

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ**

Учебное пособие

В учебном пособии приведены основные теоретические положения расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций, варианты и примеры выполнения расчетно-проектировочных работ по курсу «Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности».

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1. Расчеты на прочность и жесткость стержней при центральном растяжении (сжатии)	8
1.1. Основные положения расчетов на прочность и жесткость стержней при центральном растяжении (сжатии)	8
1.2. Варианты расчетно-проектировочной работы «Расчеты на прочность и жесткость стержня при растяжении (сжатии)»	11
1.3. Расчетно-проектировочная работа «Расчеты на прочность и жесткость стержня при растяжении (сжатии)»	12
2. Геометрические характеристики сечения бруса	18
2.1. Основные положения при определении геометрических характеристик сечения бруса	18
2.2. Варианты расчетно-проектировочной работы «Определение геометрических характеристик составного сечения бруса»	21
2.3. Расчетно-проектировочная работа «Определение геометрических характеристик составного сечения бруса»	22
3. Расчеты на прочность и жесткость валов при кручении	27
3.1. Основные положения расчетов на прочность и жесткость валов при кручении	27
3.2. Варианты расчетно-проектировочной работы «Расчеты на прочность и жесткость вала при кручении»	31
3.3. Расчетно-проектировочная работа «Расчеты на прочность и жесткость вала при кручении»	33
4. Расчеты на прочность и жесткость балок при плоском изгибе	40
4.1. Основные положения расчетов на прочность и жесткость балок при плоском изгибе	40
4.2. Варианты расчетно-проектировочной работы «Расчеты на прочность и жесткость балки при плоском изгибе»	46
4.3. Расчетно-проектировочная работа «Расчеты на прочность и жесткость балки при плоском изгибе»	49
5. Расчеты на прочность брусев при внецентренном растяжении (сжатии)	59
5.1. Основные положения расчетов на прочность брусев при внецентренном растяжении (сжатии)	59
5.2. Варианты расчетно-проектировочной работы «Расчет на прочность стального бруса при внецентренном растяжении»	62

5.3.	Варианты расчетно-проектировочной работы «Расчет на прочность бетонного бруса при внецентренном сжатии»	64
5.4.	Расчетно-проектировочная работа «Расчет на прочность стального бруса при внецентренном растяжении»	66
5.5.	Расчетно-проектировочная работа «Расчет на прочность бетонного бруса при внецентренном сжатии»	69
6.	Расчеты элементов конструкций на циклическую прочность	74
6.1.	Основные положения расчетов элементов конструкций на циклическую прочность	74
6.2.	Варианты расчетно-проектировочной работы «Расчет вала на циклическую прочность»	100
6.3.	Расчетно-проектировочная работа «Расчет вала на циклическую прочность»	102
7.	Расчеты колонн на устойчивость инженерным методом . .	112
7.1.	Основные положения расчетов колонн на устойчивость инженерным методом	113
7.2.	Варианты расчетно-проектировочной работы «Расчет колонны на устойчивость инженерным методом»	115
7.3.	Расчетно-проектировочная работа «Расчет колонны на устойчивость инженерным методом»	117
8.	Расчеты колонн на устойчивость энергетическим методом	122
8.1.	Основные положения расчетов колонн на устойчивость энергетическим методом	122
8.2.	Варианты расчетно-проектировочной работы «Расчет колонны на устойчивость энергетическим методом»	126
8.3.	Расчетно-проектировочная работа «Расчет колонны на устойчивость энергетическим методом»	127
9.	Анализ напряженно-деформированного состояния при оценке прочности элементов конструкций	131
9.1.	Основные положения теории напряженно-деформированного состояния элементов конструкций	131
9.2.	Варианты расчетно-проектировочных работ «Анализ напряженно-деформированного состояния при оценке прочности элементов конструкций»	137
9.3.	Расчетно-проектировочная работа «Анализ напряженно-деформированного состояния при оценке прочности элемента конструкции из пластичного материала»	138

9.4. Расчетно-проектировочная работа «Анализ напряженно-деформированного состояния при оценке прочности элемента конструкции из хрупкого материала»	143
10. Расчеты на прочность и жесткость круглых пластин при осесимметричном изгибе	148
10.1. Основные положения расчетов на прочность и жесткость круглых пластин при осесимметричном изгибе	148
10.2. Варианты расчетно-проектировочных работ «Расчеты на прочность и жесткость круглых пластин при осесимметричном изгибе»	153
10.3. Расчетно-проектировочная работа «Расчеты на прочность и жесткость круглой стальной пластины при осесимметричном изгибе»	157
10.4. Расчетно-проектировочная работа «Расчеты на прочность и жесткость круглой бетонной пластины при осесимметричном изгибе»	163
11. Расчеты на прочность и жесткость прямоугольных пластин при изгибе	170
11.1. Основные положения расчетов на прочность и жесткость прямоугольных пластин при изгибе	170
11.2. Варианты расчетно-проектировочных работ «Расчеты на прочность и жесткость прямоугольных пластин при изгибе»	173
11.3. Расчетно-проектировочная работа «Расчеты на прочность и жесткость стальной прямоугольной пластины при изгибе»	177
11.4. Расчетно-проектировочная работа «Расчеты на прочность и жесткость бетонной прямоугольной пластины при изгибе»	183
Приложения	189
Список литературы	208

ВВЕДЕНИЕ

Повышение качества подготовки бакалавров, инженеров, магистров, обладающих глубокими фундаментальными знаниями и практическими навыками, имеет большое и непреходящее значение. Существенная роль в решении этой задачи принадлежит курсу «Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности».

Сопротивление материалов деформированию и разрушению это часть механики деформируемого твердого тела, которая рассматривает методы инженерных расчетов на прочность, жесткость и устойчивость типовых элементов инженерных конструкций. Изучение курса имеет целью овладение инженерными методами и навыками прочностных расчетов типовых элементов конструкций. Из большого разнообразия элементов сооружений и машин в данном курсе рассматриваются наиболее простые, часто встречающиеся элементы, которые схематизируются и сводятся к типовым расчетным схемам.

При решении задач курса “Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности” принимаются следующие допущения. Материал бруса (элемента конструкции) рассматривается как сплошная среда (гипотеза о сплошности тел). Это позволяет отвлечься от реальной (дискретной, кристаллической, зернистой) структуры материала и рассматривать его как непрерывно заполненный объем тела (элемента конструкции). Далее, материал бруса принимается однородным (гипотеза об однородности), а его механические свойства (упругость, прочность, пластичность и др.) в любой точке бруса (элемента конструкции) – одинаковы.

Непрерывная тенденция повышения надежности элементов сооружений и деталей машин предъявляет высокие требования к проектным решениям, поскольку конструкция должна быть достаточно прочной, а в необходимых случаях - жесткой и устойчивой и, вместе с тем, иметь наименьшую материалоемкость, трудоемкость изготовления и стоимость. В значительной мере эта задача может быть решена за счет рационального проектирования на основе современных методов прочностных расчетов. Важно иметь в виду, что обеспечение прочности, жесткости и устойчивости инженерных конструкций неразрывно связано с рациональной технологией их производства и совершенными методами эксплуатации. В связи с этим глубокое знание курса “Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности” необходимо для широкого круга специалистов, занимающихся как проектированием, так и производством и эксплуатацией сооружений и машин.

Теория упругости изучает напряженное и деформированное состояния твердого упругого тела (бруса, элемента конструкции), вызванные силовыми и температурными воздействиями. Аналогичными вопросами занимается и сопротивление материалов. Однако теория упругости решает свои задачи более общими и точными методами, применяя сравнительно сложный математический аппарат. К теории упругости близко примыкает теория пластичности.

Теория пластичности изучает закономерности образования напряжений и деформаций, возникающих на стадии пластического деформирования тела (бруса, элемента конструкции).

Теория упругости и пластичности имеет два основных назначения: 1) оценка точности и пределов применимости решений задач, полученных методами сопротивления материалов; 2) решение таких задач, которые не могут быть решены методами сопротивления материалов (расчет пластин, оболочек, балок-стенок, массивных тел и др.).

Относительно новой ветвью механики сплошных деформируемых сред является **теория ползучести (вязкоупругости)**. Свойство ползучести материала состоит в том, что даже при постоянных нагрузках напряжения и деформации в материале (брусе, элементе конструкции) изменяются во времени. Изменение во времени деформаций нагруженного образца или элемента конструкции называется **ползучестью**. Например, вследствие ползучести диска и лопаток газовой турбины могут перекрываться зазоры между лопатками и корпусом, что приведет к разрушению лопаток. Изменение во времени напряжений деформированного образца или элемента конструкции называется **релаксацией**. Так, за счет релаксации напряжений в болтах фланцевого соединения может нарушаться герметичность паропровода.

Занятия по курсу “Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности” должны сопровождаться ведением конспекта лекций и изучением рекомендуемых учебников, решением задач и выполнением лабораторных работ. Большие трудности студенты испытывают при выполнении расчетно-проектировочных работ (РПР), поскольку нередко отсутствуют соответствующие учебные и справочные пособия для решения предлагаемых задач. Во многих случаях выполненные студентами решения РПР без учебных пособий являются в методическом отношении не совершенными, не увязанными с теоретическими положениями курса и физической сущностью задач. Указанные мотивы побудили авторов подготовить данное учебное пособие. Для студентов, желающих использовать ПЭВМ при выполнении РПР, рекомендуем имеющиеся на кафедре вычислительные программы.

1. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

Центральное растяжение испытывают тяги различного назначения, болты, шпильки, элементы несущих ферм; центральное сжатие – разного рода штоки, колонны, пуансоны кузнечных прессов, другие детали и элементы конструкций.

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

Центральное растяжение (сжатие) возникает в том случае, когда внешние сосредоточенные силы, распределенные нагрузки или их равнодействующая приложены вдоль оси стержня. Стержень – это брус (элемент конструкции) с прямолинейной осью, работающий на растяжение (сжатие). Сосредоточенные силы такие, которые передаются через малые площадки (давление шарика на кольцо подшипника; усилия, возникающие на кромке резца). Распределенные нагрузки передаются через протяженные участки стержня (силы веса, инерции стержня; силы трения при нагружении составного стержня с прессовым соединением).

В поперечных сечениях стержня возникает один внутренний силовой фактор – нормальная сила N_z . Нормальная сила принимается положительной по знаку, если она растягивает стержень и наоборот. Положительная нормальная сила направлена от поперечного сечения стержня. Для вычисления нормальных сил на участках стержня используют метод сечений: стержень на рассматриваемом участке мысленно рассекают на левую и правую части; действие отброшенной части на оставшуюся заменяют положительной нормальной силой; затем составляют алгебраическую сумму проекций всех сил и распределенных нагрузок на продольную ось для рассматриваемой части стержня и определяют закон изменения нормальной силы на конкретном участке стержня. Задаваясь абсциссами для ряда сечений стержня, вычисляют значения нормальных сил и строят эпюру N_z . Эпюра это график, который представляет собой закон изменения нормальной силы или другой механической величины (напряжения, перемещения) вдоль оси стержня.

В каждой точке поперечного сечения стержня действуют нормальные напряжения σ , которые определяются по формуле

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F}, \quad (1.1)$$

где N_z – значение нормальной силы; F – площадь рассматриваемого поперечного сечения. Механическое напряжение это сила, приходящаяся на единицу площади сечения бруса, когда величина площади стремится к нулю. Нормальные растягивающие напряжения принимаются по знаку положительными, сжимающие – отрицательными.

Нормальные напряжения σ и упругие относительные деформации ε , возникающие в поперечном сечении стержня, взаимосвязаны законом Р. Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.2)$$

где E – модуль упругости материала при растяжении (сжатии). Для сталей среднее значение $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. В осях $\sigma - \varepsilon$ формула (1.2) представляет собой прямую. Закон Р. Гука (1.2) справедлив, если рабочее напряжение σ не превышает предела пропорциональности материала при растяжении.

При действии внешних сосредоточенных сил и распределенных нагрузок стержень на одних участках растягивается, на других – сжимается. Перемещение Δz рассматриваемого сечения стержня с абсциссой z вычисляется по закону Р. Гука в интегральной форме

$$\Delta z = \int_z \frac{N_z dz}{EF}, \quad (1.3)$$

где EF – жесткость сечения при растяжении (сжатии) стержня.

Для обеспечения надежной работы элемента конструкции в виде стержня необходимо выполнение условия прочности: наибольшие напряжения, действующие в опасном сечении стержня, не должны превышать допускаемых напряжений

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N_z}{F} \right|_{\max} \leq [\sigma], \quad (1.4)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение. Допускаемым называется такое напряжение, которое обеспечивает надежную работу элемента конструкции с заданным запасом прочности. Допускаемое нормальное напряжение вычисляется следующим образом: для пластичных материалов $[\sigma] = \sigma_T / n_T$; для хрупких материалов $[\sigma] = \sigma_{вр} / n_{вр}$, где σ_T – предел текучести пластичного материала при растяжении; $\sigma_{вр}$ – предел прочности хрупкого материала при растяжении; $n_T \approx 2 \div 4$ – коэффициент запаса прочности по пределу текучести; $n_{вр} \approx 3 \div 6$ – коэффициент запаса прочности по пределу прочности. При обосновании коэффициентов запаса прочности учитываются возможные перегрузки при работе элемента конструкции, деградация механических свойств материала при эксплуатации, степень ответственности и

капитальности, опыт проектирования и эксплуатации конструкции, технико-экономические и другие показатели.

В ряде случаев элемент конструкции в виде стержня должен быть не только прочным, но и достаточно жестким. Для этого должно выполняться условие жесткости: наибольшие перемещения Δz_{\max} , возникающие при работе стержня, не должны превышать допускаемых перемещений $[\delta]$

$$\Delta z_{\max} = \left| k_{\Delta z} \frac{Pl}{EF} \right|_{\max} \leq [\delta], \quad (1.5)$$

где $k_{\Delta z}$ – коэффициент, определяемый из эпюры перемещений Δz . Величина допускаемого перемещения $[\delta]$ обосновывается в каждом конкретном случае в соответствии с требованиями по жесткости конструкции.

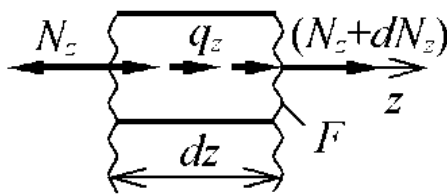


Рис. 1.1. К определению дифференциальных зависимостей между q_z , N_z и Δz

Анализируя с учетом (1.3) уравнение равновесия элемента dz стержня (рис. 1.1), можно установить следующие дифференциальные зависимости между приложенной к стержню распределенной нагрузкой q_z , нормальной силой N_z и перемещением Δz рассматриваемого сечения. Первая производная от нормальной силы по абсциссе сечения z численно равна распределенной нагрузке

$$\frac{dN_z}{dz} = |\pm q_z|. \quad (1.6)$$

Первая производная от перемещения Δz по абсциссе сечения z с точностью до постоянного множителя равна нормальной силе

$$\frac{d(\Delta z)}{dz} = \frac{N_z}{EF}. \quad (1.7)$$

Вторая производная от перемещения по абсциссе сечения с точностью до постоянного множителя численно равна распределенной нагрузке

$$\frac{d^2(\Delta z)}{dz^2} = \frac{|\pm q_z|}{EF}. \quad (1.8)$$

С учетом указанных дифференциальных зависимостей можно сформулировать следующие правила контроля эпюр N_z и Δz :

- если в каком-то сечении стержня приложена сосредоточенная сила, то на эпюре N_z в этом же сечении должен быть скачок, равный приложенной силе, а на эпюре Δz – излом;
- в сечениях, где $q_z = 0$ или $N_z = 0$, на эпюрах соответственно N_z или Δz наблюдаются экстремумы (максимумы или минимумы);

- кривизна эпюры N_z и Δz определяется знаками вторых производных: если $d^2 N_z / dz^2 < 0$ и $d^2 (\Delta z) / dz^2 < 0$, то в правой системе координат эпюры N_z и Δz будут выпуклыми, в противном случае – вогнутыми кривыми;
- на участках стержня, где эпюра $N_z > 0$, эпюра Δz возрастает, а при $N_z < 0$ эпюра Δz убывает.

При расчетах на прочность и жесткость стержней возможны три характерных случая. Первый: известны действующие внешние нагрузки, материал (следовательно $[\sigma]$), продольные размеры стержня, тогда из условий прочности и жесткости определяются допускаемые поперечные размеры стержня и окончательно принимаются большие значения. Второй: известны поперечные и продольные размеры стержня, материал. В этом случае из условий прочности и жесткости вычисляются допускаемые внешние нагрузки и окончательно выбираются меньшие значения. Третий: из конструкторских и технологических разработок известны внешние нагрузки, материал, размеры стержня. При такой постановке задачи проверяется выполнение условий прочности и жесткости, а затем дается заключение о работоспособности элемента конструкции.

1.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ СТЕРЖНЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)»

Задача ступенчатый стержень, нагруженный внешними сосредоточенными силами P_i ($i = 1, \dots, 4$) и распределенными нагрузками q_j ($j = 1, \dots, 4$). Обобщенная расчетная схема стержня показана на рисунке 1.2. Исходные данные для расчетов взять из табл. 1.1 в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ). При расчетах принять: распределенная нагрузка $q=2$ кН/см; $q_2=0$; длина $l=50$ см; сила $P=0,5ql=50$ кН; модуль упругости материала стержня при растяжении (сжатии) $E=2 \cdot 10^5$ МПа; предел текучести материала стержня $\sigma_T=300$ МПа; допускаемое перемещение $[\delta]=2 \cdot 10^{-1}$ м.

Необходимо для ступенчатого стержня выполнить следующее.

1. Начертить индивидуальную расчетную схему стержня.
2. Построить эпюру нормальных сил N_z в долях P .
3. Построить эпюру нормальных напряжений σ_z в долях P/F , где $F = \pi d^2 / 4$ – площадь сечения диаметром d стержня.
4. Построить эпюру перемещений Δz в долях Pl/EF .
5. Найти диаметры поперечных сечений участков стержня из условия прочности при заданном коэффициенте запаса прочности n_T .
6. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости стержня.

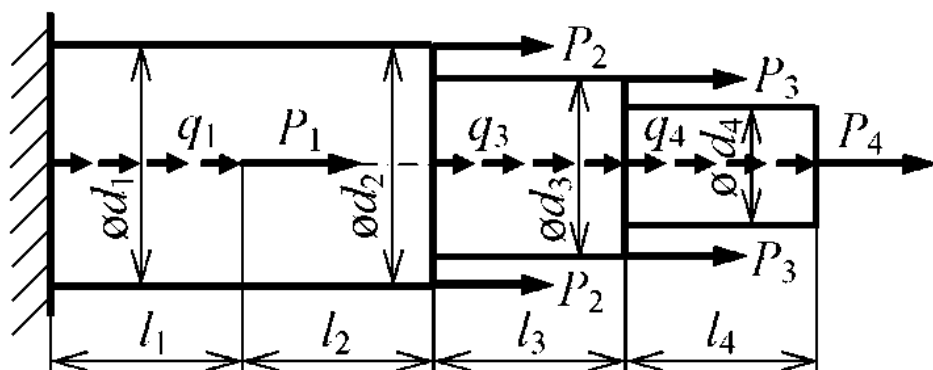


Рис 1.2. Обобщенная расчетная схема стержня

Табл. 1.1. Исходные данные

ЦНВ	1-я ЦНВ				2-я ЦНВ				3-я ЦНВ				4-я ЦНВ			
	l_1	P_1	d_1	d_2	l_2	P_2	d_3	q_1	l_3	P_3	d_4	q_3	l_4	P_4	n_T	q_4
1	$2l$	$-2P$	$2d$	$2d$	$2l$	$5P$	$0,5d$	$-q$	l	P	$2d$	0	l	$7P$	$2,0$	q
2	$3l$	$-P$	$3d$	$3d$	$3l$	$-4P$	$2,5d$	$2q$	$4l$	$4P$	$3d$	$-q$	$3l$	$-8P$	$2,5$	$2q$
3	l	$2P$	$4d$	$4d$	l	$4P$	$1,5d$	$-3q$	$2l$	$-5P$	$4d$	$2q$	$1,5l$	$5P$	$3,0$	$3q$
4	$2l$	$3P$	$6d$	$6d$	$2l$	$-3P$	$1,5d$	$-2q$	$3l$	$3P$	$5d$	$-2q$	$2l$	$-6P$	$3,5$	$4q$
5	$3l$	$-3P$	$2d$	$2d$	$3l$	$-2P$	d	$2q$	$2l$	$-3P$	d	0	l	$6P$	$4,0$	$-q$
6	$2l$	$4P$	$2d$	$2d$	$2l$	$3P$	$2d$	q	l	$2P$	$2d$	$3q$	$2l$	$-4P$	$4,5$	$-2q$
7	$4l$	$-4P$	$8d$	$8d$	$4l$	$-P$	$1,5d$	$-q$	$3l$	$-2P$	d	$-3q$	$1,5l$	$4P$	$5,0$	$-3q$
8	l	$5P$	$3d$	$3d$	l	$-2P$	$2d$	$3q$	$2l$	P	$2d$	$4q$	$3l$	$-2P$	$2,0$	$-4q$
9	$1,5l$	$5P$	$5d$	$5d$	$1,5l$	P	d	$-4q$	$3l$	$-6P$	d	$-4q$	$4l$	$2P$	$3,0$	$5q$
0	l	P	d	d	l	$-5P$	$1,5d$	q	$1,5l$	$-4P$	d	q	$2l$	$-10P$	$1,5$	0

1.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ СТЕРЖНЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)»

Задан ступенчатый стержень, нагруженный внешними сосредоточенными силами P_i и распределенными нагрузками q_j . При этом:

$$\begin{array}{llll}
 d_1 = d, & l_1 = l, & P_1 = 4P, & q_1 = -3q, \\
 d_2 = d, & l_2 = l, & P_2 = -2P, & q_3 = -2q, \\
 d_3 = 1,5d, & l_3 = 1,5l, & P_3 = -5P, & q_4 = q, \\
 d_4 = 2d, & l_4 = 2l, & P_4 = 8P, & n_T = 2,5.
 \end{array}$$

При расчетах принять: распределенная нагрузка $q=2$ кН/см; $q_2=0$; длина $l=50$ см; сила $P=0,5ql=50$ кН; модуль упругости материала стержня при растяжении (сжатии) $E=2 \cdot 10^5$ МПа; предел текучести материала стержня $\sigma_T=300$ МПа; допускарное перемещение $[\delta]=2 \cdot 10^{-1}$ м.

Необходимо для ступенчатого стержня выполнить следующее.

1. Начертить индивидуальную расчетную схему стержня.
2. Построить эпюру нормальных сил N_z в долях P .
3. Построить эпюру нормальных напряжений σ_z в долях P/F , где $F = \pi d^2/4$ – площадь сечения диаметром d стержня.
4. Построить эпюру перемещений Δz в долях Pl/EF .
5. Найти диаметры поперечных сечений участков стержня из условия прочности при заданном коэффициенте запаса прочности n_T .
6. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости стержня.

РЕШЕНИЕ

1. Вычерчиваем индивидуальную расчетную схему стержня (рис. 1.3) в соответствии с цифрами номера варианта. При положительных значениях P_i или q_j их направления, показанные на обобщенной расчетной схеме, сохраняются неизменными. Если P_i или q_j заданы отрицательными, то в индивидуальной расчетной схеме их направления изменяются на противоположные, а их значения в дальнейших расчетах принимаются положительными.

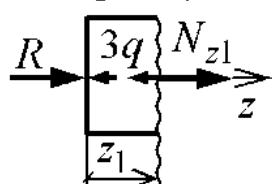
2. Находим реакцию опоры из условия статического равновесия стержня

$$\sum Z = R - 3ql + 4P - 4P - 2q \cdot 1,5l - 10P + q \cdot 2l + 8P = 0,$$

откуда получаем $R = 4ql + 2P = +10P$.

3. Используя метод сечений, определяем законы изменения нормальной силы на участках стержня.

Первый участок:

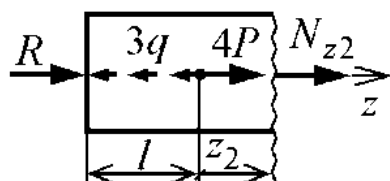


$$\sum Z = R - 3qz_1 + N_{z1} = 0, \quad N_{z1} = 3qz_1 - 10P.$$

$$\text{При } z_1 = 0 \quad N_{z1} = -10P,$$

$$\text{при } z_1 = l \quad N_{z1} = 3ql - 10P = -4P.$$

Второй участок:



$$\sum Z = R - 3ql + 4P + N_{z2} = 0,$$

$$N_{z2} = 3ql - R - 4P = -8P.$$

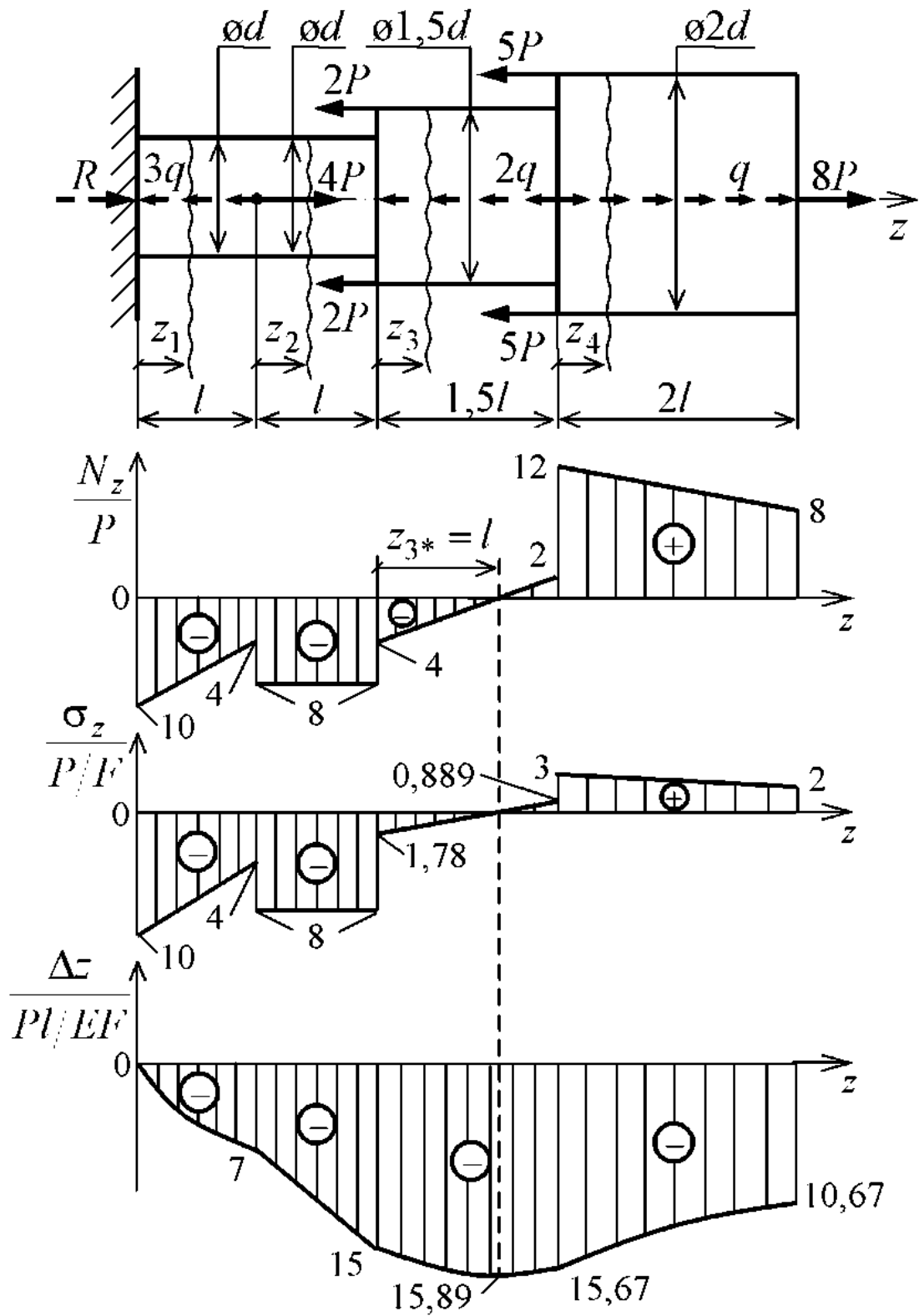
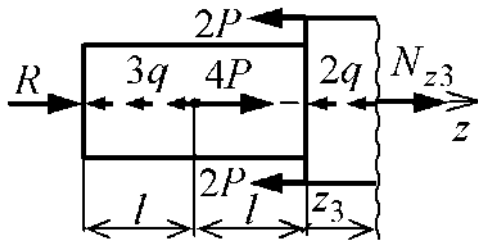


Рис. 1.3. Индивидуальная расчетная схема стержня и эпюры нормальных сил, нормальных напряжений и перемещений

Третий участок:



$$\sum Z = R - 3ql + 4P - 4P -$$

$$-2qz_3 + N_{z3} = 0,$$

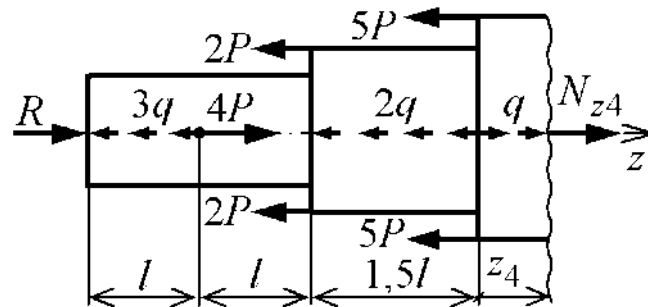
$$N_{z3} = 2qz_3 - 4P.$$

$$\text{При } z_3 = 0 \quad N_{z3} = -4P,$$

$$\text{при } z_3 = 1,5l \quad N_{z3} = 2q \cdot 1,5l - 4P = 2P.$$

Видно, что непрерывная функция N_{z3} меняет знак. Следовательно, она принимает нулевое значение $N_{z3} = 2qz_{3*} - 4 \cdot 0,5ql = 0$ при $z_{3*} = l$.

Четвертый участок:



$$\sum Z = R - 3ql + 4P - 4P - 2q \cdot 1,5l - 10P + qz_4 + N_{z4} = 0, \quad N_{z4} = 12P - qz_4.$$

$$\text{При } z_4 = 0 \quad N_{z4} = 12P, \quad \text{при } z_4 = 2l \quad N_{z4} = 12P - q \cdot 2l = 8P.$$

По полученным значениям N_z строим эпюру нормальных сил (рис. 1.3).

4. Обозначаем площадь поперечного сечения стержня диаметром d через $F = \pi d^2/4$ и выражаем через F площади поперечных сечений участков стержня: $F_1 = F$; $F_2 = F$; $F_3 = \pi(1,5d)^2/4 = 2,25F$; $F_4 = \pi(2d)^2/4 = 4F$.

5. Вычисляем нормальные напряжения, действующие в поперечных сечениях, на участках стержня.

$$\text{Первый участок: } \sigma_{z1} = \frac{N_{z1}}{F_1} = \frac{3qz_1 - 10P}{F}.$$

$$\text{При } z_1 = 0 \quad \sigma_{z1} = -10P/F, \quad \text{при } z_1 = l \quad \sigma_{z1} = -4P/F.$$

$$\text{Второй участок: } \sigma_{z2} = \frac{N_{z2}}{F_2} = -8 \frac{P}{F}.$$

$$\text{Третий участок: } \sigma_{z3} = \frac{N_{z3}}{F_3} = \frac{2qz_3 - 4P}{2,25F}.$$

$$\text{При } z_3 = 0 \quad \sigma_{z3} = -1,78P/F, \quad \text{при } z_3 = 1,5l \quad \sigma_{z3} = 0,889P/F.$$

$$\text{Четвертый участок: } \sigma_{z4} = \frac{N_{z4}}{F_4} = \frac{12P - qz_4}{4F}.$$

$$\text{При } z_4 = 0 \quad \sigma_{z4} = 3P/F, \quad \text{при } z_4 = 2l \quad \sigma_{z4} = 2P/F.$$

По полученным значениям σ_z строим эпюру нормальных напряжений в долях P/F (рис. 1.3).

6. Используя закон Р. Гука в интегральной форме, находим перемещения на участках стержня.

$$\text{Первый участок: } \Delta z_1 = \int_0^{z_1} \frac{N_{z_1} dz_1}{EF_1} = \int_0^{z_1} \frac{(3qz_1 - 10P) dz_1}{EF} = \frac{1,5qz_1^2 - 10Pz_1}{EF}.$$

$$\text{При } z_1 = 0 \quad \Delta z_1 = 0, \text{ при } z_1 = 0,5l \quad \Delta z_1 = \frac{1,5q \cdot 0,25l^2 - 5Pl}{EF} = -4,25 \frac{Pl}{EF},$$

$$\text{при } z_1 = l \quad \Delta z_1 = \frac{1,5ql^2 - 10Pl}{EF} = -7 \frac{Pl}{EF}.$$

Кривизну квадратной параболы Δz_1 определим по знаку второй производной. Поскольку $d^2(\Delta z_1)/dz_1^2 = 3q/EF > 0$, то функция Δz_1 на этом участке является вогнутой.

$$\text{Второй участок: } \Delta z_2 = \delta_{\text{нк2}} + \int_0^{z_2} \frac{(-8P) dz_2}{EF_2}.$$

Перемещение начала координат второго участка равно

$$\delta_{\text{нк2}} = \Delta z_1|_{z_1=l} = -7 \frac{Pl}{EF}. \text{ С учетом этого получаем } \Delta z_2 = -7 \frac{Pl}{EF} - 8 \frac{Pz_2}{EF}.$$

$$\text{При } z_2 = 0 \quad \Delta z_2 = -7 \frac{Pl}{EF}, \text{ при } z_2 = l \quad \Delta z_2 = -15 \frac{Pl}{EF}.$$

$$\text{Третий участок: } \Delta z_3 = \delta_{\text{нк3}} + \int_0^{z_3} \frac{(2qz_3 - 4P) dz_3}{EF_3}.$$

Перемещение начала координат третьего участка равно $\delta_{\text{нк3}} = \Delta z_2|_{z_2=l} =$

$$= -15 \frac{Pl}{EF}. \text{ С учетом этого находим } \Delta z_3 = -15 \frac{Pl}{EF} + \frac{qz_3^2 - 4Pz_3}{2,25EF}.$$

$$\text{При } z_3 = 0 \quad \Delta z_3 = -15 \frac{Pl}{EF}, \text{ при } z_3^* = l \quad \Delta z_3 = -15,89 \frac{Pl}{EF},$$

$$\text{при } z_3 = 1,5l \quad \Delta z_3 = -15,67 \frac{Pl}{EF}.$$

Поскольку вторая производная $d^2(\Delta z_3)/dz_3^2 = 2q/2,25EF > 0$, то функция перемещений Δz_3 является вогнутой.

$$\text{Четвертый участок: } \Delta z_4 = \delta_{\text{нк4}} + \int_0^{z_4} \frac{(12P - qz_4) dz_4}{EF_4}.$$

Перемещение начала координат четвертого участка равно

$$\delta_{\text{иск4}} = \Delta z_3 \Big|_{z_3 = 1,5l} = -15,67 \frac{Pl}{EF}. \text{ С учетом этого получаем}$$

$$\Delta z_4 = -15,67 \frac{Pl}{EF} + \frac{12Pz_4 - 0,5qz_4^2}{4EF}.$$

$$\text{При } z_4 = 0 \quad \Delta z_4 = -15,67 \frac{Pl}{EF}, \text{ при } z_4 = l \quad \Delta z_4 = -12,92 \frac{Pl}{EF},$$

$$\text{при } z_4 = 2l \quad \Delta z_4 = -10,67 \frac{Pl}{EF}.$$

Так как вторая производная $d^2(\Delta z_4)/dz_4^2 = -q/4EF < 0$, то функция Δz_4 является выпуклой.

По вычисленным значениям Δz строим эпюру перемещений в долях Pl/EF (рис. 1.3).

7. Вычисляем допускаемое нормальное напряжение

$$[\sigma] = \sigma_r / n_r = 300 / 2,5 = 120 \text{ МПа},$$

где $\sigma_r = 300 \text{ МПа}$ – предел текучести материала стержня при растяжении;
 $n_r = 2,5$ – коэффициент запаса прочности стержня.

8. Из условия прочности при растяжении (сжатии) стержня

$$\sigma_{\text{max}} = \left| \frac{N_z}{F} \right|_{\text{max}} = \left| -\frac{10P}{\pi d^2/4} \right| \leq [\sigma]$$

вычисляем допускаемый диаметр

$$[d]_{\sigma} = \sqrt{\frac{10P \cdot 4}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 72,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 72,8 \text{ мм}.$$

9. Проверяем выполнение условия жесткости стержня

$$\begin{aligned} \Delta z_{\text{max}} &= \left| k_{\Delta z} \frac{Pl}{EF} \right|_{\text{max}} = \left| -15,89 \frac{Pl}{EF} \right| = \frac{15,89 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 0,0728^2} = \\ &= 4,78 \cdot 10^{-4} \text{ м} > [\delta] = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

Видно, что условие жесткости не выполняется.

10. Определяем допускаемый диаметр из условия жесткости стержня

$$[d]_{\delta} = \sqrt{\frac{15,89Pl \cdot 4}{E\pi[\delta]}} = \sqrt{\frac{15,89 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}} = 0,112 \text{ м} = 112 \text{ мм}.$$

Таким образом, окончательно принимаем: $d_1 = d = 112 \text{ мм}$; $d_2 = d = 112 \text{ мм}$;
 $d_3 = 1,5d = 168 \text{ мм}$; $d_4 = 2d = 224 \text{ мм}$. При этих значениях поперечных размеров будет обеспечена как прочность, так и жесткость стержня.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЯ БРУСА

В расчетах на прочность и жесткость при растяжении (сжатии) в качестве геометрической характеристики используется площадь сечения

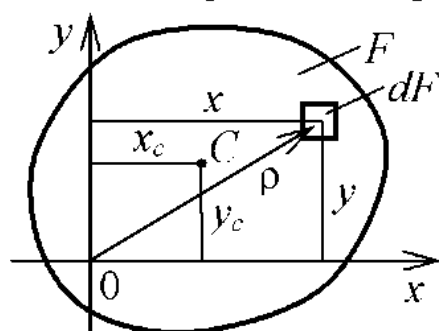


Рис. 2.1. Сечение бруса

стержня. В аналогичных расчетах при кручении валов, изгибе балок, сложном сопротивлении брусьев помимо площади используются следующие геометрические характеристики сечения (рис. 2.1): статические моменты площади S_x, S_y ; осевые J_x, J_y , центробежный J_{xy} и полярный J_p моменты инерции; осевые W_x, W_y и полярный W_p моменты сопротивления.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕЧЕНИЯ БРУСА

Статическим моментом площади F сечения называется сумма произведений из элементарных площадок dF на их координаты до оси

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF \quad [\text{см}^3]. \quad (2.1)$$

Значения S_x, S_y могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. На основе теоремы о точке приложения равнодействующей координаты центра тяжести сечения можно представить

$$x_c = S_y / F, \quad y_c = S_x / F. \quad (2.2)$$

Осевым моментом инерции сечения называется сумма произведений из элементарных площадок dF на квадраты расстояний до оси

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF \quad [\text{см}^4]. \quad (2.3)$$

Значения J_x, J_y могут быть только положительными.

Центробежным моментом инерции сечения называется сумма произведений из элементарных площадок dF на их координаты до осей

$$J_{xy} = \int_F xy dF \quad [\text{см}^4]. \quad (2.4)$$

Значения J_{xy} могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Характерно, что если сечение бруса имеет хотя бы одну ось симметрии, совпадающую с координатной осью, то центробежный момент инерции такого сечения равен нулю.

Полярным моментом инерции сечения называется сумма произведений из элементарных площадок dF на квадраты расстояний ρ до выбранной точки O (рис. 2.1), называемой полюсом,

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \quad [\text{см}^4], \quad J_p > 0. \quad (2.5)$$

Если иметь в виду, что $\rho^2 = x^2 + y^2$ (рис. 2.1), то с учетом формул (2.3) и (2.5) получаем

$$J_p = J_x + J_y. \quad (2.6)$$

В расчетах на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций используются главные центральные оси и главные центральные моменты инерции. Главными центральными осями инерции x_0, y_0 называются такие оси, которые проходят через центр тяжести сечения и относительно которых центробежный момент инерции $J_{x_0 y_0}$ равен нулю. Моменты инерции J_{x_0}, J_{y_0} относительно главных центральных осей x_0, y_0 называются главными центральными моментами инерции. Осевые и полярные моменты сопротивления сечения вычисляются через соответствующие моменты инерции следующим образом

$$W_{x_0} = J_{x_0} / y_{\max}, \quad W_{y_0} = J_{y_0} / x_{\max}, \quad W_p = J_p / \rho_{\max} \quad [\text{см}^3], \quad (2.7)$$

где x_{\max}, y_{\max} – расстояния от главных центральных осей инерции до наиболее удаленных точек сечения; ρ_{\max} – расстояние от центра тяжести до наиболее удаленных точек круглого или кольцевого сечений бруса.

Для вычисления геометрических характеристик наиболее распространенных сечений бруса используются формулы таблицы П.1. Геометрические характеристики прокатных профилей (равнобокий и неравнобокий уголки, швеллер, двутавр) определяются по справочным таблицам сортамента П.2 ... П.5.

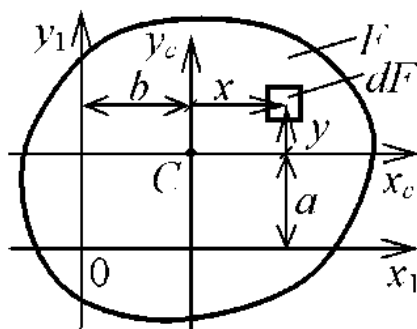


Рис. 2.2. К определению моментов инерции сечения относительно осей, параллельных центральным

При вычислении осевых и центробежных моментов инерции составного сечения бруса возникает необходимость в определении аналогичных характеристик составляющих элементов относительно осей, параллельных центральным (рис. 2.2). Момент инерции сечения относительно оси x_1 (или y_1), параллельной центральной x_c (или y_c), равен моменту инерции относительно центральной оси J_{x_c} (или J_{y_c}) плюс произведение площади сечения F на квадрат расстояния a (или b) между осями

$$J_{x_1} = J_{xc} + Fa^2, \quad J_{y_1} = J_{yc} + Fb^2. \quad (2.8)$$

Центробежный момент инерции сечения относительно осей $x_1 - y_1$, параллельных центральным $x_c - y_c$, равен центробежному моменту инерции J_{xcyc} относительно центральных осей плюс произведение площади сечения F на координаты $(\pm a)(\pm b)$ центра тяжести C в параллельных осях $x_1 - y_1$

$$J_{x_1y_1} = J_{xcyc} + F(\pm a)(\pm b). \quad (2.9)$$

Для определения положения главных центральных осей $x_0 - y_0$ и величин главных центральных моментов инерции сечения необходимо знать, как изменяются осевые J_{x_1} , J_{y_1} и центробежный $J_{x_1y_1}$ моменты инерции при повороте осей $x_1 - y_1$ на угол α (рис. 2.3). В этом случае

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{x_1y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

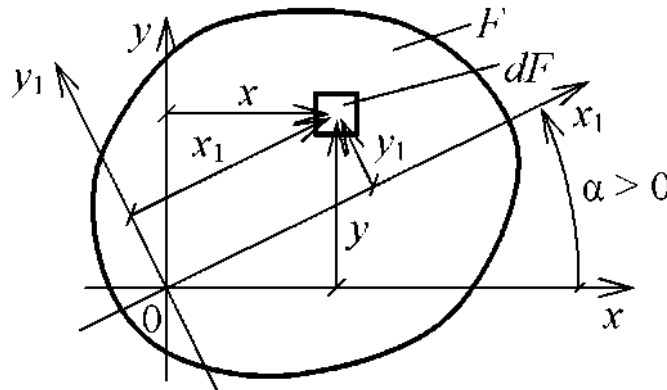


Рис. 2.3. К определению моментов инерции при повороте осей

Положение главных центральных осей $x_0 - y_0$ (рис. 2.4) и величины главных центральных моментов инерции сечения J_{x_0} , J_{y_0} вычисляются по формулам

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xcyc}}{J_{xc} - J_{yc}}, \quad \alpha_0 = 0,5 \operatorname{arctg} \left(-\frac{2J_{xcyc}}{J_{xc} - J_{yc}} \right); \quad (2.11)$$

$$J_{x_0/y_0} = J_{\max/\min} = \frac{J_{xc} + J_{yc}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{xc} - J_{yc})^2 + 4J_{xcyc}^2}. \quad (2.12)$$

При вычислении геометрических характеристик составного сечения бруса необходимо иметь в виду следующее. Статические моменты площади, осевые, центробежный и полярный моменты инерции составного сече-

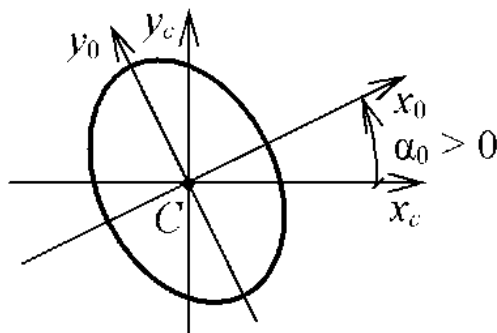


Рис. 2.4. К определению положения главных центральных осей и главных центральных моментов инерции сече-

ния равны алгебраической сумме аналогичных величин для составляющих сечение элементов. Для сечения, содержащего полость, статические моменты площади, осевые, центробежный и полярный моменты инерции равны разности соответствующих величин для контурной фигуры и полости. Осевые и полярный моменты сопротивления составного сечения не складываются и не вычитаются, а вычисляются только через соответствующие моменты инерции.

2.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ БРУСА»

Задано составное сечение бруса (табл. 2.1) в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ). Пример компоновки сечения показан на рис. 2.5.

Требуется для составного сечения выполнить следующее.

1. Сделать компоновку элементов, вычертить в масштабе сечение, выбрать координатные оси и определить положение центра тяжести сечения.
2. Найти осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей.
3. Определить положение главных центральных осей инерции сечения.
4. Вычислить осевые моменты инерции и осевые моменты сопротивления сечения относительно главных центральных осей.

Таблица 2.1. Исходные данные

ЦНВ	1-я ЦНВ	2-я ЦНВ	3-я ЦНВ	4-я ЦНВ
	b , мм	h , мм	уголок	№ профиля
1	25	150	75x50x8	швеллер № 10
2	24	160	90x90x9	двутавр № 12
3	23	170	125x80x8	швеллер № 14
4	22	180	110x110x8	двутавр № 16
5	21	190	140x90x8	швеллер № 18
6	20	200	100x100x16	двутавр № 20
7	19	210	160x100x12	швеллер № 22
8	18	220	125x125x10	двутавр № 24
9	17	230	140x90x10	швеллер № 27
0	16	240	75x75x8	двутавр № 27

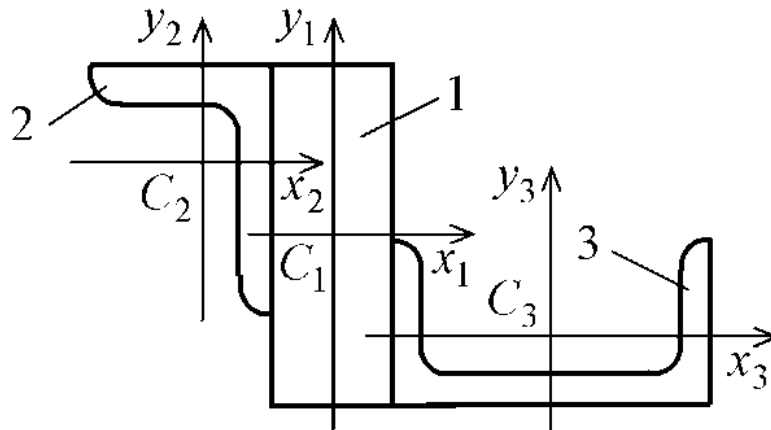


Рис. 2.5. Вариант компоновки составного сечения

2.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ БРУСА»

Задано составное сечение бруса, состоящее из трех элементов: прямоугольника размерами $b = 15$ мм и $h = 200$ мм; равнобокого уголка 75 мм \times 75 мм \times 5 мм; швеллера № 16.

Требуется для составного сечения выполнить следующее.

1. Сделать компоновку элементов, вычертить в масштабе сечение, выбрать координатные оси и определить положение центра тяжести сечения.
- 2) Найти осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей.
- 3) Определить положение главных центральных осей инерции сечения.
- 4) Вычислить осевые моменты инерции и осевые моменты сопротивления сечения относительно главных центральных осей.

РЕШЕНИЕ

1. С учетом цифр номера варианта и сортамента прокатной стали (табл. П.2 ... П.5) вычерчиваем в масштабе составное сечение бруса (рис. 2.6).
2. Находим геометрические характеристики сечений отдельных элементов относительно собственных центральных осей $x_i - y_i$.

2.1. Полоса: $F_1 = b \times h = 1,5 \times 20 = 30 \text{ см}^2$; $J_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,5 \cdot 20^3}{12} = 1000 \text{ см}^4$;

$$J_{y1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 1,5^3}{12} = 5,62 \text{ см}^4; J_{x1,y1} \equiv 0.$$

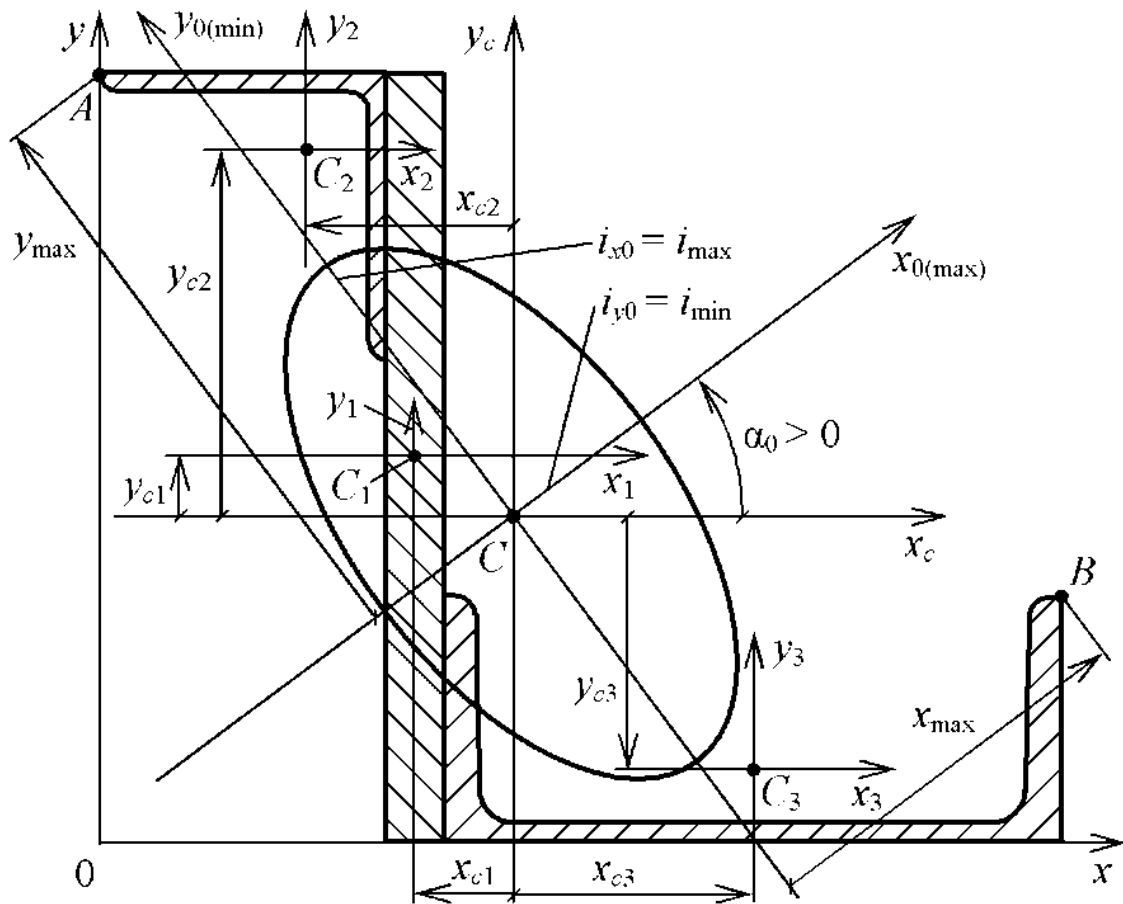


Рис. 2.6. К определению геометрических характеристик сечения бруса

2.2. Равнобокий уголок $7,5 \text{ мм} \times 7,5 \text{ мм} \times 5 \text{ мм}$. Из таблицы П.2 сортамента находим: $F_2 = 7,39 \text{ см}^2$; $x_0 = 2,02 \text{ см}$; $J_{x_2} = 39,5 \text{ см}^4$; $J_{y_2} = 39,5 \text{ см}^4$; $J_{\max} = 62,6 \text{ см}^4$; $J_{\min} = 16,4 \text{ см}^4$; $\alpha = -45^\circ$. Центробежный момент инерции

$$J_{x_2 y_2} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \sin 2\alpha = \frac{62,6 - 16,4}{2} (-1) = -23,1 \text{ см}^4.$$

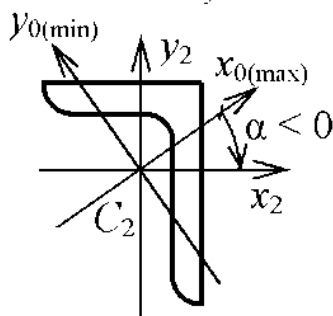


Рис. 2.7. К определению центробежного момента инерции неравнобокого уголка

Примечание. В качестве примера рассмотрим методику определения центробежного момента инерции $J_{x_2 y_2}$ для неравнобокого уголка $100 \text{ мм} \times 63 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$, расположенного так, как показано на рис. 2.7. Из таблицы П.3 сортамента находим: $F_2 = 15,5 \text{ см}^2$; $J_{x_2} = 154 \text{ см}^4$; $J_{y_2} = 47,1 \text{ см}^4$; $J_{\min} = 28,3 \text{ см}^4$; $J_{\max} = J_{x_2} + J_{y_2} - J_{\min} = 154 + 47,1 - 28,3 = 172,8 \text{ см}^4$; $\text{tg } \alpha = -0,387$; $\alpha = -21,2^\circ$. Центробежный момент инерции равен

$$J_{x_2 y_2} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{172,8 - 28,3}{2} \sin 2(-21,2^\circ) = -48,7 \text{ см}^4.$$

2.3. Швеллер № 16

Из таблицы П.4 с учетом поворота сечения (рис. 2.7) находим: $F_3 = 18,0 \text{ см}^2$; $x_0 = 1,79 \text{ см}$; $J_{x3} = J_{\min} = 63,3 \text{ см}^4$; $J_{y3} = J_{\max} = 747 \text{ см}^4$; $J_{x_3y_3} = 0$.

3. Выбираем произвольные оси $x - y$ (рис. 2.6) и вычисляем координаты центров тяжести элементов в этих осях:

$$C_1 (x_{1c} = 7,5 + 0,75 = 8,25 \text{ см}; y_{1c} = 10 \text{ см});$$

$$C_2 (x_{2c} = 7,5 - 2,02 = 5,48 \text{ см}; y_{2c} = 20 - 2,02 = 17,98 \text{ см});$$

$$C_3 (x_{3c} = 7,5 + 1,5 + 8 = 17,0 \text{ см}; y_{3c} = 1,79 \text{ см}).$$

4. Определяем координаты центра тяжести C сечения в осях $x - y$

$$x_c = \frac{\sum F_i x_{ic}}{\sum F_i} = \frac{30 \cdot 8,25 + 7,39 \cdot 5,48 + 18,0 \cdot 17,0}{30 + 7,39 + 18,0} = 10,7 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum F_i y_{ic}}{\sum F_i} = \frac{30 \cdot 10,0 + 7,39 \cdot 17,98 + 18,0 \cdot 1,79}{30 + 7,39 + 18,0} = 8,39 \text{ см}.$$

5. Вычисляем координаты центров тяжести C_i элементов в центральных осях $x_c - y_c$ составного сечения

$$C_1 (x_{c1} = 8,25 - 10,7 = -2,45 \text{ см}; y_{c1} = 10 - 8,40 = 1,60 \text{ см});$$

$$C_2 (x_{c2} = 5,48 - 10,7 = -5,22 \text{ см}; y_{c2} = 17,98 - 8,40 = 9,58 \text{ см});$$

$$C_3 (x_{c3} = 17,0 - 10,7 = 6,30 \text{ см}; y_{c3} = 1,79 - 8,39 = -6,60 \text{ см}).$$

6. Используя формулы (2.8) и (2.9), находим осевые и центробежный моменты инерции составного сечения относительно центральных осей $x_c - y_c$

$$J_{xc} = \sum (J_{xi} + F_i y_{ci}^2) = (1000 + 30 \cdot 1,60^2) + (39,5 + 7,39 \cdot 9,58^2) + \\ + [63,3 + 18,0 \cdot (-6,60)^2] = 2642 \text{ см}^4;$$

$$J_{yc} = \sum (J_{yi} + F_i x_{ci}^2) = [5,62 + 30 \cdot (-2,45)^2] + [39,5 + 7,39 \cdot (-5,22)^2] + \\ + (747 + 18,0 \cdot 6,30^2) = 1888 \text{ см}^4;$$

$$J_{xcyc} = \sum (J_{x_i y_i} + F_i x_{ci} y_{ci}) = [0 + 30 \cdot (-2,45) \cdot 1,60] + \\ + [-23,1 + 7,39 \cdot (-5,22) \cdot 9,58] + [0 + 18,0 \cdot 6,30 \cdot (-6,60)] = -1258 \text{ см}^4.$$

7. Находим положение главных центральных осей инерции $x_0 - y_0$ составного сечения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xcyc}}{J_{xc} - J_{yc}} = -\frac{2 \cdot (-1258)}{2642 - 1888} = 3,337; \quad 2\alpha_0 = 73,32^\circ, \quad \alpha_0 = 36,7^\circ.$$

Так как угол $\alpha_0 > 0$, то он откладывается против часовой стрелки от осей $x_c - y_c$. Проводим главные центральные оси инерции $x_0 - y_0$ составного сечения (рис. 2.6).

8. Вычисляем главные центральные моменты инерции составного сечения бруса

$$J_{x_0; y_0} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{2642 + 1888}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2642 - 1888)^2 + 4 \cdot (-1258)^2} = 2265 \pm 1313 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_0} = J_{\max} = 3578 \text{ см}^4, \quad J_{y_0} = J_{\min} = 952 \text{ см}^4.$$

9. Находим наиболее удаленные от осей $x_0 - y_0$ точки составного сечения. От оси x_0 наиболее удалена точка A , от оси y_0 — точка B (рис. 2.6). Вычисляем их координаты в центральных осях $x_c - y_c$:

$$A (x_A = -10,7 \text{ см}; y_A = 20 - 8,40 = 11,6 \text{ см});$$

$$B (x_B = 7,5 + 1,5 + 16 - 10,7 = 14,3 \text{ см}; y_B = 6,40 - 8,40 = -2,00 \text{ см}).$$

10. Определяем расстояния от главных центральных осей x_0 и y_0 до наиболее удаленных точек A и B :

$$x_{\max} = |x_B \cos \alpha_0 + y_B \sin \alpha_0| = 14,3 \cdot 0,8018 + (-2,00) \cdot 0,5976 = 10,3 \text{ см};$$

$$y_{\max} = |y_A \cos \alpha_0 - x_A \sin \alpha_0| = 11,6 \cdot 0,8018 - (-10,7) \cdot 0,5976 = 15,7 \text{ см}.$$

11. Находим осевые моменты сопротивления составного сечения бруса

$$W_{x_0} = \frac{J_{x_0}}{y_{\max}} = \frac{3578}{15,7} = 228 \text{ см}^3; \quad W_{y_0} = \frac{J_{y_0}}{x_{\max}} = \frac{952}{10,3} = 92,4 \text{ см}^3.$$

12. При расчетах на прочность в условиях сложного сопротивления бруса, расчетах колонн на устойчивость используются главные радиусы инерции сечения

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{\sum I_i}} = \sqrt{\frac{3578}{55,39}} = 8,04 \text{ см}; \quad i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{\sum I_i}} = \sqrt{\frac{952}{55,39}} = 4,15 \text{ см}.$$

Принимая главные радиусы инерции i_{x_0} , i_{y_0} за полуоси, строим эллипс инерции (рис. 2.6). Последний может использоваться для графоаналитического метода определения осевых и центробежного моментов инерции составного сечения бруса относительно произвольных осей.

13. Определяем величины главных моментов инерции J_{x_0} , J_{y_0} и положение главных центральных осей x_0 , y_0 графоаналитическим способом с помощью круга инерции O . Мора (обратная задача). Для этого выбираем координатные оси J_x , J_y и J_{xy} (рис. 2.8). В масштабе откладываем предварительно вычисленные значения J_{x_c} (отрезок OA), $J_{x_c y_c}$ (AC), J_{y_c} (OB), $-J_{x_c y_c}$ (BD). Соединяем точки C и D . Затем радиусом CE описываем окружность. От-

резки OG и OF представляют собой главные центральные моменты инерции $J_{x_0} = 3578 \text{ см}^4$ и $J_{y_0} = 952 \text{ см}^4$ соответственно. Далее находим зеркальные проекции точек C и D на окружность (C' и D'). Через точки F и C' , F и D' проводим главные центральные оси инерции x_0 и y_0 , которые расположены под углом $\alpha_0 = 36,7^\circ$ к центральным осям x_c и y_c . Видно, что аналитическое и графоаналитическое решения задачи совпадают.

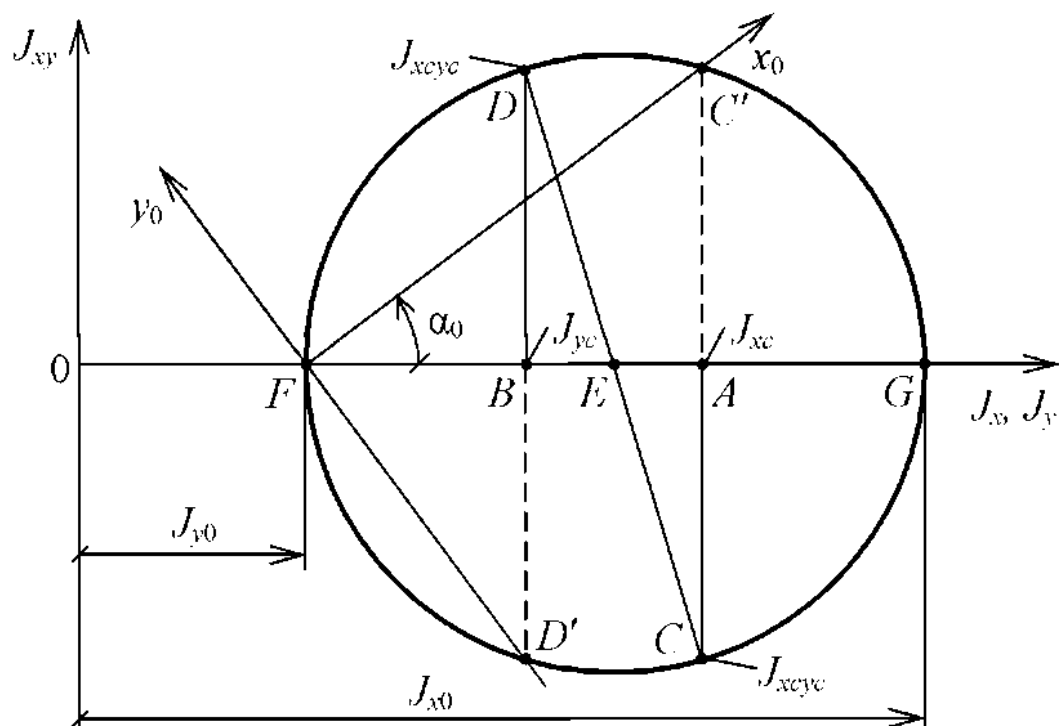


Рис. 2.8. Построение круга инерции О. Мора

3. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ВАЛОВ ПРИ КРУЧЕНИИ

Кручение испытывают валы коробок передач транспортных средств, коробок подач металлообрабатывающих станков, редукторов и многих других агрегатов и машин.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ВАЛОВ ПРИ КРУЧЕНИИ

Вал это брус (элемент конструкции) с прямолинейной осью, работающий на кручение. Кручение вызывается парами сосредоточенных и распределенных сил, действующими перпендикулярно оси вала (рис. 3.1).

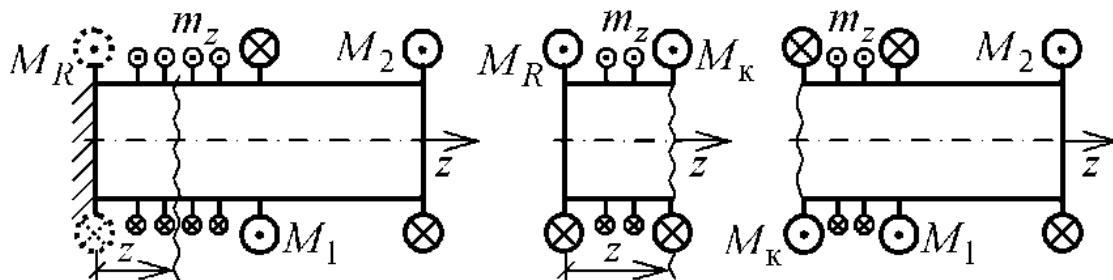


Рис. 3.1. К определению крутящего момента в сечении вала

Сосредоточенный крутящий момент M (Нм) такой, который передается через сравнительно малую длину (например, через шестерни, шкивы, звездочки цепных передач). Распределенный крутящий момент m_z (Нм/м) передается через более значительную длину участка вала (например, вал с прессовым или шлицевым соединениями). В поперечных сечениях вала возникает один внутренний силовой фактор – крутящий момент в сечении M_K . Крутящий момент в сечении принимается положительным по знаку, если при взгляде со стороны сечения он направлен против часовой стрелки и наоборот. Для определения крутящего момента в сечении используется метод сечений: на рассматриваемом участке вал мысленно рассекают на левую и правую части; действие отброшенной (правой или левой) части на оставшуюся заменяют положительным крутящим моментом M_K ; затем составляют алгебраическую сумму всех сосредоточенных M и распределенных m_z моментов относительно оси z для оставшейся части вала и определяют закон изменения крутящего момента M_K вдоль оси z вала. Задаваясь абсциссами z для ряда сечений участков вала, вычисляют значения крутящих моментов в сечении и строят эпюру M_K .

В поперечных сечениях вала возникают касательные напряжения τ (рис. 3.2), которые для вала круглого или кольцевого сечений вычисляются по формуле

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} \rho, \quad (3.1)$$

где M_k – крутящий момент в сечении; J_p – полярный момент инерции круглого или кольцевого сечений (табл. П.1); ρ – радиус рассматриваемого слоя. Знак касательных напряжений в поперечном сечении вала совпадает со знаком крутящего момента M_k . Наибольшие касательные напряжения в произвольном сечении вала, возникающие в наиболее удаленном слое (рис. 3.2), определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}. \quad (3.2)$$

где W_p – полярный момент сопротивления круглого или кольцевого сечений вала (табл. П.1).

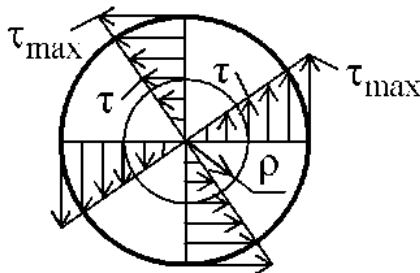


Рис. 3.2. К определению касательных напряжений при кручении вала

При нагружении вала материал деформируется. Касательные напряжения τ и упругие относительные угловые деформации (относительный сдвиг) γ в произвольной точке поперечного сечения вала взаимосвязаны законом Р. Гука при сдвиге

$$\tau = G\gamma, \quad (3.3)$$

где G – модуль упругости материала при сдвиге. Для сталей среднее значение $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа. В осях $\tau - \gamma$ формула (3.3)

представляет собой прямую. Закон Р. Гука (3.3) справедлив, если рабочее напряжение τ не превышает предел пропорциональности материала при кручении $\tau_{\text{ш}}$.

Угол закручивания φ_z рассматриваемого сечения вала с абсциссой z определяется по закону Р. Гука в интегральной форме

$$\varphi_z = \int_z \frac{M_k dz}{GJ_p}, \quad (3.4)$$

где GJ_p – жесткость сечения при кручении вала.

