристаллической решетке находятся в строгом порядке.

Между атомами действуют силы взаимодействия. Чтобы переместить атом из одного узла решетки в другой надо приложить значительное усилие, преодолеть энергетический барьер.

Прочность твердого тела обеспечивается силами притяжения между частицами. Электронная структура атомов определяет связь между ними. Межатомные связи в твердых телах бывают двух типов: первичные и вторичные.

Энергия первичных связей (ионных, ковалентных или металлических) составляет от 2 до 8 электронвольт. Вторичные связи, например, вандерваальсовы, имеют энергию от 0,02 до 0,2 эВ. Водородная связь, относящаяся к промежуточному типу, имеет энергию от 0,2 до 0,5 эВ.

Полному сближению атомов мешают возрастающая по мере уменьшения межатомного расстояния сила отталкивания, возникающая вследствие деформации электронных оболочек, а также сила отталкивания между положительно заряженными ионами.

Удалению атомов препятствует сила притяжения отрицательно заряженной электронной оболочки к положительно заряженному ядру атома.

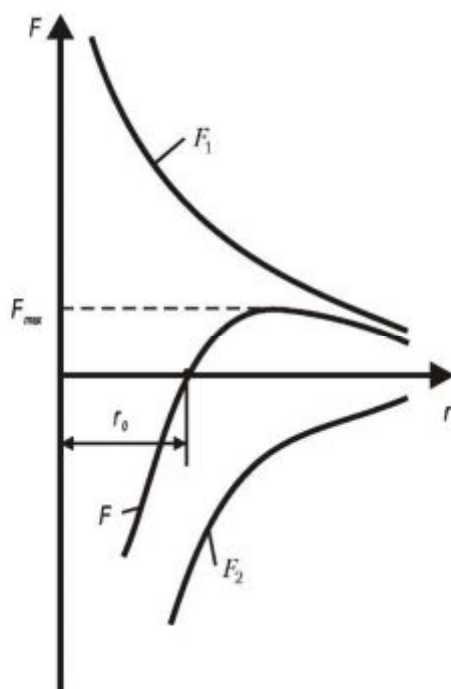


Рис. 16.1 Силы взаимодействия двух атомов

Зависимости силы притяжения F_1 , силы отталкивания F_2 и суммарной силы взаимодействия между атомами $F = F_1 + F_2$ от расстояния между атомами r показаны на рис. 16.1. Когда $F_1 = F_2$, атомы находятся в равновесии. Равновесное расстояние между атомами $r_0 \approx 10^{-8}$ см (от 1 до 4 ангстрем). Чтобы оторвать атомы

друг от друга надо приложить силу $F > F_{\max}$.

16.2. Теоретическая прочность твердых тел

Определим прочность твердого тела, предполагая отсутствие пластических деформаций. При хрупком разрушении в кристалле образуются две новые поверхности (рис. 16.2). На этих поверхностях разрыва межатомные связи оказываются свободными, и идут на создание поверхностного натяжения. Энергия этих связей является поверхностной энергией.

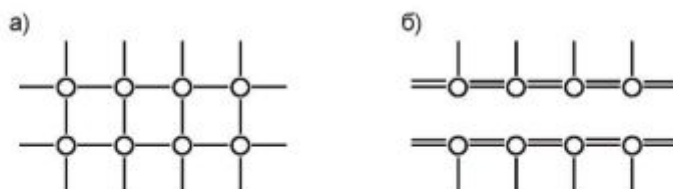


Рис. 16.2 Разделение двух слоев атомов при разрушении

Согласно предположению Гриффитса, хрупкое разрушение происходит тогда, когда величина потенциальной энергии упругой деформации, накопленной в теле, достигнет уровня энергии, необходимой для образования двух новых поверхностей, то есть разделения тела на две части.

Найдем напряжение, необходимое для разделения двух прилегающих друг к другу атомных слоев. Энергия деформации, накопленная в теле,

$$П = П_0 \cdot V,$$

где $П_0 = \sigma^2 / (2 \cdot E)$ — удельная потенциальная энергия упругой деформации; $V = A \cdot r$ — объем, заключенный между двумя слоями атомов; r — расстояние между атомами.

По условию Гриффитса

$$П = \frac{\sigma_{\text{теор}}^2}{2 \cdot E} \cdot A \cdot r = 2 \cdot \gamma \cdot A,$$

где γ — удельная энергия образования новых поверхностей; $\sigma_{\text{теор}}$ — разрушающее напряжение (теоретическая прочность).

$$\text{Откуда } \sigma_{\text{теор}} = 2 \cdot \sqrt{E \cdot \gamma / r_0}.$$

Найденное значение теоретической прочности, как показывают более точные расчеты, завышено примерно вдвое, так как предполагает соблюдение закона Гука до момента разрушения, поэтому часто используют значение $\sigma_{\text{теор}} = \sqrt{E \cdot \gamma / r_0}$. Численный расчет теоретической прочности мягкой стали приведен на рис. 16.3.

$$\begin{aligned} \text{см} &= 0.01 \cdot \text{м} & \text{МПа} &:= 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} & \text{производные размерности} \\ \text{Для стали} & & \eta &:= 2 \cdot 10^{-8} \cdot \text{см} & E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа} & \gamma := 1 \cdot \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} \\ & & \gamma &:= 1 \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} & \text{джоуль на м}^2 & \\ \sigma_{\text{теор}} &:= \sqrt{\frac{E \cdot \gamma}{\eta}} & \sigma_{\text{теор}} &= 31.623 \times 10^3 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Рис. 16.3 Расчет теоретической прочности стали

Реальная прочность углеродистой стали в 50 – 100 раз меньше теоретической прочности. Считается, что $\sigma_{\text{теор}} \approx (0,1 - 0,2)E$. При достижении теоретической прочности тело должно разделиться на отдельные слои атомов. Действительно, при разрыве сверхтонких стеклянных усов, где достигается прочность, близкая к теоретической, образец разлетается в пыль.

16.3. Реальная прочность. Роль дефектов структуры

Причина расхождения между реальной и теоретической прочностью в том, что при расчете теоретической прочности принимаем, будто все атомы в сечении одновременно разрывают свои связи. В действительности же атомные связи разрываются постепенно одна за другой.

Разрушение реальных кристаллов происходит в 2 стадии:

- Возникновение трещин в дефектных местах;
- Распространение трещин по всему сечению с разделением тела на части.

В каждом теле содержатся технологические дефекты. На поверхности — следы механической обработки, Внутри — раковины, усадочные, закалочные и другие трещины, неметаллические включения и так далее. Но эти дефекты могут и отсутствовать в теле, что не приводит, однако, к теоретической прочности.

Основную роль играют дефекты атомного строения, без которых реальных материалов не существует.

Одними из простейших дефектов кристаллической решетки являются: вакансия, образующаяся при уходе атома из узла кристаллической решетки, и межузельный атом, то есть лишний атом, для которого не нашлось свободного узла. Эти и подобные им дефекты называются точечными.

К линейным дефектам относятся дислокации, которые неизбежно образуются в процессе кристаллизации металла. Если слои атомов в кристалле представить себе страницами книги, то дислокация — это край незавершенного листа, вставленного между страницами книги.

На границе "лишнего" слоя, называемого экстраплоскостью, атомы сдвинуты на угол, примерно соответствующий теоретической прочности на сдвиг, то есть в этих зонах кристалл почти разрушен.

Дислокации являются подвижными. Достаточно небольшой сдвиговой нагрузки, чтобы разорвать всю линию сильно натянутых связей и передвинуть дислокацию.

16.4. Виды дислокаций

Существуют два вида дислокаций: краевая и винтовая, которые только вместе и могут вызвать пластическую деформацию кристаллов. В реальных условиях дислокации бывают, как правило, криволинейными, то есть смешанными.

Краевая дислокация — дефект, образованный лишней атомной полуплоскостью, вставленной в кристалл. Это край лишней полуплоскости (отсюда название краевая), который вместе с прилегающими атомами имеет вид шнура. Поперечное сечение шнура близко к 4-м межатомным расстояниям, ($\approx 10^{-7}$ см). Длина края атомной полуплоскости, называемой экстраплоскостью, составляет от 10^{-3} до 10^{-4} см в поликристаллах с примерно таким же размером зерна. Такая дислокация — это линейный дефект.

Дислокация вызывает внутренние напряжения в кристаллической решетке $\tau \approx 1/r$, где r — расстояние от оси дислокации.

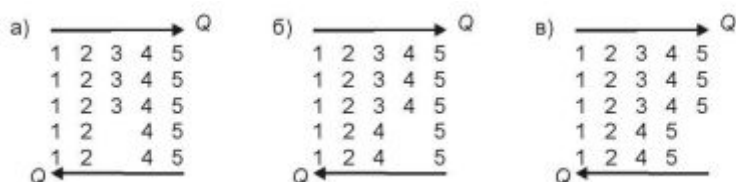


Рис. 16.4 Движение краевой дислокации

Рассмотрим движение дислокации. На рисунке 16.4, а цифрами 1,2,3,4,5 отмечены атомы пяти атомных плоскостей, цифрой 3 — экстраплоскость с краевой дислокацией.

Под действием сдвигающей нагрузки Q разрываются связи в слое атомов 4, так как они уже испытывали высокие напряжения от искажения кристаллической решетки.

Атомы слоя 4 переходят в слой 3, образуя новую бездефектную плоскость. Экстраплоскостью с краевой дислокацией становится оставшаяся часть слоя атомов 4. В результате дислокация сместилась на одно межатомное расстояние (рис. 16.4, б).

При дальнейшем приложении нагрузки Q дислокация перемещается на край кристалла, образуя на его поверхности ступеньку, (рис. 16.4, в).

При движении дислокации ни один атом не смещается от своего исходного положения более, чем на одно межатомное расстояние ($\sim 10^{-10}$ м).

Линейная (краевая) дислокация движется в направлении, перпендикулярном к экстраплоскости.

Винтовая дислокация — это закручивание одной атомной плоскости относительно другой (рис. 16.5, а).

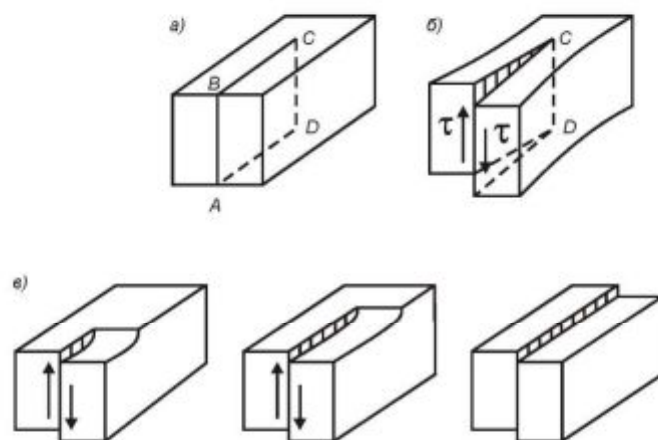


Рис. 16.5 Схема образования винтовой дислокации

В кристалле сделан надрез по плоскости ABCD и в ней произведен сдвиг в направлении действия сдвигающей силы τ . В новом положении стороны скреплены по надрезу. Таким образом в кристалл введена винтовая дислокация (рис. 16.5, б). Атомные плоскости, пересекающие линию дислокации CD, вблизи ее винтообразно искривляются. Искривленная зона имеет цилиндрическую симметрию и локализуется в узкой области вокруг линии дислокации CD и вдоль ее. Винтовая дислокация движется в плоскости сдвига, образуя ступеньку при выходе на поверхность (рис. 16.5, в).

Реальные дислокации можно рассматривать как сумму краевой и винтовой дислокаций. Под действием касательного напряжения участок дислокации с чисто краевой ориентацией скользит в направлении приложенного напряжения, с чисто винтовой ориентацией перпендикулярно напряжению, а участок смешанной дислокации скользит в промежуточном направлении.

Дислокации порождают сильные, медленно спадающие поля напряжений $\tau \approx 1/r$. Например для железа в ядре винтовой дислокации $\tau \approx 2300$ МПа.

В силу сдвигового характера напряжений присутствие дислокаций не вызывает изменения объема кристалла, так же как пластическая деформация в целом не изменяет объем металлических тел.

Энергия кристаллов при введении в них дислокаций возрастает за счет искажений кристаллической решетки.

16.5. Размножение дислокаций

В результате пластической деформации плотность дислокаций увеличивается с 10^4 см^{-2} в исходном состоянии до 10^{12} см^{-2} . Источником возникновения новых дислокаций являются сами дислокации.

Дислокацию удобно рассматривать как упругую деформируемую нить (рис. 16.6). Отрезок дислокации АВ, длиной L , закрепленный по концам (рис. 16.6, а), под действием касательного напряжения τ будет изгибаться и одновременно вытягиваться.

При возрастании τ от 0 до τ_{max} дислокация вытянется в полуокружность. (рис. 16.6, б). Радиус кривизны ее будет минимальным, а напряжения максимальными.

Дальнейшее расширение петли требует меньшего напряжения, так как радиус кривизны петли будет увеличиваться (рис. 16.6, в). Дислокация раздувается как мыльный пузырь, и закручивается вокруг точек закрепления А и В в виде двух симметричных спиралей, которые в конце концов соприкасаются.

Отдельные участки петли поворачиваются и меняют структуру и знак. Так, в точках 1, 2 дислокация краевая, в точках 3, 4 винтовая, в промежутках между этими точками смешанная. При соприкосновении в точке 4 участки винтовой дислокации с разными знаками взаимно уничтожаются, петля замыкается и продолжает расширяться (рис. 1.6, г,д).

Оставшаяся дислокация А4В сначала выпрямляется под действием линейного натяжения, а затем при удалении первой петли под действием касательного напряжения τ снова начнет изгибаться и, пройдя все показанные стадии, образует новую петлю и породит новую дислокацию. Этот источник дислокаций, называемый *источником Франка-Рида*, может генерировать большое число дислокаций в исходной плоскости скольжения.

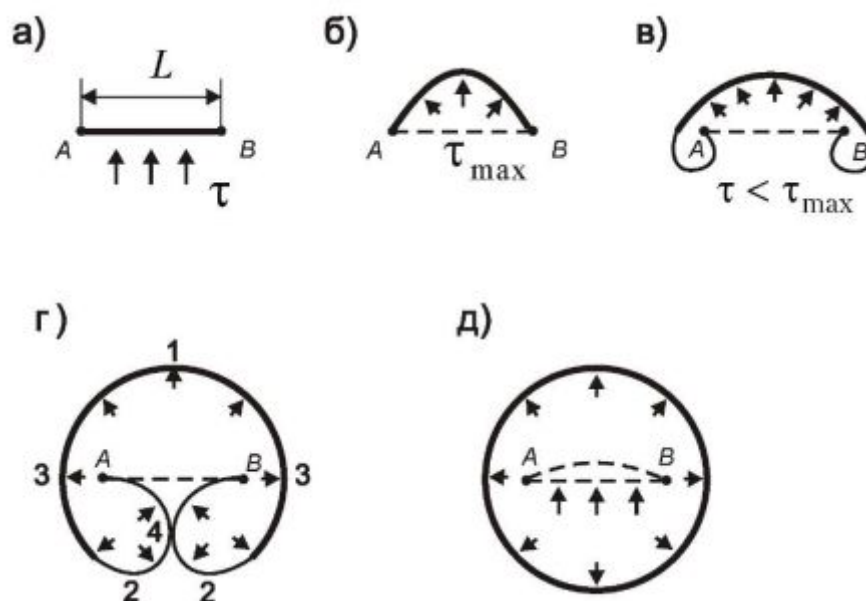


Рис. 16.6 Размножение дислокаций (источник Франка-Рида)

Независимо от интенсивности работы источников Франка-Рида плотность дислокаций в пластически деформируемых металлах не поднимается выше $10^{12} - 10^{13}$ см⁻². На этом предельном уровне плотности дислокаций устанавливается подвижное равновесие числа появляющихся новых дислокаций и числа исчезающих в результате выхода на поверхность и аннигиляции.

16.6. Механизмы упрочнения

Упрочнение оценивается по величине напряжения, необходимого для движения дислокаций и роста деформации.

Деформационное упрочнение

Вокруг дислокаций возникают поля напряжений. При сближении дислокаций взаимодействие их полей напряжений ведет к росту силы отталкивания между дислокациями, торможению их движения и образованию скоплений дислокаций, которые подавляют источники Франка-Рида. Тем самым растет сила сопротивления деформации, то есть происходит деформационное упрочнение.

Деформационное упрочнение затухает в процессе деформации. Это объясняется тем, что плотность дислокаций не поднимается выше 10^{12} см⁻².

Упрочнение за счет уменьшения размеров зерен

Границы зерен, имеющих различную кристаллографическую ориентировку, являются непреодолимым препятствием для дислокаций.

Дислокации, испускаемые источником, тормозятся у границы зерна, образуя плоские скопления, которые давят на границу с силой, пропорциональной числу дислокаций. Это давление передается через границу и заставляет работать новый источник Франка-Рида.

Такой механизм резко повышает напряжение, необходимое для пластической деформации. Чем меньше размеры зерен, тем больше непреодолимых препятствий для движения дислокаций, тем больше сопротивление пластической деформации.

Упрочнение легированием твердых растворов

Легирующие элементы и случайные примеси упрочняют сплавы благодаря неоднородным упругим деформациям (искажениям) кристаллической решетки, возникающим вследствие внедрения лишних атомов в решетку или разности размеров атомов основной решетки и атомов примесей в растворах замещения. Напряжения, вызванные этими деформациями, тормозят движение дислокаций.

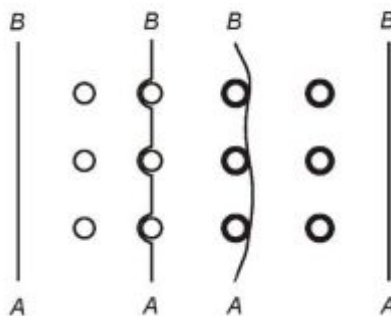


Рис. 16.7 Протаскивание дислокации через строй дисперсных частиц

Упрочнение за счет выделения дисперсных частиц при старении

Пересыщенные твердые растворы при определенных температурных условиях распадаются с образованием дисперсных частиц. Этот распад может стимулироваться пластической деформацией.

Если дислокация встречает на своем пути дисперсные выделения (рис. 16.7), действующая на нее сила τ протаскивает дислокацию между включениями. Линия дислокации выгибается в петли и уходит дальше, оставляя на каждом включении дислокационное кольцо.

Если через строй дисперсных включений проходит не одна, а много дислокаций, то каждая из них оставляет у каждой частицы кольца, которые, накапливаясь, создают сильное поле напряжений, тормозящее движение дислокаций.

Следует заметить, что все описанные механизмы упрочнения повышают сопротивление металлов пластическим деформациям, а не сопротивление разрушению.

16.7. Механизм больших пластических деформаций

Появление больших пластических деформаций невозможно объяснить только за счет движения единичных дислокаций.

На этой стадии деформации в материале появляются клиновые деформации, получившие название *дисклинации*. Образование их связано с поворотным смещением, в то время как образование краевых и винтовых дислокаций связано с трансляционным смещением.

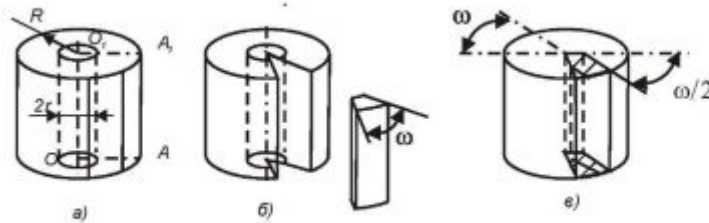


Рис. 16.8 Схема образования дисклинаций

Что такое дисклинация рассмотрим на примере цилиндра радиусом R с отверстием вдоль оси O_1O радиусом r (рис. 16.8, а).

Вырежем из цилиндра клин с углом при вершине ω . Берега надреза стянем вместе и сварим по плоскости OO_1A_1A . В результате в цилиндре возникают кольцевые растягивающие напряжения. В цилиндр введена положительная дисклинация.

Разрежем цилиндр вдоль оси и вставим в разрез клин (рис. 16.8, б). В цилиндре возникают кольцевые сжимающие напряжения. В цилиндр введена отрицательная дисклинация.

Существуют полные, частичные дисклинации и дисклинационный диполь. В полной дисклинации поворот берегов должен соответствовать симметрии кристалла и составляет 60° или 90° . Энергия полной дисклинации очень велика и долго существовать в кристалле не может. В частичной дисклинации берега развернуты на угол $8^\circ - 10^\circ$.

В дисклинационном диполе берега разреза вначале развернуты на угол ω , а затем части плоских берегов развернуты на угол $\omega/2$ так, что они становятся параллельны друг другу (рис. 16.8, в).

Источники дисклинаций подобны источникам Франка-Рида. При своем движении дисклинация в зависимости от знака поглощает или испускает дислокации. Сдвигового смещения при движении дисклинаций не происходит, а осуществляется пластический разворот прилегающих областей кристалла.

16.8. Механизмы образования трещин

В результате взаимодействия дислокаций с жесткими препятствиями, например, включениями, внутренними неоднородностями, и между собой возникают большие местные напряжения, которые могут вызвать образование трещин размером в

несколько межатомных расстояний. Известно более 10 механизмов образования дислокационных трещин.

Механизм А.Н. Стро

Основная идея заключается в возникновении больших местных деформаций в конце заторможенного сдвига.

При торможении плоского скопления дислокаций в голове скопления $\tau_{\max} = n \cdot \tau$, где n — количество дислокаций в скоплении, τ — напряжение в плоскости скольжения от внешних сил. По линии действия σ_{\max} разрыв межатомных связей произойдет, когда $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{Теор}}$. Для образования трещины, например, в железе необходимо в скоплении 230 дислокаций.

Механизм А.Х. Коттрела

Два скопления красных дислокаций в пересекающихся плоскостях, встречаясь тормозят друг друга. Головные дислокации скоплений сливаются, образуя сидячую дислокацию, так как направление ее возможного движения уже не совпадает с направлением движения скоплений. Присоединение к сидячей дислокации других дислокаций образует микротрещину.

Безбарьерные механизмы

Например, вакансионный: цепочки вакансий, образующиеся при движении дислокации со ступеньками, объединяются в плоскую трещину с затупленными краями.

16.9. Механизмы роста трещин

Двигаясь под действием напряжений в скоплениях, дислокации выходят на берег трещины, образуя ступеньку (сваливаясь в трещину) и постепенно увеличивая ширину трещины.

Другой механизм: поглощение трещиной вакансий. Объединение вакансий создает поры. Диффузия вакансий инициируется различием их химических потенциалов.

16.10. Механизмы пластического разрушения

Механизмы пластического разрушения многообразны, так как разрушение зависит от различных комбинаций напряжений и деформаций, а также от их предьстории, от отношения размеров детали к расстоянию между включениями, от анизотропии включений и др.

Пластическое разрушение может происходить путем раскрытия и слияния пор, возникающих у включений или иных неоднородностей, путем роста тонких трещин, путем деформационного разупрочнения и образования интенсивных полос скольжения или роста пор, возникающих от дислокаций или их пересечения.

Различные механизмы приводят к разным формам макроскопического разрушения: чашечка и конус, срез, отрыв, розетка и шиферный излом

Для примера рассмотрим ямочный излом. Он характеризуется разрастанием микропустот. Впереди растущей в зоне концентрации напряжений вязкой трещины наблюдается интенсивное образование пор. Разрушение сопровождается макропластической деформацией, пока идет разрастание и слияние смежных пустот, а с определенного времени локальной деформацией перемычек между пустотами вплоть до их разрыва.

В изломе обнаруживается рельеф, состоящий из больших и малых ямок. Ямочный излом очень распространен и наблюдается как при кратковременном, так и при длительном статическом нагружении, а также на определенных стадиях усталостного разрушения.

16.11. Механизм хрупкого разрушения

Если сопротивление движению дислокаций велико, разрушение может произойти в условиях неподвижности или малоподвижности дислокаций без видимых пластических деформаций. Такое разрушение называется хрупким.

Для прохождения пластической деформации необходимо время, зависящее от вязкости материала. Скорость распространения хрупкой трещины в материале постоянна и близка к скорости распространения звука.

При изменении условий нагружения, например, при снижении температуры, может произойти переход от пластического разрушения к хрупкому, так как возрастает сопротивление пластической деформации (движению дислокаций). При малой вязкости хрупкое разрушение имеет следы пластической деформации.

Рассмотрим предложенные Гриффитсом и Орованами механизмы хрупкого разрушения.

По Гриффитсу при хрупком разрушении тела напряжения должны достигать теоретической прочности не по всему объему, а только лишь в вершине узкой и острой трещины. Такая трещина может начать увеличиваться в длину и приводить к разрушению при сравнительно низких номинальных напряжениях.

Если очень острая трещина (радиус кривизны при вершине имеет порядок межатомного расстояния $\sim 10^{-8}$ см) длиной $2l$ и с радиусом при вершине трещины ρ расположена так, что ее плоскость нормальна к направлению растягивающих напряжений σ_0 в пластине с модулем Юнга E , то местное растягивающее напряжение при вершине трещины определяется по формуле Инглиса $\sigma = \sigma_0(1 + 2\sqrt{l/\rho})$.

Тогда критерием хрупкого разрушения будет являться достижение местным напряжением величины теоретической прочности $\approx 0,1E$. Отсюда хрупкая прочность $\sigma_0 = 0,05E\sqrt{\rho/l}$. Этот вывод был сделан Орованами.

Поверхностная энергия G_c для хрупкого состояния тел имеет порядок ~ 1 Дж/м².

Формула Гриффитса $\sigma_0 = \sqrt{2G_c E / \pi l}$, о которой пойдет речь в главе 18 дает то же значение, что и формула Орована. Эти формулы выведены для одноосного растяжения.

Хрупкое разрушение имеет статистический характер, то есть сопровождается значительно большим разбросом разрушающих напряжений, чем пластическое.

Заметно влияние размеров на разрушающее напряжение (масштабный эффект). С увеличением размеров тела возрастает вероятность нахождения в нем наиболее опасных дефектов. Средневероятная прочность хрупкого тела снижается с ростом размеров, а разброс результатов испытаний уменьшается.

Глава 17. Факторы, влияющие на прочность и разрушение материалов

В зависимости от условий эксплуатации конструкции механические характеристики материала могут изменяться очень сильно. Может измениться и характер разрушения (с пластического на хрупкий). Рассмотрим основные факторы, влияющие на прочность и разрушение материалов.

17.1 Время действия статической нагрузки

При постоянной нагрузке с течением времени напряжения и деформации в конструкции меняются. В зависимости от материала и от температуры эти изменения могут быть различными.

17.1.1. Ползучесть

Изменение деформаций во времени при постоянной нагрузке называется ползучестью или последействием. Последействие может быть упругим и пластическим. При упругом последействии появившиеся со временем деформации постепенно уменьшаются и исчезают после снятия нагрузки. При пластическом последействии после снятия нагрузки деформации уменьшаются незначительно. На рис. 17.1 показано изменение деформации во времени.

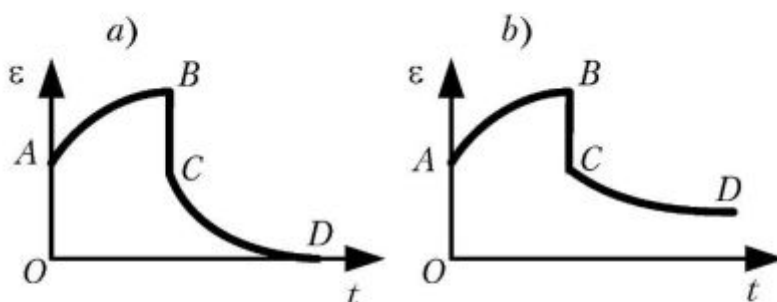


Рис. 17.1. Последействие упругое (а) и пластическое (б)

Деформация, возникшая при нагружении (участок OA), равная σ/E , с течением времени увеличивается (участок AB). При разгрузке исчезает упругая деформация, возникшая при нагрузке (участок BC). После разгрузки деформация медленно уменьшается (участок CD). Это явление называется обратным последействием или обратной ползучестью. В случае упругого последействия деформации исчезают полностью. В случае пластического последействия остаточные деформации полностью не исчезают.

Деформации ползучести зависят от напряжений, температуры и времени. Построить четырехмерную поверхность невозможно. Для построения плоских кривых ползучести приходится зафиксировать два параметра из трех. Примеры кривых ползучести показаны на рис. 10.2.

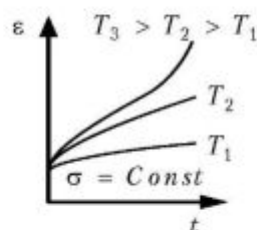


Рис. 17.2. Кривые ползучести при различных температурах T

Деформации ползучести увеличиваются с ростом напряжений, температуры и времени.

У стальных и чугунных деталей ползучесть заметна лишь при относительно высоких температурах (выше 300°C). При меньших температурах влиянием ползучести можно пренебречь.

Однако у ряда материалов с низкой температурой плавления (свинец, олово, алюминий) и у пластмасс явление ползучести заметно и при комнатной температуре (20°C).

Обычно ползучесть надо учитывать при расчетах конструкций, находящихся в процессе эксплуатации длительное время в нагретом состоянии. Это элементы конструкций паровых и газовых турбин, реактивных двигателей, паровых котлов, химических аппаратов и тепловых устройств.

Для сопоставления сопротивления ползучести разных материалов вводится характеристика, называемая пределом ползучести.

Пределом ползучести при заданной температуре называется *напряжение*, при котором деформация ползучести достигает определенной техническими условиями величины за заданный отрезок времени.

При длительном действии нагрузки деформация ползучести может привести к разрушению конструкции.

17.1.2. Релаксация

Существуют *мягкое* и *жесткое нагружение* элементов конструкции (рис. 17.3). При мягком нагружении (рис. 17.3, а) нагрузки остаются постоянными во времени, а перемещения могут расти свободно. В таких условиях наблюдается ползучесть материала. При жестком нагружении перемещений нет, конструкция жестко зафиксирована в нагруженном состоянии. В таких условиях вследствие ползучести материала наблюдается снижение (релаксация) напряжений в элементах конструкции.

Релаксацией называется снижение напряжений с течением времени при неизменном перемещении.

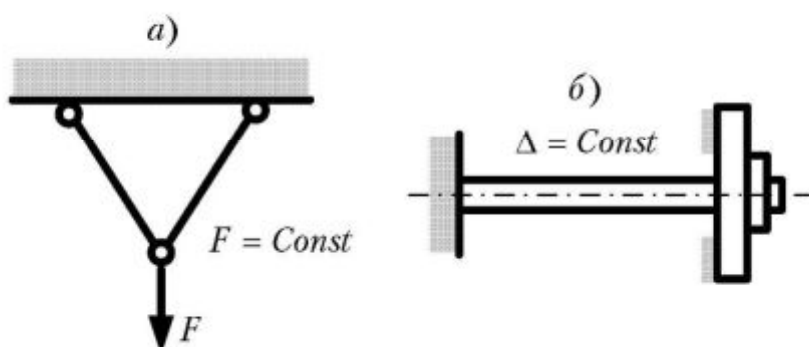


Рис. 17.3. Мягкое (а) и жесткое (б) нагружение конструкции

Полная деформация, остающаяся постоянной во времени, является суммой упругой деформации нагружения $\epsilon_{упр}$ и деформации ползучести $\epsilon_{полз}$

$$\epsilon = \epsilon_{упр} + \epsilon_{полз} = Const .$$

Деформация ползучести растет во времени, а, следовательно, упругая деформация уменьшается. Соответственно уменьшаются и упругие напряжения $\sigma = E \cdot \epsilon$ (рис.17.4).



Рис. 17.4. Релаксация (уменьшение) напряжений в конструкции

Примером релаксации может служить ослабление затяжки болтов со временем.

При жестком нагружении деформация ползучести не может стать больше исходной деформации нагружения и, следовательно, не может вызвать разрушения конструкции. Хотя, к примеру, самопроизвольное отвинчивание болтов может быть не менее опасным, чем разрушение конструкции.

17.1.3. Длительная прочность

Рост деформаций в процессе ползучести может вызвать разрушение конструкции. Чтобы не допустить разрушение, надо знать предел длительной прочности.

Пределом длительной прочности $\sigma_{дл}$ при заданной температуре называется *напряжение*, при котором происходит разрушение растянутого образца через заданный промежуток времени.

Для определения длительной прочности материала проводится испытание на растяжение до разрушения серии образцов при заданной температуре. Результаты испытаний наносят на график в логарифмических координатах $\lg \sigma - \lg t$ (рис. 17.5) и аппроксимируют прямой линией. Часто на графике наблюдается перелом, вызванный переходом материала от вязкого разрушения (при малой долговечности) к хрупкому (при большой долговечности).

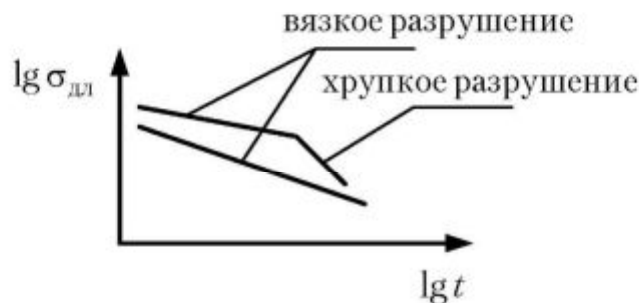


Рис. 17.5. Кривые длительной прочности

Зависимость времени до разрушения от напряжения в растянутом образце описывается формулой, аналогичной расчету долговечности при испытаниях на усталость $t = A\sigma_{дл}^{-m}$, где A и m — постоянные материала.

Для заданной долговечности предел длительной прочности уменьшается с ростом температуры испытаний.

Следует отметить, что все экспериментальные кривые длительной прочности, релаксации и ползучести строятся для определенной температуры испытаний.

Напряжения, деформации, время и температура — это четыре параметра, определяющих поведение материала в той или иной конструкции.

17.2. Скорость деформации

С повышением скорости деформации сопротивление пластической деформации растет, при этом предел текучести растет быстрее, чем предел прочности.

В интервале скоростей деформирования $10^{-4} - 10^4 \text{ с}^{-1}$ предел текучести σ_T сравнительно медленно растет с ростом скорости деформации V и может быть оценен по выражению $\sigma_{T,V} = \sigma_{T,V_0} + k \cdot \ln(V/V_0)$, где σ_{T,V_0} — предел текучести при некоторой малой скорости V_0 ; k — константа материала.

При больших скоростях нагружения (при ударном нагружении) сопротивление пластической деформации резко возрастает за счет инерционного сопротивления материала (рис.17.6), так как для протекания пластической деформации требуется определенное, хотя и малое время.

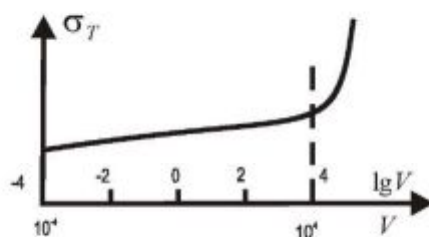


Рис. 17.6. Зависимость предела текучести от скорости деформации

17.3. Температура эксплуатации

С повышением температуры сопротивление пластической деформации падает. У конструкционных сталей изменение предела текучести значительно больше, чем у аустенитных сталей.

На рисунке 17.7 показан характер температурной зависимости сопротивления пластической деформации, то есть предела текучести и предела прочности. При переходе в хрупкое состояние T_{xp} происходит небольшое скачкообразное снижение указанных характеристик. При температурах порядка $300^\circ - 500^\circ\text{C}$ у конструкционных сталей возможно небольшое повышение прочности вследствие температурного старения. Пунктиром показано изменение свойств металлов, не подверженных температурному старению. По мере приближения к температуре плавления прочность стремится к нулю.

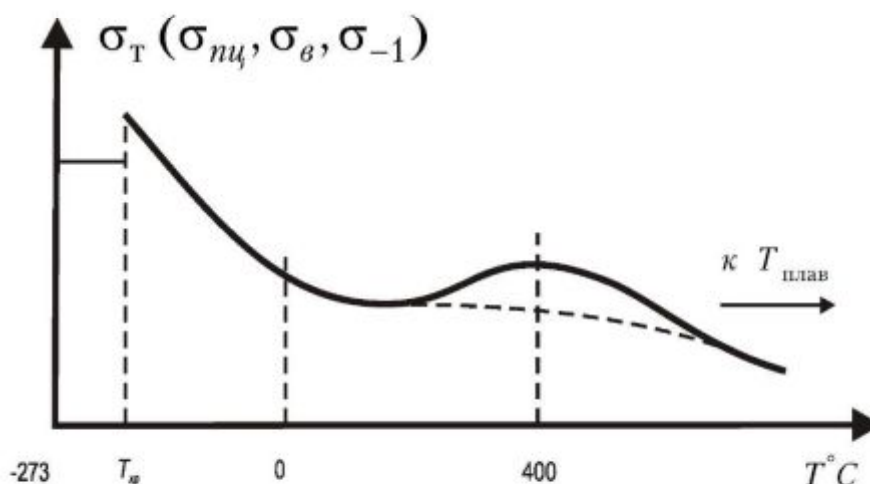


Рис. 17.7 Зависимость сопротивления пластической деформации от температуры

Причина снижения прочности в том, что с повышением температуры усиливаются тепловые колебания атомов. Для перемещения атома из одного положения в другое

необходимо преодолеть потенциальный барьер, то есть совершить работу за счет суммарного действия напряжений и тепловых колебаний атомов.

Понятно, что чем больше энергия тепловых колебаний, тем меньше напряжение, необходимое для пластической деформации. Кроме того, за счет термического расширения кристаллической решетки, увеличивается расстояние между атомами и уменьшаются силы межатомных связей.

Характер влияния на прочность материалов скорости деформации и температуры в принципе одинаков. Провести испытания материала на прочность при изменении температуры значительно проще, чем при изменении скорости деформации.

Для сравнения влияния скорости деформации и температуры часто используют приближенную связь между ними.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА

Снижение температуры на 15 градусов примерно эквивалентно увеличению скорости деформации в 10 раз.

17.4. Переход от пластического разрушения к хрупкому

В природе нет хрупких и пластичных материалов, а есть хрупкое и пластическое разрушение. В зависимости от условий эксплуатации большинство материалов может разрушаться и пластично и хрупко.

Хрупкое разрушение опасно тем, что оно происходит внезапно и мгновенно, зачастую сопровождаясь катастрофическими последствиями.

Задача конструктора изучить условия хрупко-вязкого перехода и ни в коем случае не допустить перехода материала конструкции из пластического состояния в хрупкое в процессе эксплуатации конструкции.

Пластическая деформация и хрупкое разрушение не связаны между собой, они совершаются различными механизмами и зависят от различных внешних и внутренних факторов.

Пластическое течение начинается в металле деформацией сдвига и вызывается действием касательных напряжений, в то время как отрыв одной части тела от другой совершается под действием только нормальных напряжений.

Под действием пластической деформации рост нормальных напряжений в теле резко замедляется, что затрудняет хрупкое разрушение отрывом. Характер разрушения тела определяется соотношением нормальных и касательных напряжений в теле и соотношением двух механических характеристик материала: сопротивлением сдвигу, при котором начинается пластическая деформация τ_T , и сопротивлением отрыву $S_{от}$, при котором происходит хрупкое разрушение.

Сопротивление сдвигу τ_T связано с напряжением трения, необходимым для движения дислокаций. При растяжении образцов можно принять предел текучести $\sigma_T \approx 2\tau_T$. Как уже отмечено, предел текучести растет с понижением температуры.

Сопротивление отрыву $S_{от}$ — это номинальное напряжение в растягиваемом образце, при котором происходит хрупкое разрушение, т.е. напряжение при вершине микротрещины достигает теоретической прочности (при отсутствии пластических деформаций).

Сопротивление отрыву практически не зависит от температуры, лишь предшествующая пластическая деформация, упрочняя материал, незначительно повышает сопротивление отрыву.

Переход материала из пластичного состояния в хрупкое носит название *хладноломкости*. Объяснение хладноломкости предложено академиком А.Ф.Иоффе и развито академиком Н.Н.Давиденковым.

При понижении температуры предел текучести растет сравнительно быстро, а сопротивление отрыву практически не изменяется (растет очень медленно) и при некоторой температуре $T_{кр}$, называемой критической температурой хрупкости $\sigma_T = S_{отр}$.

При $T > T_{кр}$ с увеличением действующей на растягиваемый образец нагрузки напряжения достигают вначале предела текучести и последующее разрушение будет пластическим (рис. 17.8). При $T < T_{кр}$ напряжения вначале достигают сопротивления отрыва и происходит хрупкое разрушение. Это явление называется хладноломкостью металлов.

К хладноломким металлам относятся металлы с кристаллической решеткой объемно-центрированного куба ОЦК, например, конструкционные стали.

Металлы с решеткой гранецентрированного куба ГЦК, например, аустенитные стали, медь, не проявляют признаков хладноломкости, что объясняется высокими значениями $S_{отр}$ и слабым изменением σ_T в зависимости от температуры. В результате кривые σ_T и $S_{отр}$ не пересекаются. Схема Иоффе для металлов с решеткой ОЦК изображена на рис. 17.8, а, а для металлов с решеткой ГЦК на рис. 17.8, б.

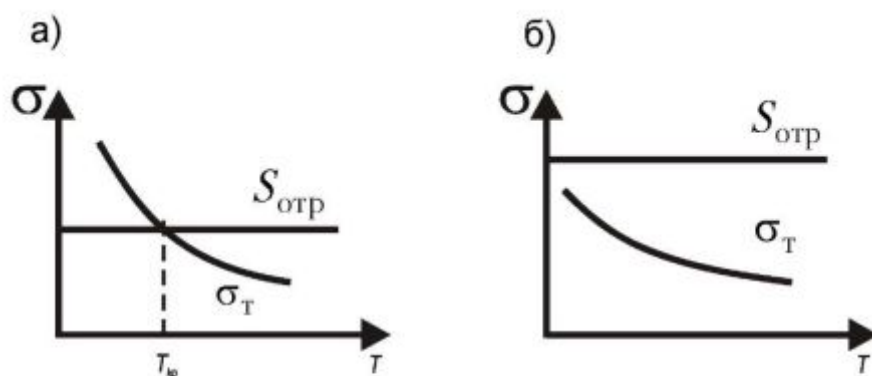


Рис. 17.8. Диаграмма хладноломкости Иоффе

При повышении предела текучести критическая температура хрупкости возрастает, что свидетельствует о склонности металла к хрупкому разрушению.

Повышение скорости деформации приводит к тому же эффекту, что и снижение температуры.

Критическая температура хрупкости как критерий общего запаса вязкости

Академик Н.Н. Давиденков предложил оценивать температурный запас вязкости по формуле $\eta = (T - T_{кр})/T$, где T — температура эксплуатации, $T_{кр}$ — критическая температура хрупко-вязкого перехода (рис. 17.8).

Если при использовании этой формулы учитывать количественную оценку смещения $T_{кр}$ под влиянием конструктивных и технологических факторов, то η становится качественным критерием общего запаса вязкости в элементах конструкции.

Рост скорости деформирования, увеличение размеров тела, концентрация напряжений повышают $T_{кр}$. С ростом размеров зерна хладноломких металлов резко снижается сопротивление отрыву, что повышает $T_{кр}$ и увеличивает опасность хрупкого разрушения. Для различных случаев имеются эмпирические формулы для оценки $T_{кр}$.

Важной характеристикой является чувствительность материалов к надрезу, то есть снижение прочности надрезанных образцов по сравнению с гладкими. С повышением прочности материалов их чувствительность к надрезу увеличивается, а

$T_{кр}$ повышается. Это объясняется ростом τ_T и $\tau_{ср}$, в то время как $S_{от}$ почти не меняется. Появляется опасность хрупкого разрушения. Эффект повышения прочности может стать отрицательным. Если с повышением прочности начинает падать пластичность, то $T_{кр}$ растет, а запас вязкости η уменьшается.

Следует иметь в виду, что параметр η применим лишь для хладноломких материалов и неприменим при действии коррозионной среды.

17.5. Напряженное состояние

Хрупкое разрушение вызывается нормальными напряжениями, пластическая деформация — касательными. Соотношение нормальных и касательных напряжений при нагружении тела зависит от вида напряженного состояния.

Влияние напряженного состояния на характер разрушения материала удобно оценивать с помощью диаграммы Я.Б. Фридмана. Эта диаграмма не позволяет рассчитать момент хрупко-вязкого перехода, но позволяет качественно оценить возможность такого перехода. Поэтому, не вдаваясь в детали, рассмотрим приближенное построение диаграммы и ее использование.

Характеристикой хрупкого разрушения считаем сопротивление отрыву $S_{от}$, характеристикой пластического разрушения — сопротивление срезу $\tau_{ср}$. Пластические деформации в металле появляются при достижении предела текучести τ_T . Все эти характеристики не зависят от вида напряженного состояния.

В системе координат $\sigma - \tau$ отложим на осях значения $\sigma = S_{от}$, $\tau = \tau_T$ и $\tau = \tau_{ср}$ и проведем через них прямые, параллельные осям. Это и есть *диаграмма Фридмана* для данного материала (рис. 17.9).

Введем *коэффициент жесткости напряженного состояния* $\alpha = \tau_{max} / \sigma_{max}$. Жестким будем считать напряженное состояние, затрудняющее возникновение пластической деформации и облегчающее хрупкое разрушение отрывом. Чем меньше α , тем жестче напряженное состояние, тем больше опасность хрупкого разрушения.

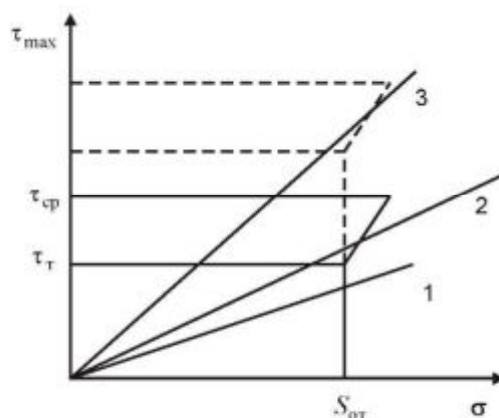


Рис. 17.9 /Диаграмма механического состояния материала Фридмана

На рис. 17.9 каждый луч, проведенный из начала координат, соответствует определенному значению коэффициента α , то есть определенному виду напряженного состояния.

При осевом растяжении $\alpha = 0,5$, при кручении $\alpha \approx 1$ (при коэффициенте Пуассона $\mu = 0,25$), при сжатии $\alpha \approx 2$ (при $\mu = 0,25$), при растяжении образцов с острым надрезом $\alpha \approx 0,1$, при вдавливании $\alpha \approx 20$.

Луч 1 на диаграмме пересекает линию сопротивления отрыву. Следовательно материал разрушается хрупко путем отрыва без предшествующей пластической

деформации.

Луч 2 пересекает вначале линию текучести, а затем линию сопротивления отрыву. Следовательно произойдет хрупкое разрушение путем отрыва, но с предшествующей пластической деформацией (квазихрупкое разрушение).

Луч 3 пересекает линию сопротивления срезу, поэтому после пластической деформации произойдет разрушение путем среза.

При снижении температуры существенно повышаются τ_T и τ_{cp} , а $S_{от}$ растет очень медленно. Пунктиром на рис. 17.9 показана диаграмма механического состояния того же материала при снижении температуры. В этом случае для напряженных состояний 1 и 2 — разрушение хрупкое, для состояния 3 — квазихрупкое.

Условия хрупкого и пластического разрушения:

Пластическое разрушение

хрупкое разрушение

$$\tau_{\max} > \tau_{cp}$$

$$\tau_{\max} < \tau_{cp}$$

$$\sigma_{\max} < S_{от}$$

$$\sigma_{\max} > S_{от}$$

или

или

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} > \frac{\tau_{cp}}{S_{от}}$$

$$\alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} < \frac{\tau_{cp}}{S_{от}}$$

17.6. Остаточные напряжения

В зависимости от объема, в котором уравниваются остаточные напряжения, они могут быть первого, второго или третьего рода.

Первого рода — уравниваемые в объеме всего тела; второго — уравниваемые в объеме порядка размеров зерен металла; третьего — уравниваемые в областях порядка размера межатомных расстояний. Далее рассматриваем только напряжения первого рода.

Так как напряжения уравниваются внутри тела, то в нем одновременно присутствуют и растягивающие и сжимающие напряжения.

Действие остаточных напряжений — результат их сложения с напряжениями от внешних сил. Если напряжения растяжения от внешних сил складываются с остаточными напряжениями растяжения — прочность падает, если с остаточными напряжениями сжатия — прочность растет.

Остаточные напряжения растяжения могут служить причиной образования трещин в сварных соединениях, отливках, закаленных деталях. Кроме того они могут привести к короблению конструкций при сварке, а после механической обработки — к изменению размеров детали.

Причиной остаточных напряжений является остаточная деформация. Пластическая — при механической обработке и сварке, упругая — при слесарной сборке, горячих и прессовых посадках.

Остаточные напряжения не могут быть выше предела текучести.

При сложном напряженном состоянии предельные значения остаточных напряжений удовлетворяют IV гипотезе прочности

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{Iост} - \sigma_{IIост})^2 + (\sigma_{IIост} - \sigma_{IIIост})^2 + (\sigma_{IIIост} - \sigma_{Iост})^2} \leq \sigma_T.$$

Механизм появления остаточных напряжений при пластической деформации рассмотрен на примере пластического кручения и пластического изгиба в главе 8.

Для повышения прочности и долговечности конструкции необходимо уменьшать

растягивающие напряжения в опасных местах. Для этого желательно создать на поверхности детали сжимающие остаточные напряжения. Существует много способов поверхностного упрочнения деталей, приводящих к повышению поверхностной твердости и наведению остаточных напряжений сжатия. Это

- механическое упрочнение — обдужка дробью, обкатка роликами, чеканка;
- термическое упрочнение — поверхностная закалка токами высокой частоты (ТВЧ);
- термохимическое упрочнение — цементирование, азотирование, цианирование.

В основе механического упрочнения лежит пластическая деформация сжатия поверхностного слоя материала.