При конструктивном оформлении валов, как правило, круглого сечения отдельные участки имеют некруглое сечение (квадратное, прямоугольное, круглое с диаметральной отверстием, лыской, вырезами под шпонку, шлицами). Напряженное состояние валов некруглых сечений определяется по громоздким решениям, полученным методами теории упругости. На

основе указанных решений для инженерного применения рекомендуются следующие простые зависимости. Наибольшее касательное напряжение и угол закручивания при кручении вала некруглого сечения с абсциссой z равны

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}, \quad \varphi_z = \int_z \frac{M_{\kappa} dz}{GJ_{\kappa}}, \quad (3.5)$$

где W_{κ} , J_{κ} – момент сопротивления и момент инерции некруглого сечения. Геометрические характеристики W_{κ} , J_{κ} вычисляются по приведенным в справочниках формулам с учетом формы и размеров некруглого сечения. Так, для прямоугольного сечения размерами $b \times h$ рекомендуется: $W_{\kappa} = \alpha hb^2$, $J_{\kappa} = \beta hb^3$, где $\alpha = f_{\alpha}(h/b)$ и $\beta = f_{\beta}(h/b)$ – коэффициенты, зависящие от отношения h/b и определяемые по справочным таблицам или графикам. В частности, для вала квадратного сечения ($h/b = 1$) значения $\alpha = 0.208$ и $\beta = 0.141$ (рис. 3.3). При $h/b = 2$: $\alpha = 0.246$, $\beta = 0.229$; при $h/b \geq 10$: $\alpha = 0.313$; $\beta = 0.313$.

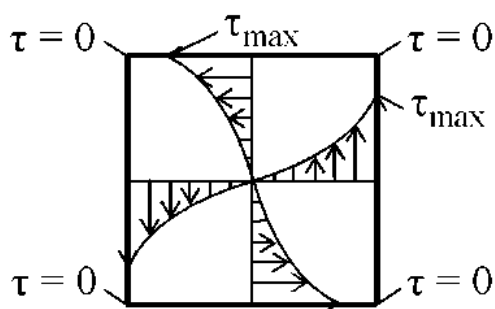


Рис. 3.3. К определению касательных напряжений при кручении вала квадратного сечения

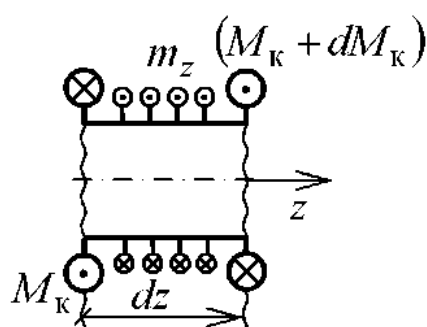


Рис. 3.4. К определению дифференциальных зависимостей между m_z , M_{κ} и φ_z

Анализируя уравнение равновесия элемента dz (рис. 3.4) с учетом формулы (3.4), можно установить следующие дифференциальные зависимости между приложенным к валу распределенным моментом m_z , крутящим моментом в сечении M_{κ} и углом закручивания φ_z рассматриваемого сечения. Первая производная от крутящего момента M_{κ} по абсциссе z численно равна распределенному моменту

$$\frac{dM_{\kappa}}{dz} = |\pm m_z|. \quad (3.6)$$

Первая производная от угла закручивания φ_z по абсциссе z с точностью до постоянного множителя равна крутящему моменту в сечении

$$\frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{M_{\kappa}}{GJ_{p(\kappa)}}. \quad (3.7)$$

Вторая производная от φ_z по абсциссе z с точностью до постоянного множителя численно равна распределенному моменту

$$\frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} = \frac{|\pm m_z|}{GJ_{p(\kappa)}} \quad (3.8)$$

С учетом зависимостей (3.6) ... (3.8) можно сформулировать следующие правила контроля эпюр крутящих моментов и углов закручивания:

- если в сечении вала приложен сосредоточенный момент, то на эпюре M_κ наблюдается соответствующий скачок, а на эпюре φ_z – излом;
- в сечении, где $m_z = 0$ или $M_\kappa = 0$, соответственно на эпюрах M_κ и φ_z наблюдаются экстремумы;
- кривизна эпюр M_κ и φ_z определяется знаками вторых производных; если в правой системе координат $d^2 M_\kappa / dz^2 < 0$ и $d^2 \varphi_z / dz^2 < 0$, то эпюры M_κ и φ_z будут выпуклыми, в противном случае – вогнутыми кривыми.

Для обеспечения надежной работы вала необходимо выполнение условия прочности: наибольшие касательные напряжения, действующие в опасном сечении вала, не должны превышать допускаемых касательных напряжений

$$\max \tau_{\max} = \left| \frac{M_\kappa}{W_{p(\kappa)}} \right|_{\max} \leq [\tau] \quad (3.9)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение. Для пластичного материала $[\tau] = \tau_T / n_T$, для хрупкого – $[\tau] = \tau_B / n_B$, где τ_T , τ_B – пределы текучести и прочности пластичного и хрупкого материалов при кручении; n_T , $n_B \approx 3 \div 6$ – коэффициенты запаса прочности. Если для данного материала значения τ_T и τ_B в справочной литературе отсутствуют, то можно использовать приближенные соотношения

$$\tau_T = (0,5 \dots 0,6) \sigma_T; \quad \tau_B = (0,7 \dots 0,8) \sigma_{вр} \quad (3.10)$$

где σ_T , $\sigma_{вр}$ – пределы текучести и прочности материала вала при растяжении.

В ряде случаев вал должен быть не только прочным, но и достаточно жестким. Для этого должно выполняться условие жесткости: наибольший угол закручивания при работе вала не должен превышать допускаемого угла закручивания

$$\varphi_{\max} = \left| k_\varphi \frac{Ml \cdot 180^\circ}{GJ_{p(\kappa)} \pi} \right|_{\max} \leq [\varphi] \quad (3.11)$$

где k_φ – коэффициент, определяемый из эпюры углов закручивания вала. Величина допускаемого угла закручивания $[\varphi]$ зависит от требований к жесткости вала. В ряде случаев рекомендуется $[\varphi] = 0,15^\circ \dots 0,30^\circ$.

При расчетах на прочность и жесткость валов характерны три постановки задач. Первая: известны внешние моменты, продольные размеры

вала, материал (следовательно $[\tau]$). В этом случае из условий прочности и жесткости определяются допускаемые размеры сечения вала и окончательно принимаются большие значения. Вторая: известны поперечные и продольные размеры вала, материал. В таком случае из условий прочности и жесткости вычисляются допускаемые крутящие моменты и окончательно принимаются их меньшие значения. Третья: из конструкторских и технологических решений известны внешние крутящие моменты, материал и размеры вала. При такой постановке задачи проверяется выполнение условий прочности и жесткости, а затем дается заключение о работоспособности вала.

3.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ВАЛА ПРИ КРУЧЕНИИ»

Задач ступенчатый вал, нагруженный внешними крутящими моментами. Обобщенная расчетная схема вала показана на рисунке 3.5. Исходные данные для расчетов взять из таблицы 3.1 в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ). При расчетах принять: распределенный крутящий момент $m_1 = m_2 = m = 2$ Н·м/см; $m_3 = m_4 = m_5 = 0$; $D_1 = D_2$; $D_3 = D_4$; $d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0$; $b = d$; $l_3 = l_4$; длина $l = 50$ см; крутящий момент $M = ml = 100$ Н·м; $M_1 = 0$; модуль сдвига материала вала $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; допускаемые касательные напряжения $[\tau] = \tau_T / n_T = 80$ МПа; допускаемый угол закручивания $[\varphi] = 0,2$ градуса.

Необходимо для ступенчатого вала выполнить следующее.

1. Начертить индивидуальную расчетную схему вала.
2. Построить эпюру крутящих моментов M_k в долях M .
3. Построить эпюру касательных напряжений τ_{\max} в долях M/W_p , где $W_p = \pi d^3 / 16$ – полярный момент сопротивления сечения диаметром d вала.
4. Построить эпюру углов закручивания φ_z в долях M/GJ_p , где $J_p = \pi d^4 / 32$ – полярный момент инерции сечения диаметром d вала.
5. Вычислить диаметры участков вала из условия прочности при кручении.
6. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости вала.

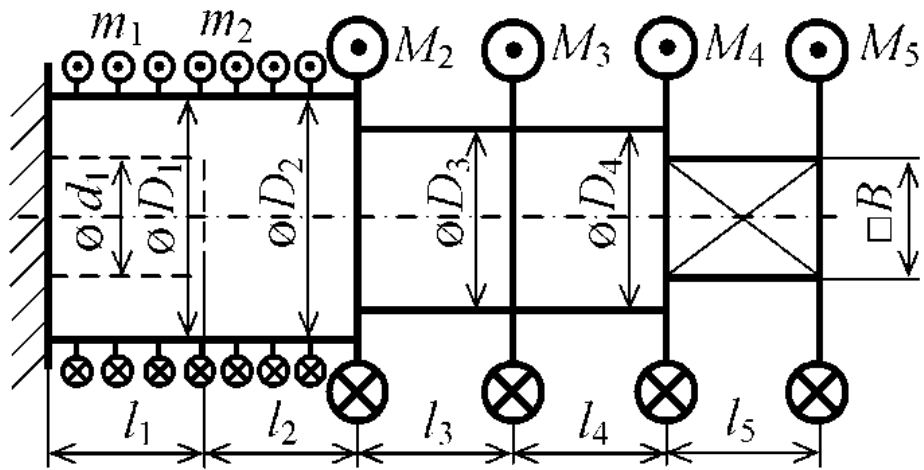


Рис. 3.5. Обобщенная расчетная схема вала

Таблица 3.1. Исходные данные

ЦНВ	1-я ЦНВ			2-я ЦНВ			3-я ЦНВ			4-я ЦНВ		
	d_1	D_1	M_2	D_3	B	M_3	M_4	l_1	l_2	M_5	l_3	l_5
1	$2d$	$3d$	$4M$	$2d$	b	M	$2M$	$2l$	$3l$	$-3M$	$2l$	l
2	$3d$	$4d$	$6M$	$4d$	$3b$	$-2M$	$3M$	l	l	$-5M$	l	$3l$
3	$4d$	$5d$	$5M$	$4d$	$2b$	M	$4M$	$2l$	l	$-7M$	$3l$	$2l$
4	$2d$	$6d$	$2M$	$4d$	b	$-3M$	$5M$	l	$2l$	$6M$	l	l
5	$2d$	$4d$	$-10M$	$8d$	$6b$	$-5M$	$-5M$	$3l$	$2l$	$4M$	l	l
6	$6d$	$8d$	$-8M$	$5d$	$3b$	$5M$	$-4M$	l	$2l$	$2M$	l	l
7	$5d$	$10d$	$-6M$	$3d$	$4b$	$3M$	$-3M$	$2l$	$2l$	M	l	l
8	d	$3d$	$-5M$	$2d$	$3b$	$-4M$	$-2M$	$2l$	$4l$	$-2M$	l	l
9	$3d$	$4d$	$-4M$	$3d$	$4b$	$4M$	$-M$	$4l$	$2l$	$-4M$	l	l
0	$1,5d$	$2d$	$10M$	$3d$	$2b$	$-M$	M	l	l	$-M$	l	$2l$

3.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ВАЛА ПРИ КРУЧЕНИИ»

Задан ступенчатый вал (рис. 3.6), нагруженный внешними сосредоточенными и распределенными крутящими моментами. С учетом обобщенной расчетной схемы вала и цифр номера варианта имеем:

$$\begin{aligned}l_1 &= l; & l_2 &= l; & l_3 &= l; & l_4 &= l; & l_5 &= 2l; \\M_1 &= 0; & M_2 &= -5M; & M_3 &= 4M; & M_4 &= M; & M_5 &= -M; \\d_1 &= d; & D_1 &= 2d; & D_2 &= 2d; & D_3 &= 4d; & D_4 &= 4d;\end{aligned}$$

размер квадратного сечения $B = 2b = 2d$.

При расчетах принять: распределенный крутящий момент $m_1 = m_2 = m = 2 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{см}$; длина $l = 50 \text{ см}$; крутящий момент $M = ml = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$; модуль сдвига материала вала $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; допускаемые касательные напряжения $[\tau] = \tau_T / n_T = 80 \text{ МПа}$; допускаемый угол закручивания $[\varphi] = 0,2 \text{ градуса}$.

Необходимо для ступенчатого вала выполнить следующее.

1. Начертить индивидуальную расчетную схему вала.
2. Построить эпюру крутящих моментов M_k в долях M .
3. Построить эпюру касательных напряжений τ_{\max} в долях M/W_p , где $W_p = \pi d^3 / 16$ – полярный момент сопротивления сечения диаметром d вала.
4. Построить эпюру углов закручивания φ_z в долях Ml/GJ_p , где $J_p = \pi d^4 / 32$ – полярный момент инерции сечения диаметром d вала.
5. Вычислить размеры участков вала из условия прочности при кручении.
6. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости вала.

РЕШЕНИЕ

1. Вычерчиваем индивидуальную расчетную схему вала (рис. 3.6) с учетом обобщенной схемы и в соответствии с исходными данными, определяемыми по цифрам номера варианта. При положительных значениях M_i их направления, показанные на обобщенной расчетной схеме, остаются неизменными. Если M_i заданы отрицательными, то в индивидуальной расчетной схеме их направления изменяются на противоположные, а их значения в дальнейших расчетах принимаются положительными.

2. Вычисляем реактивный момент жесткого заземления вала из условия статического равновесия

$$\sum M_z = -M_R + m \cdot 2l - 5M + 4M + M - M = 0, \text{ откуда } M_R = M.$$

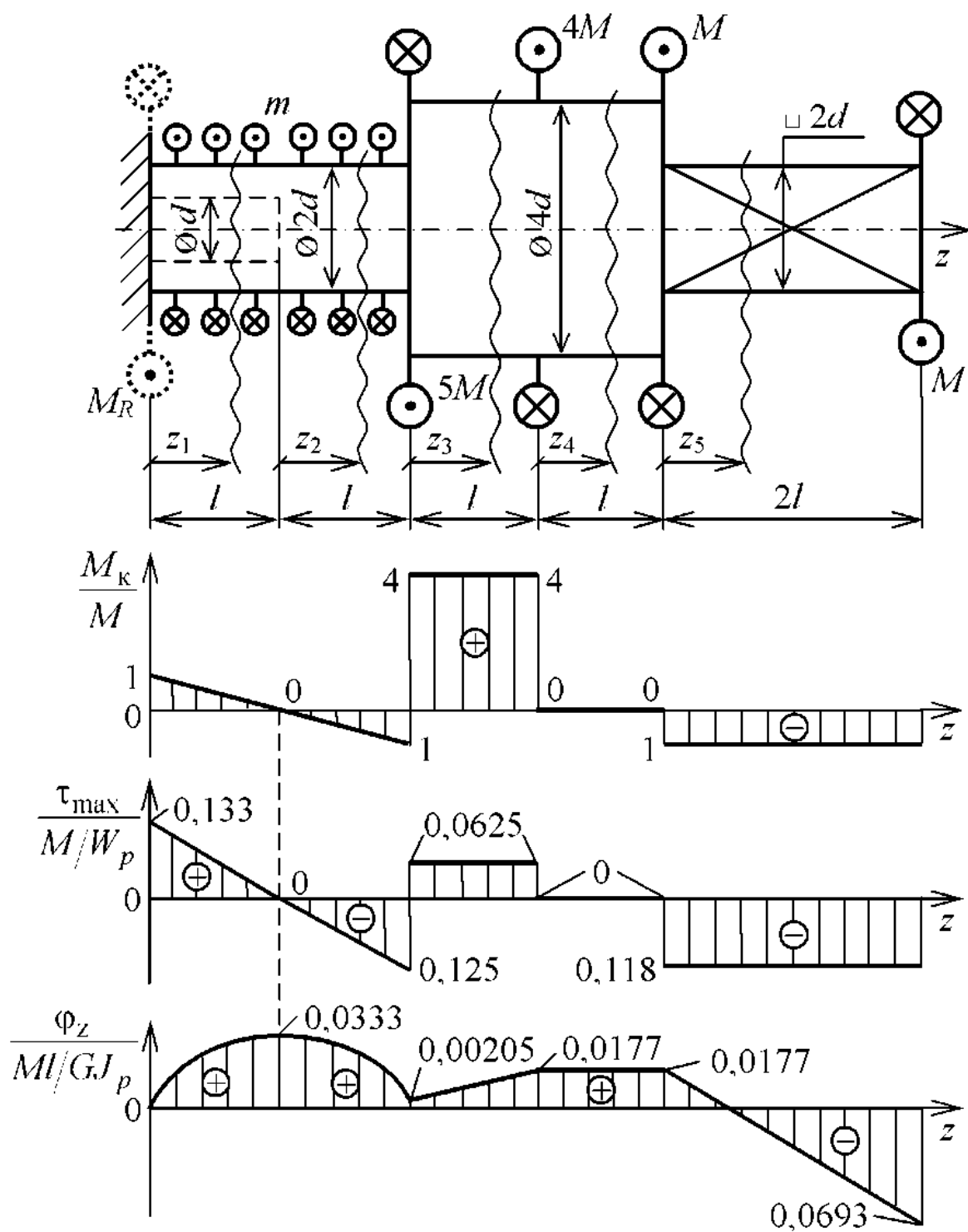
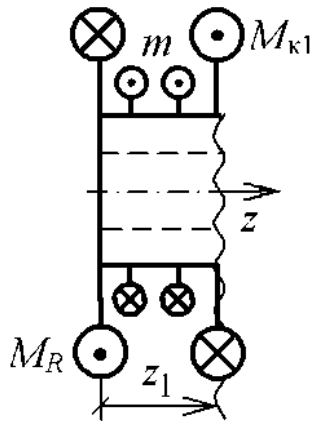


Рис. 3.6. Индивидуальная расчетная схема вала и эпюры крутящих моментов, касательных напряжений и углов закручивания

3. Используя метод сечений, определяем законы изменения крутящего момента в сечении на участках вала.

Первый участок



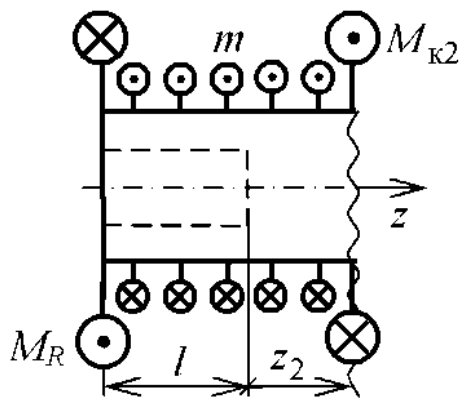
$$\sum M_z = -M_R + mz_1 + M_{к1} = 0,$$

$$M_{к1} = M - mz_1,$$

$$\text{При } z_1 = 0 \quad M_{к1} = M,$$

$$\text{при } z_1 = l \quad M_{к1} = 0.$$

Второй участок



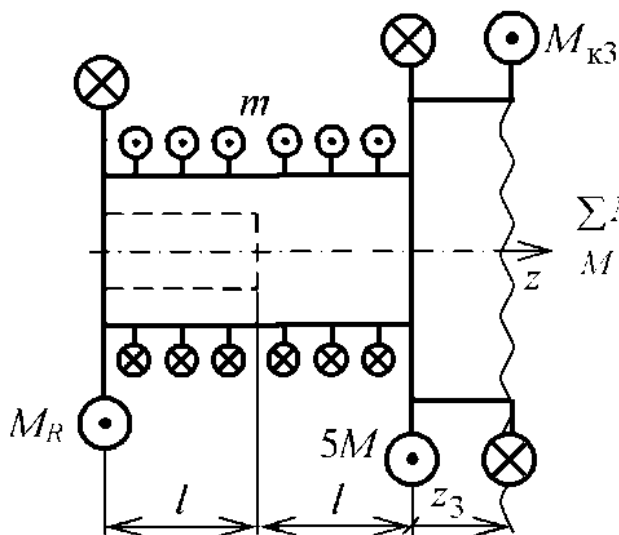
$$\sum M_z = -M_R + m(l + z_2) + M_{к2} = 0,$$

$$M_{к2} = -mz_2.$$

$$\text{При } z_2 = 0 \quad M_{к2} = 0,$$

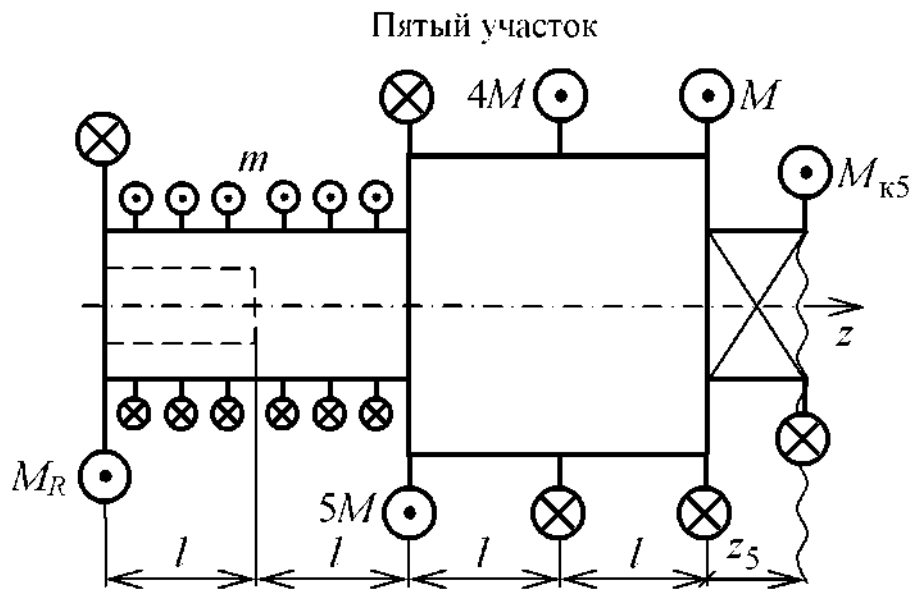
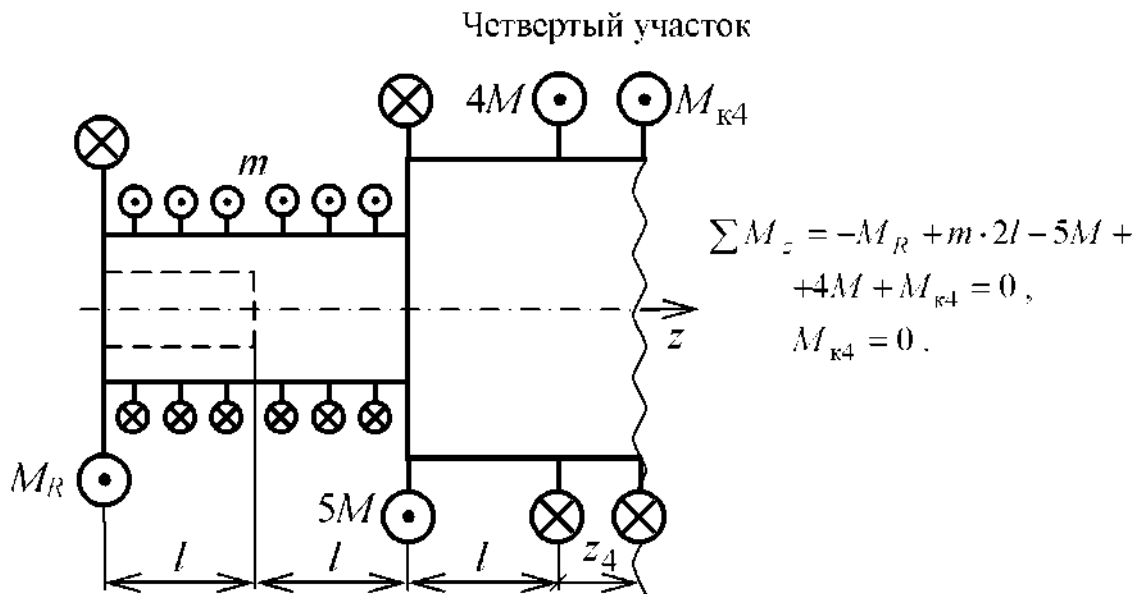
$$\text{при } z_2 = l \quad M_{к2} = -M.$$

Третий участок



$$\sum M_z = -M_R + m \cdot 2l - 5M + M_{к3} = 0,$$

$$M_{к3} = 4M.$$



$$\sum M_z = -M_R + m \cdot 2l - 5M + 4M + M + M_{к5} = 0, \quad M_{к5} = -M.$$

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов в долях M (рис. 3.6).

4. Обозначаем полярный момент сопротивления $W_p = \pi d^3/16$ сечения вала диаметром d и выражаем через него аналогичные величины для участков вала:

$$W_{p1} = \frac{\pi(2d)^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{2d} \right)^4 \right] = 2^3 (1 - 0,5^4) \frac{\pi d^3}{16} = 7,5W_p;$$

$$W_{p2} = \pi(2d)^3/16 = 8W_p; \quad W_{p3} = W_{p4} = \pi(4d)^3/16 = 64W_p;$$

момент сопротивления при кручении участка вала квадратного сечения

$$W_{к5} = \alpha b h^2 = 0,208 \cdot 2d(2d)^2 = 8,47 \cdot \pi d^3 / 16 = 8,47 W_p.$$

5. Вычисляем наибольшие касательные напряжения на участках вала.

$$\text{Первый участок: } \tau_{\max 1} = \frac{M_{к1}}{W_{p1}} = \frac{M - mz_1}{7,5W_p}.$$

$$\text{При } z_1 = 0 \quad \tau_{\max 1} = 0,1333 \frac{M}{W_p}, \quad \text{при } z_1 = l \quad \tau_{\max 1} = 0.$$

$$\text{Второй участок: } \tau_{\max 2} = \frac{M_{к2}}{W_{p2}} = -\frac{mz_2}{8W_p}.$$

$$\text{При } z_2 = 0 \quad \tau_{\max 2} = 0, \quad \text{при } z_2 = l \quad \tau_{\max 2} = -0,125 \frac{M}{W_p}.$$

$$\text{Третий участок: } \tau_{\max 3} = \frac{M_{к3}}{W_{p3}} = \frac{4M}{64W_p} = 0,0625 \frac{M}{W_p}.$$

$$\text{Четвертый участок: } \tau_{\max 4} = \frac{M_{к4}}{W_{p4}} = \frac{0M}{64W_p} = 0.$$

$$\text{Пятый участок: } \tau_{\max 5} = \frac{M_{к5}}{W_{к5}} = \frac{-M}{8,47W_p} = -0,118 \frac{M}{W_p}.$$

По полученным значениям строим эпюру наибольших касательных напряжений на участках вала в долях M/W_p (рис. 3.6).

6. Обозначаем полярный момент инерции $J_p = \pi d^4 / 32$ сечения вала диаметром d и выражаем через него аналогичные величины для участков вала:

$$J_{p1} = \frac{\pi(2d)^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{2d} \right)^4 \right] = 2^4 (1 - 0,5^4) \frac{\pi d^4}{32} = 15J_p;$$

$$J_{p2} = \pi(2d)^4 / 32 = 16J_p; \quad J_{p3} = J_{p4} = \pi(4d)^4 / 32 = 256J_p;$$

момент инерции при кручении участка вала квадратного сечения

$$J_{к5} = \beta b h^3 = 0,141 \cdot 2d(2d)^3 = 23 \cdot \pi d^4 / 32 = 23J_p.$$

7. Используя закон Р. Гука в интегральной форме, находим углы закручивания на участках вала.

$$\text{Первый участок: } \varphi_{z1} = \int_0^{z_1} \frac{M_{к1} dz_1}{G \cdot 15J_p} = \frac{Mz_1 - 0,5mz_1^2}{15GJ_p}.$$

$$\text{При } z_1 = 0 \quad \varphi_{z1} = 0, \quad \text{при } z_1 = 0,5l \quad \varphi_{z1} = 0,0250 \frac{Ml}{GJ_p},$$

при $z_1 = l$ $\varphi_{z1} = 0,0333 \frac{Ml}{GJ_p}$.

Поскольку вторая производная $d^2\varphi_{z1}/dz_1^2 = -m/15GJ_p < 0$, то эпюра φ_{z1} является выпуклой кривой. Из эпюры M_k видно, что при $z_1^* = l$ $M_{k1} = 0$. Следовательно, при $z_1^* = l$ эпюра φ_{z1} имеет максимум.

Второй участок: $\varphi_{z2} = \varphi_{нк2} + \int_0^{z_2} \frac{M_{к2} dz_2}{G \cdot J_{p2}}$.

Угол закручивания начала координат второго участка равен

$\varphi_{нк2} = \varphi_{z1}|_{z_1=l} = 0,0333 \frac{Ml}{GJ_p}$. С учетом этого получаем

$$\varphi_{z2} = 0,0333 \frac{Ml}{GJ_p} - \frac{0,5mz_2^2}{G \cdot 16J_p}.$$

При $z_2 = 0$ $\varphi_{z2} = 0,0333 \frac{Ml}{GJ_p}$, при $z_2 = 0,5l$ $\varphi_{z2} = 0,0255 \frac{Ml}{GJ_p}$,

при $z_2 = l$ $\varphi_{z2} = 0,00205 \frac{Ml}{GJ_p}$.

Поскольку вторая производная $d^2\varphi_{z2}/dz_2^2 = -m/16GJ_p < 0$, то эпюра φ_{z2} является выпуклой кривой.

Третий участок: $\varphi_{z3} = \varphi_{нк3} + \int_0^{z_3} \frac{M_{к3} dz_3}{G \cdot J_{p3}}$. $\varphi_{нк3} = \varphi_{z2}|_{z_2=l} = 0,00205 \frac{Ml}{GJ_p}$.

С учетом этого получаем $\varphi_{z3} = 0,00205 \frac{Ml}{GJ_p} + \frac{4Mz_3}{G \cdot 256J_p}$.

При $z_3 = 0$ $\varphi_{z3} = 0,00205 \frac{Ml}{GJ_p}$, при $z_3 = l$ $\varphi_{z3} = 0,0177 \frac{Ml}{GJ_p}$.

Четвертый участок: $\varphi_{z4} = \varphi_{нк4} + \int_0^{z_4} \frac{M_{к4} dz_4}{G \cdot J_{p4}}$.

$\varphi_{нк4} = \varphi_{z3}|_{z_3=l} = 0,0177 \frac{Ml}{GJ_p}$. С учетом этого получаем

$$\varphi_{z4} = 0,0177 \frac{Ml}{GJ_p} + \int_0^{z_4} \frac{0 dz_4}{256GJ_p} = 0,0177 \frac{Ml}{GJ_p}.$$

$$\text{Пятый участок: } \varphi_{z_5} = \varphi_{\text{нк5}} + \int_0^{z_5} \frac{M_{\text{к5}} dz_5}{G \cdot J_{\text{к5}}}. \quad \varphi_{\text{нк5}} = \varphi_{z_4} \Big|_{z_4=l} = 0,0177 \frac{Ml}{GJ_p}.$$

$$\text{С учетом этого получаем } \varphi_{z_5} = 0,0177 \frac{Ml}{GJ_p} - \frac{Mz_5}{G \cdot 23J_p}.$$

$$\text{При } z_5 = 0 \quad \varphi_{z_5} = 0,0177 \frac{Ml}{GJ_p}, \quad \text{при } z_5 = 2l \quad \varphi_{z_5} = -0,0693 \frac{Ml}{GJ_p}.$$

По полученным значениям строим эпюру углов закручивания в долях Ml/GJ_p (рис. 3.6).

8. Анализируя эпюру τ_{max} , определяем опасное по прочности сечение вала (в данном примере – сечение заделки). Из условия прочности при кручении вала

$$\max \tau_{\text{max}} = \left| \frac{M_{\text{к}}}{W_p} \right|_{\text{max}} = \left| 0,133 \frac{M}{\pi d^3 / 16} \right| \leq [\tau]$$

вычисляем допускаемый диаметр

$$[d]_{\tau} = \sqrt[3]{\frac{0,133M \cdot 16}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{0,133 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 16}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 9,46 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9,46 \text{ мм}.$$

9. Анализируя эпюру φ_z , находим опасное по жесткости сечение (в данном примере – смежное сечение между первым и вторым участками). Проверяем выполнение условия жесткости вала

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{max}} &= \left| k_{\varphi} \frac{Ml \cdot 180^{\circ}}{GJ_p \pi} \right|_{\text{max}} = \left| -0,0693 \frac{Ml \cdot 180^{\circ}}{G \pi d^4 \pi / 32} \right| = \\ &= 0,0693 \frac{100 \cdot 0,5 \cdot 180^{\circ} \cdot 32}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14^2 \cdot (9,46 \cdot 10^{-3})^4} = 3,16^{\circ} > [\varphi] = 0,2^{\circ}. \end{aligned}$$

10. Поскольку условие жесткости вала не выполняется, то вычисляем допускаемый диаметр из условия жесткости

$$\begin{aligned} [d]_{\varphi} &= \sqrt[4]{\frac{0,0693Ml \cdot 180^{\circ} \cdot 32}{G \cdot \pi[\varphi] \cdot \pi}} = \sqrt[4]{\frac{0,0693 \cdot 100 \cdot 0,5 \cdot 180^{\circ} \cdot 32}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14^2 \cdot 0,2}} = 18,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = \\ &= 18,8 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Из двух полученных ответов окончательно принимаем большее значение $[d] = 18,8$ мм. С учетом этого поперечные размеры участков вала равны: $d_1 = 18,8$ мм; $D_1 = 37,6$ мм; $D_2 = 37,6$ мм; $D_3 = 75,2$ мм; $D_4 = 75,2$ мм; размер квадратного сечения участка вала $b = h = 37,6$ мм. При этих размерах поперечных сечений будет обеспечена как прочность, так и жесткость вала.

4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Балка это брус (элемент конструкции) с прямолинейной осью, работающий на изгиб. Плоский изгиб возникает в том случае, когда действующие внешние нагрузки (сосредоточенные силы P , моменты M , распределенные по длине балки нагрузки q) располагаются в одной главной центральной плоскости инерции. Плоский изгиб испытывают, например, железнодорожные, трамвайные и подкрановые рельсы, элементы машиностроительных, строительных и многих других конструкций.

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

В поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x . Положительные направления Q_y и M_x для левой и правой частей балки показаны на рис. 4.1. Для определения Q_y и M_x используют метод сечений: балку на рассматриваемом участке мысленно рассекают на левую и правую части: действие отброшенной части на оставшуюся заменяют положительными по направлению Q_y и M_x (рис. 4.1); затем составляют уравнения равновесия ($\sum Y = 0$, $\sum M_c = 0$) для рассматриваемой части балки и определяют законы изменения поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x на участке. Задаваясь абсциссами для ряда сечений балки, вычисляют значения Q_y и M_x и строят эпюры. В некоторых случаях нагружения балки поперечная сила в сечении равна нулю. Такой изгиб называется чистым. Если в сечении балки возникает поперечная сила, то это поперечный изгиб.

При изгибе балки одни слои растягиваются, а другие – сжимаются. Поскольку деформации слоев изменяются по высоте сечения балки непрерывно, то существует слой, линейные деформации и, следовательно, нормальные напряжения в котором равны нулю. Такой слой называется нейтральным. Пересечение нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки образует нейтральную линию.

При поперечном изгибе в сечении балки возникают нормальные и касательные напряжения, определяемые по формулам

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \quad \tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{J_x b_y}, \quad (4.1)$$

где Q_y , M_x – поперечная сила и изгибающий момент в сечении; J_x – осевой момент инерции сечения относительно главной центральной оси x ; b_y , y –

ширина и ордината слоя, в котором определяются напряжения: S_x^{oic} – статический момент относительно оси x части площади сечения, отсекаемой рассматриваемым слоем.

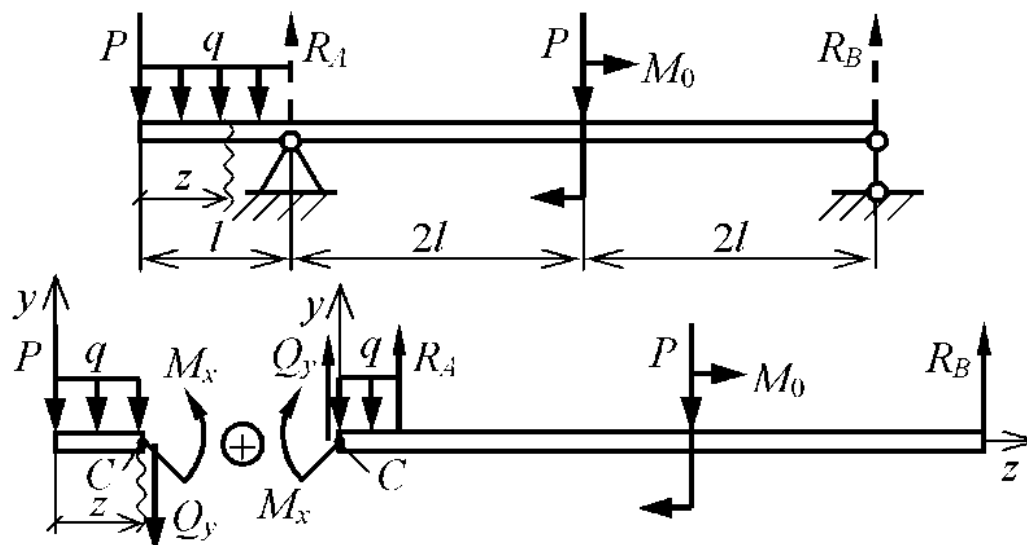


Рис. 4.1. К определению внутренних силовых факторов в сечении балки

Материал балки при изгибе работает в условиях плоского напряженно-состояния. Величины и направления главных напряжений в произвольном сечении балки вычисляются по формулам

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}. \quad (4.2)$$

С учетом формулы (4.2) эквивалентные напряжения можно представить для балки из пластичного материала: по третьей и четвертой теориям прочности

$$\sigma_{\text{экв3}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_{\text{экв4}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad (4.3)$$

для балки из хрупкого материала – по второй и пятой теориям

$$\sigma_{\text{экв2}} = \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_{\text{экв5}} = \frac{1-\kappa}{2}\sigma + \frac{1+\kappa}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (4.4)$$

где μ – коэффициент поперечной деформации; $\kappa = \sigma_{\text{вр}}/\sigma_{\text{вс}}$ – коэффициент неравнопрочности хрупкого материала при растяжении и сжатии; $\sigma_{\text{вр}}$, $\sigma_{\text{вс}}$ – пределы прочности при растяжении и сжатии хрупкого материала. Наибольшие нормальные напряжения в рассматриваемом сечении балки возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (4.5)$$

где W_x – осевой момент сопротивления сечения балки. Наибольшие касательные напряжения в рассматриваемом сечении балки вычисляются по формуле Д.И. Журавского

$$\tau_{\max} = \left| \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{орс}}}{J_x \cdot b_y} \right|_{\max} . \quad (4.6)$$

Под действием внешних нагрузок балка прогибается, а ее поперечные сечения поворачиваются. Прогиб $y = f(z)$ и угол поворота $\Theta = dy/dz = f'(z)$ являются функциями абсциссы z (рис. 4.1). Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$EJ_x y'' = M_x . \quad (4.7)$$

Интегрируя (4.7), получаем уравнение углов поворота сечений

$$EJ_x \Theta_z = EJ_x y' = \int M_x dz + C , \quad (4.8)$$

а интегрируя повторно находим уравнение прогибов

$$EJ_x y_z = \int dz \int M_x dz + Cz + D . \quad (4.9)$$

Постоянные интегрирования C и D определяются из граничных условий (условий закрепления балки). Покажем физический смысл постоянных C и D . При $z = 0$ (начало координат) из (4.8) следует $C = EJ_x \Theta_0$, а из (4.9) получаем $D = EJ_x y_0$. Другими словами, постоянные C и D представляют собой величины, пропорциональные углу поворота сечения Θ_0 и прогибу y_0 в начале координат.

Если балка имеет n участков, то при определении углов поворота и прогибов приходится составлять n дифференциальных уравнений типа (4.7) и вычислять $2n$ постоянных C_i и D_i ($i = 1, \dots, n$), что громоздко. Равенства постоянных интегрирования на участках балки ($C_1 = C_2 = \dots = C_n = C = EJ_x \Theta_0$; $D_1 = D_2 = \dots = D_n = D = EJ_x y_0$) можно добиться при определенных правилах составления и интегрирования дифференциальных уравнений типа (4.7) (рис. 4.2):

1. Начало координат располагается в крайнем левом сечении балки. При этом в дальнейшем рассматривается левая часть балки.
2. Выражения для M_x , Θ_z и y_z предшествующих участков должны полностью сохраняться и для последующих участков. Если распределенная нагрузка q_k обрывается (рис. 4.2), то ее необходимо продлить до конца балки и добавить такую же нагрузку q_{k-1} , но противоположную по направлению.
3. Выражения для M_x , Θ_z и y_z должны содержать множители $(z - a_i)$, $(z - b_j)$ и $(z - c_k)$, где a_i , b_j , c_k – расстояние от начала координат до соответствующих нагрузок M_i , P_j , q_k . При этом сосредоточенный момент M_i в выражении для M_x умножится на $(z - a_i)^0$.

4. Интегрирование составленного таким образом дифференциального уравнения изогнутой оси балки ведется без раскрытия скобок в множителях на $(z - a_i)^0$, $(z - b_j)^1$ и $(z - c_k)^2$.

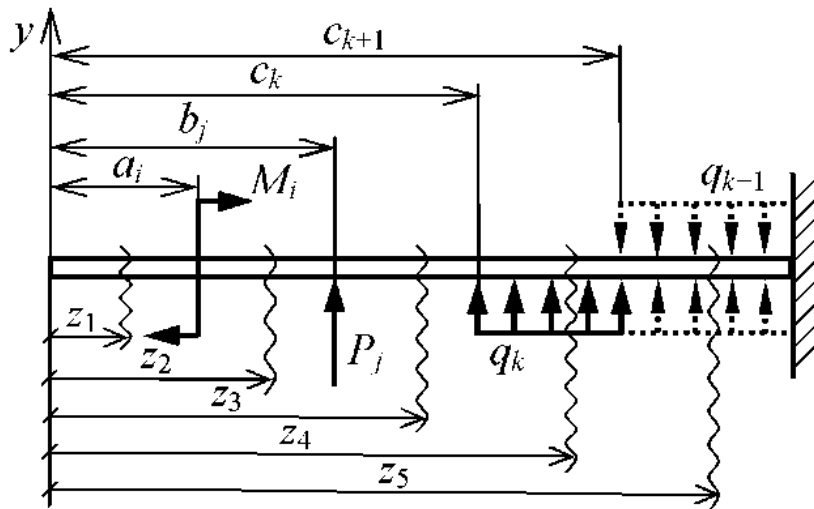


Рис. 4.2. К методике уравнивания постоянных интегрирования

В результате интегрирования получаем универсальные уравнения для углов поворота сечений и прогибов балки (рис. 4.2)

$$\Theta_z = \Theta_0 \pm \sum \frac{M_i (z - a_i)^1}{1! EJ_x} \pm \sum \frac{P_j (z - b_j)^2}{2! EJ_x} \pm \sum \frac{q_k (z - c_k)^3}{3! EJ_x}; \quad (4.10)$$

$$y_z = y_0 + \Theta_0 z \pm \sum \frac{M_i (z - a_i)^2}{2! EJ_x} \pm \sum \frac{P_j (z - b_j)^3}{3! EJ_x} \pm \sum \frac{q_k (z - c_k)^4}{4! EJ_x}. \quad (4.11)$$

Постоянные Θ_0 и y_0 , представляющие собой угол поворота сечения и прогиб в начале координат, вычисляются из условий закрепления балки. Показанные на рис. 4.2 направления внешних нагрузок соответствуют положительным знакам слагаемых в выражениях (4.10), (4.11) и наоборот. Слагаемые для Θ_z и y_z в формулах (4.10) и (4.11) записываются по мере расположения от начала координат соответствующих нагрузок.

Анализируя с учетом (4.7) – (4.9) уравнения равновесия $\sum Y = 0$, $\sum M_C = 0$ для элемента dz балки (рис. 4.3), можно установить следующие дифференциальные зависимости между q_y , Q_y , M_x , Θ_z и y_z :

$$\frac{dQ_y}{dz} = |\pm q_y|; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y; \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = |\pm q_y|;$$

$$\frac{d\Theta_z}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x}; \quad \frac{d^2\Theta_z}{dz^2} = \frac{Q_y}{EJ_x}; \quad \frac{d^3\Theta_z}{dz^3} = \frac{|\pm q_y|}{EJ_x}; \quad (4.12)$$

$$\frac{dy}{dz} = \Theta_z; \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}; \quad \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{Q_y}{EJ_x}; \quad \frac{d^4y}{dz^4} = \frac{|\pm q_y|}{EJ_x}.$$

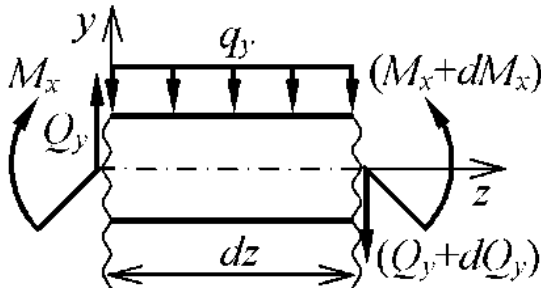


Рис. 4.3. К определению дифференциальных зависимостей между q_y , Q_y , M_x , Θ_z и y_z

С учетом указанных дифференциальных зависимостей можно сформулировать следующие правила контроля эпюр Q_y , M_x , Θ_z и y_z :

- если в сечении балки приложена сосредоточенная сила P или сосредоточенный момент M , то соответственно на эпюрах Q_y и M_x должны быть соответствующие скачки, а на эпюрах M_x и Θ_z – изломы;
- в сечениях, где $q_y = 0$, $Q_y = 0$, $M_x = 0$ и $\Theta_z = 0$, на эпюрах соответственно Q_y , M_x , Θ_z и y_z наблюдаются экстремумы (максимумы или минимумы);
- если эпюры Q_y , M_x , Θ_z больше нуля, то соответственно эпюры M_x , Θ_z , y_z в правой системе координат возрастают и наоборот;
- кривизна эпюр определяется знаками вторых производных: если Q_y или M_x меньше нуля, то соответственно эпюры Θ_z или y_z будут выпуклыми кривыми и наоборот.

Для обеспечения надежной работы балки необходимо выполнение трех условий прочности. Основным является, как правило, условие прочности по нормальным напряжениям

$$\max \sigma_{\max} = \left| \frac{M_{x\max}}{W_x} \right| \leq [\sigma], \quad (4.13)$$

которое записывается для опасного сечения, где действует $M_{x\max}$, и для наиболее удаленных от нейтральной линии точек.

В некоторых случаях (для балок из прокатных профилей, сравнительно коротких балок) определяющим может быть условие прочности по касательным напряжениям

$$\max \tau_{\max} = \left| \frac{Q_{y\max}}{J_x} \frac{S_x^{\text{отс}}}{b_y} \right|_{\max} \leq [\tau]. \quad (4.14)$$

которое используется для предполагаемого опасного сечения, где действует $Q_{y\max}$, и для точек, где отношение $S_x^{\text{отс}}/b_y$ достигает максимума. В ча-

стности, для симметричных сечений $(S_x^{\text{отс}}/b_y)_{\text{max}}$ наблюдается на нейтральной линии, а для треугольного сечения – в слое, расположенном на половине высоты.

В ряде случаев (балки из прокатных или тонкостенных профилей и др.) необходима проверка прочности балок по эквивалентным напряжениям

$$\max \sigma_{\text{экви}} = \dots \leq [\sigma]. \quad (4.15)$$

где $\max \sigma_{\text{экви}}$ – максимальные эквивалентные напряжения, определяемые по рекомендуемой теории прочности. Для балок из пластичных материалов рекомендуются третья и четвертая теории прочности

$$\max \sigma_{\text{экви3}} = \sqrt{\sigma_{\text{оп}}^2 + 4\tau_{\text{оп}}^2}, \quad \max \sigma_{\text{экви4}} = \sqrt{\sigma_{\text{оп}}^2 + 3\tau_{\text{оп}}^2}, \quad (4.16)$$

а для балок из хрупких материалов используются вторая и пятая теории

$$\begin{aligned} \max \sigma_{\text{экви2}} &= \frac{1-\mu}{2}\sigma_{\text{оп}} + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma_{\text{оп}}^2 + 4\tau_{\text{оп}}^2}, \\ \max \sigma_{\text{экви5}} &= \frac{1-\kappa}{2}\sigma_{\text{оп}} + \frac{1+\kappa}{2}\sqrt{\sigma_{\text{оп}}^2 + 4\tau_{\text{оп}}^2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\sigma_{\text{оп}}$, $\tau_{\text{оп}}$ – нормальные и касательные напряжения в опасных точках опасного сечения, где действуют достаточно большие значения $M_{\text{хоп}}$ и $Q_{\text{уоп}}$. Если опасное сечение однозначно определить невозможно, то намечают несколько предполагаемых опасных сечений и по результатам прочностных расчетов делают окончательный выбор.

Допускаемые нормальные напряжения вычисляются следующим образом: для пластичных материалов $[\sigma] = \sigma_{\text{т}}/n_{\text{т}}$; хрупких – $[\sigma] = \sigma_{\text{вр}}/n_{\text{в}}$ или $[\sigma] = \sigma_{\text{вр}}/\gamma_0$, где γ_0 – коэффициент надежности. Допускаемые касательные напряжения находятся аналогично: $[\tau] = \tau_{\text{т}}/n_{\text{т}}$; $[\tau] = \tau_{\text{в}}/n_{\text{в}}$ или $[\tau] = \tau_{\text{в}}/\gamma_0$. Если пределы текучести и прочности при кручении пластичного и хрупкого материалов неизвестны, то можно использовать приближенные зависимости: $\tau_{\text{т}} = (0,5 \dots 0,6)\sigma_{\text{т}}$; $\tau_{\text{в}} = (0,7 \dots 0,8)\sigma_{\text{вр}}$.

В ряде случаев балки должны быть не только прочными, но достаточно жесткими. Для этого должно выполняться условие жесткости

$$y_{\text{max}} = \left| k_y \frac{Pl^3}{EJ_x} \right|_{\text{max}} \leq [y], \quad (4.18)$$

где k_y – коэффициент, определяемый из эпюры прогибов; l – длина участка (балки); $[y]$ – допускаемый прогиб, зависящий от требований к жесткости балки. В ряде случаев рекомендуется $[y] = (0,001 \div 0,002)L$, где L – длина балки. При проверке выполнения условий прочности и жесткости максимальные рабочие напряжения или прогибы могут быть существенно мень-

ше соответствующих допускаемых величин, но не должны превышать более чем на 5 % допускаемых значений $[\sigma]$, $[\tau]$ и $[y]$.

При расчетах на прочность и жесткость характерны три постановки задач. Первая: известны внешние нагрузки, продольные размеры и форма сечения балки, материал ($[\sigma]$, $[\tau]$). В этом случае из условий прочности и жесткости определяются допускаемые размеры сечения балки и окончательно принимаются большие значения. Вторая: известны поперечные и продольные размеры балки, материал ($[\sigma]$, $[\tau]$). При таком варианте из условий прочности и жесткости вычисляются допускаемые нагрузки и окончательно принимаются их меньшие значения. Третья: из конструкторских и технологических разработок известны внешние нагрузки, поперечные и продольные размеры балки, материал ($[\sigma]$, $[\tau]$). При такой постановке задачи проверяется выполнение условий прочности и жесткости, а затем дается заключение о работоспособности балки.

4.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БАЛКИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ»

Задано: схема нагружения и материал (σ_T ; $E=2 \cdot 10^5$ МПа) балки, коэффициент запаса прочности, величины внешних нагрузок, допускаемый прогиб балки $[y]=0.002L$, где L – длина балки. Исходные данные для расчетов взять из таблиц 4.1 и 4.2 в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ).

Требуется для балки выполнить следующее.

1. Построить эпюры поперечных сил (в долях P), изгибающих моментов (в долях Pl), углов поворота (в долях Pl^2/EJ_x) и прогибов (в долях Pl^3/EJ_x).
2. Определить из условий прочности номера двутаврового, швеллерного и других распространенных сечений балок, выбрать наиболее экономичное.
3. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости балки.

Таблица 4.1. Исходные данные

ЦНВ	1-я ЦНВ	2-я ЦНВ		3-я ЦНВ		4-я ЦНВ	
	№ схемы	Материал; σ_r	P, ql	n_r	$q, \text{кН/м}$	M_0, ql^2	$l, \text{м}$
1	1	сталь 20; 270 МПа	1	5,0	3	5,5	1,0
2	2	сталь 18кп; 235 МПа	2	4,6	6	5,0	1,1
3	3	сталь 30; 380 МПа	3	4,3	9	4,5	1,2
4	4	сталь ВСт3; 275 МПа	4	4,0	12	4,0	1,3
5	5	сталь 40; 500 МПа	5	3,6	15	3,5	1,4
6	6	сталь 09Г2С; 370 МПа	6	3,3	18	3,0	1,5
7	7	сталь 45; 600 МПа	7	3,0	21	2,5	1,6
8	8	сталь 15Г2; 440 МПа	8	2,6	24	2,0	1,7
9	9	сталь 50; 650 МПа	9	2,3	27	1,5	1,8
0	10	сталь 12Г2С; 590 МПа	10	2,0	30	1,0	2,0

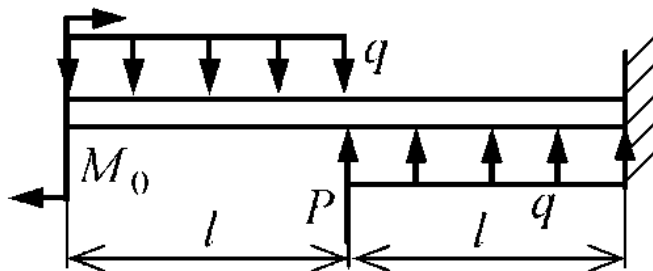
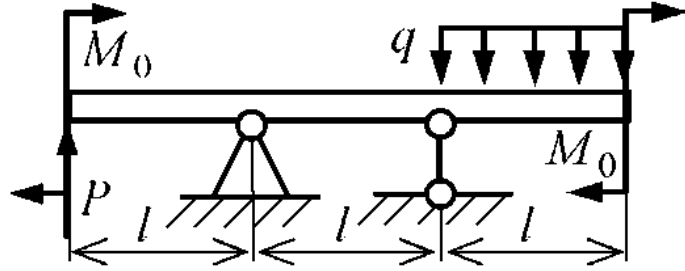
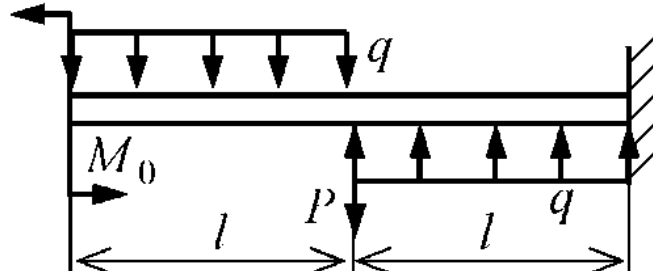
Таблица 4.2. Схемы нагружения балки

№ сх.	Схема нагружения балки
1	
2	

Таблица 4.2 (продолжение). Схемы нагружения балки

№ сх.	Схема нагружения балки
3	<p>Diagram 3: A beam fixed at the left end. It has a distributed load q over a length l, followed by a point load P, and another length l to the right end. A moment M_0 is applied at the free end.</p>
4	<p>Diagram 4: A beam with a fixed support at the left end and a roller support at the right end. It has a distributed load q over length l, a roller support in the middle, and a point load P at the right end. Moments M_0 are applied at both ends.</p>
5	<p>Diagram 5: A beam with a fixed support at the left end and a roller support at the right end. It has a point load P at the left end, a roller support in the middle, and a distributed load q over length l at the right end. A moment M_0 is applied at the right end.</p>
6	<p>Diagram 6: A beam with a fixed support at the left end and a roller support at the right end. It has a moment M_0 at the left end, a distributed load q over length l, a point load P, another distributed load q over length l, and a moment M_0 at the right end.</p>
7	<p>Diagram 7: A beam fixed at the left end. It has a distributed load $2q$ over length $2l$, a point load P, and a distributed load q over length l to the right end. A moment M_0 is applied at the right end.</p>

Таблица 4.2 (окончание). Схемы нагружения балки

№ сх.	Схема нагружения балки
8	
9	
10	

4.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БАЛКИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ»

Задано с учетом цифр номера варианта: схема нагружения балки (рис. 4.4); материал (сталь 45: $\sigma_T = 600$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа), коэффициент запаса прочности $n_T = 2$; величины внешних нагрузок: $q = 30$ кН/м, $P = 4ql$, $M_0 = 2ql^2$; длина $l = 1$ м; допускаемый прогиб $[v] = 0,002L = 0,002 \cdot 5$ м = 0,01 м.

Требуется выполнить следующее.

1. Построить эпюры поперечных сил (в долях P), изгибающих моментов (в долях Pl), углов поворота (в долях Pl^2/EJ_x) и прогибов (в долях Pl^3/EJ_x).
2. Определить из условий прочности номера двутаврового, швеллерного и других распространенных сечений балок, выбрать наиболее экономичное.
3. Проверить и при необходимости обеспечить выполнение условия жесткости балки.

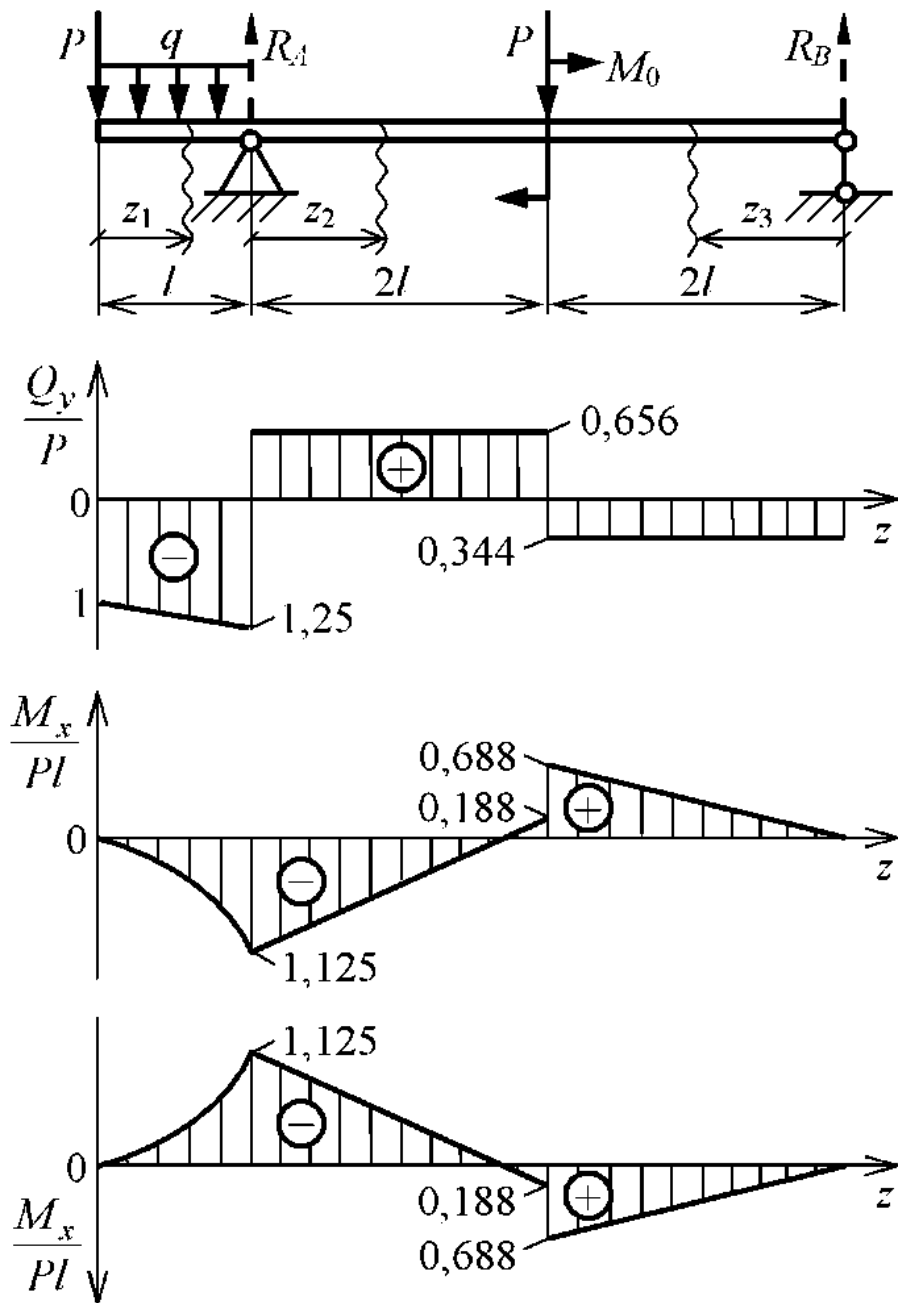


Рис. 4.4. Расчетная схема балки. эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

РЕШЕНИЕ

1. Вычерчиваем индивидуальную расчетную схему балки (рис. 4.4) в соответствии с исходными данными. определяемыми по цифрам номера варианта.
2. Вычисляем опорные реакции (рис.4.4)

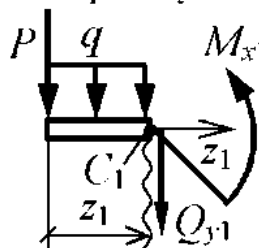
$$\sum M_A = Pl + ql \cdot 0,5l - P \cdot 2l - M_0 + R_B \cdot 4l = 0, \quad R_B = 0,344P;$$

$$\sum M_B = P \cdot 5l + ql \cdot 4,5l - R_A \cdot 4l - M_0 + P \cdot 2l = 0, \quad R_A = 1,906P.$$

Проверка: $\sum Y = -P - ql + 1,906P - P + 0,344P \equiv 0.$

3. Выбираем абсциссы z_1, z_2, z_3 на участках и методом сечений определяем законы изменения поперечных сил и изгибающих моментов.

Первый участок: $\sum Y = -P - qz_1 - Q_{y1} = 0, \quad Q_{y1} = -P - qz_1;$



$$\sum M_{C1} = Pz_1 + qz_1 \cdot 0,5z_1 + M_{x1} = 0.$$

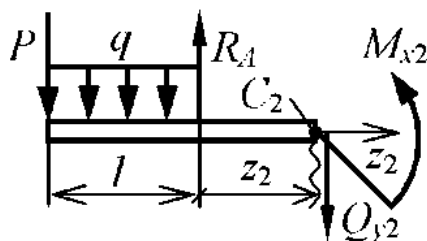
$$M_{x1} = -Pz_1 - 0,5qz_1^2 - \text{выпуклая квадратная парабола.}$$

При $z_1 = 0 \quad Q_{y1} = -P, \quad M_{x1} = 0;$

при $z_1 = 0,5l \quad Q_{y1} = -1,125P, \quad M_{x1} = -0,531Pl;$

при $z_1 = l \quad Q_{y1} = -1,25P, \quad M_{x1} = -1,125Pl.$

Второй участок: $\sum Y = -P - ql + 1,906P - Q_{y2} = 0, \quad Q_{y2} = 0,656P;$



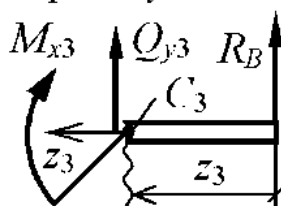
$$\sum M_{C2} = P(l + z_2) + ql(0,5l + z_2) - 1,906Pz_2 + M_{x2} = 0,$$

$$M_{x2} = -1,125Pl + 0,656Pz_2.$$

При $z_2 = 0 \quad M_{x2} = -1,125Pl;$

при $z_2 = 2l \quad M_{x2} = 0,188Pl.$

Третий участок:



$$\sum Y = Q_{y3} + R_B = 0, \quad Q_{y3} = -0,344P;$$

$$\sum M_{C3} = -M_{x3} + 0,344Pz_3 = 0,$$

$$M_{x3} = 0,344Pz_3.$$

При $z_3 = 0 \quad M_{x3} = 0;$ при $z_3 = 2l \quad M_{x3} = 0,688Pl.$

По полученным значениям строим эпюры Q_y и M_x (рис. 4.4). В литературе строительного профиля ось M_x направляется вниз (рис. 4.4).

4. Вычисляем допускаемые нормальное и касательное напряжения

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{600}{2} = 300 \text{ МПа}, \quad [\tau] = \frac{\tau_T}{n_T} = \frac{0,5\sigma_T}{n_T} = \frac{0,5 \cdot 600}{2} = 150 \text{ МПа}.$$

5. Наибольшие нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных точках опасного сечения на левой опоре, где $M_{x\max} = |-1,125Pl|$. Из условия прочности по нормальным напряжениям

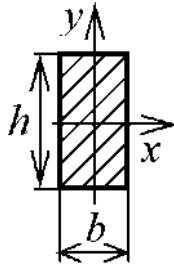
$$\max \sigma_{\max} = \frac{|M_{x\max}|}{W_x} = \frac{|-1,125Pl|}{W_x} \leq [\sigma]$$

находим расчетный осевой момент сопротивления сечения балки

$$W_x = \frac{1,125Pl}{[\sigma]} = \frac{1,125 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1}{300 \cdot 10^6} = 450 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 450 \text{ см}^3.$$

6. Определяем размеры наиболее распространенных сечений балок.

6.1. Прямоугольник: задаемся для определенности $h = 2b$;

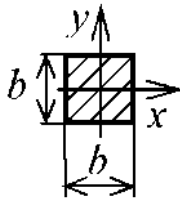


$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 450 \text{ см}^3;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 450}{2}} = 8,80 \text{ см};$$

$$h = 2 \cdot 8,80 = 17,6 \text{ см}; F_1 = 155 \text{ см}^2.$$

6.2. Квадрат:

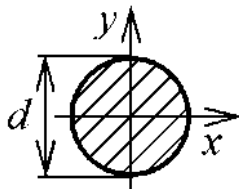


$$W_x = \frac{b^3}{6} = 450 \text{ см}^3;$$

$$b = \sqrt[3]{6 \cdot W_x} = \sqrt[3]{6 \cdot 450} = 13,9 \text{ см};$$

$$F_2 = 193 \text{ см}^2.$$

6.3. Круг:

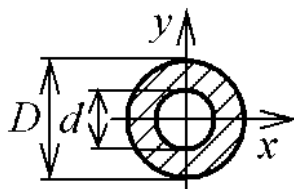


$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 450 \text{ см}^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{3,14}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 450}{3,14}} = 16,6 \text{ см}; F_3 = 216 \text{ см}^2.$$

6.4. Кольцо:

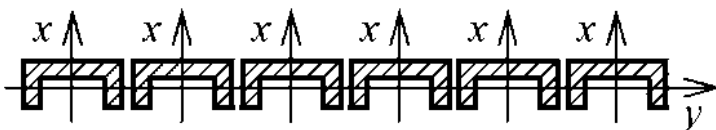
задаемся для определенности $D = 2d$;



$$\alpha = \frac{d}{D} = 0,5; W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = 450 \text{ см}^3;$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi(1 - \alpha^4)}} = 17,0 \text{ см}; d = 8,5 \text{ см}; F_4 = 170 \text{ см}^2.$$

6.5. Швеллер: выбираем, например, профиль № 40; по табл. П.4 для швеллера № 40 находим



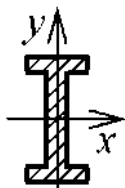
$$W_y = 73,4 \text{ см}^3;$$

$$F_{ш} = 61,5 \text{ см}^2.$$

Следовательно, необходимое число швеллеров № 40 $n_{ш} = 450/73,4 \approx 6$;

$$F_5 = 6 \cdot 61,5 = 369 \text{ см}^2.$$

6.6. Двутавр: по табл. П.5 находим наиболее подходящий двутавр № 30, имеющий следующие геометрические характеристики



$$W_{xI} = 472 \text{ см}^3; F_6 = 46,5 \text{ см}^2.$$

7. Оцениваем материалосмкость балок с подобранными сечениями, принимая площадь наименьшего (двутаврового) сечения за 100 %:

$$(F_1/F_6):(F_2/F_6):(F_3/F_6):(F_4/F_6):(F_5/F_6):(F_6/F_6) = 333 : 415 : 465 : 366 : 794 : 100 (\%).$$

Дальнейшие расчеты выполняются для балки двутаврового (наиболее экономичного) сечения. Вычисляем максимальное рабочее напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{хт}}} = \frac{1,125 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1}{472 \cdot 10^{-6}} = 286 \cdot 10^6 \text{ Па} = 286 \text{ МПа},$$

которое меньше допускаемого напряжения на

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{286 - 300}{300} \cdot 100\% = -4,67 \%$$

8. Наибольшие касательные напряжения возникают в точках нейтральной линии опасного сечения балки на левой опоре, где

$|Q_{y\max}| = 1,25P = 1,25 \cdot 4ql$. Предварительно из табл. П.5 для двутавра № 30

находим: $J_x = 7080 \text{ см}^4$; $S_{\text{хт}}^{\text{отс}} = 268 \text{ см}^3$; $d = 0,65 \text{ см}$. Проверяем прочность балки двутаврового сечения по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \left| \frac{Q_{y\max} S_{\text{хт}}^{\text{отс}}}{J_x d} \right| = \left| \frac{-1,25 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} \right| = 87,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 87,4 \text{ МПа} < [\tau] = 150 \text{ МПа}.$$

9. Анализируя эпюры Q_y и M_x , находим предполагаемое опасное сечение по эквивалентным напряжениям, зависящим как от нормальных, так и касательных напряжений. Как правило, опасное сечение то, где возникает наибольший изгибающий момент $M_{\text{хтmax}}$ и значительная (не обязательно максимальная) поперечная сила $Q_{y\text{оп}}$. В рассматриваемом примере опасное (по эквивалентным напряжениям) сечение расположено на левой опоре балки, где $M_{y\text{оп}} = -1,125Pl$ и $Q_{y\text{оп}} = -1,25P$.