При закалке ТВЧ превращение аустенита в мартенсит в поверхностном слое сопровождается увеличением объема и возникновением остаточных напряжений сжатия.

При термохимическом упрочнении внедрение атомов углерода или азота в поверхностные слои металла также приводит к увеличению объема. Ввиду малой толщины упрочненного слоя остаточные напряжения в нем бывают очень велики.

Поверхностное упрочнение обычно производят в местах концентрации напряжений или в зонах повышенного износа деталей из малопластичных материалов или работающих при циклических нагрузках, так как в этом случае эффект упрочнения наибольший.

На рисунке 17.10 приведены эпюры нормальных напряжений в сечении круглого стержня с кольцевым надрезом при растяжении. Поверхностное упрочнение надреза позволяет создать остаточные напряжения $\sigma_{ост}$, практически компенсирующие пик упругих напряжений $\sigma_{упр}$.

Суммарные напряжения $\sigma_{сум}$ оказались почти выровненными по сечению, что ведет к большому повышению усталостной прочности и долговечности детали.

Следует иметь в виду, что ряд видов поверхностной обработки приводит к появлению в поверхностном слое остаточных напряжений растяжения, что снижает прочность и может вызвать появление поверхностных трещин. Это некоторые процессы гальванопластики, например, хромирование, никелерование, воронение, обезуглероживание поверхностного слоя, быстрая сушка древесины, ведущая к растрескиванию дерева, потеря пластификатора из полимеров.

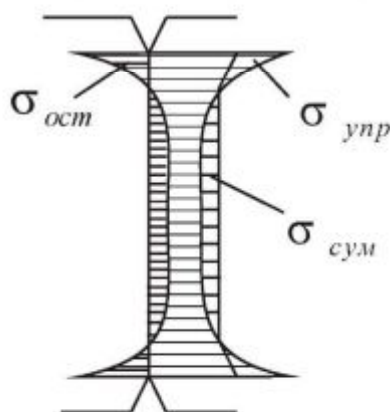


Рис. 17.10 Влияние остаточных напряжений на прочность стержня с надрезом

При токарной обработке детали в зависимости от заточки резца и режима резания возникают остаточные напряжения того или иного знака, а при шлифовании — растягивающие напряжения

Для снятия остаточных напряжений используют отжиг детали при температуре выше температуры рекристаллизации. Для любых сталей отжиг при температуре 600°C обеспечивает полное снятие остаточных напряжений.

Глава 18. Линейная механика разрушения тел с трещинами

В середине прошлого века повышенное внимание ученых вызвали многочисленные случаи хрупкого разрушения конструкций из пластичных материалов: обрушение мостов, разломы кораблей на 2 части, разрушение резервуаров с жидкостью или газом. Было установлено, что причиной таких разрушений являются трещины.

Как правило, видимая трещина долгое время ведет себя спокойно, медленно подрастая, но в какой-то момент времени происходит мгновенное хрупкое разрушение.

Проведенные исследования легли в основу новой ветви науки о прочности — механики разрушения тел с трещинами. В результате бурного развития ее к настоящему времени выработаны критерии трещиностойкости, разработаны методы расчета на живучесть тел с трещинами

18.1. Основные гипотезы

Исходное положение механики разрушения — в природе не существует тел без трещин. В любой конструкции в момент ее создания уже существуют трещины, чаще всего микроскопические. В процессе эксплуатации конструкции трещина медленно подрастает.

Требуется определить критические напряжения и критическую длину трещины, при которых происходит мгновенное распространение трещины по всему сечению элемента конструкции, что приводит к хрупкому разрушению тела на части.

В механике разрушения хрупким считается мгновенное разрушение без видимых пластических деформаций. Если материал конструкции находится в пластичном состоянии, то хрупкому разрушению предшествуют пластические деформации.

В основу механики разрушения легли гипотезы Гриффитса и Орована. Эти ученые предложили энергетический подход к решению поставленной задачи. Представим основные идеи этого подхода в виде трех частей [14].

1. *Потенциальная энергия, высвобождаемая при росте трещины, идет на образование новых поверхностей.*

Рассмотрим растяжение пластины с трещиной (рис. 18.1). При образовании трещины длиной l высвобождается потенциальная энергия.

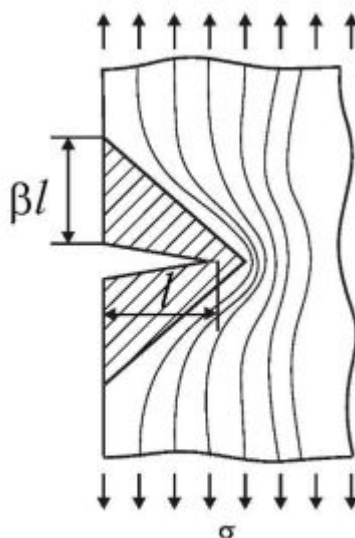


Рис. 18.1 Напряжение пластины с трещиной

Представьте себе, что это не пластина, а лента из обычной ткани. Ножницами сделаем надрез с края ленты. Прежде туго натянутые края ленты обвиснут. Следовательно исчезла запасенная в них потенциальная энергия. Обвисшие края ленты имеют вид треугольников, площадь которых, по расчетам Гриффитса $A = \pi l^2$, где l — длина трещины.

Высвобожденная потенциальная энергия

$\Pi = \Pi_0 \cdot V = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot \pi l^2 b$, где b — толщина пластины, E — модуль Юнга, σ — номинальное (среднее) напряжение в поперечном сечении пластины.

Эта энергия переходит в работу образования новых поверхностей

$W = 2G_c \cdot l \cdot b$, где G_c — удельная работа образования новых поверхностей (на единицу площади поверхности).

2. Самопроизвольное распространение трещины происходит, когда скорость высвобождения потенциальной энергии больше скорости поглощения энергии, идущей на образование новых поверхностей.

В этом основное содержание гипотезы Гриффитса. Под скоростью здесь понимается изменение энергии на единицу длины прироста трещины. На рис. 18.2 приведен график изменения Π и W с ростом трещины. График потенциальной энергии Π — парабола (зависит от l^2), график работы W — прямая линия (зависит от l). Суммарный баланс энергии $\Pi+W$ имеет экстремум.

Самопроизвольное распространение трещины начинается тогда, когда процесс становится энергетически выгоден для тела, то есть суммарный запас энергии тела начинает уменьшаться.

Если $\frac{d\Pi}{dl} < \frac{dW}{dl}$ — разрушения нет.

Если $\frac{d\Pi}{dl} \geq \frac{dW}{dl}$ — самопроизвольное распространение трещины (мгновенное разрушение). В критическом состоянии (при равенстве работ)

$$\frac{d\Pi}{dl} = \frac{\sigma^2 \cdot \pi l_{кр} b}{E} = \frac{dW}{dl} = 2G_c b,$$

откуда критическая длина трещины

$$l_{кр} = \frac{2G_c E}{\pi \sigma^2} \quad (18.1),$$

или, если известна длина трещины l , можно найти критическое напряжение, которое вызовет самопроизвольное развитие трещины

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\frac{2G_c E}{\pi l}} \quad (18.2).$$

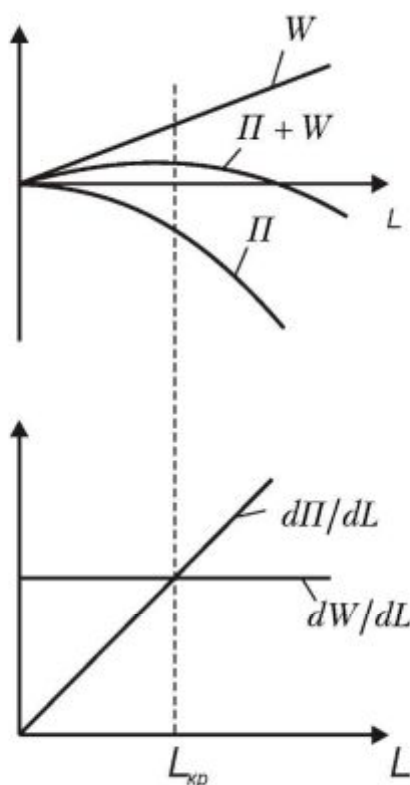


Рис. 18.2 Энергетический подход к определению критической длины трещины

На рис. 18.2 внизу показаны графики производных $\frac{d\Pi}{dL}$ и $\frac{dW}{dL}$. Их точка пересечения соответствует критической длине трещины.

3. Величина G_c включает в себя работу образования новых поверхностей плюс работу пластической деформации.

Такое предположение было введено Орованом. Если две первые гипотезы Гриффитса позволяют определять критическую длину трещины только для хрупких материалов, то гипотеза Орована дает возможность вести расчеты и для пластичных материалов. Именно эта гипотеза и дала толчок к быстрому развитию механики разрушения тел с трещинами.

Если на образование единицы площади поверхности затрачивается работа $G_c \approx 1 \frac{\text{НМ}}{\text{м}^2}$, то работа пластической деформации в тысячи раз больше $G_c \approx 10^5 \frac{\text{НМ}}{\text{м}^2}$.

В дальнейшем под величиной G_c понимается интенсивность высвобождения энергии при движении трещины.

Пример

Пусть для малоуглеродистой стали 10 с пределом прочности 400 МПа и $G_c \approx 10^5 \frac{\text{НМ}}{\text{м}^2}$ требуется найти напряжение, при котором критическая длина трещины равна 1м. По формуле (18.2) $\sigma = 113$ МПа. Если захотим увеличить критическую длину трещины до 2-х метров, то действующие напряжения придется уменьшить до 80 МПа.

Использование высокопрочных сталей, как правило не приводит к повышению вязкости. Трещиностойкость большинства металлов уменьшается с ростом прочности.

Прочность мягкой стали можно повысить, увеличив содержание углерода. Для стали 40 предел прочности 650 МПа, но у этой стали меньше запас пластичности и $G_c \approx 10^4 \frac{\text{НМ}}{\text{М}^2}$. При том же напряжении $\sigma = 113$ МПа критическая длина трещины уменьшится до $l_{\text{кр}} = 100$ мм. А, если повысить напряжение до 200 Мпа (ведь более прочный материал используется, чтобы увеличить нагрузку), то $l_{\text{кр}}$ уменьшится до 32 мм, что весьма опасно для большой конструкции. Результаты расчета показаны на рис. 18.3.

$$\begin{aligned}
 \text{Н} &:= \text{Н} & \text{м} &:= \text{м} & \text{мм} &:= 0.001 \cdot \text{м} & \text{МПа} &:= 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \\
 \text{кН} &:= 1000 \cdot \text{Н} & \text{Е} &:= 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{кр}}(L, G_c) := \sqrt{\frac{2 \cdot G_c \cdot E}{\pi \cdot L}} \quad l_{\text{кр}}(\sigma, G_c) := \frac{2 \cdot G_c \cdot E}{\pi \cdot \sigma^2}$$

сталь 10	$G_c := 10^5 \cdot \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{М}^2}$	$L := 1 \cdot \text{м}$	$\sigma_{\text{кр}}(L, G_c) = 113 \text{ МПа}$
		$L := 2 \cdot \text{м}$	$\sigma_{\text{кр}}(L, G_c) = 80 \text{ МПа}$
сталь 40	$G_c := 10^4 \cdot \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{М}^2}$	$\sigma := 113 \cdot \text{МПа}$	$l_{\text{кр}}(\sigma, G_c) = 100 \text{ мм}$
		$\sigma := 200 \cdot \text{МПа}$	$l_{\text{кр}}(\sigma, G_c) = 32 \text{ мм}$

Рис. 18.3 Расчеты критических напряжений и критической длины трещины

Для элементов конструкций малых размеров, таких как болт, вал, зубчатое колесо, нет смысла ориентироваться на трещины метровой длины. Для $l_{\text{кр}} \square 1$ см рабочее напряжение может достигать 300 Мпа и в этом случае целесообразно применять высокопрочные материалы. Чем больше конструкция, тем больше должна быть критическая длина трещины, тем легче ее обнаружить и предотвратить разрушение. Этому требованию удовлетворяет мягкая сталь с пределом прочности до 500 Мпа, которой в мире выплавляется в десятки раз больше, чем высокопрочных сталей.

18.2. Критерии трещиностойкости

Формулы (18.1) и (18.2) не используются в практических расчетах, так как в справочниках нет величин G_c для большинства материалов, а главное, они не учитывают геометрию детали и вид нагрузки. Были разработаны другие критерии трещиностойкости: силовой, энергетический, деформационный. В практике расчетов используется в основном силовой критерий трещиностойкости, поэтому ограничимся лишь его рассмотрением.

Силовой критерий трещиностойкости.

Можно определить три основных типа смещения у вершины трещины, соответствующих различным схемам деформирования (рис. 18.4).

Тип I соответствует раскрытию трещины (отрыву). При этом поверхности трещины удаляются друг от друга.

Тип II соответствует сдвигу, при котором поверхности трещины скользят друг по другу в направлении, перпендикулярном краю трещины.

Тип III соответствует сдвигу, при котором поверхности трещины скользят друг по другу в направлении, параллельном краю трещины. С помощью наложения этих трех типов смещения можно описать любое самое общее трехмерное напряженно-деформированное состояние у вершины трещины.

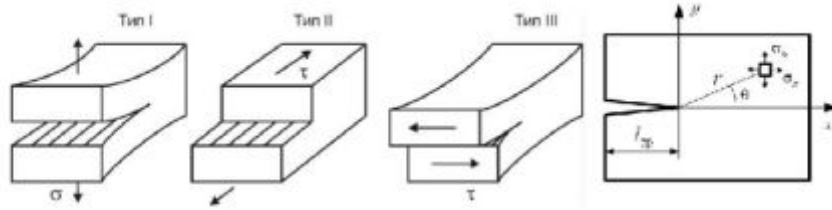


Рис. 18.4 Типы смещения у вершины трещины

Существует теоретическое решение задачи о распределении перемещений и напряжений в окрестностях вершины трещины. Оно приводится в литературе по механике разрушения, например [16]. В общем виде его можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cdot [f_\sigma(\theta)] \\ [u] &= \frac{K}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{\pi}} \cdot [f_u(\theta)] \end{aligned} \quad (18.3),$$

где r и θ — координаты точки вблизи устья трещины (рис. 18.4, справа), в которой

определяются напряжения и перемещения, G — модуль сдвига, $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$ —

вектор напряжений, $[u] = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ — вектор перемещений, $[f_\sigma(\theta)]$ и $[f_u(\theta)]$ —

четырёхкомпонентные векторы, содержащие некоторые функции угла θ для всех трех видов напряженного состояния у вершины трещины. Выражения для этих функций приведены в литературе по механике разрушения, например [14, 16].

Коэффициент пропорциональности K в формуле (18.3) называется *коэффициентом интенсивности напряжений*. Коэффициент K зависит от нагрузки и геометрии тела, включая размер трещины. Для трех типов перемещения в окрестности трещины этот коэффициент различен и обозначается K_I , K_{II} и K_{III} . Его определение является одной из главных задач механики разрушения.

Далее рассмотрим первый тип перемещения — отрыв.

$$\text{При } \theta = 0 \text{ (на продолжении трещины)} \quad \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}.$$

При $r \rightarrow 0$ величина $\sigma_y \rightarrow \infty$, а значение $K_I = \sigma_y \sqrt{2\pi r}$ становится неопределенным.

Воспользовавшись решением теории упругости для бесконечной плоскости, нагруженной на бесконечности напряжением σ (рис. 18.1), раскрываем неопределенность

$$K_I = \lim \sigma_y \sqrt{2\pi r} = \sigma \sqrt{\pi l}. \text{ По аналогии } K_{II} = \tau \sqrt{\pi l}, \quad K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}.$$

Для других тел при других заданных нагрузках коэффициент интенсивности напряжений в общем случае имеет вид

$$K = f \sigma \sqrt{\pi l}, \quad (18.4),$$

где коэффициент f зависит от вида нагружения и геометрии тела, σ — номинальное напряжение, найденное без учета трещины.

Определению коэффициента f для различных частных случаев посвящено множество работ. В общем случае этот коэффициент находится численными методами. Большое количество найденных коэффициентов f во втором томе справочного пособия "Механика разрушения и прочность материалов" [16].

Величина K возрастает пропорционально номинальному напряжению σ , зависит от мгновенного значения длины трещины l и является мерой напряжений около вершины трещины.

Для оценки трещиностойкости конструкции желательно знать все три коэффициента интенсивности напряжений K_I, K_{II}, K_{III} . Однако ввиду значительных расчетных трудностей чаще всего ограничиваются определением одного, самого большого и самого важного коэффициента K_I , соответствующего отрыву берегов трещины.

Значение K , соответствующее началу быстрого роста трещины, называется *критическим коэффициентом интенсивности напряжений* и обозначается K_c .

Исследования показали, что для одного и того же материала в зависимости от вида напряженного состояния K_c может быть различным.

При переходе от плоского напряженного к плоскому деформированному состоянию (с увеличением толщины детали) величина K_c может уменьшиться в несколько раз. Наименьшее значение K_{Ic} (для первого типа смещения поверхностей трещины) представляет собой характеристику материала, называемую *вязкостью материала* в условиях плоского деформированного состояния. Величина K_{Ic} определяется опытным путем на стандартных образцах в соответствии с ГОСТ 25.506-85 следующим образом:

- образец с острым надрезом нагружают циклической нагрузкой $\sigma_{max} = 0,5\sigma_T$ в течение 50 000 циклов, при этом в образце образуется трещина ~5 мм;
- образец с трещиной испытывают на разрыв;
- обрабатывают диаграмму деформирования и по формулам ГОСТа определяют K_{Ic} и другие характеристики трещиностойкости.

Условие трещиностойкости $K_I < K_{Ic}$.

Левая часть неравенства вычисляется в порядке решения конкретной задачи теории упругости с учетом формы и размеров тела, способа нагружения, и геометрии трещины. Правая часть неравенства (критическое значение коэффициента интенсивности напряжений K_{Ic}) определяется опытным путем как механическая характеристика материала.

В окрестностях трещины в металлах возникают пластические деформации. Под их влиянием трещина становится менее острой и максимальные напряжения уменьшаются. Для учета этого эффекта предложено увеличить длину трещины на величину пластической зоны, то есть принять длину трещины $l = l + r_1$, где r_1 — размер пластической зоны на продолжении трещины. Величину r_1 можно приближенно определить из условия, что на границе пластической зоны $\sigma_y = \sigma_T$.

$$\sigma_T = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_1}}, \quad \text{откуда} \quad r_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{K_I}{\sigma_T} \right)^2.$$

С учетом $K_I = \sigma\sqrt{\pi l}$, получаем при плоском напряженном состоянии

$$r_1 = \left(\frac{\sigma}{\sigma_T} \right)^2 \cdot \frac{l}{2}.$$

С ростом толщины детали происходит стеснение деформаций и переход от плоского напряженного к плоскому деформированному состоянию. При этом уменьшается величина τ_{\max} и размер пластической зоны находят по формуле

$$r_T = \frac{(1-2\mu)^2}{2\pi} \cdot \frac{K_I^2}{\sigma_T^2}. \text{ При } \mu = 0,3 \text{ величина } r_T \text{ уменьшается в 6 раз при переходе от}$$

плоского напряженного к плоскому деформированному состоянию.

Следует отметить, что для определения K_I требуется использовать метод итераций, поскольку K_I зависит от величины r_T , а r_T , в свою очередь, зависит от K_I .

18.3. Живучесть конструкций

Под *живучестью* будем понимать долговечность конструкций с трещинами.

Мы рассмотрели условия, при которых начинается самопроизвольное мгновенное распространение трещины (разрушение тела), но ничего не сказали о механизме подрастания трещины до критических размеров.

Перечислим три основных механизма подрастания трещин:

- коррозия,
- ползучесть,
- усталость.

Если коррозия заметно действует в агрессивных средах, ползучесть при высоких температурах, то усталость материалов при действии переменных нагрузок, в той или иной степени, присутствует во всех конструкциях и является главным механизмом подрастания трещин.

Для оценки скорости распространения трещины используют данные экспериментов.

На рис. 18.5, а показана зависимость длины трещины l от числа циклов нагружения N . Для удобства последующих расчетов эту кривую перестраивают (рис. 18.5, б) в координатах $\lg \frac{dl}{dN} - \lg(\Delta K)$. Здесь $\frac{dl}{dN}$ — скорость распространения трещины и $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ — размах изменения коэффициента интенсивности напряжений, K_{\max} и K_{\min} — коэффициенты интенсивности напряжений при максимальной и минимальной нагрузках цикла.

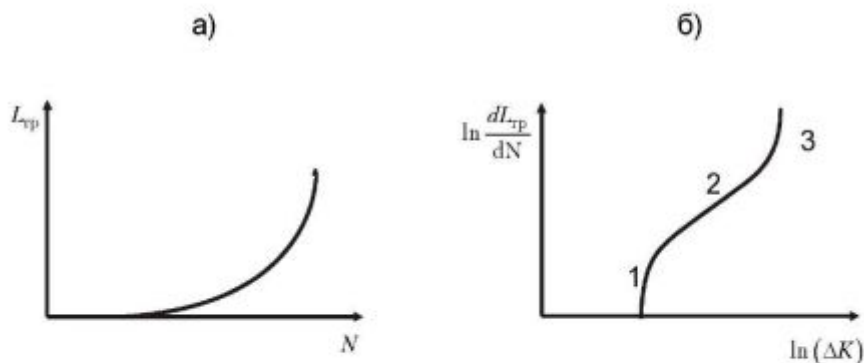


Рис. 18.5. Рост трещины при испытаниях материала на усталость

Кривую на рис. 18.5, б можно представить в виде трех участков. Небольшой участок 1 определяет порог до которого макротрещина не растет (идет накопление микрповреждений). Участок 2 в логарифмических координатах — равномерный рост трещины. Участок 3 — ускоренный рост трещины до разрушения.

Равномерный рост трещины можно описать уравнением прямой линии

$$\ln \frac{dl}{dN} = C + n \lg(\Delta K) \text{ или после потенцирования}$$

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^n \text{ — формула Пэриса} \quad (18.11).$$

По формуле Пэриса можно определить время (число циклов нагружения) подрастания трещины до критических размеров.

Пример расчета живучести детали с использованием формулы Пэриса приведен в электронной книге в разделе [Для главы 18](#).

Меры по повышению живучести конструкций

Периодически необходим осмотр конструкции с целью своевременного обнаружения видимых трещин.

Если трещина обнаружена, рассчитывается ориентировочная долговечность конструкции по формуле Пэриса.

По результатам расчета необходимо снизить нагрузку для увеличения долговечности и (или) принять меры по ремонту конструкции.

Для залечивания трещины можно

- приварить накладку в месте обнаружения трещины,
- заварить область вершины трещины,
- засверлить вершину трещины. При увеличении радиуса при вершине трещины уменьшается концентрация напряжений и соответственно прекращается рост трещины.

Существуют и разрабатываются и другие методы повышения живучести конструкций.

Задача повышения живучести конструкций чрезвычайно актуальна, так как внезапное разрушение конструкций часто приводит к катастрофическим последствиям.

Глава 19. Элементы рационального и оптимального проектирования конструкций

Задачей конструктора является проектирование и соответственно расчет рациональной и, по возможности, оптимальной конструкции.

Рациональная конструкция должна удовлетворять техническим и эксплуатационным требованиям. При проектировании надо стремиться обеспечить наименьший вес и размеры конструкции путем выбора рациональных форм поперечных сечений и геометрии ее элементов. Выбор рациональной конструкции обеспечивается, как правило, опытом и знаниями инженера.

Оптимальная конструкция должна быть наилучшей из всех рациональных. Она должна удовлетворять математически обоснованным критериям оптимальности. Выбор оптимальной конструкции достигается путем математических расчетов, часто путем перебора большого количества вариантов до достижения экстремального значения выбранного критерия эффективности работы конструкции.

Выбор рациональной конструкции — это движение в сторону наибольшей эффективности конструкции.

Выбор оптимальной конструкции — это достижение математически обоснованной максимальной эффективности конструкции.

19.1. Выбор рациональной конструкции

Вопросы рационального проектирования нет смысла выделять в отдельную главу. Это культура проектирования, которая накапливается по мере накопления знаний о конструировании и расчете конструкций, в том числе по мере изучения этой книги.

В последней главе книги, как бы подводя итоги, отметим некоторые общие положения рационального проектирования конструкций.

- Вблизи мест приложения сосредоточенных нагрузок напряжения значительно больше, чем вдали от них (о чем говорилось в разделе 1.14.4 — принцип Сен-Венана). Создавая конструкцию надо предусмотреть усиление конструкции в местах воздействия сосредоточенных нагрузок, увеличить поверхность, на которой прикладывается нагрузка.
- Использование в конструкции ступенчатых стержней вызывает концентрацию напряжений в местах резкого изменения формы. Концентрация напряжений — главный фактор снижения прочности. Необходимо предусматривать плавный переход от одной формы к другой. В местах концентрации напряжений желательно поверхностное упрочнение с созданием остаточных напряжений сжатия в поверхностном слое, что позволяет практически полностью устранить снижение прочности, вызванное концентрацией напряжений.
- Для уменьшения веса конструкции и увеличения ее жесткости при изгибе целесообразно использовать сечения коробчатой формы вместо сплошных, применять ребра жесткости и подпорки.

В конструкциях больших размеров желательно избегать появления деформаций изгиба. Желательно по возможности заменять балки фермой, стержни которой работают на растяжение или сжатие. Правда, в этих случаях необходима проверка сжатых стержней на устойчивость.

- Внешние нагрузки, если есть возможность, лучше прикладывать ближе к опорным точкам конструкции, что ведет к уменьшению изгибающих моментов и соответственно к уменьшению веса конструкции при той же прочности.
- Статически неопределимые системы всегда жестче, чем статически определимые того же веса.

С точки зрения только прочности система из одного стержня всегда будет весить меньше, чем система из многих стержней.

Увеличение жесткости статически неопределимых систем влечет за собой увеличение собственной частоты, коэффициента динамичности, рост динамических напряжений при ударных нагрузках.

Расчет статически неопределимой системы значительно сложнее, чем статически определимой, но приведенные в электронной книге программы позволяют решить задачи практически любой сложности.

В статически неопределимых системах возникают температурные и монтажные напряжения, что надо учитывать при проектировании и, по возможности, предусматривать возможность регулировки зазоров и мест сборки элементов конструкции.

- Нерационально использование высокопрочных сталей для стержней, работающих на сжатие, так как устойчивость зависит от модуля Юнга, который примерно одинаков для всех сталей.
- С точки зрения механики разрушения применение малоуглеродистых пластичных сталей снижает опасность хрупкого разрушения, так как для них критическая длина трещины настолько велика, что трещина легко может быть обнаружена визуальным осмотром.

Для деталей сравнительно малых размеров нет необходимости иметь большую критическую длину трещины. Для них целесообразно применение высокопрочных сталей.

- Собственная частота конструкций, нагруженных периодически действующей силой, не должна быть близкой к резонансной. Отодвинуться от резонансной частоты (в ту или иную сторону) можно, изменив массу или жесткость конструкции. Увеличение массы или уменьшение жесткости ведет к уменьшению низшей собственной частоты конструкции.
- Нельзя забывать и об условиях хрупкого и вязкого разрушения. Ведь переход от пластичного разрушения к хрупкому может вызвать внезапное разрушение при нагрузках, вроде бы гарантирующих надежную работу конструкции. Используемый материал должен при заданных условиях эксплуатации сохранять вязкий характер разрушения.

Использование Mathcad при расчете любой конструкции позволяет путем замены численных значений параметров и построения графиков пронаблюдать тенденции изменения эффективности работы конструкции и выбрать наиболее рациональную конструкцию.

Все, без исключения, задачи в электронной книге дают возможность проанализировать результаты расчета.

Далее поговорим о выборе оптимальных конструкций. Вычислительные возможности Mathcad позволяют решить и задачи оптимизации.

19.2. Выбор критериев оптимизации

В большинстве случаев главным показателем совершенства конструкции является ее масса. При проектировании необходимо выбрать такие геометрические характеристики конструкции, которые обеспечивают ее минимальную массу.

В ряде случаев основным критерием эффективности служит производительность работы механизма или его цена.

С математической точки зрения цель оптимизации состоит в отыскании максимального или минимального значения функции нескольких переменных, удовлетворяющей нескольким дополнительным требованиям. Эта функция называется *целевой*, а дополнительным требованиям соответствуют конструктивные или технологические ограничения задачи.

Целевая функция Z и функции ограничений f_1, f_2, \dots, f_n должны быть выражены через структурные переменные X_1, X_2, \dots, X_n

$$\begin{aligned}
 Z &= Z(X_1, X_2, \dots, X_n) \\
 f_1 &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\
 f_2 &= f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\
 &\dots\dots\dots \\
 f_n &= f_n(X_1, X_2, \dots, X_n)
 \end{aligned}
 \tag{19.1}$$

В стержневых системах, работающих на растяжение-сжатие, структурные переменные — это площади поперечных сечений $X_1 = A_1, X_2 = A_2, \dots, X_n = A_n$

или их размеры, а целевая функция — масса стержневой системы $Z = \sum_{i=1}^n \rho_i L_i A_i$,

где ρ_i — плотность материала, L_i — длина стержня. Через площади сечений или их размеры должны быть выражены и функции ограничений.

Единственными независимыми изменяемыми структурными переменными при решении задачи оптимизации будут площади сечений или размеры сечений.

Для стержней, работающих на изгиб, структурными переменными будут размеры сечений, через которые выражаются моменты инерции, моменты сопротивления, напряжения и перемещения, а также целевая функция и ограничения к ней.

В качестве ограничений часто используются:

- допустимые значения напряжений,
- перемещения в определенных точках конструкции,
- критические усилия или напряжения потери устойчивости,
- толщина стенки или размеры сечений.

При решении задачи оптимизации ограничения записываются как в виде равенств, так и неравенств.

Ограничения определяют область нахождения структурных переменных. Чем меньше эта область, тем проще решить задачу оптимизации.

Среди конкретных часто используемых приемов оптимизации отметим

- оценки, базирующиеся на условиях равнопрочности,
- решение обратных задач,
- математическое определение экстремума целевой функции,
- математическое программирование.

Под равнопрочностью понимается равенство максимальных напряжений во всех элементах конструкций, иногда во всех сечениях элемента конструкции.

Условие равнопрочности почти всегда соответствует и минимальному весу конструкции.

Бывают прямые и обратные задачи оптимизации.

В прямых задачах задаются формой и размерами конструкции, определяют напряжения и перемещения, и проверяют, удовлетворяют ли они выбранным условиям оптимизации.

В обратных задачах задаются конечным состоянием конструкции, то есть напряжениями и перемещениями в рабочем состоянии, и определяют форму и размеры конструкции, а также нагрузки, приводящие систему в заданное состояние.

Поиск экстремума целевой функции весьма сложная задача, требующая наличия компьютерной программы пошагового поиска экстремума сложной функции. В Mathcad имеются встроенные функции `maximize` и `minimize`, выполняющие подобную процедуру поиска, что очень упрощает нахождение экстремума функции.

Наиболее сложные случаи поиска глобального экстремума при наличии локальных экстремумов требуют специального компьютерного программирования и здесь не рассматриваются.

Конкретные примеры поиска экстремальных решений с использованием Mathcad приведены в электронной книге в разделе [Для главы 19](#).

В заключение этой главы сделаем два вывода: один грустный, один радостный. Mathcad не может помочь в создании рациональной конструкции, зато поможет найти оптимальный вариант рационально выбранной вами конструкции.

Часть 2. Метод конечных элементов

Вступление

Эта часть книги рассчитана на студентов, уже изучивших основной курс сопротивления материалов, и инженеров, которым надо решать конкретные расчетные задачи и нет времени на длительное изучение теории упругости, строительной механики, вычислительной механики и других дисциплин.

Однако прошу не рассматривать эту книгу как учебник по теории упругости или строительной механике. В книге приводятся в краткой и максимально простой доступной форме только те сведения, которые необходимы для объяснения метода конечных элементов, и будут использованы в прилагаемых примерах расчетов, и для работы с вычислительными комплексами.

Заключительная глава этой книги посвящена ознакомлению читателей с наиболее популярными в настоящее время вычислительными комплексами (ANSYS и COSMOS/Works). Прошло время, когда многие расчетчики разрабатывали свои собственные программы, использующие метод конечных элементов. Сейчас от инженера-конструктора и инженера-расчетчика требуется умение пользоваться готовыми вычислительными комплексами, в алгоритмы которых включены все (или почти все) вычислительные возможности МКЭ в различных областях знаний. Таких комплексов разработано достаточно много. Наибольшими вычислительными возможностями из них обладает ANSYS. Наиболее удобным и простым в использовании является COSMOS/Works. Но это субъективное мнение автора книги.

Новые условные обозначения

В методе конечных элементов все зависимости записываются в матричном виде. Поясним обозначения, которые приняты в дальнейшем изложении.

- $[M]$ — прямоугольная матрица,
- $[M]^T$ — транспонированная прямоугольная матрица,
- $\{A\}$ — матрица-столбец (вектор чисел),
- $[A]$ — матрица-строка (транспонированный вектор чисел).

Основная идея метода конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) решает задачи теории поля. Он используется для определения переменных, непрерывно распределенных в заданной области.

МКЭ применяют для решения следующих видов задач:

- задачи напряженно-деформированного состояния тела (прочностные задачи);
- температурные задачи (распределение температур в пространстве и во времени);
- задачи электрического и магнитного полей;
- задачи движения жидкости и газа (определение перемещений скоростей и ускорений от давления);
- связанные задачи, например, учет температурных напряжений в прочностных задачах;
- задачи оптимизации.

Основная идея МКЭ

Целевую функцию или систему любых дифференциальных уравнений заменить системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \text{ — Основное уравнение МКЭ,}$$

где $[K]$ — матрица коэффициентов, называемая матрицей жесткости, хотя физический смысл коэффициентов может быть различным, $\{\Delta\}$ — вектор неизвестных (в наших задачах вектор перемещений), $\{F\}$ — вектор правых частей уравнений (вектор сил).

Коэффициенты в матрице $[K]$, как правило, представляют собой сложные интегральные выражения. Для всех видов задач, решаемых МКЭ, матрицы коэффициентов (матрицы жесткости) уже определены и введены в состав вычислительных комплексов.

Порядок решения любой задачи МКЭ

1. Заданную область(тело) разбить на стандартные конечные элементы.
2. Для каждого узла (вершины) каждого элемента записать основное уравнение МКЭ.
3. Объединить все уравнения в единую систему уравнений и решить ее с учетом граничных условий.
4. Зная величину искомой переменной во всех узлах, найти их значения в произвольной точке рассматриваемой области можно с помощью уравнения связи
5. $\{u\} = [N]\{\Delta\}$ — уравнение связи,

где $\{u\}$ — вектор значений переменной в произвольной точке элемента (между узлами), $[N]$ — матрица функций формы, $\{\Delta\}$ — узловые значения переменной.

6. Найти величины, связанные с найденной переменной теоретическими зависимостями, например, зная перемещения, найти деформации и напряжения.

Глава 20. Основные уравнения теории упругости

В этой главе рассматриваются основные уравнения теории упругости, которые не решаются в методе конечных элементов, но входят составной частью в математическое ядро этого метода.

20.1. Теория деформаций

20.1.1. Перемещение точки деформируемого твердого тела

Перемещение — изменение положения точки в пространстве.

Выделим произвольный элемент тела и рассмотрим перемещение одной из точек этого элемента до деформации A и после деформации A_1 (рис. 20.1).

В дальнейшем изложении в зависимости от удобства изложения материала будем использовать две различные системы обозначения осей координат.

- Обычную декартову (прямоугольную) систему, где оси координат обозначаются x, y, z .
- индексную систему, где оси координат обозначаются x_1, x_2, x_3 .

Индексная система предпочтительнее в компьютерных программах, так как путем перебора индексов позволяет одним оператором вычислить ряд выражений. Пример использования указанных систем координат приведен на рис. 20.1.

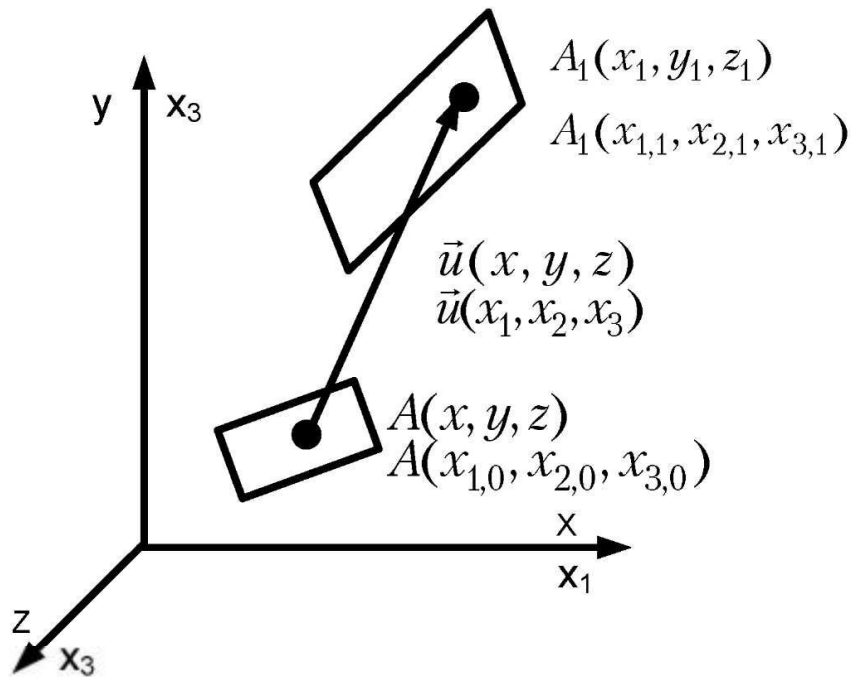


Рис. 20.1 Перемещение точки в пространстве

Проекции перемещения \vec{u} на оси координат x, y, z представляют собой разность координат точки до и после деформации.

$$u_x = x_1 - x \quad u_y = y_1 - y \quad u_z = z_1 - z$$

Или в индексной системе координат

$$u_1 = x_{1,0} - x_{1,1} \quad u_2 = x_{2,0} - x_{2,1} \quad u_3 = x_{3,0} - x_{3,1}$$

Вектор перемещения \vec{u} состоит из трех компонент и записан в виде матрицы-столбца

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \text{ или в индексной системе координат } \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим перемещение двух близлежащих точек A и B . Расстояние между которыми dr (рис. 20.2). Точка A смещается в положение A_1 (вектор смещения \vec{u}), точка B в положение B_1 (вектор смещения \vec{u}_1).

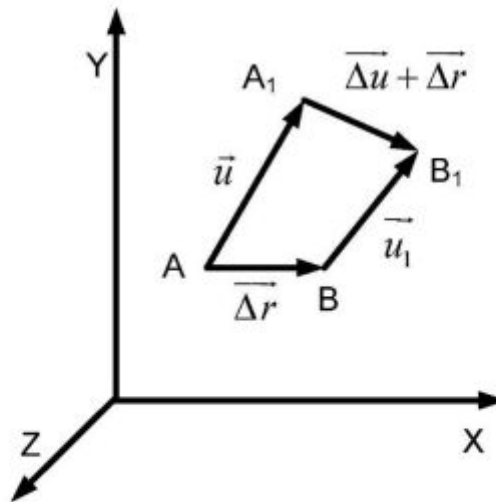


Рис. 20.2 Перемещение двух близлежащих точек

Перемещения двух близлежащих точек можно связать между собой путем разложения функции перемещения в ряд Тэйлора.

В векторной форме

$$\bar{u}_1 = \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} d\bar{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} d\bar{r}^2 + \dots$$

Для любого твердого тела деформации малы по сравнению с размерами тела. Перемещения точек тела в процессе деформации также малы. В этом случае можно ограничиться только линейными приращениями перемещений, то есть отбросить все слагаемые ряда Тэйлора, содержащие производные, порядка выше первого.

Разложим вектор \bar{r} по осям координат, учитывая только линейные приращения перемещений.

$$\bar{u}_1 = \bar{u} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz \right).$$

Разложим вектор \bar{u} по осям координат

$$\begin{cases} u_{1x} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \\ u_{1y} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \\ u_{1z} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \end{cases} \quad (20.1).$$

В матричном виде выражение 20.1 примет вид

$$\bar{u}_1 = \bar{u} + [T_u] d\bar{r} \quad (20.2),$$

где $d\bar{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$,

$$[T_u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ — тензор градиентов смещения}$$

В дальнейшем изложении используется понятие тензор второго ранга.

Тензором второго ранга называется матричный оператор, связывающий два физических вектора.

В нашем случае (уравнение 20.2) тензор градиентов смещения $[T_u]$ связывает вектор $d\bar{r}$ с вектором смещения \bar{u}_1 .

ПРИМЕЧАНИЕ

Тензором нулевого ранга считается число (скаляр),

Тензором первого ранга считается физический вектор, то есть характеризующийся модулем и направлением,

Тензор третьего ранга связывает вектор и тензор второго ранга,

Тензор четвертого ранга связывает два тензора второго ранга.

В расчетной практике тензоры третьего и четвертого ранга практически не используются.

20.1.2. Связь деформаций и перемещений

Найдем связь перемещений и деформаций. Деформации в теле возникают как следствие смещения точек тела. Нет перемещений — нет и деформаций.

Полная деформация складывается из линейной и угловой (рис.20.3).

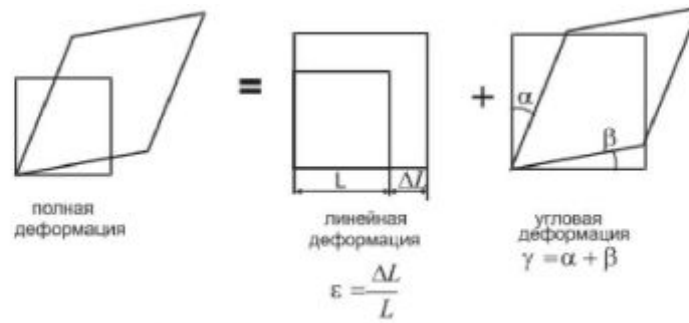


Рис. 20.3 Линейная и угловая деформация

Рассмотрим два частных случая:

7. Нет сдвига. Есть линейная деформация,

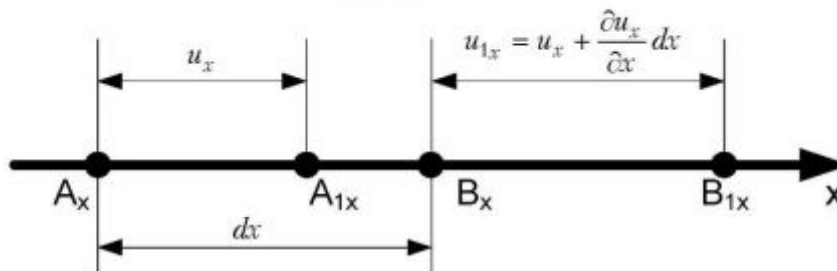


Рис. 20.4 К расчету линейной деформации

Рассмотрим проекцию перемещения отрезка AB вдоль оси X (рис. 20.4). До деформации $A_x B_x$, после деформации $A_{1x} B_{1x}$. Длина проекции $A_x B_x = dx$. В других направлениях проекция не перемещается, поэтому $dy = dz = 0$.

После деформации длина проекции отрезка $A_{1x} B_{1x} = u_{1x} - u_x + dx$.

Относительная деформация вдоль оси x

$$\epsilon_x = \frac{A_{1x} B_{1x} - A_x B_x}{A_x B_x} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - u_x + dx - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Аналогично рассматривая проекции перемещения отрезка AB на оси y и z , находим деформации ϵ_y и ϵ_z . В итоге получаем три линейные деформации вдоль осей x, y, z .

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (20.3)$$

8. Нет линейной деформации. Есть сдвиг.

Напомним: угол сдвига — изменение первоначально прямого угла. Рассмотрим сдвиг в плоскости xy двух прямых AB и AC , ориентированных вдоль осей Y и X (рис. 20.5).

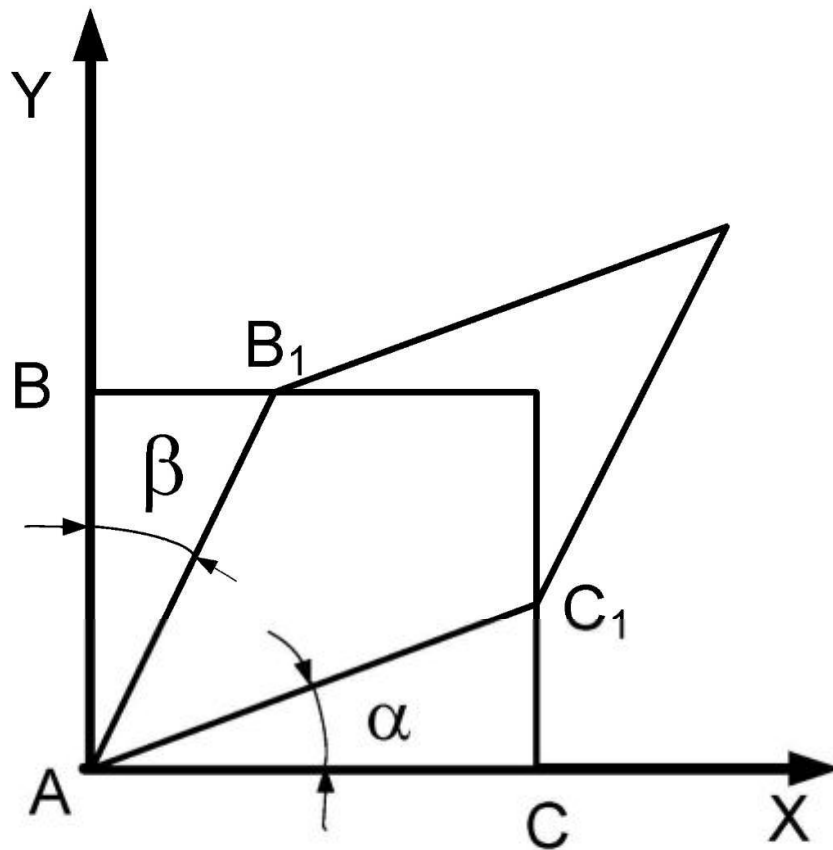


Рис. 20.5 К расчету угловой деформации (сдвига)

Линейной деформации нет, поэтому точка A в процессе деформации остается неподвижной ($u_A = 0$). Длина отрезков $AC = dx$, $AB = dy$. Отрезок AB развернулся на угол α , отрезок AC на угол β . Тогда угол сдвига (изменение первоначально прямого угла) $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$.

Найдем вначале угол α

$$\alpha \approx \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{CC_1}{AC}. \quad \text{Но } AC = dx, \quad dy - dz = 0.$$

По второй строчке выражения (20.1) $CC_1 = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$.

$$\text{Тогда } \alpha \approx \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Теперь найдем угол β

$$\beta \approx \operatorname{tg}(\beta) = \frac{BB_1}{AB}. \quad \text{Но } AB = dy, \quad dx - dz = 0.$$

По первой строчке выражения (20.1) $BB_1 = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$.

$$\text{Тогда } \beta \approx \operatorname{tg}(\beta) = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

$$\text{Угол сдвига } \gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Аналогично находим углы сдвига в двух других координатных плоскостях YZ и XZ .

Итого получаем три угла сдвига

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (20.4).$$

Выражения (20.3) и (20.4) представляют собой шесть геометрических уравнений теории упругости (уравнения Коши).

20.1.3. Тензор малых деформаций

Преобразуем выражение тензора градиентов перемещений T_u . В индексной системе координат общий член этого тензора $[T_u] = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Представим его в виде суммы двух

половинок, затем добавим и вычтем одно и то же выражение $\frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$.

$$T_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Перегруппируем слагаемые в этом выражении

$$T_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Первое слагаемое в последнем выражении представляет собой половину сдвиговой деформации $\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, а второе слагаемое $\phi_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ — угол поворота элемента твердого тела. Тем самым тензор градиентов перемещений раскладывается на два тензора $[T_u] = [T_\epsilon] + [T_\phi]$. Здесь

$$[T_\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{1,1} & \epsilon_{1,2} & \epsilon_{1,3} \\ \epsilon_{2,1} & \epsilon_{2,2} & \epsilon_{2,3} \\ \epsilon_{3,1} & \epsilon_{3,2} & \epsilon_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (20.5)$$

$[T_\epsilon]$ — тензор малых деформаций,

$$[T_\phi] = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_x & \phi_y \\ \phi_x & 0 & -\phi_z \\ -\phi_y & \phi_z & 0 \end{bmatrix} \quad \text{— тензор углов поворота твердого тела.}$$

Тензор деформаций — симметричный, так как $\gamma_y = \gamma_x$. В обоих случаях это изменение одного и того же первоначально прямого угла $\gamma = \alpha + \beta$.

20.1.4. Теорема Гельмгольца

Поскольку тензор градиентов смещения разложили на два тензора, то с учетом $[T_u] = [T_\epsilon] + [T_\phi]$ выражение (20.2) примет вид

$$\vec{u}_1 = \vec{u} + [T_\phi] d\vec{r} + [T_\epsilon] d\vec{r} \quad (20.6).$$

В этом выражении \vec{u} — вектор поступательного движения тела, $[T_\phi] d\vec{r}$ — вектор вращательного движения твердого тела, $[T_\epsilon] d\vec{r}$ — вектор движения деформации тела. Из этого выражения следует формулировка теоремы Гельмгольца.

Движение частицы деформируемого твердого тела складывается из движения абсолютно твердого тела и движения деформации.

Уравнения неразрывности

Шесть независимых элементов тензора деформаций выражены через три компоненты перемещения. Задаваясь тремя проекциями перемещения можно однозначно, используя геометрические уравнения, определить шесть независимых деформаций в точке тела. Однако, задаваясь шестью компонентами деформаций, однозначно определить три перемещения нельзя. Необходимо использовать дополнительные

уравнения, связывающие деформации между собой. Они называются уравнения неразрывности деформаций.

При расчетах на прочность конструкций методом конечных элементов, использующим уравнения теории упругости, задачи решаются методом перемещений или методом напряжений.

В методе перемещений вначале определяются перемещения, затем деформации и напряжения. Решение получается однозначным и уравнения неразрывности в расчетах не используются.

В методе напряжений вначале определяются напряжения, по ним деформации, затем перемещения. В этом случае необходимо использовать уравнения неразрывности деформаций.

Метод перемещений проще, удобнее в использовании. Именно он используется в подавляющем большинстве расчетных программ и почти во всех программах, использующих метод конечных элементов. В данной книге рассматривается только метод перемещений, в котором не используются уравнения неразрывности деформаций, поэтому ограничимся лишь изложением основной идеи получения этих уравнений.

Продифференцировав дважды геометрические уравнения (20.3) и (20.4) и приравняв друг другу соответствующие производные, исключают из уравнений перемещения. В итоге получаются шесть уравнений неразрывности деформаций. В общем виде они выглядят так

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_j}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_k} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Используя круговую перестановку индексов $i, j, k = x, y, z$ получаем шесть уравнений неразрывности деформаций.

При решении плоской задачи теории упругости, в которой перемещений два и деформаций три, достаточно одного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

20.2. Теория напряжений

20.2.1. Равновесие элементарного тетраэдра. Тензор напряжений

Внутри произвольно нагруженного тела вырежем элемент в виде параллелепипеда dV . Разрезав его по диагонали, получим элементарный тетраэдр (рис. 20.6). Рассмотрим его равновесие.

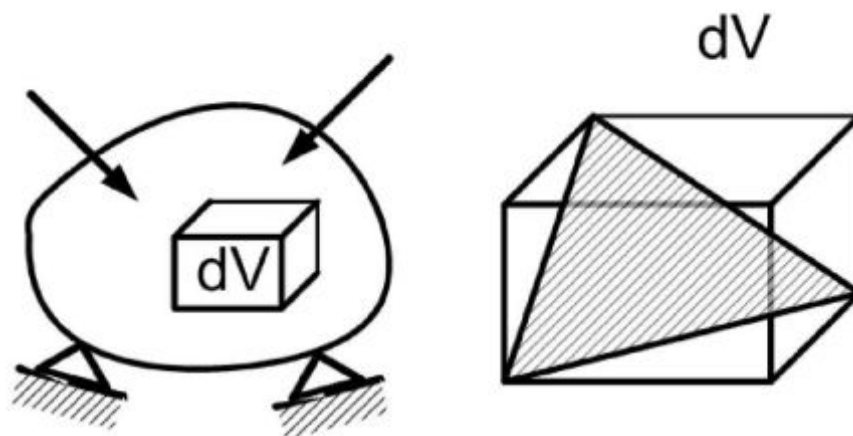


Рис. 20.6 Элементарный тетраэдр

В последующих выражениях предпочтительно вместо осей x, y, z использовать индексную систему координат x_1, x_2, x_3 . Напряжения, действующие по граням элементарного тетраэдра, показаны на рис. 20.7.

Обозначения на этом рисунке:

- ν — нормаль к наклонной площадке,
- p_ν — полное напряжение на наклонной площадке тетраэдра,
- dA_ν — площадь наклонной площадки,
- p_1, p_2, p_3 — напряжения на гранях тетраэдра, перпендикулярных осям x_1, x_2, x_3 ,
- dA_1, dA_2, dA_3 — площади граней тетраэдра, перпендикулярных осям x_1, x_2, x_3 ,
- p_V — напряжение, вызванное объемной силой, например, силой инерции.

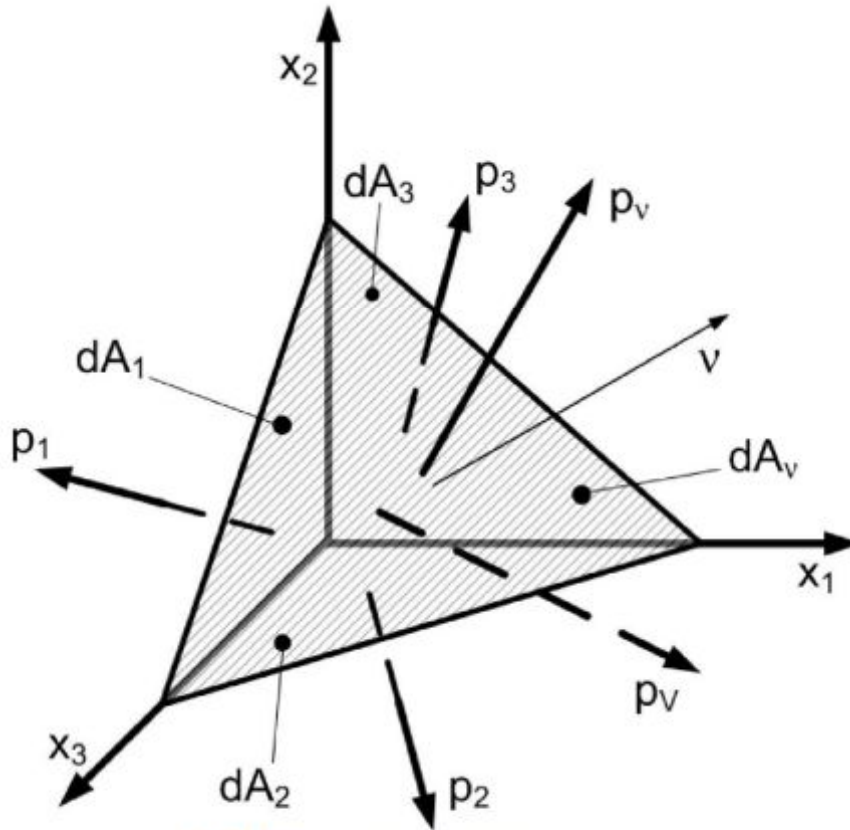


Рис. 20.7 Напряжения на гранях элементарного тетраэдра

Запишем уравнение равновесия тетраэдра в векторной форме

$$\overline{p}_\nu dA_\nu = \overline{p}_1 dA_1 + \overline{p}_2 dA_2 + \overline{p}_3 dA_3 + \overline{p}_V dV \quad (20.7).$$

В этом выражении объемная сила $\overline{p}_V dV$ записана как произведение удельной объемной силы \overline{p}_V на объем dV . Остальные силы — как произведение напряжения на площадь соответствующей грани тетраэдра.

Так как dA пропорционально dx^2 , а dV пропорционально dx^3 , то слагаемое $\overline{p}_V dV$ мало по сравнению с остальными слагаемыми и влиянием объемных сил можно пренебречь в последующих выводах.

Разделим выражение (20.7) на dA_ν и учтем, что $\frac{dA_i}{dA_\nu} = \cos(\bar{\nu} * \bar{x}_i) = l_{i\nu}$ — косинус угла между нормалью ν и осью x_i . Тогда выражение (20.7) примет вид

$$\overline{p}_\nu = \overline{p}_1 l_{1\nu} + \overline{p}_2 l_{2\nu} + \overline{p}_3 l_{3\nu}. \text{ представим это выражение в проекциях на оси координат}$$

$$\begin{cases} p_{\nu 1} = p_1 l_{1\nu} + p_2 l_{2\nu} + p_3 l_{3\nu} \\ p_{\nu 2} = p_1 l_{1\nu} + p_2 l_{2\nu} + p_3 l_{3\nu} \\ p_{\nu 3} = p_1 l_{1\nu} + p_2 l_{2\nu} + p_3 l_{3\nu} \end{cases} \quad (20.8).$$

В выражении p_{ij} i — нормаль к площадке, j — направление напряжения.

Запишем выражение (20.8) в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} p_{v1} \\ p_{v2} \\ p_{v3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l_{1v} \\ l_{2v} \\ l_{3v} \end{Bmatrix} \quad (20.9)$$

\overline{p}_v $[T_\sigma]$ \vec{v} — орт нормали.

В векторном виде (20.9) примет вид $\vec{p}_v = [T_\sigma] \cdot \vec{v}$

В выражении (20.9) матричный оператор $[T_\sigma]$ связывает два физических вектора \overline{p}_v и \vec{v} и является тензором второго ранга. Его название — *тензор напряжений*.

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (20.10)$$

Тензор напряжений характеризует напряженное состояние в точке тела. Если в окрестности некоторой точки тела выделить элементарный объем dV в виде параллелепипеда, то при $dV \rightarrow 0$ напряжения на противоположных гранях становятся одинаковыми.

Каждый столбец тензора напряжений представляет собой три проекции вектора полного напряжения, действующего в окрестности выбранной точки в одной из трех координатных плоскостей (рис. 20.8).

Смысл индексов при компонентах напряжений:

- первый индекс — направление нормали к площадке,
- второй индекс — направление напряжения.

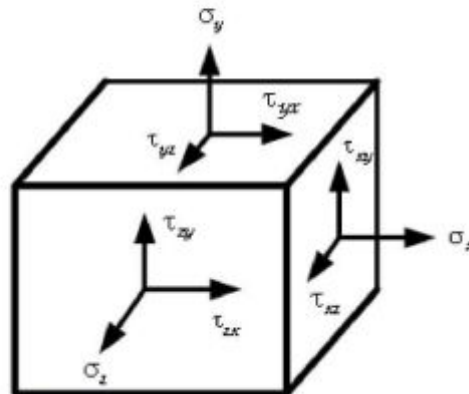


Рис. 20.8 Компоненты напряжения в точке тела

20.2.2. Дифференциальные уравнения равновесия

Рассмотрим равновесие элемента тела в форме параллелепипеда объемом dV . В этом случае напряжения на противоположных гранях будут отличаться на некоторую величину, определяемую путем разложения функции напряжения в ряд Тэйлора. В случае упругих (малых) деформаций тела можно ограничиться только линейными приращениями напряжений. На рис. 20.9 показаны положительные напряжения на противоположных гранях элементарного параллелепипеда.

ПРАВИЛО ЗНАКОВ

Если нормаль к площадке совпадает с направлением оси координат, то положительное направление напряжения также совпадает с направлением соответствующей оси

Чтобы не загромождать чертеж, на нем обозначены только напряжения, проектирующиеся на ось x (рис. 20.9). Остальные компоненты напряжений показаны на рисунке стрелками без надписей.

В этом разделе использована обычная система координат x, y, z , которая более привычна и наглядна, чем индексная система x_1, x_2, x_3 . Умение свободно переходить от одной системы координат к другой облегчает составление компьютерных программ.

Рассмотрим равновесие выделенного элемента. Спроектируем все силы на ось x .

$$\sum F_x = -\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + p_{Vx} dx dy dz = 0$$

Здесь p_{Vx} — проекция на ось x напряжения, вызванного объемными силами.

Разделим уравнение равновесия на объем элемента $dV = dx dy dz$ получаем

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + p_{Vx} = 0 \quad \text{— первое из трех дифференциальных уравнений равновесия.}$$

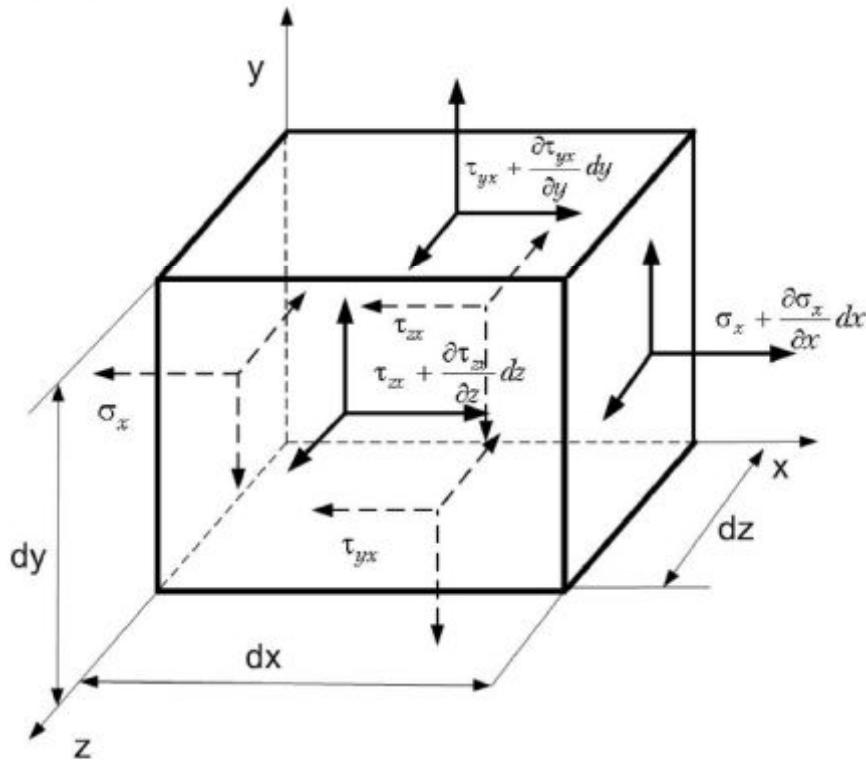


Рис. 20.9 Напряжения, действующие вдоль оси x , в элементарном параллелепипеде

По аналогии, спроектировав все силы на оси y и z , получаем еще два уравнения. В итоге получаем систему из трех дифференциальных уравнений равновесия (уравнения Навье).

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + p_{Vx} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + p_{Vy} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + p_{Vz} = 0 \end{cases} \quad (20.11).$$

Рассмотрев еще три уравнения равновесия, а именно, суммы моментов всех сил относительно осей x , y и z , получим уже известный из основного курса сопротивления материалов закон парности касательных напряжений

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \text{или} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Отсюда следует, что *тензор напряжений — симметричный*.

20.2.3. Векторы напряжений и деформаций

Так как тензоры напряжений и деформаций симметричные, то для задания напряженно-деформированного состояния в точке тела из девяти компонент каждого тензора достаточно определить только шесть. Эти шесть компонент тензоров напряжений и деформаций можно представить в виде вектора (столбца из шести чисел). В компьютерных расчетах работа с одномерными массивами значительно удобнее, чем с двумерными.

$$\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T \text{ — вектор напряжений} \quad (20.12).$$

где $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$, $\sigma_4 = \tau_{xy}$, $\sigma_5 = \tau_{yz}$, $\sigma_6 = \tau_{zx}$.

$$\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]^T \text{ — вектор деформаций} \quad (20.13),$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_x$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_y$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_z$, $\varepsilon_4 = \gamma_{xy}$, $\varepsilon_5 = \gamma_{yz}$, $\varepsilon_6 = \gamma_{zx}$.

Тензоры напряжений и деформаций связывают физические векторы и подчиняются законам и преобразованиям тензорной алгебры.

Векторы напряжений и деформаций не имеют физического смысла, так как обозначения их компонент выбраны произвольно. В принципе порядок компонент мог быть и другим.

Все алгоритмы программ расчетов напряженно-деформированного состояния тел методом конечных элементов используют понятия векторов напряжений и деформаций.

Дифференциальный матричный оператор

Запишем в упорядоченном виде дифференциальные уравнения равновесия Навье (20.11)

	От σ_1	От σ_2	От σ_3	От σ_4	От σ_5	От σ_6	От p_V
На ось x	$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}$	0	0	$\frac{\partial \sigma_4}{\partial y}$	0	$\frac{\partial \sigma_6}{\partial z}$	p_{Vx}
На ось y	0	$\frac{\partial \sigma_2}{\partial y}$	0	$\frac{\partial \sigma_4}{\partial x}$	$\frac{\partial \sigma_5}{\partial z}$	0	p_{Vy}
На ось z	0	0	$\frac{\partial \sigma_3}{\partial z}$	0	$\frac{\partial \sigma_5}{\partial y}$	$\frac{\partial \sigma_6}{\partial x}$	p_{Vz}

Сумма слагаемых в каждой строчке таблицы представляет собой одно уравнение равновесия.

Условно представим функцию дифференцирования напряжений в виде матрицы и перепишем предыдущее выражение в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_{Vx} \\ p_{Vy} \\ p_{Vz} \end{Bmatrix} = 0 \quad (20.14).$$

В этом выражении

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20.15)$$

D — *матричный дифференциальный оператор*, имеющий смысл операции дифференцирования, выполняемой по правилам перемножения матриц.

Запишем теперь дифференциальные уравнения равновесия в векторной и в матричной форме

$$D\vec{\sigma} + \vec{p}_V = 0 \quad \text{или} \quad D\{\sigma\} + \{p_V\} = 0 \quad (20.16).$$

Здесь слагаемое $D\vec{\sigma}$ означает не умножение матрицы на вектор, а операцию дифференцирования, выполняемую по правилам перемножения матриц.

Повторим сделанные выше действия с геометрическими уравнениями (20.3) и (20.4).

Запишем эти уравнения в упорядоченном виде

	От u_x	От u_y	От u_z
$\varepsilon_1 = \varepsilon_x$	$\frac{\partial u_x}{\partial x}$	0	0
$\varepsilon_2 = \varepsilon_y$	0	$\frac{\partial u_y}{\partial y}$	0
$\varepsilon_3 = \varepsilon_z$	0	0	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
$\varepsilon_4 = \gamma_{xy}$	$\frac{\partial u_x}{\partial y}$	$\frac{\partial u_y}{\partial x}$	0
$\varepsilon_5 = \gamma_{yz}$	0	$\frac{\partial u_y}{\partial z}$	$\frac{\partial u_z}{\partial y}$
$\varepsilon_6 = \gamma_{zx}$	$\frac{\partial u_x}{\partial z}$	0	$\frac{\partial u_z}{\partial x}$

Сумма слагаемых в каждой строчке таблицы представляет собой одно геометрическое уравнение.

Как и в случае с уравнениями равновесия представим условно операцию дифференцирования в виде произведения матриц

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}. \quad (20.17).$$

Сравнивая выражения (20.14) и (20.17) можно заметить, что в них использован один и тот же оператор дифференцирования, но в выражении (20.17) он транспонирован, то есть столбцы стали рядами.

Запишем геометрические уравнения в векторной и в матричной форме

$$\bar{\varepsilon} = D^T \bar{u} \quad \text{или} \quad \{\varepsilon\} = D^T \{u\} \quad (20.18).$$

Использование одного и того же дифференциального матричного оператора в геометрических уравнениях и в уравнениях равновесия носит название *статико-геометрическая аналогия*.

20.2.4. Изменение компонент тензоров при повороте осей координат

Рассмотрим общие свойства тензоров второго ранга. По определению тензор второго ранга связывает два физических вектора, то есть векторы, имеющие длину и направление.

Пусть вектор \vec{b} связан с вектором \vec{a} с помощью тензора $[T]$. Как изменятся компоненты векторов \vec{a} и \vec{b} при повороте осей координат? На рис. 20.10 показан вектор \vec{a} в системе координат xyz .

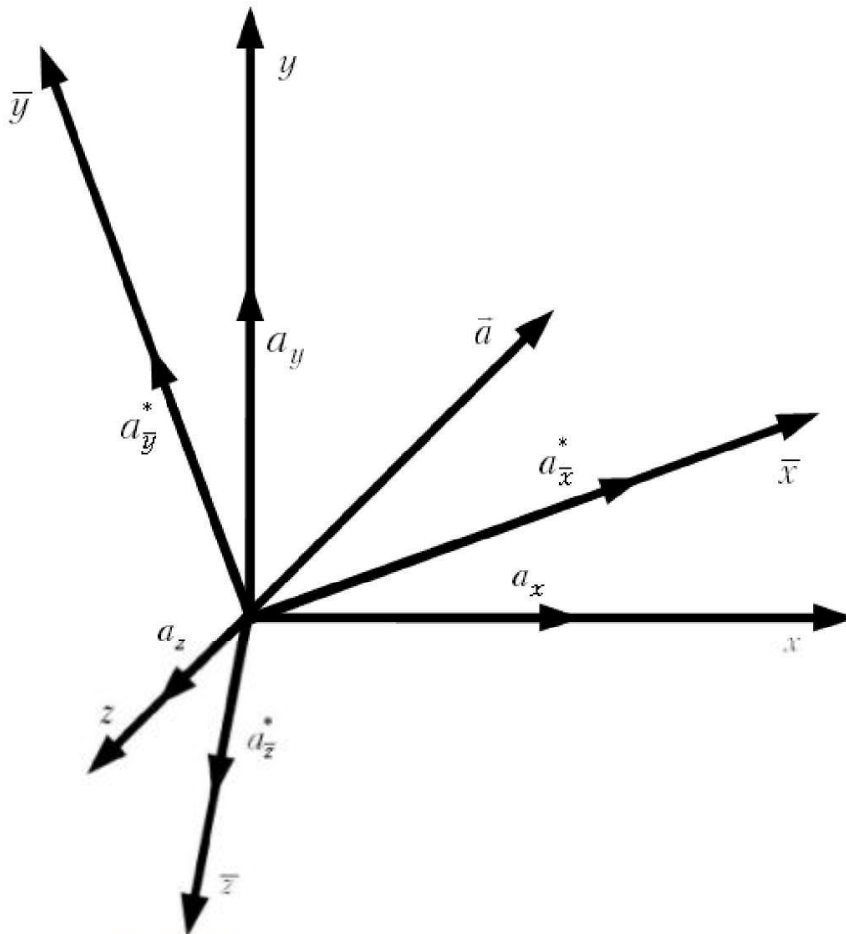


Рис. 20.10 Компоненты вектора \vec{a} в системах координат xyz и \overline{xyz}

Пусть $\vec{b} = [T]\vec{a}$. (20.19).

Повернем оси координат в положение \overline{xyz} . Векторы \vec{a} и \vec{b} при этом не изменятся, но изменятся их компоненты. Пусть связь между ними станет

$\vec{b}^* = [T^*]\vec{a}^*$ (20.20).

Проекция вектора \vec{a}

в исходной системе координат xyz $\vec{a} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}$, в новой системе \overline{xyz} $\vec{a}^* = \begin{Bmatrix} a_x^* \\ a_y^* \\ a_z^* \end{Bmatrix}$.

Введем матрицу направляющих косинусов, связывающую положение осей координат до и после поворота.

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{x\overline{x}} & l_{y\overline{x}} & l_{z\overline{x}} \\ l_{x\overline{y}} & l_{y\overline{y}} & l_{z\overline{y}} \\ l_{x\overline{z}} & l_{y\overline{z}} & l_{z\overline{z}} \end{bmatrix}.$$

Здесь, например, $l_{y\overline{x}}$ — косинус угла между исходной осью y и новой осью \overline{x} .

Проекция вектора \vec{a} на новые оси координат \overline{xyz} получим как сумму проекций старых компонент вектора \vec{a} на новые оси.

$$\begin{cases} a_x^* = a_x l_{x\overline{x}} + a_y l_{y\overline{x}} + a_z l_{z\overline{x}} \\ a_y^* = a_x l_{x\overline{y}} + a_y l_{y\overline{y}} + a_z l_{z\overline{y}} \\ a_z^* = a_x l_{x\overline{z}} + a_y l_{y\overline{z}} + a_z l_{z\overline{z}} \end{cases}$$

То же выражение в матричной форме

$$\begin{cases} a_x^* \\ a_y^* \\ a_z^* \end{cases} = \begin{bmatrix} l_{x\bar{x}} & l_{y\bar{x}} & l_{z\bar{x}} \\ l_{x\bar{y}} & l_{y\bar{y}} & l_{z\bar{y}} \\ l_{x\bar{z}} & l_{y\bar{z}} & l_{z\bar{z}} \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} a_x \\ a_y \\ a_z \end{cases} \text{ и в векторной форме } \vec{a}^* = [L]^T \vec{a}.$$

Аналогично, преобразовав вектор \vec{b} , получаем $\vec{b}^* = [L]^T \vec{b}$.

Произведем обратное преобразование последних выражений

$$\vec{a} = [L^T]^{-1} \vec{a}^* \quad \vec{b} = [L^T]^{-1} \vec{b}^* \quad (20.21).$$

Второе из выражений (20.21) подставим в (20.20)

$$[L^T]^{-1} \vec{b}^* = [T][L^T]^{-1} \vec{a}^*$$

Левую и правую части последнего выражения умножаем слева на $[L^T]$

$$[L^T][L^T]^{-1} \vec{b}^* = [L^T][T][L^T]^{-1} \vec{a}^* \quad (20.22).$$

В этом выражении $[L^T][L^T]^{-1} = [E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица — эквивалент умножения матрицы на единицу.

Матрица направляющих косинусов $[L]$ — ортогональная. Для нее $[L^T] = [L]^{-1}$.

Тогда $[L^T]^{-1} = [L]$. В итоге выражение (20.22) приобретает вид

$$\vec{b}^* = [L^T][T][L]\vec{a}^*.$$

Сравнивая последнее выражение с выражением (20.20), замечаем. Что

$$[T^*] = [L^T][T][L] \text{ — формула подобных преобразований} \quad (20.23),$$

где $[T]$ и $[T^*]$ — любой тензор второго ранга в исходной и в повернутой системе координат; $[L]$ — матрица направляющих косинусов (углов между исходными и повернутыми осями координат).

20.2.5. Главные напряжения и главные деформации

Понятие о главных напряжениях рассмотрено в главе 4 (раздел 4.7).

Главными площадками называются площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения.

Главными напряжениями называются нормальные напряжения на главных площадках.

Нормаль к главной площадке называется *главной осью*.

Рассмотрим два способа определения главных напряжений: аналитический, традиционно рассматриваемый в курсе теории упругости и численный (компьютерный) метод Якоби.

Аналитический метод определения главных напряжений

Вернемся к рассмотрению равновесия элементарного тетраэдра (рис. 20.7). Предположим, что наклонная площадка главная, то есть вектор полного напряжения $\vec{p}_v = \vec{\sigma}$ — главное напряжение на наклонной площадке совпадает по направлению с нормалью ν к этой площадке. Тогда условие равновесия тетраэдра (20.8) примет вид

$$\begin{cases} p_{vx} = \sigma l_{vx} = \sigma_x l_{vx} + \tau_{yx} l_{vy} + \tau_{zx} l_{vz} \\ p_{vy} = \sigma l_{vy} = \tau_{xy} l_{vx} + \sigma_y l_{vy} + \tau_{zy} l_{vz} \\ p_{vz} = \sigma l_{vz} = \tau_{xz} l_{vx} + \tau_{yz} l_{vy} + \sigma_z l_{vz} \end{cases}$$

Перенесем левую часть этого выражения вправо и представим все выражение в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l_{vx} \\ l_{vy} \\ l_{vz} \end{Bmatrix} = 0 \quad (20.24).$$

Система уравнений (20.24) имеет решение, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю. Это условие выполняется, если главное напряжение σ удовлетворяет характеристическому уравнению, известному как "всковое уравнение"

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (20.25).$$

Коэффициенты "вскового уравнения" I_1, I_2, I_3 называются инвариантами, то есть независящими от выбора осей координат. Действительно, напряженное состояние в теле не зависит от выбора осей координат, следовательно, решение уравнения и его коэффициенты также не зависят от выбора осей координат. Формулы инвариантов

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}.$$

Решая кубическое "всковое уравнение", находим три корня, которые являются главными напряжениями. Главные напряжения принято расставлять по росту

$$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \text{ с учетом знаков.}$$

Тензор напряжений принимает вид

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}.$$

Напряженное состояние в точке тела не изменилось. Изменились лишь компоненты тензора напряжений, взятые на других (главных) площадках.

Матрица, у которой равны нулю все члены, кроме находящихся на главной диагонали, называется *диагональной матрицей*.

Числа, находящиеся на главной диагонали диагональной матрицы, называются *собственными числами*.

В окрестности любой точки можно провести три взаимно перпендикулярные главные площадки.

Чтобы определить положение главных площадок надо к системе уравнений (20.24) добавить уравнение $l_{vx}^2 + l_{vy}^2 + l_{vz}^2 = 1$. Подставляя в указанные уравнения по очереди одно из главных напряжений, последовательно находят направляющие косинусы для трех взаимно перпендикулярных главных площадок. Решать такую задачу аналитически нет смысла, так как она очень просто решается численно на компьютере.

Компьютерный расчет главных напряжений

Преобразуем выражение (20.24), представив матрицу коэффициентов в виде суммы двух матриц,

$$\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} l_{vx} \\ l_{vy} \\ l_{vz} \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{или}$$

$$([T_\sigma] - \sigma[E]) \cdot \{l\} = 0 \quad (20.26).$$

Выражение (20.26) представляет собой частный случай стандартной задачи на собственные числа.

В нем $[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица, $\vec{v} = \begin{Bmatrix} l_{vx} \\ l_{vy} \\ l_{vz} \end{Bmatrix}$ — орт нормали к главной

площадке, σ — главное напряжение.

Стандартная задача решается на компьютере с помощью стандартных программ,

имеющихся в математическом обеспечении большинства языков программирования и в специализированных математических пакетах, таких как Mathcad, Matlab и других.

Все стандартные программы реализуют метод вращений Якоби. Суть этого метода состоит во "вращении" тензора $[T_\sigma]$ вокруг одной из осей, например x , до тех пор, пока побочные члены матрицы (в нашем случае касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$) не обратятся в нуль. Затем "вращаем" тензор вокруг второй и третьей осей, добиваясь равенства нулю остальных касательных напряжений.

Строго говоря, в алгоритме решения задачи нет вращений, а есть формула для угла, на который надо развернуть площадку, чтобы она стала главной.

Результатом решения стандартной задачи является вектор собственных чисел (главных напряжений) $\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{Bmatrix}$ и спектр собственных векторов

$$[L] = \begin{bmatrix} \bar{v}_I & \bar{v}_{II} & \bar{v}_{III} \\ om & om & om \\ \sigma_I & \sigma_{II} & \sigma_{III} \end{bmatrix}, \text{ содержащий орты нормалей } \bar{V}_i \text{ к трем главным площадкам.}$$

В общей постановке стандартную задачу на собственные числа можно сформулировать следующим образом.

Любую симметричную матрицу можно привести к диагональному виду, найдя ее собственные числа (на главной диагонали матрицы) путем решения уравнения

$$[A]\{R\} = \lambda\{R\} \text{ или, что то же самое, } ([A] - \lambda[E]) \cdot \{R\} = 0.$$

Размер матрицы может быть любым. Решение может не иметь никакого физического смысла.

В Mathcad для решения стандартной задачи на собственные числа используется две функции *eigenvals* и *eigenvecs*.

Функция *eigenvals(M)* возвращает собственные числа симметричной матрицы M .

Функция *eigenvecs(M)* возвращает спектр собственных векторов матрицы M .

Пример использования этих функций приведен на рис. 20.11.



Рис. 20.11 Определение главных напряжений в Mathcad

Главные деформации

Аналогично понятию о главных напряжениях вводится понятие о главных деформациях. Симметричный тензор деформаций можно привести к диагональному виду

$$[T_\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{III} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\epsilon_I, \epsilon_{II}, \epsilon_{III}$ — главные деформации.

Также как для главных напряжений можно определить направление главных

деформаций, решив стандартную задачу на собственные числа.

В случае упругой задачи направление главных напряжений совпадает с направлением главных деформаций, то есть главные оси напряжений совпадают с главными осями деформаций.

Главные деформации, как и главные напряжения, можно определить, решив "вековое" характеристическое уравнение $\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0$. Инварианты тензора деформаций I_1, I_2, I_3 аналогичны инвариантам тензора напряжений.

20.3.Связь между напряжениями и деформациями

Любая деформация тела вызывает появление в нем внутренних усилий и соответственно напряжений между частицами тела. Характер связи между деформациями и напряжениями зависит от условий нагружения, величины деформации и от материала тела.

Типы поведения материалов

- *Линейно упругое* (рис. 20.12, а). Диаграмма деформирования — прямая линия. Справедлив закон Гука. Линии нагрузки и разгрузки совпадают.
- *Нелинейно упругое* (рис. 20.12, б). Диаграмма деформирования — кривая линия. Закон Гука не выполняется, но пластических деформаций нет. Линии нагрузки и разгрузки совпадают.
- *Упругопластическое* (рис. 20.12, в). Линии нагрузки и разгрузки на диаграмме деформирования не совпадают. Нагрузка — упругопластическая, разгрузка — чисто упругая.
- *Линейно-вязкое* (рис. 20.12, г). Напряжения линейно зависят от скорости деформации $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ и коэффициента вязкости μ .
- *Нелинейно-вязкое* (рис. 20.12, д). Нелинейная зависимость напряжений от скорости деформаций.
- *Вязко-пластическое* (рис. 20.12, е). Упругой деформацией обычно пренебрегают. Пластическая деформация зависит от скорости деформаций линейно или нелинейно.

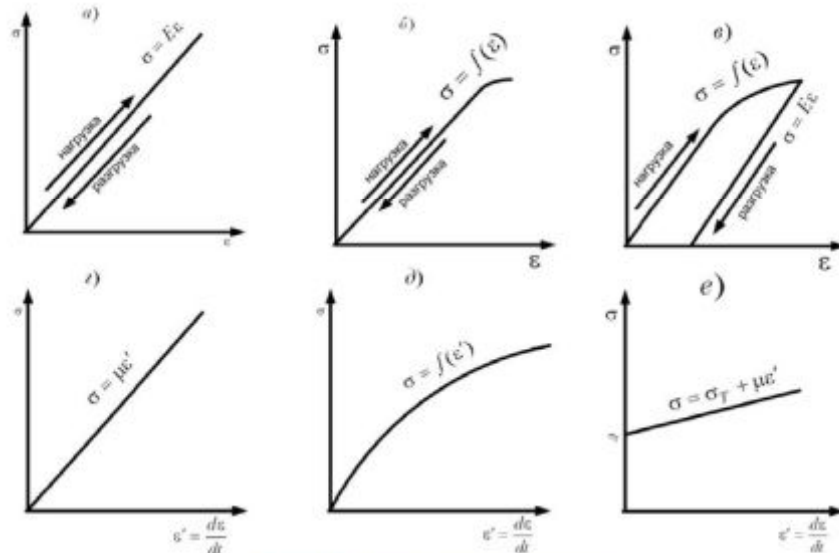


Рис. 20.12 Типы поведения материалов

В этой главе рассматривается лишь упругое поведение материала.

20.3.1. Физические уравнения теории упругости

При упругой деформации используем принцип независимости действия сил. Рассмотрим отдельные виды деформации и сложим результаты их действия. Начало параграфа повторяет начало раздела 9.5, но обобщает его.

Растяжение

Запишем деформации элемента тела при одноосном растяжении вдоль оси x (рис. 20.13).

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}.$$

Линейная деформация не вызывает сдвига (прямые углы на рис. 20.13 остаются прямыми).

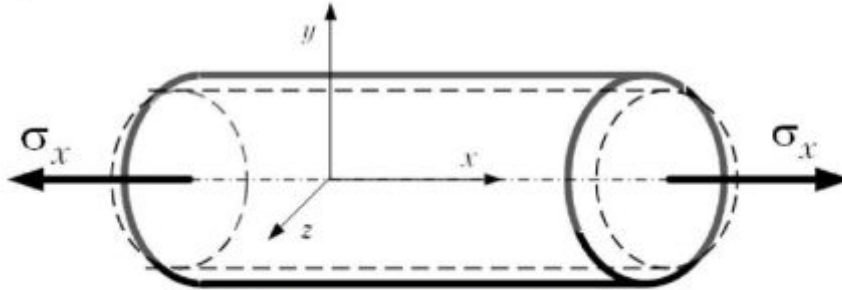


Рис. 20.13 Растяжение элемента тела вдоль оси x

Сдвиг

Рассмотрим сдвиг в плоскости xy (рис.20.14). Ему соответствует лишь одна деформация $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$. Остальные деформации равны нулю.

Деформация сдвига не вызывает появления линейных деформаций, так как размеры элемента при малом угле сдвига γ_{xy} не меняются.

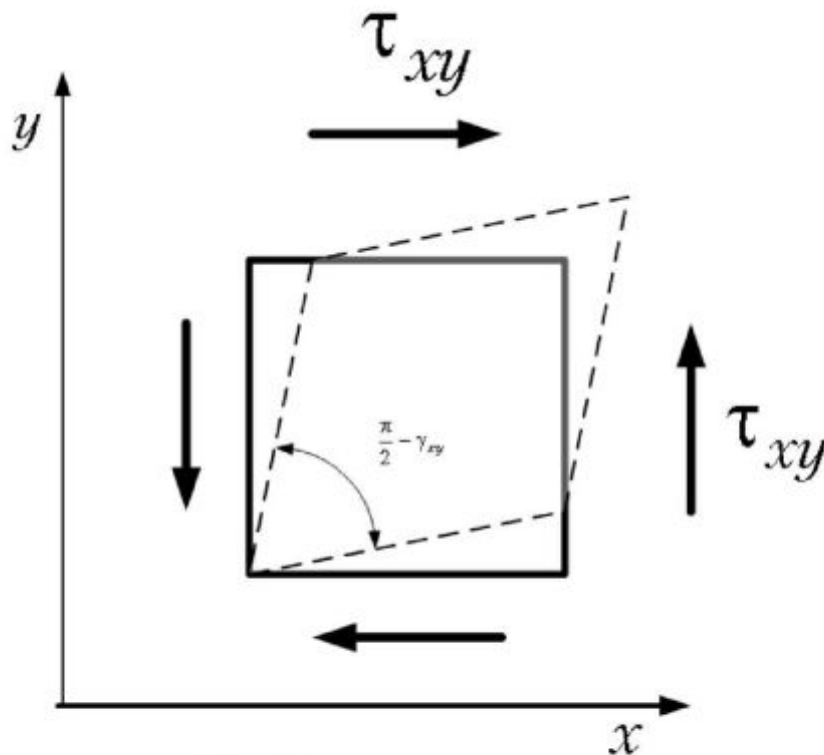


Рис. 20.14 Деформация сдвига элемента тела

Общий случай нагружения тела

В общем случае в точке тела возникают шесть компонент деформаций, образующих вектор деформаций

$$\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]^T,$$

$$\text{где } \varepsilon_1 = \varepsilon_x, \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \varepsilon_4 = \gamma_{xy}, \varepsilon_5 = \gamma_{yz}, \varepsilon_6 = \gamma_{zx}.$$

Эти шесть деформаций вызывают появление шести напряжений, образующих вектор напряжений

$$\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T,$$

где $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$, $\sigma_4 = \tau_{xy}$, $\sigma_5 = \tau_{yz}$, $\sigma_6 = \tau_{zx}$.

Согласно принципу независимости действия сил каждая деформация вносит свой вклад в каждое напряжение

$$\begin{cases} \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + \dots + C_{16}\varepsilon_6 \\ \sigma_2 = C_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + \dots + C_{26}\varepsilon_6 \\ \dots \\ \sigma_6 = C_{61}\varepsilon_1 + C_{62}\varepsilon_2 + \dots + C_{66}\varepsilon_6 \end{cases}$$

или то же выражение в матричном виде

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (20.27).$$

здесь $[C]$ — матрица внутренней жесткости.

Возможна и другая форма записи связи напряжений и деформаций

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = B_{11}\sigma_1 + B_{12}\sigma_2 + \dots + B_{16}\sigma_6 \\ \varepsilon_2 = B_{21}\sigma_1 + B_{22}\sigma_2 + \dots + B_{26}\sigma_6 \\ \dots \\ \varepsilon_6 = B_{61}\sigma_1 + B_{62}\sigma_2 + \dots + B_{66}\sigma_6 \end{cases}$$

или то же выражение в матричном виде

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\sigma\} \quad (20.28).$$

Здесь $[B]$ — матрица внутренней податливости.

Выражения (20.27) и (20.28) представляют собой закон Гука для внутренних сил.

Решим систему уравнений (20.28) путем обращения матрицы внутренней податливости и сравним с выражением (20.27)

$$\{\sigma\} = [B^{-1}]\{\varepsilon\} = [C]\{\varepsilon\}.$$

$$\text{Следовательно } [C] = [B^{-1}]$$

Найдем значения коэффициентов внутренней податливости. Для этого запишем систему уравнений (20.28) в упорядоченном виде. Запишем деформации от каждого напряжения по каждому направлению.

От напряжения σ_x в продольном направлении возникает деформация $\frac{\sigma_x}{E}$, в поперечных направлениях $-\mu\frac{\sigma_x}{E}$. Нормальное напряжение не вызывает сдвига.

Касательное напряжение τ_{xy} вызывает сдвиг только в плоскости xy и не вызывает линейных деформаций. Аналогично определяются деформации от остальных напряжений.

	От $\sigma_1 = \sigma_x$	От $\sigma_2 = \sigma_y$	От $\sigma_3 = \sigma_z$	От $\sigma_4 = \tau_{xy}$	От $\sigma_5 = \tau_{yz}$	От $\sigma_6 = \tau_{zx}$
$\varepsilon_1 = \varepsilon_x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
$\varepsilon_2 = \varepsilon_y$	$-\mu\frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
$\varepsilon_3 = \varepsilon_z$	$-\mu\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$	0	0	0
$\varepsilon_4 = \gamma_{xy}$	0	0	0	$\frac{\tau_{xy}}{G}$	0	0

$\varepsilon_y = \gamma_{yz}$	0	0	0	0	$\frac{\tau_{yz}}{G}$	0
$\varepsilon_z = \gamma_{zx}$	0	0	0	0	0	$\frac{\tau_{zx}}{G}$

Просуммировав выражения в каждой строчке, получаем полные деформации по каждому направлению

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z) & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y) & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (20.29).$$

Шесть уравнений (20.29) представляют собой *физические уравнения теории упругости*.

На основании приведенной выше таблицы запишем матрицу коэффициентов внутренней податливости в выражении (20.28)

$$[B] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{G} \end{bmatrix} \text{ и матрицу коэффициентов внутренней жесткости}$$

в выражении (20.27)

$$[C] = [B^{-1}] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\mu \end{bmatrix}.$$

Для получения матриц $[C]$ и $[B]$ достаточно знания двух упругих постоянных материала E и μ , поскольку $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$. Это справедливо для изотропных тел, у

которых свойства во всех направлениях одинаковы (для большинства металлов). Для ортотропных материалов, у которых свойства по трем направлениям различны, требуется знание девяти упругих констант (композиционные материалы, стеклопластики). В самом общем случае необходимо знание 21 константы материала.

20.3.2. Законы упругого изменения объема и формы тела

Закон изменения объема тела

Рассмотрим относительное изменение элементарного объема dV в процессе деформации тела (рис. 20.15).

До деформации $dV = dx \cdot dy \cdot dz$,

$$\begin{aligned} \text{После деформации} \quad dV + \Delta dV &= (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz) = \\ &= dx \cdot dy \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z) \end{aligned}$$

Где $\varepsilon_x = \Delta dx/dx$ и так далее.

Относительное изменение объема

$$\theta = \frac{(dV + \Delta dV) - dV}{dV} = \frac{dx \cdot dy \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z) - dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} =$$

$$= (1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z) - 1$$

Пренебрегая произведением деформаций $\varepsilon \cdot \varepsilon \approx 0$, получаем

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (20.30).$$

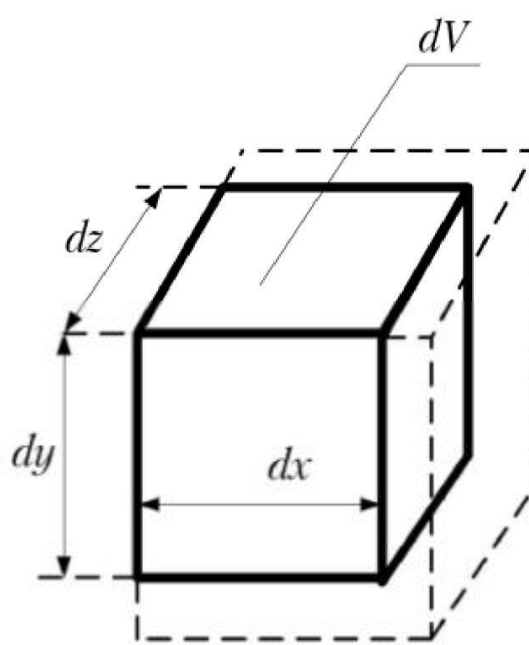


Рис. 20.15. Изменение объема элемента тела

В выражении (20.30) выразим деформации через напряжения по закону Гука (20.29).

$$\theta = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) + \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z) + \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y) \text{ или}$$

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (20.31).$$

Введем среднее напряжение $\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ и среднюю деформацию

$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$. Тогда относительное изменение объема по выражениям (20.30) и (20.31) можно записать в виде

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_{\text{ср}} \quad \text{и} \quad \theta = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1 - 2\mu}{E}3\sigma_{\text{ср}}.$$

Приравняв два последних выражения, получаем выражение закона изменения объема тела при упругой деформации

$$\sigma_{\text{ср}} = K \cdot \varepsilon_{\text{ср}} \quad (20.32),$$

где $K = \frac{E}{1 - 2\mu}$ — объемный модуль упругости.

Относительное упругое изменение объема тела равно сумме линейных деформаций и пропорционально среднему напряжению.

Тензор напряжений в окрестности любой точки тела можно представить в виде суммы двух тензоров (рис. 20.16): шарового тензора T_{σ}^0 и тензора-девиатора T_{σ}^D , в дальнейшем называемого просто девиатор D_{σ} .

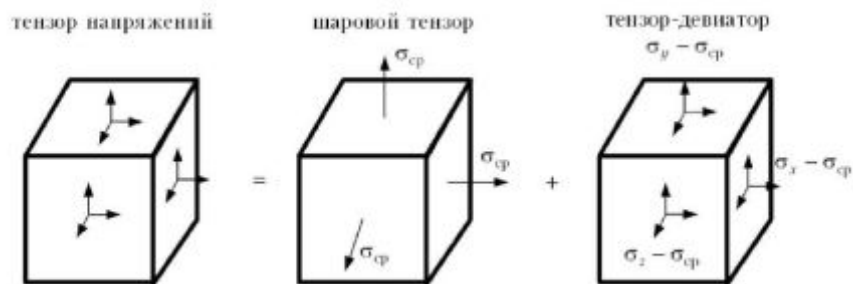


Рис. 20.16. Разложение тензора напряжений на шаровой и девиатор

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{bmatrix}$$

тензор напряжений $T_{\sigma} =$ шаровой тензор $T_{\sigma}^0 +$ девиатор D_{σ}

Шаровой тензор отвечает за изменение объема тела, следовательно, девиатор напряжений отвечает за изменение формы тела

Аналогично тензор деформаций можно также разложить на шаровой тензор и тензор-девиатор. Это общее свойство всех тензоров второго ранга.

$$[T_{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{cp} \end{bmatrix}$$

тензор деформаций $T_{\varepsilon} =$ шаровой тензор $T_{\varepsilon}^0 +$ тензор-девиатор T_{ε}^D

Любой тензор второго ранга можно разложить на шаровой тензор и тензор-девиатор.

В матричном виде закон изменения объема тела примет вид

$$[T_{\sigma}^0] = K [T_{\varepsilon}^0] \quad (20.33)$$

Для тензора-девиатора, как и для любого тензора второго ранга, можно определить собственные числа и спектр собственных векторов, найти инварианты (коэффициенты характеристического (векового) уравнения).

$e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0$, где e — собственное число любого тензора второго ранга, I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора второго ранга.

Первые инварианты девиаторов равны нулю. Третьи инварианты не получили распространения ввиду сложности их использования.

Вторые инварианты девиаторов напряжений и деформаций являются ключевым понятием в теории пластичности (глава 25)

$$I_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]$$

С использованием этих инвариантов записываются интенсивность напряжений $\sigma_{инт}$ и интенсивность деформаций $\varepsilon_{инт}$, используемые в условии пластичности,

$$\sigma_{инт} = \sqrt{3J_2(D_{\sigma})} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{инт} = \sqrt{\frac{4}{3}J_2(D_{\varepsilon})}$$

После подстановки выражений вторых инвариантов получаем

$$\sigma_{инт} = \sigma_{эквIV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\varepsilon_{инт} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

При использовании главных напряжений и главных деформаций

$$\sigma_{\text{инт}} = \sigma_{\text{эквIV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} \quad (20.34),$$

$$\varepsilon_{\text{инт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})^2 + (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})^2 + (\varepsilon_{III} - \varepsilon_I)^2} \quad (20.35).$$

Закон изменения формы тела

Этот закон связывает девиаторы напряжений и деформаций, отвечающие за изменение формы. Найдем связь между отдельными компонентами этих девиаторов.

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) - \frac{1-2\mu}{E} \sigma_{\text{ср}} = \frac{1+\mu}{E} (\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}).$$

С учетом $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ находим $\frac{1+\mu}{E} = \frac{1}{2G}$. Тогда связь компонентов двух девиаторов можно записать в виде шести уравнений

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}}) \\ \text{-----} \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right) \\ \text{-----} \end{cases} \quad (20.36).$$

Та же связь в матричном виде (20.37).

Формулировка закона изменения формы тела:

Девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций.

20.4. Виды напряженного состояния

В курсе сопротивления материалов отмечаются три вида напряженного состояния:

- объемное — все три главных напряжения не равны нулю,
- плоское — одно из трех главных напряжений равно нулю,
- линейное — два главных напряжения равны нулю.

Примером линейного напряженного состояния являются растяжение-сжатие, чистый изгиб.

Пример плоского напряженного состояния — изгиб, кручение, сложное сопротивление длинных и тонких стержней, нагружение тонких пластин и оболочек.

Пример объемного напряженного состояния — нагружение массивных тел.

Решение объемных задач на порядок более сложное, чем решение плоских задач.

Однако среди объемных задач можно выделить два частных случая, для которых решение может быть достигнуто почти аналогично решению плоских задач. Это плоское деформированное состояние и осесимметричное нагружение. Рассмотрим их подробнее и сравним с плоским напряженным состоянием.