10. Двутавровое сечение № 30 условно представляем (рис. 4.5) в виде трех прямоугольников: двух полок размерами $b \times t$ и стенки размерами $(h - 2t) \times d$. С учетом таблицы П.5 для двутавра № 30 находим: $b = 13,5 \text{ см}$; $t = 1,02 \text{ см}$; $h = 30 \text{ см}$; $d = 0,65 \text{ см}$.

11. Определяем нормальные напряжения в характерных точках опасного сечения (рис. 4.5), используя формулу

$$\sigma_i = \frac{|M_{\text{хт}}|}{J_x} \cdot y_i,$$

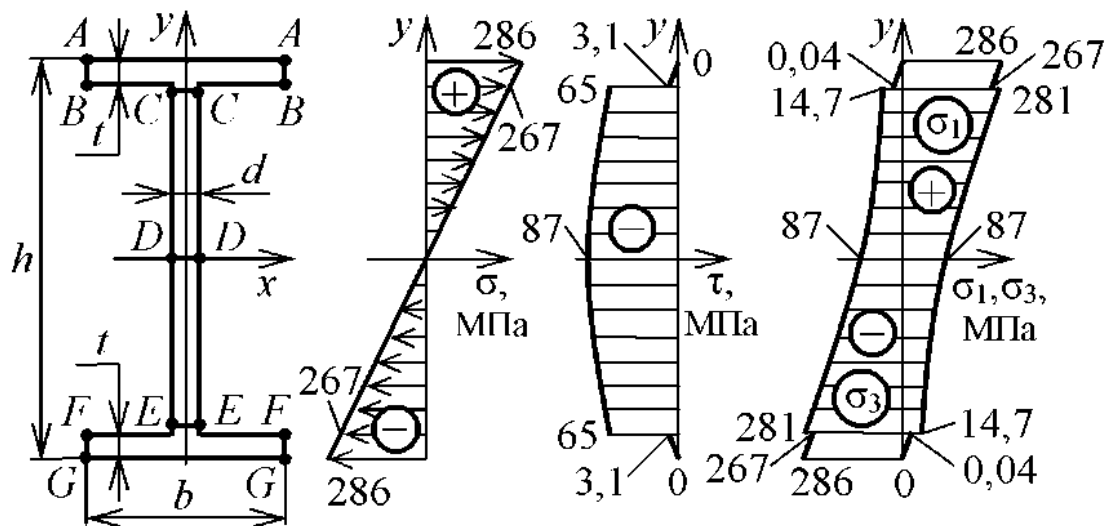


Рис. 4.5. Эпюры нормальных, касательных и главных напряжений в опасном сечении двутавровой балки

где y_i – ордината рассматриваемых точек сечения. Для слоев $A - A$ и $G - G$ $y_i = \pm 15$ см, слоев $B - B$, $C - C$ и $E - E$, $F - F$ $y_i = \pm 0.5(h - t) = \pm 13.98$ см. С учетом этого получаем: $\sigma_A = 286$ МПа; $\sigma_B = \sigma_C = 267$ МПа; $\sigma_D = 0$; $\sigma_E = \sigma_F = -267$ МПа; $\sigma_G = -286$ МПа. По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений (рис. 4.5).

12. Используя формулу Д.И. Журавского

$$\tau_i = \frac{Q_{\text{yon}} S_x^{\text{отс}}}{J_x b_i},$$

определяем касательные напряжения в указанных выше точках. При этом $Q_{\text{yon}} = -1,25P$; $J_x = 7080$ см⁴. Предварительно находим статические моменты отсеченных площадей: для точек A и G $S_x^{\text{отс}} \equiv 0$; для точек B , C , E и F $S_x^{\text{отс}} = b \cdot t \cdot 0,5(h - t) = 13,5 \cdot 1,02 \cdot 0,5(30 - 1,02) = 199$ см³; для точки D из табл.

П.5 для двутавра № 30 получаем $S_{x_{\text{max}}}^{\text{отс}} = 268$ см³. С учетом этого вычисляем: $\tau_A = 0$; $\tau_B = \tau_F = -3,1$ МПа; $\tau_C = \tau_E = -65$ МПа; $\tau_D = -87$ МПа. Строим эпюру касательных напряжений (рис. 4.5).

13. Определяем величины и направления главных напряжений по формулам

$$\sigma_{1/3} = \frac{\sigma_i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_i^2 + 4\tau_i^2}, \quad \text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_i}{\sigma_i}.$$

В результате вычислений получаем для: слоя $A - A$ $\sigma_1 = 286$ МПа, $\sigma_3 = 0$, $\alpha_0 = 0$; слоя $B - B$ $\sigma_1 = 267$ МПа, $\sigma_3 = -0,04$ МПа, $\alpha_0 = 0,665^\circ$; слоя $C - C$ $\sigma_1 =$

281 МПа, $\sigma_3 = -14,7$ МПа, $\alpha_0 = 13^\circ$; слоя D D $\sigma_1 = 87$ МПа, $\sigma_3 = -87$ МПа, $\alpha_0 = 45^\circ$; слоя E E $\sigma_1 = 14,7$ МПа, $\sigma_3 = -281$ МПа, $\alpha_0 = -13^\circ$; слоя F F $\sigma_1 = 0,04$ МПа, $\sigma_3 = -267$ МПа, $\alpha_0 = -0,665^\circ$; слоя G G $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -286$ МПа, $\alpha_0 = 0$. Строим антисимметричные эпюры главных напряжений σ_1 , σ_3 (рис. 4.5).

14. Используя графо-аналитический метод О. Мора, определяем величины и направления главных напряжений для характерных точек C , D и E с помощью круга напряжений (обратная задача), как показано на рис. 4.6.

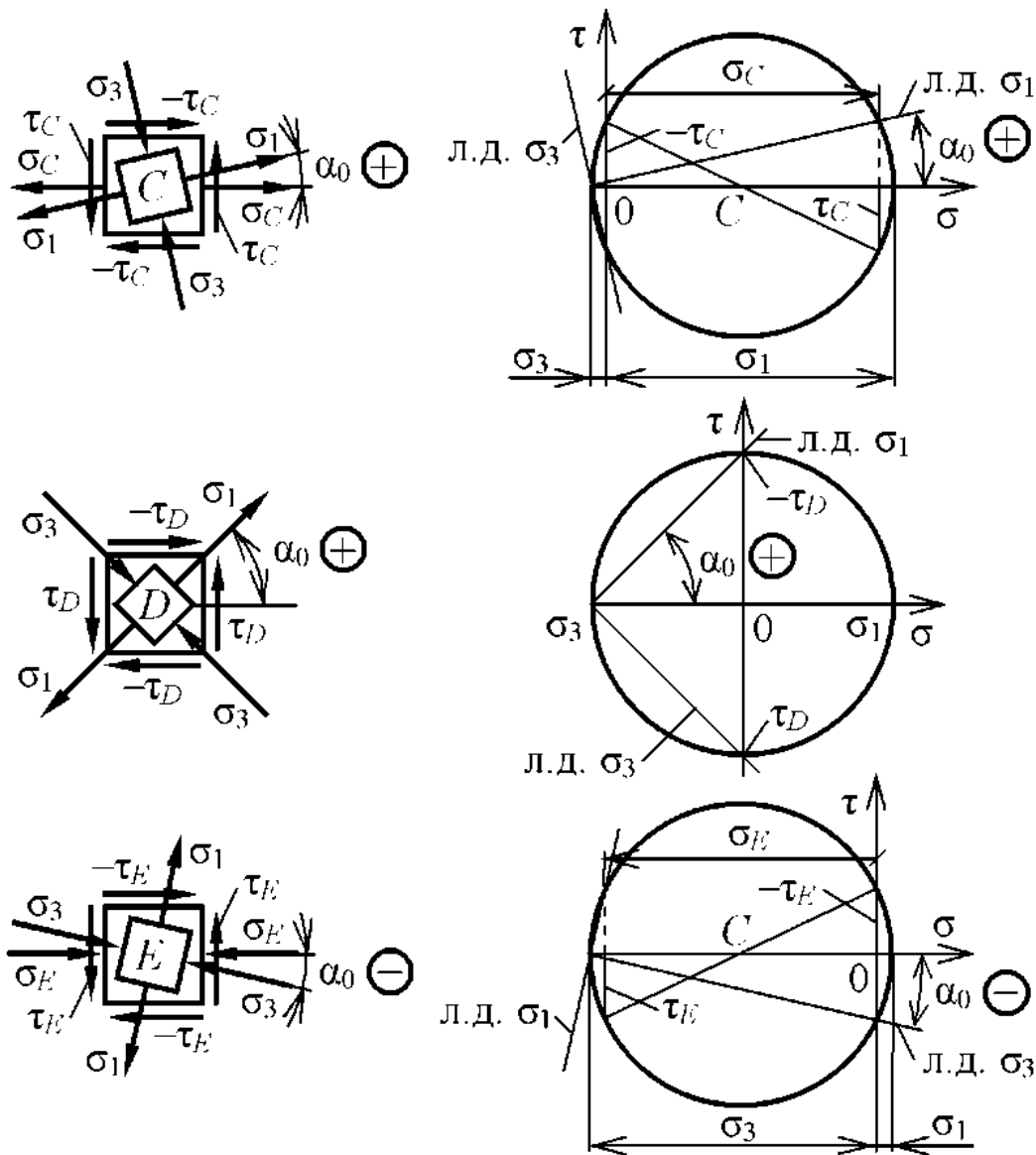


Рис. 4.6. Круги О. Мора для элементов C , D и E

Построение кругов О. Мора поясним на примере точки C (рис. 4.6): выберем координатные оси $\sigma - \tau$; в масштабе откладываем напряжения σ_C , τ_C и

0. $-\tau_C$; соединяем полученные точки прямой и описываем окружность. Отрезки, отсекаемые окружностью на оси σ , представляют собой в масштабе главные напряжения $\sigma_1 = 281$ МПа и $\sigma_3 = -14.7$ МПа. Затем находим зеркальные проекции точек с координатами $(\sigma_C; \tau_C)$ и $(0, -\tau_C)$ на окружность; через точки с координатами $(\sigma_3; 0)$ и $(\sigma_C; -\tau_C)$ проводим линии действия (л.д.) главных напряжений σ_1 и σ_3 , которые определяют искомый угол $\alpha_0 = 13^\circ$. После этого показываем напряженное состояние балки, заданное на главных площадках напряжениями σ_1 и σ_3 (рис. 4.6, внутренний кубик). Видно, что круг напряжений совершенно аналогичен кругу инерции О. Мора.

15. Анализ эпюр σ и τ (рис. 4.5) показывает, что наибольшие эквивалентные напряжения возникают в слоях $C - C$ и $E - E$. Записываем условие прочности балки по эквивалентным напряжениям, используя третью теорию прочности

$$\max \sigma_{\text{экв3}} = \sqrt{\sigma_C^2 + 4\tau_C^2} = \sqrt{267^2 + 4(-65)^2} = 296 \text{ МПа} < [\sigma] = 300 \text{ МПа}.$$

Таким образом, прочность балки по нормальным, касательным и эквивалентным напряжениям обеспечена.

16. Проводим расчет двутавровой балки на жесткость. Для определения углов поворота и прогибов используем универсальные уравнения (4.10) и (4.11). В соответствии со сформулированными выше требованиями составляем расчетную схему балки для определения перемещений (рис. 4.7).

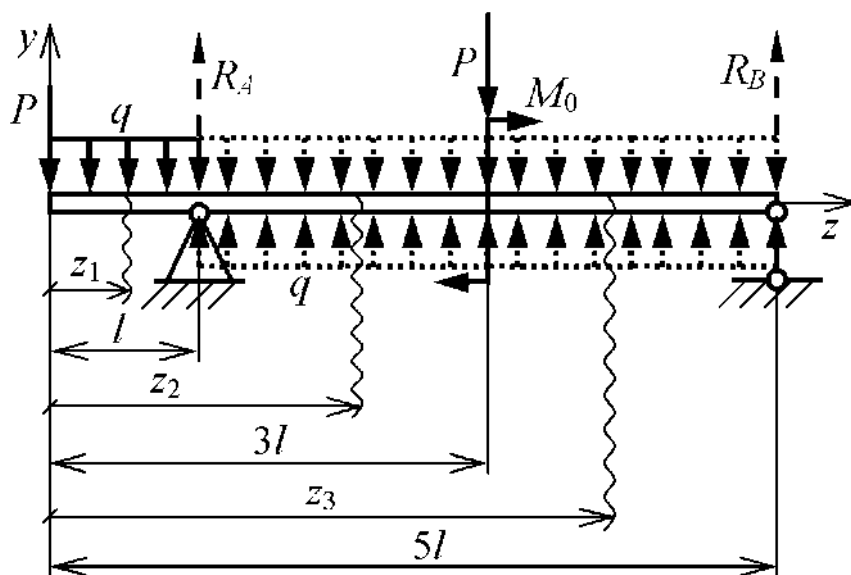


Рис. 4.7. Расчетная схема к составлению универсальных уравнений углов поворота сечений и прогибов балки

При этом начало координат располагаем в крайнем левом сечении балки, а распределенную нагрузку q продляем до конца балки и добавляем такую

же, но противоположно направленную. Абсциссы участков балки изменяются в пределах: $0 \leq z_1 \leq l$; $l \leq z_2 \leq 3l$; $3l \leq z_3 \leq 5l$. Направления внешних нагрузок, соответствующие положительным знакам слагаемых уравнений (4.10) и (4.11), показаны на рис. 4.2. С учетом этого универсальные уравнения (4.10) и (4.11) конкретизируем следующим образом

$$\Theta_z = \Theta_0 - \frac{P(z-0)^2}{2!EJ_x} - \frac{q(z-0)^3}{3!EJ_x} + \frac{R_1(z-l)^2}{2!EJ_x} + \frac{q(z-l)^3}{3!EJ_x} +$$

$$\frac{M_0(z-3l)^1}{1!EJ_x} - \frac{P(z-3l)^2}{2!EJ_x} \quad \text{III}$$

$$y_z = y_0 + \Theta_0 z - \frac{P(z-0)^3}{3!EJ_x} - \frac{q(z-0)^4}{4!EJ_x} + \frac{R_1(z-l)^3}{3!EJ_x} + \frac{q(z-l)^4}{4!EJ_x} +$$

$$\frac{M_0(z-3l)^2}{2!EJ_x} - \frac{P(z-3l)^3}{3!EJ_x} \quad \text{III}$$

17. На опорах прогибы равны нулю. Следовательно, граничные условия имеют вид: 1. $z_1 = l \quad y_1 = 0$; 2. $z_3 = 5l \quad y_3 = 0$. Подставляя граничные условия в уравнения прогибов для первого и третьего участков и совместно решая их, получаем начальные параметры: $\Theta_0 = +1,125P^2/EJ_x$; $y_0 = -0,948P^3/EJ_x$.

18. Разбивая балку на 10 частей и учитывая значения Θ_0 и y_0 , по конкретизированным уравнениям вычисляем углы поворота и прогибы балки. Результаты вычислений сводим в таблицу 4.3.

Таблица 4.3. Результаты расчетов

Перемещения	Абсциссы сечения										
	0	0,5l	l	1,5l	2l	2,5l	3l	3,5l	4l	4,5l	5l
$\frac{\Theta_z}{P^2/EJ_x}$	1,125	0,995	0,583	0,103	-0,213	-0,366	-0,354	-0,0535	0,161	0,290	0,479
$\frac{y_z}{P^3/EJ_x}$	-0,948	-0,407	0	0,165	0,130	0,0215	-0,208	-0,307	-0,276	-0,159	0

Окончательно представляем балку (рис. 4.8) и строим эпюры Q_y , M_x , Θ_z и y_z с учетом расчетов и дифференциальных зависимостей между q_y , Q_y , M_x , Θ_z и y_z . Используя правила контроля эпюр, проверяем правильность проведенных расчетов.

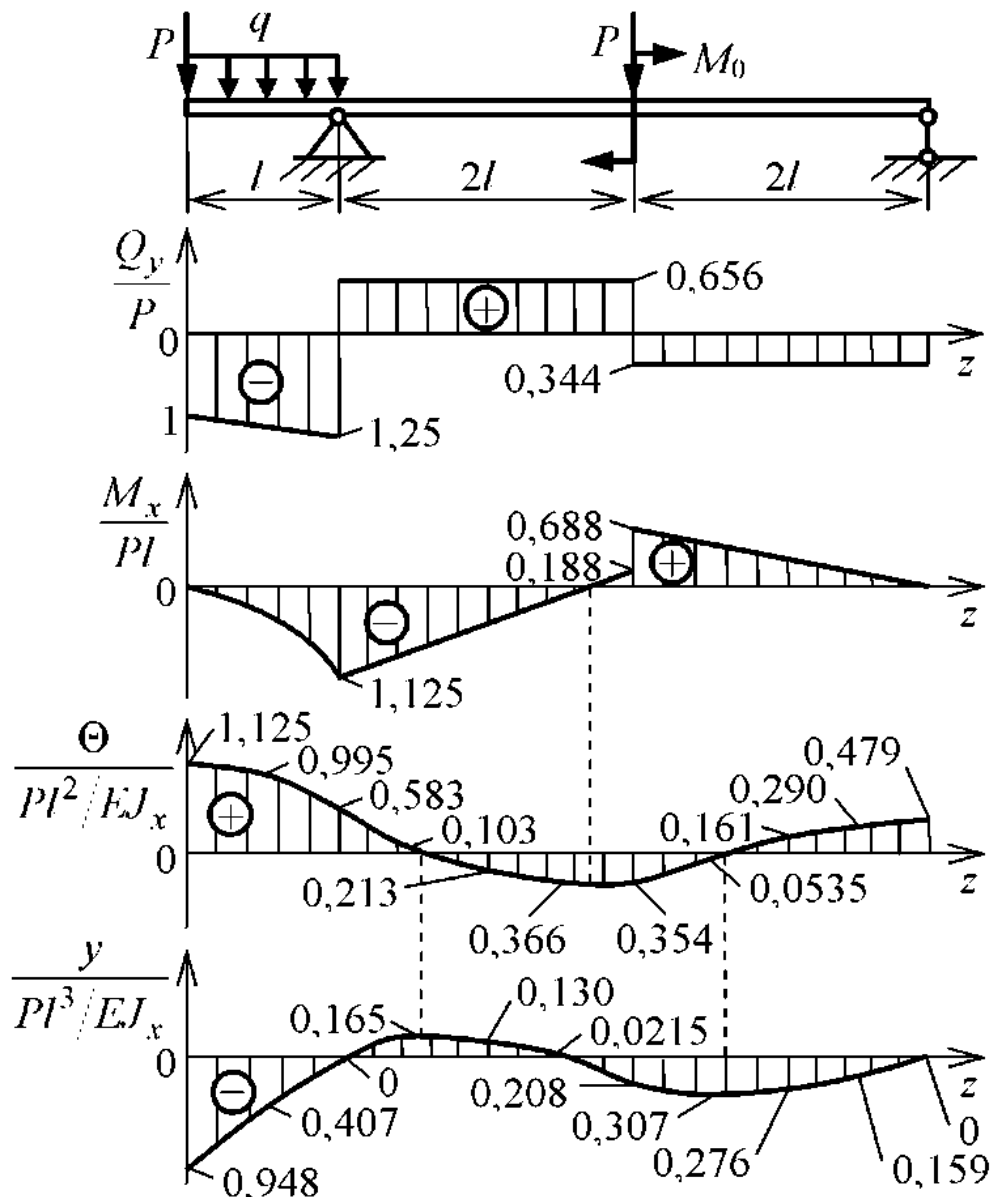


Рис. 4.8. Расчетная схема балки, эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, углов поворота и прогибов

19. Анализируя эпюру прогибов, находим опасное по жесткости сечение (в рассматриваемом примере – крайнее левое сечение). Проверяем выполнение условия жесткости балки

$$\begin{aligned}
 y_{\max} &= \left| k_y \frac{Pl^3}{EJ_x} \right|_{\max} = \left| -0,948 \frac{Pl^3}{EJ_x} \right|_{\max} = \frac{0,948 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 1^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = \\
 &= 0,00803 \text{ м} < [v] = 0,01 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

Видно, что условие жесткости балки выполняется. В противном случае из условия жесткости вычисляем расчетный момент инерции J_x и по табл. П.5 окончательно выбираем номер двутавра.

5. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ БРУСЬЕВ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

Многие элементы конструкций работают в условиях совместного действия простых видов нагружения (растяжения или сжатия, изгиба и кручения). Сопротивление бруса (элемента конструкции) нескольким простым видам нагружения называется сложным сопротивлением. Характерные виды сложного сопротивления это косоугольный изгиб балок, изгиб (плоский или косоугольный) с кручением валов, внецентренное растяжение (сжатие) брусьев (элементов конструкций) и другие.

Косоугольный изгиб балок возникает в том случае, когда внешние нагрузки расположены не в одной главной центральной плоскости инерции. При расчетах на прочность и жесткость косоугольный изгиб балок рассматривают как сочетание двух плоских изгибов в главных центральных плоскостях инерции.

Изгиб (плоский или косоугольный) с кручением испытывают многие элементы конструкций, в частности валы коробок передач транспортных средств, коробок передач металлообрабатывающих станков, редукторов, других агрегатов и машин. Изгиб валов вызывается распорными усилиями зубчатых колес, натяжением ремней или цепей в соответствующих передачах. Кручение обусловлено действием передаваемого валом крутящего момента.

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ БРУСЬЕВ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

Внецентренное растяжение испытывают элементы несущих ферм, ряда сварных конструкций, корпуса сверлильных станков, агрегатов для точечной сварки, штоки кузнечных молотов и многие другие детали машин. На внецентренное сжатие работают элементы строительных конструкций, опоры зданий и сооружений. Кроме этого, нередки случаи, когда одни участки элемента конструкции работают на центральное, а другие – на внецентренное растяжение или сжатие. Например, тяга в виде полосы работает в целом на центральное растяжение, а ее участок, содержащий смещенное от оси отверстие, испытывает внецентренное растяжение.

Внецентренное растяжение (сжатие) бруса возникает в том случае, когда точка приложения равнодействующей продольных сил не совпадает с центром тяжести рассматриваемого сечения. Положим, задан брус (рис. 5.1), на который действуют продольные силы P_i . Методами теоретической механики определяем точку приложения равнодействующей $\sum P_i$ продольных сил (рис. 5.1а). Выбираем произвольное сечение и рассматриваем нижнюю часть бруса (рис. 5.1б). В поперечном сечении действует один

внутренний силовой фактор – нормальная сила N , которая приложена не в центре тяжести C и вызывает нормальные напряжения $\sigma(x, y)$. Предварительно определяем положение центра тяжести и главных центральных осей инерции $x - y$ рассматриваемого сечения. Из рис. 5.1б видно, что внецентренное растяжение (сжатие) бруса можно рассматривать как сочетание центрального растяжения (сжатия) и двух плоских изгибов в главных центральных плоскостях инерции xoz и yoz . С учетом этого нормальное напряжение в рассматриваемой точке первой четверти можно представить

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N \cdot y_N \cdot y}{J_x} + \frac{N \cdot x_N \cdot x}{J_y}, \quad (5.1)$$

где $N = \sum P_i$ – нормальная сила; x_N, y_N – координаты точки приложения нормальной силы; x, y – координаты рассматриваемой точки; J_x, J_y – главные центральные моменты инерции сечения.

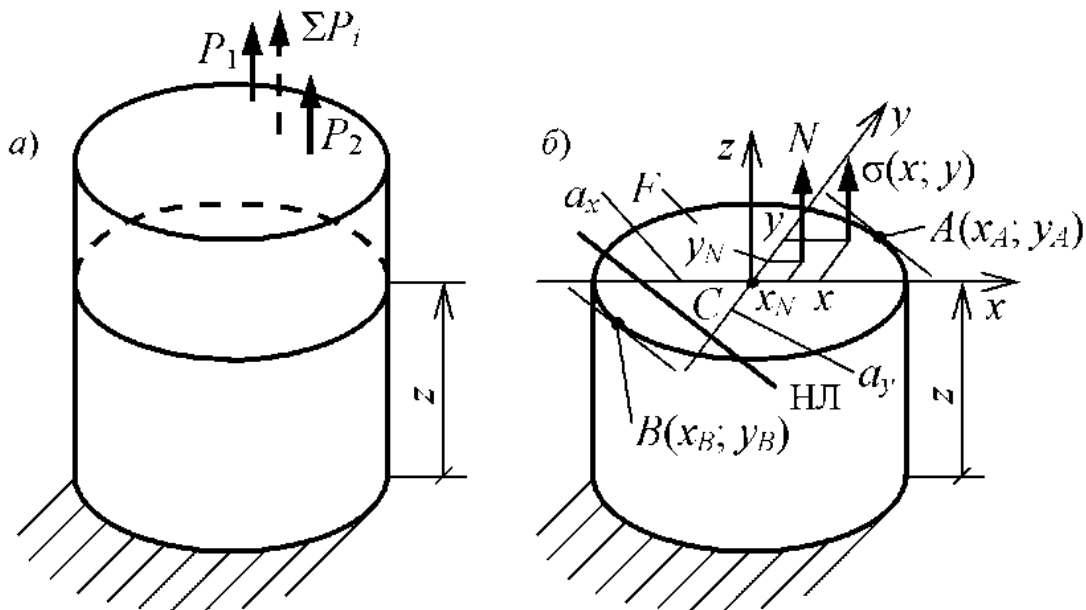


Рис. 5.1. К определению напряжений при внецентренном растяжении (сжатии)

Формула (5.1) представляет собой плоскость, наклоненную к поперечному сечению бруса. Плоскость напряжений (5.1) пересекает плоскость поперечного сечения бруса. Очевидно, что нормальные напряжения на линии пересечения равны нулю. Совокупность точек, напряжения в которых равны нулю, образует нейтральную линию (НЛ), показанную на рис. 5.1б. Часть сечения бруса, расположенная справа от нейтральной линии, испытывает растяжение, слева – сжатие. Приравнявая формулу (5.1) нулю, получаем уравнение нейтральной линии

$$y_0 = -\frac{J_x}{J_y} \frac{x_N}{y_N} x_0 - \frac{J_x}{F \cdot y_N}. \quad (5.2)$$

где x_0, y_0 – координаты нейтральной линии. Из уравнения (5.2) видно, что нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения. Если точка приложения нормальной силы находится в какой-то (например, первой) четверти, то нейтральная линия располагается по другую сторону от центра тяжести (рис. 5.1б). Положение нейтральной линии можно определить по отрезкам, отсекаемым на главных центральных осях инерции (рис. 5.1б)

$$a_x = -J_y / F x_N, \quad a_y = -J_x / F y_N. \quad (5.3)$$

Опасными будут те точки, которые наиболее удалены от нейтральной линии (точки A и B). Для их определения проводят касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии. С учетом формулы (5.1) условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии) можно представить

$$\sigma_{\max} = \left| \pm \frac{N}{F} \pm \frac{N \cdot y_N \cdot y_{(A;B)}}{J_x} \pm \frac{N \cdot x_N \cdot x_{(A;B)}}{J_y} \right|_{\max} \leq [\sigma], \quad (5.4)$$

где $x_{(A;B)}, y_{(A;B)}$ – координаты опасных точек; $[\sigma] = \sigma_T / n_T$; $[\sigma]_p = \sigma_{вр} / \gamma_0$ и $[\sigma] = \sigma_{вс} / \gamma_0$ – допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для пластичного и хрупкого материалов; n_T – коэффициент запаса прочности; γ_0 – коэффициент надежности. Конкретные знаки слагаемых формулы (5.4) зависят от знака нормальной силы и положения точки ее приложения.

Хрупкие материалы (кирпичная кладка, бетон, чугун и другие) имеют высокую прочность при сжатии и низкую – при растяжении. Для элементов конструкций из таких материалов важно, чтобы при внецентренном сжатии в сечении не возникало растягивающих напряжений. Этого можно достичь, если нейтральная линия не будет пересекать, а только касаться сечения бруса. Задаваясь рядом характерных положений нейтральной линии, можно получить совокупность точек приложения нормальной силы, когда при внецентренном сжатии в сечении не возникает растягивающих напряжений. Область вокруг центра тяжести, которую описывает точка приложения нормальной силы при перекатывании нейтральной линии вокруг сечения, называется ядром сечения. Координаты точек контура ядра сечения можно представить

$$x_{НЯ} = -J_y / F a_x, \quad y_{НЯ} = -J_x / F a_y. \quad (5.5)$$

Характерно, что если нейтральная линия поворачивается относительно угловой точки сечения, то точка приложения нормальной силы движется по прямой. Ядро прямоугольного, двутаврового и других симметричных сечений с выступающими углами представляет собой ромб.

**5.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ
«РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ СТАЛЬНОГО БРУСА
ПРИ ВНЕЦЕНТРОМ РАСТЯЖЕНИИ»**

(для студентов механических и машиностроительных специальностей)

Задано: стальной брус составного сечения, работающий на внецентренное растяжение; точка приложения силы P ; материал бруса (предел текучести σ_T); коэффициент запаса прочности n_T . Исходные данные для расчета взять из таблиц 5.1, 5.2 и рисунка 5.2 в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ).

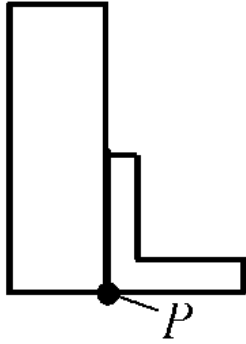
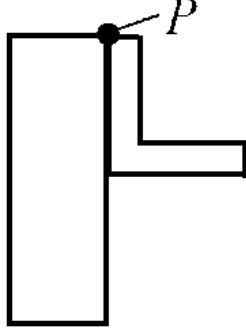
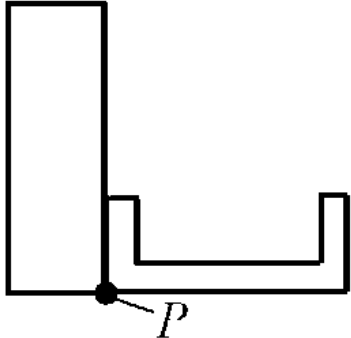
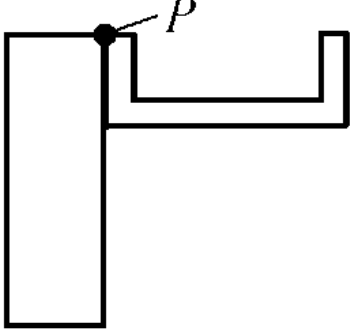
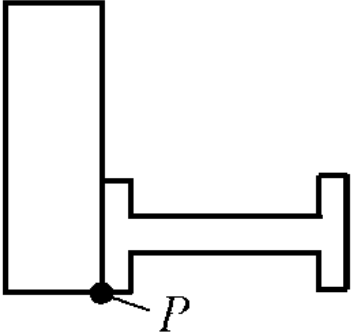
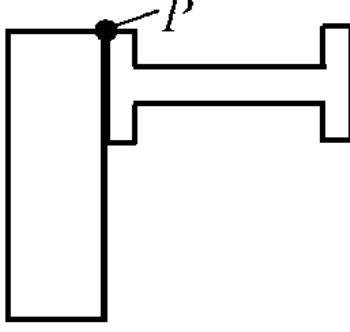
Необходимо для стального бруса выполнить следующее.

1. Вычислить координаты центра тяжести сечения.
2. Определить положение главных центральных осей инерции и величины главных моментов инерции сечения.
3. Составить уравнение нейтральной линии и нанести ее на сечение.
4. Найти опасные точки в сечении.
5. Вычислить допускаемую нагрузку $[P]$ на заданный брус из условия прочности при внецентренном растяжении.

Таблица 5.1. Исходные данные

ЦНВ	1-я ЦНВ	2-я ЦНВ		3-я ЦНВ			4-я ЦНВ		
	№ схемы сост. сеч.	Размеры		Прокатные профили			Сталь	σ_T , МПа	n_T
		h , мм	b , мм	уголок	швеллер	двутавр			
1	1	160	22	80x80x7	8	10	20	270	2,6
2	2	170	24	100x100x8	10	12	18кп	235	2,7
3	3	180	16	100x100x10	12	14	30	380	2,8
4	4	190	28	100x100x14	14	16	ВСт3	275	2,9
5	5	200	30	125x125x12	16	18	40	500	3,0
6	6	210	32	125x125x15	18	20	09Г2С	370	3,1
7	4	220	34	140x140x10	20	22	45	575	3,2
8	3	230	36	140x140x12	22	24	15Г2	440	3,3
9	2	240	38	160x160x10	27	27	50	650	3,4
0	1	250	40	160x160x14	30	30	12Г2С	590	3,5

Таблица 5.2. Схемы составного сечения

<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p> 	<p>4</p> 
<p>5</p> 	<p>6</p> 

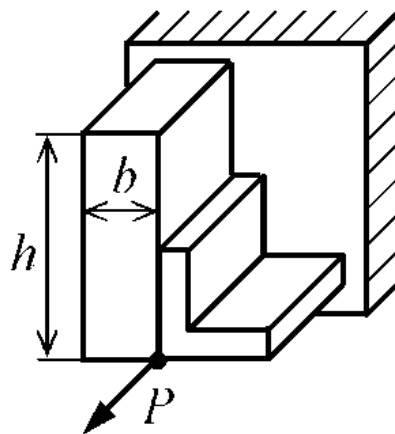


Рис. 5.2. Схема нагружения бруса

5.3. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ
«РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ БЕТОННОГО БРУСА
ПРИ ВНЕЦЕНТРОМ СЖАТИИ»
(для студентов строительных специальностей)

Задано: бетонный брус заданного сечения, работающий на внецентренное сжатие; точка приложения силы P ; свойства бетона (пределы прочности при растяжении $\sigma_{\text{пр}}$ и сжатии $\sigma_{\text{вс}}$); коэффициент надежности γ_0 , учитывающий надежность по материалу (γ_m), характеру нагружения (γ_f), условиям работы (γ_c). Исходные данные для расчета взять из таблиц 5.3, 5.4 и рисунка 5.3 в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ).

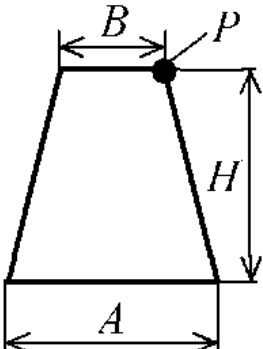
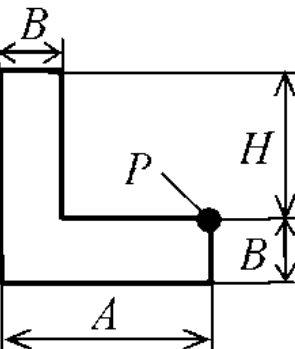
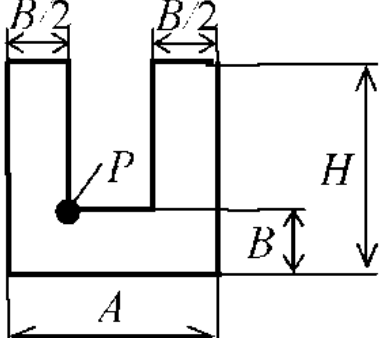
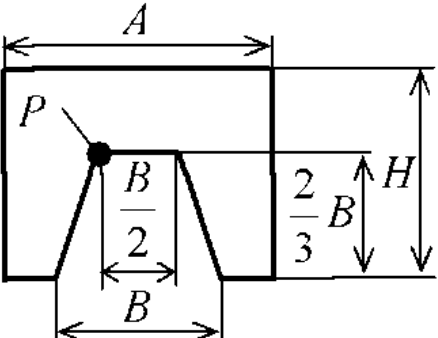
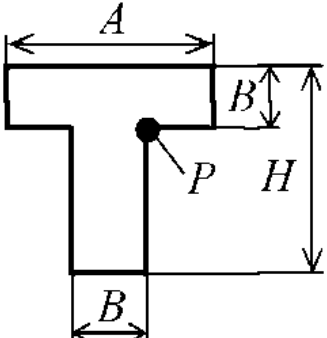
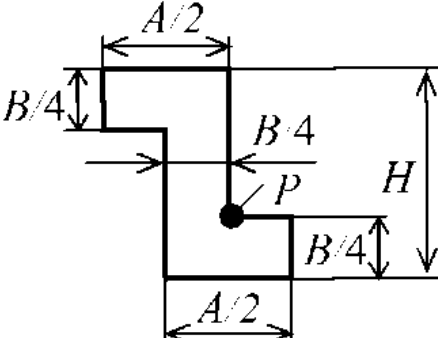
Необходимо для бетонного бруса выполнить следующее.

1. Вычислить координаты центра тяжести сечения.
2. Определить положение главных центральных осей инерции и величины главных моментов инерции сечения.
3. Составить уравнение нейтральной линии и нанести ее на сечение.
4. Найти опасные точки в сечении.
5. Вычислить допускаемую нагрузку $[P]$ на брус из условий прочности при внецентренном растяжении или сжатии.
6. Построить ядро сечения.

Таблица 5.3. Исходные данные

ЦНВ	1-я ЦНВ	2-я ЦНВ			3-я ЦНВ		4-я ЦНВ
	№ расчетной схемы	Размеры сечения			Свойства бетона		Коеф. над. γ_0
		A , см	B , см	H , см	$\sigma_{\text{вс}}$, МПа	$\sigma_{\text{вр}}$, МПа	
1	1	60	36	50	11	1,0	3,0
2	2	70	42	60	15	1,3	2,9
3	3	80	48	70	19	1,5	2,8
4	4	90	54	80	23	2,0	2,7
5	5	100	60	90	27	2,5	2,6
6	6	110	66	100	31	3,0	2,5
7	4	120	72	110	36	3,5	2,4
8	3	130	78	120	40	4,0	2,3
9	2	140	84	130	44	4,5	2,2
0	1	150	90	140	48	5,0	2,1

Таблица 5.4. Сечения бруса

<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p> 	<p>4</p> 
<p>5</p> 	<p>6</p> 

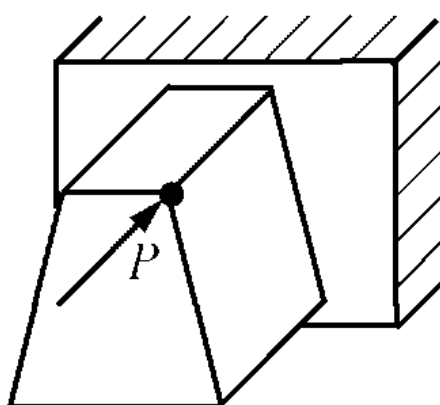


Рис. 5.3. Схема нагружения бруса

5.4. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ СТАЛЬНОГО БРУСА ПРИ ВНЕЦЕНТРОМ РАСТЯЖЕНИИ»

Задано: стальной брус составного сечения (прямоугольник: $h = 15$ см; $b = 1,5$ см; швеллер № 12), работающий на внецентренное растяжение: точка приложения силы P (рис. 5.4); материал – сталь 40 ($\sigma_T = 520$ МПа); коэффициент запаса прочности $n_T = 2,75$.

Необходимо выполнить следующее.

1. Вычислить координаты центра тяжести сечения.
2. Определить положение главных центральных осей инерции и величины главных моментов инерции сечения.
3. Составить уравнение нейтральной линии и нанести ее на сечение.
4. Найти опасные точки в сечении.
5. Вычислить допускаемую нагрузку $[P]$ на брус из условия прочности при внецентренном растяжении.

РЕШЕНИЕ

1. С учетом цифр номера варианта и сортамента прокатной стали (табл. П.2 ... П.5) вычерчиваем в масштабе составное сечение (рис. 5.4).
2. Находим геометрические характеристики сечений отдельных элементов относительно собственных центральных осей $x_i - y_i$ (рис. 5.4).

Прямоугольник: $F_1 = bh = 1,5 \cdot 15 = 22,5$ см²;

$$J_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,5 \cdot 15^3}{12} = 422 \text{ см}^4; \quad J_{y1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{15 \cdot 1,5^3}{12} = 4,22 \text{ см}^4; \quad J_{x1y1} = 0.$$

Швеллер № 12: из табл. П.4 находим $F_2 = 13,7$ см²; с учетом поворота сечения (рис. 5.4) $J_{x2} = 34,4$ см⁴; $J_{y2} = 313$ см⁴; $J_{x2y2} = 0$; $x_0 = 1,59$ см.

3. Выбираем координатные оси $x - y$ (рис. 5.4) и находим координаты центров тяжести элементов в этих осях:

C_1 ($x_{1c} = -0,75$ см; $y_{1c} = 7,5$ см); C_2 ($x_{2c} = 6$ см; $y_{2c} = 1,59$ см):

4. Вычисляем координаты центра тяжести C составного сечения в произвольных осях $x - y$

$$x_c = \frac{\sum F_i x_{ic}}{\sum F_i} = \frac{22,5 \cdot (-0,75) + 13,7 \cdot 6}{22,5 + 13,7} = 1,80 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{\sum F_i y_{ic}}{\sum F_i} = \frac{22,5 \cdot 7,5 + 13,7 \cdot 1,59}{22,5 + 13,7} = 5,26 \text{ см}.$$

Проводим центральные оси $x_c - y_c$ (рис. 5.4).

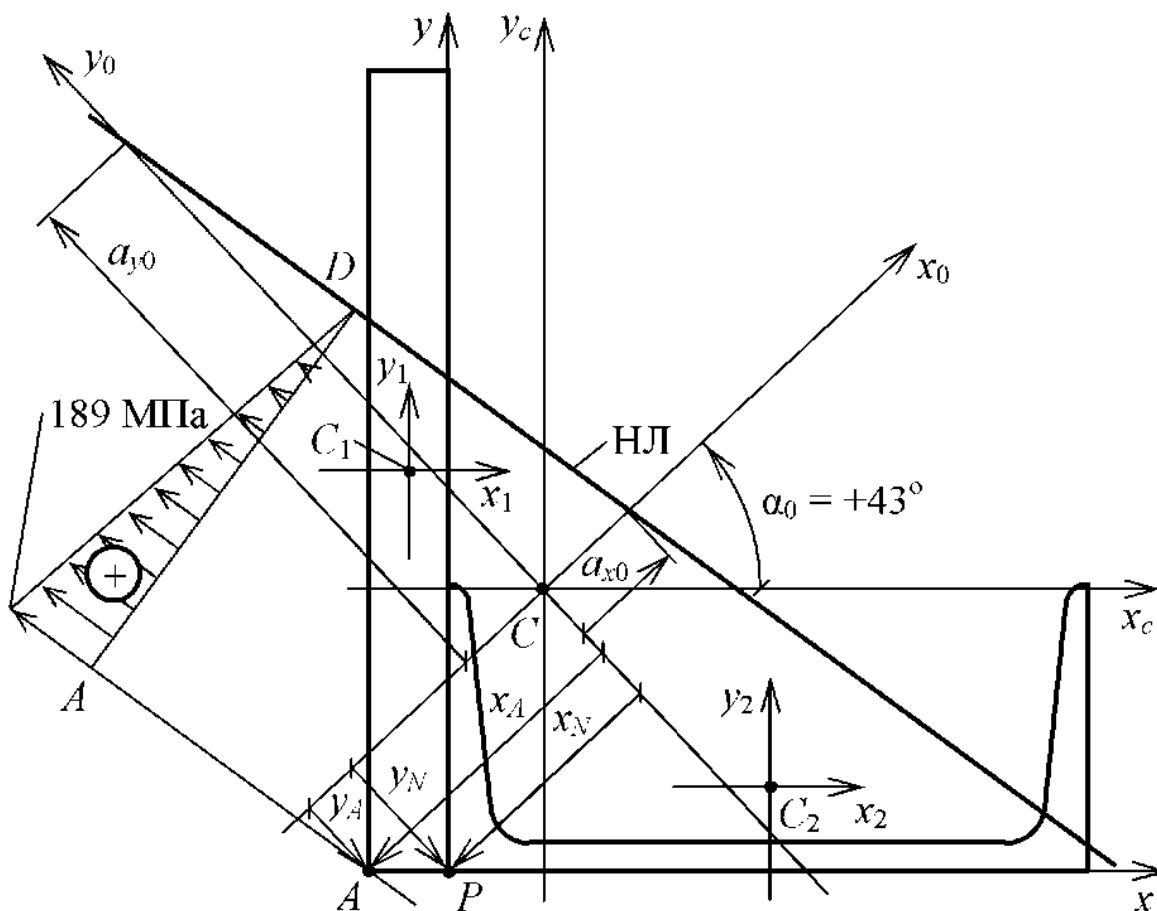


Рис. 5.4. К расчету стального бруса на внецентренное растяжение

5. Определяем координаты центров тяжести элементов в центральных осях составного сечения: C_1 ($x_{c1} = -1,80 - 0,75 = -2,55$ см; $y_{c1} = 7,5 - 5,26 = 2,24$ см); C_2 ($x_{c2} = 6 - 1,80 = 4,20$ см; $y_{c2} = 1,59 - 5,26 = -3,67$ см).

6. Находим осевые и центробежный моменты инерции составного сечения относительно центральных осей $x_c - y_c$

$$J_{xc} = \sum (J_{xi} + F_i \cdot y_{ci}^2) = (422 + 22,5 \cdot 2,24^2) + [34,4 + 13,7(-3,67)^2] = 754 \text{ см}^4;$$

$$J_{yc} = \sum (J_{yi} + F_i \cdot x_{ci}^2) = [4,22 + 22,5 \cdot (-2,55)^2] + (313 + 13,7 \cdot 4,20^2) = 706 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c y_c} = \sum (J_{x_i y_i} + F_i \cdot x_{ci} \cdot y_{ci}) = \\ = [0 + 22,5 \cdot (-2,55) \cdot 2,24] + [0 + 13,7 \cdot 4,20 \cdot (-3,67)] = -340 \text{ см}^4.$$

7. Находим положение главных центральных осей инерции сечения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{xc} - J_{yc}} = -\frac{2(-340)}{754 - 706} = 14,2; \quad 2\alpha_0 = +86^\circ; \quad \alpha_0 = +43^\circ.$$

Так как угол $\alpha_0 > 0$, то он откладывается против часовой стрелки от осей $x_c - y_c$ (рис. 5.4).

8. Вычисляем главные центральные моменты инерции составного сечения

$$\begin{aligned} J_{x_0/y_0} &= \frac{J_{xc} + J_{yc}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{xc} - J_{yc})^2 + 4J_{xcyc}^2} = \\ &= \frac{754 + 706}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(754 - 706)^2 + 4(-340)^2}; \\ J_{x_0/y_0} &= 730 \pm 341 \text{ см}^4; \quad J_{x_0} = 1071 \text{ см}^4; \quad J_{y_0} = 389 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

9. Определяем координаты точки приложения силы P в центральных осях $x_c - y_c$ (рис. 5.4): $x_P = -x_c = -1,80 \text{ см}$; $y_P = -y_c = -5,26 \text{ см}$.

10. Находим координаты точки приложения нормальной силы N в главных центральных осях инерции $x_0 - y_0$

$$\begin{aligned} x_N &= x_P \cdot \cos \alpha_0 + y_P \cdot \sin \alpha_0 = (-1,80) \cdot 0,7314 + (-5,26) \cdot 0,6820 = -4,90 \text{ см}; \\ y_N &= y_P \cdot \cos \alpha_0 - x_P \cdot \sin \alpha_0 = (-5,26) \cdot 0,7314 - (-1,80) \cdot 0,6820 = -2,62 \text{ см}. \end{aligned}$$

11. Записываем уравнение нейтральной линии

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{J_{x_0}}{J_{y_0}} \frac{x_N}{y_N} x_0 - \frac{J_{x_0}}{\sum F_i y_N} = -\frac{1071}{389} \frac{(-4,90)}{(-2,62)} x_0 - \frac{1071}{36,2(-2,62)}; \\ y_0 &= -5,15x_0 + 11,3 \end{aligned}$$

или в отрезках на осях: $a_{x_0} = +2,19 \text{ см}$; $a_{y_0} = +11,3 \text{ см}$.

12. Наносим нейтральную линию на составное сечение и проводим касательную к сечению, параллельную нейтральной линии. Видно, что опасной является точка A . Находим координаты опасной точки A в центральных осях $x_c - y_c$: $A(x_{Ac} = -1,5 - 1,80 = -3,30 \text{ см}$; $y_{Ac} = -5,26 \text{ см})$.

13. Вычисляем координаты опасной точки A в главных центральных осях инерции $x_0 - y_0$

$$\begin{aligned} x_A &= x_{Ac} \cdot \cos \alpha_0 + y_{Ac} \cdot \sin \alpha_0 = (-3,30) \cdot 0,7314 + (-5,26) \cdot 0,6820 = -6,00 \text{ см}; \\ y_A &= y_{Ac} \cdot \cos \alpha_0 - x_{Ac} \cdot \sin \alpha_0 = (-5,26) \cdot 0,7314 - (-3,30) \cdot 0,6820 = -1,60 \text{ см}. \end{aligned}$$

14. Вычисляем допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \sigma_T / n_T = 520 / 2,75 = 189 \text{ МПа}.$$

15. Записываем условие прочности

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \left| \frac{N}{\sum F_i} + \frac{N \cdot y_N \cdot y_A}{J_{x_0}} + \frac{N \cdot x_N \cdot x_A}{J_{y_0}} \right|_{\max} \leq [\sigma] \text{ или} \\ \sigma_{\max} &= \left| \frac{P}{36,2 \cdot 10^{-4}} + \frac{P(-2,62)(-1,60) \cdot 10^{-4}}{1071 \cdot 10^{-8}} + \frac{P(-4,90)(-6,00) \cdot 10^{-4}}{389 \cdot 10^{-8}} \right| = \\ &= [\sigma] = 189 \cdot 10^6 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Откуда находим допускаемую нагрузку на стальной брус

$$|P| = 176 \cdot 10^3 \text{ Н} = 176 \text{ кН}.$$

16. Строим эпюру распределения напряжений по прямой, проходящей через опасную точку A и перпендикулярной нейтральной линии (рис. 5.4). В опасной точке A $\sigma_{\max} = [\sigma] = 189$ МПа, в точке D , расположенной на нейтральной линии $\sigma = 0$.

5.5. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ БЕТОННОГО БРУСА ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ»

Задано: бетонный брус заданного сечения (рис.5.5), работающий на внецентренное сжатие; точка приложения силы P ; свойства бетона ($\sigma_{\text{вр}} = 3,5$ МПа; $\sigma_{\text{вс}} = 36$ МПа); коэффициент надежности $\gamma_0 = 3,0$; размеры сечения: $A = 120$ см; $B = 60$ см; $H = 180$ см.

Необходимо выполнить следующее.

1. Вычислить координаты центра тяжести сечения.
2. Определить положение главных центральных осей инерции и величины главных моментов инерции сечения.
3. Составить уравнение нейтральной линии и нанести ее на сечение.
4. Найти опасные точки в сечении.
5. Вычислить допускаемую нагрузку $[P]$ на брус из условий прочности при внецентренном растяжении или сжатии.
6. Построить ядро сечения.

РЕШЕНИЕ

1. С учетом цифр номера варианта вычерчиваем в масштабе сечение (рис. 5.5).
2. Представляем заданное сечение как сочетание двух прямоугольников (рис. 5.5) и вычисляем их геометрические характеристики относительно собственных центральных осей x_i y_i .

Прямоугольник 1 ($B = 60$ см; $(H - B) = 120$ см): $F_1 = 7200$ см²;

$$J_{x1} = \frac{B(H - B)^3}{12} = \frac{60 \cdot 120^3}{12} = 864 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$$J_{y1} = \frac{(H - B)B^3}{12} = \frac{120 \cdot 60^3}{12} = 216 \cdot 10^4 \text{ см}^4; J_{x1y1} = 0.$$

Прямоугольник 2 ($A = 120$ см; $B = 60$ см): $F_2 = 7200$ см²;

$$J_{x2} = \frac{AB^3}{12} = \frac{120 \cdot 60^3}{12} = 216 \cdot 10^4 \text{ см}^4; \quad J_{y2} = \frac{BA^3}{12} = \frac{60 \cdot 120^3}{12} = 864 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$$J_{x2y2} = 0.$$

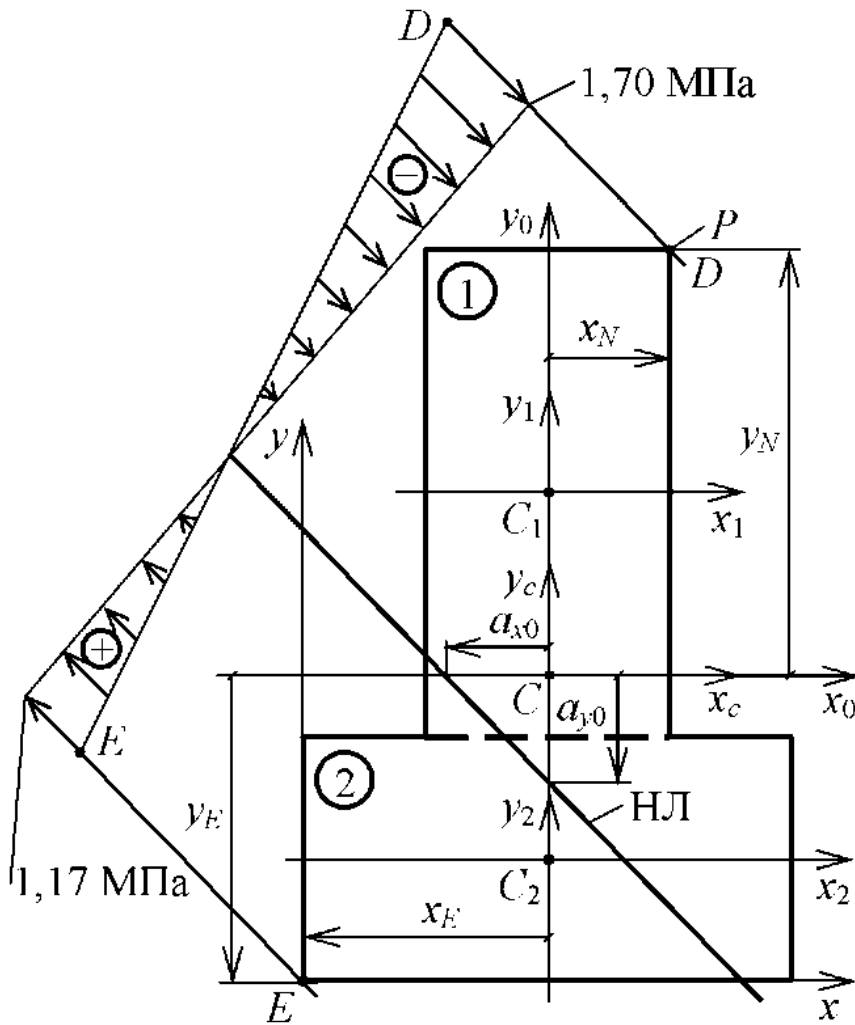


Рис. 5.5. К расчету бетонного бруса на внецентренное сжатие

ПРИМЕЧАНИЕ. Если заданное сечение имеет трапециевидные элементы, то они разбиваются на прямоугольники и прямоугольные треугольники, геометрические характеристики которых приведены в табл. П.1.

3. Выбираем координатные оси $x - y$ (рис. 5.5) и находим координаты центров тяжести элементов 1, 2 в этих осях: C_1 ($x_{1c} = 60$ см; $y_{1c} = 120$ см); C_2 ($x_{2c} = 60$ см; $y_{2c} = 30$ см).

4. Вычисляем координаты центра тяжести C сечения в произвольных осях $x - y$

$$x_c = \frac{\sum F_i x_{ic}}{\sum F_i} = \frac{7200 \cdot 60 + 7200 \cdot 60}{7200 + 7200} = 60 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum F_i y_{ic}}{\sum F_i} = \frac{7200 \cdot 120 + 7200 \cdot 30}{7200 + 7200} = 75 \text{ см}.$$

5. Проводим центральные оси $x_c - y_c$ (рис. 5.5) и определяем координаты центров тяжести элементов 1 и 2 в центральных осях сечения: $C_1 (x_{c1} = 0; y_{c1} = 45 \text{ см})$; $C_2 (x_{c2} = 0; y_{c2} = -45 \text{ см})$.

6. Находим осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей $x_c - y_c$

$$J_{x_c} = \sum (J_{xi} + F_i y_{ci}^2) = (864 \cdot 10^4 + 7200 \cdot 45^2) + [216 \cdot 10^4 + 7200(-45)^2] = 3996 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = \sum (J_{yi} + F_i x_{ci}^2) = (216 \cdot 10^4 + 7200 \cdot 0) + (864 \cdot 10^4 + 7200 \cdot 0) = 1080 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$J_{x_c y_c} \equiv 0$, так как сечение имеет координатную ось симметрии y_c .

7. Находим положение главных центральных осей инерции сечения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 0}{3996 \cdot 10^4 - 1080 \cdot 10^4} \equiv 0, \quad \alpha_0 = 0.$$

Главные центральные оси $x_0 - y_0$ в данном примере совпадают с центральными осями инерции $x_c - y_c$.

8. Вычисляем главные центральные моменты инерции сечения

$$J_{x_0/y_0} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{3996 \cdot 10^4 + 1080 \cdot 10^4}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(3996 \cdot 10^4 - 1080 \cdot 10^4)^2 + 4 \cdot 0} ;$$

$$J_{x_0} = 3996 \text{ см}^4; \quad J_{y_0} = 1080 \text{ см}^4.$$

9. Находим координаты точки приложения силы P в центральных осях $x_c - y_c$ (рис. 5.5): $x_p = 30 \text{ см}$; $y_p = 105 \text{ см}$.

10. Определяем координаты точки приложения нормальной силы N в главных центральных осях инерции $x_0 - y_0$

$$x_N = x_p \cdot \cos \alpha_0 + y_p \cdot \sin \alpha_0 = 30 \cdot 1 + 105 \cdot 0 = 30 \text{ см};$$

$$y_N = y_p \cdot \cos \alpha_0 - x_p \cdot \sin \alpha_0 = 105 \cdot 1 - 30 \cdot 0 = 105 \text{ см}.$$

11. Записываем уравнение нейтральной линии

$$y_0 = -\frac{J_{x_0}}{J_{y_0}} \frac{x_N}{y_N} x_0 - \frac{J_{x_0}}{\sum F_i y_N} = -\frac{3996 \cdot 10^4}{1080 \cdot 10^4} \frac{30}{105} x_0 - \frac{3996 \cdot 10^4}{2 \cdot 7200 \cdot 105};$$

$$y_0 = -1,06 x_0 - 26,43$$

или в отрезках на осях: $a_{x_0} = -24,93 \text{ см}$; $a_{y_0} = -26,43 \text{ см}$.

12. Наносим нейтральную линию на сечение (рис. 5.5) и проводим касательные к сечению, параллельные нейтральной линии. Видно, что опасными будут точки D и E . Находим координаты этих точек в центральных осях $x_c - y_c$: $D (x_{Dc} = 30 \text{ см}$; $y_{Dc} = 105 \text{ см})$; $E (x_{Ec} = -60 \text{ см}$; $y_{Ec} = -75 \text{ см})$.

13. Вычисляем координаты опасной точки D в главных центральных осях инерции $x_0 - y_0$

$$x_D = x_{Dc} \cdot \cos \alpha_0 + y_{Dc} \cdot \sin \alpha_0 = 30 \cdot 1 + 105 \cdot 0 = 30 \text{ см};$$

$$y_D = y_{Dc} \cdot \cos \alpha_0 - x_{Dc} \cdot \sin \alpha_0 = 105 \cdot 1 - 30 \cdot 0 = 105 \text{ см}.$$

Аналогично для точки K получаем: $x_K = -60 \text{ см}; y_K = -75 \text{ см}.$

14. Вычисляем допускаемые напряжения на растяжение

$$[\sigma]_p = \sigma_{вр} / \gamma_0 = 3,5 / 3 = 1,17 \text{ МПа} \text{ и сжатие } [\sigma]_c = \sigma_{сж} / \gamma_0 = 36 / 3 = 12 \text{ МПа}.$$

15. Записываем условие прочности при внецентренном сжатии

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{\sum F_i} + \frac{N \cdot y_N \cdot y_D}{J_{x0}} + \frac{N \cdot x_N \cdot x_D}{J_{y0}} \right|_{\max} \leq [\sigma]_c \text{ или}$$

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{(-P)}{2 \cdot 7200 \cdot 10^{-4}} + \frac{(-P)105 \cdot 105 \cdot 10^{-4}}{3996 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}} + \frac{(-P)30 \cdot 30 \cdot 10^{-4}}{1080 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}} \right| \leq 12 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

откуда находим допускаемую нагрузку на брус $[P]_c = 2800 \text{ кН}.$

Из условия прочности на растяжение для опасной точки K

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{(-P)}{2 \cdot 7200 \cdot 10^{-4}} + \frac{(-P)105(-75)10^{-4}}{3996 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}} + \frac{(-P)30(-60)10^{-4}}{1080 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8}} \right| \leq 1,17 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

получаем второй ответ $[P]_p = 397 \text{ кН}.$ Окончательно принимаем меньшее значение допускаемой нагрузки $[P] = 397 \text{ кН}.$

16. Строим эпюру распределения напряжений по линии $ED.$ В точке E $\sigma_{\max} = [\sigma]_p = 1,17 \text{ МПа}.$ Напряжения в точке D вычисляем по формуле (5.4) и получаем $\sigma_{\min} = -1,70 \text{ МПа}.$

17. Определяем форму ядра сечения. Задаемся характерными положениями нейтральной линии (рис. 5.6):

1. для первого характерного положения 1 – 1 нейтральной линии ($a_{x0} = \infty,$ $a_{y0} = -75 \text{ см}.$) получаем: $x_{НЛ} = -J_{y0} / F a_{x0} = -1080 \cdot 10^4 / 2 \cdot 7200 \cdot \infty = 0,$ $y_{НЛ} = -J_{x0} / F a_{y0} = -3996 \cdot 10^4 / 2 \cdot 7200 \cdot (-75) = 37,0 \text{ см};$

2. для второго и шестого характерных положений 2 – 2 и 6 – 6 нейтральной линии ($a_{x0} = \mp 60 \text{ см}, a_{y0} = \infty.$) получаем: $x_{НЛ} = -J_{y0} / F a_{x0} = -1080 \cdot 10^4 / 2 \cdot 7200 \cdot (\mp 60) = \pm 12,5 \text{ см};$ $y_{НЛ} = -J_{x0} / F a_{y0} = -3996 \cdot 10^4 / 2 \cdot 7200 \cdot \infty = 0;$

3. для третьего и пятого характерных положений 3 – 3 и 5 – 5 нейтральной линии ($a_{x0} = \mp (30 + 105 \cdot 0,25) = \mp 56,25 \text{ см}, a_{y0} = 56,25 / 0,25 = 225 \text{ см}.)$ получаем: $x_{НЛ} = -J_{y0} / F a_{x0} = -1080 \cdot 10^4 / 2 \cdot 7200 \cdot (\mp 56,25) = \pm 13,3 \text{ см},$ $y_{НЛ} = -J_{x0} / F a_{y0} = -3996 \cdot 10^4 / 2 \cdot 7200 \cdot 225 = -12,3 \text{ см};$

4. для четвертого характерного положения 4 – 4 нейтральной линии ($a_{x0} = \infty,$ $a_{y0} = 105 \text{ см}.)$ получаем: $x_{НЛ} = -J_{y0} / F a_{x0} = -1080 \cdot 10^4 / 2 \cdot 7200 \cdot \infty = 0,$ $y_{НЛ} = -J_{x0} / F a_{y0} = -3996 \cdot 10^4 / 2 \cdot 7200 \cdot 105 = -26,4 \text{ см}.$

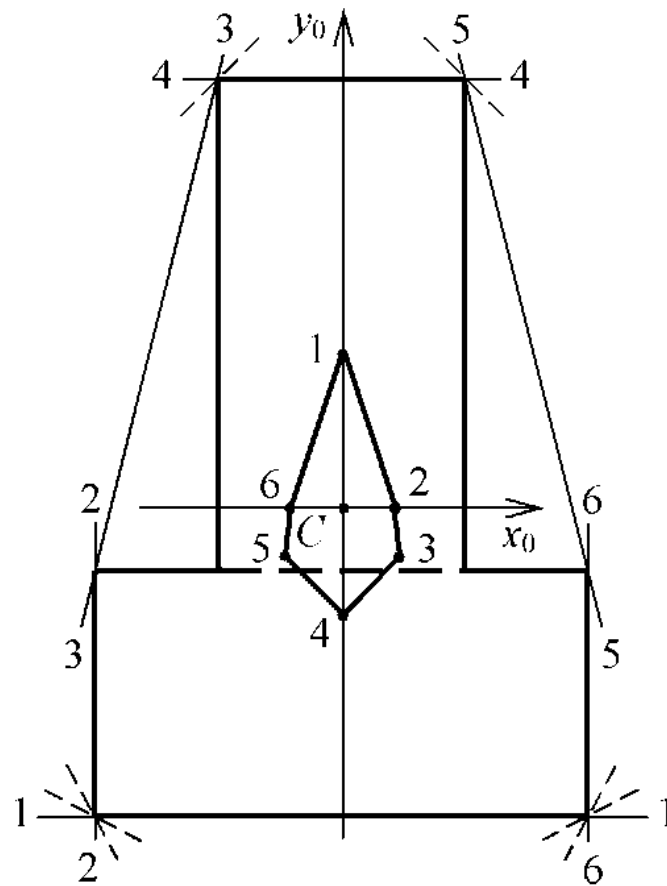


Рис. 5.6. К построению ядра заданного сечения

По полученным координатам x_{M_i}, y_{M_i} наносим характерные точки 1, ..., 6 на сечение. Соединяем указанные точки прямыми и получаем ядро сечения (рис. 5.6). Определение формы и размеров ядра сечения бруса имеет практическое значение, например, при монтаже строительных конструкций. Характерно, что если сжимающая сила приложена внутри контура ядра сечения, то во всем сечении бруса возникают только сжимающие напряжения. Это крайне важно для обеспечения прочности элементов строительных конструкций, изготовленных из хрупких материалов.

6. РАСЧЕТЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ

Многие детали машин и элементы конструкций в процессе работы подвергаются воздействию напряжений, переменных во времени (валы коробок передач автомобилей, тракторов, дорожно-строительных машин, коробок подач металлообрабатывающих станков, редукторов; стволы стрелкового и артиллерийского вооружения; детали кривошипно-шатунных механизмов двигателей внутреннего сгорания, подвески транспортных средств, кузнечных прессов и молотов; несущие элементы автомобильных и железнодорожных мостов, авиационных и многих других конструкций). Опыт эксплуатации машин и конструкций, исследования прочности материалов показали, что при циклически изменяющихся напряжениях разрушение детали или образца материала происходит при напряжениях меньших предела текучести.

Систематические исследования усталости металлов были начаты немецким ученым А. Велером более 140 лет назад. Пионерами изучения усталостной прочности металлов в нашей стране являются В.Л. Кирпичев, М.А. Воропаев, К.К. Симинский. Дальнейшее развитие проблем прочности при переменных напряжениях получено в работах отечественных ученых С.В. Серенсена, Г.С. Писаренко, В.Т. Трощенко, Н.Н. Давиденкова, И.А. Одингга, Г.В. Ужика, Н.П. Щапова, И.В. Кудрявцева, Н.Н. Афанасьева, В.С. Ивановой, В.П. Когасва, С.Д. Волкова, С.И. Кишкиной, Д.Н. Решетова и др. Из зарубежных ученых широкую известность получили работы М. Майнера, В. Вейбулла, П. Форреста, Р. Хейвуда, А. Кеннеди, С. Мэнсона, Л. Коффина, Л. Нишихара, С. Ямада и др.

6.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ

Усталостное разрушение происходит в результате зарождения и развития магистральной трещины и окончательного разрушения. Соответственно в области разрушения образца или детали можно различить две зоны: зону развития усталостной трещины, которая имеет матовый оттенок, может содержать следы коррозии, и крупнозернистую зону окончательного разрушения. В зависимости от способа нагружения (изгиб, растяжение), уровня напряжений и наличия концентраторов характер усталостного разрушения может иметь различный вид (рис. 6.1).

Механизм усталостного разрушения и закономерности, которые при этом наблюдаются, можно объяснить на основе глубокого изучения процессов, происходящих в материале в условиях повторно-переменного на-

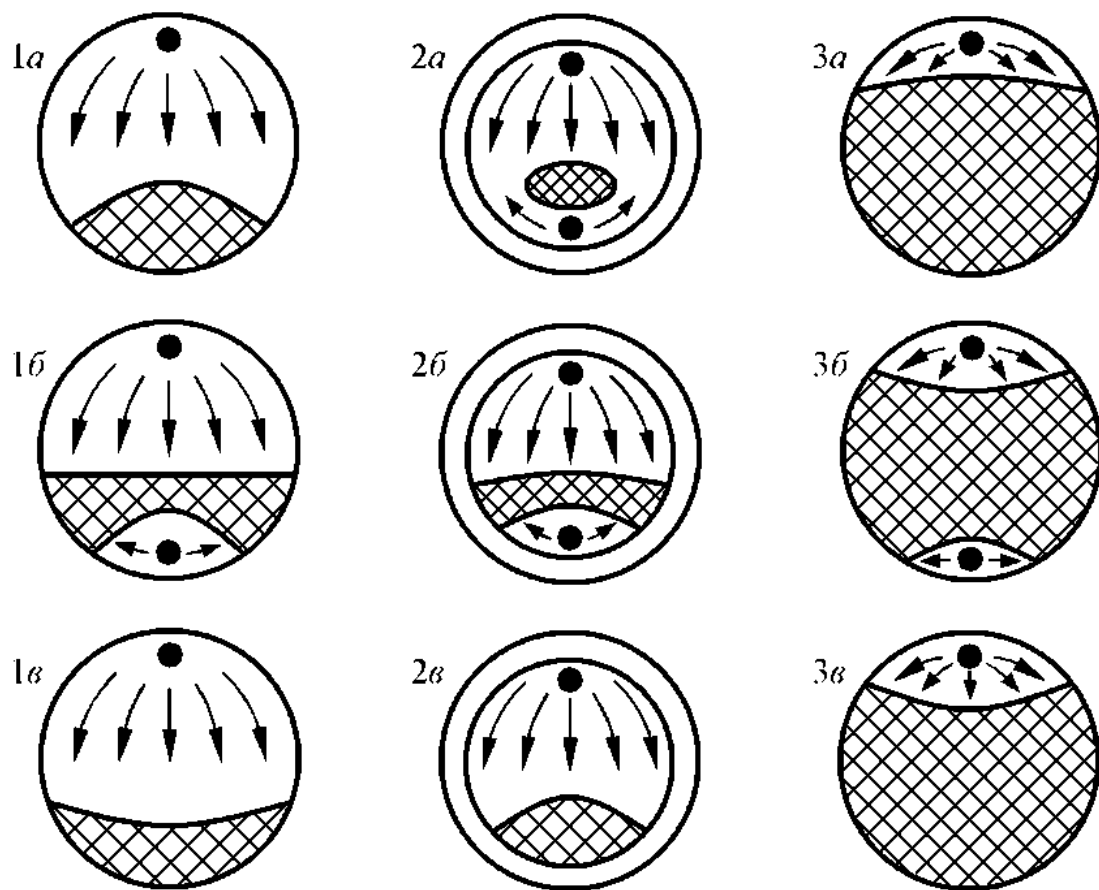


Рис. 6.1. Схемы строения зон усталостных разрушений (точка – зона зарождения макротрещины; зона окончательного разрушения заштрихована): *a* – изгиб при вращении круглых образцов; *б* – циклический изгиб в одной плоскости; *в* – циклическое растяжение: 1 – характер разрушения гладкого образца при невысоких напряжениях; 2 – характер разрушения образца с кольцевым надрезом при невысоких напряжениях; 3 – характер разрушения гладкого образца при высоких напряжениях

гружения. Одни физические теории усталостного разрушения, учитывающие дефекты реальных кристаллических тел, предполагают, что усталостные микротрещины возникают по механизму хрупкого разрушения при скоплении около препятствий линейных дислокаций, лежащих в плоскостях скольжения. Другие аналогичные теории утверждают, что зарождение микротрещин усталости происходит в результате слияния многих дислокаций и дальнейшего их развития вследствие концентрации напряжений. Ряд теорий усталостного разрушения основывается на том, что трещины возникают из-за высоких локальных напряжений, обусловленных наложением силовых полей дислокаций и приводящих к концентрации упругой энергии. По теории В.С. Ивановой процесс усталостного разрушения состоит

из трех периодов. Первый период - инкубационный, который характеризуется накоплением искажений кристаллической решетки, связанных с перемещением дислокаций и их задержкой в плоскостях скольжения. Далее следует период разрыхления кристаллической решетки. Он сопровождается образованием субмикроскопических трещин в местах грубых полос скольжения. Третий период – стадия окончательного разрушения, когда происходит разрастание образовавшихся микроскопических трещин до размеров макротрещин и окончательное разрушение образца или детали.

6.1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ТИПЫ ЦИКЛОВ

Циклом называется однократная смена напряжений (рис. 6.2). Характеристики цикла: σ_{\max} – максимальное напряжение цикла; σ_{\min} – минимальное напряжение цикла; σ_m – среднее напряжение цикла; σ_a – амплитуда цикла; $\Delta\sigma$ – размах напряжений цикла. Между характеристиками цикла очевидны соотношения

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}.$$

Время совершения одного цикла называется периодом T , сек. Характеристикой является также коэффициент асимметрии цикла

$$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}.$$

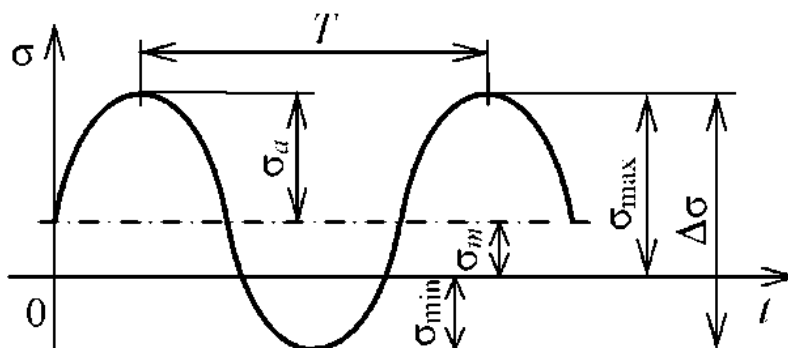


Рис. 6.2. Знакопеременный цикл изменения напряжений

Циклы напряжений, имеющие один и тот же коэффициент асимметрии, называются подобными. Циклы могут быть знакопостоянными, если σ_{\max} и σ_{\min} одного знака, и знакопеременными, если $\sigma_{\max} > 0$, а $\sigma_{\min} < 0$ (рис. 6.2). Наиболее часто при усталостных испытаниях реализуются симметричный (рис. 6.3) и отнулевой (рис. 6.4) циклы.

Симметричный цикл напряжений (рис. 6.3) такой, у которого максимальное и минимальное напряжения равны по величине, но противоположны по знаку $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \sigma_a$; $\sigma_m = 0$; $R_\sigma = -1$.

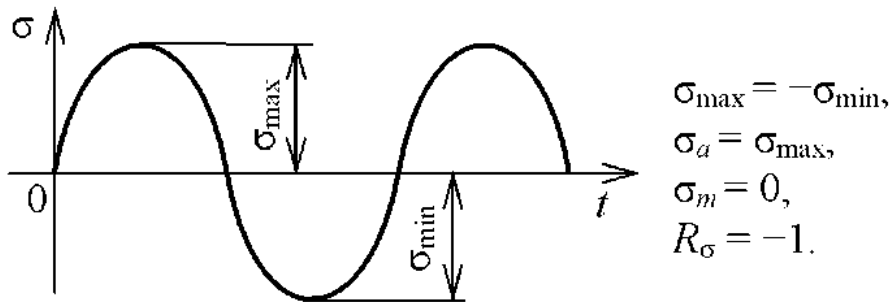


Рис. 6.3. Симметричный цикл изменения напряжений

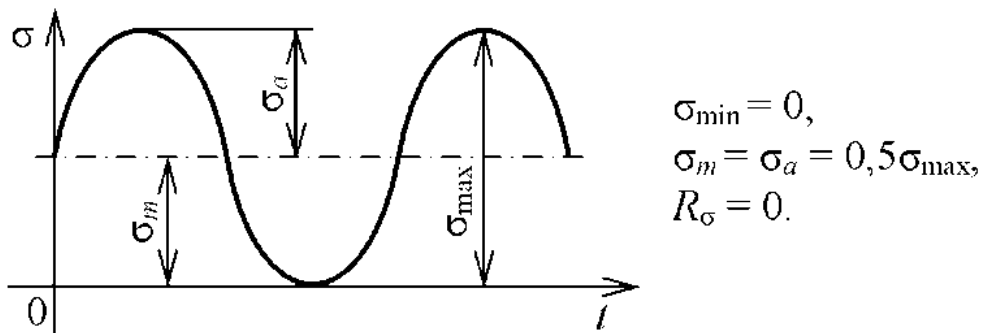


Рис. 6.4. Отнулевой (пульсирующий) цикл изменения напряжений

Отнулевым называется такой цикл напряжений (рис. 6.4), у которого минимальное напряжение равно нулю, а максимальное напряжение равно размаху напряжений $\sigma_{\min} = 0$; $\sigma_{\max} = \Delta\sigma = \sigma_m + \sigma_a$; $R_\sigma = 0$. В ряде учебников отнулевой цикл называют также пульсирующим.

С формальной точки зрения статическое нагружение можно рассматривать как циклическое нагружение с нулевой амплитудой (рис. 6.5) $\sigma_a = 0$; $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_m$; $R_\sigma = +1$.

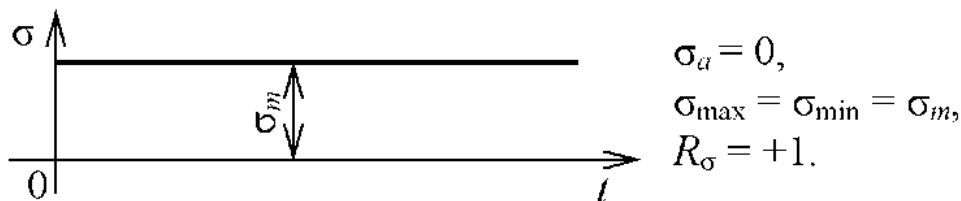


Рис. 6.5. Статическое нагружение как предельный случай циклического изменения напряжений

Основные определения и соотношения для циклических касательных напряжений аналогичны рассмотренным для нормальных напряжений, но вместо знака σ используется символ τ .

6.1.2. ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ (УСТАЛОСТИ). МЕТОДИКА ЕГО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Эксперименты показывают, что при высоких уровнях циклических напряжений происходит усталостное разрушение образца или детали. При более низких напряжениях детали работают надежно без разрушений. Наибольшее напряжение, превышение которого ведет к разрушению образца после определенного числа циклов, называется пределом выносливости (пределом усталости) материала и обозначается σ_R . Если предел выносливости материала определен при симметричном цикле, то он обозначается $\sigma_{-1п.р}$ (изгиб, растяжение), τ_{-1} (кручение). При пульсирующем цикле – соответственно $\sigma_{0п.р}$, τ_0 .

Величина предела выносливости определяется из кривой усталости, которая строится по результатам эксперимента. На рис. 6.6 приведена схема машины для испытаний на усталость в условиях чистого изгиба с вращением круглого образца. При этом закон изменения напряжений во времени описывается зависимостью $\sigma_t = \sigma_a \sin \omega t$, где $\sigma_a = M_x / W_x$.

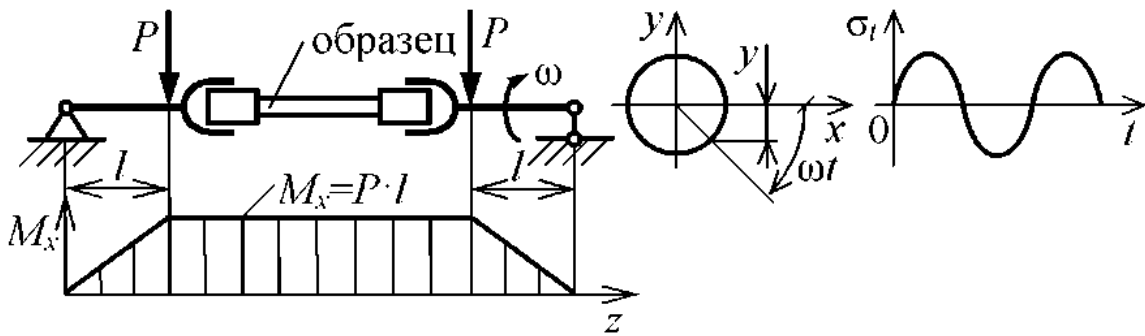


Рис. 6.6. Принципиальная схема машины для усталостных испытаний образцов при чистом изгибе с вращением

Усталостное разрушение имеет вероятностный характер. В связи с этим одному и тому же уровню циклических напряжений соответствуют различные долговечности образца или детали. Для построения кривой усталости изготавливают как минимум 20 – 25 образцов, которые разбивают на 4 – 5 партий. Для каждой партии образцов назначают уровни напряжений $\sigma_{max1}, \dots, \sigma_{max5}$ и фиксируют числа циклов до разрушения N_1, \dots, N_{25} :

- 1) $\sigma_{max1} \approx 0,65\sigma_B \rightarrow N_1, \dots, N_5$;
- 2) $\sigma_{max2} \approx 0,60\sigma_B \rightarrow N_6, \dots, N_{10}$;
- 3) $\sigma_{max3} \approx 0,55\sigma_B \rightarrow N_{11}, \dots, N_{15}$;
- 4) $\sigma_{max4} \approx 0,50\sigma_B \rightarrow N_{16}, \dots, N_{20}$;
- 5) $\sigma_{max5} \approx 0,45\sigma_B \rightarrow N_{21}, N_{22}, N_{23}, \bar{N}_{24}, \bar{N}_{25}$.

Здесь \bar{N}_{24} , \bar{N}_{25} – числа циклов нагружений неразрушившихся образцов. Полученные результаты представляют в виде кривой усталости (рис. 6.7).

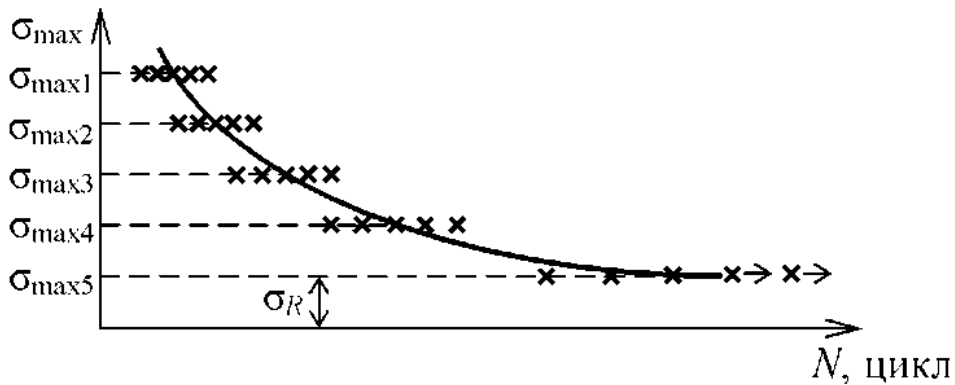


Рис. 6.7. К методике построения кривой усталости

Видно, что усталостная кривая стремится к некоторой асимптоте, характеризующей предел выносливости σ_R . Обычно кривые усталости представляют в полулогарифмических или логарифмических осях: $\sigma_{\max} - \lg N$; $\lg \sigma_{\max} - \lg N$ (рис. 6.8). Здесь N_0 – базовое число циклов, при котором наблюдается излом кривой усталости. Для черных металлов $N_0 = 10^6 \div 10^7$ циклов. Для цветных металлов и некоторых сплавов $N_0 = 10^8 \div 10^9$ циклов.

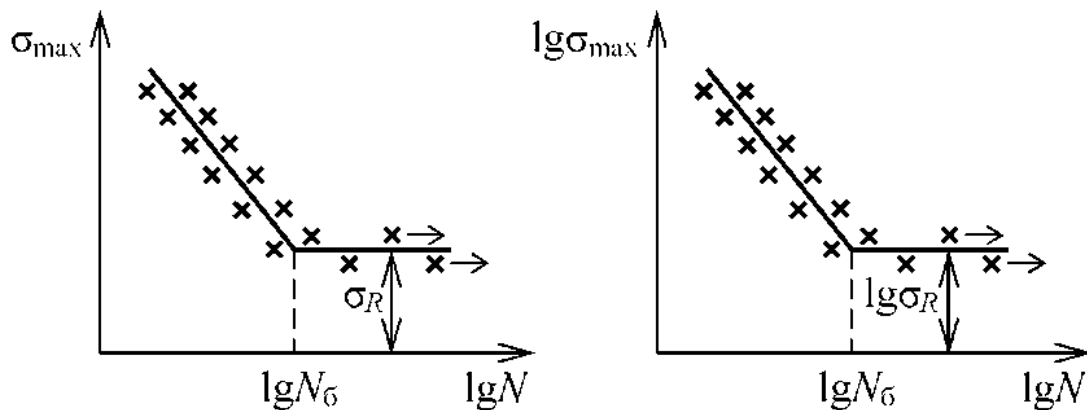


Рис. 6.8. Кривые усталости в полулогарифмических и логарифмических координатах (схемы)

Поскольку экспериментальное определение предела выносливости материала σ_R крайне трудоемко, то для приближенных расчетов используют взаимосвязи между характеристиками усталостной и статической прочности: предел выносливости при симметричном цикле растяжения-сжатия $\sigma_{1p} = 0,32\sigma_b$; предел выносливости при симметричном цикле изгиба $\sigma_{1и} = 0,47\sigma_b$; предел выносливости при пульсирующем цикле растяжения или изгиба $\sigma_{ор,и} = (1,4 \div 1,6)\sigma_{1р,и}$; предел выносливости при симметричном

цикле кручения $\tau_1 = 0,22\sigma_B$; предел выносливости при пульсирующем цикле кручения $\tau_0 = (1,6 \div 1,8)\tau_1$. Здесь σ_B – предел прочности материала при растяжении. Погрешность приведенных формул не превышает $\pm 10\%$.

6.1.3. ДИАГРАММА ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Если на деталь действуют рабочие переменные нагрузки, то они вызывают рабочие средние σ_m , амплитудные σ_a , максимальные σ_{\max} и минимальные σ_{\min} напряжения. Свойства материала детали при циклическом нагружении характеризуются предельными напряжениями. Предельными называются такие напряжения, которые соответствуют пределу выносливости σ_R . При этом $\sigma_{\max L} = \sigma_R$, $\sigma_{\min L}$, σ_{mL} , σ_{aL} – максимальное, минимальное, среднее и амплитудное значения предельных напряжений. В осях $\sigma_a - \sigma_m$ рабочие и предельные напряжения изображаются точками P и L (рис. 6.9), где P , L – рабочая и предельная точки. Предельные напряжения можно получить тремя способами: 1) задать $\sigma_{mL} = \text{const}$, а σ_a увеличивать до σ_{aL} ; 2) принять $\sigma_{aL} = \text{const}$, а σ_m увеличивать до σ_{mL} ; 3) пропорциональным увеличением рабочих напряжений σ_a и σ_m , нагружая по правилу луча. Характерно, что в последнем случае все циклы имеют один и тот же коэффициент асимметрии R . При этом (рис. 6.9) тангенс угла наклона луча

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{0,5(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})}{0,5(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})} = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}\right)} = \frac{1-R}{1+R} = \text{const}.$$

Следовательно, при нагружении по правилу луча коэффициент асимметрии $R = \text{const}$. Циклы, которые имеют один и тот же коэффициент асимметрии, называются подобными. Они рассматриваются в дальнейшем.

Положение предельной точки L зависит от наклона рабочего луча. Рассмотрим характерные положения рабочего луча.

1. Рабочий луч совпадает с осью σ_a . В этом случае

$$\beta = 90^\circ; \operatorname{tg}\beta = \frac{1-R}{1+R} = \infty; \text{откуда получаем } R = -1.$$

Такое положение рабочего луча характеризует симметричное нагружение ($\sigma_{aL} = \sigma_{mL}$; $\sigma_{mL} = 0$).

2. Рабочий луч направлен под углом 45° . Тогда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1-R}{1+R} = 1; \text{откуда получаем } R = 0.$$

Рабочий луч в таком положении характеризует пульсирующее нагружение ($\sigma_{aL} = \sigma_{mL} = \sigma_{\sigma} / 2$).

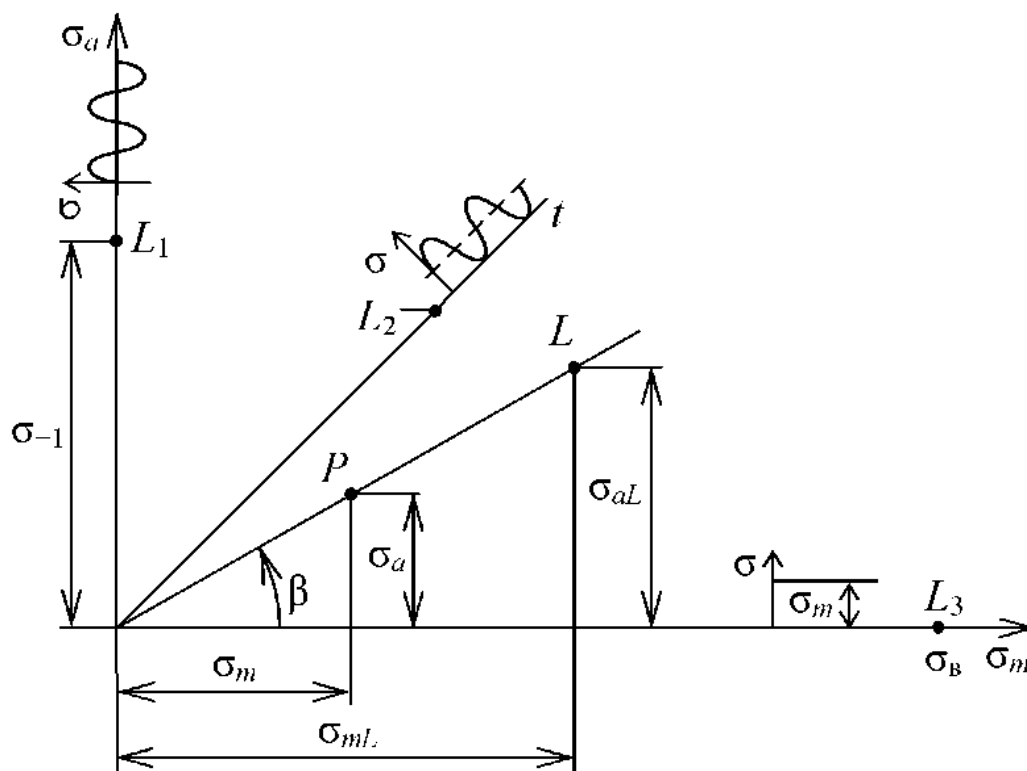


Рис. 6.9. К методике построения диаграммы предельных напряжений

3. Рабочий луч совпадает с осью σ_m . Следовательно

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1-R}{1+R} = 0 ; \text{откуда получаем } R = +1.$$

В этом положении рабочий луч характеризует статическое нагружение ($\sigma_{aL} = 0; \sigma_{mL} = \sigma_B$).

Совокупность значений предельных напряжений σ_{aL} и σ_{mL} при различных положениях рабочего луча образует в осях $\sigma_a - \sigma_m$ диаграмму предельных напряжений (рис. 6.10). Она строится по результатам усталостных испытаний. Если форма кривой предельных напряжений известна, то для рассматриваемого коэффициента асимметрии цикла R можно определить предел выносливости $\sigma_R = \sigma_{aL} + \sigma_{mL}$.

На диаграмме предельных напряжений (рис. 6.11, кривая 1) выделяют ряд характерных областей. Для этого под углом 45° проводят линию пластичности 2 и линию прочности 3. Линия пластичности 2 разделяет область упругих и пластических деформаций. Линия прочности 3 разграничивает области существующих и несуществующих циклов. Для области неограниченной долговечности I характерно, что $\sigma_{\max} \leq \sigma_R$ и $\sigma_{\max} \leq \sigma_T$. Если рабочая точка находится в этой области, то деталь работает без разрушения в области упругих деформаций. Область II – формально также область неограниченной долговечности, но максимальные напряжения цикла в этой

области превышают предел текучести $\sigma_{\max} \geq \sigma_T$. Область III – область ограниченной долговечности, где $\sigma_R \leq \sigma_{\max} \leq \sigma_T$. Данная область соответствует наклонному участку кривой усталости (рис. 6.8). Область IV – область малоциклового усталости. Характерно, что в этой области $\sigma_T \leq \sigma_{\max} \leq \sigma_B$. Работа материала происходит при циклических упругопластических деформациях. Такие условия работы характерны для высоконагруженных деталей монтажно-демонтажной гидрооснастки, летательных аппаратов, элементов кузнечных штампов, энергетических установок и других конструкций, долговечность которых не превышает 10^5 циклов. Область V – область несуществующих циклов.

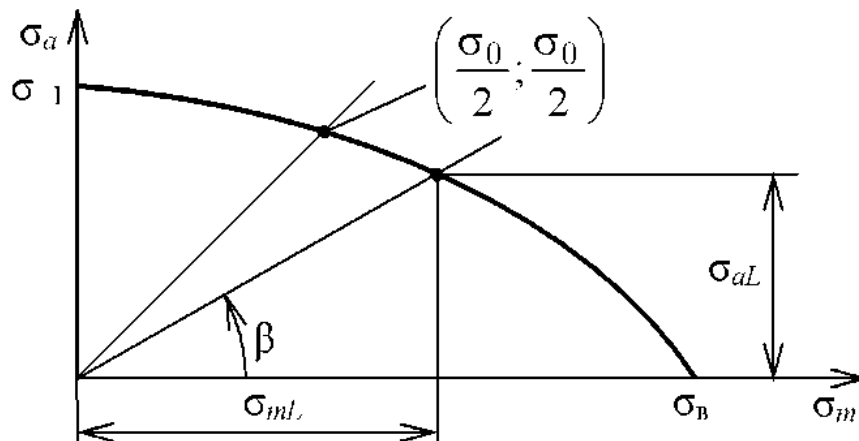


Рис. 6.10. Диаграмма предельных напряжений (схема)

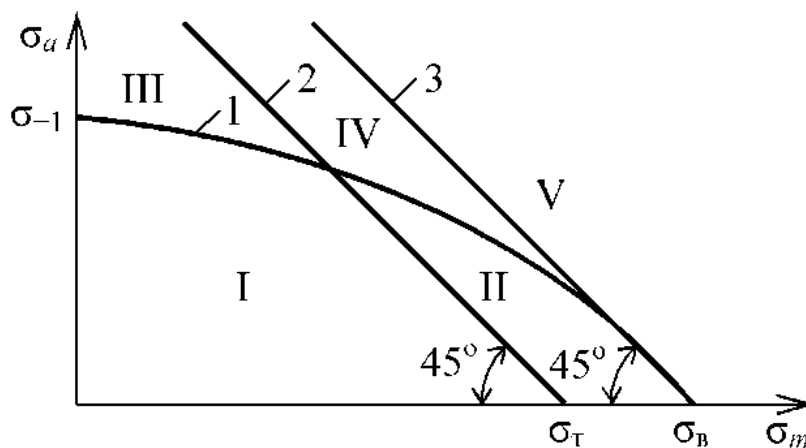


Рис. 6.11. Характерные области диаграммы предельных напряжений

Диаграмма предельных напряжений для циклических касательных напряжений строится совершенно аналогичным образом, но вместо знака σ используется символ τ .

6.1.4. МЕТОДЫ СХЕМАТИЗАЦИИ ДИАГРАММ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Для того, чтобы нанести одну экспериментальную точку в осях $\sigma_a - \sigma_m$, нужно испытать как минимум 20 – 25 образцов и определить предел выносливости при заданном коэффициенте асимметрии. Для построения линии предельных напряжений необходимо нанести ряд таких точек, что связано с большой трудоемкостью усталостных испытаний. В связи с этим предложено несколько методов схематизации (упрощенного построения) диаграмм предельных напряжений.

1. Схематизация по А. Зодербергу (рис. 6.12), предложенная в 1930 г. В осях $\sigma_a - \sigma_m$ наносят две точки с координатами $(0; \sigma_1)$ и $(\sigma_T; 0)$ и соединяют их прямой. Такая схематизация в настоящее время не используется, поскольку резко сужает область возможной работы образца или детали.

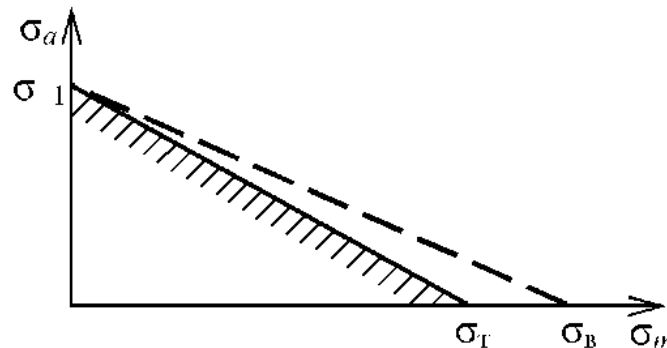


Рис. 6.12. Схематизация диаграммы предельных напряжений по А. Зодербергу

2. Схематизация по Дж. Гудману (рис. 6.13), опубликованная в 1936 г. В осях $\sigma_a - \sigma_m$ наносят две точки с координатами $(0; \sigma_1)$ и $(\sigma_B; 0)$, соединяют их прямой, а затем под углом 45° проводят линию пластичности. При небольшой дополнительной трудоемкости диаграмма расширяет область возможной работы детали и широко используется в инженерных расчетах.

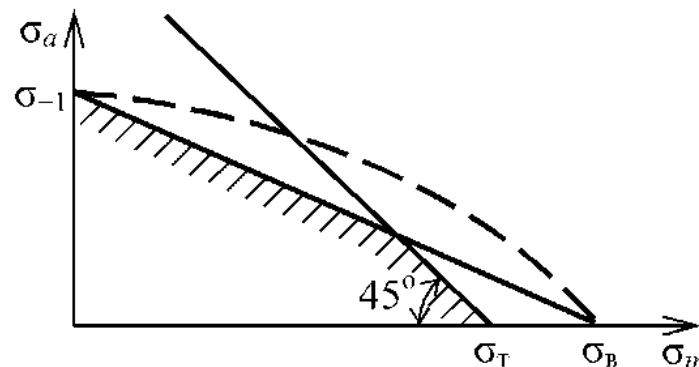


Рис. 6.13. Схематизация диаграммы предельных напряжений по Дж. Гудману

3. Схематизация по С.В. Серенсену и Р.С. Кинасошвили (рис. 6.14), реализованная в 1943 г. при создании новых образцов авиационной техники. В осях $\sigma_a - \sigma_m$ наносят три точки с координатами $(0; \sigma_{-1})$, $(\sigma_0 / 2; \sigma_0 / 2)$ и $(\sigma_T; 0)$. Затем соединяют их прямыми и наносят линию пластичности. Данная схематизация существенно расширяет область безопасных напряжений, но требует дополнительного трудоемкого определения σ_0 . В настоящее время используется в особо ответственных случаях.

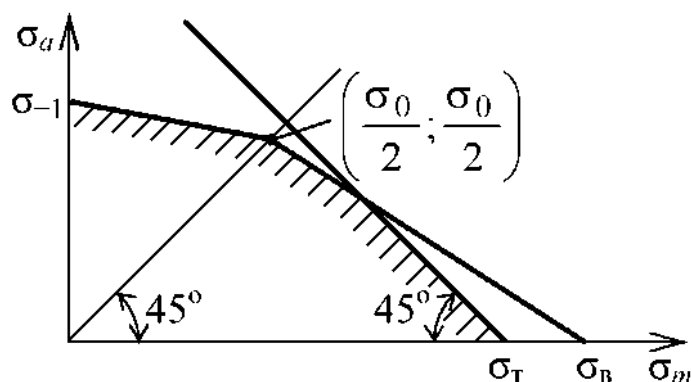


Рис. 6.14. Схематизация диаграммы предельных напряжений по С.В. Серенсену и Р.С. Кинасошвили

Рассмотренные выше методы схематизации предельных диаграмм для нормальных напряжений совершенно аналогичны и для касательных напряжений, но вместо знака σ используется символ τ .

6.1.5. ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ

При конструкторском оформлении деталей неизбежны резкие изменения диаметров, предусматриваются резьбы, шпоночные и шлицевые пазы, отверстия, надрезы и т.п. В местах резкого изменения формы и размеров образца или детали при нагружении возникают так называемые местные напряжения σ_m, τ_m , которые существенно превышают номинальные напряжения σ_n, τ_n . Под номинальными понимаются такие напряжения, которые определяются по формулам сопротивления материалов.

Эффект резкого повышения напряжений в местах изменения формы или размеров детали называется концентрацией напряжений. Конструктивные факторы, которые вызывают это повышение, называются концентраторами напряжения (резкие переходы диаметров, шпоночные пазы, резьбы и т.д.). Характерно, что местные напряжения возникают в небольшой зоне сечения детали. На рис. 6.15 показаны эффекты концентрации напряжений, возникающие в элементах конструкций при растяжении (рис. 6.15 а), изгибе (рис. 6.15 б) и кручении (рис. 6.15 в).

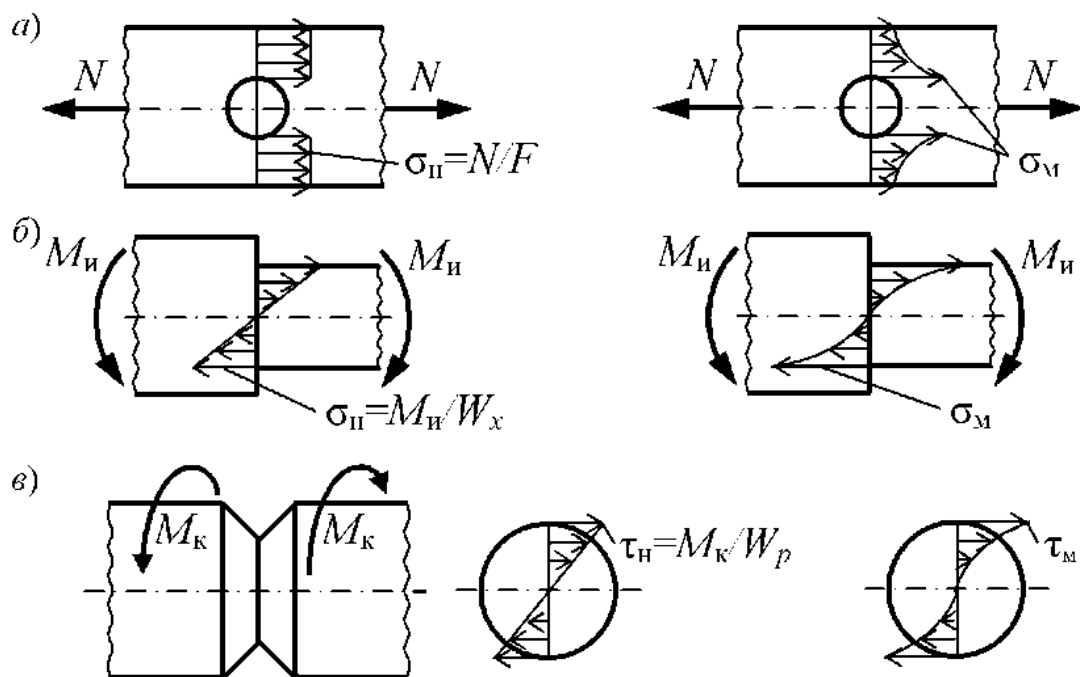


Рис. 6.15. Номинальные и местные напряжения в зонах концентрации элементов конструкций

Для того, чтобы количественно характеризовать концентратор напряжений, вводят понятия теоретических коэффициентов концентрации нормальных и касательных напряжений

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_M}{\sigma_{II}} > 1; \quad \alpha_{\tau} = \frac{\tau_M}{\tau_{II}} > 1,$$

которые представляют собой отношения местных к номинальным напряжениям. Местные напряжения и, следовательно, значения α_{σ} и α_{τ} определяются методами теории упругости, оптическим методом или с помощью тензометрирования. Значения α_{σ} и α_{τ} приводятся в справочной литературе. Концентраторы напряжений снижают усталостную прочность, поэтому при проектировании деталей машин стараются, по возможности, снизить эффект концентрации за счет плавных переходов, упрочнения и других мероприятий. При определении α_{σ} и α_{τ} предполагается, что материал идеально упругий. В действительности в зоне концентрации напряжений наблюдаются небольшие циклические упругопластические деформации, поэтому α_{σ} и α_{τ} не в полной мере характеризуют усталостную прочность детали. В связи с этим вводят понятия эффективных коэффициентов концентрации нормальных и касательных напряжений

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_R}{\sigma_{Rk}} > 1; \quad K_{\tau} = \frac{\tau_R}{\tau_{Rk}} > 1,$$

представляющих собой отношения пределов выносливости гладкого образца σ_R , τ_R и образца или детали с концентратором σ_{Rk} , τ_{Rk} . Значения k_σ и k_τ определяются по результатам усталостных испытаний (рис. 6.16).

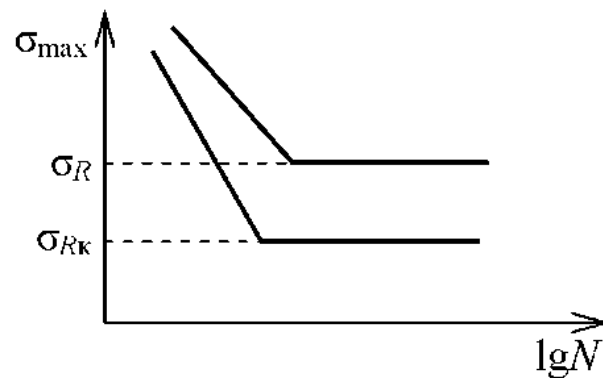


Рис. 6.16. Влияние концентрации напряжений на циклическую прочность

Эффективные коэффициенты концентрации зависят как от формы концентратора, так и механических свойств материала детали. С целью систематизации и уменьшения объема эксперимента значения k_σ и k_τ получают на характерных для определенного класса деталей концентраторах по результатам усталостных испытаний. Затем определяют так называемую чувствительность материала к концентрации нормальных или касательных напряжений

$$q_\sigma = \frac{k_\sigma - 1}{\alpha_\sigma - 1} < 1; \quad q_\tau = \frac{k_\tau - 1}{\alpha_\tau - 1} < 1,$$

Характерно, что значения q_σ и q_τ для одного и того же материала изменяются в сравнительно узких пределах. Для малоуглеродистых сталей $q_\sigma \approx 0,4 \div 0,6$, а для высокопрочных сталей $q_\sigma \approx 0,7 \div 0,9$. Зная величины q_σ и q_τ , можно вычислить значения эффективных коэффициентов концентрации k_σ и k_τ для различных концентраторов по формулам

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1); \quad k_\tau = 1 + q_\tau (\alpha_\tau - 1).$$

Значения k_σ и k_τ и методы их определения приведены в справочных литературных источниках.

Концентрация напряжений в некоторой степени влияет и на статическую прочность. Для хрупких материалов различного рода концентраторы снижают разрушающие нагрузки. Для пластичных материалов концентрация напряжений препятствует развитию протяженных зон пластической деформации и образованию шейки при растяжении образца (рис. 6.17).

В этом случае концентраторы напряжений могут повышать до 30 ÷ 50 % разрушающие статические нагрузки $P_{вк}$ и напряжения $\sigma_{вк}$ по сравнению с аналогичными характеристиками P_B и σ_B для гладких образцов.

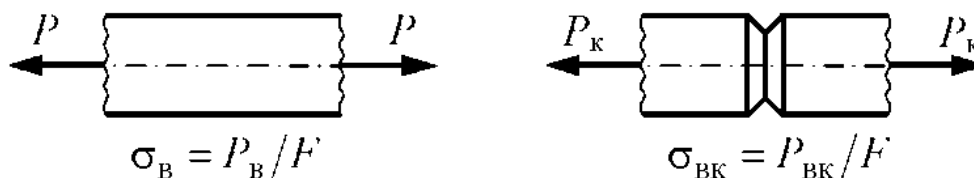


Рис. 6.17. К методике оценки влияния концентрации напряжений на статическую прочность

6.1.6. ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ ОБРАЗЦА ИЛИ ДЕТАЛИ НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ

Поперечные размеры деталей существенно отличаются от размеров стандартных образцов ($d \approx 8 \div 10$ мм). Соответствующими экспериментами около 70 лет назад установлено, что предел выносливости зависит от поперечных размеров образца или детали. Характерно, что чем больше поперечные размеры образца или детали, тем меньше предел выносливости. Одна из теорий, объясняющих влияние размеров на предел выносливости, говорит о том, что с увеличением размеров образца или детали растет количество несовершенств (дефектов) структуры материала (дислокаций, вакансий, раковин, неметаллических включений и т.д.). В результате этого вероятность более раннего зарождения, ускоренного развития трещин и разрушения также увеличивается, а предел выносливости снижается. Кроме того, при механической обработке деталей в примыкающих к поверхности слоях образуются остаточные сжимающие напряжения, которые повышают усталостную прочность. Однако при увеличении размеров образца или детали их влияние снижается.

Отличие размеров деталей от размеров образца учитывается в расчетах на циклическую прочность масштабным фактором (рис. 6.18)

$$\varepsilon_M = \frac{\sigma_{RD}}{\sigma_R} < 1.$$

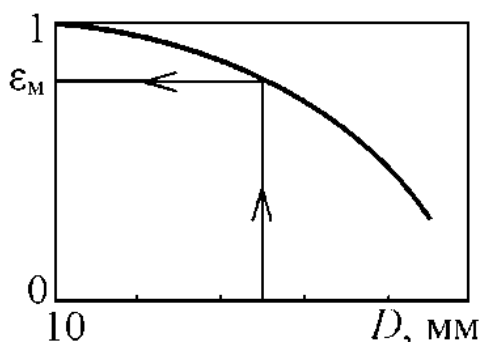


Рис. 6.18. Влияние размеров образца или детали на циклическую прочность (схема)

который представляет собой отношение пределов выносливости образца или детали σ_{RD} заданного размера D и стандартного образца σ_R диаметром $d \approx 10$ мм.

Значения масштабного фактора определяются по справочным графикам, которые строятся по результатам усталостных испытаний образцов и деталей больших размеров.

6.1.7. ВЛИЯНИЕ КАЧЕСТВА ОБРАБОТКИ ПОВЕРХНОСТИ ДЕТАЛИ НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ

Предел выносливости образца или детали существенно зависит от технологии изготовления. Оптимальная термообработка, различного рода технологические методы упрочнения повышают предел выносливости. Особенно большое влияние на усталостную прочность оказывает шероховатость поверхности, поскольку с поверхностных слоев чаще всего начинается образование трещин и разрушение. Характерно, что чем выше чистота поверхности детали, тем выше предел выносливости. Особенно это характерно для высокопрочных сталей с ограниченной пластичностью. Объясняется это тем, что микрорельеф поверхности содержит неровности, риски, царапины, которые можно рассматривать как своего рода концентраторы напряжений. Грубо обработанная поверхность способствует более раннему зарождению усталостных трещин и снижает предел выносливости.

Различие в пределах выносливости детали с заданной шероховатостью поверхности от стандартного (полированного) образца учитывается в расчетах на циклическую прочность поверхностным фактором (рис. 6.19)

$$\varepsilon_{II} = \frac{\sigma_{RIII}}{\sigma_R},$$

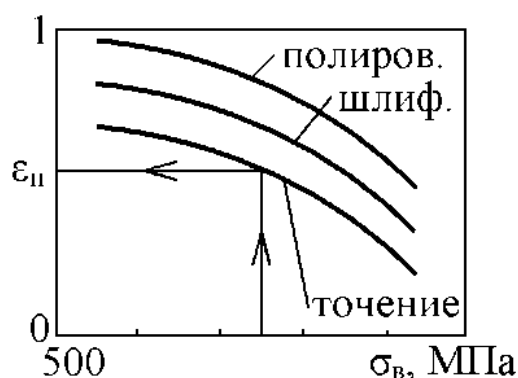


Рис. 6.19. Влияние шероховатости поверхности образца или детали на циклическую прочность (схема)

который представляет собой отношение пределов выносливости образца с заданной шероховатостью поверхности σ_{R111} и стандартного (полированного) образца σ_R .

Величина поверхностного фактора определяется по справочным графикам, которые построены по результатам усталостных испытаний образцов или деталей с различной шероховатостью поверхности.

В реальных условиях концентрация напряжений, масштабный и поверхностный факторы действуют совокупно и учитываются в расчетах на циклическую прочность обобщенными коэффициентами

$$\gamma_{\sigma} = \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \cdot \varepsilon_{11}} > 1; \quad \gamma_{\tau} = \frac{K_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \cdot \varepsilon_{11}} > 1.$$

Они учитывают отличия предела усталости детали от предела усталости стандартного образца (материала).

6.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ ДЕТАЛИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Если диаграмма предельных напряжений материала известна (рис. 6.20), то запас циклической прочности гладкого образца, на который действуют рабочие напряжения σ_a и σ_m , определяются следующим образом

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{aL}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{aL} + \sigma_{mL}}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{\sigma_R}{\sigma_{\max}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1-R}{1+R}.$$

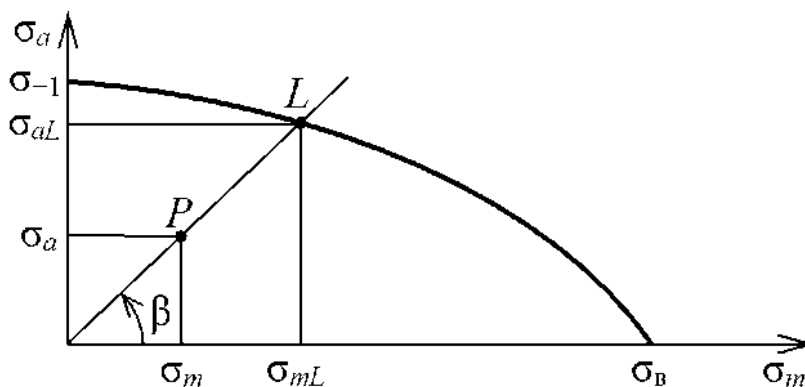


Рис. 6.20. К определению запаса циклической прочности гладкого образца

Для реальной детали, на которую действуют амплитудное σ_a и среднее σ_m номинальные напряжения, запас циклической прочности определяется следующим образом (рис. 6.21)

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{aL}}{\gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a} = \frac{\sigma_R}{\gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a + \sigma_m}.$$

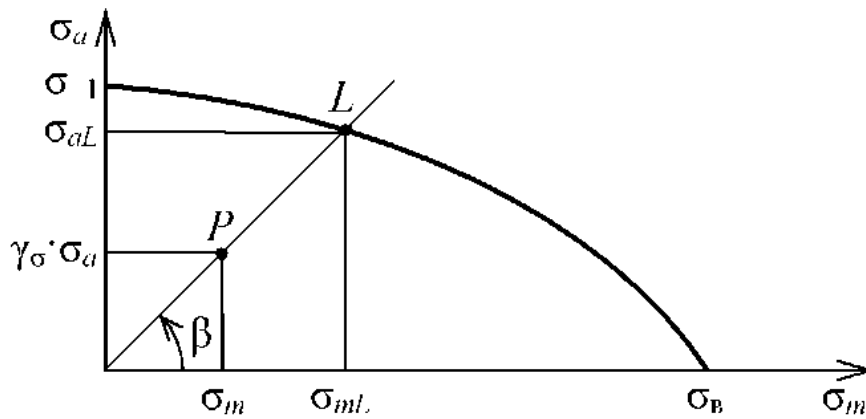


Рис. 6.21. К определению запаса циклической прочности детали

Обусловлено это тем, что концентрация напряжений, масштабный и технологический факторы снижают в первую очередь циклическую составляющую напряжений (амплитуду σ_a) и сравнительно слабо влияют на статическую составляющую напряжений σ_m . В связи с этим при нанесении рабочей точки P (рис. 6.21) только значение σ_a умножается на γ_σ , а величина σ_m сохраняется неизменной, что приводит к некоторому увеличению расчетного запаса прочности.

6.1.8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПАСА ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ ДЕТАЛИ ПО СХЕМАТИЗИРОВАННОЙ ДИАГРАММЕ ДЖ. ГУДМАНА

Рассмотрим случай, когда рабочий луч 1 пересекает линию усталостно-го разрушения AB (рис. 6.22). Уравнение прямой AB в отрезках на осях

$$\frac{\sigma_{aL}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_B} = 1 \quad \text{или} \quad \sigma_{aL} = \sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_B} \right). \quad (6.1)$$

Уравнение рабочего луча можно представить так $\gamma_\sigma \cdot \sigma_a = \frac{\sigma_{aL}}{\sigma_{mL}} \sigma_m$.

Откуда находим предельную амплитуду $\sigma_{aL} = \frac{\gamma_\sigma \cdot \sigma_a}{\sigma_m} \sigma_{mL}$. (6.2)

Приравнявая (6.1) и (6.2), получаем

$$\sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_B} \right) = \frac{\gamma_\sigma \cdot \sigma_a}{\sigma_m} \sigma_{mL}.$$

Следовательно, предельное среднее напряжение можно представить

$$\sigma_{mL} = \frac{\sigma_{-1} \cdot \sigma_m}{\gamma_\sigma \cdot \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \sigma_m}.$$

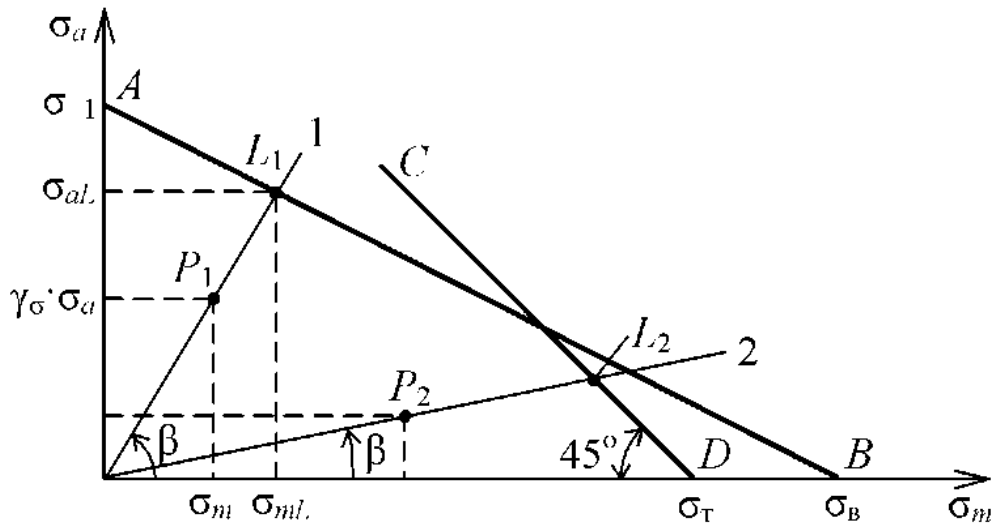


Рис. 6.22. Определение запаса циклической прочности детали по схематизированной диаграмме Дж. Гудмана

Запас циклической прочности при первом положении рабочего луча равен

$$n_{\sigma 1} = \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_1}{\gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a + \frac{\sigma_1}{\sigma_B} \sigma_m}. \quad (6.3)$$

Формула (6.3) применяется в том случае, когда рабочий луч пересекает линию усталостного разрушения AB .

Рассмотрим второй случай, когда рабочий луч 2 пересекает линию пластичности CD (рис. 6.22). Уравнение линии пластичности CD имеет вид

$$\frac{\sigma_{al.}}{\sigma_T} + \frac{\sigma_{ml.}}{\sigma_T} = 1.$$

Откуда находим предельную амплитуду напряжений $\sigma_{al.} = \sigma_T - \sigma_{ml.}$ (6.4)
Приравняв правые части формул (6.2) и (6.4), получаем

$$\frac{\gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a}{\sigma_m} \sigma_{ml.} = \sigma_T - \sigma_{ml.}.$$

С учетом этого можно записать предельное среднее напряжение

$$\sigma_{ml.} = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_m}{\gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a + \sigma_m}.$$

Следовательно, запас циклической прочности при втором положении рабочего луча равен

$$n_{\sigma 2} = \frac{\sigma_{ml.}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_T}{\gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a + \sigma_m}. \quad (6.5)$$

Формула (6.5) используется в том случае, когда рабочий луч пересекает линию пластичности CD .

В отличие от гладкого образца для детали с концентратором положение рабочего луча определяется таким образом

$$\operatorname{tg} \beta = \gamma_{\sigma} \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \gamma_{\sigma} \frac{1-R}{1+R}.$$

Все соотношения, полученные для нормальных напряжений, полностью справедливы и для касательных напряжений, но вместо знака σ используется символ τ .

6.1.8.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАПАСА ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ ДЕТАЛИ ПО ДИАГРАММЕ С.В. СЕРЕНСЕНА И Р.С. КИНАСОШВИЛИ

Рассмотрим случай, когда рабочий луч 1 пересекает линию усталостного разрушения AB (рис. 6.23). Уравнение прямой AB можно представить

$$\frac{\sigma_{aL} - \sigma_{-1}}{0,5\sigma_0 - \sigma_1} = \frac{\sigma_{mL} - 0}{0,5\sigma_0 - 0}.$$

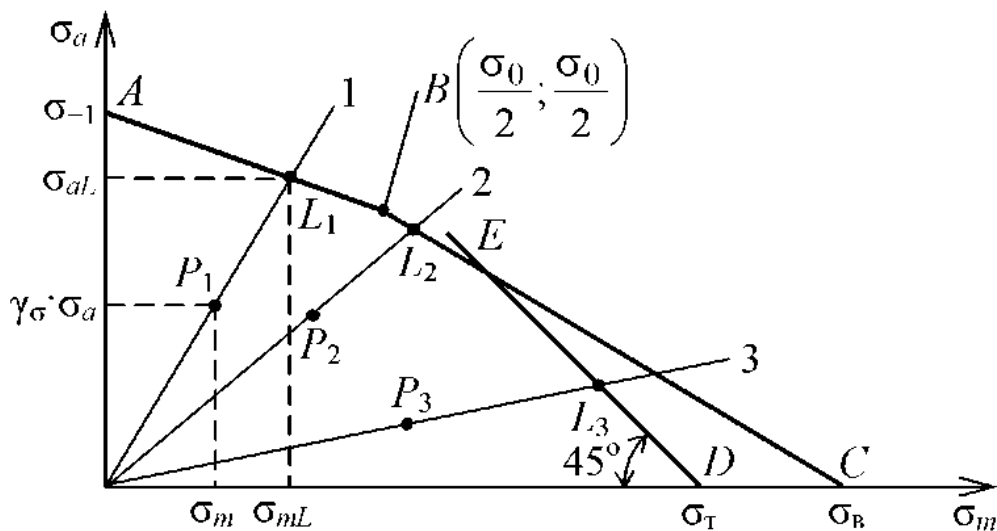


Рис. 6.23. Определение запаса циклической прочности детали по схематизированной диаграмме С.В. Серенсена и Р.С. Кинасошвили

Откуда находим предельную амплитуду напряжений

$$\sigma_{al.} = \sigma_{-1} - \frac{\sigma_{mL} (2\sigma_1 - \sigma_0)}{\sigma_0}. \quad (6.6)$$

Приравняв правые части формул (6.2) и (6.6) и решая относительно σ_{mL} , находим предельное среднее напряжение

$$\sigma_{ml} = \frac{\sigma_{-1} \cdot \sigma_m}{\gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a + k_1 \cdot \sigma_m}, \quad \text{где } k_1 = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}.$$

С учетом этого запас циклической прочности можно представить

$$n_{\sigma 1} = \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}}{\gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a + k_1 \cdot \sigma_m}. \quad (6.7)$$

Формула (6.7) применяется в том случае, когда рабочий луч пересекает линию усталостного разрушения AB .

Рассмотрим второй случай, когда рабочий луч 2 пересекает линию усталостного разрушения BC (рис. 6.23). Уравнение прямой BC имеет вид

$$\frac{\sigma_{aL} - 0,5\sigma_0}{0 - 0,5\sigma_0} = \frac{\sigma_{mL} - 0,5\sigma_0}{\sigma_B - 0,5\sigma_0}.$$

Откуда получаем предельную амплитуду напряжений

$$\sigma_{aL} = 0,5\sigma_0 - 0,5\sigma_0 \left(\frac{\sigma_{mL} - 0,5\sigma_0}{\sigma_B - 0,5\sigma_0} \right). \quad (6.8)$$

Приравнивая правые части выражений (6.2) и (6.8), находим

$$\sigma_{mL} = \frac{\sigma_B \cdot \sigma_m}{k_2 \cdot \gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a + \sigma_m}, \quad \text{где } k_2 = \frac{2\sigma_B - \sigma_0}{\sigma_0}.$$

Следовательно, запас циклической прочности равен

$$n_{\sigma 2} = \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_B}{k_2 \cdot \gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a + \sigma_m}. \quad (6.9)$$

Формула (6.9) используется в том случае, когда рабочий луч пересекает линию усталостного разрушения BC .

Если рабочий луч 3 пересекает линию пластичности DE (рис. 6.23), то запас циклической прочности вычисляется по формуле (6.5)

$$n_{\sigma 3} = \frac{\sigma_T}{\gamma_{\sigma} \cdot \sigma_a + \sigma_m}.$$

Соотношения, полученные выше для циклически изменяющихся нормальных напряжений, справедливы и для циклических касательных напряжений при кручении, но знак σ следует заменить на символ τ .

При совместном действии на деталь циклически изменяющихся нормальных и касательных напряжений общий (приведенный, эквивалентный) запас прочности n определяется по формуле

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}},$$

где n_{σ} , n_{τ} – запасы прочности детали при действии только циклически изменяющихся нормальных или касательных напряжений.

Запасы циклической прочности определяют также при анализе причин усталостных разрушений ответственных деталей, на стадии разработки машин, обобщении опыта создания надежных и долговечных моделей машин, обосновании нормативных запасов циклической прочности отраслевых образцов новой техники и в других случаях. Значения нормативных запасов циклической прочности зависят от назначения и степени ответственности конструкций, накопленного опыта и условий эксплуатации, технико-экономических и других показателей.

6.1.9. АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ И ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Характерной особенностью конструкционных материалов является неоднородность их химического состава и строения. Так, например, в металлических материалах содержание легирующих элементов и примесей, размеры кристаллов и блоков, их ориентация, качество и распределение дефектов структуры, следовательно, и механические свойства имеют определенное рассеивание, другими словами, имеют статистическую (вероятностную) природу, обладают признаками случайных величин и могут быть исследованы статистическими методами.

На постановку и развитие статистических подходов при оценке прочности существенную роль оказали исследования А.П. Александрова и С.Н. Журкова, Н.Н. Афанасьева, В.В. Болотина, С.Д. Волкова, Т.А. Конторовой и Я.И. Френкеля, Н.А. Махутова, Г.С. Писаренко, В.Т. Трощенко, С.В. Серенсена и В.П. Когаева, В. Вейбула, Е. Гумбеля, И. Фишера и И. Холломона, А. Фрейденталя и других ученых. Одной из первых работ в указанном направлении является статистическая теория хрупкой статической прочности кварцевых нитей («усов») А.П. Александрова и С.Н. Журкова (1933 г.). Т.А. Конторова и Я.И. Френкель предложили статистическую теорию прочности реальных кристаллов (1941 г.). На основе феноменологического подхода В. Вейбулл разработал (1939 г.) статистическую теорию прочности хрупких материалов, которая не потеряла своего значения и до настоящего времени. Применительно к пористым материалам, получаемым методами порошковой металлургии, статистическая теория прочности разработана (1961 г.) Г.С. Писаренко и В.Т. Трощенко.

Применительно к усталостному разрушению широко известной является статистическая теория прочности Н.Н. Афанасьева. Особенностью этой теории является то, что структурная неоднородность материала учитывается не на основе априорно принятого закона распределения, а по диаграмме упругопластического деформирования, которая физически обоснованно

характеризует степень структурной неоднородности материала. Эта теория сохраняет свое значение и в настоящее время.

В работах В.В. Болотина впервые предложено рассматривать усталостное разрушение как случайный процесс. При этом вероятностные характеристики механической системы (поликристаллического материала, детали, конструкции) к концу n -го цикла нагружения выражаются через повреждаемость $(n - 1)$ -го цикла и характеристики нагружения n -го цикла. Теория В.В. Болотина обладает большими потенциальными возможностями.

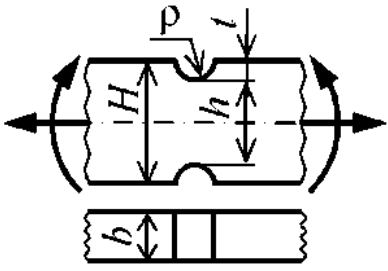
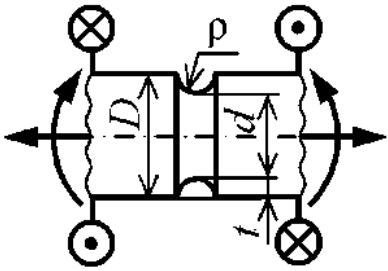
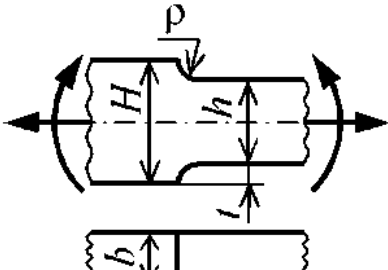
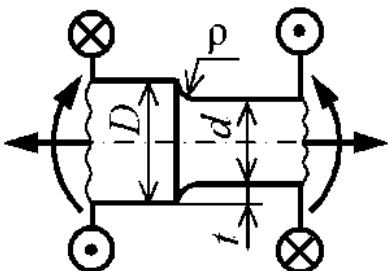
С.В. Серенсен и В.П. Когаев, развивая статистические представления В. Вейбула и Н.Н. Афанасьева, предложили статистическую теорию подобия усталостного разрушения, которая устанавливает взаимосвязь между пределами усталости стандартного образца и детали (элемента конструкции) и вероятностными функциями их распределения. Важно иметь в виду, что максимальные местные напряжения σ_m , τ_m в зоне концентрации, выраженные через теоретические коэффициенты концентрации напряжений α_σ , α_τ , не полностью характеризуют усталостное разрушение элемента конструкции. Большое значение при этом имеет также и скорость убывания местных напряжений по мере удаления от вершины надреза, характеризующая относительными градиентами нормальных и касательных напряжений (рис. 6.15 *a, б, в*) в вершине надреза:

$$\bar{G}_\sigma = \frac{1}{\sigma_m} \left(\frac{d\sigma_m}{dy} \right)_{y=d/2}, \quad \bar{G}_\tau = \frac{1}{\tau_m} \left(\frac{d\tau_m}{d\rho} \right)_{\rho=d/2}.$$

Формулы для определения относительных градиентов местных нормальных и касательных напряжений для простейших видов концентраторов приведены в табл. 6.1. Вместе с тем, для ряда часто встречающихся на практике концентраторов напряжений аналогичные данные пока отсутствуют, что сдерживает более широкое использование этой теории.

Многочисленными экспериментами было установлено, что чем выше градиент местных напряжений, тем выше циклическая прочность образца или детали, выраженная в местных напряжениях. Так, если надрез плавный и градиент напряжений сравнительно небольшой, то местные напряжения по мере удаления от вершины надреза убывают медленно, поэтому сравнительно большой объем материала детали и большее число несовершенств структуры испытывают повышенные напряжения. Следовательно, в этом случае вероятность разрушения детали при прочих одинаковых условиях увеличивается, а предел выносливости уменьшается. И наоборот, если надрез острый и градиент напряжений большой, то местные напряжения быстро убывают, и объем материала, испытывающий повышенные напряжения, резко уменьшается. Другими словами, уменьшается число дефектов структуры, которые находятся в зоне повышенных, что приводит к сниже-

Таблица 6.1. Рекомендуемые значения параметров для определения критерия подобия усталостного разрушения образца и элемента конструкции

Характер нагружения	Растяжение-сжатие	Изгиб	Кручение
	$H/h \geq 1,5; L = 2b$		
	$\bar{G}_\sigma = \frac{2}{\rho}$	$\bar{G}_\sigma = \frac{2}{\rho} + \frac{2}{h}$	
	$H/h < 1,5; L = 2b$		
	$\bar{G}_\sigma = \frac{2(1+\varphi)}{\rho}$	$\bar{G}_\sigma = \frac{2(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{h}$	
	$D:d \geq 1,5; L = \pi d$		
	$\bar{G}_\sigma = \frac{2}{\rho}$	$\bar{G}_\sigma = \frac{2}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_\tau = \frac{1}{\rho} + \frac{2}{d}$
	$D:d < 1,5; L = \pi d$		
	$\bar{G}_\sigma = \frac{2(1+\varphi)}{\rho}$	$\bar{G}_\sigma = \frac{2(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_\tau = \frac{1}{\rho} + \frac{2}{d}$
	$H/h \geq 1,5; L = 2b$		
	$\bar{G}_\sigma = \frac{2,3}{\rho}$	$\bar{G}_\sigma = \frac{2,3}{\rho} + \frac{2}{h}$	
	$H/h < 1,5; L = 2b$		
	$\bar{G}_\sigma = \frac{2(1+\varphi)}{\rho}$	$\bar{G}_\sigma = \frac{2(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{h}$	
	$D:d \geq 1,5; L = \pi d$		
	$\bar{G}_\sigma = \frac{2,3}{\rho}$	$\bar{G}_\sigma = \frac{2,3}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_\tau = \frac{1,15}{\rho} + \frac{2}{d}$
	$D:d < 1,5; L = \pi d$		
	$\bar{G}_\sigma = \frac{2,3(1+\varphi)}{\rho}$	$\bar{G}_\sigma = \frac{2,3(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_\tau = \frac{1,15}{\rho} + \frac{2}{d}$
ПРИМЕЧАНИЕ. Функция $\varphi = 0,25(\sqrt{t/\rho} + 0,5)^1$			

нию вероятности зарождения трещины и повышению предела выносливости, измеряемого в местных напряжениях. Наглядными в этом отношении являются данные, приведенные в п. 6.2. Предел выносливости гладкого образца при изгибе ($\bar{G}_\sigma = 2/h$, где h – высота сечения) примерно на 50 % выше аналогичной величины при растяжении-сжатии ($\bar{G}_\sigma = 0$), что обусловлено влиянием градиента напряжений. В отличие от градиентов напряжений \bar{G}_σ , \bar{G}_τ протяженность (периметр) L (мм) наиболее напряженной области надреза (табл. 6.1) увеличивает объем и число несовершенств структуры, находящихся в зоне повышенных напряжений, и как следствие этого, повышает вероятность образования и развития усталостной трещины. Совершенно аналогична изложенному физическая природа масштабного эффекта.

В результате обширных экспериментальных работ и аналитических исследований С.В. Серенсен и В.П. Когаев предложили критерий подобия усталостного разрушения стандартного образца и элемента конструкции в виде соотношения L/\bar{G} . Суть подобия заключается в том, что если образец и реальная деталь имеют различные размеры, но одинаковые значения критерия L/\bar{G} в опасном сечении, то пределы выносливости (и вероятностные функции их распределения), выраженные в местных напряжениях, совпадают. Эта статистическая теория учитывает влияние концентрации напряжений и размеров сечения на предел выносливости детали. На ее основе разработан ГОСТ 25.504-82 по методам определения характеристик прочности материалов при многоциклового усталости. Сочетание эффективного коэффициента концентрации напряжений k_σ или k_τ и масштабного фактора ε_M рекомендуется определять по зависимостям:

$$\text{при растяжении-сжатии (изгибе)} \quad \frac{k_\sigma}{\varepsilon_M} = \frac{2\alpha_\sigma}{1 + (88,3\bar{G}_\sigma/L)^{v_\sigma}};$$

$$\text{при кручении} \quad \frac{k_\tau}{\varepsilon_M} = \frac{2\alpha_\tau}{1 + (88,3\bar{G}_\tau/L)^{v_\tau}}.$$

Здесь коэффициент 88,3 имеет размерность мм^2 ; критерии подобия L/\bar{G}_σ , L/\bar{G}_τ представляются в $1/\text{мм}^2$; v_σ , v_τ – параметры чувствительности материала к концентрации нормальных и касательных напряжений. Для углеродистых сталей $v_\sigma = 0,10 \div 0,20$; для легированных сталей $v_\sigma = 0,04 \div 0,08$; для алюминиевых сплавов $v_\sigma = 0,08 \div 0,09$; для чугуна с шаровидным графитом $v_\sigma = 0,15$. Экспериментальных данных по определению v_τ пока недостаточно, поэтому в расчетах рекомендуется ориентировочно принять $v_\tau = (1,5 \div 2) v_\sigma$.

Большое влияние на предел выносливости оказывает коррозия, которая ухудшает качество поверхности детали. На рис. 6.24 показано снижение поверхностного фактора в зависимости от предела прочности стали при различных выдержках в коррозионной среде до испытаний на усталость.