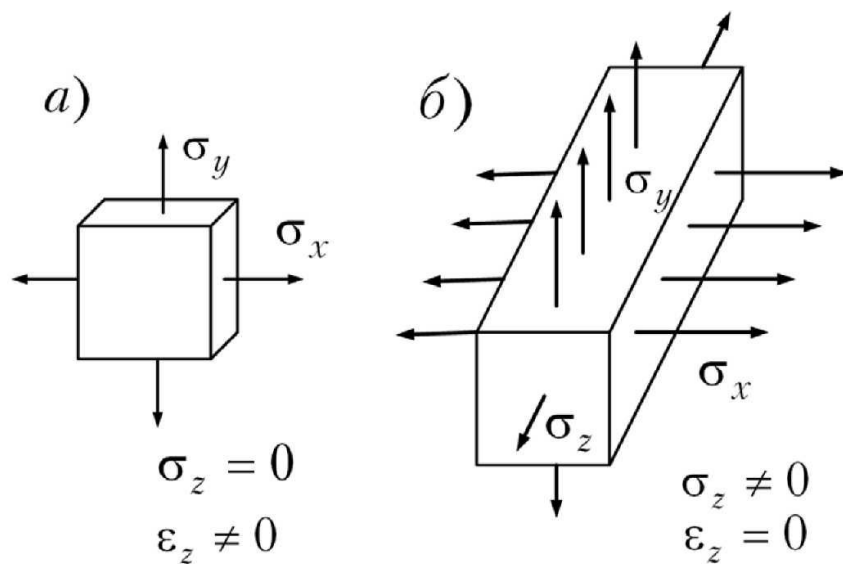


Рис. 20.17 Плоское напряженное (а) и плоское деформированное (б) состояние

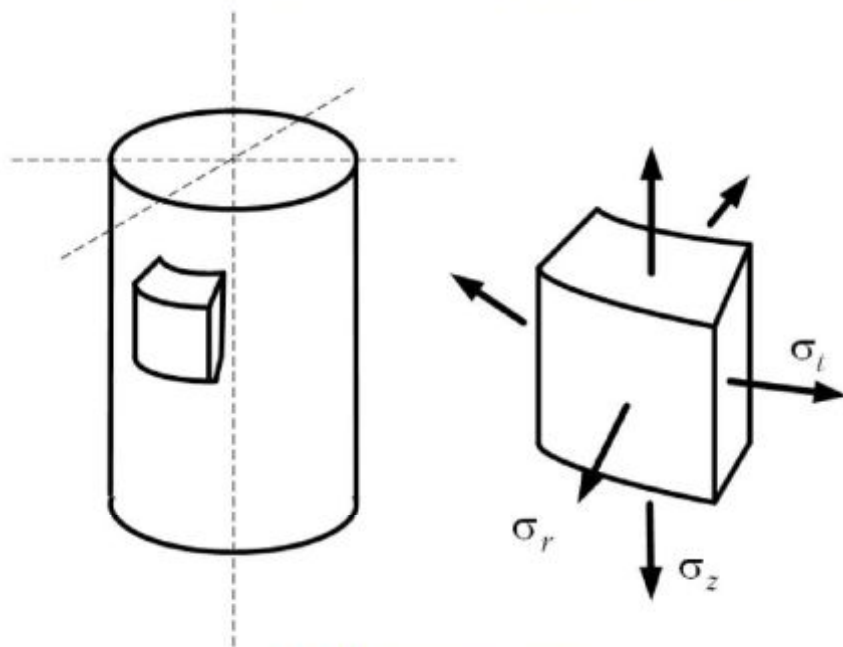


Рис. 20.18 Осесимметричная задача

Плоское напряженное состояние (рис. 20.17, а) возникает в тонких пластинах и оболочках

Характерная особенность

Плоское деформированное состояние (рис. 20.17, б)

Характерная особенность $\sigma_z \neq 0$ $\varepsilon_z = 0$.

Переход от плоского напряженного к плоскому деформированному состоянию происходит при значительном увеличении толщины пластины или оболочки. Приближенно к задаче плоской деформации можно свести многие объемные задачи.

Осесимметричное нагружение (рис. 20.18)

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad [T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

При вырезании элемента двумя меридиональными и двумя кольцевыми сечениями (рис. 20.18) касательные напряжения на границах элемента отсутствуют, так как форма тела под действием осесимметричной нагрузки не меняется. Следовательно, по границам элемента действуют главные напряжения $\sigma_I = \sigma_z$, $\sigma_{II} = \sigma_r$, $\sigma_{III} = \sigma_z$.

20.5. Уравнения теории упругости для частных случаев нагружения

При решении задач методом конечных элементов (МКЭ) программы, составленные для плоского напряженного состояния решают, как правило, и задачи плоского деформированного состояния, и осесимметричные задачи. Алгоритмы решения всех трех типов задач совпадают, и буквально лишь несколько операторов учитывают особенности конкретной задачи. Пользователю программы достаточно изменить их, чтобы перенастроить программу на решение другого класса задач.

Для указанных частных случаев нагружения справедливы приведенные в этой главе

- уравнения равновесия (20.16) $D\bar{\sigma} + \bar{p}_V = 0$,
- геометрические уравнения (20.18) $\bar{\varepsilon} = D^T \bar{u}$,
- физические уравнения (20.27)

Рассмотрим особенности уравнений теории упругости для отмеченных типов задач. Они отражаются в записи матричного дифференциального оператора D и матрицы внутренней жесткости $[C]$.

20.5.1. Плоское напряженное состояние

При плоском напряженном состоянии (рис. 20.17, а) $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\varepsilon_z \neq 0$.

$$\text{Вектор напряжений } \bar{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T.$$

$$\text{Вектор деформаций } \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T.$$

В МКЭ деформацию ε_z не включают в вектор деформаций, а определяют на заключительном этапе расчета по закону Гука $\varepsilon_z = \frac{-\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$.

Матричный дифференциальный оператор в геометрических уравнениях $\bar{\varepsilon} = D^T \bar{u}$ и в уравнениях равновесия $D\bar{\sigma} + \bar{p}_V = 0$

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}.$$

Матрица внутренней жесткости в физических уравнениях теории упругости

$$[C] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

20.5.2. Плоское деформированное состояние

При плоской деформации (рис. 20.17, б) $\sigma_z \neq 0$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\varepsilon_z = 0$.

Глава 21. Основы расчета упругих систем

21.1. Начало возможных перемещений

В основе расчета упругих систем лежит начало возможных перемещений. Сформулируем этот известный в механике принцип.

Чтобы система находилась в равновесии необходимо и достаточно, чтобы сумма работ внешних и внутренних сил была равна нулю на любых возможных перемещениях.

Возможными называются перемещения малые, независимые от приложенных нагрузок и согласованные с внешними связями. Действительные перемещения системы всегда являются возможными.

Запишем в общем виде выражения для работ внешних $W^{\text{внеш}}$ и внутренних сил $W^{\text{внутр}}$.

В последующем изложении будем использовать обобщенные обозначения сил и перемещений, введенные в начале главы 11:

- F — любой силовой фактор (сосредоточенная сила, пара сил, распределенная нагрузка),
- Δ — перемещение, на котором сила совершает работу.

Работа внешних сил

Рассмотрим растяжение стержня (рис. 21.1,а). Под действием силы F стержень растянулся. Точка приложения силы переместилась на величину Δ . Диаграмма деформирования стержня показана на рис. 21.1,б. В общем случае нагружения диаграмма деформирования необязательно линейная. Рассмотрим малое приращение (вариацию) перемещения $\delta\Delta$. Приращение работы (вариация работы), вызванное этим перемещением точки приложения силы $\delta W^{\text{внеш}} = F \cdot \delta\Delta$.

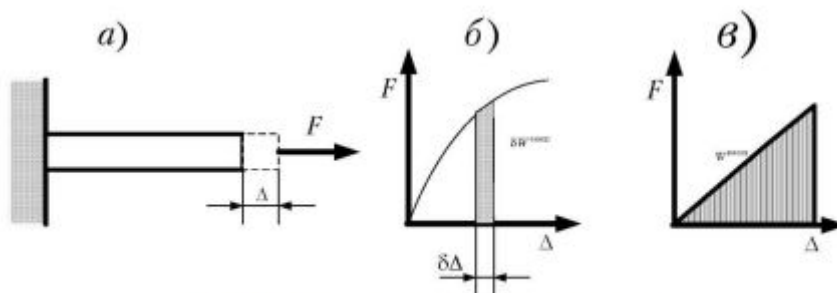


Рис. 21.1 К определению работы одной внешней силы

Согласно принципу независимости действия сил, справедливому при малых перемещениях твердых тел, в случае действия системы из n сил приращение работы внешних сил

$$\delta W^{\text{внеш}} = F_1 \cdot \delta\Delta_1 + F_2 \cdot \delta\Delta_2 + \dots + F_n \cdot \delta\Delta_n$$

$$\text{или в матричном виде } \delta W^{\text{внеш}} = [F] \{\delta\Delta\} \quad (21.1).$$

В случае упругой деформации знак вариации в выражении (21.1) можно опустить. В этом случае диаграмма деформирования линейная и работа внешних сил равна площади треугольника (диаграммы) (рис. 21.1,в).

При действии одной силы $W^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$. Для системы из n сил

$$W^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} [F] \{\Delta\} \quad (21.2).$$

Работа внутренних сил

Работу внутренних сил определим как сумму работ напряжений по объему тела.

При простом растяжении в случае действия одной силы (рис. 21.2,а) в сечениях

стержня возникает одно нормальное напряжение σ . Удельная работа внутренних сил равна площади диаграммы деформирования в координатах σ – ε (рис. 21.2,б). Приращение удельной работы внутренних сил на приращении деформаций $\delta W_0^{\text{внутр}} = \sigma \cdot \delta\varepsilon$.

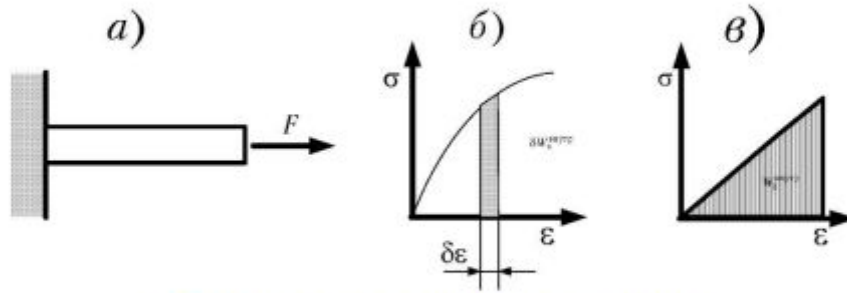


Рис. 21.2 К определению удельной работы внутренних сил

В общем случае нагружения в точке тела действуют шесть компонент напряжений. Тогда согласно принципу независимости действия сил удельная работа внутренних сил равна сумме работ от всех шести компонент напряжений.

$$\delta W_0^{\text{внутр}} = \sigma_1 \cdot \delta\varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \delta\varepsilon_2 + \dots + \sigma_6 \cdot \delta\varepsilon_6$$

$$\text{или в матричном виде } \delta W_0^{\text{внутр}} = [\sigma] \{\delta\varepsilon\} \quad (21.3).$$

Полная работа внутренних сил определяется как интеграл по объему тела от удельной работы

$$\delta W^{\text{внутр}} = \int_V [\sigma] \{\delta\varepsilon\} dV \quad (21.4).$$

В случае упругой деформации знак вариации в выражении (21.4) можно опустить. В этом случае диаграмма деформирования σ – ε линейная и удельная работа внутренних сил равна площади треугольника (диаграммы) (рис. 21.2,в).

При действии одного напряжения $W_0^{\text{внутр}} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon$. При действии шести компонент напряжений удельная работа внутренних сил

$$W_0^{\text{внутр}} = \frac{1}{2} [\sigma] \{\varepsilon\} \quad (21.5).$$

Полная работа внутренних сил при упругой деформации

$$W^{\text{внутр}} = \int_V W_0^{\text{внутр}} dV = \frac{1}{2} \int_V [\sigma] \{\varepsilon\} dV \quad (21.6).$$

Подведем итог. При упругой деформации работу внешних и внутренних сил можно определить по формулам (21.2) и (21.6). При упругопластической деформации — по формулам (21.1) и (21.4).

Принцип возможных перемещений

Вернемся к принципу возможных перемещений, сформулированному в начале параграфа. При упругой деформации сумма работ внешних и внутренних сил равна нулю, то есть $W^{\text{внеш}} + W^{\text{внутр}} = 0$. Или с учетом формул (21.2) и (21.6)

$$\frac{1}{2} [F] \{\Delta\} - \frac{1}{2} \int_V [\sigma] \{\varepsilon\} dV = 0. \text{ Знак минус означает, что затрачивая работу внешних}$$

сил, увеличиваем внутреннюю энергию тела. Упрощая последнее выражение получаем при упругой деформации

$$[F] \{\Delta\} = \int_V [\sigma] \{\varepsilon\} dV \quad (21.7).$$

Математическое выражение принципа возможных перемещений (21.7) лежит в основе расчетов прочности и жесткости конструкций методом конечных элементов.

21.2. Теорема о взаимности работ и

перемещений

Рассмотрим частный случай. Балка нагружается двумя силами (рис. 21.3,а). Подсчитать работу внешних сил.

При малых упругих деформациях справедлив принцип независимости действия сил. Согласно этому принципу, *результат нагружения не зависит от порядка приложения нагрузок и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности.*

Рассмотрим два вида нагружения балки:

1. вначале прикладываем силу F_1 , затем силу F_2 ;
2. вначале прикладываем силу F_2 , затем силу F_1 .

I нагружение. Приложили силу F_1 . Балка прогнулась. Перемещения балки: Δ_{11} под силой F_1 и Δ_{21} в точке, где будет приложена сила F_2 . Затем приложили силу F_2 . Балка дополнительно прогнулась на Δ_{22} под силой F_2 и на Δ_{12} под силой F_1 (рис. 21.3).

ПРИМЕЧАНИЕ

В выражении Δ_{ij} первый индекс означает направление перемещения, второй индекс указывает от какой силы происходит перемещение.

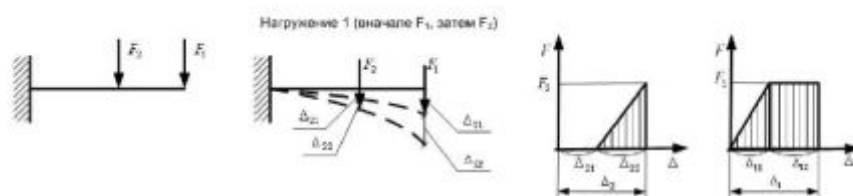


Рис. 21.3 К расчету работы внешних сил при нагружении 1

Подсчитаем работу внешних сил при первом нагружении.

$$W_1^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + F_1 \Delta_{12}.$$

В процессе приложения нагрузка изменяется от нуля до своего полного значения, поэтому работа приложения силы при упругом нагружении равна площади диаграммы деформирования, то есть площади треугольника (отсюда коэффициент 0,5). Приложили силу F_1 . В процессе приложения силы F_2 сила F_1 остается постоянной и совершает работу на перемещении Δ_{12} (коэффициент 0,5 отсутствует).

II нагружение. Приложили силу F_2 . Балка прогнулась. Перемещения балки: Δ_{22} под силой F_2 и Δ_{12} в точке, где будет приложена сила F_1 . Затем приложили силу F_1 . Балка дополнительно прогнулась на Δ_{11} под силой F_1 и на Δ_{21} под силой F_2 (рис. 21.4).

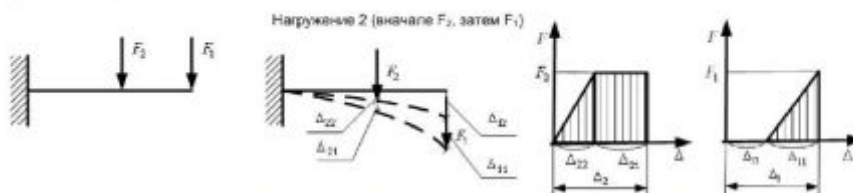


Рис. 21.4 К расчету работы внешних сил при нагружении 2

Подсчитаем работу внешних сил при втором нагружении.

$$W_2^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + F_2 \Delta_{21}.$$

Приравняв работы первого и второго нагружения, получаем

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21} \tag{21.8}$$

Выражение (21.8) — это математическая формулировка теоремы взаимности работ в случае действия двух сил.

Пусть к упругому телу последовательно прикладываются две системы сил. Система сил $\{F_1\}$ вызывает появление перемещений $\{\Delta_1\}$. Прикладываемая затем система сил $\{F_2\}$ вызывает перемещения $\{\Delta_2\}$. При этом ранее приложенная система сил $\{F_1\}$, оставаясь постоянной, совершает работу на перемещениях $\{\Delta_{12}\}$, вызванных системой сил F_2 . Приравняв работы двух разных последовательностей нагружения, получаем

$$[F_1]\{\Delta_{12}\} = [F_2]\{\Delta_{21}\} \quad (21.9).$$

Сформулируем окончательно теорему о взаимности работ.

Работа первой самоуравновешенной системы сил $\{F_1\}$ на перемещениях $\{\Delta_{12}\}$, вызванных второй самоуравновешенной системой сил $\{F_2\}$, равняется работе второй системы сил $\{F_2\}$ на перемещениях, вызванных первой системой сил $\{\Delta_{21}\}$.

Пусть силы равны $F_1 = F_2$, тогда $\Delta_{12} = \Delta_{21}$.

Если $F_1 = F_2 = 1$, тогда $\delta_{12} = \delta_{21}$. Здесь δ — перемещение от единичной силы.

$$\text{В общем случае } \delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (21.10).$$

Выражение (21.10) представляет собой математическую запись закона взаимности перемещений.

21.3. Закон Гука для внешних сил

Рассмотрим упругое растяжение стержня одной силой. Под действием силы F точка ее приложения переместилась на величину Δ . По закону Гука перемещение пропорционально приложенной силе $\Delta = B \cdot F$. Здесь B — коэффициент пропорциональности, называемый *податливостью* (перемещение, вызванное силой $F = 1$).

Справедлива и обратная зависимость. Сила пропорциональна перемещению $F = K \cdot \Delta$. Здесь K — коэффициент пропорциональности, называемый *жесткостью* (сила, вызванная перемещением $\Delta = 1$). Сравнив два выражения закона Гука видно, что $K = 1/B$.

В случае действия на тело системы из n сил, согласно принципу независимости действия сил, каждая сила вносит свой вклад в каждое перемещение. Тогда каждое полное перемещение равняется сумме перемещений по данному направлению от каждой силы в отдельности

$$\begin{cases} \Delta_1 = \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 + \dots + \delta_{1n}F_n \\ \Delta_2 = \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2 + \dots + \delta_{2n}F_n \\ \dots \\ \Delta_n = \delta_{n1}F_1 + \delta_{n2}F_2 + \dots + \delta_{nn}F_n \end{cases}$$

$$\text{То же выражение в матричном виде } \{\Delta\} = [\delta]\{F\} \quad (21.11).$$

Здесь $[\delta]$ — матрица коэффициентов податливости δ_{ij} ,

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

δ_{ij} — коэффициент податливости, перемещение по направлению силы F_i от действия силы $F_j = 1$.

Матрица податливости симметричная, так как по теореме взаимности перемещений $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

С другой стороны каждое перемещение вносит свой вклад в каждую силу. Тогда полная сила по каждому направлению равняется сумме сил по данному направлению от каждого перемещения в отдельности

$$\begin{cases} F_1 = K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 + \dots + K_{1n}\Delta_n \\ F_2 = K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 + \dots + K_{2n}\Delta_n \\ \dots \\ F_n = K_{n1}\Delta_1 + K_{n2}\Delta_2 + \dots + K_{nn}\Delta_n \end{cases}$$

То же выражение в матричном виде $\{F\} = [K]\{\Delta\}$ (21.12).

Здесь $[K]$ — матрица коэффициентов жесткости K_{ij} ,

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

K_{ij} — коэффициент жесткости, сила по направлению i от действия перемещения $\Delta_j = 1$

В процессе определения коэффициентов жесткости будет показано, что матрица жесткости симметричная, то есть $K_{ij} = K_{ji}$.

Введем понятие о двух методах расчета упругих систем.

Метод сил

Уравнение (21.11) $\{\Delta\} = [\delta]\{F\}$ является основным уравнением метода сил. В этом методе перемещения $\{\Delta\}$ заданы. Требуется найти неизвестные силы $\{F\}$. Их находят путем обращения матрицы податливости $[\delta]$

$$\{F\} = [\delta]^{-1} \{\Delta\}.$$

Метод сил уже описан в главе 11 (раздел 11.3).

Метод перемещений

Уравнение (21.12) $\{F\} = [K]\{\Delta\}$ является основным уравнением метода перемещений. В этом методе силы $\{F\}$ заданы. Требуется найти неизвестные перемещения $\{\Delta\}$. Их находят путем обращения матрицы жесткости $[K]$

$$\{\Delta\} = [K]^{-1} \{F\}.$$

Метод перемещений более удобен, чем метод сил, при расчете конструкций на прочность и жесткость методом конечных элементов. В последующих главах этой книги будет использоваться только метод перемещений.

21.4. Потенциальная энергия упругой деформации

При упругой деформации работа внутренних сил численно равна потенциальной энергии упругой деформации. Согласно началу возможных перемещений $W^{\text{внеш}} = -W^{\text{внутр}} = \Pi$, где Π — потенциальная энергия упругой деформации, которая не может быть отрицательной и всегда берется по модулю.

Для подсчета потенциальной энергии упругой деформации можно использовать расчет работы либо внешних сил, либо внутренних

$$\Pi = W^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} [F] \{\Delta\} \quad (21.13),$$

$$\Pi = |W^{\text{внутр}}| = \int_V \Pi_0 dV = \frac{1}{2} \int_V [\sigma] \{\epsilon\} dV \quad (21.14)$$

Здесь Π_0 — удельная потенциальная энергия упругой деформации

$$\Pi_0 = |W_0^{\text{внутр}}| = \frac{1}{2} [\sigma] \{\epsilon\} \quad (21.15)$$

При непосредственном определении потенциальной энергии упругой деформации проще воспользоваться выражением (21.13). Выражение (21.14) чаще используется для построения каких-либо новых математических выражений.

Подсчитаем потенциальную энергию упругой деформации, используя работу внешних сил (21.13) и закон Гука для внешних сил (21.11) и (21.12).

Потенциальная энергия — это число, поэтому $\Pi = \Pi^T$. Напомним *правило транспонирования произведений матриц* из линейной алгебры.

$$\text{Если } [A] = [B][C], \quad \text{то} \quad [A]^T = [C]^T [B]^T.$$

С учетом этого правила выражение (21.13) можно записать так

$$\Pi = A^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} [F] \{\Delta\} = \frac{1}{2} [\Delta] \{F\} \quad (21.16).$$

Транспонируем векторы $\{F\}$ и $\{\Delta\}$ с использованием выражений (21.11) и (21.12)

$$\begin{aligned} \{\Delta\} &= [\delta] \{F\}, & \{F\} &= [K] \{\Delta\}, \\ [\Delta] &= [F] [\delta], & [F] &= [\Delta] [K] \end{aligned} \quad (21.17).$$

Здесь $[\delta]^T = [\delta]$ и $[K]^T = [K]$, так как матрицы $[\delta]$ и $[K]$ симметричные.

Подставляя (21.17) в (21.16) получаем

$$\Pi = W^{\text{внеш}} = \frac{1}{2} [F] \{\Delta\} = \frac{1}{2} [\Delta] \{F\} = \frac{1}{2} [\Delta] [K] \{\Delta\} = \frac{1}{2} [F] [\delta] \{F\} \quad (21.18).$$

Теперь подсчитаем потенциальную энергию упругой деформации, используя работу внутренних сил.

Подставим в выражение (21.15) выражения (20.27) и (20.28)

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad \{\varepsilon\} = [B] \{\sigma\}.$$

Поскольку потенциальная энергия это число, а не матрица, то $\Pi_0 = \Pi_0^T$. Следуя правилу транспонирования произведений матриц, можно переставить местами векторы σ и ε . Тогда

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} [\sigma] \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} [\varepsilon] \{\sigma\}.$$

Так же как в случае внешних сил транспонируем векторы $\{\sigma\}$ и $\{\varepsilon\}$

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [C] \{\varepsilon\}, & \{\varepsilon\} &= [B] \{\sigma\}, \\ [\sigma] &= [\varepsilon] [C], & [\varepsilon] &= [\sigma] [B]. \end{aligned}$$

Здесь матрицы $[C]$ и $[B]$ симметричные, поэтому $[C]^T = [C]$ и $[B]^T = [B]$.

Тогда

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} [\sigma] \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} [\varepsilon] \{\sigma\} = \frac{1}{2} [\sigma] [B] \{\sigma\} = \frac{1}{2} [\varepsilon] [C] \{\varepsilon\} \quad (21.19).$$

Все четыре выражения (21.19), также как (21.18), эквивалентны и используются в зависимости от удобства последующих преобразований. В них $[B]$ и $[C]$ — матрицы внутренней податливости и внутренней жесткости из раздела 20.3, содержащие только упругие константы материала E, μ, G .

Подсчитаем полную потенциальную энергию упругой деформации как интеграл по объему V от удельной потенциальной энергии Π_0

$$\Pi = \int_V \Pi_0 dV = \frac{1}{2} \int_V [\sigma] \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon] \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V [\sigma] [B] \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon] [C] \{\varepsilon\} dV \quad (21.20).$$

Все четыре выражения (21.20) эквивалентны и используются в зависимости от удобства последующих преобразований.

Глава 22. Матричный метод расчета упругих стержневых систем

Матричный метод расчета упругих стержневых систем — частный простейший случай метода конечных элементов.

22.1. Основная идея матричного метода перемещений

В основе метода лежит дискретизация стержневой системы на элементы-стержни. Свойства элементов должны быть одинаковыми. Тогда решение задачи сведется к циклическому повторению стандартных для метода конечных элементов действий, обеспечивая универсальность составленных программ.

ОСНОВНОЕ ПРАВИЛО

При разбиении стержневой системы на элементы — внешние нагрузки прикладываются только по концам элемента-стержня.

Как правило, стержневую систему разбиваем на элементы от силы до силы. Если есть распределенная нагрузка, то ее надо заменить эквивалентными нагрузками, как будет указано далее.

Важнейшее свойства элемента — число степеней свободы.

Под числом степеней свободы понимаем число независимых координат, однозначно определяющих положение тела в пространстве.

В последующих расчетах будем использовать плоский и пространственный стержневой элемент.

Концы элемента-стержня называются узлами. Другими словами, узлы — это точки соединения элементов.

Плоский элемент (рис. 22.1.а) имеет шесть степеней свободы. В каждом узле возможны три перемещения: два линейных и одно угловое. Эти шесть перемещений однозначно определяют положение тела в пространстве.

Пространственный элемент (рис. 22.1.б) имеет 12 степеней свободы. В каждом узле возможны 6 перемещений: три линейных (по трем осям координат) и три угловых (вокруг каждой из трех осей координат).

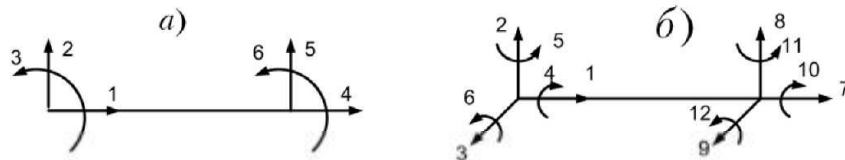


Рис. 22.1 а) — плоский, б) — пространственный стержневые элементы

Перемещения u в произвольной точке элемента определяются по узловым перемещениям Δ с помощью функций формы N .

$$\{u\} = [N]\{\Delta\} \quad (22.1).$$

Здесь $\{u\}$ — вектор перемещений в произвольной точке по двум осям координат для плоской задачи или по трем осям для пространственной задачи, $\{\Delta\}$ — вектор узловых перемещений из 6 компонент для плоской задачи и 12 компонент для пространственной задачи. Тогда $[N]$ — прямоугольная матрица функций формы размерностью 2×6 для плоской задачи или 3×12 для пространственной задачи.

Определение функций формы будет рассмотрено далее в разделе 22.2.2.

Основное уравнение метода перемещений (21.12)

$$\{F\} = [K]\{\Delta\}.$$

Решая это матричное уравнение, определяем вектор узловых перемещений. Для решения основного уравнения необходимо сформировать матрицу жесткости

стержневой системы. Непростой процесс формирования такой матрицы рассмотрен в следующих разделах этой главы.

Общий план решения задачи

1. Разбить стержневую систему на элементы-стержни.
2. Для каждого элемента составить матричное уравнение $\{F\} = [K]\{\Delta\}$, сформировав матрицу жесткости $[K]$.
3. Объединить уравнения для каждого элемента в единый для всей системы блок уравнений $\{\bar{F}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\}$.
4. Решить эту систему уравнений и найти узловые перемещения системы $\{\bar{\Delta}\}$.
5. Зная перемещения $\{\bar{\Delta}\}$, найти векторы напряжений $\{\sigma\}$ и деформаций $\{\varepsilon\}$, а также перемещения u в произвольных точках стержневой системы, используя функции формы N .

22.2. Формирование матрицы жесткости и функций формы стержневого элемента

Определение коэффициентов жесткости и функций формы рассмотрим на примере плоского стержневого элемента. Принцип определения их остается тот же самый и для пространственного элемента. Матрицы жесткости и функций формы пространственного элемента можно посмотреть в электронной книге в примерах раздела [Метод конечных элементов](#).

22.2.1. Матрица жесткости плоского стержневого элемента

Плоский элемент имеет 6 степеней свободы (6 независимых узловых перемещений Δ). Каждому перемещению соответствует своя сила F . Соответственно матрица жесткости имеет размерность 6×6 .

Раскроем основное уравнение матричного метода $\{\bar{F}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\}$ для плоского элемента.

$$\begin{cases} F_1 = K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 + K_{13}\Delta_3 + K_{14}\Delta_4 + K_{15}\Delta_5 + K_{16}\Delta_6 \\ F_2 = K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 + K_{23}\Delta_3 + K_{24}\Delta_4 + K_{25}\Delta_5 + K_{26}\Delta_6 \\ \dots \\ F_6 = K_{61}\Delta_1 + K_{62}\Delta_2 + K_{63}\Delta_3 + K_{64}\Delta_4 + K_{65}\Delta_5 + K_{66}\Delta_6 \end{cases} \quad (22.2).$$

Напомним: по физическому смыслу коэффициент жесткости K_{ij} — это сила по направлению i , вызванная перемещением $\Delta_j = 1$.

Пусть все перемещения $\Delta_i = 0$, кроме $\Delta_1 = 1$, (рис. 22.2). Тогда

$F_1 = K_{11}$, $F_2 = K_{21}$, $F_3 = K_{31}$, $F_4 = K_{41}$, $F_5 = K_{51}$, $F_6 = K_{61}$ по выражениям (22.2).

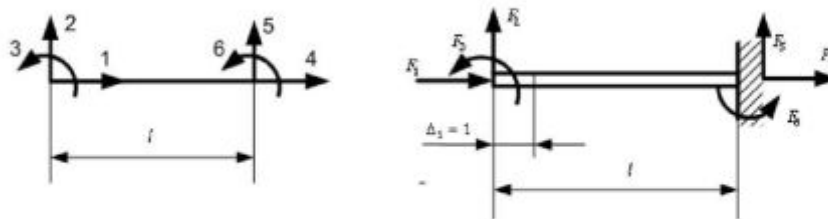


Рис. 22.2 К определению коэффициентов жесткости при растяжении плоского элемента

Силы по направлениям 1 и 4 вызывают растяжение (сжатие) стержня. Тогда

$$\Delta_1 = \frac{F_1 l}{EA}, \text{ откуда } F_1 = K_{11} = \frac{EA}{l}.$$

Из уравнения равновесия

$$\sum F_x = F_1 + F_4 = 0 \text{ находим } F_4 = K_{41} = -\frac{EA}{l}.$$

Растяжение не вызывает изгиба, поэтому $F_2 = F_3 = F_5 = F_6 = 0$ и $K_{21} = K_{31} = K_{51} = K_{61} = 0$.

Таким образом, найден первый столбец матрицы жесткости.

Пусть все перемещения $\Delta_i = 0$, кроме $\Delta_2 = 1$, (рис. 22.3). Тогда

$$F_1 = K_{12}, F_2 = K_{22}, F_3 = K_{32}, F_4 = K_{42}, F_5 = K_{52}, F_6 = K_{62} \text{ по выражениям (22.2).}$$

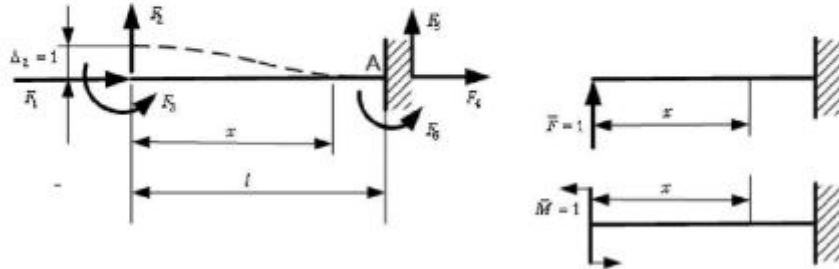


Рис. 22.3 К определению коэффициентов жесткости при изгибе плоского элемента

Используем интеграл Мора. На рис. 22.3 слева показана грузовая система, нагруженная внешними силами и справа две единичные системы для определения прогиба Δ_2 и угла поворота Δ_3 .

$$\Delta_2 = 1 = \int_0^l \frac{M_F \bar{M}}{EI} dx = \int_0^l \frac{(F_2 x - F_3) \cdot 1x}{EI} dx = (F_2 \frac{l^3}{3} - F_3 \frac{l^2}{2}) \frac{1}{EI},$$

$$\Delta_3 = 0 = \int_0^l \frac{M_F \bar{M}}{EI} dx = \int_0^l \frac{(F_2 x - F_3) \cdot (-1)}{EI} dx = (F_2 \frac{l^2}{2} - F_3 l) \frac{1}{EI}.$$

Решая систему двух последних уравнений, находим

$$F_2 = K_{22} = \frac{12EI}{l^3} \quad F_3 = K_{32} = \frac{6EI}{l^2}.$$

Изгиб не вызывает растяжения-сжатия, поэтому $F_1 = F_4 = K_{12} = K_{42} = 0$.

Из уравнений равновесия элемента

$$\sum F_y = F_2 + F_5 = 0 \quad F_5 = K_{52} = -\frac{12EI}{l^3},$$

$$\sum M_A = F_2 l - F_3 - F_6 = 0 \quad F_6 = K_{62} = \frac{6EI}{l^2}.$$

Таким образом, положив $\Delta_2 = 1$, удалось найти второй столбец матрицы жесткости.

Последовательно полагая все перемещения равными нулю, кроме $\Delta_3 = 1$, затем $\Delta_4 = 1$, $\Delta_5 = 1$ и $\Delta_6 = 1$, находим остальные столбцы матрицы жесткости.

матрица жесткости элемента

$$\mathbf{KE}_k := \begin{bmatrix} \frac{E_k \cdot A_k}{LL_k} & 0 & 0 & -\frac{E_k \cdot A_k}{LL_k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^3} & \frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^3} & \frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & \frac{4 \cdot E_k \cdot J_k}{LL_k} & 0 & -\frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & \frac{2 \cdot E_k \cdot J_k}{LL_k} \\ -\frac{E_k \cdot A_k}{LL_k} & 0 & 0 & \frac{E_k \cdot A_k}{LL_k} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^3} & -\frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & 0 & \frac{12 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^3} & -\frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & \frac{2 \cdot E_k \cdot J_k}{LL_k} & 0 & -\frac{6 \cdot E_k \cdot J_k}{(LL_k)^2} & \frac{4 \cdot E_k \cdot J_k}{LL_k} \end{bmatrix}$$

Рис. 22.4 Матрица жесткости плоского элемента

Полностью матрица жесткости показана на рис. 22.4. Она входит в программы расчета плоской рамы и балки в электронной книге (раздел **Метод конечных элементов**). По контексту программы длина элемента k обозначена LL_k . Матрица жесткости пространственного элемента приведена в программе расчета пространственной стержневой системы.

22.2.2. Функции формы плоского элемента

Функции формы предназначены для связи перемещений в произвольном сечении стержня с узловыми перемещениями (на концах стержня). Эта связь описывается уравнением (22.1) $\{u\} = [N]\{\Delta\}$.

Получим функции формы для плоского стержневого элемента. Раскроем матричное выражение (22.1).

$$\begin{cases} u_x(x) = N_{x1}\Delta_1 + N_{x2}\Delta_2 + \dots + N_{x6}\Delta_6 \\ u_y(x) = N_{y1}\Delta_1 + N_{y2}\Delta_2 + \dots + N_{y6}\Delta_6 \end{cases} \quad (22.3)$$

Здесь N_{xi} и N_{yi} — перемещения произвольного сечения x соответственно вдоль осей x или y от $\Delta_i = 1$.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть $\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$, то есть элемент имеет заделку справа (рис. 22.5.а). На левый конец элемента действуют силы F_1 , F_2 , F_3 . Для определения перемещений в произвольном сечении x воспользуемся интегралом Мора

$$u = \sum_i \int \frac{N_F \bar{N}}{EA} dx + \sum_i \int \frac{M_F \bar{M}}{EI} dx.$$

Для определения усилий от единичных сил

возьмем две единичные системы (рис. 22.5, б и в), нагруженные продольной единичной силой и поперечной единичной силой в произвольном сечении x . Тогда для вычисления интеграла Мора используем переменную $\theta < \theta < x$.

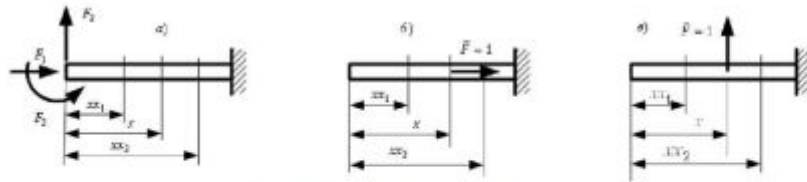


Рис. 22.5 К расчету функций формы

Запишем в виде таблицы внутренние усилия в элементе от внешних сил (узловых) $F_{1,2,3}$ и от единичных сил продольной $\bar{F} = 1$ и поперечной $\tilde{F} = 1$

Координата	От $F_{1,2,3}$		От $\bar{F} = 1$		От $\tilde{F} = 1$	
	N	M	N	M	N	M
$0 < x_1 < x$	F_1	$F_2 x_1 - F_3$	0	0	0	0
$x < x_2 < l$	F_1	$F_2 x_1 - F_3$	1	0	0	$x_2 - x$

Выражения для перемещений

$$u_x(x) = \int_x^l \frac{F_1 \cdot 1}{EA} dx_2 = \frac{F_1(l-x)}{EA} \quad (22.4),$$

$$u_y(x) = \int_x^l \frac{(F_2 x_1 - F_3)(x_2 - x) dx_2}{EI} \quad (22.5).$$

Рассмотрим частные случаи вычисления этих перемещений.

□ Пусть $\Delta_1 = 1$, остальные перемещения равны нулю. Тогда по выражениям (22.2)

$$F_1 = K_{11} = \frac{EA}{l}, \quad F_2 = K_{21} = 0, \quad F_3 = K_{31} = 0.$$

По выражениям (22.3), (22.4)

$$u_x(x) = N_{x1} = \frac{l-x}{l} \quad u_y(x) = N_{y1} = 0, \text{ так как растяжение-сжатие не вызывает изгиба стержня.}$$

□ Пусть $\Delta_2 = 1$ остальные перемещения равны нулю. Тогда по выражениям (22.2)

$$F_1 = K_{12} = 0, \quad F_2 = K_{22} = \frac{-12EI}{l^3}, \quad F_3 = K_{32} = \frac{6EI}{l^2}.$$

По выражениям (22.3), (22.5)

$$u_x(x) = N_{x2} = 0 \text{ (изгиб не вызывает растяжения-сжатия),}$$

$$u_y(x) = N_{y2} = \frac{2x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2} + 1. \text{ Вычисление интеграла Мора для этого и последующих случаев производилось символично в системе Mathcad и показано на рис. 22.6. Графики функций формы показаны на рис. 22.7.}$$

Заделка слева

$$EI = 1$$

$$u_y(x, F_2, F_3) = \int_x^L \frac{(F_2 \cdot xx - F_3) \cdot (xx - x)}{EI} dx$$

$$N1(x, L) := \frac{L - x}{L}$$

$$F_2 := \frac{12 \cdot EI}{L^3} \quad F_3 := \frac{6 \cdot EI}{L^2} \quad u_y(x, F_2, F_3) \rightarrow 1 + x^2 \cdot \frac{2 \cdot x - 3 \cdot L}{L^3}$$

$$N2(x, L) := 1 + x^2 \cdot \frac{2 \cdot x - 3 \cdot L}{L^3}$$

$$F_2 := \frac{6 \cdot EI}{L^2} \quad F_3 := \frac{4 \cdot EI}{L} \quad u_y(x, F_2, F_3) \rightarrow x + x^2 \cdot \frac{x - 2 \cdot L}{L^2}$$

$$N3(x, L) := x + x^2 \cdot \frac{x - 2 \cdot L}{L^2}$$

Заделка справа

$$u_y(x, F_5, F_6) = \int_0^x \frac{[F_5 \cdot (L - xx) + F_6] \cdot (x - xx)}{EI} dx$$

$$N4(x, L) := \frac{x}{L}$$

$$F_5 := \frac{12 \cdot EI}{L^3} \quad F_6 := \frac{-6 \cdot EI}{L^2} \quad u_y(x, F_5, F_6) \rightarrow -x^2 \cdot \frac{2 \cdot x - 3 \cdot L}{L^3}$$

$$N5(x, L) := -x^2 \cdot \frac{2 \cdot x - 3 \cdot L}{L^3}$$

$$F_5 := \frac{-6 \cdot EI}{L^2} \quad F_6 := \frac{4 \cdot EI}{L} \quad u_y(x, F_5, F_6) \rightarrow x^2 \cdot \frac{x - L}{L^2}$$

$$N6(x, L) := x^2 \cdot \frac{x - L}{L^2}$$

Рис. 22.6 Символьное вычисление в Mathcad функций формы

□ Пусть $\Delta_3 = 1$, остальные перемещения равны нулю. Тогда по выражениям (22.2)

$$F_1 = K_{13} = 0, \quad F_2 = K_{23} = \frac{6EI}{l^2}, \quad F_3 = K_{33} = \frac{4EI}{l}.$$

По выражениям (22.3), (22.5)

$$u_x(x) = N_{x3} = 0 \quad (\text{изгиб не вызывает растяжения-сжатия}),$$

$$u_y(x) = N_{y3} = \frac{x^3}{l^2} - 2 \frac{x^2}{l} + x.$$

Поменяем расчетную схему на рис. 22.5,а, поместив заделку слева. Тогда $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. На правый конец элемента действуют силы F_4, F_5, F_6 .

Для определения перемещений $u_x(x)$ и $u_y(x)$ в произвольном сечении x с помощью интеграла Мора единичные системы на рис. 22.5 (б и в) надо развернуть в другую сторону.

Запишем в виде таблицы внутренние усилия в элементе от внешних сил (узловых) $F_{4,5,6}$ и от единичных сил продольной $\bar{F} = 1$ и поперечной $\tilde{F} = 1$

Координата	От $F_{4,5,6}$		От $\bar{F} = 1$		От $\tilde{F} = 1$	
	N	M	N	M	N	M
$0 < xx_1 < x$	F_4	$F_5(l - xx) - F_6$	1	0	0	$x - xx_1$
$x < xx_1 < l$	F_4	$F_5(l - xx) - F_6$	0	0	0	0

Выражения для перемещений

$$u_x(x) = \int_0^x \frac{F_4 \cdot 1}{EA} dx_1 = \frac{F_4 x}{EA} \quad (22.6),$$

$$u_y(x) = \int_0^x \frac{(F_5(l - xx_1) + F_6)(l - xx_1) dx_1}{EI} \quad (22.7).$$

Рассмотрим частные случаи вычисления этих перемещений.

□ Пусть $\Delta_4 = 1$, остальные перемещения равны нулю. Тогда по выражениям (22.2)

$$F_4 = K_{44} = \frac{EA}{l}, \quad F_5 = K_{54} = 0, \quad F_6 = K_{64} = 0.$$

По выражениям (22.3), (22.6)

$$u_x(x) = N_{x4} = \frac{x}{l} \quad u_y(x) = N_{y4} = 0, \text{ так как растяжение-сжатие не вызывает изгиба стержня.}$$

□ Пусть $\Delta_5 = 1$ остальные перемещения равны нулю. Тогда по выражениям (22.2)

$$F_4 = K_{45} = 0, \quad F_5 = K_{55} = \frac{12EI}{l^3}, \quad F_6 = K_{65} = \frac{-6EI}{l^2}.$$

По выражениям (22.3), (22.7)

$$u_x(x) = N_{x5} = 0 \text{ (изгиб не вызывает растяжения-сжатия),}$$

$$u_y(x) = N_{y5} = -2\frac{x^3}{l^3} + 3\frac{x^2}{l^2}.$$

□ Пусть $\Delta_6 = 1$, остальные перемещения равны нулю. Тогда по выражениям (22.2)

$$F_4 = K_{46} = 0, \quad F_5 = K_{56} = \frac{-6EI}{l^2}, \quad F_6 = K_{66} = \frac{4EI}{l}.$$

По выражениям (22.3), (22.7)

$$u_x(x) = N_{x6} = 0 \text{ (изгиб не вызывает растяжения-сжатия),}$$

$$u_y(x) = N_{y6} = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}.$$

На рис. 22.7 приведены графики изменения функций формы по длине элемента L , сделанные в системе Mathcad. Сплошные линии для функций формы левого узла, пунктирные — для функций формы правого узла.

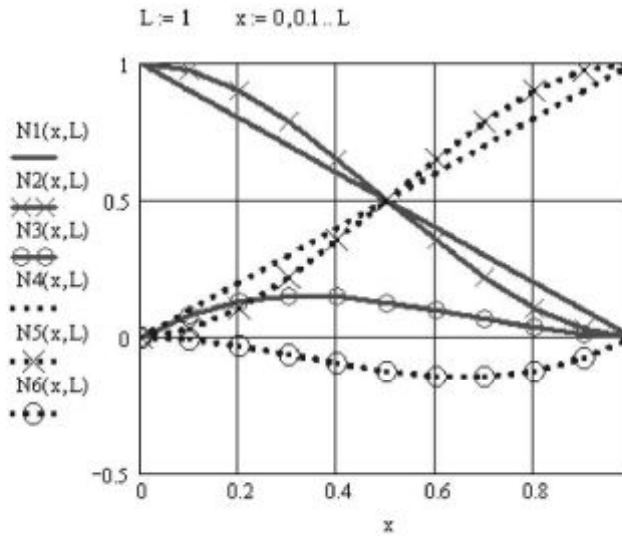


Рис. 22.7 Графики функций формы плоского элемента

Окончательно матрица функций формы для плоского элемента приобретает вид

$$[N(x)] = \begin{bmatrix} N_{x1} & 0 & 0 & N_{x4} & 0 & 0 \\ 0 & N_{y2} & N_{y3} & 0 & N_{y5} & N_{y6} \end{bmatrix} \quad (22.8),$$

$$\text{где } N_{x1} = \frac{l-x}{l}, \quad N_{y2} = 2\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2} + 1, \quad N_{y3} = \frac{x^3}{l^2} - 2\frac{x^2}{l} + x,$$

$$N_{x4} = \frac{x}{l}, \quad N_{y5} = -2\frac{x^3}{l^3} + 3\frac{x^2}{l^2}, \quad N_{y6} = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}.$$

Для пространственного стержневого элемента матрица функций формы $[N]$ имеет размерность 3×12 и содержит те же компоненты, что и для плоского элемента, но

несколько в другом порядке. Посмотреть эту матрицу можно в Mathcad-программе к примеру расчета пространственной стержневой системы в электронной книге (раздел Метод конечных элементов).

22.3. Матрица жесткости произвольно ориентированного элемента

В разделе 22.2.1 определена матрица жесткости плоского стержневого элемента. Рассмотрим, как изменится эта матрица при повороте осей координат.

Сначала рассмотрим изменение узловых перемещений при повороте осей координат.

В системе координат xy узловые перемещения элемента $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_6$.

Развернем оси координат на угол α (рис. 22.8). Определим величину узловых перемещений $\bar{\Delta}$ в новой повернутой системе координат.

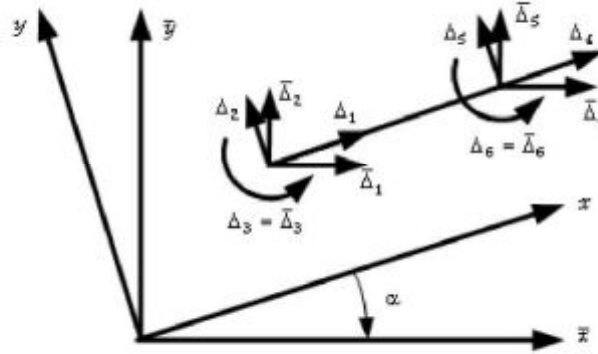


Рис. 22.8 Узловые перемещения элемента в локальной xy и глобальной $\bar{x}\bar{y}$ системах координат

Введем новые понятия и обозначения:

- xy — локальные оси координат. Локальная ось x всегда совпадает с осью элемента.
- $\bar{x}\bar{y}$ — глобальные оси координат, единые оси координат для всей стержневой системы. Положение глобальных осей выбирают из соображения удобства расчета.
- Косинусы углов между локальными и глобальными осями координат (направляющие косинусы)

$$\text{Cos}(x \wedge \bar{x}) = l_{x\bar{x}} = \text{Cos}(\alpha) = l,$$

$$\text{Cos}(x \wedge \bar{y}) = l_{x\bar{y}} = \text{Sin}(\alpha) = m,$$

$$\text{Cos}(y \wedge \bar{y}) = l_{y\bar{y}} = \text{Cos}(\alpha) = l,$$

$$\text{Cos}(y \wedge \bar{x}) = l_{y\bar{x}} = \text{Cos}(90 + \alpha) = -\text{Sin}(\alpha) = -m,$$

$$\text{Cos}(x \wedge \bar{z}) = l_{x\bar{z}} = \text{Cos}(y \wedge \bar{z}) = l_{y\bar{z}} = 0,$$

$$\text{Cos}(z \wedge \bar{z}) = l_{z\bar{z}} = 1.$$

Каждое перемещение в глобальных осях координат складывается из суммы проекций на соответствующую глобальную ось узловых перемещений в локальных осях координат. Перемещения во втором узле не влияют на перемещения первого узла.

$$\begin{cases} \Delta_1 = \bar{\Delta}_1 l_{x\bar{x}} + \bar{\Delta}_2 l_{x\bar{y}} + \bar{\Delta}_3 l_{x\bar{z}} + 0 + 0 + 0 \\ \Delta_2 = \bar{\Delta}_1 l_{y\bar{x}} + \bar{\Delta}_2 l_{y\bar{y}} + \bar{\Delta}_3 l_{y\bar{z}} + 0 + 0 + 0 \\ \Delta_3 = \bar{\Delta}_1 l_{z\bar{x}} + \bar{\Delta}_2 l_{z\bar{y}} + \bar{\Delta}_3 l_{z\bar{z}} + 0 + 0 + 0 \\ \Delta_4 = 0 + 0 + 0 + \bar{\Delta}_1 l_{x\bar{x}} + \bar{\Delta}_2 l_{x\bar{y}} + \bar{\Delta}_3 l_{x\bar{z}} \\ \Delta_5 = 0 + 0 + 0 + \bar{\Delta}_1 l_{x\bar{x}} + \bar{\Delta}_2 l_{x\bar{y}} + \bar{\Delta}_3 l_{x\bar{z}} \\ \Delta_6 = 0 + 0 + 0 + \bar{\Delta}_1 l_{x\bar{x}} + \bar{\Delta}_2 l_{x\bar{y}} + \bar{\Delta}_3 l_{x\bar{z}} \end{cases}$$

То же выражение в матричном виде

$$\{\Delta\} = [L]\{\bar{\Delta}\} \quad (22.9).$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \text{ — матрица направляющих косинусов.}$$

$$\text{Здесь } [\lambda] = \begin{bmatrix} l_{x\bar{x}} & l_{x\bar{y}} & l_{x\bar{z}} \\ l_{y\bar{x}} & l_{y\bar{y}} & l_{y\bar{z}} \\ l_{z\bar{x}} & l_{z\bar{y}} & l_{z\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Каждому узловому перемещению соответствует узловая нагрузка, совпадающая по направлению с соответствующим перемещением. поэтому для узловых нагрузок справедливо выражение, аналогичное (22.9)

$$\{F\} = [L]\{\bar{F}\} \quad (22.10).$$

Перейдем к определению матрицы жесткости.

Запишем основное уравнение матричного метода перемещений в локальной

$$\{F\} = [K]\{\Delta\} \quad (22.11)$$

и в глобальной системах координат

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\} \quad (22.12).$$

Найдем связь между матрицами жесткости $[K]$ и $[\bar{K}]$.

Подставим выражения (22.9) и (22.10) в уравнение (22.12)

$$[L]\{\bar{F}\} = [K][L]\{\bar{\Delta}\}$$

Полученное выражение умножим слева на $[L]^{-1}$

$$[L]^{-1}[L]\{\bar{F}\} = [L]^{-1}[K][L]\{\bar{\Delta}\}.$$

Учтем, что $[L]^{-1}[L] = [E]$ — единичная матрица (эквивалент умножения на единицу). Тогда

$$\{\bar{F}\} = [L]^{-1}[K][L]\{\bar{\Delta}\}.$$

Матрица направляющих косинусов ортогональная, для нее $[L]^{-1} = [L]^T$. С учетом этого

$$\{\bar{F}\} = [L]^T [K][L]\{\bar{\Delta}\} \quad (22.13).$$

Сопоставляя выражения (22.12) и (22.13), замечаем, что

$$[\bar{K}] = [L]^T [K][L] \quad (22.14).$$

Выражение (22.14) представляет собой связь между матрицами жесткости стержневого элемента в локальной $[K]$ и глобальной $[\bar{K}]$ системах координат.

22.4. Матрица жесткости стержневой системы

На рис. 22.9 изображена плоская стержневая система, нагруженная тремя силами q, F, M . Произвольно выбираем глобальную систему координат $\bar{X}\bar{Y}$ (единую для всей стержневой системы). Разобьем систему на три элемента-стержня. Номер элемента на рисунке указан в кружке.

Обозначим на схеме номера степеней свободы стержневой системы. Если нет ограничений на перемещения, в любом узле плоской стержневой системы возможны три перемещения (на стыке элементов 1 и 2). Элементы 2 и 3 соединены шарнирно. У них одинаковые линейные перемещения и различные угловые (всего в этом узле 4 перемещения). В заделке все перемещения равны нулю. В нижней шарнирной опоре есть угловое перемещение и нет линейных. Всего стержневая система имеет 8

независимых узловых перемещений, обозначенных в глобальной системе координат.

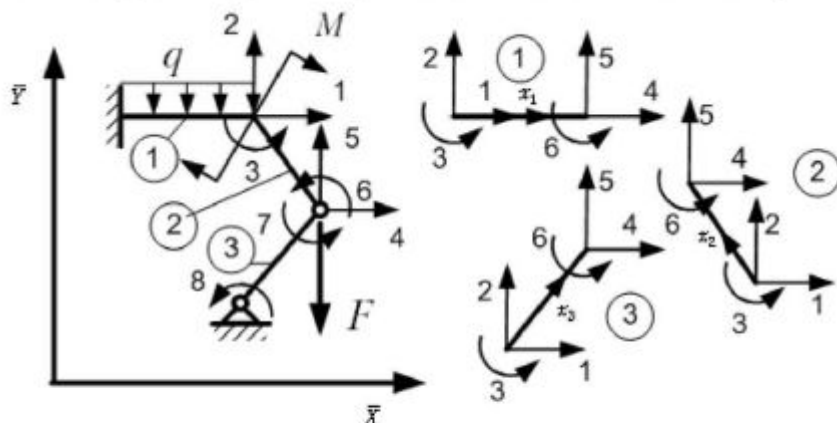


Рис. 22.9 Сопоставление локальных (справа) и глобальных (слева) индексов перемещений

Рассмотрим каждый элемент отдельно (рис. 22.9, справа). Каждый плоский элемент имеет 6 степеней свободы, обозначенных на рисунке также в глобальных осях координат.

Примем порядок нумерации локальных перемещений.

Начало нумерации — в начале локальной системы координат x_1 .

Направление локальной оси x и, тем самым, начало локальной системы координат каждого элемента выбирается произвольно (рис. 22.9, справа).

Каждый элемент имеет 6 степеней свободы. Три элемента имеют в сумме 18 степеней свободы. Стержневая система в целом имеет 8 степеней свободы.

Для каждого элемента можно составить основное уравнение матричного метода перемещений $\{F\} = [K]\{\Delta\}$. Всего для трех элементов можно составить 18 уравнений с 18 неизвестными узловыми перемещениями (по 6 неизвестных для каждого элемента).

Для стержневой системы в целом можно также составить основное уравнение матричного метода $\{\bar{F}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\}$, которое содержит 8 уравнений с 8 неизвестными перемещениями системы. Возникает задача, как из трех матриц жесткости элементов размерностью 6×6 составить матрицу жесткости системы $[\bar{K}]$ размерностью 8×8 .

Найдем связь между индексами перемещений элементов (в локальной нумерации от 1 до 6) и индексами перемещений стержневой системы (в нашем примере от 1 до 8). Для этого составим *матрицу соответствия индексов* (или просто *матрицу индексов*)

Таблица 3.1 Матрица соответствия индексов

Номер элемента	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	2	3
2	4	5	6	1	2	3
3	0	0	8	4	5	7

В заголовке таблицы локальные номера перемещений элемента. В теле таблицы номера перемещений системы в глобальной нумерации.

Матрица индексов занимает важное место в методе конечных элементов. Для компьютера она исполняет роль чертежа, описывая связь элементов между собой. В алгоритме метода конечных элементов матрица индексов используется при формировании матрицы жесткости системы, для связи перемещений системы с перемещениями элементов.

Для составления матрицы индексов мысленно прикладываем каждый из элементов к чертежу стержневой системы и записываем в соответствующую строку таблицы номера перемещений системы (в глобальной нумерации), соответствующие каждому перемещению элемента (в локальной нумерации).

Для нахождения матрицы жесткости системы вместо строгого и достаточно сложного математического расчета воспользуемся логическими рассуждениями.

Для последующего использования матрицы индексов запишем два примечания.

ПРИМЕЧАНИЕ

1) Для стержневой системы сила по заданному направлению равняется сумме по этому направлению всех сил, сходящихся в узле. Например, для нашего примера $\bar{F}_4 = F_1^1 + F_4^3$. Здесь верхний индекс номер элемента, нижний индекс — номер усилия, действующего на элемент.

2) Для стержневой системы перемещение по заданному направлению равняется перемещениям по данному направлению элементов, сходящихся в узле. Для нашего примера $\bar{\Delta}_4 = \Delta_1^2 = \Delta_4^3$.

Коэффициент жесткости системы имеет смысл силы и в соответствии с пунктом 1 примечания должен быть равен сумме коэффициентов жесткости элементов, сходящихся в узле.

Суммирование производится с помощью матрицы индексов. Нужно найти в какой строчке (какого элемента), содержатся нужные индексы коэффициента жесткости системы, и каковы номера этих индексов в локальной нумерации элемента. Далее сложить соответствующие коэффициенты жесткости элементов. Например, $\bar{K}_{4,5} = K_{1,2}^2 + K_{4,5}^3$, $\bar{K}_{6,4} = K_{3,4}^3$, $\bar{K}_{5,5} = K_{2,2}^2 + K_{5,5}^3$.

Сформулируем общее правило определения коэффициентов жесткости системы.

Коэффициент жесткости системы $K_{i,j}$ равен сумме коэффициентов жесткости элементов, которым в матрице индексов одновременно принадлежат индексы i и j .

В компьютерных программах матрица жесткости системы формируется внутри двойного вложенного цикла путем перебора индексов и суммирования соответствующих коэффициентов жесткости элементов. В Mathcad-программах это один единственный оператор. На рис. 22.10 KE_k — матрица жесткости элемента k в локальных осях координат, $KEG(k,i,j)$ — та же матрица в глобальных осях координат, $MI_{k,i}$ — элемент матрицы индексов. При последовательном переборе индексов k,i,j формируется полная матрица жесткости системы

$$\begin{aligned} &\text{матрица жесткости элемента в} \\ &\text{глобальных осях координат} \quad KEG(k,i,j) := \left(L_k^T \cdot KE_k \cdot L_k \right)_{i,j} \\ &\text{матрица жесткости системы} \quad K_{MI_{k,i},MI_{k,j}} := K_{MI_{k,i},MI_{k,j}} + KEG(k,i,j) \end{aligned}$$

Рис. 22.10 Оператор формирования матрицы жесткости системы

22.5. Формирование вектора сил системы

Напомним ограничение: все внешние силы должны быть приложены в узлах стержневой системы.

Как правило, внешних сил не много, поэтому большинство узловых нагрузок равны нулю.

ВНИМАНИЕ

Силы, действующие в направлении положительного перемещения, тоже положительные

Каждому узловому перемещению соответствует своя узловая сила, поэтому размерности векторов сил и перемещений одинаковы.

Учет сосредоточенных сил и пар сил очень прост и не требует специальных разъяснений. Далее рассмотрим учет распределенных нагрузок.

Любую распределенную нагрузку надо заменить эквивалентными узловыми нагрузками.

Условие эквивалентности следует из начала возможных перемещений. При упругой деформации сумма работ внешних и внутренних сил равна нулю $W^{\text{внеш}} + W^{\text{внутр}} = 0$.

Рассмотрим схему простой стержневой системы (рис. 22.11). Вырежем элемент с

распределенной нагрузкой. Действие отброшенных частей стержневой системы заменим реакциями.

Внешней нагрузкой считаем распределенную, а внутренней — реакции отброшенных связей, тогда $W_{от q}^{внеш} = -W_{от R}^{внутр} = W_{от R_0}$. В качестве эквивалентной нагрузки берем реакции с обратным знаком. В нашем случае реакции можно найти методом сил

$$R_0 = \frac{ql}{2} \text{ и } M_0 = \frac{ql^2}{12}.$$

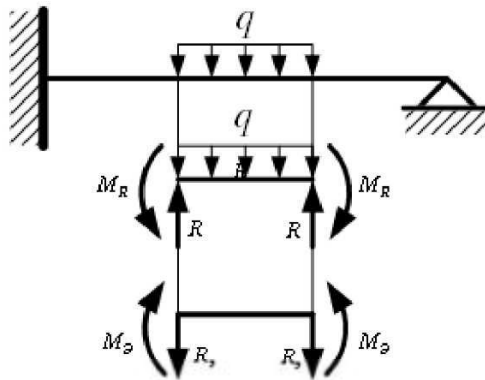


Рис. 22.11 Замена распределенной нагрузки эквивалентной узловой

Составим вектор сил для стержневой системы, показанной на рис.22.9, введя нагрузки по каждому из 8-и перемещений стержневой системы.

$$\{F\} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ql}{2} & \frac{ql^2}{12} & -M & 0 & -F & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

ПРИМЕЧАНИЕ

При определении знака (направления) эквивалентной нагрузки учтите, что направление перемещения стержневой системы под действием эквивалентных нагрузок должно быть таким же, как от распределенной нагрузки

Определим эквивалентные нагрузки при других видах распределенной нагрузки.

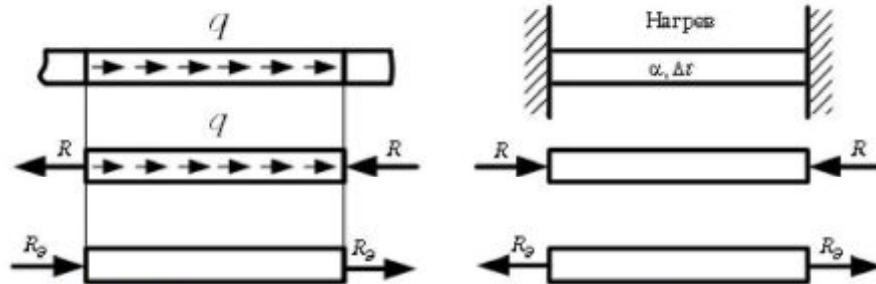


Рис. 22.12 Эквивалентные нагрузки при растяжении (слева) и при нагреве (справа)

Растяжение-сжатие (рис. 22.12, слева). $R_0 = -R = \frac{ql}{2}$.

Нагрев (рис. 22.12, справа) $\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_N = l\alpha\Delta + \frac{Nl}{EA} = 0$, откуда $R = N = -EA\alpha\Delta$ и $R_0 = -R = EA\alpha\Delta$.

22.6. Учет граничных условий

В методе перемещений внешние нагрузки заданы, а перемещения рассчитываются с учетом граничных условий. Если узел стержневой системы лишен какой-либо степени свободы, то условившись не нумеровать такие степени свободы, мы тем самым учтем граничные условия такого типа. В ряде случаев некоторые узловые перемещения заданы, но не равны нулю. Учесть такие граничные условия можно двумя способами.

Пусть задано перемещение Δ_j . Это означает, что в системе уравнений

$$\begin{cases} F_1 = K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 + \dots + k_{1j}\Delta_j + \dots + K_{1n}\Delta_n \\ F_2 = K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 + \dots + k_{2j}\Delta_j + \dots + K_{2n}\Delta_n \\ \dots \\ F_j = K_{j1}\Delta_1 + K_{j2}\Delta_2 + \dots + k_{jj}\Delta_j + \dots + K_{jn}\Delta_n \\ \dots \\ F_n = K_{n1}\Delta_1 + K_{n2}\Delta_2 + \dots + k_{nj}\Delta_j + \dots + K_{nn}\Delta_n \end{cases}$$

все члены $k_{ij}\Delta_j$ ($i=1, 2, \dots, n$) известны. Перенесем их в правые части уравнений, то есть вместо столбца $\{F\}$ будем иметь $\{F - k_{ij}\Delta_j\}$. Сохраняя размерность матрицы $[K]$ все элементы k_{ij} заменим нулями. Этим обеспечивается эквивалентность системы. Так как одно из уравнений становится лишним, то вместо j -го уравнения запишем $k_{jj}\Delta_j = k_{jj}\Delta_j$, чему соответствует замена силы F_j на $k_{jj}\Delta_j$ и сохранение в матрице $[K]$ диагонального элемента $k_{jj}\Delta_j$.

Другими словами, к вектору сил $\{F\}$ прибавить столбец j матрицы $[K]$, в матрице $[K]$ обнулить строку j и столбец j , вернуть на место диагональный элемент k_{jj} .

Таким образом, учитываются все заданные граничные условия.

Ограничения по 2-м перемещениям

Граничные условия $g := (4 \ 10)^T \quad \Delta g := (-1 \ 2)^T \cdot 0.0001$

учет граничных условий в перемещениях $j := 1..n \quad i := 1..rows(g)$

$$F_j := \text{for } i \in 1..rows(g) \begin{cases} F_j \leftarrow F_j - K_{j,\xi_i} \cdot \Delta \xi_i \end{cases}$$

$$F_{\xi_i} := K_{\xi_i,\xi_i} \cdot \Delta \xi_i$$

$$K_{\xi_i,j} := \begin{cases} K_{\xi_i,j} & \text{if } \xi_i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K_{j,\xi_i} := \begin{cases} K_{j,\xi_i} & \text{if } \xi_i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Метод Пиано учета граничных условий

Выключите один и включите другой способы учета граничных условий
Результаты не изменятся

$$K_{\xi_i,\xi_i} := K_{\xi_i,\xi_i} \cdot 10^6$$

$$F_{\xi_i} := K_{\xi_i,\xi_i} \cdot \Delta \xi_i$$

Рис. 22.13 Два метода учета граничных условий

Второй способ учета граничных условий называется способ Пиано и заключается в умножении на большое число соответствующего диагонального элемента, например, $k_{jj}\Delta_j 10^6$ и добавлении этого же выражения к правой части этого уравнения, то есть фактически выполнение равенства $k_{jj}\Delta_j 10^6 = k_{jj}\Delta_j 10^6$, поскольку остальные слагаемые становятся ничтожно малыми. Учет граничных условий в Mathcad-программах показан на рис. 22.13.

22.7. Порядок расчета стержневой системы матричным методом

Работа расчетчика

1. Разбить стержневую систему на элементы-стержни.
2. Выбрать глобальные оси координат, единые для всей системы, и локальные оси для каждого элемента.
3. Указать на схеме все возможные узловые перемещения системы.
4. Составить матрицу индексов.
5. Для каждого элемента указать углы между локальными и глобальными осями

координат.

6. Для каждого элемента задать модуль Юнга E и геометрические характеристики: длину элемента l , площадь сечения A , моменты инерции I .
7. Задать нагрузки (ввести вектор сил $\{F\}$).
8. Ввести граничные условия в перемещениях, если они есть.

Работа компьютерной программы

9. Сформировать матрицу жесткости системы $[\bar{K}]$.

Зная материал и геометрию системы, найти матрицы жесткости элементов в локальных координатах $[K^e]$. Далее найти матрицы жесткости элементов в глобальных осях координат $[\bar{K}^e] = [L]^T [K^e] [L]$. Путем суммирования с помощью матрицы индексов найти матрицу жесткости системы в глобальных осях координат $[\bar{K}]$.

10. Определить узловые перемещения системы в глобальных осях координат путем решения основного уравнения $\{\bar{F}\} = [\bar{K}] \{\bar{\Delta}\}$.
11. Определить узловые перемещения элементов $\{\bar{\Delta}^e\}$ в глобальных осях координат путем сопоставления с матрицей индексов.
12. Определить узловые перемещения элементов в локальных осях координат $\{\Delta^e\} = [L] \{\bar{\Delta}^e\}$.
13. Определить узловые усилия в каждом элементе в локальных осях координат $\{F^e\} = [K^e] \{\Delta^e\}$.

Вновь работа расчетчика

14. Если среди внешних сил есть распределенная нагрузка, из внутренних усилий вычесть эквивалентную нагрузку и вернуть на соответствующий элемент распределенную нагрузку.
15. Произвести расчет на прочность каждого элемента.

Глава 23. Метод конечных элементов

Рассмотренный в предыдущей главе матричный метод перемещений является частным случаем метода конечных элементов. Отметим сразу, что общего между указанными методами и в чем отличие.

23.1. Сравнение метода конечных элементов и матричного метода перемещений

- Основная идея метода одна и та же (см. раздел 22.1 Общий план решения задачи).
- Основное уравнение обоих методов одно и то же $\{F\} = [K]\{\Delta\}$. Фактически это матричная запись любой системы алгебраических линейных уравнений.
- В основе обоих методов лежит разбивка стержневой системы или твердого тела на элементы, но сами элементы различные.

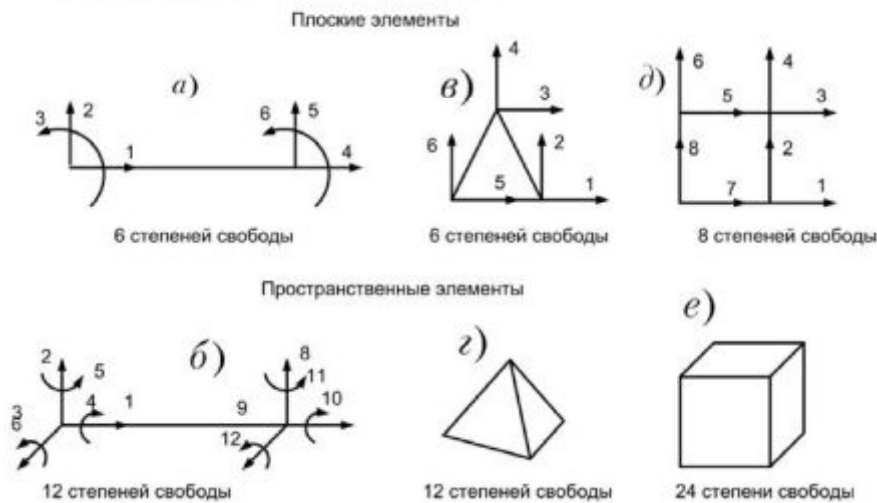


Рис. 23.1 Типы элементов

На рис. 23.1 показаны некоторые типы элементов, используемые в матричном методе перемещений для расчета стержневых систем и в методе конечных элементов при расчете на прочность и жесткость твердых тел.

В плоских стержневых системах элемент-стержень имеет 6 степеней свободы (6 независимых узловых перемещений) (рис. 23.1, а). В пространственных стержневых системах элемент-стержень имеет 12 степеней свободы (рис. 23.1, б).

В плоской задаче метода конечных элементов тело разбивается на треугольные (рис. 23.1, в) или прямоугольные элементы (рис. 23.1, д). В каждом узле по два линейных перемещения.

В пространственной задаче метода конечных элементов тело разбивается на элементы тетраэдры (рис. 23.1, г) или параллелепипеды (рис. 23.1, е). В каждом узле по три перемещения (вдоль трех осей координат).

- Функции формы связывают узловые перемещения с перемещениями в произвольной точке элемента.

В *матричном методе* при расчете стержневых систем функция формы — *точная*, использует уравнение упругой линии элемента-стержня. *Функция формы не используется в расчетах.*

В *методе конечных элементов* при расчете твердых тел *функция формы приближенная*, лежит в основе всех расчетов.

ПРИМЕЧАНИЕ

В последующих разделах будет рассматриваться *плоская задача*. Основные соотношения метода конечных элементов для пространственной задачи такие же, как для плоской, но более сложные.

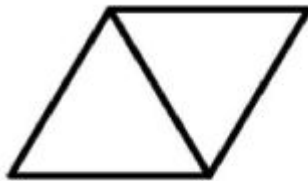
Плоские тела будем разбивать на *треугольные линейные элементы*, как наиболее простые. Использование более сложных элементов рассмотрено в разделе 23.7.

23.2. Требования к функциям формы

Функция формы определяет вид аппроксимации искомой целевой функции (в наших задачах функции перемещения). Поскольку все расчеты методом конечных элементов используют в своем алгоритме функции формы, рассмотрим вначале требования к функциям формы.

1. Функция формы равна единице в "своем" узле и нулю в "чужом". Как станет ясно в дальнейшем, для каждого узла будет введена своя функция формы.
2. Функцию формы будем описывать степенным полиномом, число членов которого равно числу узлов. Например, для треугольного линейного элемента вид функции формы $N = a_1 + a_2z + a_3y$.
Для четырехугольного линейного плоского элемента $N = a_1 + a_2z + a_3y + a_4zy$.
Для четырехугольного квадратичного элемента с 8-ю узлами (4 по углам, 4 в середине сторон) $N = a_1 + a_2z + a_3y + a_4zy + a_5z^2 + a_6y^2 + a_7z^2y + a_8zy^2$.
3. на границах элементов не должно быть разрывов. (рис. 23.2).

До деформации



После деформации



Рис. 23.2 Разрыв на границе элементов

Граница линейного треугольного элемента должна оставаться прямой линией после деформации, то есть $u = ax + b$. Следовательно, деформация $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = a = Const$, соответственно $\sigma = E\varepsilon = Const$. Для линейного треугольного элемента, который будем использовать в последующих расчетах, напряжения и деформации постоянны по всей площади элемента.

23.3. Определение функций формы треугольного линейного элемента

Пусть известна функция перемещений $u(y,z)$ вдоль какой-либо оси. На рис. 23.3 показана поверхность перемещений, построенная перпендикулярно поверхности рассматриваемого плоского тела. Функции формы определяют способ аппроксимации искомой функции (в нашем случае поверхности перемещений).

Разобьем тело на плоские треугольные элементы. Выделим один из элементов (заштрихован на рис. 23.3). В узлах элемента 1, 2, 3 известны перемещения $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Требуется найти перемещение $u(y,z)$ в некоторой произвольной точке между узлами.

В процессе вычисления вначале определяются узловые перемещения. Следовательно поверхности перемещений еще нет, а есть дискретный набор перемещений в узлах. Необходимо выбрать форму аппроксимации перемещений между узлами. Для этой цели и используются функции формы $N(y,z)$.

Через три точки поверхности ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$) однозначно можно провести только плоскость. Для построения криволинейной поверхности трех точек недостаточно и надо выбирать вид элемента с большим количеством узлов.

Итак, для треугольного элемента выбираем плоскость, как вид аппроксимации

поверхности перемещений. По уравнению (22.1) $\{u\} = [N]\{\Delta\}$ перемещение u в произвольной точке связано с узловыми перемещениями Δ с помощью функций формы N .

Рассмотрим перемещение произвольной точки с координатами z и y вдоль оси Z
 $u_z = N_1\Delta_1 + N_2\Delta_2 + N_3\Delta_3$.

Функции формы запишем как уравнение плоскости $N = ay + bz + c$.

Значения коэффициентов a, b, c найдем из граничных условий.

Для функции формы N_i в узле 1 $N_i=1$, в узлах 2 и 3 $N_i=0$, тогда

$$\begin{cases} N_1 = a_1y_1 + b_1z_1 + c_1 = 1 \\ N_1 = a_1y_2 + b_1z_2 + c_1 = 0 \\ N_1 = a_1y_3 + b_1z_3 + c_1 = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему трех уравнений, находим коэффициенты a_i, b_i, c_i . Аналогично определяются коэффициенты для функций формы N_2 и N_3 . В общем виде выражение для функций формы можно записать так

$$N_i = \frac{1}{2A^e} (a_iy + b_iz + c_i) \quad (23.1)$$

$$a_i = z_j - z_k \quad b_i = -(y_j - y_k) \quad c_i = y_jz_k - y_kz_j, \quad \text{где } i, j, k = 1, 2, 3.$$

Вывод

Функция формы зависит только от координат узла элемента

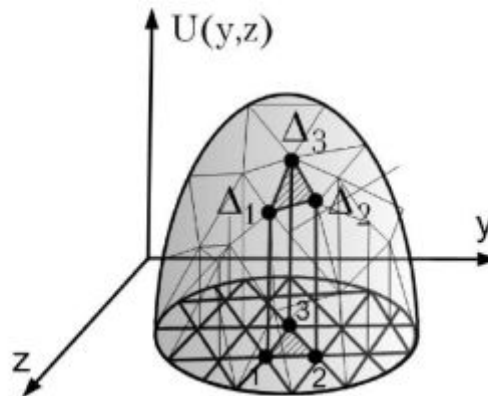


Рис. 23.3 Аппроксимация поверхности перемещений плоскими треугольниками

Для упорядочения расчетов примем правило нумерации узлов перемещений и функций формы.

ПРАВИЛО ЛОКАЛЬНОЙ НУМЕРАЦИИ УЗЛОВ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Нумерация узлов элемента осуществляется против часовой стрелки. Начало нумерации (узел 1) — нижний левый (рис. 23.4).

Нумерация перемещений — горизонтальные перемещения (вдоль оси Z) — нечетные, вертикальные перемещения (вдоль оси Y) — четные.

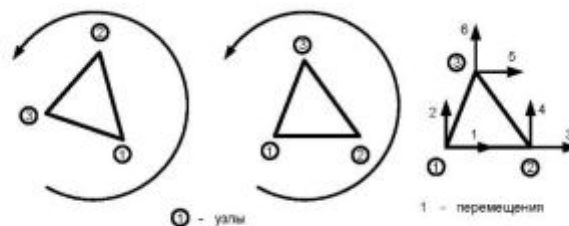


Рис. 23.4 Примеры нумерации узлов и перемещений треугольного элемента

Вернемся к выражению (22.1).

$$\begin{matrix} \{u\} = [N] \cdot \{\Delta\} \\ 2 \times 1 \quad 2 \times 6 \quad 6 \times 1 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

Функции формы для перемещений по осям Y и Z одинаковы, так как зависят только от координат узлов и не зависят от направления перемещения.

23.4 Формирование матрицы жесткости элемента

В этом разделе рассмотрим формирование матрицы жесткости любого элемента с использованием функции формы. В качестве исходных возьмем 5 уравнений:

□ Основное уравнение МКЭ (21.12) $\{F\} = [K]\{\Delta\}$ (1),

□ Уравнение связи перемещений (22.1) $\{u\} = [N]\{\Delta\}$ (2),

□ Начало возможных перемещений (21.7) $[F]\{\Delta\} = \int_V [\sigma]\{\varepsilon\} dV$ (3),

□ Геометрические уравнения теории упругости (20.18) $\{\varepsilon\} = D^T \{u\}$ (4),

□ Физические уравнения теории упругости (20.27) $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ (5).

Суть вывода: подставим выражения (1), (2), (4), (5) в выражение (3) и после упрощения получим формулу для матрицы жесткости элемента $[K]$.

Для последующего вывода напомним

правило транспонирования произведения матриц $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Поскольку в выражение (3) входит строка $[F]$, транспонируем выражение (1)

$$[F] = [\Delta][K]. \quad (6)$$

Матрица жесткости $[K]$ симметричная, поэтому $[K]^T = [K]$.

Уравнение (2) подставим в (4)

$$\{\varepsilon\} = D^T ([N]\{\Delta\}) = (D^T [N])\{\Delta\} = [B]\{\Delta\} \quad (7).$$

Здесь матрица $[B] = D^T [N]$ (23.2).

Далее подставим (7) в (5) $\{\sigma\} = [C][B]\{\Delta\}$ и транспонируем

$$[\sigma] = [\Delta][B]^T [C] \quad (8).$$

Матрица жесткости $[C]$ симметричная, поэтому $[C]^T = [C]$.

Выражения (6), (7), (8) подставим в (3)

$$[\Delta][K]\{\Delta\} = \int_V [\Delta][B]^T [C][B]\{\Delta\} dV.$$

Строку $[\Delta]$, находящуюся слева, выносим из под интеграла влево. Столбец $\{\Delta\}$, находящийся справа, выносим вправо

$$[\Delta][K]\{\Delta\} = [\Delta] \left(\int_V [B]^T [C][B] dV \right) \{\Delta\}.$$

Анализируя последнее выражение, замечаем, что

$$[K] = \int_V [B]^T [C][B] dV \quad (23.3).$$

Выражение (23.3) представляет собой общую формулу для определения матрицы жесткости стандартного элемента любого типа.

23.5 Матрица жесткости треугольного элемента

Упростим выражение (23.3) применительно к плоскому треугольному элементу.

Выпишем векторы напряжений и деформаций для плоского напряженного состояния

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix},$$

Геометрические уравнения теории упругости с указанием размерности матриц

$$\bar{\varepsilon} = D^T \cdot \bar{u}, \quad \text{здесь} \quad D^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial z & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{bmatrix}.$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 2 \quad 2 \times 1$

Уравнение связи перемещений (22.1) $\{u\} = [N]\{\Delta\}$. Выражения для функций формы треугольного элемента $N_i = \frac{1}{2A^e}(a_i y + b_i z + c_i)$ приведены в разделе (23.2).

Вычислим производные $[B] = D^T [N]$, входящие в выражение (23.3)

$$[K] = \int_V [B]^T [C][B] dV. \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = a_i, \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} = b_i,$$

Где $a_i = z_j - z_k$ $b_i = -(y_j - y_k)$.

$$\text{Тогда} \quad [B] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица внутренней жесткости, входящая в выражение (23.3)

$$[C] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

Матрицы $[B]$ и $[C]$ — содержат только константы, поэтому в выражении (23.3) их можно вынести за знак интеграла. Тогда $\int_V dV = V = A \cdot t$, где A — площадь элемента, t — толщина элемента (плоского).

Окончательное выражение для расчета матрицы жесткости линейного треугольного элемента

$$[K^e] = [B]^T [C][B] A^e t \quad (23.4).$$

23.6. Порядок решения плоской задачи теории упругости методом конечных элементов

Порядок решения указанной задачи рассмотрим на примере расчета тонкой пластины, нагруженной распределенной нагрузкой q и силой F (рис. 23.5).

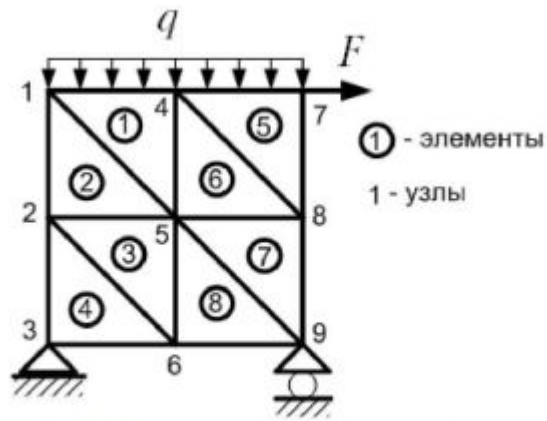


Рис. 23.5 Разбивка на треугольные элементы тонкой пластины

1. Разбить тело на элементы.
2. Пронумеровать элементы и узлы (в нашем примере сверху вниз по столбцам), выписать координаты узлов.
3. Ввести матрицу индексов узлов.

В методе конечных элементов матрица индексов узлов устанавливает соответствие глобальной нумерации узлов (рис. 23,5) и локальной (рис. 23.4). В заголовке таблицы локальная нумерация узлов, в теле таблицы глобальная.

Матрица индексов узлов

№ элемента	1	2	3
1	5	4	1
2	2	5	1
3	6	5	2
-----	---	---	---

Матрица индексов перемещений						
№ элемента	1	2	3	4	5	6
1	9	10	7	8	1	2
2	3	4	9	10	1	2
3	11	12	9	10	3	4
-----	---	---	---	---	---	---

В каждом узле два перемещения по двум осям координат (горизонтальные — нечетные, вертикальные — четные). Локальная нумерация от 1 до 6. Глобальный номер перемещения:

- горизонтального $N_{\Delta x} = 2N_{узла} - 1$ — нечетный,
- вертикального $N_{\Delta y} = 2N_{узла}$ — четный.

Матрица индексов перемещений автоматически строится программой расчета по матрице индексов узлов.

4. Сформировать вектор нагрузок. Число нагрузок равно числу перемещений. Поскольку внешних нагрузок мало, по большинству перемещений нагрузка равна нулю. Распределенную нагрузку надо заменить эквивалентной узловой нагрузкой (рис. 4.6). Условно говоря, к каждому узлу прикладываем половину распределенной нагрузки, приложенной к краю элемента. Момент от распределенной нагрузки в расчетах не используется.

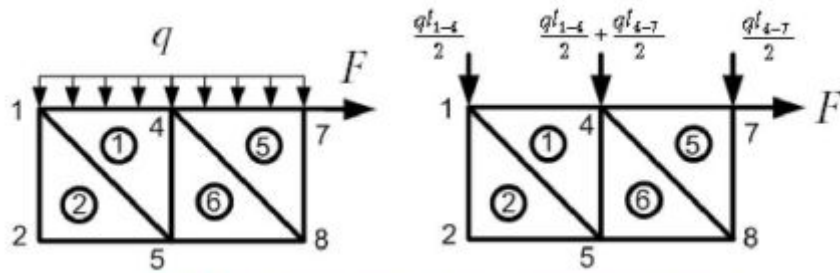


Рис. 23.6 Замена распределенной нагрузки эквивалентной узловой

5. Сформировать матрицы жесткости элементов по выражению (23.4) $[K^e] = [B]^T [C] [B] A^e t$.
6. Сформировать матрицу жесткости системы путем суммирования по матрице индексов перемещений. Коэффициент жесткости \bar{K}_{ij} равен сумме коэффициентов жесткости элементов, которым в матрице индексов перемещений одновременно принадлежат индексы i и j .
7. Найти узловые перемещения системы (в глобальной нумерации) путем решения основного уравнения метода конечных элементов $\{\bar{F}\} = [\bar{K}]\{\bar{\Delta}\}$.
8. Найти узловые перемещения элементов (в локальной нумерации) по матрице индексов путем сопоставления глобального номера перемещения с локальным номером для данного элемента. Перемещение узла элемента в локальной нумерации равно соответствующему перемещению системы в глобальной нумерации $\Delta_i^e = \bar{\Delta}_k$.
9. Найти деформации и напряжения в каждом элементе. В треугольном плоском элементе деформации и напряжения одинаковы по площади элемента $\{\epsilon^e\} = D^T [u] = [B] \cdot \{\Delta^e\} \quad \{\sigma^e\} = [C] \cdot \{\epsilon^e\}$
 $3 \times 1 \quad 3 \times 6 \quad 6 \times 1 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 1$
10. Для треугольных элементов найти деформации и напряжения в узлах системы. Напряжения (деформации) в узле системы подсчитываем как среднее арифметическое напряжений (деформаций) в элементах, сходящихся в данном узле.
11. Найти максимальные главные напряжения и подставить их в условие прочности.

23.7. Решение уравнения Пуассона

В качестве примера применения метода конечных элементов рассмотрим решение уравнения Пуассона. К решению этого уравнения сводятся многие задачи теории поля (задачи термодинамики и массопереноса, гидродинамики, электромагнетизма). К нему же сводится задача кручения стержня произвольного поперечного сечения. Покажем откуда в процессе вычислений возникает уравнение Пуассона.

23.7.1. Кручение стержня произвольного поперечного сечения

Рассмотрим свободное кручение стержня произвольного поперечного сечения (рис. 23.7).

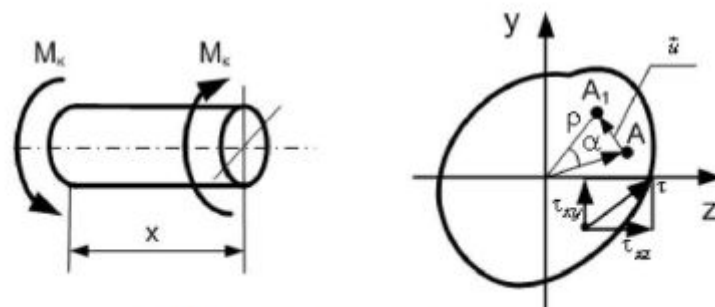


Рис. 23.7 Кручение стержня произвольного сечения

ДОПУЩЕНИЯ

- 1) Рассматриваем свободное кручение стержня. Продольное усилие в поперечном сечении отсутствует.
- 2) Нагрузки на контуре нет.
- 3) Форма поперечного сечения при кручении не меняется, следовательно $\tau_{yz} = 0$. Но гипотеза плоских сечений несправедлива. Сечение искривляется в направлении оси x .

Найдем перемещение u произвольной точки A поперечного сечения при кручении стержня вокруг оси x на угол α $\vec{u} = \vec{\alpha} \times \vec{\rho} = \vec{i} \cdot \alpha \times \vec{\rho}$.

Угол закручивания стержня $\alpha = \theta \cdot x$, где $\theta = \frac{M_x \cdot 1}{G \cdot I_x}$ — погонный угол закручивания (на единицу длины стержня).

По правилам нахождения произведения векторов запишем проекции векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\rho}$ в виде матрицы (в ней $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты нормалей вдоль осей x, y, z).

$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$. Вычеркивая соответствующие строки и столбцы, находим проекции перемещения на оси x, y, z

$$\vec{\alpha} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 0 & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix} \quad u_x = 0 \quad u_y = -\alpha z = -\theta x z \quad u_z = \alpha y = \theta x y.$$

По закону Гука $\tau = G\gamma$. Из геометрических уравнений теории упругости

$$\begin{cases} \gamma_{yz} = 0 \text{ по допущению 3} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\theta z & (1) \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta y & (2) \end{cases}$$

Умножая уравнения (1) и (2) на модуль сдвига G , получаем касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} . В этом же выражении уравнение (1) дифференцируем по z , уравнение (2) дифференцируем по y

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = -G\theta & (3) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G\theta & (4) \end{cases}$$

Из выражения (3) вычтем выражение (4)

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + 2G\theta = 0 \quad (5).$$

Вводим функцию напряжений Прандтля φ , удовлетворяющую условиям,

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Подставляя последние выражения в (5), получаем

уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0 \quad (23.5).$$

Встает задача: решить уравнение Пуассона и найти распределение касательных напряжений τ по сечению стержня.

Свойства функции напряжений

Докажем, что функция напряжений $\varphi = 0$ на контуре.

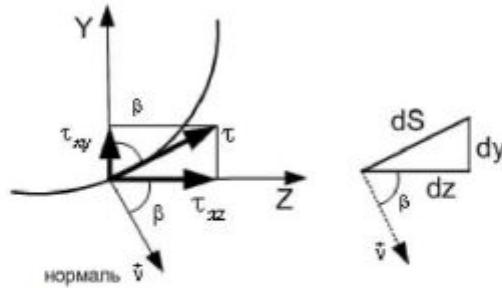


Рис. 23.8 К доказательству $\varphi = 0$ на контуре

Рассмотрим касательные напряжения τ в некоторой точке контура сечения (рис.23.8).

Нормаль \bar{n} к сечению наклонена под углом β к оси z . Напряжение τ_n , направленное вдоль нормали к контуру равно нулю, $\tau_n = \tau_{xz} \cos(\beta) - \tau_{xy} \sin(\beta) = 0$,

так как на контуре нет нагрузок. С учетом $\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ и $\tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, а также

$$\cos(\beta) = \frac{dy}{dS} \text{ и } \sin(\beta) = \frac{dz}{dS} \text{ получаем } \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dS} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dS} = -\frac{d\varphi}{dS} = 0.$$

Если производная от функции равна нулю, то функция $\varphi = Const$ на контуре сечения. Так как касательные напряжения равны производной от φ , то величина константы может быть любой. Берем $\varphi = 0$.

23.7.2. Общий подход к решению задач методом конечных элементов (МКЭ)

Любую непрерывную величину, такую как температура, давление, перемещение можно аппроксимировать рядом кусочно-непрерывных функций, задаваемых своими граничными значениями. В общем случае непрерывная величина неизвестна и надо определить ее значения для ряда величин ее аргументов (например, x, y, z).

Для этого в области значений аргументов фиксируется ряд точек, называемых узлами. Подобласти, получаемые при соединении узлов называются элементами.

Выражение исходной функции записывается для каждого узла. Решение получившейся при этом системы уравнений дает узловые значения искомой функции. Значения функции между узлами аппроксимируются кусочно-непрерывными функциями. Вид этих функций определяется функциями формы, представляющими собой полиномы, число членов которых определяется числом узлов в элементах. Функция формы представляется плоскостью для треугольного элемента с тремя узлами. При увеличении числа узлов в элементе, функция формы представляется криволинейной поверхностью.

Основная идея метода конечных элементов (МКЭ) состоит в замене системы интегральных или дифференциальных уравнений системой линейных алгебраических уравнений.

Чаще всего из нескольких уравнений формируется одна целевая функция. В поле аргументов выбирается сетка узловых значений, в которых надо найти значения неизвестного параметра целевой функции.

Метод конечных элементов численный, приближенный. Его задача найти значения неизвестной функции для определенных фиксированных (узловых) значений аргументов и последующей аппроксимации значений этой функции между узлами.

Переход от системы интегральных или дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений всегда не прост и связан со сложными математическими преобразованиями. Но этот этап в развитии метода конечных элементов давно пройден.

Стандартный вид системы линейных алгебраических уравнений в матричном виде

$[K]\{X\} = \{F\}$, где $\{X\}$ — вектор неизвестных, $\{F\}$ — вектор правых частей уравнений (свободных членов), $[K]$ — матрица коэффициентов при неизвестных, часто называемая матрицей жесткости. Физический смысл уравнений может быть различным, но алгоритм решения остается почти неизменным. Коэффициенты при неизвестных определяются по сложным, зачастую, интегральным, но однотипным выражениям в каждой области применения МКЭ.

На ранней стадии развития метода конечных элементов узловые значения определялись минимизацией интегральной величины, связанной с физическим процессом. В задачах механики деформируемого тела, например, минимизировалась потенциальная энергия системы. В результате исходные уравнения сводились к системе алгебраических уравнений, которые можно разрешить относительно узловых перемещений. В задачах теории поля (перенос тепла, течение грунтовых вод, расчет магнитных полей и др.) минимизировался некоторый функционал. Этот функционал обладает тем свойством, что любая минимизирующая его функция удовлетворяет как исходным дифференциальным уравнениям, так и граничным условиям. Позднее для вывода системы уравнений, определяющих узловые значения искомых параметров, стали использоваться методы взвешенных невязок. Один из них, метод Бубнова-Галёркина. Рассмотрим его реализацию в нашей задаче.

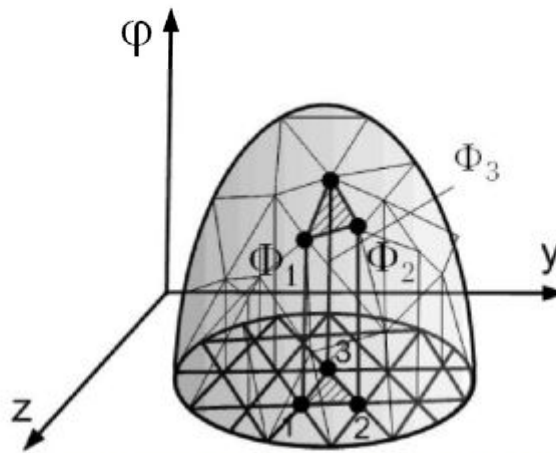


Рис. 23.9 Аппроксимация поверхности функции напряжений набором плоских треугольников

На рис. 23.9 изображена поверхность функции напряжений Прандтля (неизвестной в начале решения задачи). Поперечное сечение стержня разбито на треугольные элементы. В вершинах (узлах) каждого элемента найдены узловые значения функции напряжений Прандтля Φ_1, Φ_2, Φ_3 . Поверхность функции напряжений аппроксимируем набором треугольников. Значение функции напряжений в произвольной точке поперечного сечения можно приближенно найти по уравнению связи

$$\bar{\varphi} = [N]\{\Phi\} \quad (23.6)$$

Функции формы N определяются по выражению (23.1) $N_i = \frac{1}{2A^e} (a_i y + b_i z + c_i)$, где коэффициенты a_i, b_i, c_i зависят только от координат узлов треугольного элемента. Подставим приближенную функцию $\bar{\varphi}$ в уравнение Пуассона (23.5). Тогда для каждого элемента

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + 2G\theta = R \neq 0 \quad (23.7)$$

где R — ошибка расчета, называемая *невязкой* решения. Необходимо подобрать такие узловые значения функции напряжений Φ , которые соответствуют минимальной невязке R .

Можно выдвинуть условие, чтобы суммарная невязка по площади поперечного сечения стержня была равна нулю $\int_A R \cdot dA = 0$, но это будет слишком неточное

решение. Точность решения резко возрастает при использовании взвешенных невязок (умноженных на весовую функцию W)

$$\int_A W \cdot R \cdot dA = 0 \quad (23.8).$$

От выбора весовой функции зависит не только точность расчета, но и сам способ решения задачи. Так в зависимости от выбора весовой функции можно получить метод конечных элементов, метод граничных элементов, метод наименьших квадратов.

В методе Бубнова-Галеркина в качестве весовой функции надо использовать функции формы элемента $W = [N]^T$. Транспонирование функций формы необходимо для соблюдения правила перемножения матриц в последующих расчетах.

23.7.3 Решение уравнения Пуассона методом конечных элементов

В уравнение метода взвешенных невязок (23.8) подставим выражение (23.7)

$$\int_A [N]^T \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} + 2G\theta \right) dA = 0 \quad (23.9).$$

Вычислим производные от функции напряжений φ . С учетом (23.6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} ([N] \{ \Phi \}) = \frac{1}{2A^e} [b_1 \ b_2 \ b_3] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = Const \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} ([N] \{ \Phi \}) = \frac{1}{2A^e} [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = Const \end{aligned} \quad (23.10).$$

Тогда $\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} = 0$ и $\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} = 0$. Следовательно для решения уравнения (23.9) при

использовании линейных треугольных элементов необходимо понизить порядок производной. Пропустим математические преобразования, не используемые в последующих расчетах. Укажем лишь, что с помощью формулы Грина

$$\int_A \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} dA = \int_S \varphi \cdot l_y dS$$

перейдем от интеграла по площади к интегралу по контуру. В

формуле Грина l_y — косинус угла между нормалью к поверхности φ и осью y .