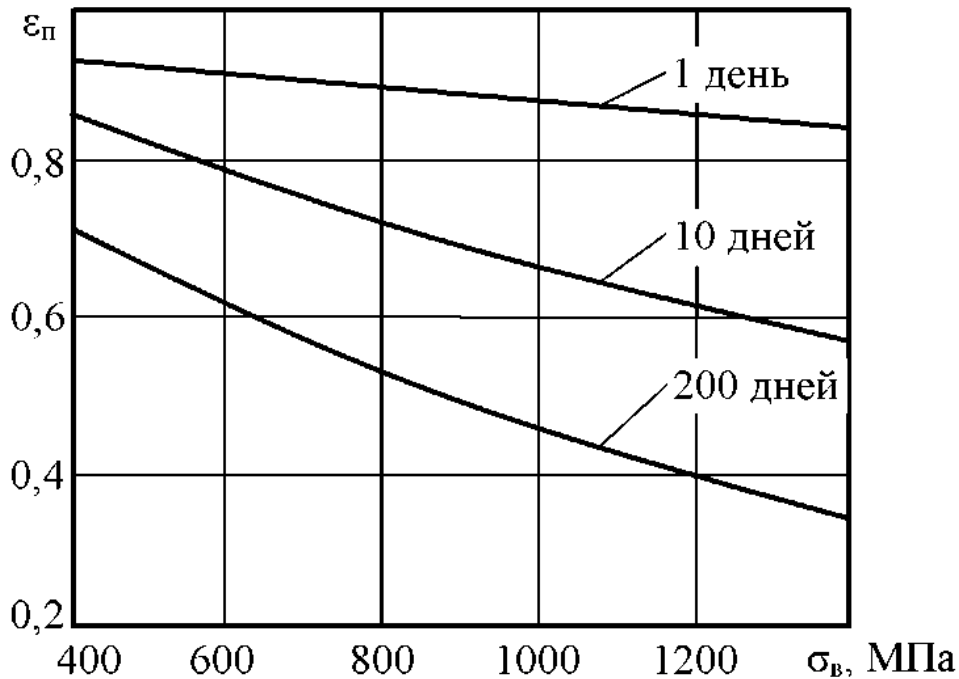


Рис. 6.24. Влияние коррозии на величину поверхностного фактора

Закономерности подобия при малоциклового усталости ($N < 10^5$ циклов) лабораторных образцов и элементов конструкций систематически исследовались в работах авторов. Предложены деформационная и энергетическая модели подобия малоциклового разрушения образца и элемента конструкции. Результаты исследований использованы для создания и нормирования методов расчета несущей способности и долговечности элементов кузнечных штампов и деталей монтажно-демонтажной гидрооснастки. В основу предложенных моделей подобия положены статистические представления о структурной неоднородности материалов, введены понятия удельных по объему и пути деформирования повреждений, эквивалентности термомеханических состояний образца и элемента конструкции, общие принципы моделирования и размерности в механике. В качестве физических критериев малоциклового разрушения используются интенсивность упругопластических деформаций и энергия деформации, которые характеризуют разрушение от однократного нагружения ($N = 1$) до области неограниченной ($N \geq 10^7$ циклов) долговечности.

Критериями подобия при малоциклового усталости применительно к конструктивной концентрации, масштабному и поверхностному эффектам выступают предложенные безразмерные комплексы K_k , K_d , K_F . конкретные значения которых для характерных видов нагружения и форм сечений образцов и деталей приведены в публикациях авторов. Получены соотношения для расчета эффективных коэффициентов концентрации интенсивности деформаций или энергии, масштабного, поверхностного факторов и их совокупного влияния на малоцикловую долговечность элемента конструкции. Выполнено экспериментальное обоснование предложенных моделей подобия малоциклового разрушения применительно к элементам кузнечных штампов и деталям монтажно-демонтажной гидрооснастки.

6.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ «РАСЧЕТ ВАЛА НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ»

Задано: конструктивная схема и продольные размеры вала; тип концентратора напряжений; материал вала; воспринимаемые валом усилия от механических передач (P_1, P_2) и их направления (β, γ); экстремальные значения передаваемого крутящего момента ($M_{к\max}, M_{к\min}$); состояние поверхности вала в зоне концентрации напряжений. При расчете принять: коэффициент запаса статической прочности $n_s = 5$; модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Перечеркнутый участок вала имеет квадратное сечение. Исходные данные для расчета взять из таблиц 6.2 – 6.5 в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ).

Необходимо выполнить следующее.

1. Определить размеры поперечных сечений на участках вала.
2. Вычислить коэффициент запаса циклической прочности при совместном действии изгиба и кручения.

Таблица 6.2. Исходные данные

Ц Н В	1-я ЦНВ			2-я ЦНВ			3-я ЦНВ				4-я ЦНВ		
	№ сх.	Тип конц.	Сталь	l_1 , мм	l_2 , мм	l_3 , мм	P_1 , кН	β , град.	P_2 , кН	γ , град.	$M_{к\max}$, Н·м	$M_{к\min}$, Н·м	Сост. повер.
1	1	1	30X	150	250	300	5	20	15	40	320	200	1
2	2	1	45	170	230	280	6	25	14	35	340	220	2
3	3	1	50	190	200	250	7	30	13	30	360	230	3
4	1	2	30	200	200	230	8	35	12	25	380	240	4
5	2	2	35	220	240	210	9	40	11	20	400	250	5
6	3	2	40	240	220	200	10	35	10	25	420	260	6
7	1	3	45X	260	200	180	11	30	9	30	440	270	7
8	2	3	50X	280	180	160	12	25	8	35	460	280	6
9	3	3	35X	300	180	180	13	20	7	30	480	290	5
0	1	2	40X	280	160	180	14	15	6	25	500	300	4

Таблица 6.3. Характеристики прочности материалов валов

Сталь	30	35	40	45	50	30X	35X	40X	45X	50X
σ_T , МПа	300	320	340	360	380	700	750	800	850	900
σ_B , МПа	500	540	580	600	640	900	930	1000	1050	1100

Таблица 6.4. Конструктивные схемы вала

№ сх.	Схемы вала
1	
2	
3	

Таблица 6.5. Типы концентраторов напряжений

1	2	3
<p>$\rho = 0.5(D - d)$</p>	<p>ГОСТ 8788-88</p>	<p>$a/D = 0,1$</p>

Состояние поверхности вала в зоне концентратора:

1 – полирование; 2 – суперфиниширование; 3 – чистовое точение резцом; 4 – наличие на поверхности мелкой насечки; 5 – поверхность не обработанная после прокатки; 6 – коррозия (пресная вода); 7 – коррозия (морская вода).

6.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТ ВАЛА НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ»

Задано: конструктивная схема вала – 1 (рис. 6.25); продольные размеры вала: $l_1 = 200$ мм, $l_2 = 250$ мм, $l_3 = 200$ мм; тип концентратора напряжений – 3 (табл. 6.5); материал вала – сталь 45; воспринимаемые валом усилия от механических передач: $P_1 = 6$ кН = 6000 Н, $P_2 = 8$ кН = 8000 Н; углы $\beta = 25^\circ$, $\gamma = 35^\circ$; экстремальные значения передаваемого крутящего момента: $M_{\text{max}} = 100$ Н·м, $M_{\text{min}} = 40$ Н·м; состояние поверхности вала в зоне концентрации напряжений – 3 (чистовое точение резцом). При расчете принять: коэффициент запаса статической прочности $n_T = 5$; модуль сдвига $G = 0.8 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Перечеркнутый участок вала имеет квадратное сечение.

Необходимо для вала выполнить следующее.

1. Определить размеры поперечных сечений на участках вала.
2. Вычислить коэффициент запаса циклической прочности.

6.3.1. РАСЧЕТ ВАЛА НА СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

1. Представляем косой изгиб вала как сочетание двух плоских изгибов в главных центральных плоскостях инерции. Проецируем внешние нагрузки на главные центральные плоскости инерции y^0z и x^0z (расчетные схемы и действующие нагрузки приведены на рис. 6.25а, в):

$$P_{1y} = P_1 \cdot \cos\beta = 6000 \cdot 0,906 = 5440 \text{ Н};$$

$$P_{1x} = P_1 \cdot \sin\beta = 6000 \cdot 0,423 = 2540 \text{ Н};$$

$$P_{2y} = P_2 \cdot \cos\gamma = 8000 \cdot 0,819 = 6550 \text{ Н};$$

$$P_{2x} = P_2 \cdot \sin\gamma = 8000 \cdot 0,574 = 4590 \text{ Н};$$

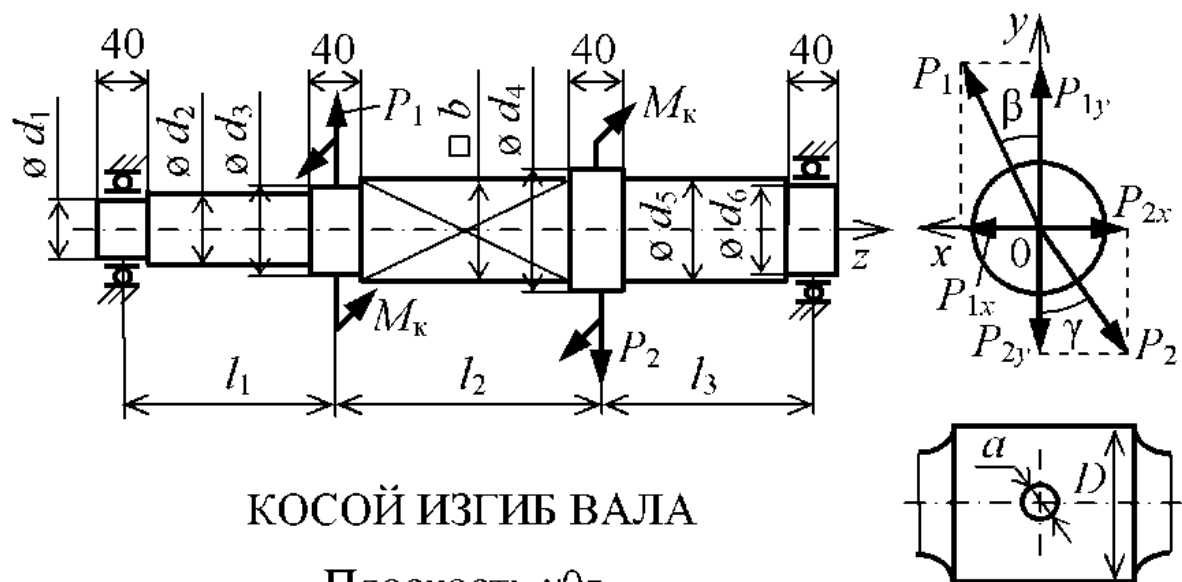
2. Определяем опорные реакции

$$R_C = \frac{P_{1y}(l_2 + l_3) - P_{2y} \cdot l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{5440(250 + 200) - 6550 \cdot 200}{200 + 250 + 200} = 1750 \text{ Н};$$

$$R_D = \frac{P_{2y}(l_1 + l_2) - P_{1y} \cdot l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{6550(200 + 250) - 5440 \cdot 200}{200 + 250 + 200} = 2860 \text{ Н};$$

$$H_C = \frac{P_{1x}(l_2 + l_3) - P_{2x} \cdot l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{2540(250 + 200) - 4590 \cdot 200}{200 + 250 + 200} = 350 \text{ Н};$$

$$H_D = \frac{P_{2x}(l_1 + l_2) - P_{1x} \cdot l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{4590(200 + 250) - 2540 \cdot 200}{200 + 250 + 200} = 2400 \text{ Н}.$$



КОСОЙ ИЗГИБ ВАЛА

Плоскость yOz

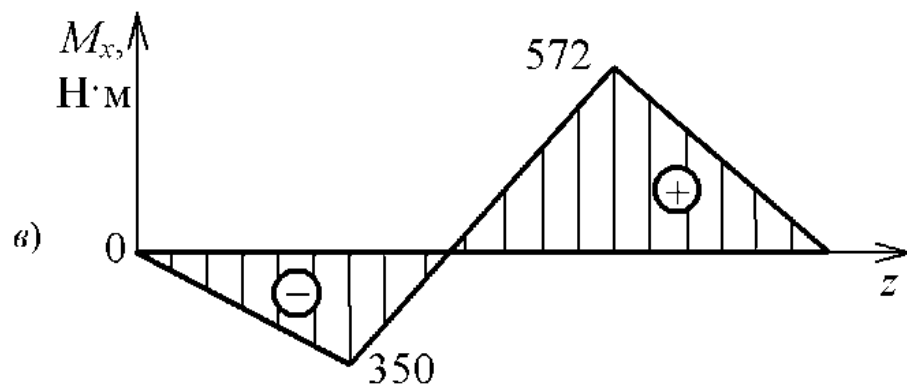
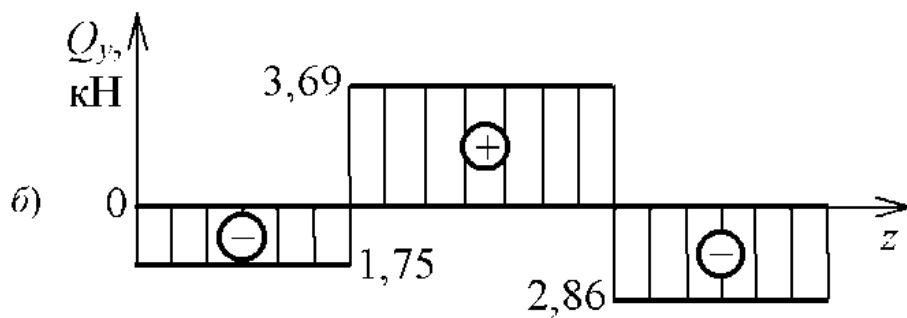


Рис. 6.25. К расчету вала на статическую прочность при косом изгибе с кручением

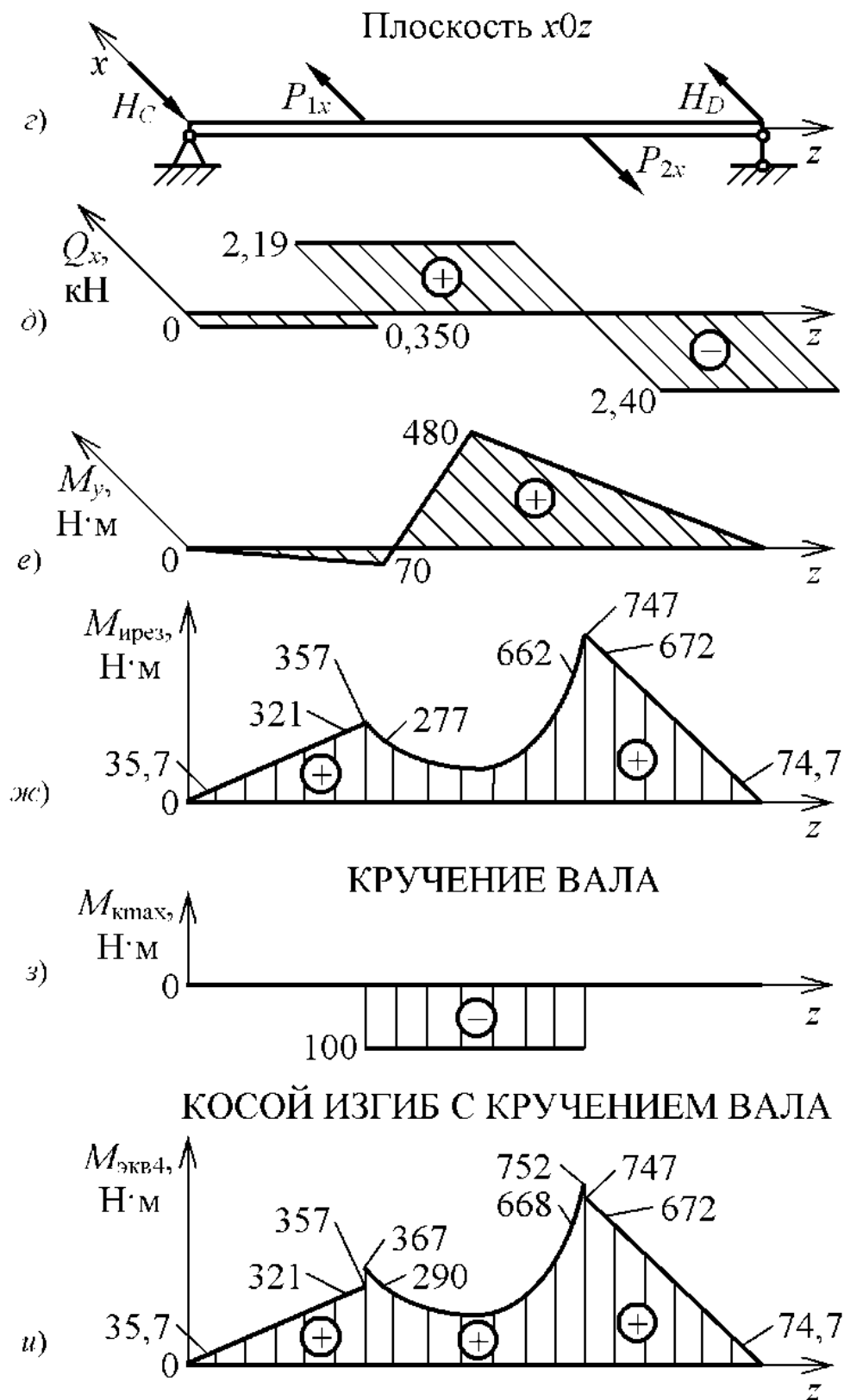


Рис. 6.25 (окончание). К расчету вала на статическую прочность при косом изгибе с кручением

3. Используя метод сечений, строим эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов в главных центральных плоскостях инерции yOz и xOz (рис. 6.25б, в, д, е).

4. В характерных сечениях вала (на границах участков) вычисляем значения результирующего изгибающего момента

$$M_{\text{през}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

и строим эпюру (рис. 6.25ж).

5. Строим эпюру максимального крутящего момента (рис. 6.25з).

6. Вычисляем значения эквивалентного момента в характерных сечениях, используя энергетическую (четвертую) гипотезу прочности

$$M_{\text{экв4}} = \sqrt{M_{\text{през}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}$$

и строим эпюру (рис. 6.25и).

7. Находим допускаемое нормальное напряжение для вала, изготовленного из стали 45,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{n_{\text{T}}} = \frac{360}{5} = 72 \text{ МПа.}$$

8. Определяем диаметры участков вала круглого поперечного сечения, используя условие прочности по эквивалентным напряжениям

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \frac{\max M_{\text{экв4}i}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma], \quad \text{где } W_{\text{и}} = \frac{\pi d_i^3}{32}.$$

Следовательно, диаметр i -го участка вала равен $d_i = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \max M_{\text{экв4}i}}{\pi[\sigma]}}$.

Вычисляем диаметры участков вала:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 35,7}{3,14 \cdot 72 \cdot 10^6}} = 17,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad d_2 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 321}{3,14 \cdot 72 \cdot 10^6}} = 35,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 367}{3,14 \cdot 72 \cdot 10^6}} = 37,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad d_4 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 752}{3,14 \cdot 72 \cdot 10^6}} = 47,3 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_5 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 672}{3,14 \cdot 72 \cdot 10^6}} = 45,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad d_6 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 74,7}{3,14 \cdot 72 \cdot 10^6}} = 21,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

9. Определяем размеры квадратного сечения участка вала:

а) Для первого характерного положения, когда плоскость действия результирующего изгибающего момента совпадает с одной из диагоналей квадрата (рис. 6.26а), вычисляем

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_{\text{презл}}}{W_{x1}} = \frac{\max M_{\text{презл}}}{(b^3/6\sqrt{2})};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кmax}}}{W_{\text{к}}} = \frac{M_{\text{кmax}}}{\alpha \cdot b^3} = \frac{M_{\text{кmax}}}{0,208b^3}.$$

Опасными в этом случае будут точки *A* и *B*. Из условия прочности по нормальным напряжениям изгиба

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_{\text{презл}}}{W_{x1}} \leq [\sigma]$$

определяем размер квадратного сечения участка вала

$$b = \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{2} \cdot \max M_{\text{презл}}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1,414 \cdot 662}{72 \cdot 10^6}} = 42,7 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

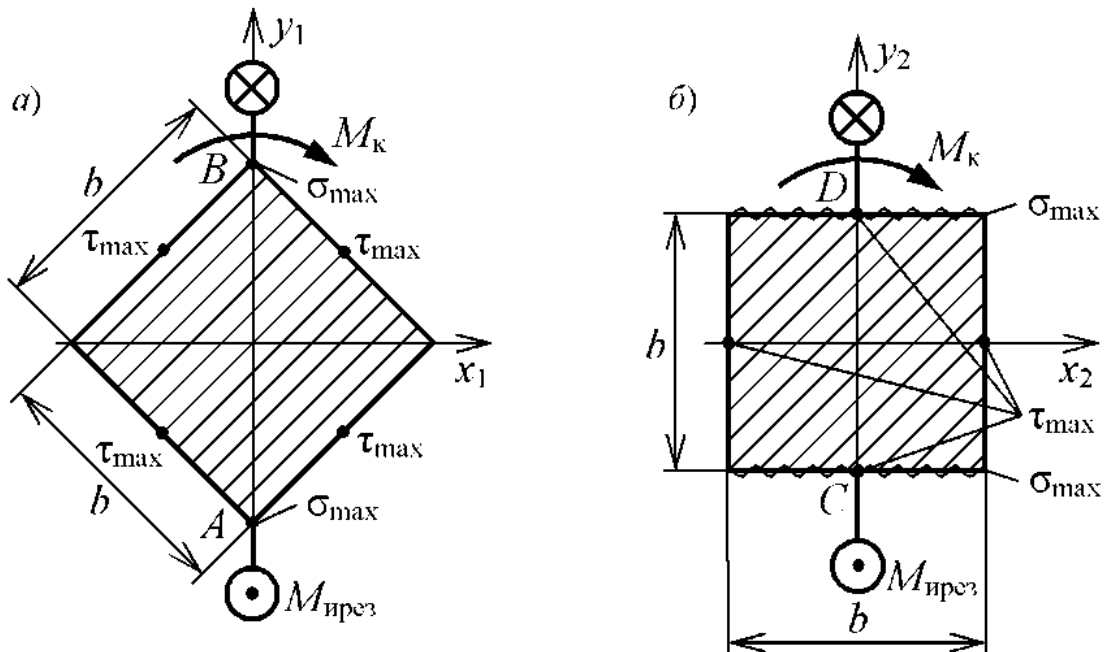


Рис. 6.26. Характерные положения квадратного поперечного сечения при вращении вала

б) Для второго характерного положения (рис. 6.26б) опасными будут точки *C* и *D*. Напряжения в этих точках равны

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_{\text{презл}}}{W_{x2}} = \frac{\max M_{\text{презл}}}{(b^3/6)};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кmax}}}{W_{\text{к}}} = \frac{M_{\text{кmax}}}{\alpha \cdot b^3} = \frac{M_{\text{кmax}}}{0,208b^3},$$

где $\max M_{\text{през}} = 662 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $M_{\text{кmax}} = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Из условия прочности

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 3\tau_{\text{max}}^2} \leq [\sigma]$$

вычисляем размер квадратного сечения участка вала

$$b = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(6 \cdot \max M_{\text{през}})^2 + 3 \left(\frac{M_{\text{кmax}}}{0.208}\right)^2}}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(6 \cdot 662)^2 + 3 \left(\frac{100}{0.208}\right)^2}}{72 \cdot 10^6}} = 38,3 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Окончательно принимаем больший размер $b = 42,7 \text{ мм}$.

10. Выполняем эскиз вала (рис. 6.27).

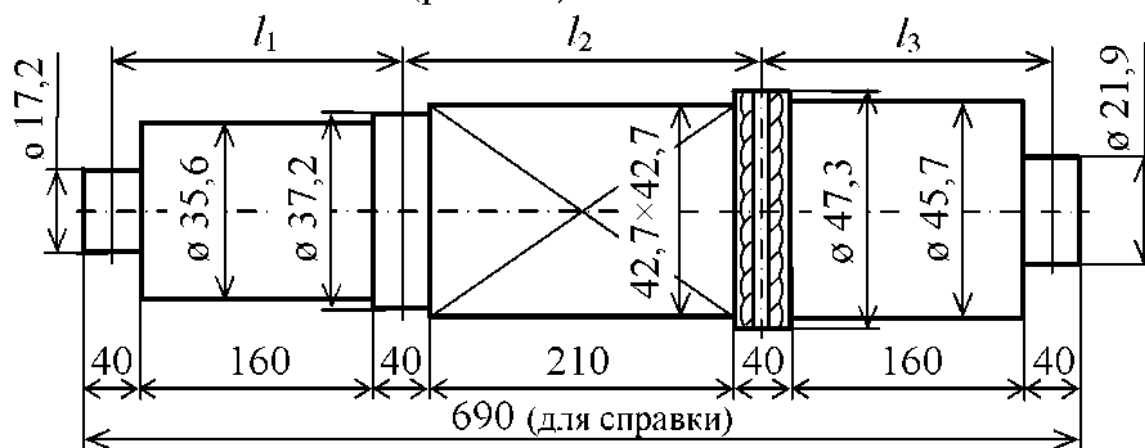


Рис. 6.27. Эскиз рассчитываемого вала

6.3.2. РАСЧЕТ ВАЛА НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

Анализируя условия нагружения вала, видим, что он испытывает переменные нормальные напряжения от косоугольного изгиба с вращением и касательные напряжения от циклического кручения. При этом нормальные напряжения изменяются по симметричному, а касательные – по асимметричному циклам. Принимаем, что участок вала с максимальным значением эквивалентного момента (в нашем примере участок диаметром d_4) содержит заданный концентратор напряжений.

1. Определяем максимальное, минимальное, среднее и амплитудное номинальные (без учета концентратора) напряжения изгиба:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\max M_{\text{през}}}{W_{\text{и}}} = \frac{747 \cdot 32}{3,14 \cdot (47,3 \cdot 10^{-3})^3} = 71,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{min}} = -71,9 \text{ МПа}; \quad \sigma_m = 0; \quad \sigma_a = 71,9 \text{ МПа.}$$

Коэффициент асимметрии цикла нормальных напряжений $R_{\sigma} = -1$.

2. Вычисляем максимальное, минимальное, среднее и амплитудное номинальные (без учета концентратора) касательные напряжения кручения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кmax}}}{W_p} = \frac{100 \cdot 16}{3,14 \cdot (47,3 \cdot 10^{-3})^3} = +4,82 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\min} = \frac{M_{\text{кmin}}}{W_p} = \frac{40 \cdot 16}{3,14 \cdot (47,3 \cdot 10^{-3})^3} = +1,93 \text{ МПа};$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{4,82 + 1,93}{2} = +3,38 \text{ МПа};$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{4,82 - 1,93}{2} = 1,45 \text{ МПа};$$

Коэффициент асимметрии цикла касательных напряжений $R_\tau = +0,400$.

3. Определяем поверхностный фактор (рис. П.1) для заданной чистоты поверхности вала (3 – чистовое точение резцом)

$$\varepsilon_p = 0,95.$$

4. Находим масштабный фактор (рис. П.2) для полученного размера участка вала ($d_4 = 47,3$ мм) с концентратором

$$\varepsilon_m = 0,85.$$

5. Для заданного концентратора (сквозное отверстие) определяем эффективные коэффициенты концентрации:

нормальных напряжений (рис. П.3) $k_\sigma = 1,88$;

касательных напряжений (рис. П.4) $k_\tau = 1,77$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Для других типов концентраторов значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений определяются следующим образом.

а) Концентратор типа 1 – галтельный переход диаметров (табл. 6.5).

Находим значения эффективных коэффициентов концентрации:

нормальных напряжений $k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1)$,

касательных напряжений $k_\tau = 1 + q_\tau (\alpha_\tau - 1)$,

где α_σ , α_τ – теоретические коэффициенты концентрации нормальных и касательных напряжений, которые определяются по рис. П.5 и П.6; q_σ , q_τ – коэффициенты чувствительности материала к концентрации нормальных и касательных напряжений, определяемые с учетом рис. П.7 по формулам

$$q_\sigma = (q_{\sigma_B} + q_{\sigma_T/\sigma_B}) / 2; \quad q_\tau = q_{\sigma_T/\sigma_B}.$$

Например, в нашем случае, $D = d_4 = 47,3$ мм и $d_5 = 45,7$ мм; $D/d = 47,3/45,7 = 1,04$; $\rho = 0,8$ мм; $\rho/d_5 = 0,02$. По рис. П.5 и П.6 находим $\alpha_\sigma = 2,35$; $\alpha_\tau = 1,35$. Далее, по рис. П.7 линейным интерполированием определяем для $\sigma_B = 600$ МПа $q_{\sigma_B} = 0,52$; при $\sigma_T/\sigma_B = 0,60$ находим $q_{\sigma_T/\sigma_B} = 0,52$. Следовательно, значения чувствительности материала к концентрации

$$q_{\sigma} = (0,52 + 0,52) / 2 = 0,52; \quad q_{\tau} = 0,52;$$

эффективные коэффициенты концентрации напряжений

$$k_{\sigma} = 1 + q_{\sigma}(\alpha_{\sigma} - 1) = 1 + 0,52(2,35 - 1) = 1,70;$$

$$k_{\tau} = 1 + q_{\tau}(\alpha_{\tau} - 1) = 1 + 0,52(1,35 - 1) = 1,18.$$

В качестве примера^{*} покажем использование теории подобия С.В. Серенсена и В.П. Когаева. Для этого с учетом рис. 6.27 и табл. 6.1 находим: $\rho = 0,8$ мм; $t = 0,8$ мм; $d_5 = 45,7$ мм; $\varphi = 0,167$;

$$\bar{G}_{\sigma} = \frac{2,3(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{d_5} = 3,40 \text{ мм}^{-1}; \quad L = \pi d_5 = 143 \text{ мм}; \quad \bar{G}_{\tau} = \frac{1,15}{\rho} + \frac{2}{d_5} = 1,48 \text{ мм}^{-1};$$

$v_{\sigma} = 0,20$; $v_{\tau} = 1,5 \cdot v_{\sigma} = 0,30$. В результате получаем

$$\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\text{м}}} = \frac{2 \cdot 2,35}{1 + (88,3 \cdot 3,40 / 143)^{0,20}} = 2,16; \quad \frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\text{м}}} = \frac{2 \cdot 1,35}{1 + (88,3 \cdot 1,48 / 143)^{0,30}} = 1,38,$$

что примерно соответствует аналогичным значениям, полученным традиционным расчетом. Использование этой теории для концентраторов, приведенных в табл. 6.5 (2, 3), затруднено, так как пока отсутствуют рекомендации по определению параметров \bar{G}_{σ} , \bar{G}_{τ} , L .

б) Концентратор типа 2 – шпоночный паз (табл. 6.5).

По рис. П.8 находим значения эффективных коэффициентов концентрации нормальных $k_{\sigma} = 1,60$ и касательных $k_{\tau} = 1,50$ напряжений.

6. Вычисляем обобщенные коэффициенты γ_{σ} и γ_{τ} , учитывающие совместное влияние на пределы выносливости поверхностного, масштабного факторов и концентрации напряжений:

$$\gamma_{\sigma} = \frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\text{н}} \cdot \varepsilon_{\text{м}}} = \frac{1,88}{0,95 \cdot 0,85} = 2,33; \quad \gamma_{\tau} = \frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\text{н}} \cdot \varepsilon_{\text{м}}} = \frac{1,77}{0,95 \cdot 0,85} = 2,19.$$

7. Определяем характеристики усталостной прочности материала вала по справочным таблицам. При отсутствии последних характеристики усталостной и статической прочности материала рекомендуется определять по следующим приближенным зависимостям:

$$\sigma_{1p} = 0,32\sigma_{\text{в}}; \quad \sigma_{1н} = 0,47\sigma_{\text{в}}; \quad \sigma_{0н,p} = (1,4 \div 1,6)\sigma_{1н,p};$$

$$\tau_1 = 0,22\sigma_{\text{в}}; \quad \tau_0 = (1,6 \div 1,8)\tau_1;$$

$$\tau_{\text{Г}} = (0,5 \div 0,6)\sigma_{\text{Г}}; \quad \tau_{\text{в}} = (0,5 \div 0,6)\sigma_{\text{в}}.$$

где $\sigma_{\text{Г}}$, $\tau_{\text{Г}}$, $\sigma_{\text{в}}$, $\tau_{\text{в}}$ – пределы текучести и прочности материала вала при растяжении и кручении.

Для рассматриваемого примера находим пределы выносливости: при симметричном цикле изгиба $\sigma_{-1н} = 0,47 \cdot 600 = 282$ МПа;

^{*} При выполнении РГР не рассматривается.

при отнулевом цикле изгиба $\sigma_{от} = 1,5 \cdot 282 = 423$ МПа;

при симметричном цикле кручения $\tau_{-1} = 0,22 \cdot 600 = 132$ МПа;

при отнулевом цикле кручения $\tau_0 = 1,7 \cdot 132 = 224$ МПа.

Предел текучести материала вала при кручении $\tau_T = 0,5 \cdot 360 = 180$ МПа;

предел прочности материала вала при кручении $\tau_n = 0,5 \cdot 600 = 300$ МПа.

8. Определяем запас циклической прочности по схематизированной диаграмме Дж. Гудмана. Поскольку рабочий луч пересекает линию усталостного разрушения ($\sigma_{-1} - \sigma_n$, рис. 6.28), то запас циклической прочности по нормальным напряжениям определяется по формуле

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\gamma_\sigma \cdot \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_n} \sigma_m} = \frac{282}{2,33 \cdot 71,9 + \frac{282}{600} \cdot 0} = 1,68.$$

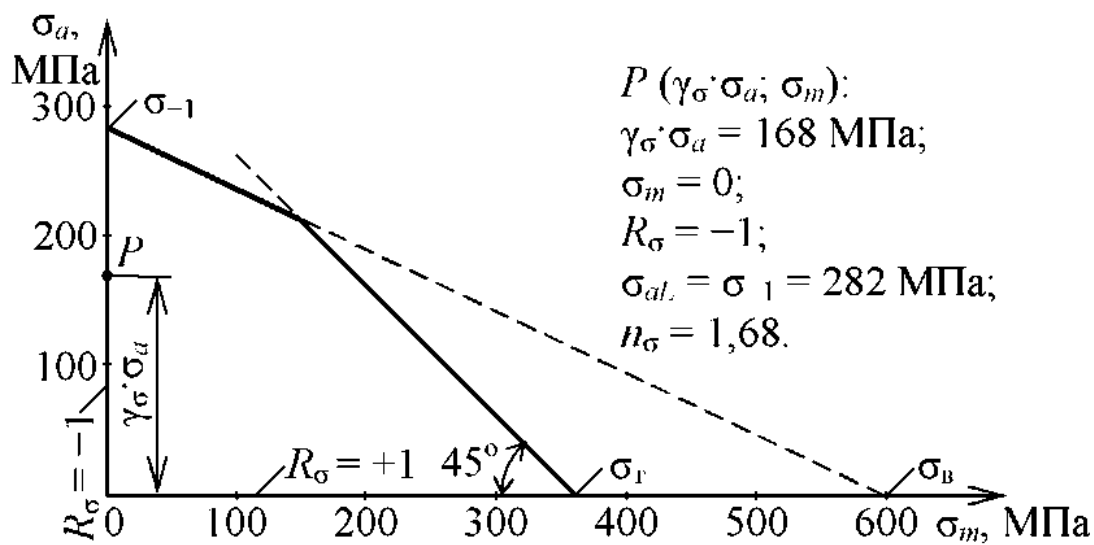


Рис. 6.28. Графическое определение запаса прочности по нормальным напряжениям по диаграмме предельных напряжений Дж. Гудмана

Если рабочий луч пересекает линию пластичности, то запас циклической прочности по нормальным напряжениям определяется по формуле

$$n_\sigma = \frac{\sigma_T}{\gamma_\sigma \cdot \sigma_a + \sigma_m}.$$

Запас прочности по касательным напряжениям определяется аналогичным образом. В рассматриваемом примере рабочий луч пересекает линию пластичности (рис. 6.29). Следовательно, запас циклической прочности равен

$$n_\tau = \frac{\tau_T}{\gamma_\tau \cdot \tau_a + \tau_m} = \frac{180}{2,19 \cdot 1,45 + 3,38} = 27,4.$$

Если рабочий луч пересекает линию усталостного разрушения, то запас циклической прочности по касательным напряжениям определяется по формуле

$$n_{\tau} = \frac{\tau_1}{\gamma_{\tau} \cdot \tau_a + \frac{\tau_1}{\tau_B} \tau_m}$$

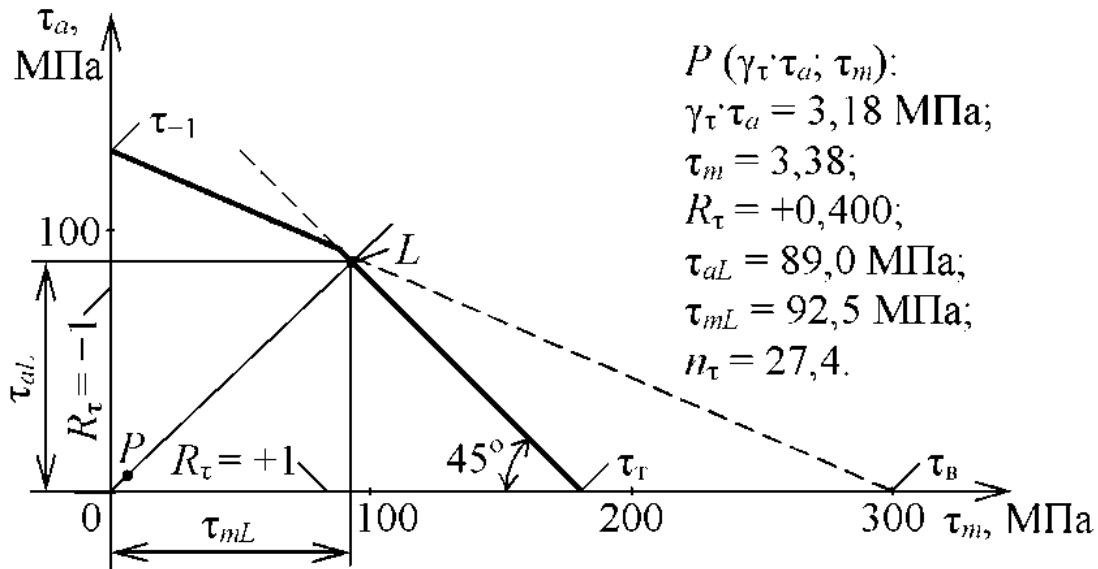


Рис. 6.29. Графическое определение запаса прочности по касательным напряжениям по диаграмме предельных напряжений Дж. Гудмана

Определяем общий (эквивалентный, приведенный) запас циклической прочности с учетом совместного действия циклических нормальных и касательных напряжений

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{1,68 \cdot 27,4}{\sqrt{1,68^2 + 27,4^2}} = 1,67$$

Графическое определение запасов циклической прочности n_{σ} и n_{τ} по диаграмме Дж. Гудмана приведено на рис. 6.28 и 6.29. В особо ответственных случаях запас циклической прочности целесообразно определять по схематизированной диаграмме С.В. Серенсена и Р.С. Кинасошвили.

Таким образом, поскольку общий запас циклической прочности существенно больше единицы, то циклическая прочность вала обеспечена. Если в результате расчета общий запас прочности окажется менее 1,40, то расчет вала повторяют, предварительно приняв запас статической прочности n_s больше 5.

7. РАСЧЕТЫ КОЛОНН НА УСТОЙЧИВОСТЬ ИНЖЕНЕРНЫМ МЕТОДОМ

При малых и умеренных нагрузках ряд элементов конструкций сохраняет первоначально заданную форму равновесия (рис. 7.1).

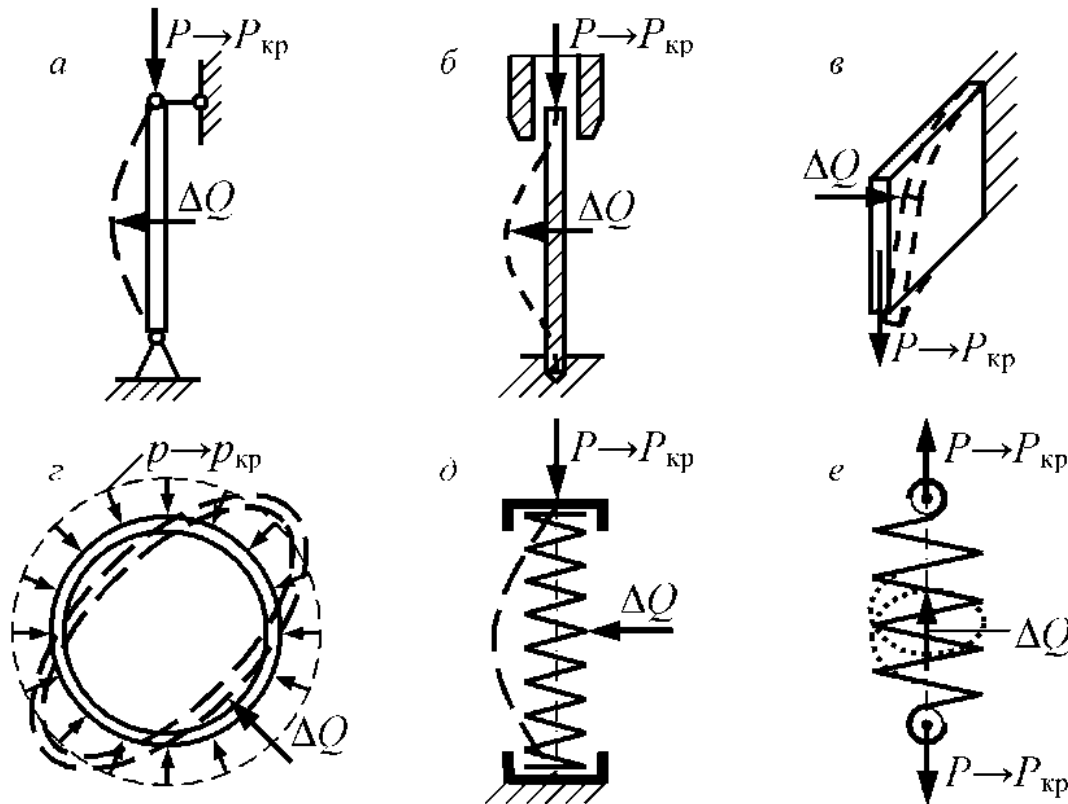


Рис. 7.1. Примеры потери первоначально заданной формы равновесия элементов конструкций (*a* – центрально сжатый стержень (стойка); *б* – длинное сверло; *в* – балка с малой шириной сечения; *г* – тонкостенная оболочка при внешнем давлении; *д* – высокая цилиндрическая пружина сжатия; *е* – податливая (большой диаметр, тонкая проволока) пружина растяжения)

Если внешние нагрузки увеличивать, то первоначальная форма равновесия такого рода элементов конструкций может нарушиться (рис. 7.1, штриховые линии). При этом элемент конструкции или получает большие деформации или разрушается, но в любом случае уже не может выполнять служебную роль. Опасность потери первоначальной формы равновесия особенно актуальна в настоящее время в связи с широким использованием тонкостенных элементов конструкций из высокопрочных материалов типа стержней, балок, пластин и оболочек.

7.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ КОЛОНН НА УСТОЙЧИВОСТЬ ИНЖЕНЕРНЫМ МЕТОДОМ

Анализ примеров (рис. 7.1) показывает, что формы равновесия элементов конструкций могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Если упругая система, выведенная из первоначального положения равновесия небольшой дополнительной силой ΔQ , возвращается в исходное состояние после удаления силы ΔQ , то такая форма равновесия упругой системы (элемента конструкции) называется устойчивой, а если не возвращается в исходное состояние – неустойчивой формой равновесия. Нагрузки и напряжения, которые характеризуют переход упругой системы от устойчивой к неустойчивой форме равновесия, называются критическими $P_{кр}$, $\sigma_{кр}$.

Потеря устойчивой формы равновесия (устойчивости) применительно к центрально сжатому стержню (рис. 7.1а) называется продольным изгибом, который рассматривается в дальнейшем. Продольный изгиб сравнительно длинного стержня (стойки, колонны) происходит при упругих деформациях в плоскости наименьшей жесткости. При этом критическая сила и критическое напряжение вычисляются по формулам Л. Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad \sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (7.1)$$

где E – модуль упругости материала; F , J_{\min} – площадь и минимальный осевой момент инерции сечения; μ – коэффициент приведения длины стойки к основному (шарнирному, где $\mu = 1$) закреплению, зависящий от условий закрепления и отношения продольных размеров колонны (табл. П.6); l – длина колонны; $\lambda = \mu l / i_{\min}$ – гибкость колонны; $i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F}$ – минимальный радиус инерции сечения. Формулы Л. Эйлера (7.1) справедливы для колонн большой гибкости, когда гибкость $\lambda \geq \lambda_{\text{проп}}$, где $\lambda_{\text{проп}} = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{\text{проп}}}$ – гибкость колонны, соответствующая пределу пропорциональности. При этом критическое напряжение $\sigma_{кр}$ не превышает предела пропорциональности материала $\sigma_{\text{проп}}$. Для малоуглеродистой стали 30 ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $\sigma_{\text{проп}} = 200$ МПа) получаем $\lambda_{\text{проп}} = \sqrt{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 / 200} \approx 100$. При определении $\lambda_{\text{проп}}$ для других сталей приближенно можно принять $\sigma_{\text{проп}} = (0,75 \div 0,85)\sigma_r$.

Потеря устойчивости сравнительно коротких колонн средней гибкости происходит при упругопластических деформациях. При этом критические силы и напряжения вычисляются по формулам Ф.С. Ясинского

$$P_{кр} = (a - b\lambda)F, \quad \sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (7.2)$$

где a, b – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала и определяемые по справочникам. При отсутствии справочных значений a и b для сталей рекомендуются приближенные зависимости

$$a = 2.31(\sigma_T - 107) \text{ МПа}, \quad b = 0,0197(\sigma_B - 321) \text{ МПа}, \quad (7.3)$$

полученные авторами в результате обработки известных экспериментальных данных. Формулы Ф.С. Ясинского (7.2) справедливы для колонн средней гибкости, когда гибкость колонны находится в диапазоне $\lambda_T \leq \lambda \leq \lambda_{ш}$, где $\lambda_T = (a - \sigma_T) / b$ – гибкость, соответствующая пределу текучести σ_T материала. При этом критические напряжения изменяются в пределах $\sigma_{ш} \leq \sigma_{кр} \leq \sigma_T$. Для стали 30 ($\sigma_T = 250$ МПа, $a = 336$ МПа, $b = 1,47$ МПа) $\lambda_T = (336 - 250) / 1,47 \approx 60$.

Для колонн малой гибкости (например, цилиндрические образцы для испытаний материалов на сжатие) критическое напряжение $\sigma_{кр} = \sigma_T$, при этом гибкость $\lambda \leq \lambda_T$.

Для обеспечения работоспособности колонны необходимо выполнение условия прочности при сжатии

$$\sigma_{\max} = P/F \leq [\sigma] \quad (7.4)$$

и условия устойчивости

$$\sigma_{\max} = P/F \leq [\sigma]_y, \quad (7.5)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение на сжатие; $[\sigma]_y = \varphi[\sigma]$ – допускаемое напряжение на устойчивость; $\varphi < 1$ – коэффициент снижения допускаемого напряжения на сжатие (коэффициент продольного изгиба), зависящий от гибкости колонны, прочностных свойств материала (σ_T) и определяемый по справочникам (табл. П.7). Допускаемое напряжение на устойчивость можно также представить $[\sigma]_y = \sigma_{кр} / n_y$, где n_y – коэффициент запаса устойчивости. Однако, таким образом вычислять $[\sigma]_y$ не всегда удобно, поскольку заранее не известно $\sigma_{кр}$.

При подборе сечений колонн из прокатных профилей и проверке выполнения условия устойчивости максимальные рабочие напряжения могут быть существенно меньше $[\sigma]_y$, но σ_{\max} не должны превышать более чем на 5 % значений допускаемых напряжений на устойчивость.

Устойчивыми кроме колонны в целом должны быть и ее ветви. Для достижения этого гибкости колонны λ и ветвей $\lambda_B = \mu_B l_B / i_{\min B}$ должны быть равны, где $\mu_B = 1$, $l_B, i_{\min B}$ – коэффициент приведения высоты ветви, высота и минимальный радиус инерции сечения ветвей. С учетом этого получаем предельную высоту ветви $l_B = i_{\min B} \lambda$. Поскольку $l_B < l$, то при проектировании колонн предусматривают промежуточные крепления ветвей $n_{кр} = l/l_B + 1$.

При расчетах элементов конструкций на устойчивость характерны три постановки задач. Первая (так называемая прямая задача): известны продольные (l) и поперечные (F) размеры и условия закрепления колонны, характеристики сечения (J_{\min}, i_{\min}), материал ($[\sigma]_y$). В этом случае опреде-

ляется гибкость колонны λ , коэффициент продольного изгиба φ , затем из условия устойчивости находится допускаемая нагрузка $[P]$, а по формулам Л. Эйлера или Ф.С. Ясинского – критическая сила. Далее вычисляется коэффициент запаса устойчивости $n_y = P_{кр} / [P]$. Вторая (обратная задача): известны продольные размеры и условия закрепления стойки, форма сечения, рабочая нагрузка P , материал ($[\sigma]$). Необходимо: выбрать номера прокатных профилей; вычислить критическую нагрузку; определить коэффициент запаса устойчивости. Обратная задача решается методом последовательных приближений: в первом приближении принимается значение коэффициента продольного изгиба $\varphi_{1п}$; затем из условия устойчивости определяется площадь сечения F_1 , далее находятся размеры сечения или номера прокатных профилей; вычисляется гибкость λ_1 , с учетом которой по справочным таблицам (табл. П.7) находится соответствующий расчетный коэффициент $\varphi_{1р}$. Если полученное значение $\varphi_{1р}$ существенно отличается от априорно принятого $\varphi_{1п}$, то повторно принимается коэффициент $\varphi_{2п} = (\varphi_{1п} + \varphi_{1р}) / 2$ и процесс итерации продолжается до тех пор, пока принятое $\varphi_{п}$ и найденное в результате расчета $\varphi_{р}$ значения будут отличаться незначительно (желательно в пределах 5 %). Затем окончательно определяют размеры сечения (или номера прокатных профилей), критическую нагрузку $P_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости $n_y = P_{кр} / P$. Третья: из конструкторских и технологических решений, условий работы колонны известны действующие внешние нагрузки P , продольные и поперечные размеры, материал ($[\sigma]_y$). При такой постановке задачи проверяется выполнение условия устойчивости, а при необходимости вычисляется критическая нагрузка $P_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости $n_y = P_{кр} / P$, затем дается заключение о работоспособности колонны.

7.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ «РАСЧЕТ КОЛОННЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ИНЖЕНЕРНЫМ МЕТОДОМ»

Задано: расчетная схема колонны; форма составного поперечного сечения; длина и материал колонны; рабочая нагрузка. Исходные данные для расчета взять из таблиц 7.1 – 7.3 в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ). При расчетах принять коэффициент запаса прочности $n_T = 2$.

Необходимо для колонны выполнить следующее.

1. Выбрать номера прокатных профилей.
2. Вычислить критическую нагрузку.
3. Определить коэффициент запаса устойчивости.

При отсутствии справочных значений коэффициентов a и b формулы Ф.С. Ясинского рекомендуются зависимости: $a = 2,31(\sigma_T - 107)$ МПа; $b = 0,0197(\sigma_B - 321)$ МПа.

Табл. 7.1. Исходные данные

ЦНВ	1-я ЦНВ	2-я ЦНВ	3-я ЦНВ				4-я ЦНВ	
	Расчетн. схема	Форма сечения	Сила P , кН	Сталь	σ_T , МПа	σ_B , МПа	Длина l , м	Отнош. b/l
1	1	1	600	Ст4пс	265	480	4,0	0,3
2	2	2	550	ВСт3пс5	250	420	4,5	0,4
3	3	3	500	Ст5сп	285	580	5,0	0,5
4	4	4	450	40	250	420	5,5	0,6
5	5	5	400	10ХСНД	400	540	6,0	0,7
6	6	6	350	09Г2	310	450	6,5	0,3
7	7	7	300	ВСт3кп	225	365	7,0	0,4
8	8	8	250	Ст3кп	235	380	7,5	0,5
9	9	9	200	ВСтТсп	300	440	8,0	0,6
0	10	10	150	09Г2С	350	500	8,5	0,7

Табл. 7.2. Расчетные схемы колонн

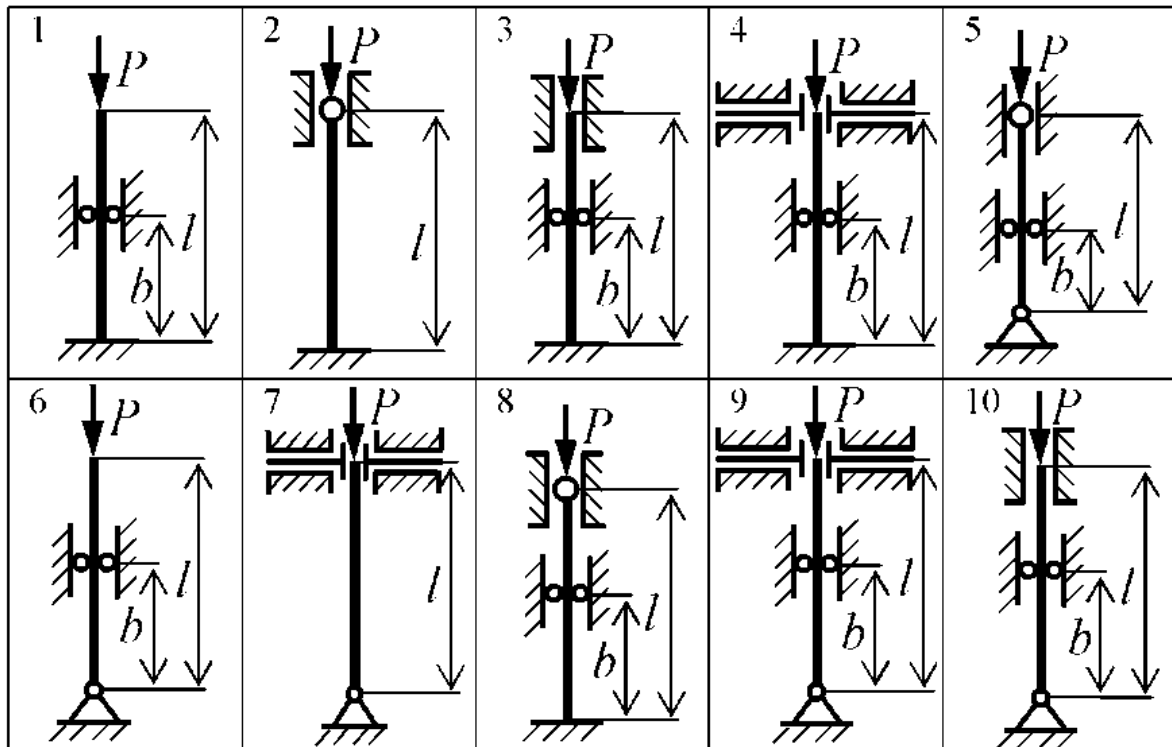


Табл. 7.3. Формы составных поперечных сечений колонн

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

7.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТ КОЛОННЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ИНЖЕНЕРНЫМ МЕТОДОМ»

Задано: расчетная схема колонны (рис. 7.2); форма составного поперечного сечения; рабочая нагрузка $P = 300$ кН; продольные размеры $l = 10$ м, $b = 4$ м; материал – сталь 40 ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_T = 250$ МПа; $\sigma_B = 420$ МПа); коэффициент запаса прочности $n_T = 2$.

Необходимо для колонны выполнить следующее.

1. Выбрать номер двутавров.
2. Вычислить критическую нагрузку $P_{кр}$.
3. Определить коэффициент запаса устойчивости n_y .

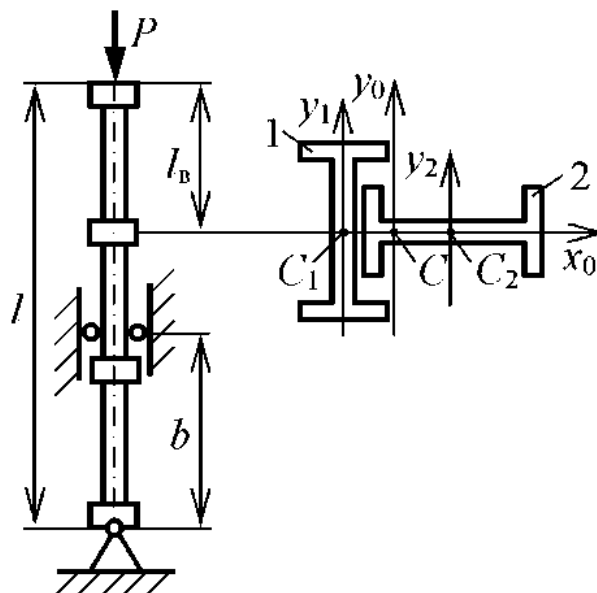


Рис. 7.2. Расчетная схема и форма составного сечения колонны

РЕШЕНИЕ

1. Вычисляем допускаемое напряжение на сжатие

$$[\sigma] = \sigma_T / n_T = 250 / 2 = 125 \text{ МПа.}$$

2. По таблице П.6 находим коэффициент приведения высоты колонны к основному (шарнирному) закреплению $\mu = 1.47$.

3. Поскольку коэффициент продольного изгиба находится в пределах $0 < \varphi < 1$, то в первом приближении принимаем $\varphi_{III} = 0,5$ и из условия устойчивости

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F_1} \leq [\sigma]_y, \quad [\sigma]_y = \varphi_{III} [\sigma]$$

вычисляем площадь составного сечения колонны

$$F_1 = \frac{P}{\varphi_{III} [\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 125 \cdot 10^6} = 48,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 48 \text{ см}^2.$$

4. Из таблицы П.5 по расчетной площади $F_{\text{двр}} = 0,5F_1 = 24 \text{ см}^2$ находим ближайший двутавр № 18 с табличными значениями геометрических характеристик $F_{\text{дв}} = 23,8 \text{ см}^2$, $J_x = 1330 \text{ см}^4$, $J_y = 94,6 \text{ см}^4$.

5. Анализ формы составного сечения показывает, что минимальный момент инерции будет относительно главной центральной оси x_0

$$J_{\min} = J_{x0} = J_x + J_y = 1330 + 94,6 = 1425 \text{ см}^4.$$

6. Вычисляем минимальный радиус инерции составного сечения

$$i_{\min 1} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{2F_{\text{дв}}}} = \sqrt{\frac{1425}{2 \cdot 23,8}} = 5,47 \text{ см}$$

и определяем гибкость колонны

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min 1}} = \frac{1,47 \cdot 1000}{5,47} = 269.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Для составных сечений 1, 4, 6, 7 (табл. 7.3) колонн минимальный момент инерции будет относительно горизонтальной главной центральной оси $J_{\min} = J_{x0} = 2J_x$, где J_x – главный центральный момент инерции сечения ветви. Для обеспечения равноустойчивости колонны второй главный центральный момент инерции составного сечения относительно вертикальной оси y_0 принимается равным $J_{y0} = 2(J_y + a^2 F) = (1,1 \div 1,2)J_{x0}$, где F , J_y – площадь и второй главный момент инерции сечения ветви; $a = \sqrt{[(1,1 \div 1,2)J_x - J_y] / F}$ – искомое расстояние между центрами тяжести составного сечения и сечениями ветвей. Для составных симметричных сечений 2, 5, 8 (табл. 7.3) с учетом практики проектирования колонн задаются рациональными расстояниями a между центрами тяжести составного

сечения и сечений ветвей (например, $a = (0,02 \div 0,03)l$), а затем вычисляют минимальные главные центральные моменты инерции $J_{\min} = J_{x_0} = J_{y_0}$. Для антисимметричного сечения 9 (табл. 7.3) также можно принять аналогичное расстояние a_x (например, $a_x = (0,02 \div 0,03)l$), тогда расстояние a_y вычисляется из условия равенства габаритов составного сечения $a_x + x_0 = a_y + y_0$, где x_0, y_0 – координаты центра тяжести неравнобокого уголка (табл. П.3).

7. По таблице П.7 для $\lambda_1 \geq 220$ и $\sigma_T = 231 \div 290$ МПа получаем расчетный коэффициент продольного изгиба $\varphi_{1P} = 0,119$, который существенно (на 76 % при рекомендуемых до 5 %) отличается от ранее принятого $\varphi_{1П} = 0,5$.

8. Повторно принимаем $\varphi_{2П} = 0,5(\varphi_{1П} + \varphi_{1P}) = 0,5(0,5 + 0,119) = 0,310$ и вновь вычисляем площадь составного сечения

$$F_2 = \frac{P}{\varphi_{2П}[\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,310 \cdot 125 \cdot 10^6} = 77,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 77,4 \text{ см}^2.$$

9. Из таблицы П.5 по расчетной площади $F_{\text{двр}} = 0,5F_2 = 38,7 \text{ см}^2$ находим ближайший двутавр № 27: $F_{\text{дв}} = 40,2 \text{ см}^2$, $J_x = 5010 \text{ см}^4$, $J_y = 260 \text{ см}^4$.

10. Вычисляем минимальный радиус инерции составного сечения

$$i_{\min 2} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{2F_{\text{дв}}}} = \sqrt{\frac{5010 + 260}{2 \cdot 40,2}} = 8,10 \text{ см}.$$

11. Определяем гибкость колонны при втором приближении

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{\min 2}} = \frac{1,47 \cdot 1000}{8,10} = 181.$$

12. По таблице П.7 для $\lambda_2 = 181$ и $\sigma_T = 231 \div 290$ МПа линейным интерполированием получаем расчетный коэффициент продольного изгиба:

для $\lambda = 180$ $\varphi_{180} = 0,175$, $\lambda = 190$ $\varphi_{190} = 0,158$;

$$\varphi_{2P} = \varphi_{180} + \frac{\varphi_{190} - \varphi_{180}}{190 - 180} (\lambda_2 - 180) = 0,175 + \frac{0,158 - 0,175}{190 - 180} (181 - 180) = 0,173,$$

который также существенно (на 44 %) отличается от принятого $\varphi_{2П} = 0,310$.

13. Для третьего приближения принимаем $\varphi_{3П} = 0,5(\varphi_{2П} + \varphi_{2P}) = 0,5(0,310 + 0,173) = 0,241$ и вычисляем площадь составного сечения

$$F_3 = \frac{P}{\varphi_{3П}[\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,241 \cdot 125 \cdot 10^6} = 99,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 99,6 \text{ см}^2.$$

14. Из таблицы П.5 по расчетной площади $F_{\text{двр}} = 0,5F_3 = 49,8 \text{ см}^2$ находим ближайший двутавр № 30а: $F_{\text{дв}} = 49,9 \text{ см}^2$, $J_x = 7780 \text{ см}^4$, $J_y = 436 \text{ см}^4$.

15. Вычисляем минимальный радиус инерции сечения

$$i_{\min 3} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{2F_{\text{дв}}}} = \sqrt{\frac{7780 + 436}{2 \cdot 49,9}} = 9,07 \text{ см}.$$

16. Определяем гибкость колонны

$$\lambda_3 = \frac{\mu l}{i_{\min 3}} = \frac{1,47 \cdot 1000}{9,07} = 162.$$

17. По таблице П.7 для $\lambda_3 = 162$ и $\sigma_T = 231 \div 290$ МПа с учетом линейного интерполирования находим расчетный коэффициент продольного изгиба $\varphi_{3P} = 0,215$. Видно, что принятый коэффициент $\varphi_{3П} = 0,241$ больше расчетного $\varphi_{3P} = 0,215$ всего на 12,1 %.

Проверяем выполнение условия устойчивости

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{2F_{\text{дв}}} = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 49,9 \cdot 10^{-4}} = 30,06 \text{ МПа} > [\sigma]_y = \varphi_{3P}[\sigma] = 0,215 \cdot 125 = 26,87$$

МПа.

Условие устойчивости не выполняется. При двутаврах № 30а колонна будет недопустимо перегружена, поскольку максимальное рабочее напряжение больше допускаемого напряжения на

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]_y}{[\sigma]_y} 100 \% = \frac{30,06 - 26,87}{26,87} 100 \% = +11,9 \%$$

Важно иметь в виду, что при подборе сечений колонн максимальные рабочие напряжения не должны превышать более чем на 5 % допускаемых напряжений на устойчивость. При этом допускается, что σ_{\max} могут быть существенно (более, чем на 5 %) меньше $[\sigma]_y$.

18. Принимаем $\varphi_{4П} = 0,5(\varphi_{3П} + \varphi_{3P}) = 0,5(0,241 + 0,215) = 0,228$ и вычисляем площадь составного сечения

$$F_4 = \frac{P}{\varphi_{4П}[\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,228 \cdot 125 \cdot 10^6} = 105,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 105,3 \text{ см}^2.$$

19. Из таблицы П.5 по расчетной площади $F_{\text{двр}} = 52,6 \text{ см}^2$ выбираем двутавр № 33: $F_{\text{дв}} = 53,8 \text{ см}^2$, $J_x = 9840 \text{ см}^4$, $J_y = 419 \text{ см}^4$.

20. Вычисляем минимальный радиус инерции сечения

$$i_{\min 4} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{2F_{\text{дв}}}} = \sqrt{\frac{9840 + 419}{2 \cdot 53,8}} = 9,76 \text{ см}.$$

21. Определяем гибкость колонны при четвертом приближении

$$\lambda_4 = \frac{\mu l}{i_{\min 4}} = \frac{1,47 \cdot 1000}{9,76} = 150,6.$$

22. По таблице П.7 для $\lambda_4 = 150,6$ и $\sigma_T = 231 \div 290$ МПа с учетом линейного интерполирования находим расчетный коэффициент продольного изгиба $\varphi_{4P} = 0,248$. Принятый коэффициент $\varphi_{4П} = 0,228$ меньше расчетного $\varphi_{4P} = 0,248$ на 8,1 %.

23. Проверяем выполнение условия устойчивости

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{2F_{\text{уд}}} = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 53,8 \cdot 10^{-4}} = 27,88 \text{ МПа} < [\sigma]_y = \varphi_{4P}[\sigma] = 0,248 \cdot 125 = 31,0 \text{ МПа}.$$

Видно, что условие устойчивости выполняется. При этом рабочее напряжение меньше допускаемого напряжения на

$$\Delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]_y}{[\sigma]_y} 100 \% = \frac{27,88 - 31,0}{31,0} 100 \% = -10,1 \%$$

Более точно подобрать двутавровые сечения колонны не удалось.

24. Необходимо, чтобы колонна была устойчива не только в целом, но устойчивыми были и ее отдельные ветви. Условие равноустойчивости колонны и ветвей будет выполнено, если гибкости колонны λ и ветвей λ_B будут равны

$$\lambda = \lambda_B = \frac{\mu_B l_B}{i_{\min B}},$$

где l_B – высота ветви; μ_B – коэффициент приведения высоты ветви (принимается $\mu_B = 1$); $i_{\min B}$ – минимальный радиус инерции сечения ветви. Для подобранных двутавров № 33 по таблице П.5 находим $i_{\min B} = i_y = 2,79$ см. Вычисляем предельную высоту ветви

$$l_{\text{прв}} = i_{\min B} \lambda = 2,79 \cdot 150,6 = 420 \text{ см},$$

что меньше высоты колонны $l = 1000$ см. Следовательно, для обеспечения равноустойчивости ветвей и колонны в целом необходимо предусмотреть определенное число креплений (сварных, болтовых)

$$n_{\text{кр}} = \frac{l}{l_B} + 1 = \frac{1000}{420} + 1 = 3,38 \approx 4.$$

Реальная высота ветви равна $l_B = 1000 / 3 = 333$ см. Наносим на колонну (рис. 7.2) четыре скрепляющие планки.

25. Вычисляем критическую силу. Поскольку гибкость колонны $\lambda_d = 150,6 > \lambda_{\text{мл}} = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{\text{мл}}} = \sqrt{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 / 0,8 \cdot 250} = 99,3$, то используем формулу Л. Эйлера

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot (9840 + 419) \cdot 10^{-8}}{(1,47 \cdot 10)^2} = 936 \cdot 10^3 \text{ Н} = 936 \text{ кН}.$$

При $\lambda_T \leq \lambda \leq \lambda_{\text{мл}}$ для определения $P_{\text{кр}}$ применяется формула Ф.С. Ясинского. При этом $\lambda_T = (a - \sigma_T) / b$. При $a = 2,31(\sigma_T - 107) = 2,31(250 - 107) = 330$ МПа, $b = 0,0197(\sigma_B - 321) = 0,0197(420 - 321) = 1,95$ МПа получаем $\lambda_T = (330 - 250) / 1,95 = 41$.

26. Находим коэффициент запаса устойчивости колонны

$$n_y = P_{\text{кр}} / P = 936 / 300 = 3,12.$$

8. РАСЧЕТЫ КОЛОНН НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Для сравнительно простых форм колонн, условий их закрепления и нагружения критические силы определяются по формулам Л. Эйлера, полученным путем аналитического решения дифференциальных уравнений изогнутых осей (упругих линий) колонн. При более сложных формах колонн, условиях их закрепления и нагружения аналитические решения соответствующих дифференциальных уравнений или слишком громоздки, или вообще не существуют в элементарных функциях. В последнее время указанные задачи эффективно решаются машинными (ПЭВМ) методами, однако это связано с высокой квалификацией персонала, получением вычислительных программ и большими трудовыми затратами. С учетом этого в ряде случаев для приближенного определения критических нагрузок упругих систем может оказаться полезным энергетический метод, предложенный в 1914 г. выдающимся отечественным инженером и ученым С.П. Тимошенко.