После довольно сложных преобразований получаем

$$\int_{A^e} \left(\frac{\partial}{\partial y} [N]^T \cdot \frac{\partial}{\partial y} [N] + \frac{\partial}{\partial z} [N]^T \cdot \frac{\partial}{\partial z} [N] \right) dA \cdot \{ \Phi \} = \frac{2}{3} G\theta A^e.$$

Последнее выражение можно записать как

$$[K^e] \{ \Phi \} = \{ F^e \} \quad (23.11),$$

где $[K^e] = \int_{A^e} \left(\frac{\partial}{\partial y} [N]^T \cdot \frac{\partial}{\partial y} [N] + \frac{\partial}{\partial z} [N]^T \cdot \frac{\partial}{\partial z} [N] \right) dA$ — матрица коэффициентов,

называемая матрица жесткости, хотя она и не имеет физического смысла,

Для линейного треугольного элемента, где производные от функций формы содержат только константы (23.10), матрица жесткости элемента имеет вид

$$[K^e] = \left(\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} [a_1 \ a_2 \ a_3] + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} [b_1 \ b_2 \ b_3] \right) \cdot A^e$$

$$K_{i,j}^e = \frac{1}{4A^e} (a_i \cdot a_j + b_i \cdot b_j) \quad (23.12),$$

где $a_i = z_j - z_k$, $b_i = -(y_j - y_k)$, y и z — координаты узлов треугольного элемента,

$$\{F^e\} = \frac{2}{3} G\theta A^e \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ — вектор правых частей уравнения. Вектор из трех единиц}$$

означает равенство величины F во всех трех узлах треугольного элемента.

23.7.4. Порядок расчета

1. Разбить сечение на треугольные элементы, пронумеровать элементы и узлы.
2. Выписать координаты узлов.
3. Составить матрицу индексов узлов так же как в разделе 23.2.
4. Ввести граничные условия (ввести список узлов на контуре, где $\Phi = 0$).
5. Сформировать матрицу жесткости для всех элементов по выражению (23.12).
6. Сформировать матрицу жесткости системы как в разделе 22.2.4 путем суммирования коэффициентов жесткости элементов по матрице индексов.
7. Сформировать вектор правых частей уравнений $\{F\}$, для чего надо задать любое значение θ . Например, $\theta = 1$ град/м.
8. Учесть граничные условия как в разделе 22.5.
9. Решить основное уравнение $[K]\{\Phi\} = \{F\}$ и найти вектор узловых значений функции напряжений $\{\Phi\}$.

Уравнение Пуассона решено. Далее следует анализ результатов расчета.

23.7.5 Расчет стержня на кручение

Найдя функцию напряжений Прандтля в результате решения уравнения Пуассона, далее можно определить распределение касательных напряжений в поперечном сечении стержня, крутящий момент, момент инерции и момент сопротивления при кручении.

По определению $\tau_{xy} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}$ и $\tau_{xz} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}$. С учетом уравнения связи (23.6)

$$\bar{\varphi} = [N]\{\Phi\}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [N]\{\Phi\} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} [N]\{\Phi\} = -[a_1 \quad a_2 \quad a_3] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}$$

Суммарное касательное напряжение $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$ и максимальное напряжение $\tau_{\max} = \max(\bar{\tau})$.

ПРИМЕЧАНИЕ

Найдено τ_{\max} при угле закручивания стержня $\theta = 1$ град/м.

Определим крутящий момент, соответствующий заданному значению $\theta = 1$ град/м. По условию эквивалентности напряжений и внутренних усилий (раздел 1.6)

$$dM_k = (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dA.$$

$$\text{Тогда } M_k = \int_A (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dA = \int_A \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} z + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} y \right) dA.$$

С помощью формулы Грина, переходя от интеграла по площади к интегралу по контуру, получаем $M_k = 2 \int_A \bar{\varphi} dA$. Это выражение означает, что крутящий момент

равен удвоенному объему поверхности функции φ (иногда ее называют "бугром напряжений". Приближенно крутящий момент равен удвоенной сумме объемов трехгранных призм (рис. 23.9).

$$M_{\kappa} = 2 \sum_{k=1}^n \left(A_k^e \cdot \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3}{3} \right).$$

Найдем момент инерции и момент сопротивления при кручении. Как указано в разделе 6.6 при расчете на кручение стержней некруглого поперечного сечения формулы для угла закручивания и максимальных касательных напряжений такие же, как и для стержней круглого поперечного сечения

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_{\kappa}} \quad \tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}.$$

Если задан угол закручивания $\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{\kappa}}{GJ_{\kappa}} = 1$ град/м и найден соответствующий

ему крутящий момент M_{κ} , то можно определить момент инерции при кручении

$$J_{\kappa} = \frac{M_{\kappa}}{G\theta} \quad \text{и момент сопротивления при кручении } W_{\kappa} = \frac{M_{\kappa}}{\tau_{\max}}.$$

В реальных задачах на кручение стержня, как правило, задан крутящий момент M_{κ} . Тогда предыдущая часть решения используется именно для определения величин J_{κ} и W_{κ} . Касательные напряжения τ надо пересчитать.

Поскольку задача упругая и справедлив закон Гука, то $\frac{M_{\kappa, \text{реальный}}}{M_{\kappa, \text{расчетный}}} = n = \frac{\tau_{i, \text{реальные}}}{\tau_{i, \text{расчетные}}}$.

Часто в расчетах используется коэффициент $\gamma = \frac{\tau_i}{\tau_{\max}}$.

23.8. Использование сложных конечных элементов

Для расчета методом конечных элементов объект исследований надо разбить на конечные элементы.

23.8.1. Виды элементов

Поскольку объект исследований может быть одномерным, двумерным или трехмерным, то и элементы могут быть *одномерными, двумерными, трехмерными*.

Каждый из них может быть *линейным* (симплекс-элементом, то есть простым), *квадратичным* или *кубическим* (комплекс-элементом, то есть сложным).

Функции формы любого элемента описываются полиномом.

Линейный элемент — функция формы линейная (аргументы полинома в первой степени), узлы элемента расположены только на углах элемента.

Квадратичный элемент — функции формы содержат аргументы во второй степени. Кроме узлов по углам элемента, есть узлы посередине сторон элемента.

Кубический элемент — функции формы содержат аргументы во второй и третьей степени. Кроме узлов по углам элемента, есть по два узла вдоль сторон элемента.

Различные виды конечных элементов показаны на рис. 23.10 – 23.12. Границы линейных элементов всегда прямолинейные. Границы нелинейных элементов могут быть как прямолинейными, так и криволинейными.



Рис. 23.10 Одномерный конечный элемент

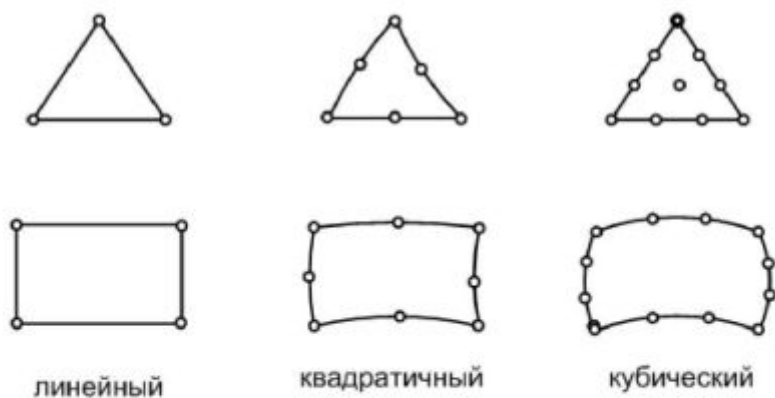


Рис. 23.11 Плоский конечный элемент

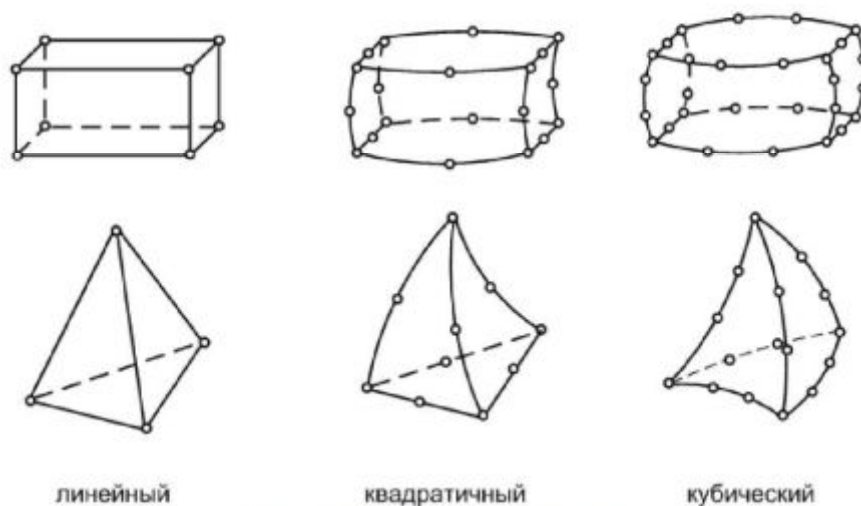


Рис. 23.12 Объемный конечный элемент

23.8.2. Функции формы сложных элементов

Запишем полином, аппроксимирующий искомую функцию

$$\varphi = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots + b_mx^{m-1}$$

где m — число узлов.

Функции формы $N_i = 1$ в узле i , $N_i = 0$ в остальных узлах элемента.

$$N_i = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1},$$

где n — число членов полинома.

Вид функции формы чаще всего совпадает с видом аппроксимации искомой функции.

Элементы, у которых число узлов n , определяющих функции формы, равно числу узлов, определяющих интерполяционную функцию m , называются *изопараметрическими* $n = m$.

Если $n < m$, элементы называются *субпараметрическими*.

Если $n > m$, элементы называются *суперпараметрическими*.

Поскольку в этой книге рассматривается всего лишь введение в метод конечных элементов, далее ограничимся использованием только наиболее часто применяемых изопараметрических элементов.

Полином, описывающий функцию формы можно записать в виде произведения двучленов

$$N_i = (c_1 + c_2x)(c_3 + c_4x) \dots (c_{n-1} + c_nx).$$

Здесь произвольные постоянные c_i определяют из условия равенства нулю в каждом узле одного сомножителя.

23.8.3. Естественная система координат

В качестве локальных осей координат для сложных элементов целесообразно использовать, так называемую, естественную систему координат (рис. 23.13).

Естественная система координат указывает относительные длины сторон элемента $-1 < \xi < 1$ и $-1 < \eta < 1$. Начало отсчета координат ξ и η в средней точке элемента.

При использовании естественной системы координат функции формы оказываются одинаковыми для всех элементов, на которые разбито поле значений аргументов.

Преимущество естественной системы координат в том, что она позволяет деформировать границы элементов.

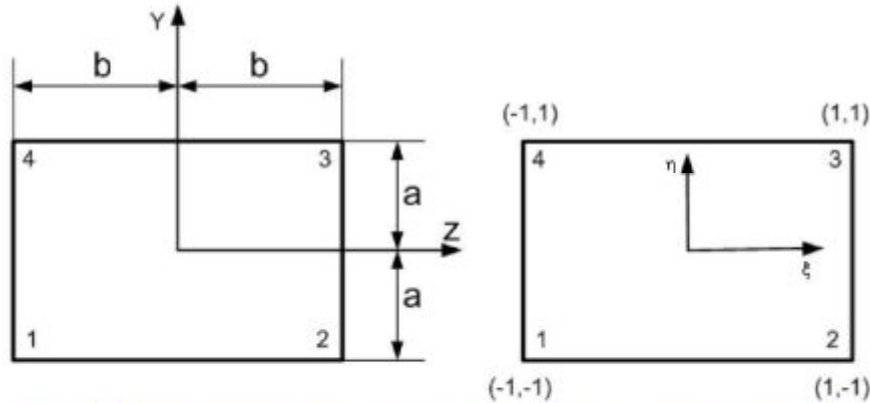


Рис. 23.13 Локальные координаты (декартовы ZY и естественные $\xi\eta$) для прямоугольного квадратичного элемента

Декартовы ZY и естественные $\xi\eta$ координаты связаны соотношениями

$$\xi = \frac{z - z_c}{a}; \quad \eta = \frac{y - y_c}{b}; \quad dz = a d\xi; \quad dy = b d\eta.$$

В естественной системе координат функции формы для четырехугольного линейного элемента приведены на рис. 23.14. Функции формы для четырехугольного квадратичного элемента приведены на рис. 23.16.

$$\begin{aligned} N(\xi, \eta)_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 - \eta) & N(\xi, \eta)_3 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \\ N(\xi, \eta)_2 &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) & N(\xi, \eta)_4 &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \end{aligned}$$

Рис. 23.14 Функции формы четырехугольного линейного элемента

23.8.4. Расчет коэффициентов жесткости

Входящие в уравнение (23.3) $[K] = \int_V [B]^T [C][B] dV$ (где $[B] = D^T [N]$),

производные функций формы $\partial N_i / \partial z$ и $\partial N_i / \partial y$, связанные с применением дифференциального оператора Коши D , невозможно вычислить без учета искажения реального пространства (в координатах Z и Y) по отношению к исходному, определяемому в естественной системе координат ξ и η (рис. 23.13). В естественной системе прямоугольник не искажается никогда.

Для дальнейших преобразований нужно связать декартовы и естественные координаты формулами вида $x = f(\xi)$ или $\xi = g(x)$.

$$\frac{dN_i}{d\xi} = \frac{dN_i}{dx} \frac{dx}{d\xi} \quad \text{или после обращения последнего выражения} \quad \frac{dN_i}{dx} = \frac{1}{dx/d\xi} \frac{dN_i}{d\xi}$$

Величина $\frac{dx}{d\xi} = [J]$ называется матрицей Якоби для одномерной задачи.

Для двумерной задачи матрица Якоби имеет вид $[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial z / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial z / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$.

Тогда производные функций формы

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial z / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial z / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial z \\ \partial N_i / \partial y \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial z \\ \partial N_i / \partial y \end{Bmatrix}.$$

После обращения матрицы Якоби имеем

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial z \\ \partial N_i / \partial y \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{Bmatrix}.$$

Для составления элементов обратной матрицы Якоби используют численное интегрирование.

Матрицу жесткости элемента можно определить путем численного интегрирования способом Гаусса-Лежандра, требующим меньшего количества точек интегрирования, чем другие способы.

Произведем замену переменных в выражении (23.3). Для малого элемента объема $dV = dx dy dz = |Det [J] d\xi d\eta d\zeta|$. Тогда

$$[K^e] = \int_V [B]^T [C] [B] dV = \iiint_{\xi, \eta, \zeta} ([B]^T [C] [B] (\xi, \eta)) \det ([J]) d\xi d\eta d\zeta.$$

При численном интегрировании вместо интеграла вычисляется сумма значений по всем m узловым точкам с учетом весовых коэффициентов W . Естественные координаты точек интегрирования и весовые значения в этих точках задаются алгоритмом способа Гаусса-Лежандра в зависимости от числа точек интегрирования.

$$[K^e] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m ([B]^T [C] [B] (\xi, \eta)) \det ([J]) W_{\xi_i} W_{\eta_j} W_{\zeta_k}.$$

В примере, приведенном в электронной книге, используем трехточечную схему интегрирования.

23.8.5. Использование четырехугольного квадратичного элемента

В качестве примера рассмотрим применение четырехугольного квадратичного изопараметрического элемента при решении плоской задачи теории упругости методом конечных элементов. Такой элемент (рис. 23.15) имеет 8 узлов (4 по углам и 4 посередине сторон). По углам элемента показаны естественные координаты узлов ξ, η . Для численного интегрирования по трехточечной схеме указаны 9 точек интегрирования. Их естественные координаты одинаковы по ξ и η (-0,7746, 0, 0,7746). Соответствующие весовые коэффициенты W_{ξ} и W_{η} в квадратурных формулах Гаусса (0,5536, 0,8889, 0,5536).

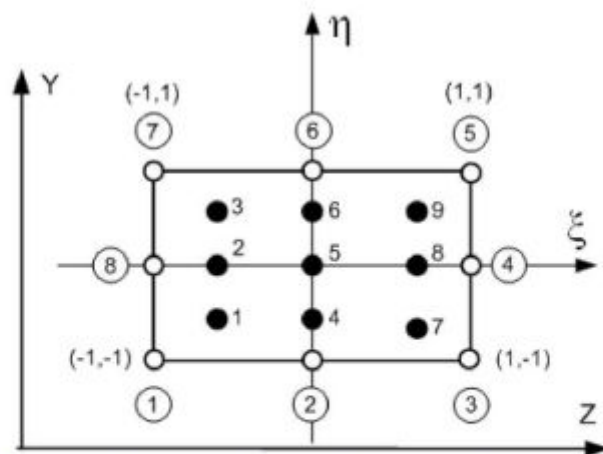


Рис. 23.15 Прямоугольный квадратичный элемент с 8-ю узлами и 9-ю точками интегрирования

Функции формы этого элемента показаны на рис. 23.16.

$$\xi := \begin{pmatrix} -0.7746 \\ 0 \\ 0.7746 \end{pmatrix} \quad \eta := \xi \quad w := \begin{pmatrix} 0.5556 \\ 0.88889 \\ 0.5556 \end{pmatrix} \quad N(\xi, \eta) := \begin{bmatrix} -(1 + \xi + \eta) \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot 0.25 \\ (1 - \xi) \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot 0.5 \\ (-1 + \xi - \eta) \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot 0.25 \\ (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \cdot (1 + \eta) \cdot 0.5 \\ (-1 + \xi + \eta) \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot 0.25 \\ (1 - \xi) \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot 0.5 \\ (-1 - \xi + \eta) \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot 0.25 \\ (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot (1 - \eta) \cdot 0.5 \end{bmatrix}$$

Рис. 23.16 Функции формы $N(\xi, \eta)$ прямоугольного квадратичного элемента, естественные координаты точек интегрирования ξ и η и весовые коэффициенты W для них

Матрицу Якоби для точек интегрирования с координатами ξ и η определяем путем умножения соответствующих производных функций формы на координаты узлов элемента Z и Y

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{21} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial z / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial z / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial [N] / \partial \xi \\ \partial [N] / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Z\} \\ \{Y\} \end{Bmatrix},$$

$2 \times 8 \quad \quad 8 \times 2$

С помощью матрицы Якоби вычисляем производные функций формы в декартовых координатах.

$$\begin{Bmatrix} \partial [N] / \partial z \\ \partial [N] / \partial y \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial [N] / \partial \xi \\ \partial [N] / \partial \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det [J]} [J]^T \begin{Bmatrix} \partial [N] / \partial \xi \\ \partial [N] / \partial \eta \end{Bmatrix}.$$

В выражении матрицы жесткости (23.3) $[K] = \int_V [B]^T [C][B] dV$ матрица

производных функций формы $[B] = D^T [N]$ для восьмиузлового элемента имеет размерность 2×16 , так как в каждом узле два перемещения (по осям Z и Y). Функции формы зависят только от координат узлов, поэтому матрицу производных функций формы надо дополнить нулями до нужной размерности с учетом того, что перемещения по оси Z примем нечетными, по оси Y четными.

23.9. Разбивка тела на конечные элементы

Точность расчетов методом конечных элементов зависит от вида выбранного типа конечного элемента.

У линейных элементов, например, у плоского треугольного элемента, функция формы линейная. Графически она представляется плоскостью. Линейная деформация

$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [N] \{\Delta\}$ постоянная по площади элемента, также как и напряжения $\sigma = [C] \{\varepsilon\}$. На рис. 23.17 (слева) сплошной линией показан график функции напряжений, пунктиром показана аппроксимация этой функции. При использовании треугольного линейного элемента ступенчатая аппроксимация требует разбиения тела на большое количество элементов для достижения удовлетворительной точности расчетов. Расчетная программа для треугольных элементов наиболее простая.

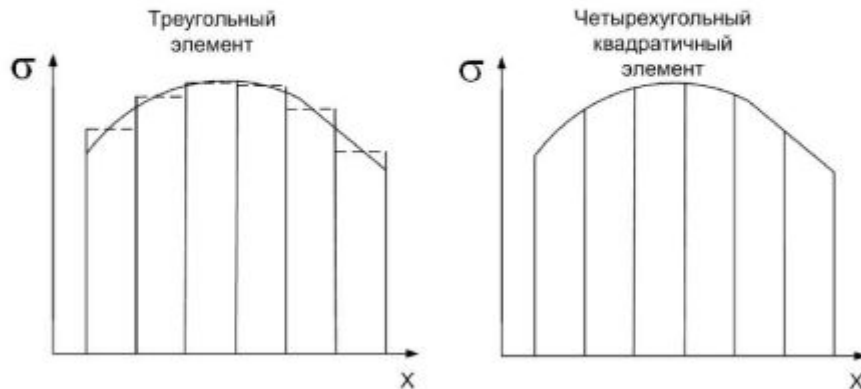


Рис. 23.17 Аппроксимация напряжений в теле различными типами элементов

У плоского четырехугольного линейного элемента функция формы также линейная вдоль линий $\xi = Const$ или $\eta = Const$. Линейная деформация $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [N] \{\Delta\}$ правильно определяется лишь в центре элемента.

Для четырехугольных квадратичных элементов (с восемью узлами) деформации и напряжения изменяются по площади элемента по квадратичной параболе. Пунктирная линия на рис. 23.17 (справа) практически совпадает со сплошной линией функции напряжений. Такие элементы обеспечивают высокую точность расчетов. Количество элементов, на которые разбивается плоское тело минимальное. Так в расчете трубы под давлением (пример 7 в разделе [Метод конечных элементов](#) электронной книги) для расчета использован всего один элемент.

Сделаем общий вывод.

Для учебных целей, чтобы понять сущность метода конечных элементов, в плоской задаче лучше использовать линейные треугольные элементы. Программа расчета в этом случае проста и понятна.

Для практических расчетов предпочтительнее использовать квадратичные треугольные или четырехугольные элементы. При этом уменьшается число элементов, упрощается ввод исходных данных, достигается высокая точность расчетов, но усложняется программа расчета, увеличивается время расчета.

Кубические элементы не имеют преимуществ перед квадратичными и в большинстве вычислительных комплексов не используются.

Глава 24. Динамика и устойчивость стержневых систем

В главе 14 рассматривались колебания систем с одной степенью свободы. В этой главе рассмотрим колебания систем с большим числом степеней свободы. Такой расчет потребует применения метода конечных элементов.

24.1. Уравнение движения системы с n степенями свободы

Уравнение движения системы можно получить с помощью известного в теоретической механике уравнения Лагранжа второго рода.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial \Delta_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_i} = F(t) \quad (24.1).$$

В этом уравнении

Π — потенциальная энергия системы тел,

T — кинетическая энергия,

Φ — функция Рэллея, учитывающая рассеивание энергии.

В матричном виде Π , T , Φ можно записать следующим образом

$$\Pi = \frac{1}{2} [\Delta] [K] \{\Delta\}, \quad T = \frac{1}{2} [\Delta'] [M] \{\Delta'\}, \quad \Phi = \frac{1}{2} [\Delta'] [H] \{\Delta'\} \quad (24.2),$$

где $\Delta' = \partial \Delta / \partial t$ — скорость узлового перемещения Δ , $[K]$ — матрица жесткости системы, $[M]$ — матрица масс, $[H]$ — матрица диссипации (рассеивания энергии).

Подставляя выражения (24.2) в уравнение Лагранжа (24.1), после упрощения получаем

$$[M] \{\Delta''\} + [H] \{\Delta'\} + [K] \{\Delta\} = \{F(t)\} \quad (24.3).$$

Уравнение (24.1) представляет собой уравнение движения системы с n степенями свободы.

Напомним уравнение движения системы с одной степенью свободы (14.1)

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + 2hm \frac{du}{dt} + ku = F(t),$$

где u — перемещение точки, m — масса тела, h — коэффициент затухания колебаний (рассеивания энергии), k — жесткость системы.

Система имеет одну степень свободы, если масса системы сосредоточена в одной точке и перемещение происходит по одному направлению.

Оба выражения (24.3) и (14.1) по смыслу и по виду аналогичны. Фактически параметры m , h , k заменены матрицами $[M]$, $[H]$, $[K]$. Перемещение точки u , в которой сосредоточена масса m , заменено вектором узловых перемещений $\{\Delta\}$ системы, в узлах которой сосредоточены массы (компоненты матрицы $[M]$).

В обоих выражениях первое слагаемое учитывает силы инерции, второе слагаемое — силы сопротивления движению (затухание колебаний), третье слагаемое — упругие силы, правая часть обоих выражений — вынуждающие силы, если они есть.

Матрица жесткости системы $[K]$ определялась в разделе 22.2.1. В данной главе предстоит определить матрицу масс $[M]$ и матрицу диссипации $[H]$.

24.2. Определение матрицы масс $[M]$ и матрицы диссипации $[H]$

Обратимся к выражению кинетической энергии (24.2) $T = \frac{1}{2} [\Delta'] [M] \{\Delta'\}$.

Подсчитаем кинетическую энергию стандартного стержневого элемента (рис. 24.1)

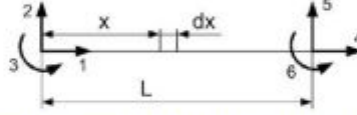


Рис. 24.1 К расчету кинетической энергии плоского стержневого элемента

Возьмем плоский стержневой элемент массой m_0 длиной l . Вырежем часть его длиной dx и подсчитаем ее кинетическую энергию

$$dT = \sum_1^3 dm \frac{v^2}{2} = dm \frac{v_x^2}{2} + dm \frac{v_y^2}{2} + dJ_m \frac{\omega^2}{2}.$$

Угловой скоростью вращения элемента ω в расчетах обычно пренебрегают. Тогда в матричном виде предыдущее выражение приобретает вид

$$dT = \frac{dm}{2} [v_x \ v_y] \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \frac{dm}{2} [u'_x \ u'_y] \begin{Bmatrix} u'_x \\ u'_y \end{Bmatrix} \quad (24.4).$$

Для последующих расчетов примем важную гипотезу

ГИПОТЕЗА

Распределение скоростей движения пропорционально распределению статических перемещений системы

Эта гипотеза несправедлива при больших частотах колебаний. В некоторых случаях, как будет указано далее, это вызывает ошибку в расчетах.

Выразим перемещения произвольного сечения u через узловые перемещения Δ (22.1)

$$\{u\} = [N] \{\Delta\}.$$

Раскроем это выражение для плоского стержневого элемента

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{x1} & 0 & 0 & N_{x4} & 0 & 0 \\ 0 & N_{y2} & N_{y3} & 0 & N_{y5} & N_{y6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix}.$$

Согласно принятой гипотезе запишем связь скорости произвольной точки элемента u' со скоростями узловых точек Δ'

$$\{u'\} = [N] \{\Delta'\} \quad (24.5).$$

Подставим выражение (24.5) в выражение (24.4). При этом учтем, что $[u'] = [\Delta'] [N]^T$ согласно правилу транспонирования произведения матриц, записанному в разделе 23.4.

$$dT = \frac{dm}{2} [u'] \{u'\} = \frac{dm}{2} [\Delta'] [N]^T [N] \{\Delta'\}.$$

Проинтегрируем это выражение с учетом того, что $dm = \frac{m_0}{l} dx$

$$T = \frac{1}{2} \int \frac{m_0}{l} [\Delta'] [N]^T [N] \{\Delta'\} dx$$

Вынесем из-под интеграла постоянные множители (независящие от x)

$$T = \frac{1}{2} [\Delta'] \left(\int_l \frac{m_0}{l} [N]^T [N] dx \right) \{\Delta'\} \quad (24.6)$$

Сравнивая выражения (24.6) и (24.2), замечаем, что взятая в скобки часть выражения (24.6) есть матрица масс $[M]$

$$[M] = \int_l \frac{m_0}{l} [N]^T [N] dx \quad (24.7)$$

Матрица масс плоского стержневого элемента показана на рис. 24.2. Этот рисунок фрагмент программы расчета плоской стержневой системы (пример 3 из раздела **Метод конечных элементов** электронной книги), поэтому там показаны три стандартные матрицы элемента: матрица направляющих косинусов, матрица жесткости и матрица масс. В программе длина элемента k обозначена LL_k , масса элемента k $m_k = \rho \cdot A_k \cdot LL_k$, где ρ — плотность материала, A_k — площадь поперечного сечения элемента k .

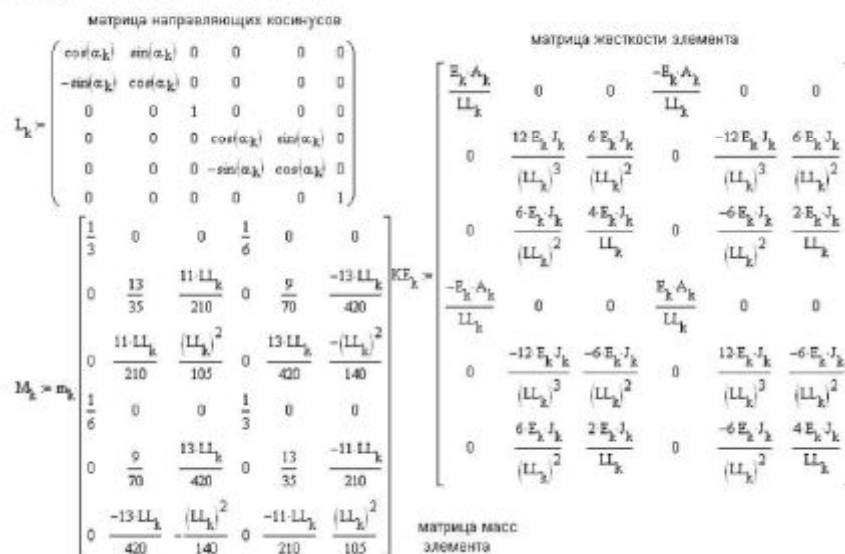


Рис. 24.2 Стандартные матрицы плоского стержневого элемента

Использование готовых стандартных матриц вместо вычисления интегралов для каждого элемента позволяет существенно сократить время расчета.

Матрица масс стержневой системы подсчитывается также как и матрица жесткости системы путем суммирования соответствующих коэффициентов матриц масс элементов с помощью матрицы индексов (раздел 22.2.4 рис. 22.11).

Учет сосредоточенных масс

При расчете матрицы масс стержневой системы необходимо учесть распределенные массы элементов и массы, сосредоточенные в узлах системы. Выше приведен учет распределенных масс элементов. Фактически распределенные массы заменяются сосредоточенными массами, приведенными к узлам элемента.

Если стержневая система имеет массы, сосредоточенные в узлах, то такие массы просто складываются с приведенными к этому узлу распределенными массами.

$$m_{i,j} = m_{i,j} \text{ распределенная} + m_{i,j} \text{ сосредоточенная}$$

Матрица диссипации

Матрица диссипации $[H]$ аналог коэффициента затухания колебаний h . Коэффициенты матрицы диссипации (демпфирования), как и коэффициент затухания должны определяться опытным путем. Сопоставим уравнения движения систем с одной и со многими степенями свободы

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + 2hm \frac{du}{dt} + ku = F(t)$$

$$[M]\{\Delta''\} + [H]\{\Delta'\} + [K]\{\Delta\} = \{F(t)\}.$$

Матрица демпфирования соответствует произведению $2hm$ в уравнении движения системы с одной степенью свободы. Ввиду отсутствия других возможностей рекомендуется опытным путем найти коэффициент затухания колебаний h , используя логарифмический декремент $\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}}$, где A_i и A_{i+1} — амплитуды двух соседних периодов затухающих колебаний. Тогда $\frac{h}{\omega} = \frac{\delta}{2\pi}$. Матрицу демпфирования можно определить как $[H] = 2 \left(\frac{h}{\omega} \right) \omega [M]$, где ω — первая (низшая) собственная частота стержневой системы.

Если нет возможности опытного определения h , то отношение $\frac{h}{\omega}$ берется из справочников.

Другой способ задания матрицы диссипации. Предполагается, что матрица диссипации пропорциональна матрице масс и матрице жесткости

$$[H] = \alpha[K] + \beta[M],$$

где α и β — опытные коэффициенты. При $\alpha \rightarrow 0$ и $\beta \neq 0$ затухание более интенсивно на высоких частотах. При $\alpha \neq 0$ и $\beta \rightarrow 0$ затухание более интенсивно на низких частотах.

При расчетах затухающих колебаний в вычислительных комплексах, например, в ANSYS предлагается задаваться этими коэффициентами.

24.3. Определение собственных частот системы с n степенями свободы

Отметим частные случаи матричного уравнения движения стержневой системы (24.3).

- $\{F(t)\} = 0$ — свободные затухающие колебания;
- $\{F(t)\} = 0$ и $[H] = 0$ — свободные незатухающие колебания.

Для определения собственных частот колебаний системы рассмотрим решение уравнения (24.3) для свободных незатухающих колебаний

$$[M]\{\Delta''\} + [K]\{\Delta\} = 0 \quad (24.8).$$

Решение уравнения движения системы с одной степенью свободы показывает, что колебательное движение происходит по синусоиде $u = A \cdot \sin(\omega t + \varepsilon)$.

Примем условие, что и все узловые перемещения системы с n степенями свободы происходят по синусоиде

$$\{\Delta\} = \{A\} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (24.9).$$

Выражение (24.9) можно использовать лишь, приняв следующую гипотезу,

ГИПОТЕЗА

Частота и фаза колебаний по всем направлениям одинаковы.

Эта гипотеза справедлива, если жесткости всех элементов системы отличаются не слишком сильно. Представьте, что вы качаете дерево, толкая его ствол. Каждая ветка дерева будет колебаться со своей частотой, не впадая с колебаниями ствола, и принятая гипотеза в этом случае несправедлива.

Подставим выражение (24.9) в уравнение движения (24.8). Для этого вычислим вторую производную от перемещений

$$\{\Delta''\} = -\omega^2 \{A\} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (24.10).$$

Выражение (24.10) справедливо при выполнении еще одной гипотезы

ГИПОТЕЗА

Распределение скоростей и ускорений при колебательном движении системы пропорционально распределению перемещений при статическом приложении нагрузки.

Эта гипотеза становится несправедливой при больших частотах колебаний, когда велико влияние сил инерции.

Подставим выражения (24.9) и (24.10) в уравнение (24.8)

$$-[M]\omega^2\{A\}\text{Sin}(\omega t + \varepsilon) + [K]\{A\}\text{Sin}(\omega t + \varepsilon) = 0.$$

Сократив синус в последнем выражении, получаем

$$([K] - \omega^2[M])\{A\} = 0 \quad (24.11).$$

Уравнение (24.11) в математике называется нестандартной или обобщенной задачей на собственные числа.

Напомним, что стандартная задача на собственные числа имеет вид

$$([B] - \lambda[E])\{A\} = 0.$$

Здесь $[B]$ — симметричная положительно определенная матрица, $[E]$ — единичная матрица (аналог умножения матрицы на единицу), λ — собственное число, $\{A\}$ — собственный вектор, соответствующий собственному числу λ .

Примером решения стандартной задачи является определение главных напряжений

$$([T_\sigma] - \sigma_{\text{глав}}[E])\{L\} = 0, \text{ которое описано в разделе 20.2.5.}$$

Стандартная задача решается методом вращений Якоби.

Чтобы решить нестандартную задачу тем же методом Якоби, надо, чтобы на месте матрицы масс находилась единичная матрица. Такое преобразование производится с использованием разложения матрицы $[M]$, на верхнетреугольную и нижнетреугольную матрицы.

Программы для решения стандартной и нестандартной задач на собственные числа имеются в математических приложениях ко всем основным алгоритмическим языкам и пакетам прикладных программ. В Mathcad стандартная задача решается встроенными функциями *eigenvals* и *eigenvecs*, нестандартная — встроенными функциями *genvals* и *genvecs*.

На выходе программа *genvals* возвращает вектор собственных чисел $\lambda = \{\omega^2\}$, которыми являются квадраты собственных частот ω . Программа *genvecs* возвращает спектр собственных векторов $[A] = \left[\begin{array}{c} \{A_1\} \\ \{A_2\} \\ \dots \\ \{A_n\} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \{A_1\} \\ \{om \ \omega_1\} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \{A_2\} \\ \{om \ \omega_2\} \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{c} \{A_n\} \\ \{om \ \omega_n\} \end{array} \right]$, где каждый столбец представляет собой собственный вектор от одного из собственных чисел.

ВНИМАНИЕ

В силу принятых ранее гипотез, вследствие набегающей ошибки, лишь первые 4–5 компонент вектора собственных частот действительно являются собственными частотами и совпадают с экспериментальными значениями. Остальные компоненты являются собственными числами, но не являются собственными частотами.

Рассмотрим пример испытаний пластмассовой линейки на вибростенде (рис. 24.3).

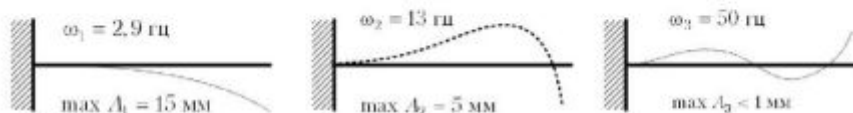


Рис. 24.3 Формы колебаний консольной балки на трех первых частотах

Собственный вектор $\{A\}$ представляет собой форму колебаний, то есть вид изогнутой оси балки в процессе колебаний. Экспериментальная максимальная амплитуда колебаний A_{max} резко уменьшается с ростом номера собственной частоты

ω. В то же время определить величину амплитуды колебаний расчетным путем невозможно, так как в системе уравнений (24.8) необходимо еще одно уравнение. Приходится задаваться $A_i = 1$. В результате находим лишь форму колебания, но не величину амплитуды колебаний. Для удобства сопоставления форм колебаний найденные амплитуды нормируются по длине многомерного вектора $\bar{A}_i = \frac{A_i}{\sqrt{\sum A_i^2}}$.

На выходе из программы расчета максимальные амплитуды колебаний для всех собственных векторов примерно одинаковы.

24.4. Вынужденные колебания системы с n степенями свободы

Упругая система подвержена действию силы, изменяющейся во времени. Надо определить перемещения системы во времени, вызванные действием заданной силы. Для этого надо решить уравнение движения системы (24.3)

$$[M]\{\Delta''\} + [H]\{\Delta'\} + [K]\{\Delta\} = \{F(t)\}.$$

Решать это уравнение целесообразно методом прямого интегрирования. При этом уравнение движения решается с помощью пошаговой численной процедуры, использующей метод конечных разностей. Никаких предварительных преобразований уравнения движения не производится.

Заданный промежуток времени, в котором надо определить узловые перемещения $\Delta(t)$, разбивается на отдельные временные точки $t_i = \Delta t \cdot i$, где Δt — временной шаг интегрирования. Скорость $V_i = \Delta'_i$ и ускорение $a_i = \Delta''_i$ в момент времени t_i можно определить по конечно-разностным формулам

$$\{\Delta'_i\} = \frac{1}{2\Delta t} (\{\Delta_{i+1}\} - \{\Delta_{i-1}\}) \quad \{\Delta''_i\} = \frac{1}{\Delta t^2} (\{\Delta_{i-1}\} - 2\{\Delta_i\} + \{\Delta_{i+1}\}) \quad (24.12).$$

Подставив выражения (24.12) в уравнение движения (24.3), можно найти узловые перемещения $\{\Delta_i\}$ в момент времени t_i .

На каждом шаге интегрирования, по существу, решается статическая задача. Равновесие с учетом сил демпфирования и инерции рассматривается в выбранных точках временного интервала.

Методы прямого интегрирования различаются способами интерполяции или экстраполяции на каждом малом временном интервале. В рассмотренных в электронной книге примерах использован метод Ньюмарка, называемый также методом обобщенного ускорения.

Этот метод использует следующие конечно-разностные соотношения:

$$\Delta'(t + \Delta t) = \Delta'(t) + [(1 - d_1) \cdot \Delta''(t) + d_1 \cdot \Delta''(t + \Delta t)] \cdot \Delta t ;$$

$$\Delta(t + \Delta t) = \Delta(t) + \Delta'(t) \cdot \Delta t + [(1/2 - d_2) \cdot \Delta''(t) + d_2 \cdot \Delta''(t + \Delta t)] \cdot \Delta t^2 .$$

Здесь d_1 и d_2 — параметры интегрирования. При $d_1 = 0,5$ и $d_2 = 0,25$ приведенные соотношения будут отвечать предположению о постоянном характере ускорения на временном интервале $(t; t + \Delta t)$. При $d_1 = 0,5$ и $d_2 = 1/6$ — о линейном изменении ускорения, что аналогично методу Вилсона. При $d_2 = 0$ получим центрально-разностную схему вычислений, соответствующую двойной пульсации ускорения в начале и в конце каждого временного интервала. Таким образом, d_2 определяет закон изменения ускорения в пределах шага счета.

Параметр d_1 характеризует схемное (численное) демпфирование: при $0 \leq d_1 < 0,5$ — отрицательное, при $d_1 > 0,5$ — положительное, при $d_1 = 0$ схемное затухание отсутствует.

При решении конечномерных задач большой размерности рекомендуется принимать $d_1 \geq 0,5$ и $d_2 \geq 0,25$.

Уравнение движения (24.3) преобразуется к виду

$$[\bar{K}] \cdot \{\Delta(t)\} = \{Q\} \quad (24.13);$$

Здесь $[\bar{K}]$ и $\{Q\}$ — так называемые эффективные матрица жесткости и вектор нагрузок, содержащие матрицы $[M], [H], [K]$ и шаг интегрирования Δt . Выражения для определения $[\bar{K}]$ и $\{Q\}$ приведены в Mathcad-программах примеров, приведенных в электронной книге. Из уравнения (24.13) определяется вектор узловых перемещений $\{\Delta(t)\}$ в момент времени t .

Приведенный алгоритм реализует неявную двухслойную схему интегрирования.

Для достижения приемлемой точности расчета шаг интегрирования Δt должен быть меньше наименьшего периода собственных колебаний, существенно влияющего на поведение системы. Однако при малом шаге интегрирования растет погрешность расчетов. Анализируя результаты расчета и варьируя параметры интегрирования, можно добиться соответствия результатов здравому смыслу или результатам эксперимента.

Расчетная программа, реализующая метод Ньюмарка, приведена в примерах 1 – 3 раздела **Метод конечных элементов** электронной книги.

24.5 Устойчивость стержневых систем

В главе 12 рассматривалась устойчивость одного сжатого стержня, в котором в момент потери устойчивости к деформации сжатия добавляется деформация изгиба. В стержневых системах также возможна потеря устойчивости, которая может быть двух типов.

- Теряет устойчивость вся система в целом,
- Теряет устойчивость отдельный элемент системы.

Рассмотрим потерю устойчивости в упругой постановке задачи.

Устойчивость — это способность системы сохранять упругое равновесие под действием приложенных нагрузок.

Для определения критической нагрузки на стержневую систему используется энергетический метод расчета, описанный в разделе 12.5.

Для определения критических нагрузок на стержневую систему воспользуемся выражением (12.13), вытекающим из начала возможных перемещений.

$$W^{\text{внеш}} = W^{\text{сжат}} + W^{\text{изг}} = \Pi$$

Потенциальную энергию определим по выражению (21.18)

$$\Pi = \frac{1}{2} [\Delta] [K] \{\Delta\},$$

где $[K]$ — матрица жесткости стержневой системы, $\{\Delta\}$ — вектор узловых перемещений системы в глобальных осях координат.

Работа внешних сил с учетом выражений (12.12) и (12.14)

$$W^{\text{внеш}} = W^{\text{сжат}} + W^{\text{изг}} = \frac{1}{2} \int_l EA (u'_x)^2 dx + \frac{F_{\text{кр}}}{2} \int_l (u'_y)^2 dx. \quad (24.14)$$

Выразим перемещение произвольного сечения $\{u\}$ через узловые перемещения $\{\Delta\}$.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \end{Bmatrix} \{\Delta\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} \quad (24.15).$$

Рассматриваемая стержневая система нагружена реальными внешними силами $\{F\}$. Нам же надо определить при каких нагрузках система теряет устойчивость. Причиной потери устойчивости является продольное усилие, превышающее критическое значение. Введем обозначение $F_{\text{кр}} = S \cdot \lambda$, где $S = F_1 = -F_4$ — продольное усилие (в плоском элементе-стержне), $F_1 = -F_4$ — узловые силы,

соответствующие продольному усилию, в элементе-стержне, λ — коэффициент запаса устойчивости.

ПРИМЕЧАНИЕ

Коэффициент запаса устойчивости λ показывает во сколько раз надо увеличить нагрузку, чтобы система потеряла устойчивость.

Подставив выражение (24.15) в (24.14), находим

$$W^{\text{норм}} = \frac{\lambda}{2} [\Delta] [K_{\text{геом}}] \{\Delta\}, \text{ где}$$

$$[K_{\text{геом}}] = \int_l \frac{EA}{\lambda} \{N'_x\} [N'_x] dx + S \cdot \int_l \{N'_y\} [N'_y] dx \quad (24.16).$$

геометрическая матрица жесткости стандартного плоского стержневого элемента представлена на рис. 24.4. На этом рисунке k — номер элемента, LL_k — длина элемента k , S_k — продольное усилие в элементе k .

$$K_{\text{геом}k} = \begin{pmatrix} \frac{E_k A_k}{\lambda LL_k} & 0 & 0 & \frac{E_k A_k}{\lambda LL_k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6 S_k}{5 LL_k} & \frac{-S_k}{10} & 0 & \frac{-6 S_k}{5 LL_k} & \frac{-S_k}{10} \\ 0 & \frac{-S_k}{10} & \frac{2 S_k LL_k}{15} & 0 & \frac{S_k}{10} & \frac{-S_k LL_k}{30} \\ \frac{E_k A_k}{\lambda LL_k} & 0 & 0 & \frac{E_k A_k}{\lambda LL_k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6 S_k}{5 LL_k} & \frac{S_k}{10} & 0 & \frac{6 S_k}{5 LL_k} & \frac{S_k}{10} \\ 0 & \frac{-S_k}{10} & \frac{-S_k LL_k}{30} & 0 & \frac{S_k}{10} & \frac{2 S_k LL_k}{15} \end{pmatrix}$$

Рис. 24.4. Геометрическая матрица жесткости плоского стержневого элемента

С учетом $W^{\text{норм}} = \Pi$

$$\lambda [\Delta] [K_{\text{геом}}] \{\Delta\} = [\Delta] [K] \{\Delta\}$$

$$\text{или } [\Delta] ([K] - \lambda [K_{\text{геом}}]) \{\Delta\} = 0.$$

Последнее выражение справедливо, если равен нулю определитель выражения в скобках

$$\text{Det} ([K] - \lambda [K_{\text{геом}}]) = 0 \quad (24.17).$$

Для нахождения коэффициента запаса устойчивости λ необходимо решить нестандартную задачу на собственные числа, аналогично решению, рассмотренному в разделе 24.2. В Mathcad функция **genvals** выводит вектор собственных чисел $\{\lambda\}$ и функция **genvecs** выводит спектр собственных векторов $[A]$. Поскольку потеря устойчивости происходит при минимальном значении критической силы, из вектора собственных чисел берется одно минимальное значение коэффициента запаса устойчивости λ . Из спектра собственных векторов берется один вектор, соответствующей форме потери устойчивости при минимальном значении λ .

Следует отметить, что процесс расчета λ является итерационным. Поскольку λ входит в геометрическую матрицу жесткости, то в начале расчета надо задаваться величиной $\lambda = 1$, а затем уточнить λ в ходе двух-трех итераций.

Порядок расчета стержневой системы на устойчивость

1. Рассчитать систему на статическую прочность. Решая основное уравнение МКЭ $[K] \{\Delta\} = \{F\}$, найти усилия в стержнях-элементах и выбрать из них продольные усилия в стержнях.
2. Рассчитать геометрическую матрицу жесткости $[K_{\text{геом}}]$.
3. Определить минимальный коэффициент запаса устойчивости λ и форму потери устойчивости, решая нестандартную задачу на собственные числа.

Глава 25. Упругопластическая задача

В упругой задаче напряжения прямо пропорциональны деформации. В упругопластической задаче связь напряжений с деформациями нелинейная. Расчет ведется с позиции теории пластичности.

В теории пластичности уравнения геометрические, равновесия, неразрывности те же, что в теории упругости. Физические уравнения — другие. Они будут получены в разделе 25.3. Кроме того, надо составить условие пластичности материала при сложном напряженном состоянии.

25.1. Условие пластичности

При растяжении критерием появления пластических деформаций является достижение предела текучести в самой нагруженной точке тела $\sigma_{\max} = \sigma_T$. При сложном напряженном состоянии критерии пластичности должны учитывать все шесть компонент напряжений в точке тела. Такие критерии предлагаются гипотезами пластичности, рассмотренными в разделе 9.6.

В расчетах конструкций используются третья и четвертая гипотезы прочности, согласно которым условие пластичности выглядит следующим образом:

$$\sigma_{\text{экв3}} = \sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_T$$

$$\sigma_{\text{экв4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sigma_T \quad (25.1).$$

В иностранных учебниках третью гипотезу называют гипотезой Треска, а четвертую — гипотезой Мизеса. Современные вычислительные комплексы используют гипотезу Мизеса, как более точную.

Выражение (25.1) представляет собой условие начала пластичности. При увеличении нагрузки пластическая деформация возникает в точке, где $\max \sigma_{\text{экв}} = \sigma_T$. Что происходит в теле при дальнейшем увеличении нагрузки? Как распространяется в теле пластическая деформация?

В теории пластичности принято, что с ростом пластической деформации поверхность пластичности (раздел 9.6) расширяется, то есть предел текучести растет с ростом деформации (так учитывается упрочнение материала). Тогда для учета упрочнения материала надо в условии начала пластичности (25.1) предел текучести σ_T заменить функцией от накопленной пластической деформации $\Phi(\varepsilon^p)$. В качестве такой функции используется уравнение единой обобщенной диаграммы деформирования материала $\Phi(\varepsilon^p)$, вид которой не зависит от напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции. Тогда условие пластичности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв3}} = \sigma_I - \sigma_{III} = \Phi(\varepsilon^p)$$

$$\sigma_{\text{экв4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \Phi(\varepsilon^p) \quad (25.2).$$

При увеличении нагрузки пластическая деформация распространяется на части тела, в которых эквивалентное напряжение достигло предела текучести, а величина пластической деформации соответствует точке, занимаемой $\sigma_{\text{экв}}$ на диаграмме деформирования материала.

25.2. Законы теории пластичности

Рассмотрим основные положения теории пластичности, позволяющие записать связь напряжений и деформаций.