8.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ КОЛОНН НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Рассмотрим простейший пример – продольный изгиб центрально сжатого стержня (рис. 8.1). При росте силы от 0 до критического значения $P_{кр}$ стержень вначале сжимается на $\Delta l_{сж}$, а затем теряет устойчивость и изгибается. При этом критическая сила $P_{кр}$ перемещается на величину δ , обусловленную потерей устойчивости.

Суть энергетического метода заключается в следующем: работа критических нагрузок A_{δ} , совершаемая на перемещениях δ , вызванных потерей упругой системой устойчивости, равна накопленной потенциальной энергии изгиба $U_{из}$.

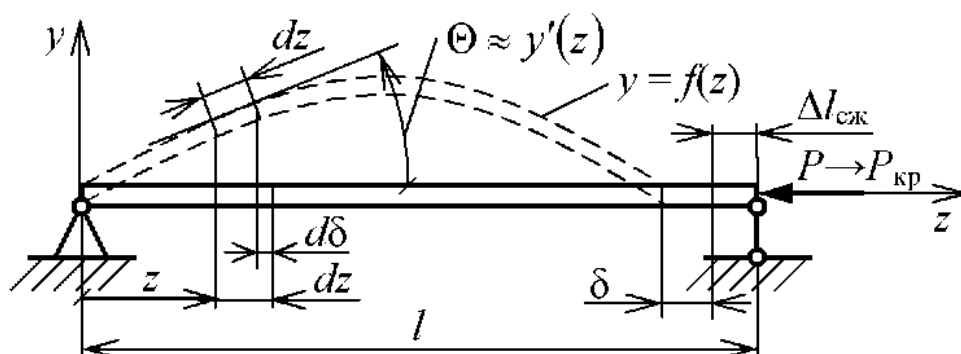


Рис. 8.1. Применение энергетического метода к продольному изгибу стержня

С учетом этого можно представить совершенную внешней силой работу

$$A = A_M + A_\delta; \quad A_M = 0,5P_{кр}\Delta l_{сж}; \quad A_\delta = P_{кр}\delta. \quad (8.1)$$

Затраченная работа накапливается в стержне в виде упругой потенциальной энергии сжатия и изгиба

$$U = U_{сж} + U_{из}. \quad (8.2)$$

Приравнявая (8.1) и (8.2) и помня, что $U_{сж} = 0,5P_{кр}\Delta l_{сж}$, получаем критическую силу

$$P_{кр} = U_{из} / \delta. \quad (8.3)$$

Если иметь в виду, что $U_{из} = \int_0^l \frac{M_{из}^2 dz}{2EJ_{мин}}$, $EJ_{мин} \cdot y'' = M_{из}$ и уравнение изогнутой

той оси стержня $y = f(z)$, то можно получить потенциальную энергию изгиба в виде

$$U_{из} = \frac{1}{2} EJ_{мин} \int_0^l (y'')^2 dz. \quad (8.4)$$

Элементарное перемещение (рис. 8.1) представим таким образом

$$d\delta = dz - dz \cos \Theta = dz \left[1 - \cos 2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) \right] = 2 \sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right) dz = \frac{1}{2} (y')^2 dz. \quad (8.5)$$

Следовательно, перемещение критической силы $P_{кр}$, обусловленное потерей устойчивости, равно

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dz. \quad (8.6)$$

Если уравнение изогнутой оси $y = f(z)$ задано, то по формуле (8.3) с учетом (8.4) и (8.6) можно определить критическую силу. Например, из решения задачи Л. Эйлера известно точное уравнение изогнутой оси стержня (рис. 8.1) $y = C \sin(\pi z/l)$. В этом случае энергетический метод дает точное значение критической (Эйлеровой) силы $P_{кр} = \pi^2 EJ_{мин} / l^2$.

Если точное уравнение $y = f(z)$ неизвестно, то его можно задать приближенно, анализируя условия деформирования упругой системы при потере устойчивости. В таком случае энергетический метод дает приближенное (несколько завышенное) значение критических нагрузок. В качестве приближенного уравнения изогнутой оси колонны можно использовать уравнение полинома

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (8.7)$$

Число слагаемых полинома принимается на единицу больше числа граничных условий. Так, для стержня (рис. 8.1) можно записать следующие граничные условия: 1. $z = 0$ $y = 0$ (прогиб); 2. $z = 0$ $y'' = 0$ ($EJ_{мин} y'' = M_{из} = 0$);

3. $z = l \quad y = 0$; 4. $z = l \quad y'' = 0$. В этом примере уравнение полинома необходимо ограничить пятью слагаемыми

$$y = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4. \quad (8.8)$$

Находим необходимые для расчетов первую и вторую производные

$$y' = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3, \quad (8.9)$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3z + 12a_4z^2. \quad (8.10)$$

Если число слагаемых в этом примере взять меньше пяти, то описание изогнутой оси колонны будет грубым, а результаты расчета $P_{кр}$ будут иметь большую погрешность. Если же число слагаемых полинома взять более пяти, то не удастся конкретизировать форму изогнутой оси и решить задачу. Подставляя граничные условия 1 и 2 соответственно в формулы (8.8) и (8.10), получаем: $a_0 = 0$; $a_2 = 0$. Аналогичным образом используя граничные условия 3 и 4, находим: $a_1 = a_4l^3$, $a_3 = -2a_4l$. Так как граничных условий всегда на единицу меньше числа неизвестных коэффициентов полинома, то один из них (например, a_4) так и остается неопределенным. Это не препятствует решению задачи, поскольку неизвестный коэффициент (здесь a_4) присутствует в выражениях для работы внешних сил A_δ , потенциальной энергии изгиба $U_{из}$ и, в конечном счете, сокращается.

С учетом граничных условий конкретизированное уравнение полинома, его первая и вторая производные имеют вид

$$y = a_4(l^3z - 2lz^3 + z^4), \quad y' = a_4(l^3 - 6lz^2 + 4z^3), \quad y'' = 12a_4(z^2 - lz).$$

На основании формулы (8.6) находим работу критической силы, совершаемую на перемещениях δ , обусловленных потерей устойчивости

$$A_\delta = P_{кр} \delta = P_{кр} \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \left[a_4 (l^3 - 6lz^2 + 4z^3) \right]^2 dz = 0,2429 P_{кр} l^7 a_4^2.$$

Используя формулу (8.4), вычисляем потенциальную энергию изгиба

$$U_{из} = \frac{1}{2} EJ_{\min} \int_0^l \left[12a_4 (z^2 - lz) \right]^2 dz = 2,40 EJ_{\min} l^5 a_4^2.$$

Приравнявая A_δ и $U_{из}$, получаем критическую силу $P_{крэ} \approx 9,88 EJ_{\min} / l^2$, которая всего на 0,1 % больше точного (Эйлерового) значения $P_{крэ} = \pi^2 EJ_{\min} / l^2$.

Рассмотрим второй простейший пример (рис. 8.2), когда на стержень действует равномерно распределенная нагрузка (например, собственный вес). Элементарная критическая сила равна $dP_{кр} = q_{кр} dz$. Перемещение рассматриваемого сечения с ординатой z можно представить аналогично формуле (8.6)

$$\delta_z = \frac{1}{2} \int_z^l (y')^2 dz. \quad (8.11)$$

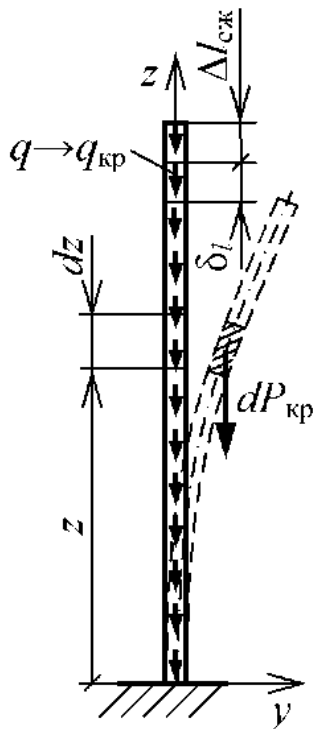


Рис. 8.2. Использование энергетического метода для определения критической распределенной нагрузки

Элементарная работа вычисляется с учетом (8.1)

$$dA_{\delta} = dP_{кр} \delta_z = \frac{1}{2} q_{кр} dz \int_z^l (y')^2 dz. \quad (8.12)$$

Работа распределенной критической нагрузки $q_{кр}$ на перемещениях, вызванных потерей устойчивости, равна потенциальной энергии изгиба

$$A_{\delta} = \frac{1}{2} q_{кр} \int_l^z dz \int_z^l (y')^2 dz = U_{из}. \quad (8.13)$$

Располагая уравнением изогнутой оси стержня $y = f(z)$, из последней формулы с учетом (8.4) можно определить распределенную критическую нагрузку.

Запишем граничные условия для стержня (рис. 8.2): 1. $z = 0$ $y = 0$; 2. $z = 0$ $y' = 0$ (угол поворота); 3. $z = l$ $y'' = 0$.

Задаемся уравнением полинома в виде

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3. \quad (8.14)$$

Представляем первую и вторую производные

$$y' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2, \quad (8.15)$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 z. \quad (8.16)$$

Подставляя граничные условия 1 и 2 соответственно в (8.14) и (8.15), получаем: $a_0 = 0$; $a_1 = 0$. Используя граничное условие 3, по формуле (8.16) находим $a_2 = -3a_3 l$. С учетом этого приближенное уравнение изогнутой оси стержня, первая и вторая производные принимают вид

$$y = a_3(z^3 - 3lz^2), \quad y' = 3a_3(z^2 - 2lz), \quad y'' = 6a_3(z - l).$$

Используя формулу (8.13), вычисляем работу критической распределенной нагрузки, совершаемую на перемещениях, вызванных потерей устойчивости,

$$A_{\delta} = \frac{1}{2} q_{кр} \int_0^l dz \int_0^z [3a_3(z^2 - 2lz)]^2 dz = 0,75 q_{кр} l^6 a_3^2.$$

В соответствии с (8.4) находим потенциальную энергию изгиба стержня

$$U_{из} = \frac{1}{2} EJ_{\min} \int_0^l [6a_3(z - l)]^2 dz = 6EJ_{\min} l^3 a_3^2$$

Приравнявая A_8 и $U_{гр}$, получаем критическую распределенную нагрузку $q_{крз} = 8EJ_{мин} / l^3$, которая больше на 2,2 % точного значения $q_{кр} = 7,83EJ_{мин} / l^3$.

Если приближенное уравнение изогнутой оси (рис. 8.2) принять в виде

$$y = C \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2l} \right), \quad (8.16)$$

то энергетическим методом получим критическую распределенную нагрузку $q_{крз} \approx 8.29EJ_{мин} / l^3$, которая уже на 5.9 % превышает точное значение. Повышенная по сравнению с предыдущим решением погрешность определения $q_{крз}$ обусловлена более грубой аппроксимацией изогнутой оси стержня.

Аналогичным образом используют энергетический метод, когда на колонну действует совокупность сосредоточенных сил и распределенных нагрузок.

8.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ «РАСЧЕТ КОЛОННЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ»

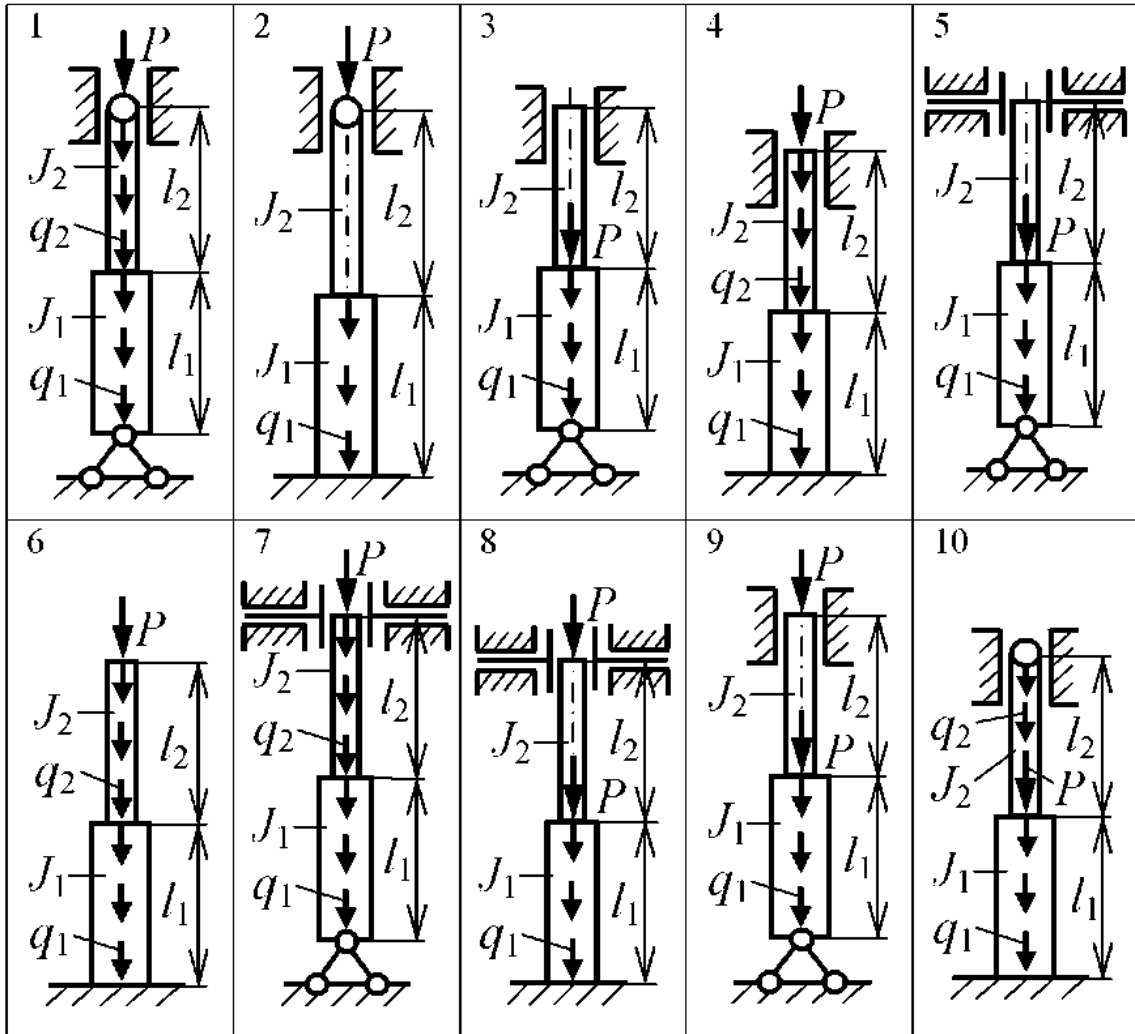
Задано: расчетная схема колонны; высота колонны l , отношение длин участков l_2 / l_1 ; значение минимального осевого момента инерции сечения на первом участке J_1 , отношение минимальных моментов инерции сечений на участках J_2 / J_1 ; соотношения между нагрузками $P = q_1 l_1$, $q_2 = 0,5q_1$. Исходные данные для расчета взять из таблиц 8.1, 8.2 в соответствии с цифрами номера варианта (ЦНВ).

Необходимо для заданной колонны определить величины критических нагрузок ($P_{кр}$, $q_{1кр}$, $q_{2кр}$).

Табл. 8.1. Исходные данные

ЦНВ	1-я ЦНВ	2-я ЦНВ		3-я ЦНВ	4-я ЦНВ
	Расчетн. схема	$l = l_1 + l_2$, см	l_2 / l_1	J_1 , см ⁴	J_2 / J_1
1	1	400	0,3	150	0,7
2	2	450	0,4	200	0,6
3	3	500	0,5	250	0,5
4	4	550	0,6	300	0,4
5	5	600	0,7	350	0,3
6	6	650	0,6	400	0,4
7	7	700	0,5	450	0,5
8	8	750	0,4	500	0,6
9	9	800	0,3	550	0,7
0	10	850	0,4	600	0,6

Табл. 8.2. Расчетные схемы колонн



8.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА
«РАСЧЕТ КОЛОННЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ
МЕТОДОМ»

Задано: расчетная схема колонны (рис. 8.3); высота колонны $l = 600$ см, отношение длин участков $l_2 / l_1 = 0,5$; значение минимального осевого момента инерции сечения на первом участке $J_1 = 400$ см⁴, отношение минимальных моментов инерции сечений на участках $J_2 / J_1 = 0,4$; соотношения между нагрузками $P_{кр} = q_{1кр} l_1$, $q_{2кр} = 0,5 q_{1кр}$.

Необходимо определить величины критических нагрузок $P_{кр}$, $q_{1кр}$, $q_{2кр}$.

РЕШЕНИЕ

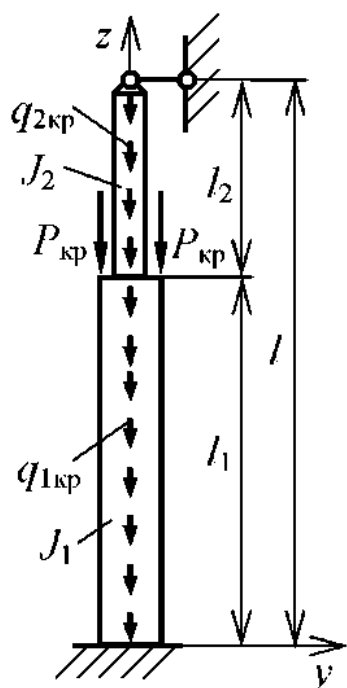


Рис. 8.3. Расчетная схема колонны

1. Анализируем условия закрепления колонны и записываем граничные условия: 1. $z = 0 \quad y = 0$ (прогиб); 2. $z = 0 \quad y' = 0$ (угол поворота); 3. $z = l \quad y = 0$; 4. $z = l \quad y'' = 0$ ($EJ_{\min} y'' = M_{II} = 0$).

2. Записываем уравнение полинома с пятью слагаемыми

$$y = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4.$$

3. Находим необходимые для расчета первую и вторую производные

$$y' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3.$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2.$$

4. Используя граничные условия, определяем коэффициенты полинома: подставляя граничное условие 1, находим $a_0 = 0$; учитывая граничное условие 2, определяем $a_1 = 0$; используя граничные условия 3 и 4, соответственно получаем

$$a_2 + a_3 l + a_4 l^2 = 0,$$

$$a_2 + 3a_3 l + 6a_4 l^2 = 0.$$

Из полученных уравнений выражаем коэффициенты a_2, a_3 через a_4 :

$$a_2 = 1,5a_4 l^2; \quad a_3 = -2,5a_4 l.$$

5. С учетом значений a_2 и a_3 записываем первую и вторую производные

$$y' = a_4 (3l^2 z - 7,5l z^2 + 4z^3), \quad y'' = 3a_4 (l^2 - 5l z + 4z^2).$$

6. В соответствии с п. 8.1 вычисляем работу критических сил и критических распределенных нагрузок, совершаемую на перемещениях, вызванных потерей устойчивости

$$A_{\delta} = 2P_{кр} \cdot 0,5 \int_0^{l_1} (y')^2 dz + \int_0^{l_1} q_{1кр} dz 0,5 \int_0^z (y')^2 dz + \int_{l_1}^l q_{2кр} dz 0,5 \int_0^z (y')^2 dz.$$

Поскольку $l_1 = 0,6667l$, $P_{кр} = q_{1кр} \cdot l_1 = 0,6667q_{1кр}l$, $q_{2кр} = 0,5q_{1кр}$, то последнее выражение можно представить

$$A_{\delta} = 0,6667q_{1кр}l \int_0^{0,6667l} (y')^2 dz + 0,5q_{1кр} \int_0^{0,6667l} dz \int_0^z (y')^2 dz + 0,25q_{1кр} \int_{0,6667l}^l dz \int_0^z (y')^2 dz.$$

Если иметь в виду, что

$$(y')^2 = \left(9l^4 z^2 + 56,25l^2 z^4 + 16z^6 - 45l^3 z^3 + 24l^2 z^4 - 60lz^5 \right) a_4^2,$$

$$\int_0^z (y')^2 dz = (3l^4 z^3 + 11,25l^2 z^5 + 2,285714z^7 - 11,25l^3 z^4 + 4,8l^2 z^5 - 10lz^6) a_4^2 \text{ и}$$

$$\int_0^z dz \int_0^z (y')^2 dz = (0,75l^4 z^4 + 1,875l^2 z^6 + 0,285714z^8 - 2,25l^3 z^5 + 0,8l^2 z^6 - 1,42857lz^7) a_4^2,$$

то можно вычислить работу, совершаемую на перемещениях, вызванных потерей устойчивости:

двух критических сил

$$A_{\delta P} = 0,6667 q_{1\text{кр}} l \int_0^{0,6667l} (y')^2 dz = 0,6667 \cdot 0,036083 q_{1\text{кр}} l^8 a_4^2 = 0,024053 q_{1\text{кр}} l^8 a_4^2;$$

первой критической распределенной нагрузки

$$A_{\delta q1} = 0,5 q_{1\text{кр}} \int_0^{0,6667l} dz \int_0^z (y')^2 dz = 0,5 \cdot 0,014231 q_{1\text{кр}} l^8 a_4^2 = 0,007115 q_{1\text{кр}} l^8 a_4^2;$$

второй критической распределенной нагрузки

$$A_{\delta q2} = 0,5 \cdot 0,5 q_{1\text{кр}} \int_{0,6667l}^l dz \int_0^z (y')^2 dz = 0,25 q_{1\text{кр}} l^8 a_4^2 (0,032143 - 0,014231) = 0,004478 q_{1\text{кр}} l^8 a_4^2.$$

Находим сумму работ критических сил и нагрузок

$$A_{\delta} = A_{\delta P} + A_{\delta q1} + A_{\delta q2} = (0,024053 + 0,007115 + 0,004478) q_{1\text{кр}} l^8 a_4^2 = 0,03565 q_{1\text{кр}} l^8 a_4^2.$$

Представляем потенциальную энергию изгиба колонны

$$U_{\text{из}} = U_{\text{из1}} + U_{\text{из2}} = 0,5 EJ_1 \int_0^{l_1} (y'')^2 dz + 0,5 EJ_2 \int_{l_1}^l (y'')^2 dz.$$

Поскольку $J_2 = 0,4J_1$, то можно записать

$$U_{\text{из}} = 0,5 EJ_1 \int_0^{0,6667l} (y'')^2 dz + 0,2 EJ_1 \int_{0,6667l}^l (y'')^2 dz.$$

Если иметь в виду, что

$$(y'')^2 = 9(l^4 + 25l^2 z^2 + 16z^4 - 10l^3 z + 8l^2 z^2 - 40lz^3) a_4^2 \text{ и}$$

$$\int (v'')^2 dz = 9 \left(l^4 z + 8,33333 l^2 z^3 + 3,2 z^5 - 5 l^3 z^2 + 2,66667 l^2 z^3 - 10 l z^4 \right) a_4^2.$$

то можно вычислить потенциальную энергию изгиба на первом

$$U_{\text{из1}} = 0,5 E J_1 \int_0^{0,6667l} (v'')^2 dz = 0,5 \cdot 9 \cdot 0,149744 E J_1 l^5 a_4^2 = 0,67389 E J_1 l^5 a_4^2$$

и втором

$$U_{\text{из2}} = 0,2 E J_1 \int_{0,6667l}^l (v'')^2 dz = 0,2 \cdot 9 (0,2 - 0,149744) E J_1 l^5 a_4^2 = 0,09045 E J_1 l^5 a_4^2$$

участках колонны и сумму потенциальных энергий $U_{\text{из}} = 0,76434 E J_1 l^5 a_4^2$.

Приравнивая работу A_δ и упругую потенциальную энергию изгиба $U_{\text{из}}$, получаем

$$q_{1\text{кр}} = \frac{0,76434 E J_1}{0,03565 l^3} = \frac{21,44 E J_1}{l^3} = \frac{21,44 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 400 \cdot 10^8}{6^3} =$$

$$= 79,4 \cdot 10^3 \text{ Н/м} = 79,4 \text{ кН/м}.$$

С учетом этого находим $q_{2\text{кр}} = 0,5 q_{1\text{кр}} = 39,7 \text{ кН/м}$, $P_{\text{кр}} = q_{1\text{кр}} \cdot l_1 = 79,4 \cdot 0,6667 \cdot 6 = 318 \text{ кН}$.

9. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) проводят при оценке прочности, жесткости и устойчивости элементов инженерных конструкций.

9.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Рассмотрим характерные виды напряженного состояния на примерах растягиваемого стержня (рис. 9.1а), тонкостенного сосуда под давлением (рис. 9.1б), нагруженной полосы с отверстием (рис. 9.1в). С этой целью мысленно выделим элементарные (бесконечно малые) кубики: в первых случаях – особым образом ориентированными (главными) площадками, а во вторых – произвольными площадками (рис. 9.1). Из рисунков видно, что характер напряженного состояния элементарных кубиков зависит от ориентации секущих плоскостей.

В первых случаях элементарные кубики 1 выделены таким образом, что по их граням действуют только нормальные напряжения σ_1 , σ_1 и σ_2 или σ_1 , σ_2 , σ_3 , а касательные напряжения отсутствуют. Площадки, по которым на элементарный кубик действуют только нормальные напряжения, называются главными. В окрестности каждой точки нагруженного бруса существует три взаимно перпендикулярные главные площадки. Нормальные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 , действующие по главным площадкам элементарного кубика, называются главными напряжениями, а соответствующие им нормали называются главными осями. При присвоении индексов главных напряжений руководствуются неравенством: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Если на элементарный кубик действует одно главное напряжение, то такое напряженное состояние называется линейным (одноосным), два главных напряжения – плоским (двухосным), три главных напряжения – объемным (трехосным).

Во вторых случаях кубики 2 выделены произвольными площадками. В общем случае нагружения по граням кубика 2 (рис. 9.1в) действуют нормальные σ_x , σ_y , σ_z и касательные $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ напряжения. Совокупность главных напряжений или нормальных и касательных напряжений по произвольным взаимно перпендикулярным площадкам образует так называемый тензор напряжений

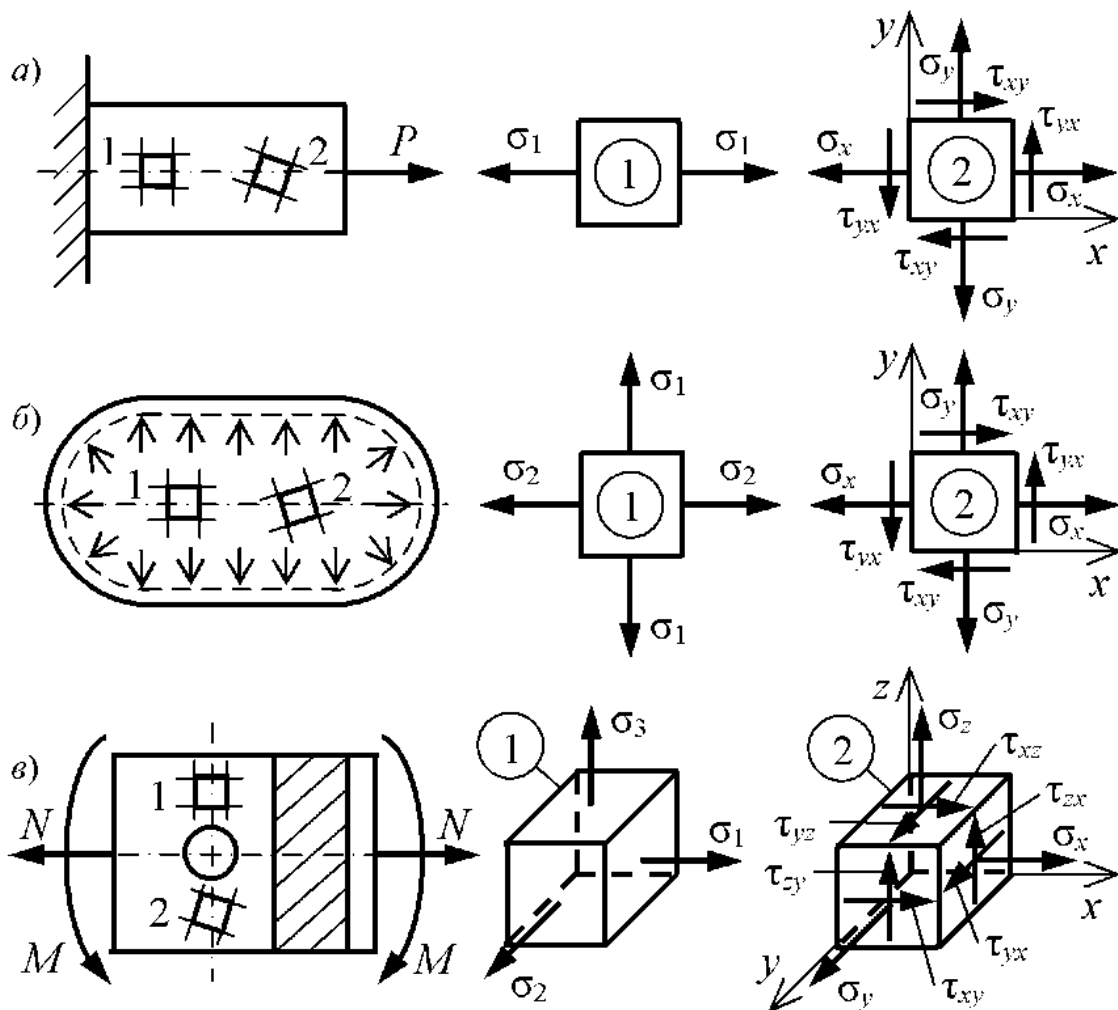


Рис. 9.1. Характерные примеры напряженных состояний:
a – растягиваемый стержень; *б* – тонкостенный сосуд под давлением;
в – нагруженная полоса с отверстием

$$T_{\text{H}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ или } T_{\text{H}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (9.1)$$

Главным напряжениям или нормальным и касательным напряжениям по произвольным взаимно перпендикулярным площадкам соответствуют главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ или линейные $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и угловые $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ деформации, которые образуют тензор деформаций

$$T_{\text{д}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \text{ или } T_{\text{д}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

Тензор в математике представляет собой дальнейшее развитие понятий скаляра и вектора. Тензором называется совокупность физических или геометрических величин, представляющих собой систему чисел или функций, которая преобразуется согласно определенным законам при изменении положения осей координат. Следовательно, тензор напряжений (деформаций) – это совокупность нормальных и касательных напряжений (линейных и угловых деформаций) по трем взаимно перпендикулярным площадкам, однозначно характеризующая напряженное (деформированное) состояние в точке нагруженного бруса (элемента конструкции). Нормальные и касательные напряжения, линейные и угловые деформации называются компонентами тензоров напряжений и деформаций. Тензор напряжений (деформаций) в общем случае нагружения характеризуется шестью независимыми компонентами (цифрами).

Элементарный кубик под действием главных (или нормальных и касательных) напряжений деформируется, изменяя как свой объем, так и форму (рис. 9.2). Если кубик подвергнуть трехосному растяжению или сжатию средними напряжениями $\sigma_{cp} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3$, то он будет изменять только объем. В другом характерном случае, когда кубик подвержен действию напряжений $(\sigma_1 - \sigma_{cp})$, $(\sigma_2 - \sigma_{cp})$, $(\sigma_3 - \sigma_{cp})$ или $(\sigma_x - \sigma_{cp})$, $(\sigma_y - \sigma_{cp})$, $(\sigma_z - \sigma_{cp})$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, будет изменяться только его форма. В соответствии с указанными характерными условиями деформирования элементарного кубика тензор напряжений разлагают соответственно на шаровой тензор напряжений

$$T_{нш} = \begin{bmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

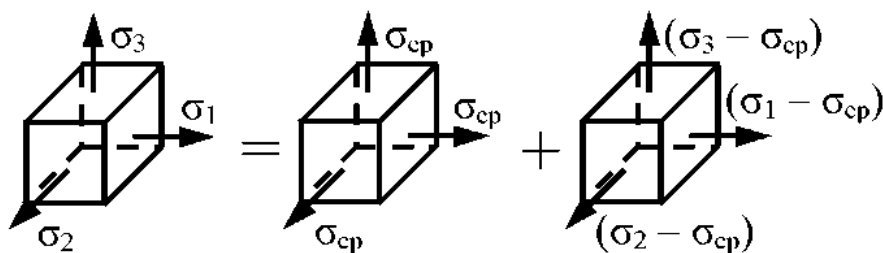


Рис. 9.2. Разложение тензора напряжений на шаровой тензор напряжений и девиатор (девиаторный тензор) напряжений

и девиатор напряжений (рис. 9.2)

$$D_H = \begin{bmatrix} (\sigma_1 - \sigma_{cp}) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2 - \sigma_{cp}) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3 - \sigma_{cp}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_{cp}) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_{cp}) & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_{cp}) \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Аналогичным образом тензор деформаций можно разложить на шаровой тензор деформаций и девиатор деформаций

$$T_d = T_{d00} + D_d = \begin{bmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\varepsilon_1 - \varepsilon_{cp}) & 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon_2 - \varepsilon_{cp}) & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon_3 - \varepsilon_{cp}) \end{bmatrix}, \quad (9.5)$$

где $\varepsilon_{cp} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) / 3 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) / 3$ – средняя деформация.

В расчетах на прочность при пластическом деформировании элементов конструкций используются интенсивности напряжений и деформаций

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \text{ или}$$

$$\sigma_i = \sqrt{0,5[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]};$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 1,5(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \text{ или}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Главные напряжения в задаче по анализу НДС в точке нагруженного бруса (элемента конструкции) находят, решая кубическое уравнение

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0, \quad (9.6)$$

где коэффициенты кубического уравнения (9.6) являются первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния при преобразовании координат:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const};$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const}; \quad (9.7)$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \text{const}.$$

Подстановкой $\sigma = s + \frac{J_1}{3}$ уравнение (9.6) приводится к виду

$$s^3 + ps^2 + q = 0, \quad (9.8)$$

где s – главные напряжения (s_1, s_2, s_3) девиатора напряжений. Коэффициенты уравнения (9.8) соответственно равны

$$p = J_2 - \frac{J_1^2}{3}; \quad q = -\frac{2}{27}J_1^3 + \frac{1}{3}J_1J_2 - J_3. \quad (9.9)$$

Корни уравнения (9.8) выражают через вспомогательный угол φ , характеризующий вид напряженного состояния и определяемый из равенства $\cos\varphi = q / 2r^3$, где параметр $r = \pm 0,5774\sqrt{|p|}$. Знак параметра r должен совпадать со знаком коэффициента q , следовательно, $\cos\varphi > 0$.

Корни уравнения (9.8) определяются по формулам:

$$s_1 = -2r\cos\frac{\varphi}{3}; \quad s_2 = 2r\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right); \quad s_3 = 2r\cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right). \quad (9.10)$$

Проверка правильности вычисления корней уравнения (9.8)

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0. \quad (9.11)$$

С учетом величин (9.10) корни кубического уравнения (9.6) равны

$$\sigma' = s_1 + \frac{J_1}{3}; \quad \sigma'' = s_2 + \frac{J_1}{3}; \quad \sigma''' = s_3 + \frac{J_1}{3}. \quad (9.12)$$

Полученным значениям (9.12) присваиваются обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ из условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Для контроля правильности решения кубического уравнения (9.6) используют стабильность инвариантов J_1, J_2, J_3 :

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \quad J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (9.13)$$

Главные деформации вычисляют по формулам закона Р. Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \mu\sigma_3 - \mu\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3 - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_2}{E}. \quad (9.14)$$

Для определения положений главных площадок вычисляют направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 нормали v_1 к площадке, по которой действует главное напряжение σ_1 . Предварительно находят отношения

$$\frac{l_1}{n_1} = \frac{(\sigma_y - \sigma_1)\tau_{xz} - \tau_{yz} \cdot \tau_{xy}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1)}; \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{(\sigma_x - \sigma_1)\tau_{yz} - \tau_{xy} \cdot \tau_{zx}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1)}. \quad (9.15)$$

Проверка правильности вычисления отношений l_1/n_1 и m_1/n_1 проводится по соотношению

$$\tau_{zx} \frac{l_1}{n_1} + \tau_{yz} \frac{m_1}{n_1} + (\sigma_z - \sigma_1) = 0. \quad (9.16)$$

Из соотношения между квадратами направляющих косинусов

$$(l_1/n_1)^2 + (m_1/n_1)^2 + 1 = (1/n_1)^2 \quad (9.17)$$

находят направляющие косинусы n_1 , l_1 , m_1 нормали v_1

$$n_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{(l_1/n_1)^2 + (m_1/n_1)^2 + 1}}; \quad l_1 = (l_1/n_1) \cdot n_1; \quad m_1 = (m_1/n_1) \cdot n_1. \quad (9.18)$$

Аналогичным образом определяют: направляющие косинусы l_2 , m_2 , n_2 нормали v_2 к площадке, по которой действует главное напряжение σ_2 ; направляющие косинусы l_3 , m_3 , n_3 нормали v_3 к площадке, по которой действует главное напряжение σ_3 .

Из условия взаимной перпендикулярности нормалей к главным площадкам получены три контрольных соотношения:

$$\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0; \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0; \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Оценка прочности элемента конструкции проводится по эквивалентным напряжениям

$$\sigma_{\text{экв}i} = \dots \leq [\sigma], \quad (9.20)$$

где $\sigma_{\text{экв}i}$ – эквивалентное напряжение в опасной точке, вычисленное по i -той теории прочности; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение. Для пластичных и хрупких материалов рекомендуются соответственно четвертая (энергетическая)

$$\sigma_{\text{экв}4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (9.21)$$

и пятая (О. Мора) теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}5} = \sigma_1 - k\sigma_3, \quad (9.22)$$

где $k = \sigma_{\text{вр}} / \sigma_{\text{вс}}$ – коэффициент неравнопрочности при растяжении и сжатии хрупкого материала. Выбор материала проводится с учетом предельных эквивалентных напряжений для пластичного и хрупкого материалов

$$\text{пр } \sigma_{\text{экв}4} = \sigma_{\text{экв}4} \cdot n_T = \sigma_T, \quad \text{пр } \sigma_{\text{экв}5} = \sigma_{\text{экв}5} \cdot \gamma_0 = \sigma_{\text{вр}}, \quad (9.23)$$

где n_T – коэффициент запаса прочности; γ_0 – коэффициент надежности. Фактические значения коэффициента запаса прочности $n_{\text{тф}}$ и коэффициента надежности $\gamma_{\text{оф}}$ рассматриваемого элемента конструкции вычисляются следующим образом

$$n_{\text{тф}} = \sigma_T / \sigma_{\text{экв}4}, \quad \gamma_{\text{оф}} = \sigma_{\text{вр}} / \sigma_{\text{экв}5}. \quad (9.24)$$

При выборе материала фактические значения $n_{\text{тф}}$, $\gamma_{\text{оф}}$ не должны быть меньше, чем на 5 % от рекомендуемых величин n_T , γ_0 . Верхний предел значений $n_{\text{тф}}$, $\gamma_{\text{оф}}$ строго не ограничен и определяется перечнем рекомендуемых материалов.

9.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ «АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ»

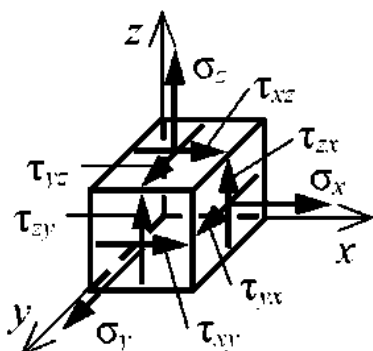


Рис. 9.3. Напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции, заданное по произвольным площадкам

Постановка задачи. В окрестности опасной точки рассматриваемого элемента конструкции мысленно вырезан произвольными плоскостями элементарный кубик (рис. 9.3). Задано: напряженное состояние кубика по произвольным площадкам (табл. 9.1, 9.2); рекомендуемый запас прочности n_T или коэффициент надежности γ_0 , учитывающий надежность по материалу (γ_m), характеру нагружения (γ_f), условиям работы (γ_c); свойства пластичного (σ_T) или хрупкого (σ_{br} , σ_{bc}) материалов.

Необходимо определить: рабочие главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 и деформации ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 ; положение главных площадок; выбрать материал, вычислить фактический запас прочности $n_{Tф}$ или коэффициент надежности $\gamma_{0ф}$.

Табл. 9.1. Исходные данные (сталь: $k=2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu=0,3$)

Цифра № вар-та	1-я цифра № варианта		2-я цифра № варианта		3-я цифра № варианта		4циф. № вар	Материал	
	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	τ_{xy} , МПа	τ_{yz} , МПа	τ_{zx} , МПа		Сталь	σ_T , МПа
1	80	40	30	40	30	20	2,4	18кп	235
2	70	30	20	50	40	35	2,5	20	270
3	90	35	25	45	35	25	2,6	ВСт3	275
4	50	-40	-60	40	30	20	2,7	09Г2С	370
5	100	40	30	50	40	30	2,8	30	380
6	85	35	25	45	-35	-25	2,9	15Г2	440
7	100	40	20	20	30	-40	3,0	40	500
8	120	45	20	-45	-20	30	3,1	45	575
9	130	40	20	20	30	40	3,2	12Г2С	590
0	140	45	25	30	20	35	3,3	50	650

Табл. 9.2. Исходные данные (бетон: $E=0,2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu=0,17$)

Цифра № вар-та	1-я цифра № варианта		2-я цифра № варианта		3-я цифра № варианта		4циф. № вар	Материалы	
	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	τ_{xy} , МПа	τ_{yz} , МПа	τ_{zx} , МПа		γ_0	$\sigma_{вр}$, МПа
1	0,250	-1,00	-2,50	0,100	0,300	0,75	3,0	1,0	11
2	0,400	-1,50	-4,00	0,150	-0,600	1,20	2,9	1,3	15
3	0,500	-2,00	-5,00	0,200	0,500	1,50	2,8	1,5	19
4	0,600	-3,00	-6,00	0,250	0,800	1,80	2,7	2,0	23
5	0,700	-4,00	-9,00	0,300	1,20	2,50	2,6	2,5	27
6	1,00	-5,00	-10,0	0,400	1,50	3,00	2,5	3,0	31
7	1,20	-6,00	-12,0	0,450	1,80	3,50	2,4	3,5	36
8	1,40	-7,00	-15,0	0,500	2,00	4,00	2,3	4,0	40
9	1,60	-8,00	-17,0	0,600	2,40	4,50	2,2	4,5	44
0	1,80	-9,00	-19,0	0,700	2,50	5,00	2,1	5,0	48

9.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ ИЗ ПЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА»

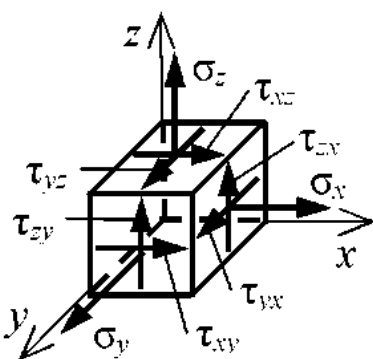


Рис. 9.4. Напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции, заданное по произвольным площадкам

Постановка задачи. В окрестности опасной точки рассматриваемого элемента конструкции мысленно вырезан произвольными плоскостями элементарный кубик (рис. 9.4). **Задано:** напряженное состояние кубика по произвольным площадкам $\sigma_x = -25$ МПа, $\sigma_y = 35$ МПа, $\sigma_z = 50$ МПа, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -40$ МПа, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = -30$ МПа, $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 50$ МПа; рекомендуемый запас прочности $n_T = 3,0$; свойства сталей (табл. 9.1).

Необходимо определить: рабочие главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и деформации $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$; положения главных площадок; выбрать материал; вычислить фактический запас прочности $n_{Тф}$.

РЕШЕНИЕ

1. Определение рабочих главных напряжений и деформаций.

Главные напряжения в задаче по анализу напряженного состояния в опасной точке бруса находим, решая исходное уравнение

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0,$$

где коэффициенты кубического уравнения являются первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния при преобразовании координат:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -25 + 35 + 50 = 60 \text{ МПа};$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -25 \cdot 35 + 35 \cdot 50 + 50 \cdot (-25) - (-40)^2 - (-30)^2 - 50^2 = -5375(\text{МПа})^2; \quad (9.25)$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = (-25) \cdot 35 \cdot 50 + 2 \cdot (-40) \cdot (-30) \cdot 50 - (-25) \cdot (-30)^2 - 35 \cdot 50^2 - 50 \cdot (-40)^2 = -68750(\text{МПа})^3.$$

Подстановкой $\sigma = s + \frac{J_1}{3}$ кубическое уравнение приводится к виду

$$s^3 + ps^2 + q = 0,$$

где s – главные напряжения (s_1, s_2, s_3) девиатора напряжений. Коэффициенты последнего уравнения соответственно равны

$$p = J_2 - \frac{J_1^2}{3} = -5375 - \frac{60^2}{3} = -6575(\text{МПа})^2;$$

$$q = -\frac{2}{27}J_1^3 + \frac{1}{3}J_1J_2 - J_3 = \quad (9.26)$$

$$= -\frac{2}{27}60^3 + \frac{1}{3}60 \cdot (-5375) - (-68750) = -54750(\text{МПа})^3.$$

Корни последнего кубического уравнения выражаем через вспомогательный угол φ , характеризующий вид напряженного состояния и определяемый следующим образом

$$\cos\varphi = \frac{q}{2r^3} = \frac{-54750}{2 \cdot (-46,85)^3} = 0,265, \quad \varphi = 74,67^\circ,$$

где параметр $r = \pm 0,5774\sqrt{|p|} = -0,5774\sqrt{6575} = -46,85$ МПа. Знак параметра r должен совпадать со знаком коэффициента q .

Корни последнего уравнения определяем по формулам:

$$s_1 = -2r \cos \frac{\varphi}{3} = -2 \cdot (-46,85) \cos \left(\frac{74,67^\circ}{3} \right) = 85,00 \text{ МПа};$$

$$s_2 = 2r \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right) = 2 \cdot (-46,85) \cos \left(60^\circ - \frac{74,67^\circ}{3} \right) = -76,50 \text{ МПа}; \quad (9.27)$$

$$s_3 = 2r \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right) = 2 \cdot (-46,85) \cos \left(60^\circ + \frac{74,67^\circ}{3} \right) = -8,40 \text{ МПа}.$$

Проверяем правильность вычисления корней последнего уравнения

$$s_1 + s_2 + s_3 = 85,00 - 76,50 - 8,40 = 0,1 \approx 0. \quad (9.28)$$

С учетом величин (9.27) корни исходного уравнения равны

$$\sigma' = s_1 + \frac{J_1}{3} = 85,00 + \frac{60}{3} = 105,00 \text{ МПа};$$

$$\sigma'' = s_2 + \frac{J_1}{3} = -76,50 + \frac{60}{3} = -56,50 \text{ МПа}; \quad (9.29)$$

$$\sigma''' = s_3 + \frac{J_1}{3} = -8,40 + \frac{60}{3} = 11,60 \text{ МПа}.$$

Полученным значениям корней присваиваем обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ из условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$: $\sigma_1 = \sigma' = 105 \text{ МПа}$; $\sigma_2 = \sigma''' = 11,60 \text{ МПа}$; $\sigma_3 = \sigma'' = -56,50 \text{ МПа}$. Для контроля правильности решения кубического уравнения используем стабильность инвариантов J_1, J_2, J_3 :

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 105,00 + 11,60 - 56,50 = 60,1 \approx 60 \text{ МПа};$$

$$J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = 105,00 \cdot 11,60 + 11,60 \cdot (-56,50) + (-56,50) \cdot 105,00 = -5370 \approx -5375 (\text{МПа})^2; \quad (9.30)$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 105,00 \cdot 11,60 \cdot (-56,50) = -68817 \approx -68750 (\text{МПа})^3,$$

что совпадает с ранее полученными результатами (9.25). Следовательно, главные напряжения определены правильно.

Вычисляем главные деформации по обобщенному закону Р. Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \mu \sigma_2 - \mu \sigma_3}{E} = \frac{105,00 - 0,3 \cdot 11,60 - 0,3 \cdot (-56,50)}{2 \cdot 10^5} = 5,92 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \mu \sigma_3 - \mu \sigma_1}{E} = \frac{11,60 - 0,3 \cdot (-56,50) - 0,3 \cdot 105,00}{2 \cdot 10^5} = -1,47 \cdot 10^{-5}; \quad (9.31)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3 - \mu \sigma_1 - \mu \sigma_2}{E} = \frac{-56,50 - 0,3 \cdot 105,00 - 0,3 \cdot 11,60}{2 \cdot 10^5} = -4,57 \cdot 10^{-4}.$$

2. Определение положений главных площадок.

Вычисляем направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 нормали v_1 к площадке, по которой действует главное напряжение σ_1 . Предварительно находим отношения

$$\frac{l_1}{n_1} = \frac{(\sigma_y - \sigma_1)\tau_{xz} - \tau_{yz} \cdot \tau_{xy}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1)} = \frac{(35 - 105) \cdot 50 - (-30) \cdot (-40)}{(-40)^2 - (-25 - 105) \cdot (35 - 105)} = 0,627;$$

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{(\sigma_x - \sigma_1)\tau_{yz} - \tau_{xy} \cdot \tau_{zx}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1)} = \frac{(-25 - 105) \cdot (-30) - (-40) \cdot 50}{(-40)^2 - (-25 - 105) \cdot (35 - 105)} = 0,787.$$

Проверяем правильность вычисления отношений l_1/n_1 и m_1/n_1

$$\tau_{zx} \frac{l_1}{n_1} + \tau_{yz} \frac{m_1}{n_1} + (\sigma_z - \sigma_1) = 50 \cdot 0,627 + (-30) \cdot (-0,787) + (50 - 105) \approx 0.$$

Из формулы $(l_1/n_1)^2 + (m_1/n_1)^2 + 1 = (1/n_1)^2$ находим направляющие косинусы n_1, l_1, m_1 нормали v_1

$$n_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{(l_1/n_1)^2 + (m_1/n_1)^2 + 1}} = \pm \sqrt{\frac{1}{0,627^2 + (-0,787)^2 + 1}} = \pm 0,705;$$

$$l_1 = \pm 0,705 \cdot 0,627 = \pm 0,441; \quad m_1 = \pm 0,705 \cdot (-0,787) = \mp 0,554.$$

Аналогичным образом определяем: направляющие косинусы l_2, m_2, n_2 нормали v_2 к площадке, по которой действует главное напряжение σ_2 . Для этого в приведенных выше формулах для l_1, m_1, n_1 вместо индекса 1 используются индексы 2 или 3. С учетом этого получаем: $l_2 = \mp 0,00634$; $m_2 = \pm 0,785$; $n_2 = \pm 0,622$. Направляющие косинусы l_3, m_3, n_3 нормали v_3 к площадке, по которой действует главное напряжение σ_3 , равны $l_3 = \mp 0,900$; $m_3 = \mp 0,282$; $n_3 = \pm 0,342$.

Проверяем правильность определения направляющих косинусов

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,441 \cdot (-0,00634) + (-0,554) \cdot 0,785 + 0,705 \cdot 0,622 \approx 0;$$

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0,441 \cdot (-0,900) + (-0,554) \cdot (-0,282) + 0,705 \cdot 0,342 \approx 0;$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = (-0,00634) \cdot (-0,900) + 0,785 \cdot (-0,282) + 0,622 \cdot 0,342 \approx 0.$$

С учетом значений направляющих косинусов строим элементарный кубик, характеризующий напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции, заданное по главным площадкам (рис. 9.5).

3. Выбор материала и оценка прочности элемента конструкции.

Вычисляем рабочее эквивалентное напряжение по 4-й теории прочности, так как в качестве материала выбирается пластичный материал (сталь)

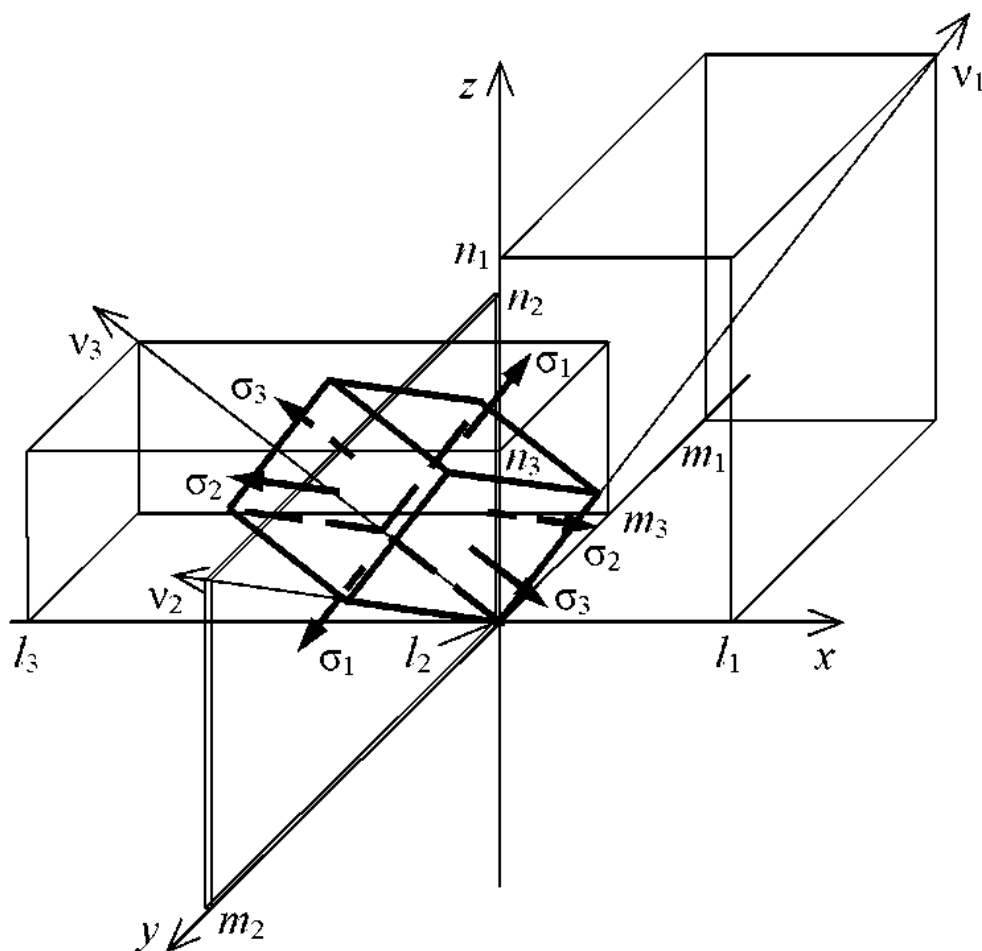


Рис. 9.5. Напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции, представленное по главным площадкам

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв4}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(105 - 11,6)^2 + (11,6 - (-56,5))^2 + (-56,5 - 105)^2} = 140 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Вычисляем предельное эквивалентное напряжение

$$\text{пр } \sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\text{экв4}} \cdot n_T = 140 \cdot 3,0 = 420 \text{ МПа}.$$

С учетом того, что $\text{пр } \sigma_{\text{экв}} = \sigma_T$, в качестве материала из таблицы 9.1 выбираем сталь 15Г2 ($\sigma_T = 440$ МПа).

4. Вычисляем фактический коэффициент запаса прочности рассматриваемого элемента конструкции

$$n_{\text{тф}} = \sigma_T / \sigma_{\text{экв4}} = 440 / 140 = 3,14.$$

9.4. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА
«АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ
ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ
ИЗ ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА»

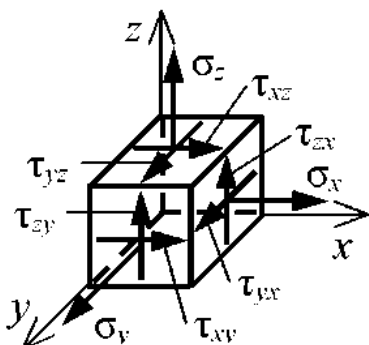


Рис. 9.6. Напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции, заданное по произвольным площадкам

Постановка задачи. В окрестности опасной точки рассматриваемого элемента конструкции мысленно вырезан произвольными плоскостями элементарный кубик (рис. 9.6). **Задано:** напряженное состояние кубика по произвольным площадкам $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -2$ МПа, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -1$ МПа, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 1,6$ МПа, $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 2$ МПа; рекомендуемый коэффициент надежности $\gamma_0 = 2,5$; свойства бруса (табл. 9.2).

Необходимо определить: рабочие главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и деформации $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$; положения главных площадок; выбрать материал; вычислить фактический коэффициент надежности $\gamma_{0ф}$.

РЕШЕНИЕ

1. Определение рабочих главных напряжений и деформаций.

Главные напряжения в задаче по анализу напряженного состояния в опасной точке бруса находим, решая исходное уравнение

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0,$$

где коэффициенты этого уравнения являются первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния при преобразовании координат:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -2 - 2 - 2 = -6 \text{ МПа}; \\ J_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= (-2) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) - (-1)^2 - 1,6^2 - 2^2 = 4,44(\text{МПа})^2; \\ J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \quad (9.32) \\ &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) \cdot 1,6 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1,6)^2 - (-2) \cdot 2^2 - \\ &\quad - (-2) \cdot (-1)^2 = 0,720(\text{МПа})^3. \end{aligned}$$

Подстановкой $\sigma = s + \frac{J_1}{3}$ исходное уравнение приводится к виду

$$s^3 + ps^2 + q = 0,$$

где s – главные напряжения (s_1, s_2, s_3) девиатора напряжений. Коэффициенты этого уравнения соответственно равны

$$p = J_2 - \frac{J_1^2}{3} = 4,44 - \frac{(-6)^2}{3} = -7,56(\text{МПа})^2; \quad (9.33)$$

$$q = -\frac{2}{27}J_1^3 + \frac{1}{3}J_1J_2 - J_3 = -\frac{2}{27}(-6)^3 + \frac{1}{3}(-6)4,44 - 0,720 = 6,40(\text{МПа})^3.$$

Корни последнего уравнения выразим через вспомогательный угол φ , характеризующий вид напряженного состояния и определяемый следующим образом

$$\cos\varphi = \frac{q}{2r^3} = \frac{6,40}{2 \cdot 1,588^3} = 0,799, \quad \varphi = 36,9^\circ,$$

где параметр $r = \pm 0,5774\sqrt{|p|} = -0,5774\sqrt{7,56} = 1,588$ МПа. Знак параметра r должен совпадать со знаком коэффициента q .

Корни последнего уравнения определяем по формулам

$$\begin{aligned} s_1 &= -2r\cos\frac{\varphi}{3} = -2 \cdot 1,588 \cdot \cos\left(\frac{36,9^\circ}{3}\right) = -3,103 \text{ МПа}; \\ s_2 &= 2r\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) = 2 \cdot 1,588 \cdot \cos\left(60^\circ - \frac{36,9^\circ}{3}\right) = 2,137 \text{ МПа}; \\ s_3 &= 2r\cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) = 2 \cdot 1,588 \cdot \cos\left(60^\circ + \frac{36,9^\circ}{3}\right) = 0,966 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Проверяем правильность вычисления корней последнего уравнения

$$s_1 + s_2 + s_3 = -3,103 + 2,137 + 0,966 = 0. \quad (9.35)$$

С учетом величин s_1, s_2, s_3 корни исходного уравнения равны

$$\begin{aligned} \sigma' &= s_1 + \frac{J_1}{3} = -3,103 + \frac{-6}{3} = -5,103 \text{ МПа}; \\ \sigma'' &= s_2 + \frac{J_1}{3} = 2,137 + \frac{-6}{3} = 0,137 \text{ МПа}; \\ \sigma''' &= s_3 + \frac{J_1}{3} = 0,966 + \frac{-6}{3} = -1,034 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Полученным значениям корней присваиваем обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ из условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$: $\sigma_1 = \sigma'' = 0,137$ МПа; $\sigma_2 = \sigma''' = -1,034$ МПа; $\sigma_3 = \sigma' = -5,103$ МПа. Для контроля правильности решения исходного кубического уравнения используем стабильность инвариантов J_1, J_2, J_3 :

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0,137 - 1,034 - 5,103 = -6 \text{ МПа};$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 0,137 \cdot (-1,034) + (-1,034) \cdot (-5,103) + (-5,103) \cdot 0,137 = 4,44(\text{МПа})^2; \quad (9.37)$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0,137 \cdot (-1,034) \cdot (-5,103) = 0,723 \approx 0,720(\text{МПа})^3;$$

что совпадает с ранее полученным результатом (9.32). Следовательно, главные напряжения определены правильно.

Вычисляем главные деформации по обобщенному закону Р. Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3}{E} = \frac{0,137 - 0,17 \cdot (-1,034) - 0,17 \cdot (-5,103)}{0,2 \cdot 10^5} = 5,90 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \mu\sigma_3 - \mu\sigma_1}{E} = \frac{-1,034 - 0,17 \cdot (-5,103) - 0,17 \cdot 0,137}{0,2 \cdot 10^5} = -9,49 \cdot 10^{-6};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3 - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_2}{E} = \frac{-5,103 - 0,17 \cdot 0,137 - 0,17 \cdot (-1,034)}{2 \cdot 10^5} = -2,47 \cdot 10^{-4}.$$

2. Определение положений главных площадок.

Вычисляем направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 нормали v_1 к площадке, по которой действует главное напряжение σ_1 . Предварительно находим отношения

$$\frac{l_1}{n_1} = \frac{(\sigma_y - \sigma_1)\tau_{xz} - \tau_{yz} \cdot \tau_{xy}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1)} = \frac{(-2 - 0,137) \cdot 2 - 1,6 \cdot (-1)}{(-1)^2 - (-2 - 0,137) \cdot (-2 - 0,137)} = 0,750;$$

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{(\sigma_x - \sigma_1)\tau_{yz} - \tau_{xy} \cdot \tau_{zx}}{\tau_{xy}^2 - (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1)} = \frac{(-2 - 0,137) \cdot 1,6 - (-1) \cdot 2}{(-1)^2 - (-2 - 0,137) \cdot (-2 - 0,137)} = 0,400.$$

Проверяем правильность вычисления отношений l_1/n_1 и m_1/n_1

$$\tau_{zx} \frac{l_1}{n_1} + \tau_{yz} \frac{m_1}{n_1} + (\sigma_z - \sigma_1) = 2 \cdot 0,750 + 1,6 \cdot 0,400 + (-2 - 0,137) = 0,003 \approx 0.$$

Из формулы $(l_1/n_1)^2 + (m_1/n_1)^2 + 1 = (1/n_1)^2$ находим направляющие косинусы n_1, l_1, m_1 нормали v_1

$$n_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{(l_1/n_1)^2 + (m_1/n_1)^2 + 1}} = \pm \sqrt{\frac{1}{0,750^2 + 0,400^2 + 1}} = \pm 0,762;$$

$$l_1 = \pm 0,750 \cdot 0,762 = \pm 0,571; \quad m_1 = \pm 0,400 \cdot 0,762 = \pm 0,305.$$

Аналогичным образом определяем направляющие косинусы l_2, m_2, n_2 нормали v_2 к площадке, по которой действует главное напряжение σ_2 . Для этого в приведенных выше формулах для l_1, m_1, n_1 вместо индекса 1 используются индексы 2 или 3. В результате получаем: $l_2 = \mp 0,590$; $m_2 = \pm 0,800$; $n_2 = \pm 0,120$. Направляющие косинусы l_3, m_3, n_3 нормали v_3 к площадке, по которой действует главное напряжение σ_3 , равны $l_3 = \mp 0,570$; $m_3 = \mp 0,520$; $n_3 = \pm 0,630$.

Проверка правильности определения направляющих косинусов

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,570 \cdot (-0,590) + 0,305 \cdot 0,800 + 0,762 \cdot 0,120 = 0;$$

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = (-0,590)(-0,570) + 0,800 \cdot (-0,520) + 0,120 \cdot 0,630 = 0;$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = (-0,58)0,57 + (-0,52)0,305 + 0,63 \cdot 0,762 = 0,007 \approx 0.$$

С учетом значений направляющих косинусов строим элементарный кубик, характеризующий напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции, заданное по главным площадкам (рис. 9.7).

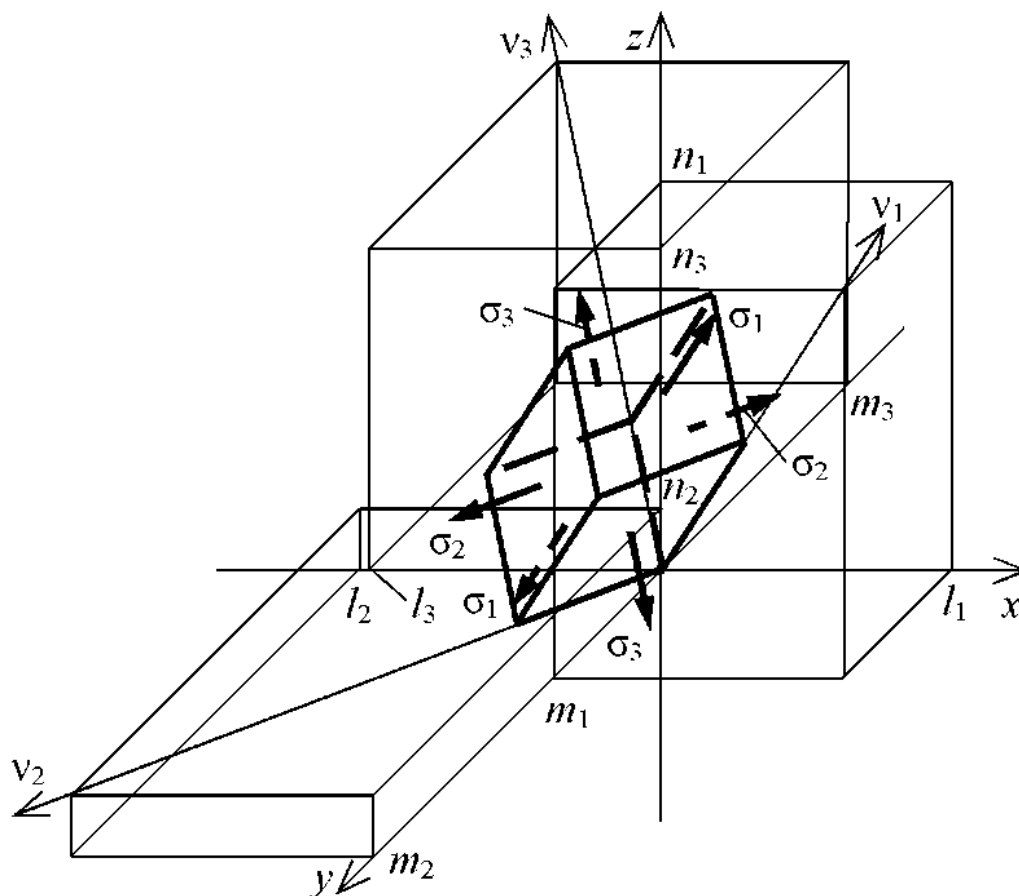


Рис. 9.7. Напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции, заданное по главным площадкам

3. Выбор материала и оценка прочности элемента конструкции.

Вычисляем рабочее эквивалентное напряжение по 5-й теории прочности, так как в качестве материала выбирается хрупкий материал (бетон)

$$\sigma_{\text{эKB5}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = 0,137 - 0,09(-5,103) = 0,596 \text{ МПа},$$

где $k = \sigma_{\text{вр}} / \sigma_{\text{вс}}$ – для бетона предварительно принимаем равным 0,09.

Вычисляем предельное эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{пр экв}} = \sigma_{\text{эKB5}} \cdot \gamma_0 = 0,596 \cdot 2,5 = 1,49 \text{ МПа}.$$

С учетом того, что $\sigma_{\text{пр экв}} = \sigma_{\text{вр}}$, в качестве материала из таблицы 9.2 выбираем бетон ($\sigma_{\text{вр}} = 1,50 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{вс}} = 19 \text{ МПа}$).

4. Вычисляем фактический коэффициент надежности рассматриваемого элемента конструкции

$$\gamma_{0\text{ф}} = \sigma_{\text{вр}} / \sigma_{\text{эKB5}} = 1,50 / 0,596 = 2,52 .$$

10. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ

Элементы конструкций в виде пластин широко применяются в различных областях техники – строительстве, машиностроении, авиации, судостроении и т.д. Это обусловлено их легкостью и рациональностью форм, высокой несущей способностью, хорошей технологичностью и экономичностью изготовления.

Пластиной называется очерченный плоскостями элемент конструкции, у которого один из размеров (толщина) значительно (на порядок и более) меньше других габаритных размеров. Плоскость, которая делит толщину пластины пополам, называется срединной плоскостью. При нагружении пластины поперечной нагрузкой срединная плоскость прогибается и превращается в срединную поверхность. Пластины разделяют на толстые, тонкие и гибкие. Толстыми пластинами (плитами) называются такие, у которых отношение $h/a > 0,2 \dots 0,3$, где h , a – толщина и меньший габаритный размер пластины. К толстым пластинам относятся, например, фундаментные плиты. Тонкие пластины такие, у которых отношение $h/a \approx 0,01 \dots 0,1$ и максимальный прогиб $w_{\max} \leq 0,25h$ (днища резервуаров и сосудов давления, плиты и панели зданий и сооружений). К гибким относятся такие пластины, у которых максимальный прогиб $w_{\max} > 0,25h$ и отношение $h/a < 0,01$ (элементы обшивки наземных транспортных средств, самолетов, ракет, диафрагмы приборов, насосов).

10.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ

Методы расчетов на прочность и жесткость тонких пластин основаны на следующих допущениях. Любая прямая, перпендикулярная к срединной плоскости до деформации, остается после деформации прямой, нормальной к срединной поверхности. Напряжениями, действующими перпендикулярно к срединной поверхности, можно пренебречь. Если поперечная нагрузка, действующая на круглую пластину, распределена симметрично относительно оси z (рис. 10.1), то прогибы w , углы поворота w' , распределенные изгибающие моменты M_r и M_{θ} , распределенная поперечная сила Q_r , нормальные σ_r , σ_{θ} и касательные τ_{zr} напряжения во всех точках, равноудаленных от центра пластины, будут одинаковыми и зависящими только от координаты r (рис. 10.2).

В окружных сечениях пластины действуют: распределенный по длине дуги изгибающий момент M_r (Нм/м), распределенная по длине дуги поперечная сила Q_r (Н/м), нормальные σ_r и касательные τ_{zr} напряжения, а в

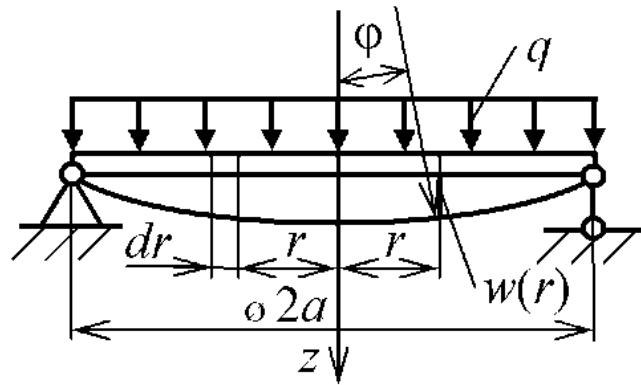


Рис. 10.1. Характер деформирования срединной поверхности пластины

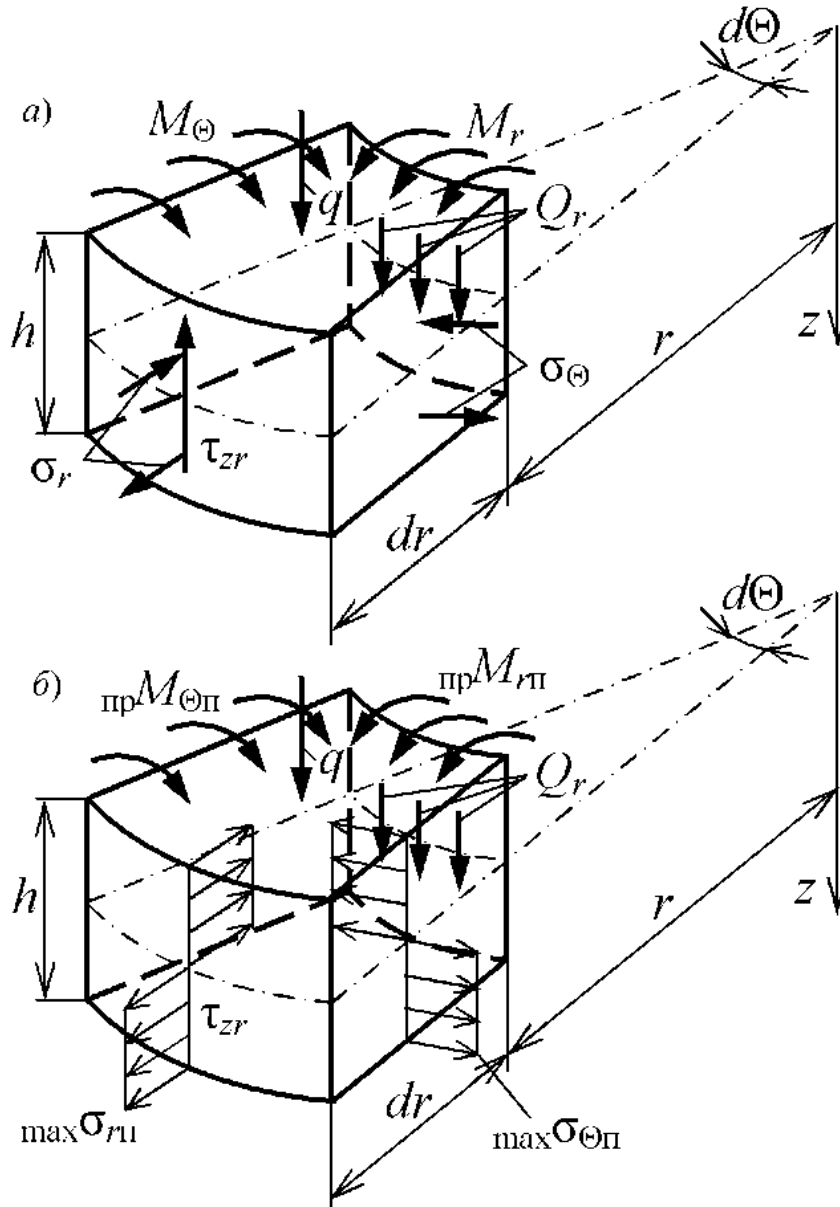


Рис. 10.2. Внутренние силовые факторы и напряженное состояние опасного элемента круглой пластины при упругом (а) и предельном пластическом (б) деформировании

радиальных сечениях – распределенный по радиусу изгибающий момент M_{Θ} (Нм/м) и нормальные напряжения σ_{Θ} . Положительные направления внутренних силовых факторов и напряженное состояние для бесконечно малого (линейного) элемента круглой пластины показаны на рис. 10.2.

При осесимметричном изгибе дифференциальное уравнение срединной поверхности пластины имеет вид

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D}, \quad (10.1)$$

где $q(r)$ – закон изменения распределенной нагрузки; $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость сечения пластины; E , μ – модуль упругости материала при растяжении (сжатии), коэффициент Пуассона. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (10.1) можно представить

$$w(r) = w_0(r) + w_1(r). \quad (10.2)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$w_0(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r, \quad (10.3)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные, определяемые из соответствующих граничных условий для каждой конкретной задачи. Частное решение $w_1(r)$ для нагрузки $q(r)$ можно представить таким образом

$$w_1(r) = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r r \left[\frac{1}{r} \left(\int_0^r q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr. \quad (10.4)$$

Если пластина нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$, то из (10.4) получаем

$$w_1(r) = qr^4 / 64D. \quad (10.5)$$

Если уравнение срединной поверхности пластины $w(r)$ получено, то выражения для распределенных изгибающих моментов в окружном M_r и радиальном M_{Θ} сечениях находятся по формулам

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_{\Theta} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (10.6)$$

а распределенная поперечная сила в окружном сечении радиуса r равна

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \quad (10.7)$$

Нормальные напряжения в произвольном и наиболее удаленном от срединной поверхности слоях окружного и радиального сечений определяются по формулам

$$\sigma_r = \frac{12M_r z}{h^3}, \quad \max \sigma_r = \frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_\Theta = \frac{12M_\Theta z}{h^3}, \quad \max \sigma_\Theta = \frac{6M_\Theta}{h^2}. \quad (10.8)$$

Наибольшие касательные напряжения, действующие в точках срединной поверхности окружных сечений, вычисляются по известной формуле Д.И. Журавского

$$\max \tau_r = \frac{3 Q_r}{2 h}. \quad (10.9)$$

Материал пластины работает в условиях плоского напряженного состояния. Для опасной точки пластины по формулам (10.8) находим σ_1 и σ_2 (или σ_3), помня неравенство $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Условие прочности пластины по эквивалентным напряжениям имеет вид

$$\max \sigma_{\text{экв}4} = \dots \leq [\sigma]. \quad (10.10)$$

Если пластина изготовлена из пластичного материала, то в соответствии с четвертой (энергетической) теорией прочности имеем

$$\max \sigma_{\text{экв}4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma], \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (10.11)$$

где σ_T – предел текучести; n_T – коэффициент запаса прочности по пределу текучести. Для пластины из хрупкого материала рекомендуется пятая (О. Мора) теория

$$\max \sigma_{\text{экв}5} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_p, \quad [\sigma]_p = \sigma_{\text{вр}} / \gamma_0, \quad (10.12)$$

где $k = \sigma_{\text{вр}} / \sigma_{\text{вс}}$ – коэффициент неравнопрочности хрупкого материала при растяжении и сжатии; $\sigma_{\text{вр}}$, $\sigma_{\text{вс}}$ – пределы прочности при растяжении и сжатии; γ_0 – коэффициент надежности. В ряде случаев пластина должна быть не только прочной, но и достаточно жесткой. Условие жесткости пластины можно записать

$$w_{\text{max}} = \dots \leq [w], \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} w_{\text{max}} &= \left| \max K_{wq} \right| \frac{qa^4}{D}, & w_{\text{max}} &= \left| \max K_{wp} \right| \frac{pa^3}{D}, \\ w_{\text{max}} &= \left| \max K_{wm} \right| \frac{ma^2}{D}, & w_{\text{max}} &= \left| \max K_{wP} \right| \frac{Pa^2}{D}, \end{aligned} \quad (10.14)$$

где $\max K_{wq}$, $\max K_{wp}$, $\max K_{wm}$, $\max K_{wP}$ – коэффициенты, определяемые из эпюры прогибов w при действии на пластину распределенной по площади нагрузки q (Н/м²), распределенной по длине силы p (Н/м), распределенного по длине момента m (Нм/м) или сосредоточенной силы P (Н); a – радиус пластины; $[w]$ – допускаемый прогиб, зависящий от назначения пластины. Для тонких пластин в ряде случаев допускаемый прогиб $[w] = (0,001 \dots 0,002)a$.

При оценке работоспособности пластин характерны три варианта. Первый вариант: если размеры пластины известны, то из условий прочности и жесткости определяются два значения допускаемых нагрузок $[q]_{\sigma}$ и $[q]_{\eta}$ или $[p]_{\sigma}$ и $[p]_{\eta}$, $[m]_{\sigma}$ и $[m]_{\eta}$, $[P]_{\sigma}$ и $[P]_{\eta}$. Окончательно выбирается меньшее значение $[q]_{\min}$ или $[p]_{\min}$, $[m]_{\min}$, $[P]_{\min}$. Второй вариант: если действующие на пластину нагрузки известны, то из условий прочности и жесткости вычисляется толщина пластины $[h]_{\sigma}$ и $[h]_{\eta}$. Окончательно выбирается большее значение $[h]_{\max}$. Третий вариант: если известны размеры пластины и действующие нагрузки, то выполняются проверочные расчеты на прочность и жесткость и дается заключение о работоспособности пластины.

Наиболее распространенным при оценке прочности пластин является рассмотренный выше метод расчета на прочность по допускаемым напряжениям (упругое деформирование). Для пластин, жесткость которых не нормируется, более предпочтительным может оказаться метод расчета на прочность по предельным (разрушающим) нагрузкам с учетом пластического деформирования. Предельное состояние пластины при упругом деформировании наступает тогда, когда интенсивность напряжений в опасной точке достигает предела текучести материала. При этом пластичный материал еще имеет резерв прочности, так как его разрушение происходит при более высоком напряжении. Резерв прочности имеет также и пластина, поскольку она способна воспринимать увеличение нагрузки за счет распространения пластических деформаций по опасному сечению. Предельное состояние пластины наступает тогда, когда пластические деформации распространились на все опасное сечение. После этого дальнейшее увеличение нагрузки невозможно, так как резерв несущей способности пластины полностью исчерпан.

Для количественной оценки предельного состояния элементов конструкций при пластическом деформировании наиболее часто используют модель диаграммы растяжения идеального упругопластического материала без деформационного упрочнения, когда $\sigma = E\varepsilon$ при $\varepsilon \leq \varepsilon_{\text{тс}}$ и $\sigma \equiv \sigma_{\text{тс}}$ при $\varepsilon > \varepsilon_{\text{тс}}$, где $\varepsilon_{\text{тс}} = \sigma_{\text{тс}}/E$ – деформация, соответствующая схематизированному пределу текучести $\sigma_{\text{тс}}$. Предельные значения изгибающих моментов в окружном и радиальном опасных сечениях при упругом деформировании с учетом формул (10.8) получаем (рис. 10.2)

$$\text{пр } M_r = \max \sigma_{r\text{пр}} h^2/6, \quad \text{пр } M_{\Theta} = \max \sigma_{\Theta\text{пр}} h^2/6.$$

где $\max \sigma_{r\text{пр}}$, $\max \sigma_{\Theta\text{пр}}$ – предельные напряжения в окружном и радиальном опасных сечениях, интенсивность которых в соответствии с деформационной теорией пластичности А.А. Ильюшина равна

$$\sigma_{r\text{пр}} = \sqrt{\max \sigma_{r\text{пр}}^2 + \max \sigma_{\Theta\text{пр}}^2} = \max \sigma_{r\text{пр}} \cdot \max \sigma_{\Theta\text{пр}} = \sigma_{\text{тс}}.$$

В соответствии с теорией пластичности А.А. Ильюшина при предельном пластическом деформировании, когда пластические деформации распространились на всю высоту опасного объема пластины, предельные значения изгибающих моментов в окружном и радиальном опасных сечениях можно представить

$$\begin{aligned} \text{пр } M_{r\text{п}} &= 2 \int_0^{h/2} \max \sigma_{r\text{пр}} z dz = \max \sigma_{r\text{пр}} h^2/4; \\ \text{пр } M_{\Theta\text{п}} &= 2 \int_0^{h/2} \max \sigma_{\Theta\text{пр}} z dz = \max \sigma_{\Theta\text{пр}} h^2/4. \end{aligned}$$

Допускаемые величины аналогичных изгибающих моментов при расчетах по методам допускаемых напряжений (упругое деформирование) и предельных (разрушающих) нагрузок с коэффициентом запаса прочности n_T можно представить

$$[M_r] = \frac{\text{пр } M_r}{n_T}, \quad [M_r]_{\text{п}} = \frac{\text{пр } M_{r\text{п}}}{n_T}; \quad [M_{\Theta}] = \frac{\text{пр } M_{\Theta}}{n_T}, \quad [M_{\Theta}]_{\text{п}} = \frac{\text{пр } M_{\Theta\text{п}}}{n_T},$$

а их отношения равны: $[M_r]_{\text{п}}/[M_r] = 1,5$; $[M_{\Theta}]_{\text{п}}/[M_{\Theta}] = 1,5$.

Видно, что расчет круглых пластин с учетом пластических деформаций повышает допускаемую нагрузку в 1.5 раза по сравнению с результатами расчета по методу допускаемых напряжений (упругое деформирование).

10.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ»

Задано: размеры и механические характеристики материала круглой пластины; коэффициент запаса прочности n_T или коэффициент надежности γ_0 (табл. 10.1, 10.2); расчетная схема и уравнение изогнутой срединной поверхности пластины (табл. 10.3); допускаемый прогиб $[\omega] = (0,001 \dots 0,002)\alpha$.

Требуется: построить эпюры распределенных изгибающих моментов в окружном M_r и радиальном M_{Θ} сечениях в долях qa^2 или pa , m , P ; построить эпюры прогибов $\omega(r)$ в долях qa^4/D или pa^3/D , ma^2/D , Pa^2/D ; определить допускаемую нагрузку $[q]$ (Н/м²) или $[p]$ (Н/м), $[m]$ (Нм/м), $[P]$ (Н), удовлетворяющую условиям прочности и жесткости пластины.

Табл. 10.1. Исходные данные для РПР (сталь; $E=2 \cdot 10^5$ МПа)

Цифра № вар-та	1-я цифра № вар-та		2-я цифра № вар-та			3-я цифра № вар-та	4-я цифра № вар-та
	a , м	h , м	Сталь	μ	σ_T , МПа	n_T	№ расчет- ной схемы
1	0,550	0,020	18кп	0,340	235	2,40	10
2	0,600	0,022	20	0,330	270	2,50	9
3	0,650	0,024	ВСт3	0,320	275	2,60	8
4	0,700	0,026	09Г2С	0,310	370	2,70	7
5	0,750	0,028	30	0,300	380	2,80	6
6	0,800	0,030	15Г2	0,290	440	2,90	5
7	0,850	0,032	40	0,280	500	3,00	4
8	0,900	0,034	45	0,270	575	3,10	3
9	0,950	0,036	12Г2С	0,260	590	3,20	2
0	1,00	0,038	50	0,250	650	3,30	1

Табл. 10.2. Исходные данные для РПР (бетон)

Цифра № вар-та	1-я цифра № вар-та		2-я цифра № вар-та				3-я цифра № вар-та	4-я цифра № вар-та
	a , м	h , м	E_c , МПа	μ	$\sigma_{вр}$, МПа	$\sigma_{нс}$, МПа	γ_0	№ расчет- ной схемы
1	2,00	0,160	$0,150 \cdot 10^5$	0,150	1,00	11,0	3,00	10
2	2,10	0,170	$0,160 \cdot 10^5$	0,155	1,30	15,0	2,90	9
3	2,20	0,180	$0,170 \cdot 10^5$	0,160	1,50	19,0	2,80	8
4	2,30	0,190	$0,180 \cdot 10^5$	0,165	2,00	23,0	2,70	7
5	2,40	0,200	$0,190 \cdot 10^5$	0,170	2,50	27,0	2,60	6
6	2,50	0,210	$0,200 \cdot 10^5$	0,175	3,00	31,0	2,50	5
7	2,60	0,220	$0,210 \cdot 10^5$	0,180	3,50	36,0	2,40	4
8	2,70	0,230	$0,220 \cdot 10^5$	0,185	4,00	40,0	2,30	3
9	2,80	0,240	$0,230 \cdot 10^5$	0,190	4,50	44,0	2,20	2
0	2,90	0,250	$0,240 \cdot 10^5$	0,195	5,00	48,0	2,10	1

Табл. 10.3. Расчетные схемы и уравнения срединной поверхности пластин

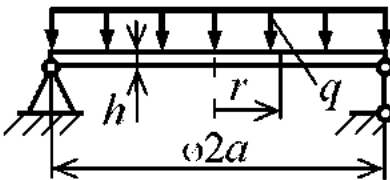
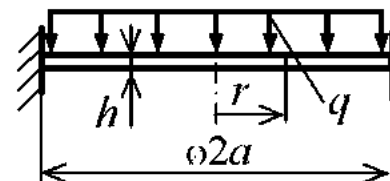
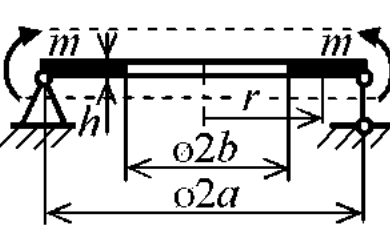
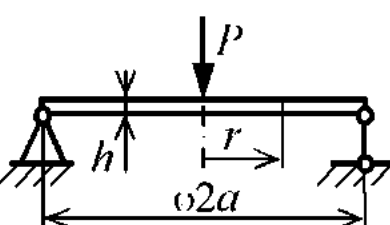
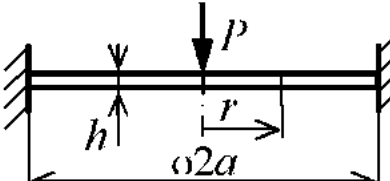
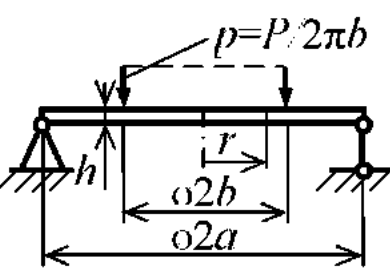
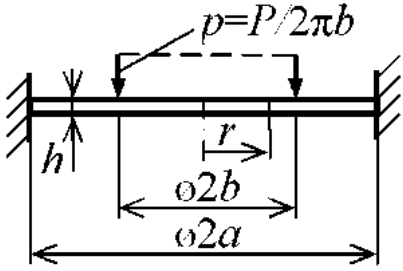
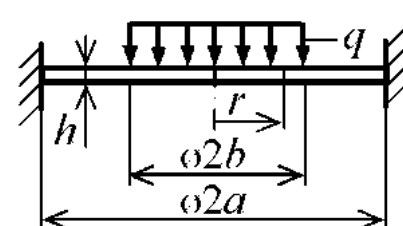
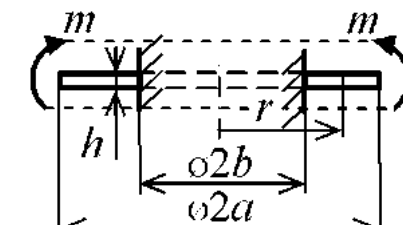
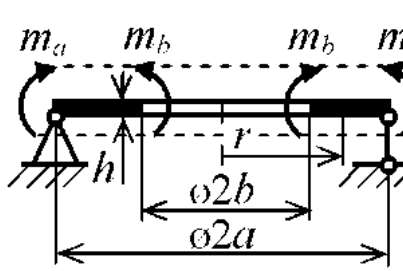
№ СХЕМЫ	Расчетные схемы и уравнения срединной поверхности пластин	
1		$w(r) = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} a^2 - r^2 \right)$
2		$w(r) = \frac{q(a^2 - r^2)^2}{64D}$
3		$w(r) = \frac{ma^2}{D(a^2 - b^2)} \left[\frac{a^2 - r^2}{2(1 + \mu)} - \frac{b^2 \ln(r/a)}{1 - \mu} \right],$ <p style="text-align: center;">$b = 0,5a$</p>
4		$w(r) \approx \frac{(3 + \mu) Pa^2}{(5 + \mu) 16\pi D} \times$ $\times \left[\frac{5 + \mu}{1 + \mu} - \frac{2(3 + \mu) r^2}{1 + \mu a^2} + \frac{r^4}{a^4} \right]$
5		$w(r) \approx \frac{Pa^2}{16\pi D} \left(1 - 2 \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^4}{a^4} \right)$
6		$w(r)_{r < b} \approx \frac{pb}{4D} \left[\frac{(3 + \mu)a^2 - (1 - \mu)b^2}{2(1 + \mu)a^2} \times \right.$ $\times (a^2 - r^2) + (r^2 - b^2) - (r^2 + b^2) \ln \frac{a}{b} \left. \right],$ $w(r)_{r > b} = \frac{pb}{4D} \left[\frac{(3 + \mu)a^2 - (1 - \mu)b^2}{2(1 + \mu)a^2} (a^2 - r^2) - (r^2 + b^2) \ln \frac{a}{r} \right], b = 0,5a$

Табл. 10.3 (окончание). Расчетные схемы и уравнения срединной поверхности пластин

№ сх.	Расчетные схемы и уравнения срединной поверхности пластин
7	 $w(r)_{r=b} = \frac{pb}{4D} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) (a^2 - r^2) + (r^2 - b^2) - (r^2 + b^2) \ln \frac{a}{b} \right]$ $w(r)_{r=b} = \frac{pb}{4D} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) (a^2 - r^2) - (r^2 + b^2) \ln \frac{a}{r} \right], b \leq 0,5a$
8	 $w(r)_{r=b} = \frac{qa^4}{64D} \left(4 \frac{b^2}{a^2} - 3 \frac{b^4}{a^4} - 2 \frac{b^4}{a^4} \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^4}{a^4} + 4 \frac{b^4}{a^4} \ln \frac{b}{a} + 8 \frac{b^2}{a^2} \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{b}{a} \right), b \leq 0,5a$ $w(r)_{r=b} = \frac{qa^4}{64D} \left[4 \frac{b^2}{a^2} + 2 \frac{b^4}{a^4} - \frac{r^2}{a^2} \left(2 \frac{b^4}{a^4} + 4 \frac{b^2}{a^2} \right) + 4 \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{b^2}{a^2} + 2 \frac{r^2}{a^2} \right) \ln \frac{r}{a} \right]$
9	 $w(r) = \frac{ma^2}{[a^2(1+\mu) + b^2(1-\mu)]D} \times \left[b^2 \left(\ln \frac{r}{b} + 0,5 \right) - 0,5r^2 \right], b \leq 0,5a$
10	 $w(r) = \frac{(a^2 m_a - b^2 m_b)(a^2 - r^2)}{2(1+\mu)(a^2 - b^2)D} - \frac{a^2 b^2 (m_a - m_b) \ln(r/a)}{(1-\mu)(a^2 - b^2)D}, b \leq 0,5a,$ $m_a = 2m_b$

10.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ КРУГЛОЙ СТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ»

Задано: размеры ($a = 1$ м; $b = 0,5a = 0,5$ м; $h = 0,04$ м) и материал (сталь 18Г2: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$; $\sigma_T = 440$ МПа) круглой пластины с вырезом в центре, заземленной по наружному контуру и нагруженной по внутреннему контуру моментом m ; коэффициент запаса прочности $n_T = 3$; допустимый прогиб $[w] = 0,001 \cdot 2a = 0,002$ м; расчетная схема (рис. 10.3) и уравнение срединной поверхности

$$w(r) = \frac{ma^2b^2}{2[(1-\mu)a^2 + (1+\mu)b^2]D} \left[2\ln\left(\frac{r}{a}\right) + \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \right].$$

Требуется: построить эпюры M_r и M_θ в долях m , эпюру $w(r)$ в долях ma^2/D ; определить допустимый момент $[m]$, удовлетворяющий условиям прочности и жесткости пластины.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ*

Дифференциальное уравнение срединной поверхности круглой пластины при осесимметричном изгибе имеет вид

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D},$$

где $q(r)$ – закон изменения распределенной нагрузки; $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость сечения пластины; E , μ – модуль упругости, коэффициент Пуассона. Общее решение неоднородного уравнения (10.1) получено в виде

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + w_1(r), \quad (10.15)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий для конкретной задачи. Частное решение $w_1(r)$ можно представить

$$w_1(r) = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r r \left[\frac{1}{r} \left(\int_0^r q(r) r dr \right) \right] dr \right\} dr. \quad (10.16)$$

С учетом (10.2) и (10.3) получены и приведены в учебниках и справочниках уравнения срединной поверхности круглых пластин для наиболее характерных случаев закрепления и нагружения.

Покажем методику конкретизации уравнения срединной поверхности пластины. Поскольку поперечная нагрузка ($q(r)$, p , P) на пластину не дей-

* При выполнении РГР не проводится.

ствуем. то частное решение $w_1(r) = 0$. Представляем уравнение срединной поверхности в общем виде

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r.$$

Для определения четырех постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 записываем четыре граничных условия: 1. $r = a, w = 0$ (прогиб на опоре); 2. $r = a, w' = dw/dr = 0$ (угол поворота при жестком защемлении); 3. $r = b, M_r = m$ (условие нагружения); 4. $r = b, Q_r = 0$ (поперечная нагрузка на внутреннем контуре отсутствует).

Находим производные: $w' = \frac{dw}{dr} = \frac{C_2}{r} + 2C_3 r + C_4 r(2 \ln r + 1);$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln r + 3); \quad \frac{d^3 w}{dr^3} = \frac{C_2}{r^3} + \frac{2C_4}{r}.$$

С учетом этого получаем поперечную силу

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{4DC_4}{r}.$$

Используя граничное условие 4, имеем $Q_r = -4DC_4/r = 0$ и $C_4 = 0$.

Находим изгибающий момент в окружном сечении

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left[-\frac{(1-\mu)}{r^2} C_2 + 2(1+\mu)C_3 \right].$$

С учетом граничного условия 3 получаем

$$M_r = -D \left[-\frac{(1-\mu)}{b^2} C_2 + 2(1+\mu)C_3 \right] = m.$$

Используя граничное условие 2, можно записать

$$\frac{dw}{dr} = \frac{C_2}{a} + 2C_3 a = 0, \quad C_3 = -\frac{C_2}{2a^2}.$$

Решая совместно последние уравнения, находим

$$C_2 = \frac{ma^2 b^2}{[a^2(1-\mu) + b^2(1+\mu)]D}, \quad C_3 = -\frac{mb^2}{2[a^2(1-\mu) + b^2(1+\mu)]D}.$$

В соответствии с граничным условием 1 при $r = a$ имеем

$$w(a) = C_1 + \frac{ma^2 b^2 \ln a}{[a^2(1-\mu) + b^2(1+\mu)]D} - \frac{ma^2 b^2}{2[a^2(1-\mu) + b^2(1+\mu)]D} = 0.$$

Откуда постоянная $C_1 = \frac{ma^2 b^2 (1 - 2 \ln a)}{2[a^2(1-\mu) + b^2(1+\mu)]D}.$

С учетом найденных значений постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 получаем конкретизированное уравнение срединной поверхности пластины

$$w(r) = \frac{ma^2b^2}{2[a^2(1-\mu)+b^2(1+\mu)]D} \left[2\ln \frac{r}{a} + \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right],$$

что совпадает с аналогичным выражением, представленным в условии задачи.

РЕШЕНИЕ

1. Определяем распределенный изгибающий момент M_r в окружных сечениях пластины

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad \frac{dw}{dr} = \frac{ma^2b^2}{[a^2(1-\mu)+b^2(1+\mu)]D} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right); \\ \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} &= \frac{ma^2b^2}{[a^2(1-\mu)+b^2(1+\mu)]D} \left(\frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu}{a^2} \right); \quad (10.17) \\ \frac{d^2w}{dr^2} &= \frac{ma^2b^2}{[a^2(1-\mu)+b^2(1+\mu)]D} \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right); \\ M_r &= \frac{mb^2}{[a^2(1-\mu)+b^2(1+\mu)]} \left[(1+\mu) + \frac{(1-\mu)a^2}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

При $r = 0,5a$ и $\mu = 0,3$ окончательно получаем

$$M_r = 0,244m \left(1,3 + 0,7a^2/r^2 \right). \quad (10.18)$$

2. Определяем распределенный изгибающий момент M_Θ в радиальных сечениях пластины

$$\begin{aligned} M_\Theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2w}{dr^2} \right); \quad \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{ma^2b^2}{[(1-\mu)a^2+(1+\mu)b^2]D} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right); \\ \mu \frac{d^2w}{dr^2} &= \frac{ma^2b^2}{[(1-\mu)a^2+(1+\mu)b^2]D} \left(-\frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu}{a^2} \right); \quad (10.19) \\ M_\Theta &= \frac{mb^2}{[(1-\mu)a^2+(1+\mu)b^2]} \left[(1+\mu) - \frac{(1-\mu)a^2}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

При $b = 0,5a$ и $\mu = 0,3$ окончательно получаем

$$M_\Theta = 0,244m \left(1,3 - 0,7a^2/r^2 \right). \quad (10.20)$$

В рассматриваемом примере поперечная сила $Q_r \equiv 0$. При действии на пластину $q(r)$, p или P значение $Q_r \neq 0$. Однако определение Q_r можно опустить, поскольку влияние Q_r на прочность пластины незначительно.

3. Конкретизируем заданное уравнение изогнутой срединной поверхности круглой пластины при $b = 0,5a$ и $\mu = 0,3$

$$w(r) = 0,122 \frac{ma^2}{D} \left(2 \ln \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{r^2} \right). \quad (10.21)$$

По формулам (10.18), (10.19) и (10.21) находим величины M_r , M_Θ и $w(r)$ для ряда значений r . Результаты вычислений сводим в таблицу 10.4 и строим эпюры (рис. 10.3) M_r , M_Θ и $w(r)$. Положительные значения эпюр показаны на растянутых слоях пластины и наоборот.

Табл. 10.4. Результаты расчетов

R	$0,5a$	$0,625a$	$0,750a$	$0,875a$	a
M_r / m	1,00	0,754	0,621	0,540	0,488
M_Θ / m	-0,366	-0,120	0,014	0,094	0,146
$w(r) / (ma^2 / D)$	-0,0776	-0,0403	-0,0168	-0,0029	0

4. Анализ эпюр M_r и M_Θ показывает, что опасными будут наиболее удаленные от срединной плоскости нижние точки внутреннего контура пластины. В окрестности опасной точки выделим элементарный объем (рис. 10.4). Экстремальные напряжения в опасных точках равны

$$\begin{aligned} \max \sigma_r &= \frac{6M_{r\text{оп}}}{h^2} = \frac{6m}{h^2} = \sigma_1; & \sigma_2 &= 0; \\ \min \sigma_\Theta &= -\frac{6M_{\Theta\text{оп}}}{h^2} = -\frac{6 \cdot 0,366m}{h^2} = \sigma_3. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Видно, что материал пластины работает в условиях плоского напряженного состояния.

В соответствии с четвертой (энергетической) теорией прочности условие прочности имеет вид

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma], \quad (10.23)$$

где $[\sigma] = \sigma_T / n_T = 440 / 3 = 147$ МПа – допускаемое напряжение. С учетом значений σ_1 , σ_2 , σ_3 из (10.23) получаем

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \frac{6m}{h^2} \cdot 1,225 \leq [\sigma]. \quad (10.24)$$

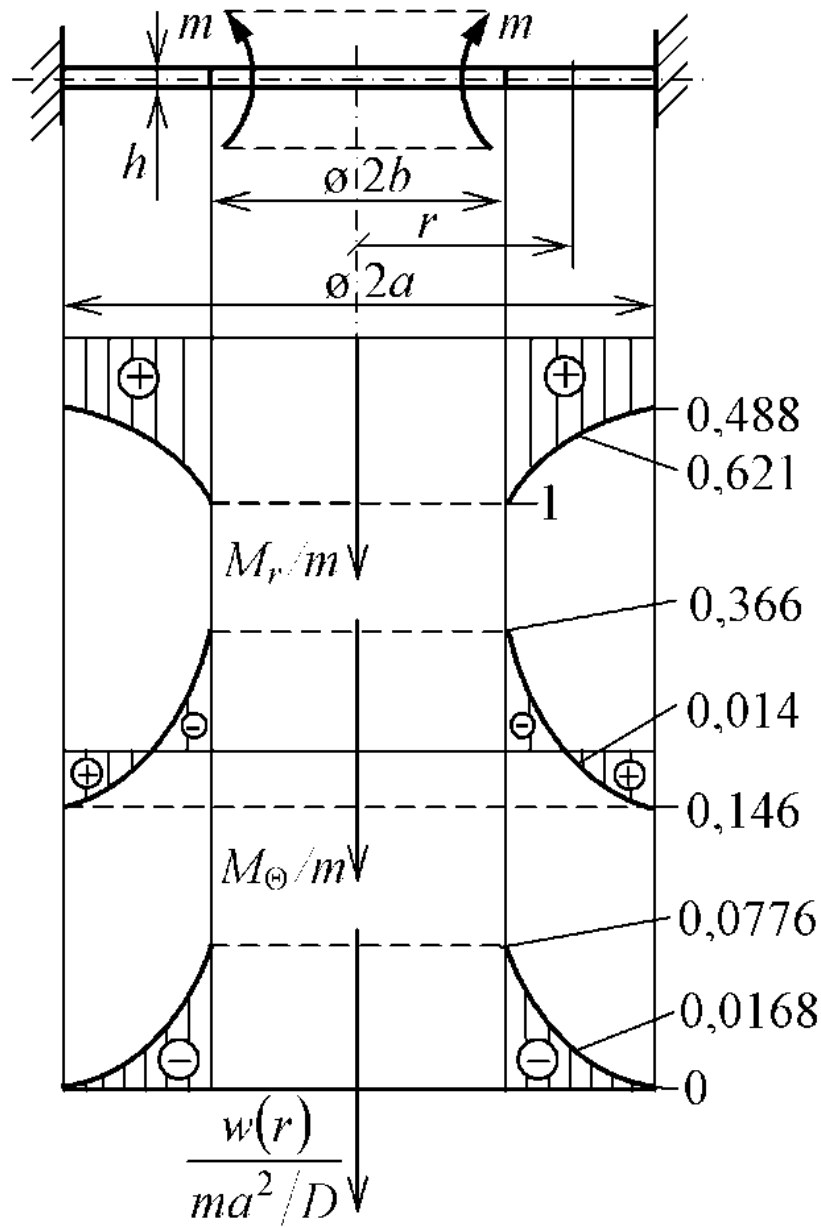


Рис. 10.3. Эпюры распределенных изгибающих моментов в окружном M_r и радиальном M_θ сечениях, эпюра прогибов $w(r)$ кольцевой пластины

Из условия прочности (10.24) допускаемый распределенный момент $[m]_\sigma$ равен

$$[m]_\sigma = \frac{[\sigma]h^2}{6 \cdot 1,225} = \frac{147 \cdot 10^6 \cdot 0,04^2}{6 \cdot 1,225} = 32000 \frac{\text{НМ}}{\text{м}}. \quad (10.25)$$

5. Проверяем выполнение условия жесткости пластины

$$w_{\max} = \left| \frac{0,0776ma^2}{D} \right| = \frac{0,0776[m]_\sigma a^2 \cdot 12(1-\mu^2)}{Eh^3} =$$

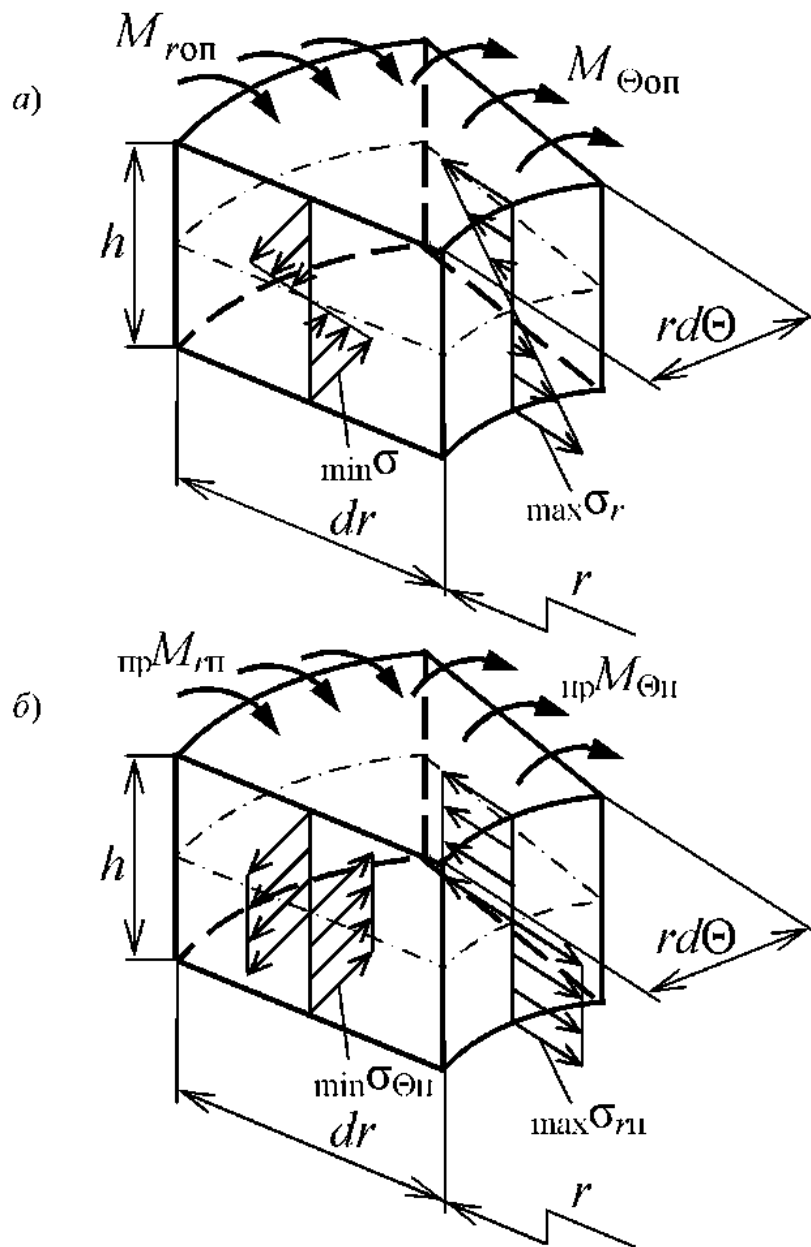


Рис. 10.4. Внутренние силовые факторы и напряженное состояние опасного элемента круглой пластины при упругом (а) и предельном пластическом (б) деформировании

$$= \frac{0,0776 \cdot 44700 \cdot 1^2 \cdot 12 \cdot (1 - 0,3^2)}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,04^3} = 0,00296 \text{ м} > [w] = 0,001 \cdot 2a = 0,002 \text{ м.}$$

Видно, что условие жесткости не выполняется. Вычисляем допускаемый распределенный момент $[m]_w$ из условия жесткости пластины

$$w_{\text{max}} = \left| \frac{0,0776 m a^2}{D} \right|_{\text{max}} \leq [w]:$$

$$\begin{aligned}
 [m]_w &= \frac{[w]D}{0,0776a^2} = \frac{[w]Eh^3}{12(1-\mu^2) \cdot 0,0776a^2} = \\
 &= \frac{0,002 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,04^3}{12 \cdot (1-0,3^2) \cdot 0,0776 \cdot 1^2} = 26800 \frac{\text{Нм}}{\text{м}}.
 \end{aligned}
 \tag{10.26}$$

Окончательно принимаем минимальное значение допускаемого распределенного момента $[m] = [m]_{\min} = 26800 \text{ Нм / м}$. Используя формулы (10.22) и (10.23), вычисляем рабочие напряжения в опасной точке пластины: $\max \sigma_r = 100 \text{ МПа}$; $\min \sigma_{\Theta} = -36,6 \text{ МПа}$; $\max \sigma_{\text{эжв4}} = 122 \text{ МПа}$.

Рассмотрим расчет на прочность этой же пластины по методу предельных (разрушающих) нагрузок. При этом жесткость пластины не нормируется. В соответствии с теорией пластичности А.А. Ильюшина при предельном пластическом деформировании, когда пластические деформации распространились на всю высоту опасного объема пластины (рис. 10.4б), интенсивность предельных напряжений равна схематизированному пределу текучести $\sigma_{\text{те}} \approx \sigma_T$

$$\sigma_{\text{лпр}} = \sqrt{\max \sigma_{r\text{лпр}}^2 + \min \sigma_{\Theta\text{лпр}}^2 - \max \sigma_{r\text{лпр}} \cdot \min \sigma_{\Theta\text{лпр}}} = \sigma_{\text{те}}.$$

При известном из упругого решения (10.22) отношении $\min \sigma_{\Theta} / \max \sigma_r = \min \sigma_{\Theta\text{лпр}} / \max \sigma_{r\text{лпр}} = -0,366$ из последней формулы получаем значения предельных напряжений (рис. 10.4б): $\max \sigma_{\text{лпр}} = 0,816 \sigma_{\text{те}} = 359 \text{ МПа}$; $\min \sigma_{\Theta\text{лпр}} = -0,299 \sigma_{\text{те}} = -131 \text{ МПа}$.

Расчет пластин с учетом пластических деформаций повышает допускаемую нагрузку в 1,5 раза по сравнению с аналогичным результатом по методу допускаемых напряжений. Следовательно, допускаемый распределенный момент по методу предельных нагрузок равен $[m]_{\text{пл}} = 1,5 [m]_{\sigma} = 1,5 \cdot 32000 = 48000 \text{ Нм / м}$.

10.4. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ КРУГЛОЙ БЕТОННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ»

Задано: размеры ($a = 2 \text{ м}$; $b = 0,5a = 1 \text{ м}$; $h = 0,160 \text{ м}$) и материал (бетон: $E = 0,2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\mu = 0,175$; $\sigma_{\text{вр}} = 3 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{вс}} = 31 \text{ МПа}$) круглой пластины с вырезом в центре, шарнирно закрепленной по наружному контуру и нагруженной по внутреннему контуру моментом m : коэффициент надежности $\gamma_0 = 2,50$; допускаемый прогиб $[w] = 0,001 \cdot 2a = 0,004 \text{ м}$; расчетная схема (рис. 10.5) и уравнение срединной поверхности пластины

$$w(r) = \frac{ma^2b^2}{(a^2 - b^2)D} \left[\frac{\ln(r/a)}{1 - \mu} - \frac{(1 - r^2/a^2)}{2(1 + \mu)} \right].$$

Требуется: построить эпюры M_r и M_θ в долях m , эпюру $w(r)$ в долях ma^2/D ; определить допускаемый момент $[m]$, удовлетворяющий условиям прочности и жесткости пластины.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ*

Дифференциальное уравнение срединной поверхности круглой пластины при осесимметричном изгибе имеет вид

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D},$$

где $q(r)$ – закон изменения распределенной нагрузки; $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость сечения пластины; E , μ – модуль упругости, коэффициент Пуассона. Общее решение этого неоднородного уравнения предлагается в виде

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + w_1(r),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий для конкретной задачи. Частное решение $w_1(r)$ можно представить

$$w_1(r) = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r \frac{1}{r} \left(\int_0^z q(r) r dr \right) dz \right\} dz.$$

С учетом этого уравнения срединной поверхности получены и приведены в учебниках и справочниках для наиболее характерных случаев закрепления и нагружения круглых пластин.

Покажем методику конкретизации уравнения срединной поверхности пластины. Поскольку поперечная нагрузка ($q(r) = 0, p = 0, P = 0$) на пластину не действует, то частное решение $w_1(r) = 0$. Представляем уравнение срединной поверхности в общем виде

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r.$$

Для определения четырех постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 записываем четыре граничных условия: 1. при $r = a$ $w = 0$ (опора); 2. при $r = a$ $M_r = 0$ (шарнирное закрепление); 3. при $r = b$ $M_r = m$ (условие нагружения); 4. при $r = b$ $Q_r = 0$ (поперечная нагрузка на внутреннем контуре отсутствует).

$$\text{Находим производные: } w' = \frac{dw}{dr} = \frac{C_2}{r} + 2C_3 r + C_4 r(2 \ln r + 1);$$

* При выполнении РПР не проводится.

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2\ln r + 3); \quad \frac{d^3 w}{dr^3} = \frac{C_2}{r^3} + \frac{2C_4}{r}.$$

С учетом этого получаем распределенную поперечную силу

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{4DC_4}{r}.$$

Используя граничное условие 4, имеем $Q_r = -4DC_4/r = 0$ и $C_4 = 0$.

Находим изгибающий момент в окружном сечении

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left[-\frac{(1-\mu)}{r^2} C_2 + 2(1+\mu)C_3 \right].$$

С учетом граничных условий 2 и 3 получаем

$$\text{при } r = a \quad M_r = -D \left[-\frac{(1-\mu)}{a^2} C_2 + 2(1+\mu)C_3 \right] = 0.$$

$$\text{при } r = b \quad M_r = -D \left[-\frac{(1-\mu)}{b^2} C_2 + 2(1+\mu)C_3 \right] = m.$$

Решая совместно последние уравнения, находим постоянные

$$C_2 = \frac{ma^2 b^2}{(1-\mu)(a^2 - b^2)D}, \quad C_3 = -\frac{mb^2}{2(1+\mu)(a^2 - b^2)D}.$$

В соответствии с граничным условием 1 при $r = a$ имеем

$$w(a) = C_1 + \frac{ma^2 b^2 \ln a}{(1-\mu)(a^2 - b^2)D} - \frac{ma^2 b^2}{2(1+\mu)(a^2 - b^2)D} + 0 = 0,$$

$$\text{откуда постоянная } C_1 = \frac{ma^2 b^2}{(a^2 - b^2)D} \left[-\frac{\ln a}{1-\mu} - \frac{1}{2(1+\mu)} \right].$$

С учетом найденных значений постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 получаем конкретизированное уравнение срединной поверхности пластины

$$w(r) = \frac{ma^2 b^2}{(a^2 - b^2)D} \left[\frac{\ln(r/a)}{1-\mu} - \frac{(1-r^2/a^2)}{2(1+\mu)} \right],$$

что совпадает с выражением, представленным в условии задачи.

РЕШЕНИЕ

1. Находим распределенный изгибающий момент M_r в окружных сечениях пластины

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad \frac{dw}{dr} = \frac{ma^2 b^2}{(a^2 - b^2)D} \left[\frac{1}{(1-\mu)r} + \frac{r}{(1+\mu)a^2} \right];$$

$$\frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{ma^2 b^2}{(a^2 - b^2)D} \left[\frac{\mu}{(1-\mu)r^2} + \frac{\mu}{(1+\mu)a^2} \right]; \quad (10.27)$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{ma^2 b^2}{(a^2 - b^2)D} \left[-\frac{1}{(1-\mu)r^2} + \frac{1}{(1+\mu)a^2} \right];$$

следовательно изгибающий момент $M_r = \frac{mb^2}{a^2 - b^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right)$.

При $b = 0,5a$ окончательно получаем $M_r = 0,333m \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right)$. (10.28)

2. Определяем распределенный изгибающий момент M_Θ в радиальных сечениях

$$M_\Theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right); \quad \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{ma^2 b^2}{(a^2 - b^2)D} \left[\frac{1}{(1-\mu)r^2} + \frac{1}{(1+\mu)a^2} \right];$$

$$\mu \frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{ma^2 b^2}{(a^2 - b^2)D} \left[-\frac{\mu}{(1-\mu)r^2} + \frac{\mu}{(1+\mu)a^2} \right]; \quad (10.29)$$

$$M_\Theta = -\frac{mb^2}{(a^2 - b^2)} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right).$$

При $b = 0,5a$ окончательно получаем $M_\Theta = -0,333m \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right)$. (10.30)

В этом примере поперечная сила $Q_r \equiv 0$. При действии на пластину $q(r)$, p или P значение $Q_r \neq 0$. Однако определение Q_r можно опустить, поскольку влияние Q_r на прочность пластины обычно незначительное.

3. Заданное уравнение срединной поверхности пластины при $b = 0,5a$ и $\mu = 0,175$ приводится к виду

$$w(r) = \left[0,404 \ln \frac{r}{a} - 0,142 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \frac{ma^2}{D}. \quad (10.31)$$

По формулам (10.28), (10.29) и (10.31) находим величины M_r , M_Θ и $w(r)$ для ряда значений r . Результаты вычислений сводим в таблицу 10.5 и строим эпюры (рис. 10.5) M_r , M_Θ и $w(r)$. Положительные значения эпюр показаны на растянутых слоях пластины и наоборот.

Табл. 10.5. Результаты расчетов

r	$0,5a$	$0,625a$	$0,750a$	$0,875a$	a
M_r/m	1,00	0,520	0,259	0,102	0
M_Θ/m	-1,667	-1,187	-0,926	-0,769	-0,667
$w(r)/(ma^2/D)$	-0,387	-0,277	-0,178	-0,0872	0

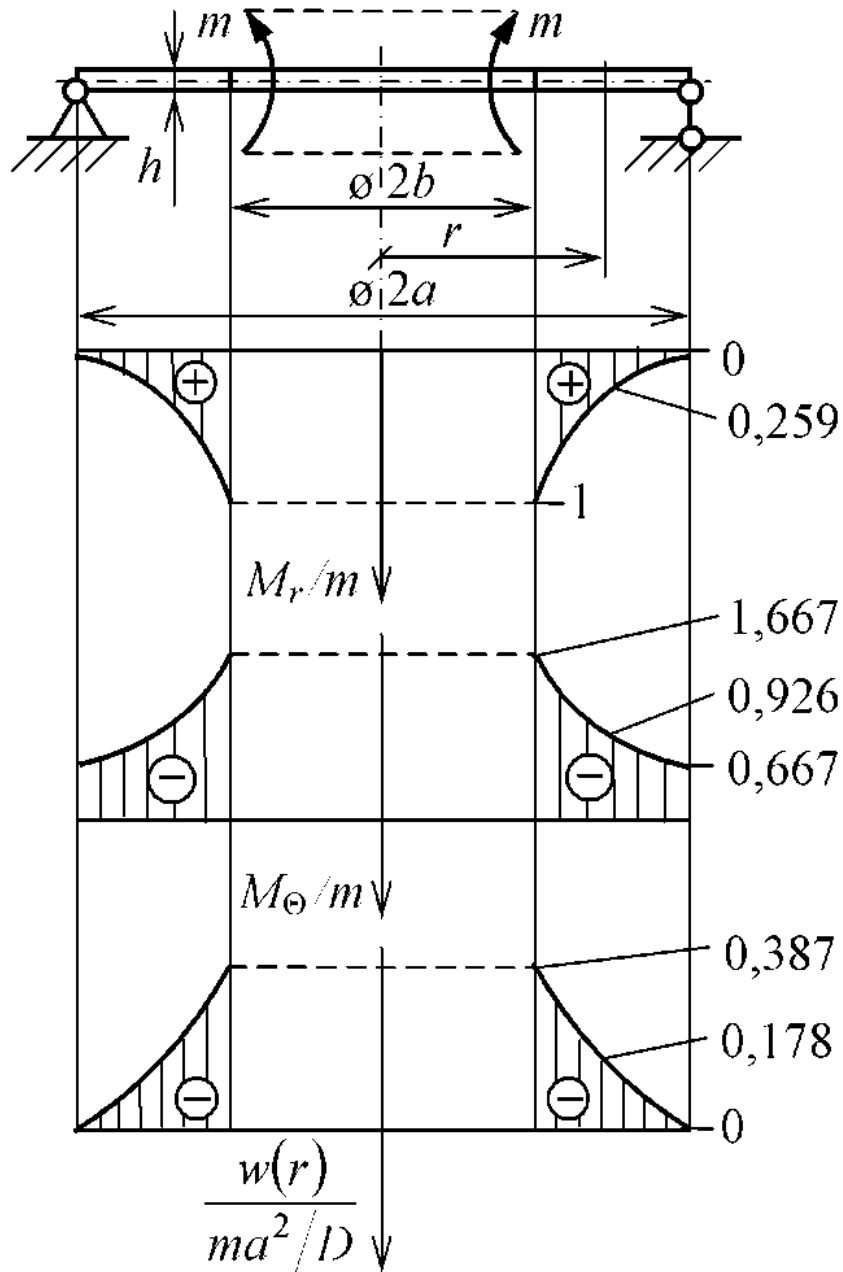


Рис. 10.5. Эпюры распределенных изгибающих моментов в окружном M_r и радиальном M_Θ сечениях. эпюра прогибов $w(r)$ кольцевой пластины

4. Анализ эпюр M_r и M_Θ показывает, что опасными будут наиболее удаленные от срединной плоскости верхние точки внутреннего контура пластины. В окрестности опасной точки выделим элементарный объем (рис. 10.6). Экстремальные напряжения в опасных точках равны

$$\begin{aligned} \max \sigma_\Theta &= \frac{6M_{\Theta\text{оп}}}{h^2} = -\frac{6 \cdot 1,667m}{h^2} = \frac{10m}{h^2} = \sigma_1; & \sigma_2 &= 0; \\ \min \sigma_r &= \frac{6M_{r\text{оп}}}{h^2} = -\frac{6m}{h^2} = \sigma_3. \end{aligned} \quad (10.32)$$

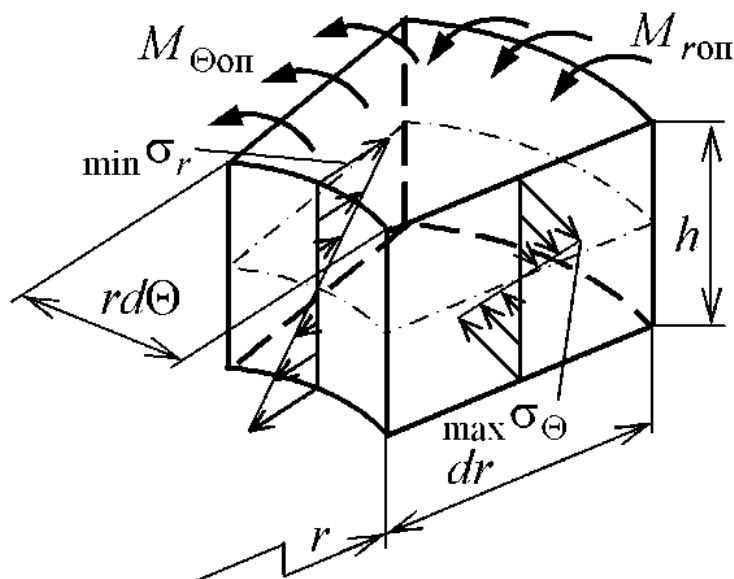


Рис. 10.6. К анализу напряженного состояния в окрестности опасной точки пластины

Из анализа видно, что материал пластины работает в условиях плоского напряженного состояния.

В соответствии с пятой (О. Мора) теорией прочности условие прочности имеет вид

$$\max \sigma_{\text{экв5}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_p, \quad (10.33)$$

где $k = \sigma_{\text{вр}} / \sigma_{\text{вс}} = 3,00 / 31 = 0,0968$ – коэффициент неравнопрочности бетона при растяжении и сжатии; $[\sigma]_p = \sigma_{\text{вр}} / \gamma_0 = 3,00 / 2,50 = 1,20$ МПа – допускаемое напряжение на растяжение. С учетом этого получаем

$$\max \sigma_{\text{экв5}} = \frac{10m}{h^2} - 0,0968 \left(-\frac{6m}{h^2} \right) = \frac{10,6m}{h^2} \leq [\sigma]_p. \quad (10.34)$$

Допускаемый распределенный момент из условия прочности (10.34) равен

$$[m]_\sigma = [\sigma]_p h^2 / 10,6 = 1,20 \cdot 10^6 \cdot 0,160^2 / 10,6 = 2900 \text{ Нм/м}. \quad (10.35)$$

5. Проверяем выполнение условия жесткости пластины

$$w_{\max} = \left| -\frac{0,387ma^2}{D} \right| = \frac{0,378[m]_{\sigma} a^2 \cdot 12(1-\mu^2)}{Eh^3} =$$
$$= \frac{0,378 \cdot 2900 \cdot 2^2 \cdot 12 \cdot (1-0,175^2)}{0,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,160^3} = 0,000637 \text{ м} < [w] = 0,001 \cdot 2a = 0,004 \text{ м}.$$

Видно, что условие жесткости для бетонной пластины выполняется. Окончательно принимаем значение допускаемого момента $[m] = [m]_{\sigma} = 2900$ Нм/м.

Бетон является хрупким материалом, поэтому расчет пластины с учетом пластических деформаций не выполняется.

11. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ИЗГИБЕ

Элементы конструкций в виде прямоугольных пластин широко используются в строительстве (плиты, панели зданий и сооружений), машиностроении (элементы технологических приспособлений), авиации, судостроении (обшивки планера самолета, корпуса корабля, элементы резервуаров) и других областях техники.

11.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ИЗГИБЕ

Расчеты на прочность и жесткость тонких пластин основаны на следующих допущениях. Любая прямая, нормальная к срединной плоскости до деформации, остается после деформации прямой, нормальной к срединной поверхности. Напряжениями, действующими перпендикулярно к срединной поверхности, можно пренебречь.

В поперечных сечениях пластины xOz , yOz (рис. 11.1) возникают распределенные по длине изгибающие M_x , M_y и крутящие $M_{xy} = -M_{yx}$ моменты, распределенные поперечные силы Q_x , Q_y , которые взаимосвязаны с соответствующими нормальными σ_x , σ_y и касательными $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, τ_{zx} , τ_{zy} напряжениями следующим образом

$$M_x = \int_{-0,5h}^{+0,5h} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-0,5h}^{+0,5h} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-0,5h}^{+0,5h} \tau_{xy} z dz,$$

$$Q_x = \int_{0,5h}^{+0,5h} \tau_{zx} dz, \quad Q_y = \int_{0,5h}^{+0,5h} \tau_{zy} dz. \quad (11.1)$$

Напряжения в произвольном слое пластины с ординатой z равны

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3}; \quad \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3}; \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{h^3}. \quad (11.2)$$

Наибольшие напряжения возникают в наиболее удаленном слое при $z_{\max} = 0,5h$

$$\sigma_{x\max} = \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_{y\max} = \frac{6M_y}{h^2}; \quad \tau_{xy\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2}. \quad (11.3)$$

Под действием внешней нагрузки пластина прогибается, а срединная плоскость превращается в срединную поверхность. Функцию прогибов $w(x, y)$ для срединной поверхности получают в результате решения дифференциального уравнения изгиба прямоугольной пластины

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x; y)}{D}, \quad (11.4)$$

предложенного Софи Жермен и Жозефом Лагранжем. Здесь $q(x; y)$ – действующая на пластину распределенная нагрузка; $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость сечения пластины. Точные решения уравнения (11.4) получены для простейших случаев закрепления и нагружения пластин. Для других случаев получают приближенные решения дифференциального уравнения (11.4), используя двойные или одинарные тригонометрические ряды, вариационные, численные и другие методы.

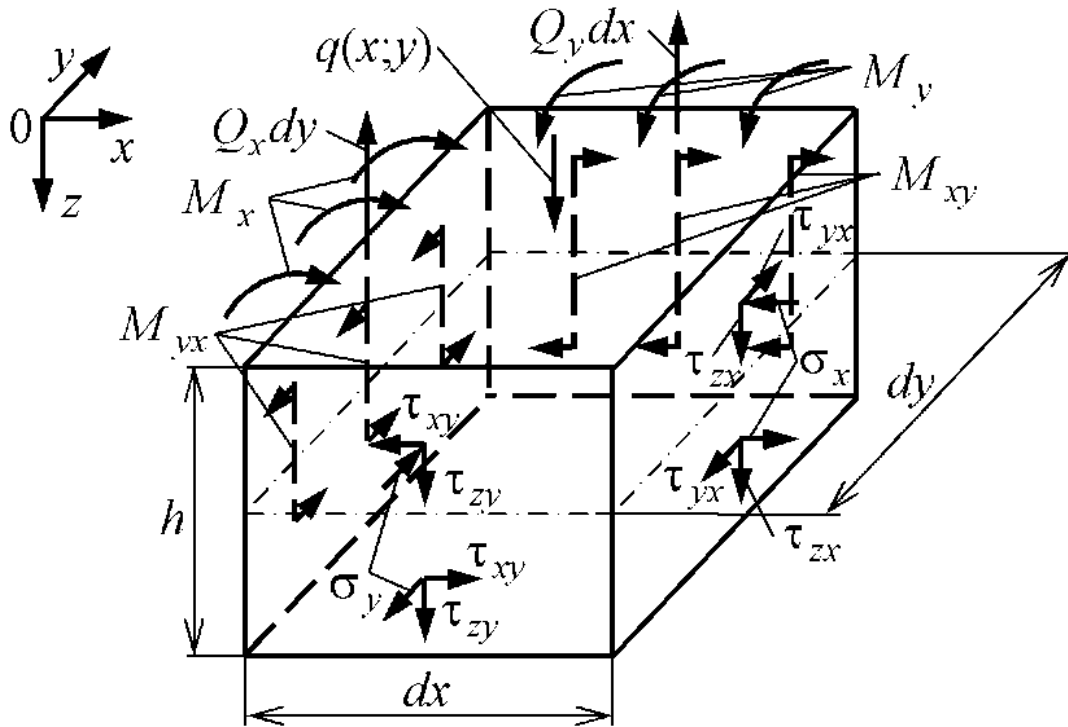


Рис. 11.1. Внутренние силовые факторы и напряженное состояние элемента прямоугольной пластины

Если уравнение срединной поверхности пластины $w(x; y)$ известно, то внутренние силовые факторы в сечениях $x(0)z$, $y(0)z$ пластины (рис. 11.1) определяются по формулам: изгибающие моменты

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (11.5)$$

крутящие моменты $M_{xy} = -M_{yx} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (11.6)$

$$\text{поперечные силы } Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right). \quad (11.7)$$

Из рис. 11.1 видно, что материал пластины работает в условиях плоского напряженного состояния. Если пластина изготовлена из пластичного материала, то в соответствии с четвертой (энергетической) теорией условия прочности в опасной точке имеет вид

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq [\sigma] \quad (11.8)$$

или с учетом формул (11.3) получаем

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \frac{6}{h^2} \sqrt{M_{x\text{оп}}^2 + M_{y\text{оп}}^2 - M_{x\text{оп}} M_{y\text{оп}} + 3M_{xy\text{оп}}^2} \leq [\sigma], \quad (11.9)$$

где $M_{x\text{оп}}$, $M_{y\text{оп}}$, $M_{xy\text{оп}}$ – изгибающие и крутящий моменты в опасном сечении.

Для пластин из хрупкого материала используется пятая (О. Мора) теория прочности

$$\max \sigma_{\text{экв5}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (11.10)$$

При $a > b$ $M_{y\text{оп}} > M_{x\text{оп}}$ и $\sigma_{y\text{оп}} = \frac{6M_{y\text{оп}}}{h^2} = \sigma_1$, $\sigma_{x\text{оп}} = \frac{6M_{x\text{оп}}}{h^2} = \sigma_2$,

$\sigma_3 = 0$, $\tau_{xy} = \frac{6M_{xy\text{оп}}}{h^2} = 0$ имеем

$$\max \sigma_{\text{экв5}} = \frac{6M_{y\text{оп}}}{h^2} \leq [\sigma]_p. \quad (11.11)$$

Здесь $[\sigma] = \sigma_T / n_T$, $[\sigma]_p = \sigma_{вp} / \gamma_0$ – допускаемые напряжения для пластичного и хрупкого материалов; n_T , γ_0 – коэффициенты запаса прочности и надежности.

Опасную точку определяют в результате анализа эпюр M_x , M_y , M_{xy} . Если однозначное определение опасной точки затруднено, то предварительно намечают несколько предполагаемых опасных точек. Затем вычисляют для них эквивалентные напряжения и делают окончательный выбор.

В ряде случаев пластина должна быть не только прочной, но и достаточно жесткой. Условие жесткости пластин имеет вид

$$w_{\text{max}} = \dots \leq [w], \quad (11.12)$$

где $w_{\text{max}} = \left| \max k_{wq} \right| qa^4 / D$, $w_{\text{max}} = \left| \max k_{wp} \right| pa^3 / D$,

$w_{\text{max}} = \left| \max k_{wP} \right| Pa^2 / D$, $w_{\text{max}} = \left| \max k_{wm} \right| ma^2 / D$ – коэффициенты, определяемые из эпюры прогибов w при действии нагрузки q ($\text{H}/\text{м}^2$) или p ($\text{H}/\text{м}$), P (H), m ($\text{H}\cdot\text{м}$); a – габаритный размер пластины; $[w]$ – допускаемый про-

гиб, зависящий от назначения пластины. Для тонких пластин в ряде случаев допускаемый прогиб $|w|=(0,001 \dots 0,002)a$.

При оценке работоспособности пластин характерны три варианта. Первый: из условий прочности и жесткости вычисляют допускаемые нагрузки и окончательно выбирают меньшее значение. Второй: из условий прочности и жесткости определяют толщину пластины $[h]_{\sigma}$, $[h]_w$ и окончательно принимают большее значение. Третий: если известны размеры пластины, действующие нагрузки и материал, то выполняются проверочные расчеты на прочность и жесткость, а затем дается заключение о работоспособности пластины.

Расчет прямоугольных пластин по предельным состояниям с учетом пластических деформаций совершенно аналогичен ранее рассмотренному методу для круглых пластин. В соответствии с теорией пластичности А.А. Ильюшина при предельном пластическом деформировании, когда пластические деформации распространились на всю высоту опасного объема пластины (рис. 11.3б), интенсивность предельных напряжений $\sigma_{лпр}$ равна схематизированному пределу текучести $\sigma_{те} \approx \sigma_T$

$$\sigma_{лпр} = \sqrt{\max \sigma_{лпр}^2 + \max \sigma_{упр}^2 - \max \sigma_{лпр} \cdot \max \sigma_{упр} + 3 \max \tau_{хупр}^2} \equiv \sigma_{те}.$$

При известных из упругого решения (10.3) отношениях $\sigma_{у\max} / \sigma_{л\max} = \max \sigma_{упр} / \max \sigma_{лпр}$ и $\tau_{ху\max} / \sigma_{л\max} = \max \tau_{хупр} / \max \sigma_{лпр}$ из последней формулы можно получить значения предельных напряжений. Аналогично круглым расчет прямоугольных пластин с учетом пластических деформаций повышает допускаемую нагрузку в 1,5 раза по сравнению с результатом, полученным по методу допускаемых напряжений.

11.2. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ИЗГИБЕ»

Задано: размеры и механические характеристики материала прямоугольной пластины; коэффициент запаса прочности n_T или коэффициент надежности γ_0 (табл. 11.1, 11.2); расчетная схема и уравнение срединной поверхности пластины (табл. 11.3); допускаемый прогиб $|w|=(0,001 \dots 0,002)a$.

Требуется: построить в характерных сечениях эпюры распределенных изгибающих M_x , M_y и крутящего M_{xy} моментов в долях qa^2 или pa , m , P ; эпюры прогибов $w(x, y)$ в долях qa^4/D или pa^3/D , ma^2/D , Pa^2/D ; определить

допускаемую нагрузку $|q|$ (Н/м²) или $|p|$ (Н/м), $|m|$ (Нм/м), $|P|$ (Н), удовлетворяющую условиям прочности и жесткости пластины.