Закон изменения объема

При упругой деформации (раздел 20.3.2) относительное изменение объема

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

При упругопластической деформации материал считается несжимаемым. Относительное изменение объема равно нулю

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0.$$

Соответственно равна нулю средняя пластическая деформация $\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = 0$. Среднее напряжение не равно нулю, следовательно, $1-2\mu = 0$, тогда коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$.

Закон изменения формы

Этот закон связывает девиаторы напряжений и деформаций, отвечающие за изменение формы. При упругой деформации (20.37) $[D_\varepsilon] = \frac{1}{2G}[D_\sigma]$.

При упругопластической деформации $[D_\sigma] = \lambda[D_\varepsilon]$,

где λ — функция пластичности, которую определим в следующих разделах.

Девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций, но коэффициент пропорциональности λ — величина переменная.

Раскроем компоненты девиаторов напряжений и деформаций.

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}} = \lambda(\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}) = \lambda\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}\right).$$

После приведения подобных слагаемых получаем

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}} = \frac{2}{3}\lambda\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z}{2}\right). \text{ Аналогично для } \varepsilon_y \text{ и } \varepsilon_z.$$

Для сдвиговых деформаций

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \lambda\tau_{xy} \text{ или } \gamma_{xy} = 2\lambda\tau_{xy}. \text{ Аналогично для } \gamma_{yz} \text{ и } \gamma_{zx}.$$

Закон существования единой обобщенной диаграммы деформирования

Для любого материала можно принять единую обобщенную диаграмму деформирования, справедливую при любых видах напряженно-деформированного состояния. В качестве такой диаграммы принимается диаграмма истинных напряжений при растяжении стандартных образцов.

Для сопоставления диаграммы растяжения с напряжениями и деформациями, возникающими в реальной конструкции при сложном напряженном состоянии, по осям диаграммы откладываются комплексные величины, учитывающие все компоненты напряжений и деформаций, действующих в точке тела. В качестве таких комплексных величин принимаются интенсивность напряжений $\sigma_{\text{инт}}$ (20.34) и интенсивность деформаций $\varepsilon_{\text{инт}}$ (20.35). Эти величины, являющиеся функциями вторых инвариантов девиаторов напряжений и деформаций, в теории пластичности принято использовать в качестве критериев появления пластических деформаций в точке тела.

При растяжении $\sigma_I \neq 0$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$, $\varepsilon_{II} = \varepsilon_{III} = -\mu\varepsilon_I$, тогда

$$\sigma_{\text{инт}} = \sigma_{\text{экв4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sigma_I$$

$$\varepsilon_{\text{инт}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})^2 + (\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III})^2 + (\varepsilon_{III} - \varepsilon_I)^2} = \frac{2(1+\mu)}{3}\varepsilon_I.$$

Если $\mu = 0,3$, то $\varepsilon_{\text{инт}} \approx 0,9 \cdot \varepsilon_I$. Если $\mu = 0,5$ (материал несжимаемый), то $\varepsilon_{\text{инт}} = \varepsilon_I$.

Единая обобщенная диаграмма деформирования представляет собой диаграмму истинных напряжений при растяжении, по осям которой откладываются интенсивность напряжений $\sigma_{\text{инт}} = \sigma_{\text{ист}}$ и интенсивность деформаций $\varepsilon_{\text{инт}} = \varepsilon_{\text{ист}}$.

Уравнение этой диаграммы используется в расчетах в качестве правой части условия пластичности (25.2). Ввиду малости упругих деформаций по сравнению с пластическими чаще всего принимают, что интенсивность пластических деформаций

$\varepsilon_{\text{инт}}^p$ равна интенсивности полных деформаций $\varepsilon_{\text{инт}}$. Тогда условие пластичности принимает вид

$$\sigma_{\text{экв3}} = \sigma_I - \sigma_{III} = \Phi(\varepsilon_{\text{инт}})$$

$$\sigma_{\text{инт}} = \sigma_{\text{экв4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \Phi(\varepsilon_{\text{инт}}) \quad (25.3),$$

где $\Phi(\varepsilon_{\text{инт}})$ — уравнение диаграммы деформирования материала.

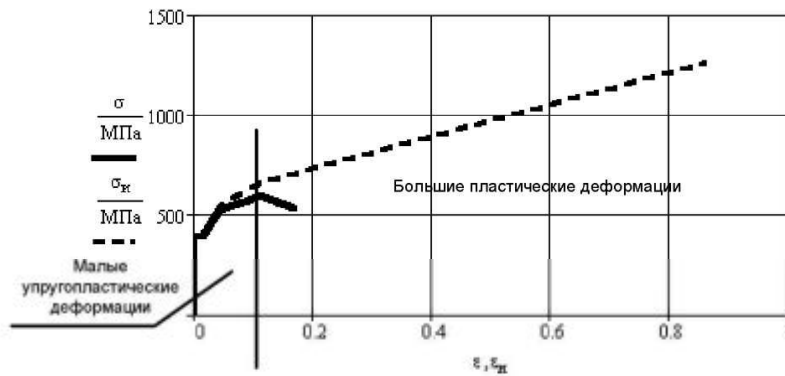


Рис. 25.1. Сопоставление диаграмм условных и истинных напряжений

Как было замечено в разделе 5.4 диаграмма истинных напряжений, которая используется в качестве единой обобщенной диаграммы деформирования, в пять раз длиннее и вдвое выше диаграммы условных напряжений (рис. 25.1). В то же время до предела прочности диаграммы условных и истинных напряжений практически совпадают.

Для проведения расчетов необходимо иметь уравнение диаграммы деформирования $\Phi(\varepsilon^p)$. Для этого надо провести испытание материала на растяжение. Затем построить диаграмму истинных напряжений и записать ее уравнение. В большинстве случаев делать это необязательно. Приблизительно можно построить такую диаграмму, используя только справочные данные.

В реальных конструкциях пластические деформации не превышают трех процентов. Как правило, они возникают в местах концентрации напряжений. В остальной части конструкции деформации упругие, которые препятствуют развитию пластической деформации. При наличии на диаграмме материала площадки текучести максимальные деформации не превысят длину площадки текучести, следовательно, для расчетов можно использовать диаграмму Прандтля с бесконечно длинной площадкой текучести. При отсутствии площадки текучести можно использовать схему диаграммы с линейным упрочнением. Использование диаграммы со степенным упрочнением не вносит существенных изменений в распределение напряжений в конструкции, но усложняет проведение расчетов.

Учет больших пластических деформаций необходим только при расчете технологических процессов обработки металлов давлением, где деформация может достигать 60%.

Для построения диаграммы деформирования по справочным данным достаточно знать предел текучести σ_T и предел прочности σ_B материала и соответствующую им деформацию. Приблизительно можно принять деформацию $\varepsilon_T = 0,002$ и $\varepsilon_B \approx 0,1$. Примеры использования в расчетах диаграммы деформирования, построенной по двум точкам, приведены в электронной книге в разделе [Для главы 8](#).

Различные виды аппроксимации диаграммы деформирования: диаграмма Прандтля, диаграммы с линейным и степенным упрочнением были описаны в разделе 8.1.

Вид единой обобщенной диаграммы деформирования показан на рис. 25.2. Для характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС) тела в условиях пластических деформаций введем понятия о секущем модуле E_c и касательном

модуле E_k .

$$E_c = \sigma_{\text{инт}} / \varepsilon_{\text{инт}} \quad \text{и} \quad E_k = d\sigma_{\text{инт}} / d\varepsilon_{\text{инт}} \quad (25.4).$$

Если модуль упругости (модуль Юнга) E — величина постоянная для выбранного материала, то секущий и касательный модули зависят от величины пластической деформации.

ВНИМАНИЕ

При упругой деформации на диаграмме растяжения $\sigma = E \cdot \varepsilon$, на единой обобщенной диаграмме деформирования другой угол наклона $\sigma_{\text{инт}} = 3G \cdot \varepsilon_{\text{инт}}$.

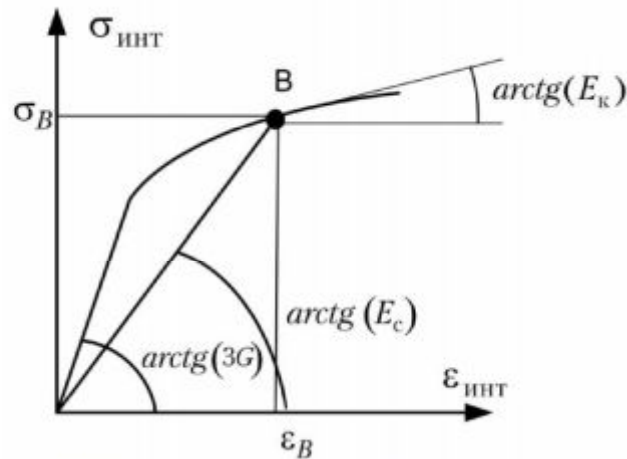


Рис. 25.2. Единая обобщенная диаграмма деформирования материала

25.3. Физические уравнения теории пластичности

Введем понятия о *простом* и *сложном* нагружении. *Простым* считается нагружение, при котором напряжения и деформации не зависят от порядка приложения нагрузок. В противном случае нагружение считается *сложным*.

По известной в теории пластичности теореме Ильюшина (о простом и сложном нагружении) нагружение считается простым, если:

1. все нагрузки изменяются пропорционально одному параметру,
2. материал несжимаемый,
3. диаграмма деформирования аппроксимируется степенной зависимостью.

Третье условие обычно игнорируется.

В случае приложения одной нагрузки нагружение всегда простое.

Физические уравнения теории пластичности оказываются различными для простого и сложного нагружения.

При простом нагружении используется *деформационная теория*. В процессе решения задачи сразу прикладывается конечная величина нагрузки. В расчетах используется секущий модуль E_c .

При сложном нагружении используется *теория течения*. Задача решается в приращениях. Нагрузки постепенно увеличиваются до своего конечного значения. В расчетах используется касательный модуль. Для перехода к приращениям используется понятие "скорость деформации" $\dot{\varepsilon}_{i,j} = \frac{d\varepsilon_{i,j}}{dt}$. Реальная скорость деформации в теории течения не учитывается.

Процедура вывода физических уравнений по деформационной теории и теории течения абсолютно одинакова. Чтобы подчеркнуть это и облегчить понимание обоих выводов, они представлены в виде двух столбцов одной таблицы 25.1.

Таблица 25.1 Вывод физических уравнений теории пластичности

Деформационная теория	Теория течения
Основные законы	
$0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \quad \varepsilon_{ср} = 0$ $\begin{cases} \varepsilon_x - \varepsilon_{ср} = \lambda (\sigma_x - \sigma_{ср}) \\ \gamma_{xy} = 2\lambda \tau_{xy} \end{cases}$	$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 0 \quad \dot{\varepsilon}_x = \frac{d\varepsilon_x}{dt}$ $\begin{cases} \dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_{ср} = \beta (\sigma_x - \sigma_{ср}) \\ \dot{\gamma}_{xy} = 2\beta \tau_{xy} \end{cases} \quad \beta = \frac{d\lambda}{dt}$
Полная деформация	
$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{упр}\} + \{\varepsilon_{пласт}\}$	$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon_{упр}\} + \{d\varepsilon_{пласт}\}$
Упругие деформации	
$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$	$\begin{cases} d\varepsilon_x = \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y - \mu d\sigma_z) \\ d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G} \end{cases}$
Пластические деформации	
$\begin{cases} \varepsilon_x^p = \lambda (\sigma_x - \sigma_{ср}) = \frac{2}{3} \lambda \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \right) \\ \gamma_{xy}^p = 2\lambda \tau_{xy} \end{cases}$	$\begin{cases} d\varepsilon_x^p = d\lambda (\sigma_x - \sigma_{ср}) = \frac{2}{3} d\lambda \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \right) \\ d\gamma_{xy}^p = 2d\lambda \tau_{xy} \end{cases}$
Полные деформации	
$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) + \frac{2}{3} \lambda \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \right) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} + 2\lambda \tau_{xy} \end{cases}$	$\begin{cases} d\varepsilon_x = \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y - \mu d\sigma_z) + \frac{2}{3} d\lambda \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \right) \\ d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G} + 2d\lambda \tau_{xy} \end{cases}$
Определение λ (при растяжении)	Определение $d\lambda$
$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \frac{2}{3} \lambda \sigma_x$ $\lambda = \frac{3}{2} \left(\frac{\varepsilon_x}{\sigma_x} - \frac{1}{E} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) \approx \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{пнт}^p}{\sigma_{пнт}}$	$d\varepsilon_x = \frac{d\sigma_x}{E} + \frac{2}{3} d\lambda \sigma_x$ $d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\sigma_x}{\sigma_x} \left(\frac{d\varepsilon_x}{d\sigma_x} - \frac{1}{E} \right) = \frac{3}{2} \frac{d\sigma_x}{\sigma_x} \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) \approx \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{пнт}^p}{\sigma_{пнт}}$
Связь $\sigma_{пнт}$ и $\varepsilon_{пнт}^p$	
$\varepsilon_{пнт}^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p)^2 + (\varepsilon_x^p - \varepsilon_z^p)^2 + (\varepsilon_y^p - \varepsilon_z^p)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^{p2} + \gamma_{yz}^{p2} + \gamma_{zx}^{p2})}$ $\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p = \lambda (\sigma_x - \sigma_{ср} + \sigma_y - \sigma_{ср}) = \lambda (\sigma_x - \sigma_y) \text{ и т. д.}$	<p>Аналогично для $d\varepsilon_{пнт}^p$</p> $d\varepsilon_{пнт}^p = \frac{2}{3} d\lambda \sigma_{пнт}$

$\varepsilon_{\text{инт}}^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \lambda \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$ $\varepsilon_{\text{инт}}^p = \frac{2}{3} \lambda \sigma_{\text{инт}}^p \quad \lambda = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p}$		$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p}$
Другие формы записи физических уравнений		
Уравнения Генки	Уравнения Прандтля-Рейсса	
$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p} (\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}) \\ \dots \\ \gamma_{xy}^p = 3 \frac{\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p} \tau_{xy} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_x^p = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p} (\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}) \\ \dots \\ d\gamma_{xy}^p = 3 \frac{d\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p} \tau_{xy} \end{array} \right.$	
В тензорной записи		
$\varepsilon_{i,j}^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p} (\sigma_{i,j} - \delta_{i,j} \sigma_{\text{ср}}), \text{ где } \delta_{i,j} \text{ символ Кронекера}$	$d\varepsilon_{i,j}^p = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p} (\sigma_{i,j} - \delta_{i,j} \sigma_{\text{ср}})$	
Без учета упругих деформаций (полная деформация равна пластической)		Уравнения Леви-Мизеса
$\varepsilon_{i,j} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p} (\sigma_{i,j} - \delta_{i,j} \sigma_{\text{ср}})$	$d\varepsilon_{i,j} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{\text{инт}}^p}{\sigma_{\text{инт}}^p} (\sigma_{i,j} - \delta_{i,j} \sigma_{\text{ср}})$	
Удобная запись для практических расчетов		
$\lambda = \frac{\varepsilon_x^p}{\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}} = \frac{\varepsilon_y^p}{\sigma_y - \sigma_{\text{ср}}} = \dots = \frac{\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}} \dots$	$d\lambda = \frac{d\varepsilon_x^p}{\sigma_x - \sigma_{\text{ср}}} = \frac{d\varepsilon_y^p}{\sigma_y - \sigma_{\text{ср}}} = \dots = \frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}} \dots$	
В матричной форме (для МКЭ)		
$\{\varepsilon\} = \frac{1}{E} [B_{\text{упр}}] \{\sigma\} + \frac{2}{3} \lambda [B_{\text{пласт}}] \{\sigma\}$	$\{d\varepsilon\} = \frac{1}{E} [B_{\text{упр}}] \{d\sigma\} + \frac{2}{3} d\lambda [B_{\text{пласт}}] \{\sigma\}$	
Матрица податливости		
$[B_{\text{упр}}] = \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E/G \end{bmatrix}$	$[B_{\text{пласт}}] = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	

25.4. Решение упругопластической задачи МКЭ

Для решения упругопластической задачи без использования МКЭ надо составить систему дифференциальных уравнений: геометрических, равновесия, физических. Решить эту систему с использованием граничных условий, условия пластичности и уравнения диаграммы деформирования. Это чрезвычайно сложная задача и в общем случае неразрешимая. При использовании МКЭ задача существенно упрощается.

Главное упрощение состоит в том, что вместо упругопластической задачи в МКЭ решается упругая задача. Плата за такое упрощение состоит в многократном решении упругой задачи итерационным методом и соответственно увеличении времени расчета.

При упругопластической деформации результат нагружения тела системой сил зависит от порядка приложения нагрузок (сложное нагружение). Приходится производить ступенчатое нагружение, разбивая траекторию нагружения на ряд ступеней (шагов нагружения). Для получения правдоподобного результата на каждом шаге нагружения выполняется итерационный процесс последовательных приближений. Как результат для решения упругопластической задачи необходимо несколько десятков раз решить упругую задачу.

При действии на конструкцию одной единственной внешней нагрузки (простое нагружение) ступенчатое нагружение необязательно (расчет выполняется за один шаг нагружения), но итерационный процесс сохраняется.

Основное уравнение МКЭ $[K]\{\Delta\} = \{F\}$.

На каждом шаге нагружения приходится перестраивать вектор сил $\{F\}$. Существует два варианта решения упругопластических задач МКЭ итерационным методом:

1. на каждом шаге итерации перестраивать матрицу жесткости — метод переменных параметров упругости,
2. на каждом шаге итерации перестраивать вектор сил — методы дополнительных напряжений и дополнительных деформаций.

Чаще всего применяется метод переменных параметров упругости, обладающий лучшей сходимостью по сравнению с другими методами. Рассмотрим алгоритм этого метода.

Метод переменных параметров упругости

Вернемся к рассмотрению диаграммы деформирования (рис. 25.2). В точке B при упругопластическом деформировании

$$\sigma_{\text{инт}B} = \Phi(\varepsilon_{\text{инт}B}),$$

где $\Phi(\varepsilon_{\text{инт}})$ — уравнение диаграммы деформирования.

Ту же величину напряжения можно получить, предположив упругое нагружение, но с меньшим модулем упругости E_c .

$$\sigma_{\text{инт}B} = E_c \cdot \varepsilon_{\text{инт}B}.$$

Коэффициент пропорциональности в этом выражении E_c — *секундный модуль*. Секундный модуль — величина переменная, зависящая от деформации в каждой точке тела.

В методе переменных параметров упругости реализуется идея замены физических уравнений теории пластичности уравнениями теории упругости (законом Гука).

При сложном напряженном состоянии связь напряжений с упругими деформациями записывается в соответствии с законом Гука по формуле (9.5). При упругопластической деформации форму закона Гука можно сохранить, если использовать другие упругие постоянные.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_*} (\sigma_x - \mu_* \sigma_y - \mu_* \sigma_z) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_*} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_*} (\sigma_y - \mu_* \sigma_z - \mu_* \sigma_x) & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_*} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_*} (\sigma_z - \mu_* \sigma_x - \mu_* \sigma_y) & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G_*} \end{aligned} \quad (25.5).$$

Величины E_*, μ_*, G_* называются переменными параметрами упругости и определяются путем сравнения физических уравнений теории пластичности с уравнениями теории упругости (20.29)

$$\begin{aligned} E_* &= \frac{E_c}{1+a}, \quad E_c = \frac{\Phi(\varepsilon_{\text{инт}})}{\varepsilon_{\text{инт}}}, \quad \Phi(\varepsilon_{\text{инт}}) \text{ — уравнение диаграммы деформирования,} \\ a &= \frac{(1-2\mu) E_c}{3 E}, \quad 0 < a < 0,1, \quad \mu_* = \frac{1-2a}{2+2a}, \quad G_* = \frac{E_c}{2(1+\mu_*)}. \end{aligned}$$

С ростом деформаций $E_* \rightarrow E_c, \mu_* \rightarrow 0,5, G_* \rightarrow E_c/3$.

При использовании выражений (25.5) решение упругопластической задачи сводится к решению упругой задачи с переменными параметрами упругости.

Сущность метода переменных параметров упругости

При заданной нагрузке в каждом конечном элементе надо

1. Решить основное уравнение МКЭ $[K]\{\Delta\} = \{F\}$ и определить упругие величины узловых перемещений Δ , все компоненты векторов напряжений $\{\sigma\}$ и деформаций $\{\varepsilon\}$, интенсивности напряжений $\sigma_{\text{инт}}$ и деформаций $\varepsilon_{\text{инт}}$ для всех элементов.
2. Для элементов, перешедших в пластическое состояние, в которых $\varepsilon_{\text{инт}} > \varepsilon_T$,
 - найти переменные параметры упругости E^*, μ^*, G^* ,
 - пересчитать с учетом этих параметров матрицу внутренней жесткости $[C]$
 - пересчитать матрицу жесткости элемента $[K^e]$.
3. Пересчитать матрицу жесткости системы $[\bar{K}]$.
4. Вновь решить основное уравнение МКЭ и найти Δ , $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$, $\sigma_{\text{инт}}$, $\varepsilon_{\text{инт}}$.
5. Сопоставить результаты начала и конца расчета. В случае существенных расхождений перейти ко второму приближению. Повторить пункты 2, 3, 4, 5.

Процесс повторяется до выполнения критерия сходимости. Результаты расчета первых трех итераций в одном из конечных элементов приведены на рис. 25.3.

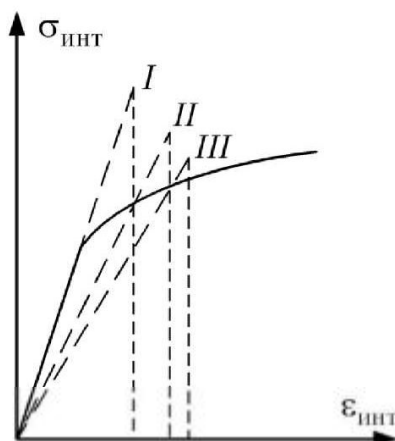


Рис. 25.3. Последовательные приближения в методе переменных параметров упругости

На рис. 25.4 показана блок-схема решения упругопластической задачи МКЭ методом переменных параметров упругости. Сначала решается упругая задача при любой (можно единичной) нагрузке и определяется нагрузка F_T , при которой $\max \sigma_{\text{инт}} = \sigma_T$. Затем надо задаться нагрузкой $F = F_T \cdot \alpha$, где $\alpha > 1$. При такой нагрузке в конструкции с гарантией появляются пластические деформации.

Далее производится упругий расчет при заданной нагрузке F . Из условия $\sigma_{\text{инт}} \geq \Phi(\varepsilon_{\text{инт}})$ определяются элементы, в которых появились пластические деформации. Для этих элементов рассчитываются новые параметры упругости, пересчитывается матрица жесткости элемента. Для элементов, оставшихся упругими, матрица жесткости элемента сохраняется прежней. Затем формируется матрица жесткости системы, решается основное уравнение МКЭ, и определяются узловые перемещения Δ .

По результатам расчета определяется какой-либо критерий окончания расчета Eps . Если $Eps < \eta$, расчет закончен, если — нет, переход к следующей итерации.

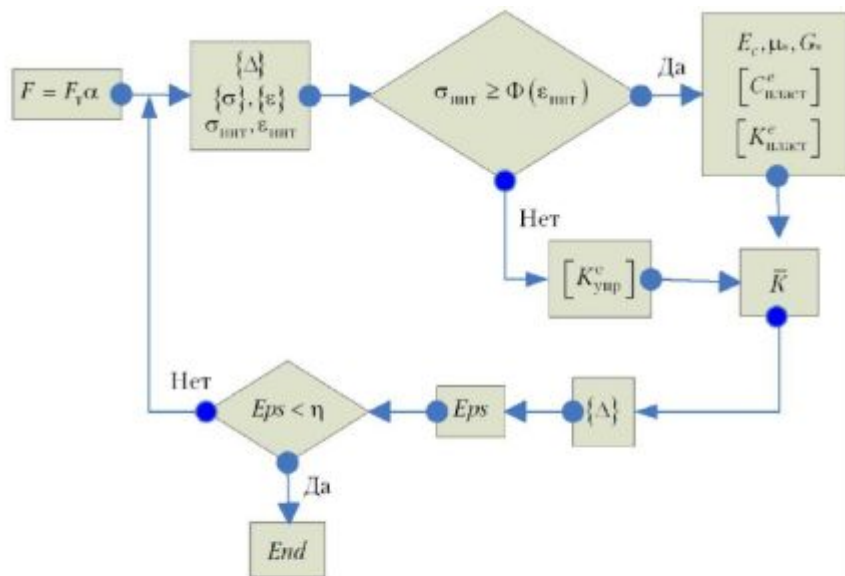


Рис. 25.4. Блок-схема метода переменных параметров упругости

Реализация метода переменных параметров упругости показана в примере Упругопластический расчет кольца в разделе Метод конечных элементов электронной книги.

Глава 26. Возможности современных вычислительных комплексов

Метод конечных элементов МКЭ стал популярен в шестидесятые годы прошлого столетия в связи с развитием и усовершенствованием компьютеров. Вплоть до восьмидесятых годов многие инженеры и научные работники разрабатывали свои собственные расчетные программы, использующие метод конечных элементов. Но в это время уже начали создаваться вычислительные комплексы, объединяющие возможности большинства, созданных к тому времени программ.

Сейчас в начале двадцать первого века можно смело утверждать, что время массового создания самодельных программ МКЭ прошло. Созданные к настоящему времени вычислительные комплексы впитали в себя практически все лучшие алгоритмы решения задач МКЭ во всех областях знаний. Современный интерфейс вычислительных комплексов сделал решение задач МКЭ сравнительно простым и удобным.

Среди вычислительных комплексов есть, созданные и в России и за рубежом. Выбор большой. Наиболее популярные из них это ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, COSMOS, COSMOS/Works, ProMECHANICA, ZENIT, ИСПА (Интегрированная Система Прочностного Анализа).

Чем больше вычислительные возможности комплекса, тем сложнее и продолжительнее подготовка к расчету. Оно и понятно: комплекс ANSYS, например, предлагает на выбор множество вариантов расчета. Естественно практическому использованию комплекса должно предшествовать основательное изучение возможностей комплекса и получение практики расчетов в нем.

В процессе подготовки к расчету наибольшее время занимает изготовление расчетной модели средствами вычислительного комплекса. Здесь следует заметить, что большинство комплексов разрешает импорт моделей, созданных наиболее популярными графическими комплексами, такими как AutoCAD, ProENGINEER, SolidWorks, Autodesk Inventor, Компас.

Современным студентам и инженерам, изучившим сопротивление материалов и основы метода конечных элементов, предстоит использовать в практике расчетов готовые вычислительные комплексы.

В данной главе для ознакомления выбраны три вычислительных комплекса: ANSYS, имеющий огромные вычислительные возможности, COSMOS/Works, работа в котором относительно проста и удобна и ZENIT — отечественный комплекс, обладающий большими вычислительными возможностями. Выбор для рассмотрения указанных комплексов определяется прежде всего личными предпочтениями автора. Вычислительных комплексов много и они непрерывно совершенствуются. Изучить все комплексы невозможно и не нужно. Надо иметь представление об их возможностях и готовиться к использованию одного из комплексов в своей последующей деятельности.

26.1 Основные возможности ANSYS

26.1.1. Область применения

ANSYS известен на рынке уже более двадцати лет и является наиболее распространенным средством для научных и инженерных расчетов. Особенностью ANSYS является чрезвычайно широкий спектр задач, которые он в состоянии решать. Пакет ANSYS предназначен для решения инженерных задач методом конечных элементов. В последнее время издано несколько книг на русском языке, посвященных использованию вычислительного комплекса ANSYS, например, книги Басова К. А. [3], Каплуна А. Б. [7].

Комплекс МКЭ ANSYS предназначен для решения задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ), температурных задач, задач механики жидкости и газа магнитных и электрических задач. Кроме того комплекс обладает возможностью решения связанных задач, в которых результаты расчета для одной задачи (например, поля температур) могут быть использованы в качестве исходных данных для решения другой задачи (например, для вычисления распределения напряжений в нагретой детали).

Применительно к механике деформируемого твердого тела (МДТТ) комплекс ANSYS позволяет решать следующие задачи:

- ❑ Линейные и нелинейные статические задачи (нелинейности могут быть геометрические и физические),
- ❑ Задачи расчета собственных частот и форм колебаний,
- ❑ Задачи расчета вынужденных колебаний,
- ❑ Задачи определения собственных форм потери устойчивости,
- ❑ Задачи исследования динамических переходных процессов (в том числе ударного взаимодействия),
- ❑ Спектральные задачи.

Кроме того комплекс ANSYS позволяет проводить оптимизацию конструкций, допускает применение суперэлементов (подконструкций), и имеет целый ряд дополнительных возможностей. А именно:

- ❑ Уточненный расчет НДС в локальных зонах,
- ❑ Построение адаптивных сеток,
- ❑ Расчет циклически симметричных конструкций
- ❑ Решение задач механики разрушения,
- ❑ Расчет конструкции на выносливость.

Окно выбора области знаний в ANSYS показано на рис. 26.1.

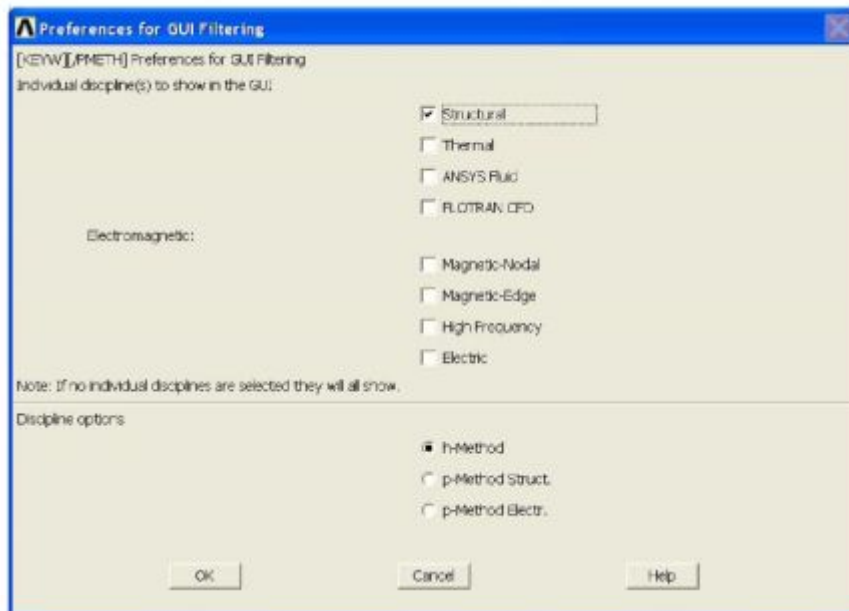


Рис. 26.1. Окно выбора области знаний в ANSYS

26.1.2. Структура ANSYS и последовательность расчета

Для выполнения различных этапов создания сетки конечных элементов и проведения расчетов комплекс ANSYS разделен на ряд модулей.

- ❑ Препроцессор — предназначен для создания геометрической и расчетной моделей и приложения нагрузок,
- ❑ Модуль проведения вычислений — предназначен для указания опций расчета и проведения вычислений,
- ❑ Постпроцессор общего назначения — предназначен для просмотра результатов для определенного шага нагрузки на полной модели,
- ❑ Постпроцессор истории нагружения — предназначен для просмотра результатов в определенном узле и (или) элементе для полной последовательности шагов нагрузки,
- ❑ Модуль импорта геометрической информации — предназначен для импорта файлов, созданных другими комплексами (например, средствами CAD), содержащих геометрическую информацию. Помимо перечисленных, имеются и иные модули.

Общепринятая последовательность расчета в среде комплекса МКЭ ANSYS сводится к следующим шагам

- Создание геометрической модели или импорт ее из других приложений.
- Выбор применяемых типов конечных элементов, указание свойств материала, размеров и формы поперечных сечений, а также геометрических характеристик.
- Создание сетки конечных элементов.
- Приложение нагрузок и задание граничных условий (условий закрепления конструкции).
- Указание опций проведения расчета и вывода результатов расчета.
- Просмотр результатов расчета.

26.1.3. Создание геометрической модели

Расчетная модель должна быть точной математической моделью рассматриваемой конструкции.

Геометрическую модель для расчета можно создать непосредственно в среде Ansys, путем задания характерных точек, линий, поверхностей. Можно импортировать такую модель из других приложений.

Для создания модели в среде ANSYS могут применяться два метода: **геометрическое моделирование** и **прямая генерация** (узлов и элементов). При использовании геометрического моделирования описываются геометрические границы модели, назначаются средства контроля размера и требуемой формы элементов и далее вызываются средства комплекса Ansys, автоматически создающие все узлы и элементы. В сравнении с этим в методе прямой генерации пользователь сам определяет расположение каждого узла и размер, форму и связность каждого элемента до создания этих объектов в модели комплекса Ansys. Геометрическое моделирование является более мощным и универсальным методом, чем прямая генерация, и считается предпочтительным методом создания модели. Геометрическое моделирование можно осуществить двумя способами:

Создание модели снизу вверх: сначала создаются точки, которые далее используются для создания геометрических объектов более высокого порядка (то есть линий, поверхностей и объемов).

Создание модели сверху вниз: моделирование начинается с создания примитивов (прямоугольников, кругов, шаров, конусов, призм и т. д.), при этом автоматически создаются все объекты более низкого уровня (точки, линии, поверхности). Пользователь может комбинировать оба метода для создания любой модели. Независимо от способа построения модели после создания геометрических примитивов к ним можно применить булевы операции сложения фигур, вычитания, пересечения, деления, склеивания и объединения, вытягивания для превращения плоских фигур в пространственные тела.

Эффективным методом создания геометрических моделей является метод "обтягивания каркаса". С помощью этого метода можно задать некоторый набор поперечных сечений, а затем дать программе команду построить поверхность, которая будет точно соответствовать указанным сечениям.

Импорт модели из другой программы: Программа ANSYS позволяет наносить сетку на модель, импортированную из другой программы, например, Autocad, SolidWorks, а также имеет возможность изменять ее геометрию для упрощения расчета (удалять отверстия, полости, выпуклости, исключать мелкие подробности).

26.1.4. Подготовка к расчету.

Выбор типов конечных элементов

Основная идея метода конечных элементов состоит в замене системы дифференциальных уравнений системой линейных алгебраических уравнений. Матричная запись такой системы не зависит от области знаний

$[K] \cdot \{\Delta\} = \{F\}$, где $[K]$ — матрица жесткости, $\{\Delta\}$ — вектор неизвестных, $\{F\}$ — вектор правых частей уравнений. Физический смысл всех параметров зависит от области знаний. Коэффициенты жесткости представляют собой, как правило,

сложное интегральное выражение и для их расчета необходимо ввести все необходимые исходные данные. В механике это все геометрические характеристики конечного элемента и характеристики материала, которые будут разными для упругого поведения, упругопластического, вязкоупругого и пр.

В комплексе ANSYS хранятся готовые матрицы жесткости для всех видов решаемых задач. Каждому конечному элементу соответствует своя матрица жесткости, требующая свой набор исходных данных. Линейные, плоские, объемные элементы имеют одинаковый внешний вид при решении разных (по областям знаний) задач, но различные матрицы жесткости. Поскольку матрица жесткости включает в себя характеристики материала, то элементы различаются между собой и по виду деформаций, которые могут быть упругими, гиперупругими (для материалов типа резины), упругопластическими, вязкоупругими, вязкими.

В библиотеке ANSYS хранится около 120 типов конечных элементов (число их увеличивается с каждым новым выпуском ANSYS), каждый из которых, может применяться в той или иной области расчетов (прочностной, тепловой, магнитной и электрической анализы, движение жидкости или связанные задачи).

Характеристики элементов

Для каждого элемента в библиотеке элементов приведена схема с указанием узлов, степеней свободы, приведен перечень характеристик элемента.

Узлы на всех схемах обозначаются *I, J, K*, и т. д. *I* — всегда первый узел.

Степени свободы. Смысл степени свободы определяется дисциплиной, для которой решается задача (структурная, тепловая, жидкостная, электромагнитная, смешанная). Элемент должен выбираться так, чтобы число степеней свободы в нем позволяло эффективно решить поставленную задачу. Наличие лишних (необязательных) степеней свободы приведет к увеличению времени расчета.

Число степеней свободы есть число неизвестных в каждом узле элемента. Степени свободы в зависимости от решаемой задачи могут быть перемещения, температура, давление, напряжение и т. д.

Числовые константы — это величины, необходимые для расчета матрицы жесткости элемента, которые нельзя определить, используя положение узлов или свойства материала, например, толщина, внутренний или наружный диаметр.

Свойства материала. Типичные свойства материала — это модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность, коэффициент линейного расширения, теплопроводность. Все свойства материала можно ввести как функцию от температуры. Свойства материала записываются как линейные, если для решения задачи потребуются одна итерация например, упругая задача), нелинейные, если требуется ряд итераций (например, упругопластическая задача). Панель выбора свойств материала показана на рис. 26.2.

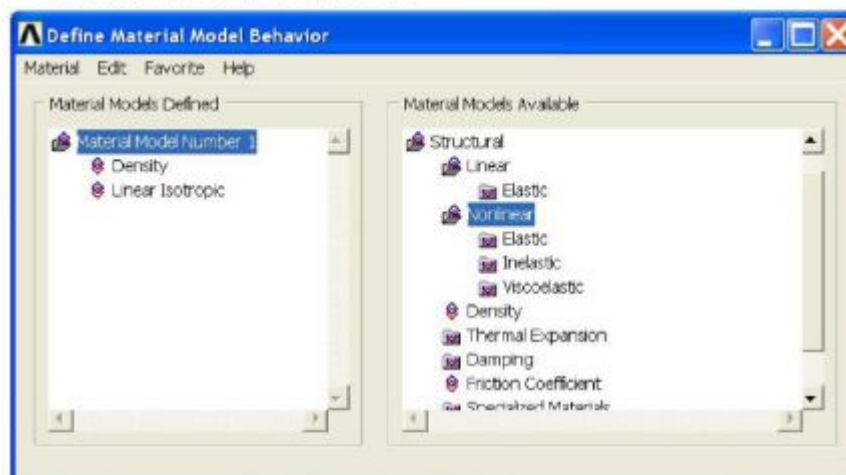


Рис. 26.2. Панель выбора свойств материала

Библиотека элементов содержит

- Стержневые элементы (прямолинейные и криволинейные),
- Двумерные элементы (плоские и криволинейные),

□ Трехмерные элементы (с прямыми ребрами и кривыми).

Каждый из этих типов элементов может быть

- Линейным
- Квадратическим

В библиотеку элементов включено большое количество элементов специального вида, аппроксимирующих типовые элементы конструкций, например, трубы, фланцы, тройник, пружину и т. д. Есть элементы - модели, содержащие в себе ряд других типовых элементов. На рис. 26.3 показана панель ANSYS, содержащая библиотеку элементов.



Рис. 26.3. Библиотека типов элементов ANSYS

Задача разбиения тела на конечные элементы неоднозначна. В некоторых случаях конструктивные элементы таковы, что совпадают с видом конечного элемента. Так всю ферму можно моделировать линейными стержневыми элементами. Такими же элементами можно моделировать пружины, стержни, тяги, а также системы трубопроводов. В таких случаях моделирование конструкции простое.

Сложнее выполнить операцию разбиения на конечные элементы для двумерной или трехмерной конструкции. Плоские двумерные элементы применяются для моделирования мембран, тонких пластин, тонкостенных оболочек и т. п. Объемные трехмерные элементы применяются, в основном, при исследовании полей температур, деформаций, напряжений в массивных телах. В таблице 26.1 показаны структурные типы элементов для расчетов в области механики деформируемого твердого тела и перечень применяемых элементов. В эту таблицу не включены элементы, используемые в других дисциплинах.

Таблица 26.1 Структурные типы элементов

Категория	Название элемента
Брусья	LINK1 , LINK8 , LINK10 , LINK180
Балки	BEAM3 , BEAM4 , BEAM23 , BEAM24 , BEAM44 , BEAM54 , BEAM188 , BEAM189
Трубы	PIPE16 , PIPE17 , PIPE18 , PIPE20 , PIPE59 , PIPE60
Плоские тела	PLANE2 , PLANE25 , PLANE42 , HYPER56 , HYPER74 , PLANE82 , PLANE83 , HYPER84 , VISCO88 , VISCO106 , VISCO108 , PLANE145 , PLANE146 , PLANE182 , PLANE183
Объемные тела	SOLID45 , SOLID46 , HYPER58 , SOLID64 , SOLID65 , HYPER86 , VISCO89 , SOLID92 , SOLID95 , VISCO107 , SOLID147 , SOLID148 , HYPER158 , SOLID185 , SOLID186 , SOLID187 , SOLID191
Оболочки	SHELL28 , SHELL41 , SHELL43 , SHELL51 , SHELL61 , SHELL63 , SHELL91 , SHELL93 , SHELL99 , SHELL150

Категория	Название элемента
	SHELL181
Толстостенные оболочки	SOLSH190
Модели конструкций	INTER192 , INTER193 , INTER194 , INTER195
Контактные задачи	CONTAC12 , CONTAC52 , TARGE169 , TARGE170 , CONTA171 , CONTA172 , CONTA173 , CONTA174 , CONTA175
Двойные среды	SOLID5 , PLANE13 , FLUID29 , FLUID30 , FLUID38 , SOLID62 , FLUID79 , FLUID80 , FLUID81 , SOLID98 , FLUID129 , INFIN110 , INFIN111 , FLUID116 , FLUID130
Специальные (комбинированные) элементы	COMBIN7 , LINK11 , COMBIN14 , MASS21 , MATRIX27 , COMBIN37 , COMBIN39 , COMBIN40 , MATRIX50 , SURF153 , SURF154
Элементы для динамических задач	LINK160 , BEAM161 , PLANE162 , SHELL163 , SOLID164 , COMBI165 , MASS166 , LINK167 , SOLID168

Примеры наиболее общих типов элементов (*line*, *plane*, *solid* — линейных, плоских и объемных) приведены на рис. 26.3. Использование таких элементов описано в разделе 23.4.

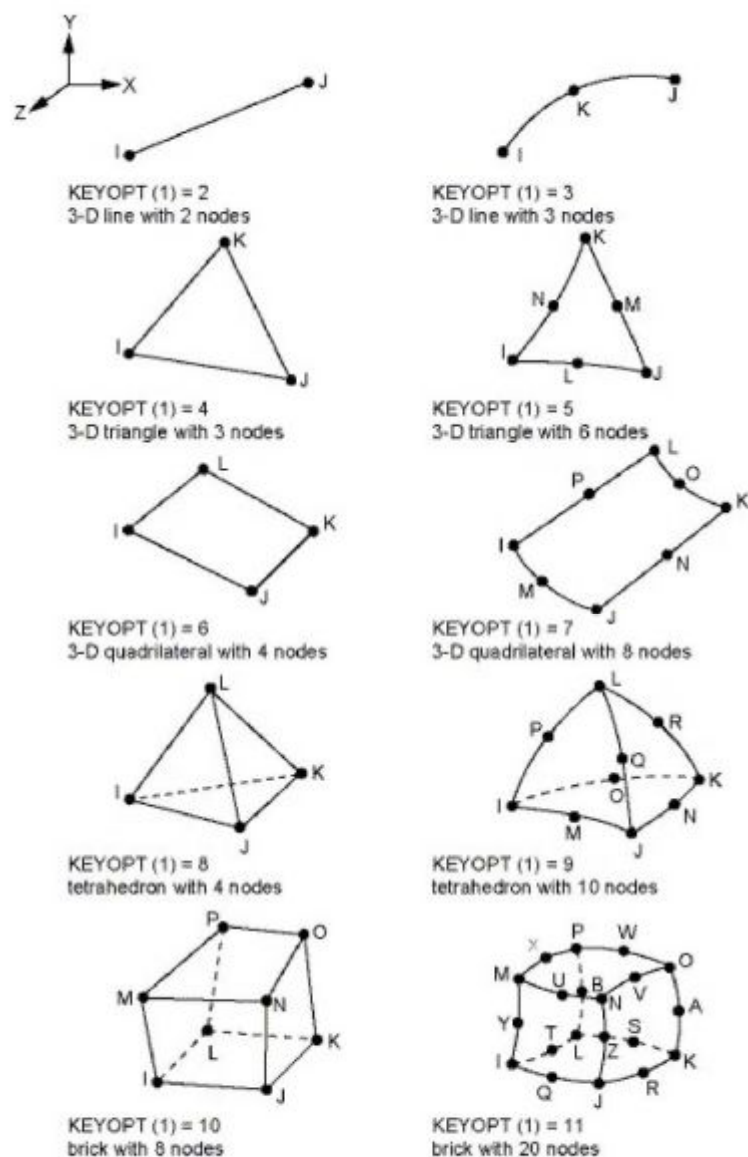


Рис. 26.4. Типы элементов

Чтобы показать возможности ANSYS, приведем примеры некоторых (довольно экзотических) элементов специального назначения.

На рис. 26.5 показан балочный элемент (**beam**) для расчета балки с тонкостенным сечением произвольного профиля. Элемент может учитывать упругость, пластичность, ползучесть материала. Возможен учет больших деформаций изгиба и кручения, сдвига. Поперечное сечение тонкостенное, произвольное, но состоящее из набора прямоугольных элементов. Элемент может использоваться для решения статических, динамических, температурных задач.

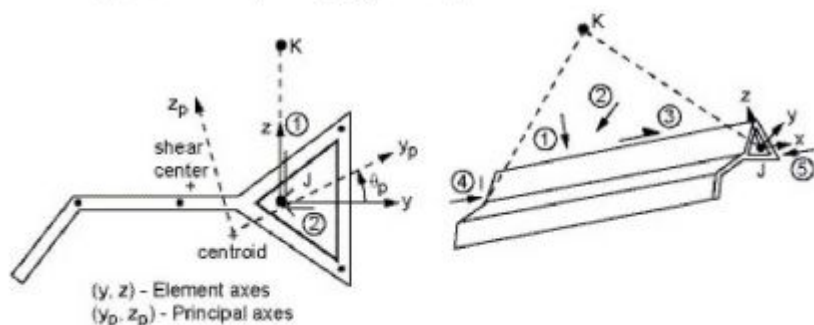


Рис. 26.5. Элемент балки с тонкостенным поперечным сечением

Для расчета трубопроводов в ANSYS имеется ряд элементов в виде трубы (*pipe*) прямой с двумя узлами и кривой пространственной с тремя узлами. На рис. 26.6 показан элемент трубы в виде тройника. Элемент может работать на растяжение, изгиб, кручение. В расчетах учитывается наличие жидкости в трубопроводе, влияние коррозии, внутренней изоляции.

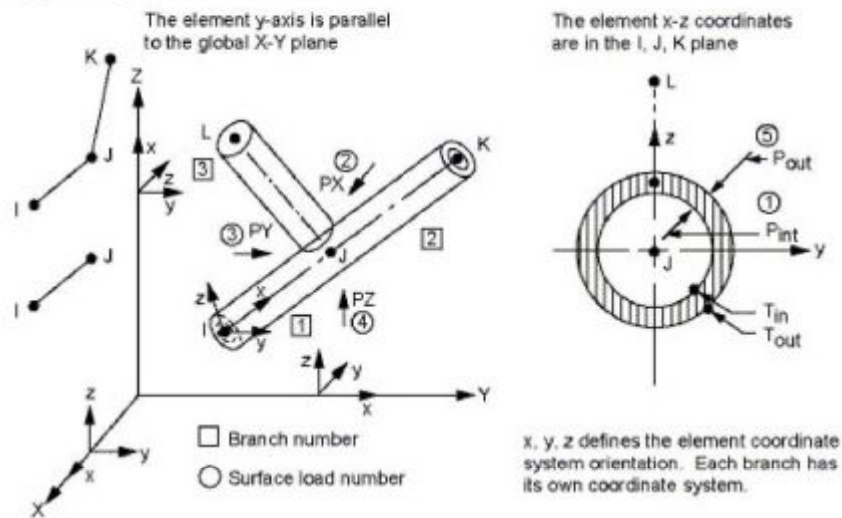


Рис. 26.6. Трехмерный трубчатый элемент в виде тройника

В ANSYS включены комбинированные элементы (*combine*) для расчета поведения моделей конструкций. На рис. 26.7 показан комбинированный элемент вязкоупругого тела, включающий в себя комбинацию ползун-пружина, демпфер, упругий элемент, одну или две сосредоточенных массы. Возможен учет зазора при соединении с другими элементами. Элемент имеет одну степень свободы в каждом узле (растяжение или кручение).

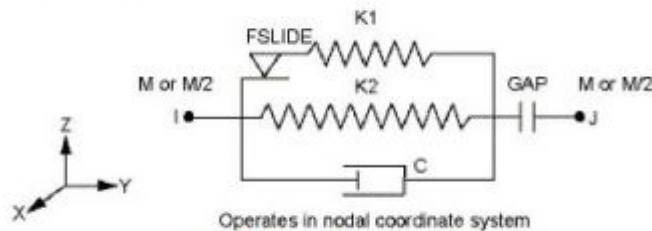


Рис. 26.7. Модель вязкоупругого тела

ANSYS допускает использование суперэлементов (*matrix*), каждый из которых содержит группу элементов ANSYS. Суперэлемент представляет собой сетку элементов определенной части конструкции (рис. 26.8). Будучи однажды созданным, такой суперэлемент может храниться в отдельном файле и использоваться при анализе других конструкций, что значительно удешевляет и ускоряет расчеты. Векторы нагрузки также могут храниться вместе с матрицей жесткости элемента.

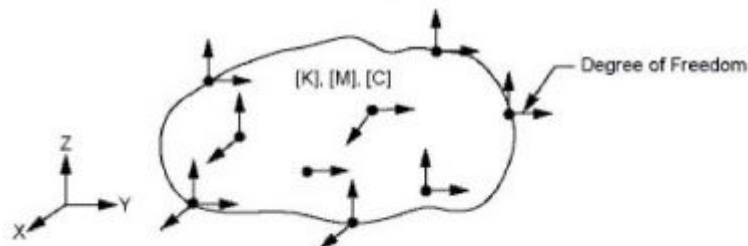


Рис. 26.8. Суперэлемент

В ANSYS включена группа элементов для расчета оболочек (*shell*), тонкостенных или толстостенных, осесимметричных и неосесимметричных, постоянной или переменной толщины, однослойных или многослойных, из изотропного или анизотропного материала, нагруженных осесимметричной или произвольной нагрузкой. На рис. 26.9 показан элемент многослойной оболочки. Число слоев может достигать 256. Материал каждого слоя может быть изотропным или ортотропным.

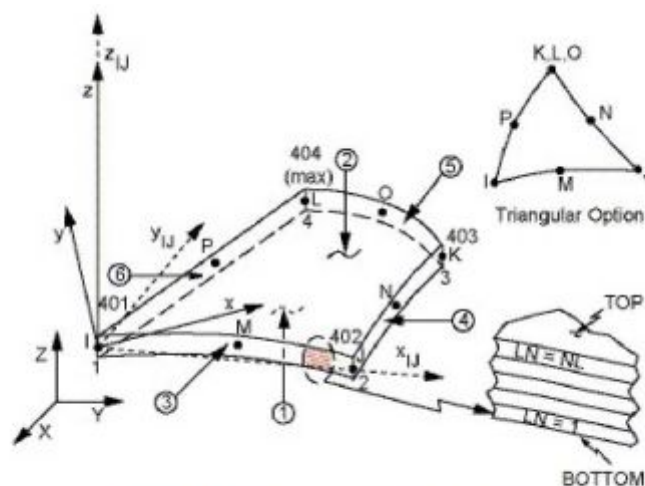


Рис. 26.9. Элемент многослойной оболочки

Как видно из приведенных примеров можно подобрать элемент для решения практически любой реальной задачи.

Построение сетки конечных элементов

Средства ANSYS позволяют создавать свободную или регулярную сетку конечных элементов. Свободная сетка не накладывает никаких ограничений на форму и взаимное расположение элементов. Регулярная сетка ограничивает выбор форм и взаимного расположения элементов. На рис. 26.10 показан пример создания сетки конечных элементов слева свободной, справа регулярной.

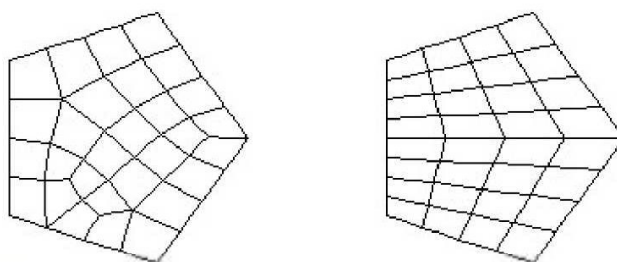
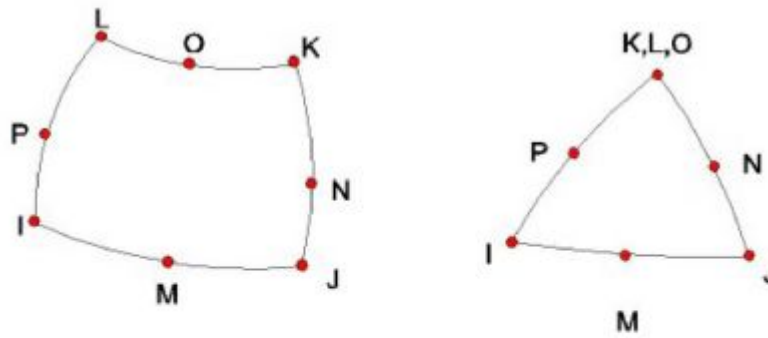


Рис. 26.10. Примеры свободной (слева) и регулярной (справа) сетки конечных элементов

Перед созданием сетки элементов надо определить атрибуты элементов:

1. тип элемента,
2. геометрические характеристики элемента (толщину, площадь поперечного сечения),
3. свойства материала,
4. систему координат (если требуется),
5. тип поперечного сечения.

Следует отметить, что ANSYS позволяет трансформировать элементы путем объединения их узлов в один узел. На рис. 26.11 показана трансформация четырехугольного плоского элемента в треугольный путем объединения узлов *L*, *O*, *K* в один узел. У пользователя есть возможность выбора сетки из треугольных или четырехугольных элементов, а также выбрать размер элементов, задав **Size Level** (рис. 26.12). Измельчение или укрупнение элементов можно задать для всей сетки или для отдельных зон, например, в местах концентрации напряжений.



Quadrilateral Shape (Default)

Triangular Option

Рис. 26.11. Трансформация четырехугольного элемента в треугольный

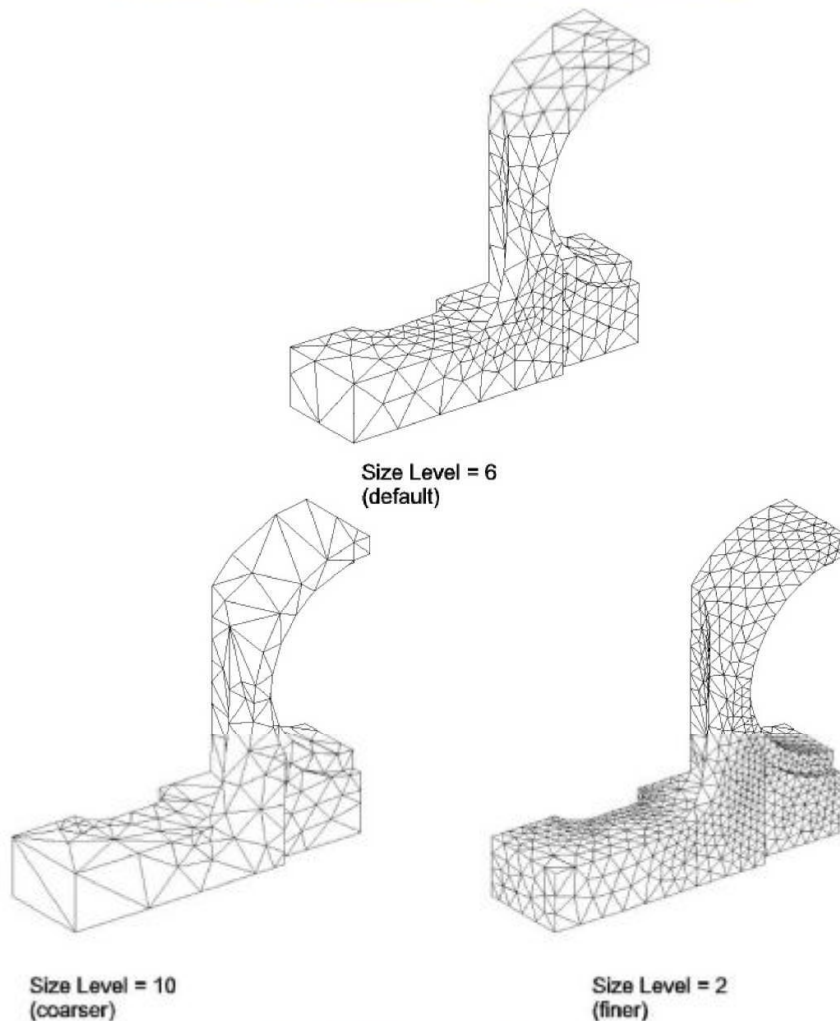


Рис. 26.12. Выбор размера элементов

Наложение нагрузок и наложение связей

Понятие нагрузки, используемое в документации ANSYS, включает в себя граничные условия в перемещениях, напряжениях, нагрузках.

Примерами нагрузок для разных типов расчетов являются:

- Прочностные расчеты: перемещения, усилия, давления, температуры, инерционные силы.
- Тепловые расчеты: температуры, удельные потоки тепла, конвекции, внутренняя

генерация тепла, граничные условия в бесконечности.

- Магнетизм: магнитные потенциалы, магнитные потоки, линии магнитного потока, граничные условия в бесконечности.
- Электричество: электрические потенциалы, (напряжения), электрические токи, электрические заряды, плотности зарядов, граничные условия в бесконечности.
- Потoki жидкостей и газов: скорости, давления.

Нагрузки делятся на шесть групп: ограничения на степени свободы, усилия (сосредоточенные нагрузки), поверхностные нагрузки, объемные нагрузки, инерционные нагрузки и нагрузки связанных расчетов (многодисциплинарные задачи).

1. **Ограничения на степени свободы (DOF)** устанавливают для степени свободы заранее заданное значение. Примерами подобных связей являются перемещения и граничные условия в задачах прочности, предписанные температуры в тепловых потоках и граничные условия при расчете потоков.
2. **Усилия** являются сосредоточенными нагрузками, прикладываемыми в узлах модели. Примерами являются силы и моменты в задачах прочности, удельные потоки тепла в тепловых расчетах и линии тока в магнитных расчетах.
3. **Поверхностные нагрузки** являются нагрузками распределенными по поверхности. Примерами являются давление в задачах прочности, а также конвекция и поток тепла в тепловых расчетах.
4. **Объемные нагрузки** действуют в пределах всего тела. Примеры: температуры в задачах прочности, скорость выделения тепла в тепловых расчетах, плотность потока в магнитных расчетах.
5. **Инерционные нагрузки** создаются массой конструкции, например, при действии ускорения линейного или углового.
6. **Нагрузки связанных расчетов** являются частными случаями одного из указанных выше типов нагрузок для исследований, применяющих результаты одного расчета в качестве нагрузок для другого расчета. Например, использование магнитных сил в качестве нагрузок при расчете прочности.

Алгоритм ANSYS предусматривает возможность пошагового приложения нагрузки. Для каждого шага задается своя нагрузка. При расчете переходных процессов таким образом реализуется история нагружения. При расчетах нелинейных процессов, например, упругопластической деформации, внутри каждого шага выполняется ряд итераций для улучшения сходимости решения.

При анализе переходных процессов или динамических процессов, связанных со скоростью (ползучесть или вязкопластичность) используется параметр — время для каждого шага нагружения. При расчетах процессов, независимых от скорости, время является просто счетчиком шагов нагружения.

26.1.5. Проведение расчета

При создании сетки конечных элементов фактически формируется матрица жесткости системы. При вводе нагрузок и граничных условий формируется вектор правых частей уравнений (вектор сил). Тем самым сформировано основное уравнение метода конечных элементов $[K] \cdot \{\Delta\} = \{F\}$. Далее следует решение этого уравнения.

В комплексе ANSYS имеются следующие методы решения системы уравнений: прямой метод расчета разреженных матриц, прямой фронтальный метод, метод сопряженных градиентов Якоби (JCL), неполный метод сопряженных градиентов (ICCG), предварительно обусловленный метод сопряженных градиентов (PCC) и автоматически выбираемый метод (ITER). По умолчанию применяется прямой метод расчета разреженных матриц (метод Холесского).

В результате расчета определяются

- значения узловых степеней свободы, являющиеся первичными результатами.
- Производные результаты, к которым относятся элементные результаты. Элементные результаты вычисляются в элементных точках интегрирования.

26.1.6. Просмотр результатов расчета

Для просмотра результатов расчета и анализа полученного решения в ANSYS используется два постпроцессора: общий (основной) постпроцессор POST1 и постпроцессор просмотра результатов во времени POST26.

POST1 используется для просмотра результатов указанного (любого) шага нагрузки по всей модели. Например, при решении статической прочностной задачи можно посмотреть распределение напряжений и деформаций для определенного шага нагрузки. При выполнении тепловых переходных процессов можно посмотреть распределение температур для определенного момента времени.

POST26 позволяет рассматривать изменение определенного объекта результатов расчета в определенных точках модели в зависимости от времени, частоты или иного аргумента. например, при расчете нелинейных задач МДТТ можно построить зависимость перемещения в узле от усилия или напряжения от перемещения.

Результаты расчета можно вывести для каждого шага вычислений в виде таблиц или в виде графиков. На рис. 26.13, а показан контурный график распределения интенсивности напряжений в сечении матрицы при выдавливании металла. Справа от графика приведены числовые значения изолиний, а также максимальные и минимальные напряжения в заготовке. На рис. 26.13, б показан вид резинового кольца (уплотнения) под нагрузкой. На рис. 26.13, в показаны силовые линии магнитного потока в трансформаторе. Все три графика выведены постпроцессором POST1.

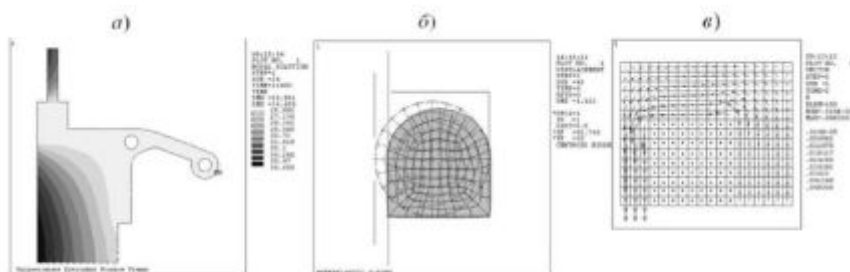


Рис. 26.13. Примеры графического вывода результатов расчета

Вывод числовых результатов расчета показан в листинге 1.

Листинг 1. Результаты расчета напряжений в узлах конструкции

```

PRINT 5  NODAL SOLUTION PER NODE
***** POST1 NODAL STRESS LISTING *****
LOAD STEP= 5  SUBSTEP= 2
TIME= 1.0000  LOAD CASE= 0
THE FOLLOWING X, Y, Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES

```

NODE	SX	SY	SZ	SXY	SYZ	SXZ
1	148.01	-294.54	.00000E+00	-56.256	.00000E+00	.00000E+00
2	144.89	-294.83	.00000E+00	56.841	.00000E+00	.00000E+00
3	241.84	73.743	.00000E+00	-46.365	.00000E+00	.00000E+00
4	401.98	-18.212	.00000E+00	-34.299	.00000E+00	.00000E+00
5	468.15	-27.171	.00000E+00	.48669E-01	.00000E+00	.00000E+00
6	401.46	-18.183	.00000E+00	34.393	.00000E+00	.00000E+00
7	239.90	73.614	.00000E+00	46.704	.00000E+00	.00000E+00
8	-84.741	-39.533	.00000E+00	39.089	.00000E+00	.00000E+00
9	3.2868	-227.26	.00000E+00	68.563	.00000E+00	.00000E+00
10	-33.232	-99.614	.00000E+00	59.686	.00000E+00	.00000E+00
11	-520.81	-251.12	.00000E+00	.65232E-01	.00000E+00	.00000E+00
12	-160.58	-11.236	.00000E+00	40.463	.00000E+00	.00000E+00
13	-378.55	55.443	.00000E+00	57.741	.00000E+00	.00000E+00
14	-85.022	-39.635	.00000E+00	-39.143	.00000E+00	.00000E+00
15	-378.87	55.460	.00000E+00	-57.637	.00000E+00	.00000E+00
16	-160.91	-11.141	.00000E+00	-40.452	.00000E+00	.00000E+00

17	33.188	99.790	.00000E+00	59.722	.00000E+00	.00000E+00
18	3.1090	227.24	.00000E+00	68.279	.00000E+00	.00000E+00
19	41.811	51.777	.00000E+00	66.760	.00000E+00	.00000E+00
20	81.004	9.3348	.00000E+00	63.803	.00000E+00	.00000E+00

MINIMUM VALUES

NODE	11	2	1	18	1	1
VALUE	520.81	294.83	.00000E+00	68.279	.00000E+00	.00000E+00

MAXIMUM VALUES

NODE	5	3	1	9	1	1
VALUE	468.15	73.743	.00000E+00	68.563	.	.

Для проверки правильности решения в статических задачах прочности ANSYS позволяет вывести сумму проекций всех сил на любое направление, которая должна быть равна нулю. Пример такой проверки показан в листинге 2.

Листинг 2. Проверка результатов расчета

```

***** POST1 NODAL TOTAL FORCE SUMMATION *****
LOAD STEP      3 SUBSTEP      43
THE FOLLOWING X, Y, Z FORCES ARE IN GLOBAL COORDINATES
NODE      FX      FY      FZ
   1  -.4281E-01  .4212  .0000E+00
   2  .3624E-03  .2319E-01  .0000E+00
   3  .6695E-01  .2116  .0000E+00
   4  .4522E-01  .3308E-01  .0000E+00
   5  .2705E-01  .4722E-01  .0000E+00
   6  .1458E-01  .2880E-01  .0000E+00
   7  .5507E-02  .2660E-01  .0000E+00
   8  .2080E-02  .1055E-01  .0000E+00
   9  .5551E-03  .7278E-02  .0000E+00
  10  .4906E-03  .9516E-02  .0000E+00

*** NOTE ***
Summations based on final geometry and will not agree with solution
reactions.
***** SUMMATION OF TOTAL FORCES AND MOMENTS IN GLOBAL COORDINATES *****
FX - .1147202
FY - .7857315
FZ - .0000000E+00
MX .0000000E+00
MY .0000000E+00
MZ 39.82639
SUMMATION POINT .00000E+00 .00000E+00 .00000E+00

```

На рис. 26.14 приведен пример работы постпроцессора POST26. показана зависимость смещения одного из узлов резинового уплотнительного кольца от времени нагружения.

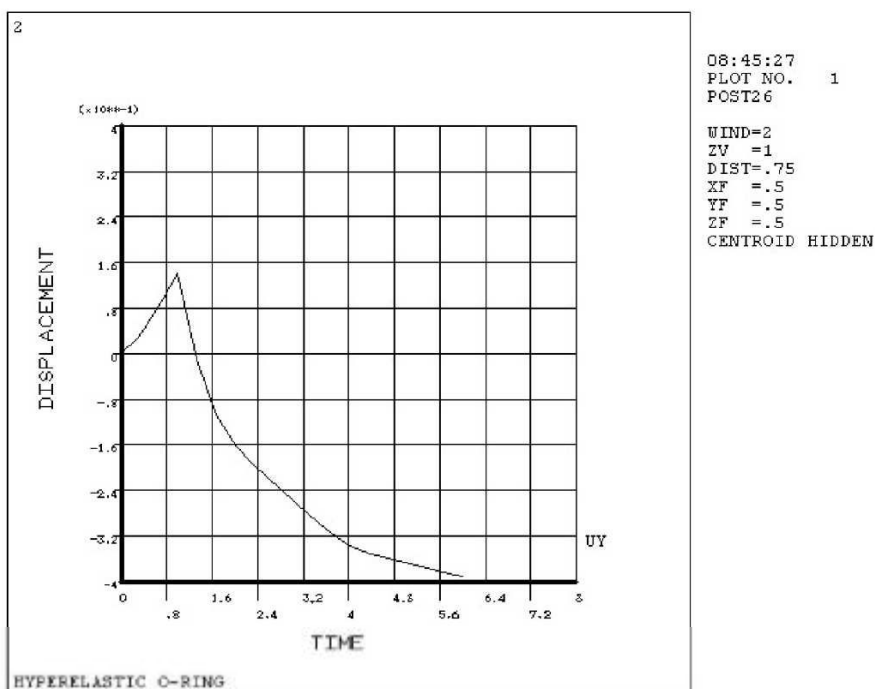


Рис. 26.14. Пример работы постпроцессора POST26

26.2. Основные возможности COSMOS/Works

Комплекс COSMOS/Works представляет собой сочетание системы трехмерного твердотельного моделирования SolidWorks с вычислительным комплексом COSMOS, реализующим метод конечного элемента для решения задач механики деформированного твердого тела (статических, динамических, устойчивости, термических, задач оптимизации). Этот комплекс реализует технологию быстрой реализации метода конечных элементов COSMOS/FFE (Fast Finite Element).

Существуют и другие примеры встраивания упрощенных расчетных пакетов в системы инженерного проектирования – упрощенный вариант ANSYS – DesignSpace интегрирован в Autodesk Inventor.

Комплекс SolidWorks обеспечивает быстрое построение трехмерных моделей твердых тел и изготовление их двумерных чертежей.

При загрузке вычислительного комплекса COSMOSw в стандартном меню SolidWorks появляется подменю COSMOS/Works, в котором содержатся все пункты, необходимые для быстрого расчета модели методом конечных элементов.

26.2.1. Вычислительные возможности комплекса COSMOS/Works

Комплекс COSMOS/Works позволяет производить следующие расчеты:

1. Анализ напряженно-деформированного состояния упругих тел (Linear Static Analysis) определяет напряжения, деформации и перемещения в узловых точках модели.
2. Определять собственные частоты колебаний упругих тел (Frequency Analysis) и формы колебаний.
3. Проверять устойчивость твердых тел (Linearized Buckling Analysis) и определять критическую силу.
4. Термические расчеты (Thermal Analysis) определяют распределение температур в теле под воздействием источников тепла, градиенты температуры и тепловые потоки.
5. Решать задачи оптимизации (Optimization) путем подбора оптимальных размеров тела, удовлетворяющих заданным условиям и заданной целевой функции.

Следует учесть, что возможности, достигаемые при самостоятельном использовании вычислительной системы COSMOSm, гораздо больше, чем при объединении ее с системой твердотельного моделирования SolidWorks. Комплекс COSMOS/Works предназначен для экспресс-анализа работоспособности модели. Так прочностные

задачи решаются только в упругой постановке. Самостоятельно используемый комплекс COSMOSm-Geostar может решать задачи и в упругопластической постановке и с учетом ползучести материала и имеет возможности, сопоставимые с ANSYS.

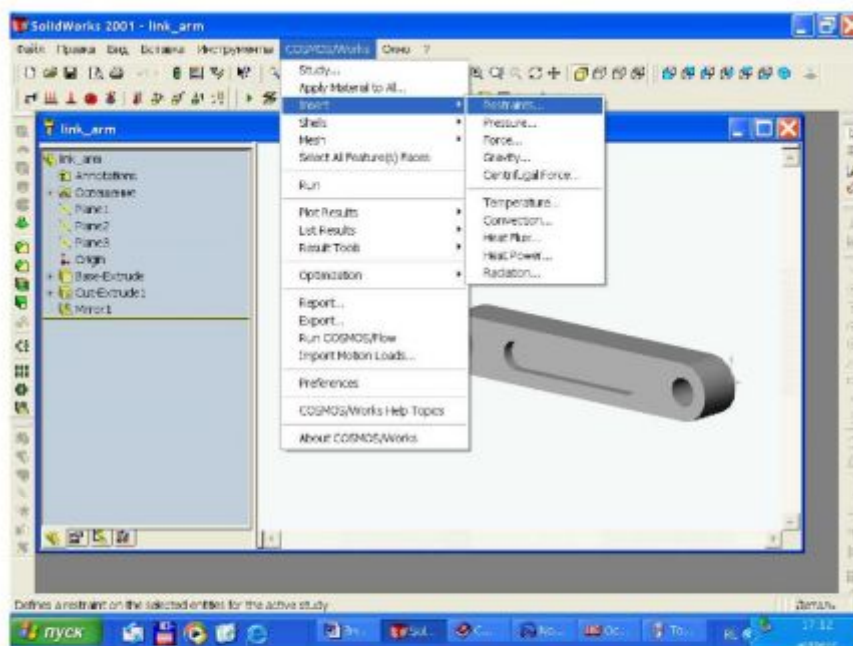


Рис. 26.15. Панель инструментов COSMOS/Works

26.2.2. Создание модели в SolidWorks

Если в ANSYS создание модели является весьма трудоемкой работой, то в SolidWorks модель создается гораздо быстрее и легче, конечно при наличии определенного опыта работы. SolidWorks — система твердотельного моделирования, то есть в ней создается объемная модель детали или конструкции. Затем объемную модель можно трансформировать в плоские чертежи.

Модель SolidWorks состоит из деталей, сборок и чертежей. Обычно сначала рисуется эскиз, создается основание, а затем в модель добавляются многочисленные элементы. (Можно также начать с импортированной поверхности или геометрии твердого тела.)

Можно сколько угодно совершенствовать чертеж, добавляя, изменяя элементы и их порядок. Связь между деталями, сборками и чертежами гарантирует, что изменения, сделанные в одном виде, автоматически выполняются во всех других видах. Чертежи или сборки можно создавать на любом этапе в процессе проектирования.

SolidWorks это система, работающая по принципу задания размеров. Можно задать размеры и геометрические взаимосвязи между элементами. При изменении размеров изменяется форма детали, но сохраняется общий замысел проекта.

Детали, сборки и чертежи отображают одну и ту же модель в различных документах. Любые изменения, которые вносятся в модель в одном документе, распространяются на все документы, содержащие эту модель.

Построение модели обычно начинается с создания плоского эскиза. Для создания элементов эскизы могут быть вытянуты, повернуты, рассечены сложным образом, смещены по контуру. Элементами могут быть формы (бобышки, вырезы, отверстия) и операции (скругления, фаски, оболочки и т. д.), которые комбинируются для построения деталей.

Готовую модель можно преобразовать в чертежи сборки и входящих в нее отдельных деталей.

SolidWorks позволяет также импортировать модели из других приложений.

ПРИМЕЧАНИЕ

Комплексе SolidWorks (не самой последней модели) содержит встроенный учебник на русском языке. Помощь в COSMOS/Works уже написана на английском языке.

26.2.3. Анализ поведения модели в COSMOS/Works

В системе ANSYS подготовка к расчету связана с использованием многочисленных меню Preprocessor и занимает довольно продолжительное время. В COSMOS/Works все команды подготовки к расчету, самому расчету и выводу результатов расчета сосредоточены в одном меню COSMOS/Works. Все процедуры анализа поведения модели занимают буквально пару минут.

После создания геометрической модели в SolidWorks для анализа поведения модели используется меню COSMOS/Works.

Обязательные этапы подготовки к расчету:

- Выбор типа расчета (области знаний),
- Выбор материала модели,
- Задание граничных условий в перемещениях (закрепление модели),
- Задание нагрузок, действующих на модель,
- Создание сетки конечных элементов

Далее непосредственно расчет поведения модели и анализ результатов расчета.

При подготовке к расчету сначала нужно выбрать область расчета (пункт **Study** на рис. 26.15). В открывшемся окне (рис. 26. 16) выбрать одну из пяти указанных ранее возможностей расчета. При этом полностью определяются установки вычислительного комплекса для расчета модели методом конечных элементов, учитывающие все особенности рассматриваемой области знаний, то есть определяется вид матрицы жесткости элементов.

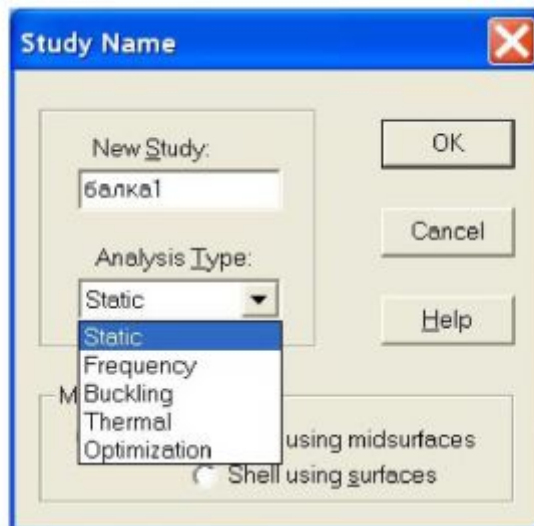


Рис. 26.16. Выбор типа расчета

После выбора типа расчета надо выбрать материал модели (пункт **Apply Material to all...** на рис. 26.15). При выборе этого пункта открывается окно библиотеки материалов (рис. 26.17), где содержатся свойства более тридцати различных материалов (в обозначениях американских стандартов).

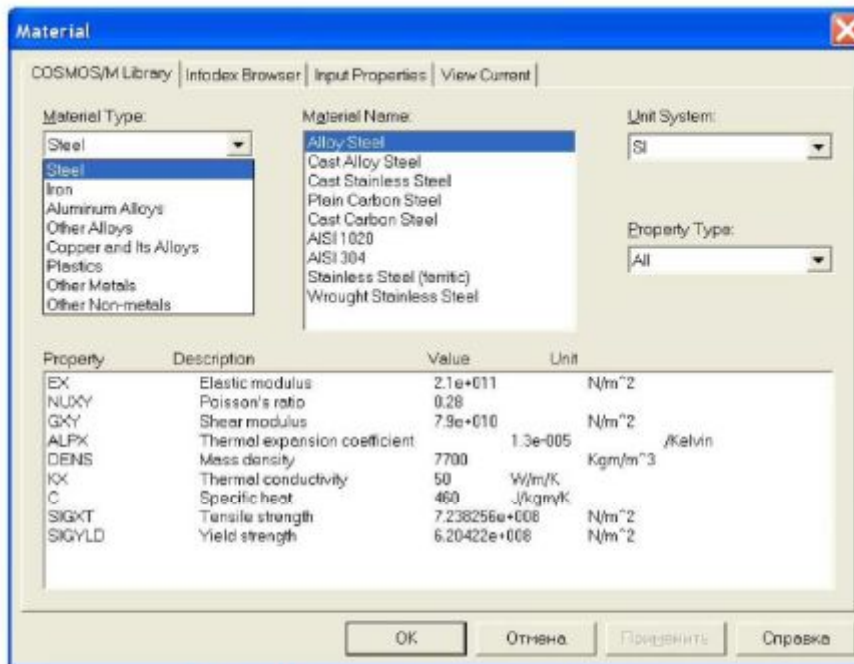


Рис. 26.17. Библиотека материалов COSMOS/Works

Далее надо ввести граничные условия в перемещениях и нагрузки на модель. На рис.26.15 справа открыто подменю ввода граничных условий (*restreines*) и нагрузок.

26.2.4. Создание сетки конечных элементов

Следующий этап создание на модели сетки конечных элементов. Это главный этап подготовки к расчету. Комплекс COSMOS/Works содержит совсем немного разновидностей конечных элементов. SolidWorks система трехмерного моделирования, и для всех моделей выбирается конечный элемент в форме тетраэдра. Для моделей оболочечного типа используется треугольный элемент.

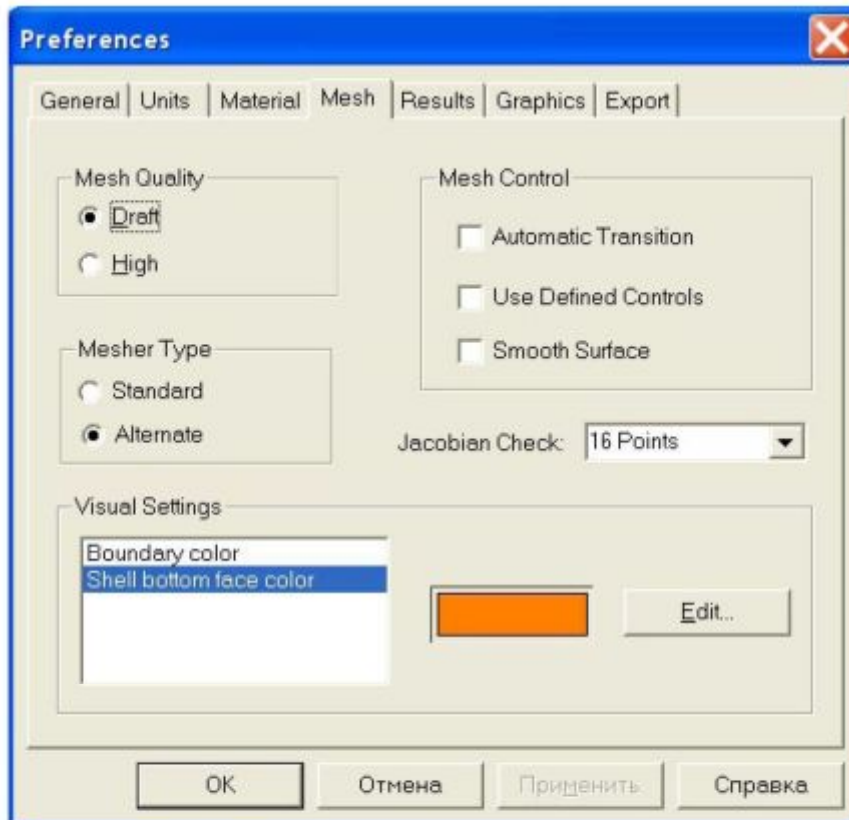


Рис. 26.18. Панель выбора параметров сетки конечных элементов

Для каждого элемента можно выбрать количество узлов. Узлы можно поместить только в вершинах (линейный элемент — пункт **Draft** на рис. 26.18) или в вершинах и в середине сторон (квадратичный элемент — пункт **High** на рис. 26.18). Примеры выбора типа конечного элемента приведены на рис. 26.19.

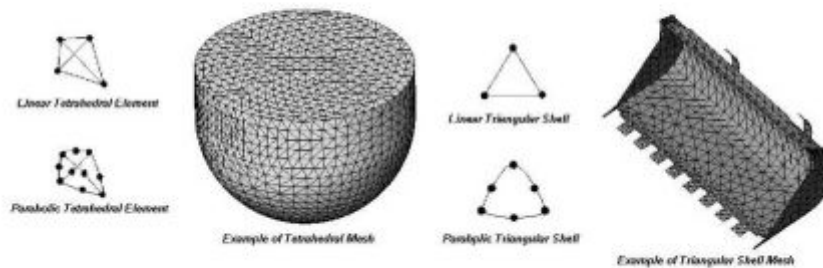


Рис. 26.19. Вид твердотельных и оболочечных элементов

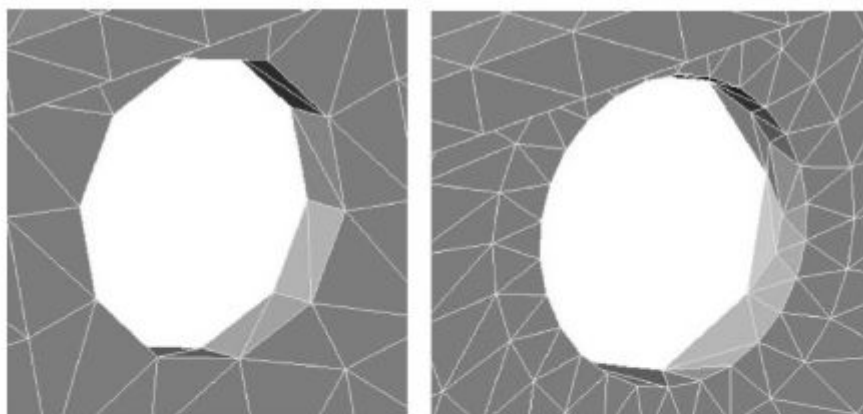


Рис. 26.20. Равномерная и сгущенная сетка конечных элементов

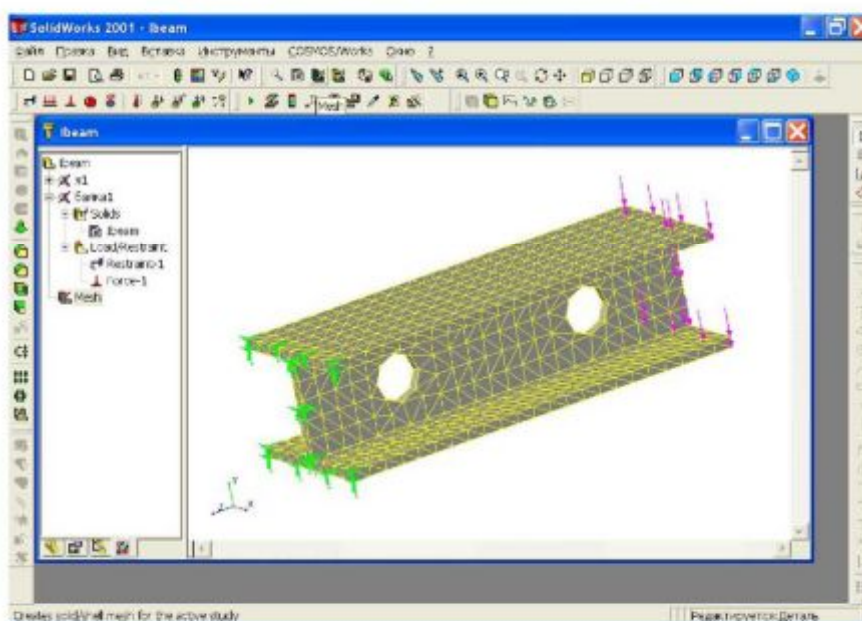


Рис. 26.21. Конечно-элементная модель балки

Сетка элементов может быть равномерной или сгущенной в местах концентрации напряжений. Эти два вида сетки вокруг отверстия в детали показаны на рис. 26.20. Полностью конечно-элементная модель показана на рис. 26.21. Следует сказать, что расчетчик может сам выбрать размеры конечных элементов. При выборе пункта **Mesh** в меню COSMOS/Works (рис.26.15) на экране появляется окно выбора размера элементов (рис. 26.22). Перемещая движок в сторону **Coarse** (крупнее) или **Fine** (мельче) можно изменять размеры элементов. В результате разбивки общее количество элементов на модели можно изменить примерно от 1000 до 15000 и более.



Рис. 26.22. Выбор размера конечных элементов

После создания сетки конечных элементов достаточно выбрать пункт **(Run)** на панели COSMOS/Works (рис. 26.15) для выполнения расчета. Расчет завершен.

26.2.5. Вывод результатов расчета в COSMOS/Works

Для просмотра результатов расчета в меню COSMOS/Works есть три пункта: **Plot Results**, **List Results**, **Results Tools** (графики, таблицы результатов, дополнительные возможности). В прочностных расчетах можно посмотреть на графиках и в таблицах распределение перемещений, деформаций, напряжений по узлам или по элементам сетки конечных элементов. В динамических расчетах выводятся также собственные частоты и форма колебаний на каждой собственной частоте. Есть возможность анимации колебаний модели. На рис. 26.23 приведены примеры графического вывода результатов расчета. На рис. 26.24 показана таблица напряжений в узлах модели.



Рис. 26.23. Графические результаты расчета. Слева — конечно-элементная модель, в центре — форма колебания на третьей собственной частоте, справа — изолинии напряжений в процессе колебаний

Stress						
List Details						
Study: data2						
Units: N/m ²						
Node	SIG_X	SIG_Y	SIG_Z	TAU_XY	TAU_XZ	TAU_YZ
1000	4.960e+004	1.342e+002	-5.821e+002	-2.890e+005	-5.461e+004	-1.270e+003
1001	-5.852e+005	6.280e+003	-2.422e+004	-2.478e+005	-1.442e+004	-2.188e+004
1002	2.164e+004	-4.273e+003	9.149e+002	-2.741e+005	-4.978e+004	-1.185e+004
1003	-6.130e+005	-8.271e+003	-7.220e+003	-2.541e+005	-3.866e+004	-2.097e+004
1004	-6.168e+003	-1.678e+004	4.790e+003	-2.606e+005	-4.705e+004	-1.462e+004
1005	-5.758e+005	-1.299e+004	6.233e+002	-2.476e+005	-4.366e+004	-1.523e+004
1006	-3.406e+004	-2.121e+004	4.580e+003	-2.510e+005	-4.375e+004	-1.504e+004
1007	-5.419e+005	-1.515e+004	1.034e+003	-2.409e+005	-3.999e+004	-1.206e+004
1008	-5.658e+004	-2.392e+004	3.633e+003	-2.429e+005	-3.909e+004	-1.452e+004
1009	-5.326e+005	-1.759e+004	7.672e+003	-2.394e+005	-2.111e+004	-1.261e+002
1010	-7.908e+004	-2.602e+004	4.139e+003	-2.378e+005	-3.391e+004	-1.195e+004
1011	-4.336e+005	-1.295e+004	-1.424e+004	-2.156e+005	-1.446e+004	-1.393e+004
1012	-1.001e+005	-2.259e+004	2.227e+003	-2.319e+005	-2.980e+004	-9.539e+003
1013	-4.523e+005	-1.451e+004	-3.465e+003	-2.206e+005	-2.267e+004	-1.151e+004
1014	-1.256e+005	-2.187e+004	3.257e+003	-2.244e+005	-2.569e+004	-8.032e+003
1015	-4.211e+005	-1.279e+004	1.014e+003	-2.128e+005	-2.285e+004	-7.513e+003

Рис. 26.24. Таблица результатов расчета напряжений в узлах модели

Самостоятельно независимо от системы COSMOS/Works работает комплекс Cosmosp, обладающий дополнительными вычислительными возможностями, сопоставимыми с возможностями ANSYS. В версии COSMOS/Works-2007 некоторые дополнительные возможности включены в состав COSMOS/Works. Но при этом изменился интерфейс (увеличилось число кнопок и меню), усложнилось использование комплекса. Огромный размер комплекса (2,5 Гбайт) предъявляет повышенные требования к мощности компьютера.

Хочу посоветовать пользователям любых компьютерных систем: не торопитесь менять старую версию на новую. Почти любая новая версия почти любой программы будет гораздо больше по размеру, сложнее, менее стабильна в работе, менее удобна и крайне редко добавляет какие-то действительно нужные вам возможности. Приятным исключением, по моему мнению, является [Adobe Acrobat 7.0 Professional](#), предоставляющий большие возможности и удобства при создании pdf-документов.

26.3. Основные возможности комплекса ZENIT

Познакомимся с российским вычислительным комплексом ZENIT. Он имеет значительно меньший размер и более прост в использовании, чем рассмотренные выше комплексы. Но его вычислительные возможности велики и сопоставимы с комплексом Cosmosp, то есть меньше, чем у ANSYS, но гораздо больше, чем у COSMOS/Works.

Далее приведем сведения из рекламного проспекта фирмы изготовителя комплекса НТП "ДИП", Россия, г. Санкт-Петербург, иллюстрирующего основные возможности вычислительного комплекса Zenit (рис. 26.25 – 26.28).

Zenit — современное динамично развивающееся программное средство для проектных и научно-исследовательских расчетов разнообразных пространственных конструкций, механизмов и приводов. Программа обеспечивает решение следующих задач:

- расчет деформаций и напряжений при действии статических нагрузок;
- параметров движения, деформаций и напряжений при динамических переходных процессах (удары, действие сейсмических нагрузок и т.п.);
- расчет частот и форм собственных колебаний;
- амплитуды вынужденных колебаний;
- параметры процессов теплопередачи;
- определение инерционных характеристик;
- расчет характеристик сечений стержней.

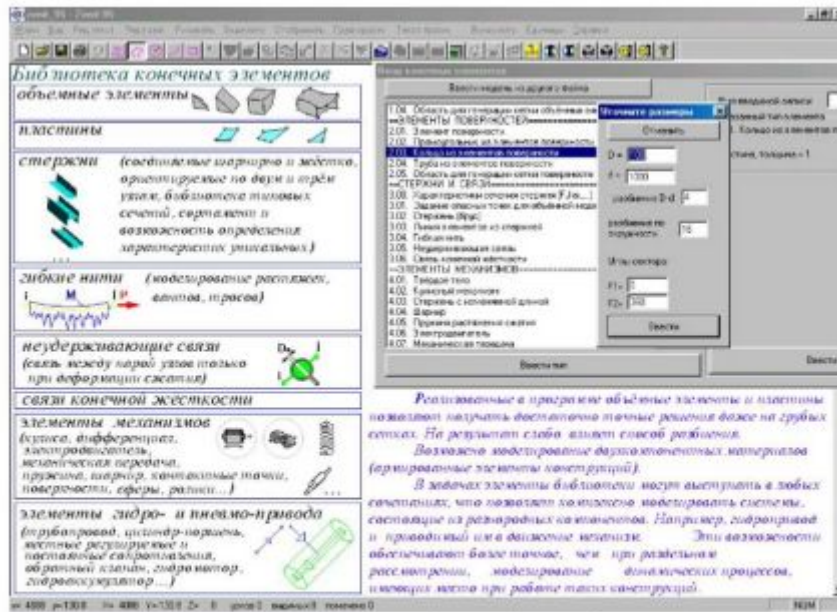
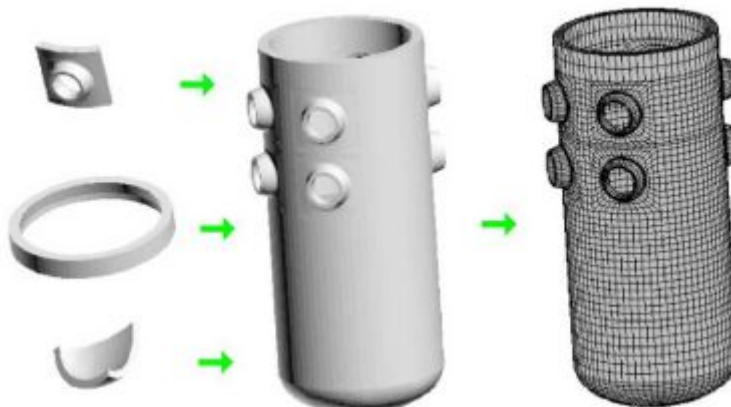


Рис. 26.25. Библиотека конечных элементов ZENIT

Библиотека параметризованных фрагментов



Наличие библиотеки параметризованных фрагментов позволяет быстро формировать модели сложной пространственной формы.

Рис. 26.26. Библиотека нестандартных элементов ZENIT

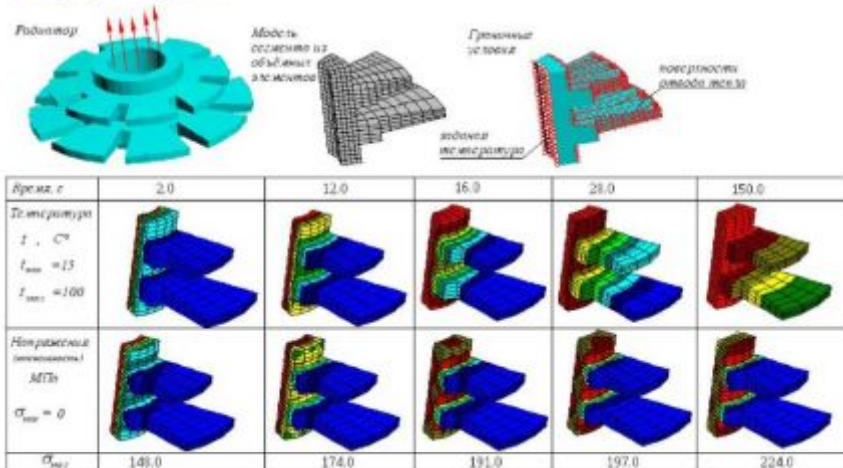
В библиотеке элементов имеются стержневые и объемные элементы, пластины и целый ряд специальных элементов (гибкие нити, неудерживающие связи, твердые тела, элементы механизмов, приводов, гидро- и пневмо-привода).

Решение задач может выполняться с учётом физической (пластические деформации) и геометрической нелинейности.



Рис. 26.27. Возможности задания граничных условий в ZENIT

Стационарные и нестационарные процессы теплопередачи
Температурные напряжения



Напряжения определяются при совместном действии температурных и механических нагрузок.
При возникновении неэластических деформаций определяются остаточные напряжения

Рис. 26.28. Пример решения тепловых задач в ZENIT

Отличительной особенностью программы является возможность решения задач как в рамках традиционного для МКЭ допущения о малых перемещениях, так и задач динамики сложных нелинейных механических систем с переменной структурой, элементы которых совершают большие кинематические перемещения и одновременно испытывают упругие деформации.

Имеются пополняемые базы данных по сечениям (сортамент), материалам и др. Обеспечена возможность задания нагрузок по СНИП (снеговые, ветровые, сейсмические и пр.).

Для ввода и редактирования исходных данных имеется удобный и эффективный графический редактор. Обеспечен импорт графических данных из AutoCAD, Компас и др. Вывод результатов возможен в виде графиков, таблиц и схем конструкции в исходном и смещенном состояниях.

Программа успешно используется на предприятиях в аэрокосмической, авиационной, судостроительной, машиностроительной и строительной отраслях.

Заключение

В настоящее время создано много различных вычислительных комплексов. Какой из них выбрать, изучить, что не так просто, использовать в работе? Нельзя объять необъятное и изучить все. Изучите какой-нибудь один комплекс, например, COSMOS/Works. В нем удобно создавать трехмерные модели и делать их чертежи, легко и быстро проводятся расчеты МКЭ. А вот инженеру придется ориентироваться на те комплексы, которые используются по месту работы. Это уже зависит от специфики предприятия, традиций, наличия лицензии на тот или иной комплекс.

Ясно одно. Инженер должен знать основы метода конечных элементов, иметь представление о возможностях вычислительных комплексов и быть готовым к их использованию в своей производственной деятельности.

Список литературы

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 2000. — 559с.
2. Алмаметов Ф.З., Арсеньев С.И., Курицын Н.А., Мишин А.М. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов. — М.: Высшая школа, 2003. — 367с.
3. Басов К.А. ANSYS Справочник пользователя. — М.: ДМК, 2005, — 563с.
4. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560с.
5. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. — М.: Машиностроение, 1979. — 567с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике (перевод с англ.), — М.: МИР, 1975, — 567с.
7. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера. — М.: УРСС, 2003, — 269с.
8. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. — М.: Машиностроение, 1985. — 223с.
9. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad. — СПб; Питер, 2003. — 455с.
10. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad 14. — СПб; Питер, 2007. — 592с.
11. Макаров Е.Г. Оценка чувствительности материалов к концентрации напряжений при переменных нагрузках. //Проблемы прочности. — 1973. №8. — С. 102 – 106.
12. Макаров Е.Г. Оценка влияния температуры на усталостную прочность сталей. //Проблемы прочности. — 1973. №11 — С. 102 –106.
13. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad. — СПб.; БХВ,2004. — 512с.
14. Макаров Е.Г. Элементы механики разрушения. — Ленинград.: ЛМИ, 1989. — 66с.
15. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение,1979. — 400с.
16. Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах. — Киев.: Наукова думка, 1988. — 2000с.
17. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. — М.: Высшая школа, 1985. — 400с.
18. Петерсен Р. "Коэффициенты концентрации напряжений". — М.: МИР, 1977, — 302с.
19. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев.: Наука, 1975. — 400с.
20. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов, — М.: МИР, 1979, — 567с.
21. Сопротивление материалов. Под ред. Смирнова А.Ф., — М.: Высшая школа, 1975. — 480с.
22. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560с.
23. Шалашилин В.И., Горшков А.Г., Трошин В.Н. Сопротивление материалов. — М.: МАИ, 2000. — 615с.