Табл. 11.1. Исходные данные для РПР (сталь; $E=2 \cdot 10^5$ МПа)

Цифра № вар-та	1-я цифра № вар-та			2-я цифра № вар-та			3-я цифр. № вар.	4-я цифр. № вар.
	a , м	b , м	h , м	Сталь	μ	$\sigma_{гс}$, МПа	n_T	№ расчет. схемы
1	1,10	0,550	0,020	18кп	0,340	235	2,40	10
2	1,20	0,600	0,022	20	0,330	270	2,50	9
3	1,30	0,650	0,024	ВСт3	0,320	275	2,60	8
4	1,40	0,700	0,026	09Г2С	0,310	370	2,70	7
5	1,50	0,750	0,028	30	0,300	380	2,80	6
6	1,60	0,800	0,030	15Г2	0,290	440	2,90	5
7	1,70	0,850	0,032	40	0,280	500	3,00	4
8	1,80	0,900	0,034	45	0,270	575	3,10	3
9	1,90	0,950	0,036	12Г2С	0,260	590	3,20	2
0	2,00	1,00	0,038	50	0,250	650	3,30	1

Табл. 11.2. Исходные данные для РПР (бетон)

Цифра № вар-та	1-я цифра № вар-та			2-я цифра № вар-та				3-я цифр. № вар-та	4-я цифр. № вар-та
	a , м	b , м	h , м	E_c , МПа	μ	$\sigma_{вр}$, МПа	$\sigma_{пс}$, МПа	γ_0	№ расчет. схемы
1	4,00	2,00	0,160	$0,150 \cdot 10^5$	0,150	1,00	11,0	3,00	10
2	4,20	2,10	0,170	$0,160 \cdot 10^5$	0,155	1,30	15,0	2,90	9
3	4,40	2,20	0,180	$0,170 \cdot 10^5$	0,160	1,50	19,0	2,80	8
4	4,60	2,30	0,190	$0,180 \cdot 10^5$	0,165	2,00	23,0	2,70	7
5	4,80	2,40	0,200	$0,190 \cdot 10^5$	0,170	2,50	27,0	2,60	6
6	5,00	2,50	0,210	$0,200 \cdot 10^5$	0,175	3,00	31,0	2,50	5
7	5,20	2,60	0,220	$0,210 \cdot 10^5$	0,180	3,50	36,0	2,40	4
8	5,40	2,70	0,230	$0,220 \cdot 10^5$	0,185	4,00	40,0	2,30	3
9	5,60	2,80	0,240	$0,230 \cdot 10^5$	0,190	4,50	44,0	2,20	2
0	5,80	2,90	0,250	$0,240 \cdot 10^5$	0,195	5,00	48,0	2,10	1

Табл. 11.3. Расчетные схемы и уравнения срединной поверхности пластин

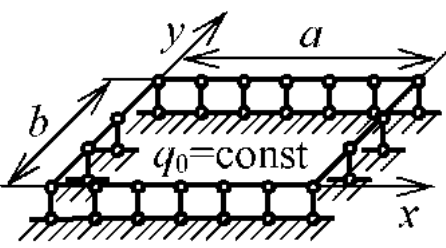
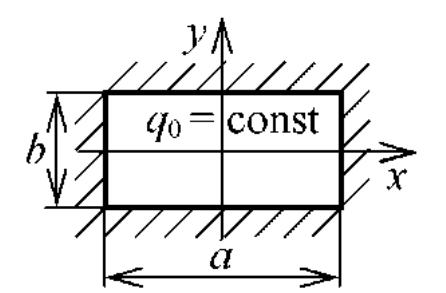
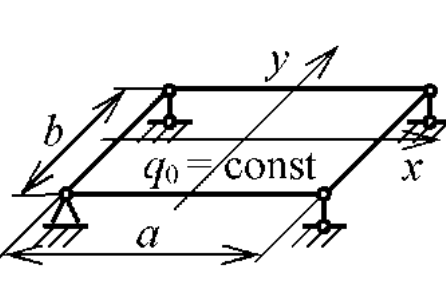
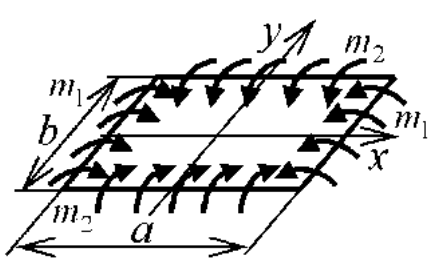
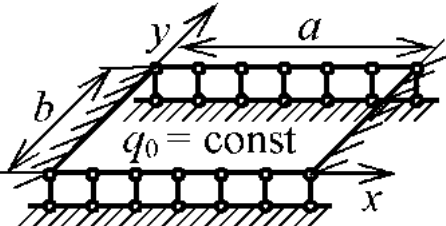
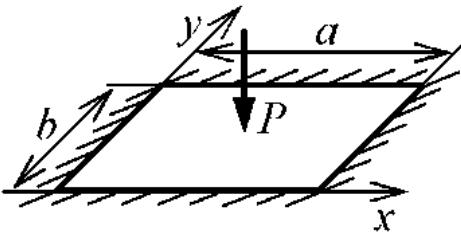
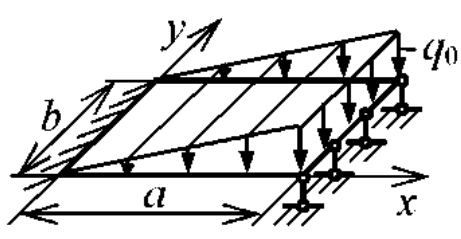
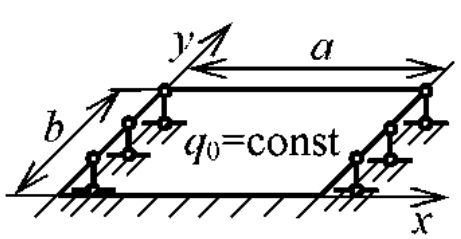
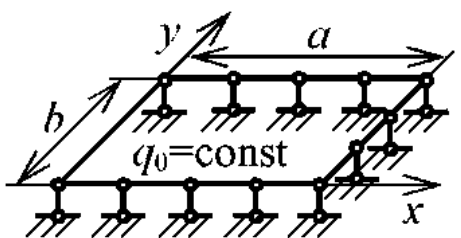
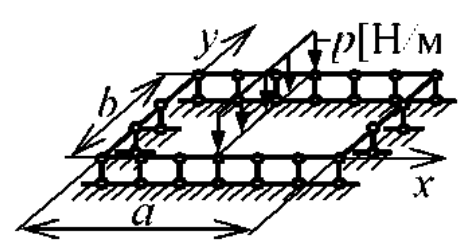
№ сх.	Расчетные схемы пластин	Уравнения срединной поверхности пластин
1	2	3
1		$w(x, y) = \frac{16q_0 a^4 b^4}{\pi^6 (a^2 + b^2)^2 D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
2		$w(x, y) = \frac{q_0 a^4 \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right)}{4\pi^4 \left(3 + 3\frac{a^4}{b^4} + 2\frac{a^2}{b^2}\right) D}$
3		$w(x, y) = \frac{64q_0 \left(\pi^2 - 8\mu \frac{a^2}{b^2}\right)}{\pi^3 (\pi^4 - 64\mu^2) D} \times \left(a^4 \cos \frac{\pi x}{a} + b^4 \cos \frac{\pi y}{b}\right)$
4		$w(x, y) = -\frac{m_1 - \mu m_2}{2(1 - \mu^2) D} x^2 - \frac{m_2 - \mu m_1}{2(1 - \mu^2) D} y^2,$ $m_1 = m, \quad m_2 = 2m$
5		$w(x, y) = \frac{q_0 a^4 b^4 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \sin \frac{\pi y}{b}}{\pi^4 (a^4 + 2a^2 b^2 + 8b^4) D}$

Табл. 11.3 (окончание). Расчетные схемы и уравнения срединной поверхности пластин

1	2	3
6		$w(x, y) = \frac{Pab \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)}{\left(175 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 363\right) D}$
7		$w(x) = \frac{q_0 a^4}{240D} \left(7 \frac{x^2}{a^2} - 9 \frac{x^3}{a^3} + 2 \frac{x^5}{a^5}\right),$ $q_x = q_0 x/a$
8		$w(x, y) = \left[0,0113 + 0,0415 \left(\frac{a}{b} - 1\right)\right] \times$ $\times \frac{q_0 b^4}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2a}\right)$
9		$w(x, y) = \left[0,0129 + 0,00119 \left(\frac{a}{b} - 1\right)\right] \times$ $\times \frac{q_0 b^4}{D} \sin \frac{\pi y}{b} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2a}\right)$
10		$w(x, y) = \left[0,00674 + 0,00626 \left(1 - \frac{b}{a}\right)\right] \times$ $\times \frac{pb^3}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$

11.3. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ СТАЛЬНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ»

Задано: размеры ($a = 1$ м; $b = 0,5$ м; $h = 0,04$ м) и материал (сталь 18Г2: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,30$; $\sigma_T = 440$ МПа) прямоугольной пластины, шарнирно закрепленной по контуру и нагруженной распределенной по синусоидам нагрузкой $q(x; y) = q \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$; коэффициент запаса прочности $n_T = 3,0$; допускаемый прогиб $|w| = 0,002 \cdot a = 0,002$ м; расчетная схема (рис. 11.2) и

уравнение срединной поверхности $w(x; y) = \frac{qa^4b^4}{\pi^4(a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$.

Требуется: в характерных сечениях xOz , yOz (рис. 11.2) построить эпюры распределенных изгибающих M_x , M_y и крутящего M_{xy} моментов в долях qa^2 , эпюры прогибов $w(x; y)$ в долях qa^4/D ; определить допускаемую нагрузку $[q]$ (Н/м²), удовлетворяющую условиям прочности и жесткости пластины.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ*

Для определения уравнения срединной поверхности $w(x; y)$ используем дифференциальное уравнение в частных производных (11.4)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x; y)}{D},$$

где $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость сечения пластины. Решение уравнения (11.4) для рассматриваемого примера предложено французским ученым Анри Навье (1785 – 1836 гг.) в виде

$$w(x; y) = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (11.13)$$

где w_0 – прогиб в центре пластины. С учетом (11.13) получаем:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = w_0 \frac{\pi^4}{a^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = w_0 \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = w_0 \frac{\pi^4}{b^4} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Подставляя полученные значения частных производных и $q(x; y)$ в (11.4), после преобразования находим

* При выполнении РПР не проводится.

$$w_0 = \frac{qa^4b^4}{\pi^4(a^2+b^2)^2 D} \quad \text{и} \quad w(x; y) = \frac{qa^4b^4}{\pi^4(a^2+b^2)^2 D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (11.14)$$

что совпадает с аналогичным выражением приведенным в условии задачи.

Решение А. Навье (11.14) является элементарным потому, что четные частные производные от $w(x; y)$ совпадают с точностью до постоянных множителей с законом изменения нагрузки $q(x; y)$.

РЕШЕНИЕ

1. Определяем распределенные изгибающие моменты M_x, M_y в сечениях xOz, yOz (рис. 11.2)

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Для этого с учетом уравнения (11.13) вычисляем вторые производные

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2} w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Следовательно, распределенные изгибающие моменты равны

$$M_x = \pi^2 D w_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad M_y = \pi^2 D w_0 \left(\frac{\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

При $b = 0,5a$ и $\mu = 0,3$ из последних выражений получаем

$$M_x = 0,00891qa^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad M_y = 0,0174qa^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (11.15)$$

2. Находим распределенные крутящие моменты $M_{xy} = -M_{yx}$ в сечениях xOz, yOz пластины (рис. 11.2)

$$M_{xy} = -M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

С учетом уравнения (11.13) находим вторую производную

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\pi^2 w_0}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

При $b = 0,5a$ и $\mu = 0,3$, с учетом (11.14) и последних выражений получаем

$$M_{xy} = -D(1-0,3) \frac{\pi^2 qa^4 (0,5a)^4}{\pi^4 (a^2 + (0,5a)^2)^2 Da0,5a} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \quad \text{или}$$

$$M_{xy} = -0,00568qa^2 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (11.16)$$

3. Конкретизируем уравнение срединной поверхности (11.14) при $b=0,5a$

$$w(x; y) = \frac{qa^4(0,5a)^4}{\pi^4(a^2 + (0,5a)^2)^2 D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad \text{или}$$

$$w(x; y) = 0,000411 \frac{qa^4}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (11.17)$$

4. По формулам (11.15) ... (11.17) находим величины $M_x, M_y, M_{xy}, w(x; y)$ для $x = 0; 0,25a; 0,5a; 0,75a; a$ и $y = 0; 0,25b; 0,5b; 0,75b; b$. Затем результаты расчетов сводим в таблицу 11.4 и строим эпюры (рис. 11.2). Для удобства изображения положительные значения эпюр M_x, M_y, M_{xy} показаны на сжатых слоях пластины и наоборот.

5. Анализ эпюр изгибающих M_x, M_y и крутящего M_{xy} моментов показывает, что опасной является нижняя точка в центре пластины, где $M_{x\text{оп}} = 0,00891qa^2, M_{y\text{оп}} = 0,0174qa^2, M_{xy\text{оп}} = 0$. Выделим элементарный объем $hdx dy$ в окрестности опасной точки (рис. 11.3). Представляем нормальные и касательные напряжения в опасной точке пластины

$$\max \sigma_x = \frac{6M_{x\text{оп}}}{h^2}; \quad \max \sigma_y = \frac{6M_{y\text{оп}}}{h^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{6M_{xy\text{оп}}}{h^2} = 0.$$

Видно, что материал пластины работает в условиях плоского напряженного состояния. В соответствии с четвертой (энергетической) теорией условие прочности можно представить

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq [\sigma] \quad \text{или}$$

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \frac{6}{h^2} \sqrt{M_{x\text{оп}}^2 + M_{y\text{оп}}^2 - M_{x\text{оп}} M_{y\text{оп}} + 3M_{xy\text{оп}}^2} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma] = \sigma_T / n_T = 440/3 = 147$ МПа – допускаемое напряжение. С учетом значений $M_{x\text{оп}}, M_{y\text{оп}}$ и $M_{xy\text{оп}}$ записываем условие прочности

$$\max \sigma_{\text{экв4}} = \frac{0,0905qa^2}{h^2} \leq [\sigma].$$

Следовательно, допускаемая распределенная нагрузка на пластину равна

$$[q]_{\sigma} = \frac{[\sigma]h^2}{0,0905a^2} = \frac{147 \cdot 10^6 \cdot 0,04^2}{0,0905 \cdot 1^2} = 2,60 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Табл. 11.4. Результаты расчетов

y	$\frac{x}{a}$	$\frac{M_x}{qa^2}$	$\frac{M_y}{qa^2}$	$\frac{M_{xy}}{qa^2}$	$\frac{w(x, y)}{qa^4/D}$
$y = 0$	0	0	0	-0,00568	0
	0,25	0	0	-0,00402	0
	0,50	0	0	0	0
	0,75	0	0	0,00402	0
	1	0	0	0,00568	0
$y = 0,25b$	0	0	0	-0,00402	0
	0,25	0,00445	0,00870	-0,00284	0,000206
	0,50	0,00630	0,0123	0	0,000291
	0,75	0,00445	0,00870	0,00284	0,000206
	1	0	0	0,00402	0
$y = 0,50b$	0	0	0	0	0
	0,25	0,00630	0,0123	0	0,000291
	0,50	0,00891	0,0174	0	0,000411
	0,75	0,00630	0,0123	0	0,000291
	1	0	0	0	0
$y = 0,75b$	0	0	0	0,00402	0
	0,25	0,00445	0,00870	0,00284	0,000206
	0,50	0,00630	0,0123	0	0,000291
	0,75	0,00445	0,00870	-0,00284	0,000206
	1	0	0	-0,00402	0
$y = b$	0	0	0	0,00568	0
	0,25	0	0	0,00402	0
	0,50	0	0	0	0
	0,75	0	0	-0,00402	0
	1	0	0	-0,00568	0

6. Проверяем выполнение условия жесткости пластины при $\mu = 0,3$

$$\begin{aligned}
 w_{\max} &= 0,000411 \frac{qa^4}{D} = 0,000411 \frac{qa^4 12(1-\mu^2)}{Eh^3} = \\
 &= 0,000411 \frac{2,60 \cdot 10^6 \cdot 1^4 \cdot 12(1-0,3^2)}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,04^3} = 0,911 \cdot 10^{-3} \text{ м,}
 \end{aligned}$$

что меньше допускаемого прогиба $[w] = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Если жесткость пластины не обеспечена, то допускаемую нагрузку $[q]_w$ вычисляют из условия жесткости.

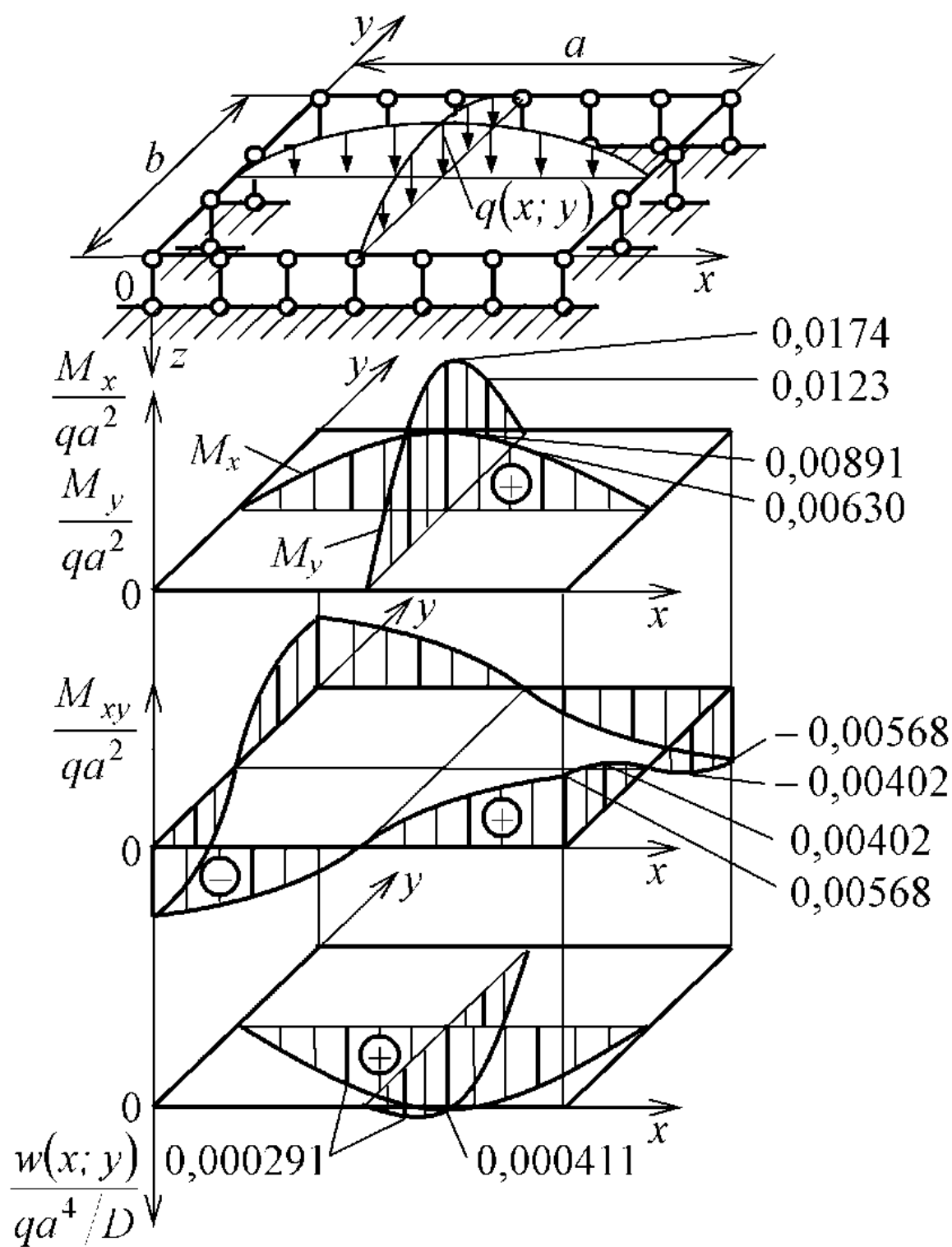


Рис. 11.2. Эпюры распределенных изгибающих M_x , M_y и крутящего M_{xy} моментов, эпюры прогибов $w(x; y)$ прямоугольной пластины

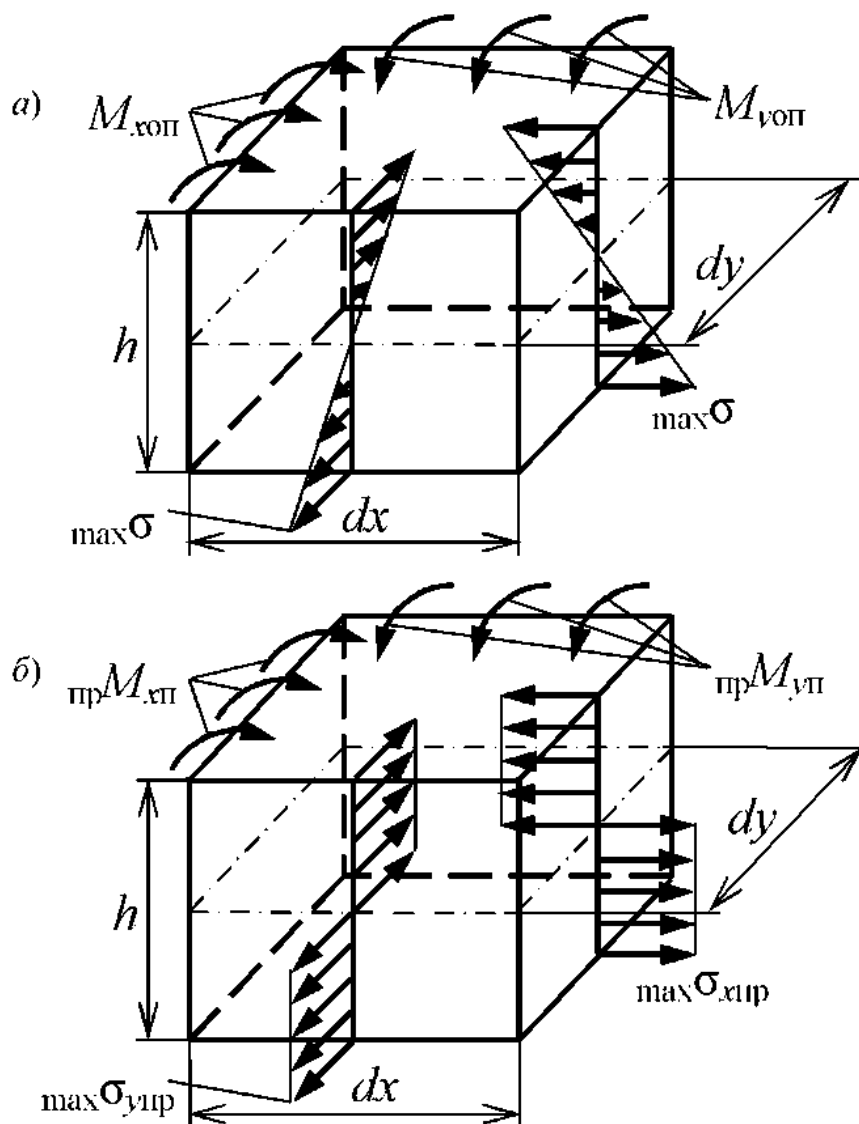


Рис. 11.3. Внутренние силовые факторы и напряженное состояние опасного элемента прямоугольной пластины при упругом (а) и предельном пластическом (б) деформировании

Рассмотрим расчет этой же пластины по методу предельных нагрузок с учетом предельных пластических деформаций. В соответствии с теорией пластичности А.А. Ильюшина интенсивность предельных напряжений в опасной точке равна

$$\sigma_{iп} = \sqrt{\max \sigma_{xп}^2 + \max \sigma_{yп}^2 - \max \sigma_{xп} \cdot \max \sigma_{yп} + 3 \max \tau_{xyп}^2} \equiv \sigma_{ic} \approx \sigma_1.$$

При известных из упругого решения отношениях $\sigma_{y\max} / \sigma_{x\max} = \max \sigma_{yп} / \max \sigma_{xп} = 0,0174 / 0,00891 = 1,953$ и $\tau_{xy\max} / \sigma_{x\max} =$

$\frac{\max \tau_{хупр}}{\max \sigma_{хпр}} = 0$ получаем значения предельных напряжений: $\max \sigma_{хпр} = 0,591\sigma_{тс} = 260$ МПа; $\max \sigma_{упр} = 1,154\sigma_{тс} = 508$ МПа; $\max \tau_{хупр} = 0$. Допускаемая распределенная нагрузка на пластину при расчете по методу предельных состояний равна $[q]_{сн} = 1,5[q]_{с} = 1,5 \cdot 2,60 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 3,9 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

11.4. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ БЕТОННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ»

Задано: размеры ($a = 6$ м; $b = 3$ м; $h = 0,25$ м) и материал (бетон: $E = 0,2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,175$; $\sigma_{вр} = 3$ МПа; $\sigma_{вс} = 31$ МПа) прямоугольной пластины, шарнирно закрепленной по наружному контуру и нагруженной в центре сосредоточенной силой P ; коэффициент надежности $\gamma_0 = 2,50$; допускаемый прогиб $[w] = 0,001 \cdot a = 0,006$ м; расчетная схема (рис. 11.4) и уравнение

$$\text{срединной поверхности } w(x; y) = \frac{4Pa^3b^3}{\pi^4(a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Требуется: в характерных сечениях $x0z$, $y0z$ (рис. 11.4) построить эпюры распределенных изгибающих M_x , M_y и крутящего M_{xy} моментов в долях P , эпюры прогибов $w(x; y)$ в долях Pa^2/D ; определить допускаемую нагрузку $[P]$ (Н), удовлетворяющую условиям прочности и жесткости пластины.

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ*

Уравнение срединной поверхности $w(x; y)$ представим в виде двойного синусоидального ряда

$$w(x; y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (11.18)$$

где $m = n = 1, 3, 5 \dots$. Силу P , передающуюся через элементарную площадку $dx dy$ будем рассматривать как предельный случай распределенной нагрузки $q(x; y)$, представленной в виде аналогичного ряда

$$q(x; y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (11.19)$$

где коэффициенты ряда определяются таким образом

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x; y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (11.20)$$

*При выполнении РПР не проводится.

Для рассматриваемого предельного случая переменные $x = x_P = a/2$ и $y = y_P = b/2$, где x_P, y_P – координаты точки приложения силы P . С учетом этого в выражении (11.20) $\sin(\pi x_P/a) = 1$, $\sin(\pi y_P/b) = 1$, а интеграл $\int_0^a \int_0^b q(x; y) dx dy \equiv P$. Следовательно можно конкретизировать

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab}, \quad q(x; y) = \frac{4P}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (11.21)$$

Если соответствующие частные производные от $w(x; y)$ и функцию нагрузки $q(x; y)$ подставить в дифференциальное уравнение срединной поверхности (11.4)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x; y)}{D},$$

то после преобразования получим значения коэффициентов

$$w_{mn} = \frac{4P}{\pi^4 ab D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (11.22)$$

Ограничиваясь первым членом ($m = 1, n = 1$) быстро сходящегося ряда (11.19), получаем

$$w_0 = \frac{4P}{\pi^4 ab D \left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2} \quad \text{и} \quad w(x; y) = \frac{4Pa^3 b^3}{\pi^4 (a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (11.23)$$

что совпадает с аналогичным выражением, приведенным в условии задачи.

РЕШЕНИЕ

1. Определяем распределенные изгибающие моменты M_x, M_y в сечениях $x)z, y)z$ (рис. 11.4)

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Для этого, используя уравнение прогибов (11.23), находим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{b^2} w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Следовательно, распределенные изгибающие моменты равны

$$M_x = \pi^2 D w_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad M_y = \pi^2 D w_0 \left(\frac{\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

При $b = 0,5a$ и $\mu = 0,175$ из последних выражений получаем

$$M_x = 0,0551P \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad M_y = 0,135P \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (11.24)$$

2. Находим распределенные крутящие моменты $M_{xy} = -M_{yx}$ в сечениях xOz , yOz пластины

$$M_{xy} = -M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Используя уравнение срединной поверхности (11.23), получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\pi^2 w_0}{ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

При $b = 0,5a$ и $\mu = 0,175$ с учетом последних выражений находим

$$M_{xy} = -D(1-0,175) \frac{\pi^2 4Pa^3(0,5a)^3}{\pi^4(a^2 + (0,5a)^2)^2 Da0,5a} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \quad \text{или}$$

$$M_{xy} = -0,0535P \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (11.25)$$

3. Конкретизируем уравнение срединной поверхности (11.23) при $b=0,5a$

$$w(x; y) = \frac{4Pa^3(0,5a)^3}{\pi^2(a^2 + (0,5a)^2)^2 D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad \text{или}$$

$$w(x; y) = 0,0324 \frac{Pa^2}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (11.26)$$

4. По формулам (11.24) ... (11.26) находим величины M_x , M_y , M_{xy} , $w(x; y)$ для $x = 0; 0,25a; 0,5a; 0,75a; a$ и $y = 0; 0,25b; 0,5b; 0,75b; b$. Затем результаты расчетов сводим в таблицу 11.5 и строим эпюры (рис. 11.4). Для удобства изображения положительные значения эпюр M_x , M_y , M_{xy} показаны на сжатых слоях пластины и наоборот.

5. Анализ эпюр изгибающих M_x , M_y и крутящего M_{xy} моментов показывает, что опасной является нижняя точка в центре пластины, где $M_{x\text{оп}} = 0,0551P$, $M_{y\text{оп}} = 0,135P$, $M_{xy\text{оп}} = 0$. Выделим элементарный объем $hdx dy$ в окрестности опасной точки (рис. 11.5). Представляем нормальные и касательные напряжения в опасной точке

$$\max \sigma_x = 6M_{\text{хон}}/h^2 = \sigma_2; \quad \max \sigma_y = 6M_{\text{уон}}/h^2 = \sigma_1; \quad \sigma_3 = 0; \quad \tau_{xy} = 0.$$

Видно, что материал пластины работает в условиях плоского напряженного состояния. В соответствии с пятой (О. Мора) теорией условие прочности можно представить

$$\max \sigma_{\text{экв5}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_p \quad \text{или} \quad \max \sigma_{\text{экв5}} = \frac{6M_{\text{уон}}}{h^2} \leq [\sigma]_p,$$

Табл. 11.5. Результаты расчетов

y	$\frac{x}{a}$	$\frac{M_x}{P}$	$\frac{M_y}{P}$	$\frac{M_{xy}}{P}$	$\frac{w(x; y)}{Pa^2/D}$
$y = 0$	0	0	0	-0,0535	0
	0,25	0	0	-0,0378	0
	0,50	0	0	0	0
	0,75	0	0	0,0378	0
	1	0	0	0,0535	0
$y = 0,25b$	0	0	0	-0,0378	0
	0,25	0,0276	0,0676	-0,0267	0,0162
	0,50	0,0390	0,0956	0	0,0229
	0,75	0,0276	0,0676	0,0267	0,0162
	1	0	0	0,0378	0
$y = 0,50b$	0	0	0	0	0
	0,25	0,0390	0,0956	0	0,0229
	0,50	0,0551	0,135	0	0,0324
	0,75	0,0390	0,0956	0	0,0229
	1	0	0	0	0
$y = 0,75b$	0	0	0	0,0378	0
	0,25	0,0276	0,0676	0,0267	0,0162
	0,50	0,0390	0,0956	0	0,0229
	0,75	0,0276	0,0676	-0,0267	0,0162
	1	0	0	-0,0378	0
$y = b$	0	0	0	0,0535	0
	0,25	0	0	0,0378	0
	0,50	0	0	0	0
	0,75	0	0	-0,0378	0
	1	0	0	-0,0535	0

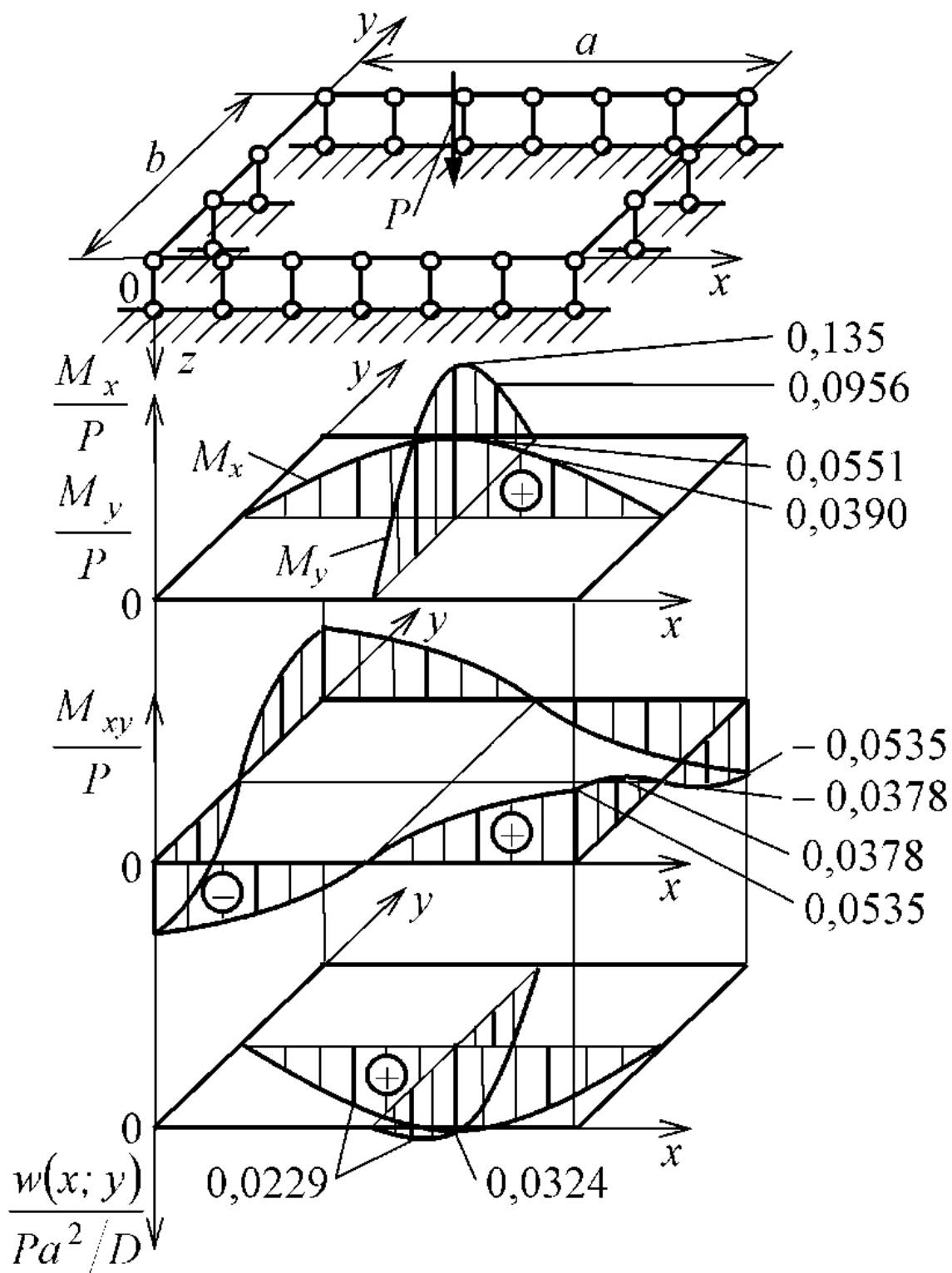


Рис. 11.4. Эпюры распределенных изгибающих M_x , M_y и крутящего M_{xy} моментов, эпюры прогибов $w(x, y)$ прямоугольной пластины

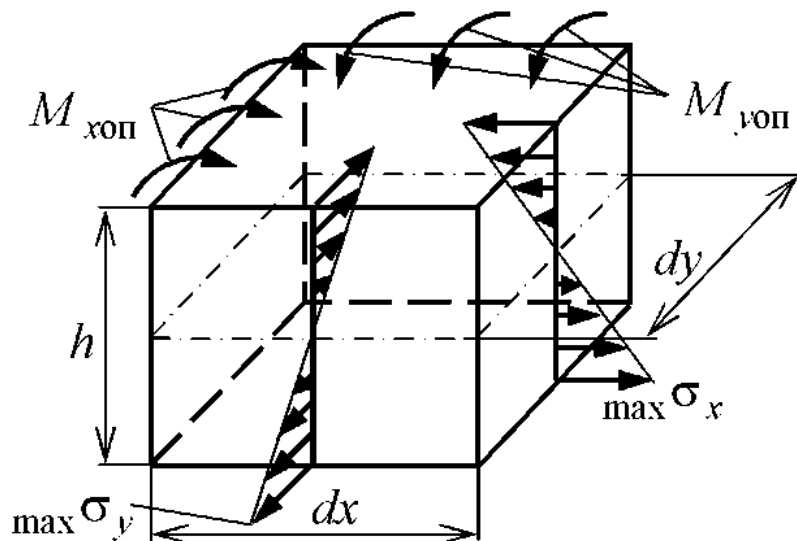


Рис. 11.5. Внутренние силовые факторы и напряженное состояние в окрестности опасной точки

где $k = \sigma_{вр} / \sigma_{сж}$ – коэффициент неравнопрочности хрупкого материала при растяжении и сжатии; $[\sigma]_p = \sigma_{вр} / \gamma_0 = 3 / 2,5 = 1,20$ МПа – допускаемое напряжение при растяжении. С учетом значения $M_{yоп}$ записываем условие прочности

$$\max \sigma_{экр5} = \frac{6 \cdot 0,135P}{h^2} = \frac{0,810P}{h^2} \leq [\sigma]_p.$$

Следовательно, допускаемая нагрузка из условия прочности равна

$$[P]_\sigma = \frac{[\sigma]_p h^2}{0,810} = \frac{1,2 \cdot 10^6 \cdot 0,25^2}{0,810} = 92600 \text{ Н.}$$

6. Проверяем выполнение условия жесткости пластины при $\mu = 0,175$

$$\begin{aligned} w_{\max} &= 0,0324 \frac{Pa^2}{D} = 0,0324 \frac{Pa^2 12(1-\mu^2)}{Eh^3} = \\ &= \frac{0,0324 \cdot 92600 \cdot 6^2 \cdot 12(1-0,175^2)}{0,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,25^3} = 0,00402 \text{ м} < [w] = 0,006 \text{ м}. \end{aligned}$$

Видно, что условие жесткости пластины выполняется. Если жесткость пластины не обеспечена, то допускаемую нагрузку $[P]_w$ вычисляют из условия жесткости.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ БРУСА

Таблица П.1

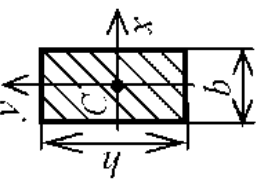
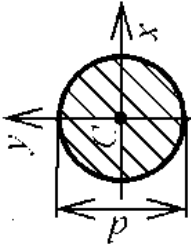
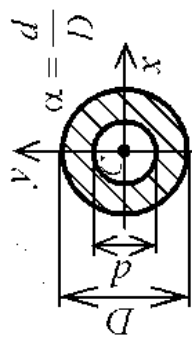
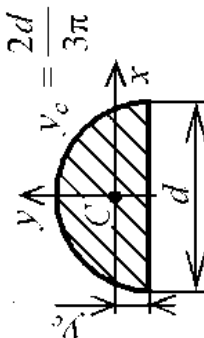
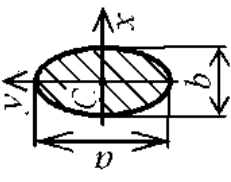
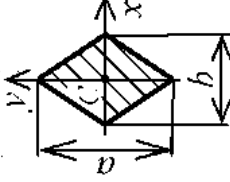
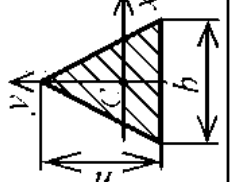
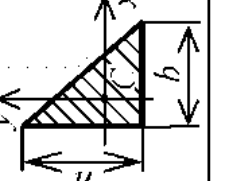
Сечение бруса	J_x	J_y	J_p	W_x	W_y	W_p
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$		$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	
	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{32}$	$\frac{\pi D^3}{32}$	$\frac{\pi D^3}{32}$	$\frac{\pi D^3}{16}$
	$\frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$
	$0,00686d^4$	$\frac{\pi d^4}{128}$		$0,0239d^3$	$\frac{\pi d^3}{64}$	

Таблица П.1 (окончание)

Сечение бруса	J_x	J_y	J_p	W_x	W_y	W_p
	$\frac{\pi b a^3}{64}$	$\frac{\pi a b^3}{64}$		$\frac{\pi b a^2}{32}$	$\frac{\pi a b^2}{32}$	
	$\frac{b a^3}{48}$	$\frac{a b^3}{48}$		$\frac{b a^2}{24}$	$\frac{a b^2}{24}$	
	$\frac{b h^3}{36}$	$\frac{h b^3}{48}$		$\frac{b h^2}{24}$	$\frac{h b^2}{24}$	
	$\frac{b h^3}{36}$	$\frac{h b^3}{48}$		$J_{xy} = -\frac{b^2 h^2}{72}$		

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

СТАЛЬ ПРОКАТНАЯ
УГОЛКОВАЯ РАВНОБОКАЯ
ГОСТ 8509-87

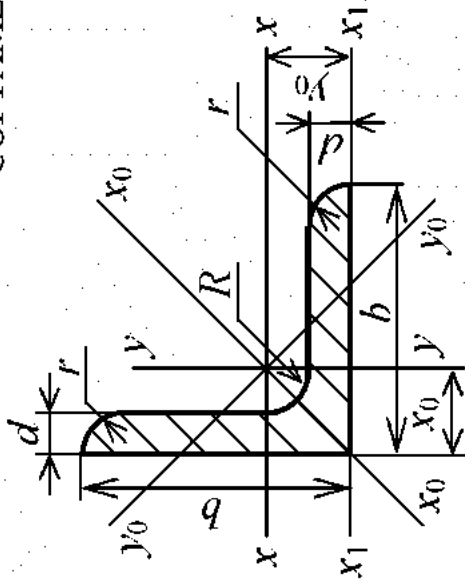


Таблица П.2

№ про- филя	Размеры				Штор. про- филя	Вес 1 пог. метра	Справочные величины для осей								Коорт.	
	мм		R	r			x	x ₁	y	y ₁	x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁	Ц. Г. x ₀ , y ₀
	b	d									J _x , J _y	i _x , i _y	J _{x(0),max}	J _{x(0),min}		
					кг	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	
2	20	3	3,5	1,2	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60			
	4				1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64			
2,5	25	3	3,5	1,2	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73			
	4				1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76			
2,8	28	3	4	1,3	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80			
	4				1,46	1,77	0,97	2,8	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89			
3,2	32	4	4,5	1,5	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94			
	4				1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99			
3,6	36	4	4,5	1,5	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04			
	4				1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09			
4	40	4	5	1,7	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13			

Таблица 11.2 (продолжение)

№ проф.	b	d	R	r	Площ. см ²	Вес кг	J _x , J _y см ⁴	i _x , i _y см	J _{доп(мак)} см ⁴	i _{доп(мак)} см	J _{у0(мин)} см ⁴	i _{у0(мин)} см	J _{х1} см ⁴	x ₀ , y ₀ см
4,5	3	5	1,7		2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
	4				3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
	5				4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	3	5,5	1,8		2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
	4				3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
	5				4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	3,5	6	2		3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
	4				4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
	5				5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	4	7	2,3		4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
	5				6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
	6				7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	4,5	8	2,7		6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
	5				6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
	6				8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
7,5	7	9	3		9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
	8				10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
	5				7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
8	6	9	3		8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
	7				10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
	8				11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
8	9	9	3		12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
	5,5				8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
	6				9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
8	7	9	3		10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
	8				12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27

Таблица П.2 (продолжение)

№ проф.	b	d	R	r	Плотт.	Вес	$J_{те}, J_{в}$		$i_{в}, i_{т}$		$J_{с(мин)}$		$i_{с(мин)}$		$J_{с(макс)}$		$i_{с(макс)}$		$J_{ст}$	X_{0}, Y_{0}
							см ⁴	см ⁴	см	см	см ⁴	см ⁴	см	см	см ⁴	см ⁴	см	см		
9	90	6	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43						
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47						
		8			13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51						
		9			15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55						
10	100	6,5	12	4	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68						
		7			13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71						
		8			15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75						
		10			19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83						
		12			22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91						
		14			26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99						
11	110	16	12	4	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06						
		7			15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96						
12,5	125	8	14	4,6	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00						
		8			19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36						
		9			22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40						
		10			24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45						
		12			28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53						
		14			33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61						
14	140	16	14	4,6	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68						
		9			24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78						
		10			27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82						
16	160	12	16	5,3	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90						
		10			31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30						
		11			34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35						
		12			37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39						
		14			43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47						

Таблица П.2 (окончание)

№ проф.	b	d	R	r	l Глош.	Вес	J_x, J_y	i_x, i_y	$J_{x0(max)}$	$i_{x0(max)}$	$J_{y0(min)}$	$i_{y0(min)}$	J_{x1}	x_0, y_0
16	160	16	16	5,3	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18			54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20			60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	16	5,3	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12			42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1432	3,91	6733	5,89
22	220	14	21	7	111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
		16			60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
25	250	16	24	8	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
		18			78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		20			87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		22			97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		25			106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		28			119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
28	280	133,1	24	8	104,5	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		142,0			111,4	8117	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	

СТАЛЬ ПРОКАТАЯ
УГОЛКОВАЯ ПЕРВАВУГОЛЬНАЯ
ГОСТ 8510-87

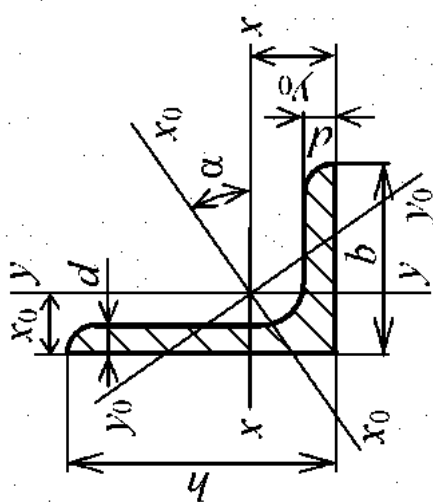


Таблица П.3

№ профиля	Размеры			Площ. профиля см ²	Вес 1 пог. метра кг	Справочные величины для осей						Координаты центра тяжести	
	h	b	d			J_x см ⁴	J_y см ⁴	$J_{x_0 y_0}$ см ⁴	$y_0 - y_0$		$l g \alpha$	y_0 см	x_0 см
									i_{y_0}	i_{x_0}			
2,5×1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,13	0,34	0,392	0,86	0,42			
3,2×2	32	20	3	1,49	1,17	0,28	0,43	0,382	1,08	0,49			
			4	1,94	1,52	0,35	0,43	0,374	1,12	0,53			
4×2,5	40	25	3	1,89	1,48	0,56	0,54	0,385	1,32	0,59			
			4	2,47	1,94	0,71	0,54	0,381	1,37	0,63			
4,5×2,8	45	28	3	2,14	1,68	0,79	0,61	0,382	1,47	0,64			
			4	2,80	2,20	1,02	0,60	0,379	1,51	0,68			
5×3,2	50	32	3	2,42	1,90	1,18	0,70	0,403	1,60	0,72			
			4	3,17	2,49	1,52	0,69	0,401	1,65	0,76			

Таблица П.3 (продолжение)

№ профиля	h	b	d	Площ. см ²	Вес кг	J _x см ⁴	J _y см ⁴	J _{xy} (мм ⁴) см ⁴	i _x (мм) см	tg α	y ₀ см	x ₀ см
5,6×3,6	56	36	3,5	3,16	2,48	10,1	3,30	1,95	0,79	0,407	1,80	0,82
			4	3,58	2,81	11,4	3,70	2,19	0,78	0,406	1,82	0,84
			5	4,41	3,46	13,8	4,48	2,66	0,78	0,404	1,86	0,88
6,3×4	63	40	4	4,04	3,17	16,3	5,16	3,07	0,87	0,397	2,03	0,91
			5	4,98	3,91	19,9	6,26	3,73	0,86	0,396	2,08	0,95
			6	5,90	4,63	23,3	7,28	4,36	0,86	0,393	2,12	0,99
			8	7,68	6,03	29,6	9,15	5,58	0,85	0,386	2,20	1,07
7×4,5	70	45	4,5	5,07	3,98	25,3	8,25	4,88	0,98	0,407	2,25	1,03
			5	5,59	4,39	27,8	9,05	5,34	0,98	0,406	2,28	1,05
7,5×5	75	50	5	6,11	4,79	34,8	12,5	7,24	1,09	0,436	2,39	1,17
			6	7,25	5,69	40,9	14,6	8,48	1,08	0,435	2,44	1,21
			8	9,47	7,43	52,4	18,5	10,9	1,07	0,430	2,52	1,29
8×5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	12,7	7,58	1,08	0,387	2,60	1,13
			6	7,55	5,92	49,0	14,8	8,88	1,09	0,386	2,65	1,17
9×5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,3	19,7	11,8	1,22	0,384	2,92	1,26
			6	8,54	6,70	70,6	21,2	12,7	1,22	0,384	2,95	1,28
			8	11,18	8,77	90,9	27,1	16,3	1,21	0,380	3,04	1,36
10×6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	30,6	18,2	1,38	0,393	3,23	1,42
			7	11,1	8,70	113	35,0	20,8	1,37	0,392	3,28	1,46
			8	12,6	9,87	127	39,2	23,4	1,36	0,391	3,32	1,50
			10	15,5	12,1	154	47,1	28,3	1,35	0,387	3,40	1,58
11×7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	45,6	26,9	1,58	0,402	3,55	1,58
			7	12,3	9,64	152	48,7	28,8	1,53	0,402	3,57	1,60
			8	13,9	10,9	172	54,6	32,3	1,52	0,400	3,61	1,64

Таблица П.3 (окончание)

№ профиля	h	b	d	Площ. см ²	Вес кг	J _x см ⁴	J _y см ⁴	J _{xy} (см ⁴)	i _y (см)	lg α	V ₀ см	x ₀ см
12,5×8	125	80	7	14,1	11,0	227	73,7	43,4	1,76	0,407	4,01	1,08
			8	16,0	12,5	256	83,0	48,8	1,75	0,406	4,05	1,84
			10	19,7	15,5	312	100	59,3	1,74	0,404	4,14	1,92
			12	23,4	18,3	365	117	69,5	1,72	0,400	4,22	2,00
14×9	140	90	8	18,0	14,1	364	120	70,3	1,98	0,411	4,49	2,03
			10	22,2	17,5	444	146	85,5	1,96	0,409	4,58	2,12
16×10	160	100	9	22,9	18,0	606	186	110	2,20	0,391	5,19	2,23
			10	25,3	19,8	667	204	121	2,19	0,390	5,23	2,28
			12	30,0	23,6	784	239	142	2,18	0,388	5,32	2,36
			14	34,7	27,3	897	272	162	2,16	0,385	5,40	2,43
18×11	180	110	10	28,3	22,2	952	276	165	2,42	0,375	5,88	2,44
			12	33,7	26,4	1123	324	194	2,40	0,374	5,97	2,52
20×12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	446	264	2,75	0,392	6,50	2,79
			12	37,9	29,7	1568	482	285	2,74	0,392	6,54	2,83
			14	43,9	34,4	1801	551	327	2,73	0,390	6,62	2,91
			16	49,8	39,1	2026	617	367	2,72	0,388	6,71	2,90
25×16	250	160	12	48,3	37,9	3147	1032	604	3,54	0,410	7,97	3,53
			16	63,3	49,9	4091	1333	781	3,50	0,408	8,14	3,69
			18	71,1	55,8	4545	1475	866	3,49	0,407	8,23	3,77
			20	78,5	61,7	4907	1613	949	3,48	0,405	8,31	3,85

СТАЛЬ ПРОКАТАНАЯ
ШВЕДСКИЕ
ГОСТ 8240-86

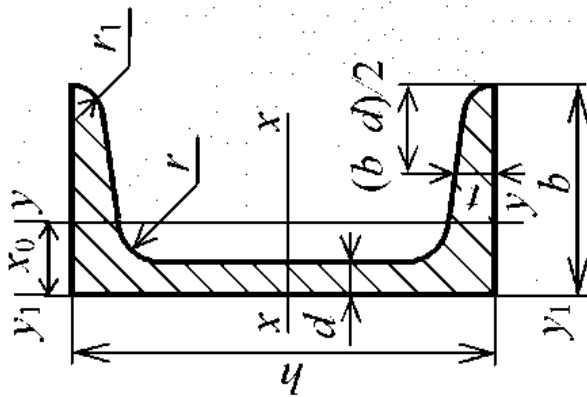


Таблица 1.4

№ про- филья	Вес 1 пог. метра	Размеры							Площ. сече- ния	Справочные величины для осей						Коор. ц. т.
		h	b	d	t	r	r ₁	x			y					
								J _x		W _x	i _x	J _y	W _y	i _y		
	кг							см ⁴	см ³	см	см ⁴	см ³	см	см	см	
5	5,42	50	37	4,5	7,0	6,0	2,5	26,1	10,4	1,94	6,36	8,41	3,59	1,10	1,36	
6,5	6,50	65	40	4,5	7,4	6,0	2,5	54,5	16,8	2,57	10,0	11,9	4,58	1,20	1,40	
8	7,78	80	45	4,8	7,4	6,5	2,5	99,9	25,0	3,17	14,8	17,8	5,89	1,34	1,48	
10	9,20	100	50	4,8	7,5	7,0	3,0	187	37,3	3,99	21,9	25,6	7,42	1,48	1,55	
12	10,8	120	54	5,0	7,7	7,5	3,0	313	52,2	4,78	30,5	34,4	9,01	1,58	1,59	
14	12,3	140	58	5,0	8,0	8,0	3,0	489	69,8	5,59	40,7	45,1	10,9	1,70	1,66	
14а	13,2	140	62	5,0	8,5	8,0	3,0	538	76,8	5,65	44,6	56,6	13,0	1,83	1,84	

Таблиця П.4 (окончание)

№ проф.	Вес кг	h	b	d	t	r	r ₁	Площ. см ²	J _x см ⁴	W _x см ³	i _x см	S _{хпшх} ^{оте} см ³	J _y см ⁴	W _y см ³	i _y см	x ₀ см
16	14,1	160	64	5,0	8,3	8,5	3,5	18,0	747	92,6	6,42	53,7	63,3	13,6	1,87	1,79
16а	15,1	160	68	5,0	8,8	8,5	3,5	19,3	811	101	6,48	58,5	77,3	16,0	2,00	1,98
18	16,1	180	70	5,0	8,7	9,0	3,5	20,5	1080	120	7,26	69,4	85,6	16,9	2,04	1,95
18а	17,2	180	74	5,0	9,2	9,0	3,5	21,9	1180	131	7,33	75,2	104	19,7	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20а	19,6	200	80	5,2	9,6	9,5	4,0	25,0	1660	166	8,15	95,2	137	24,0	2,34	2,27
22	20,9	220	82	5,3	9,6	10,0	4,0	26,7	2120	193	8,91	111	151	25,4	2,38	2,24
22а	22,5	220	87	5,3	10,2	10,0	4,0	28,6	2320	211	9,01	121	186	29,9	2,55	2,47
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24а	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5,0	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6,0	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6,0	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

СТАЛЬ ПРОКАТНАЯ
БАЛКИ ДВУТАВРОВЫЕ
ГОСТ 8239-86

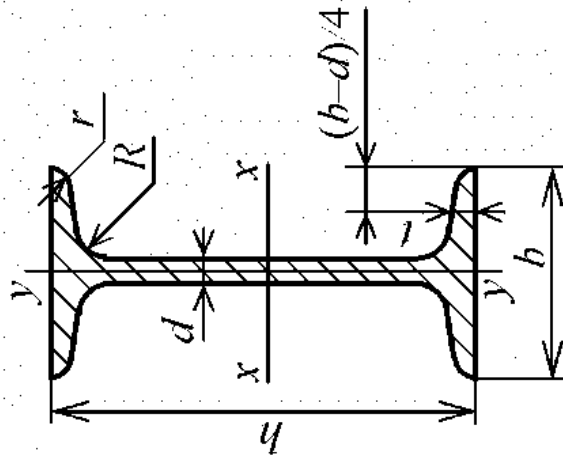


Таблица П.5

№ про- фитя	Вес 1 пог. метра	Размеры						Площ. сече- ния	Справочные величины для осей										
		h	b	d	t	R	r		x		y		J _x	W _x	i _x	S _{отс} х _{max}	J _y	W _y	i _y
									мм	мм	мм	мм							
10	11,1	100	70	4,5	7,2	7,0	3,0	14,2	244	48,8	4,15	28,0	35,3	10,1	1,58				
12	13,0	120	75	5,0	7,3	7,5	3,0	16,5	403	67,2	4,94	38,5	43,8	11,7	1,63				
14	14,8	140	82	5,0	7,5	8,0	3,0	18,9	632	90,3	5,78	51,5	58,2	14,2	1,75				
16	16,9	160	90	5,0	7,7	8,5	3,5	21,5	945	118	6,63	67,0	77,6	17,2	1,90				
18	18,7	180	95	5,0	8,0	9,0	3,5	23,8	1330	148	7,47	83,7	94,6	19,9	1,99				
18a	19,9	180	102	5,0	8,2	9,0	3,5	25,4	1440	160	7,53	90,1	119	23,3	2,17				
20	20,7	200	100	5,2	8,2	9,5	4,0	26,4	1810	181	8,27	102	112	22,4	2,06				

Таблица 1.5 (окончание)

№ проф.	Вес кг	h	b	d	l	R	r	Штолц. см ²	J _x см ⁴	W _x см ³	i _x см	S _{опе} _{хmax} см ³	J _y см	W _y см ³	i _y см
20а	22,2	200	110	5,2	8,3	9,5	4,0	28,3	1970	197	8,36	111	148	27,0	2,29
22	23,7	220	110	5,3	8,6	10,0	4,0	30,2	2530	230	9,14	130	155	28,2	2,26
22а	25,4	220	120	5,3	8,8	10,0	4,0	32,4	2760	251	9,23	141	203	33,8	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	15,0	6,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	75,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	16,0	7,0	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,1	500	170	9,3	15,2	17,0	7,0	96,9	39120	1560	20,1	899	1040	122	3,28
55	88,6	550	180	10,0	16,5	18,0	7,0	113	54810	1990	22,0	1150	1350	150	3,46
60	103	600	190	10,8	17,8	20,0	8,0	131	75010	2500	23,9	1440	1720	181	3,62
65	119	650	200	11,7	19,2	22,0	9,0	151	100840	3100	25,8	1790	2170	217	3,79
70	137	700	210	12,7	20,8	24,0	10,0	174	133890	3830	27,7	2220	2730	260	3,96
70а	158	700	210	15,0	24,0	24,0	10,0	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
70б	184	700	210	17,5	28,2	24,0	10,0	234	175350	5010	27,4	2940	3910	373	4,09

Табл. П.6. Значения коэффициента приведения длины колонн μ

Расч. схема	h/l										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	2,000	1,850	1,700	1,550	1,400	1,260	1,110	0,975	0,852	0,757	0,699
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,500
3	0,500	0,463	0,426	0,391	0,362	0,350	0,362	0,391	0,426	0,463	0,500
4	1,000	0,929	0,850	0,776	0,704	0,636	0,575	0,530	0,507	0,501	0,500
5	0,699	0,652	0,604	0,558	0,518	0,500	0,518	0,558	0,604	0,652	0,699
6	2,000	1,870	1,730	1,600	1,470	1,350	1,230	1,130	1,060	1,010	1,000
7	1,000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0,699	0,646	0,593	0,539	0,484	0,439	0,410	0,412	0,436	0,467	0,500
9	1,000	0,933	0,868	0,804	0,746	0,699	0,672	0,668	0,679	0,693	0,699
10	0,500	0,467	0,436	0,412	0,410	0,439	0,487	0,539	0,593	0,646	0,699

Табл. П.7. Коэффициент ϕ при продольном изгибе колонн

Гибкость λ	Коэф-т ϕ для колонны из стали с пределом текучести σ_T , МПа					
	до 230	231 – 290	291 – 330	331 – 400	401 – 450	свыше 450
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	0,988	0,987	0,986	0,985	0,984	0,983
20	0,970	0,968	0,965	0,962	0,956	0,953
30	0,943	0,935	0,932	0,927	0,916	0,909
40	0,905	0,892	0,888	0,878	0,866	0,852
50	0,867	0,843	0,837	0,823	0,810	0,790
60	0,820	0,792	0,780	0,764	0,740	0,700
70	0,770	0,730	0,710	0,682	0,650	0,610
80	0,715	0,660	0,637	0,604	0,570	0,518
90	0,655	0,592	0,563	0,523	0,482	0,412
100	0,585	0,515	0,482	0,437	0,396	0,336
110	0,512	0,440	0,413	0,370	0,325	0,273
120	0,448	0,383	0,350	0,315	0,273	0,230
130	0,397	0,330	0,302	0,264	0,232	0,196
140	0,348	0,285	0,256	0,228	0,198	0,168
150	0,305	0,250	0,226	0,198	0,173	0,148
160	0,270	0,220	0,200	0,176	0,153	0,130
170	0,240	0,195	0,178	0,156	0,137	0,116
180	0,216	0,175	0,160	0,139	0,122	0,102
190	0,196	0,158	0,142	0,126	0,108	0,092
200	0,175	0,142	0,129	0,112	0,098	0,082
210	0,160	0,130	0,118	0,102	0,089	0,075
≥ 220	0,146	0,119	0,108	0,093	0,081	0,068

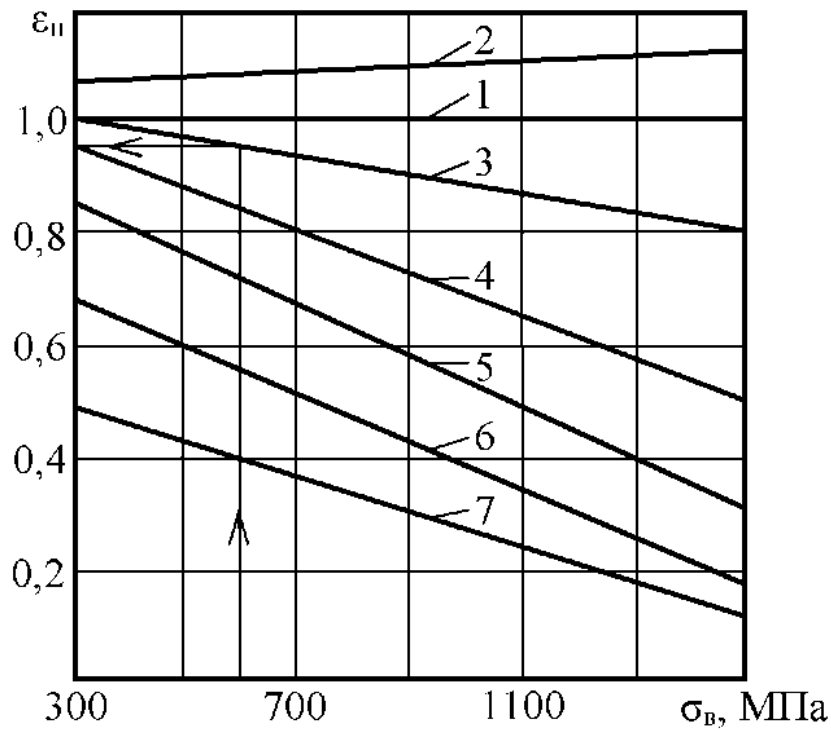


Рис. П.1. Значения поверхностного фактора: 1 – полирование; 2 – суперфиниширование; 3 – чистовое точение резцом; 4 – наличие на поверхности мелкой насечки; 5 – поверхность не обработанная после прокатки; 6 – коррозия (пресная вода); 7 – коррозия (морская вода)

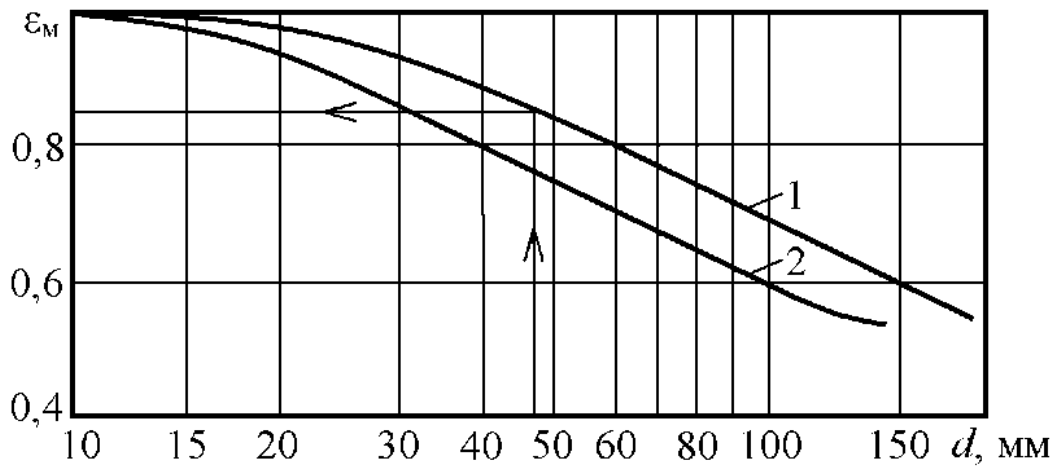


Рис. П.2. Масштабный фактор при изгибе с кручением валов в зависимости от диаметра: 1 – углеродистая сталь при отсутствии концентрации; 2 – легированная сталь при отсутствии концентрации

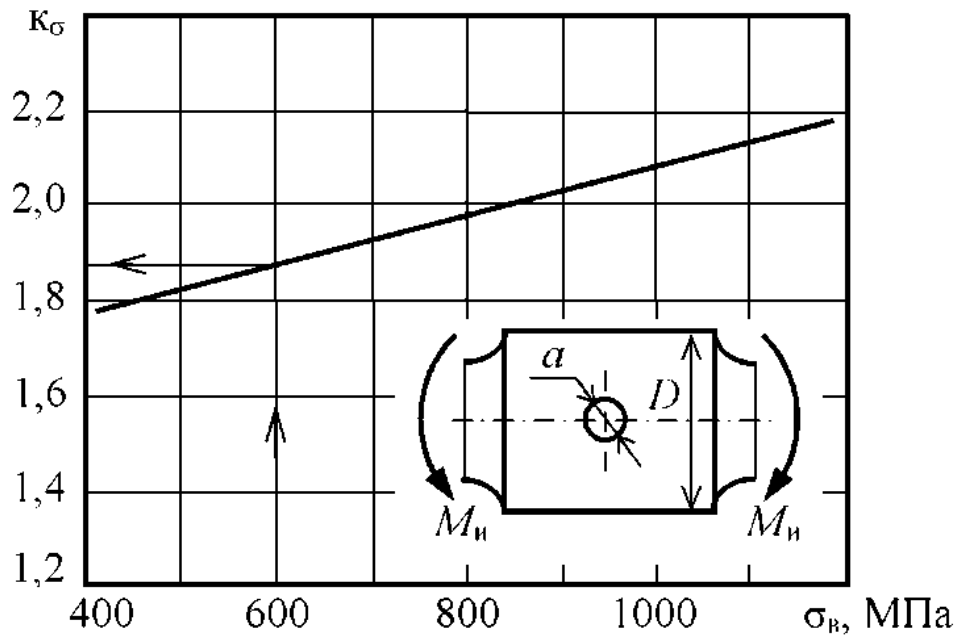


Рис. П.3. Эффективный коэффициент концентрации нормальных напряжений для валов с поперечным отверстием при изгибе

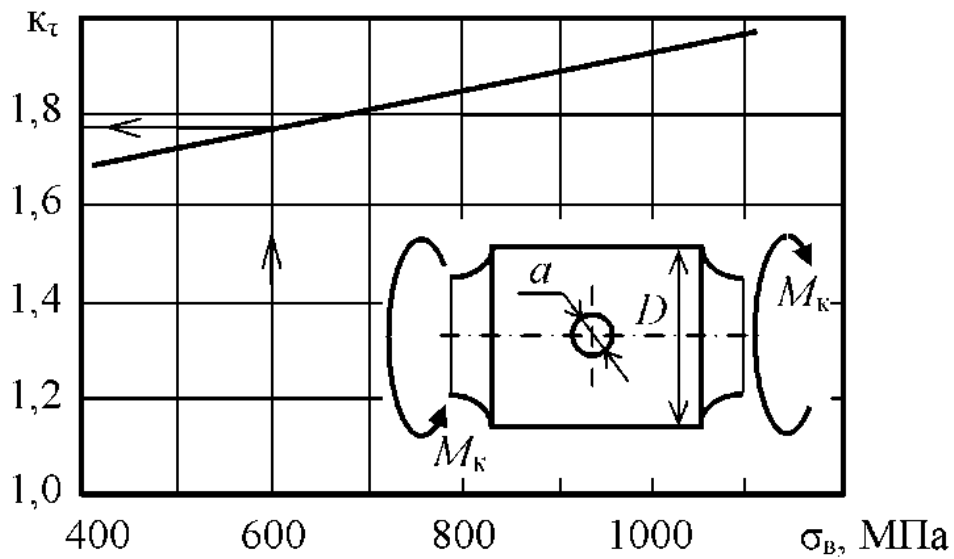


Рис. П.4. Эффективный коэффициент концентрации касательных напряжений для валов с поперечным отверстием при кручении

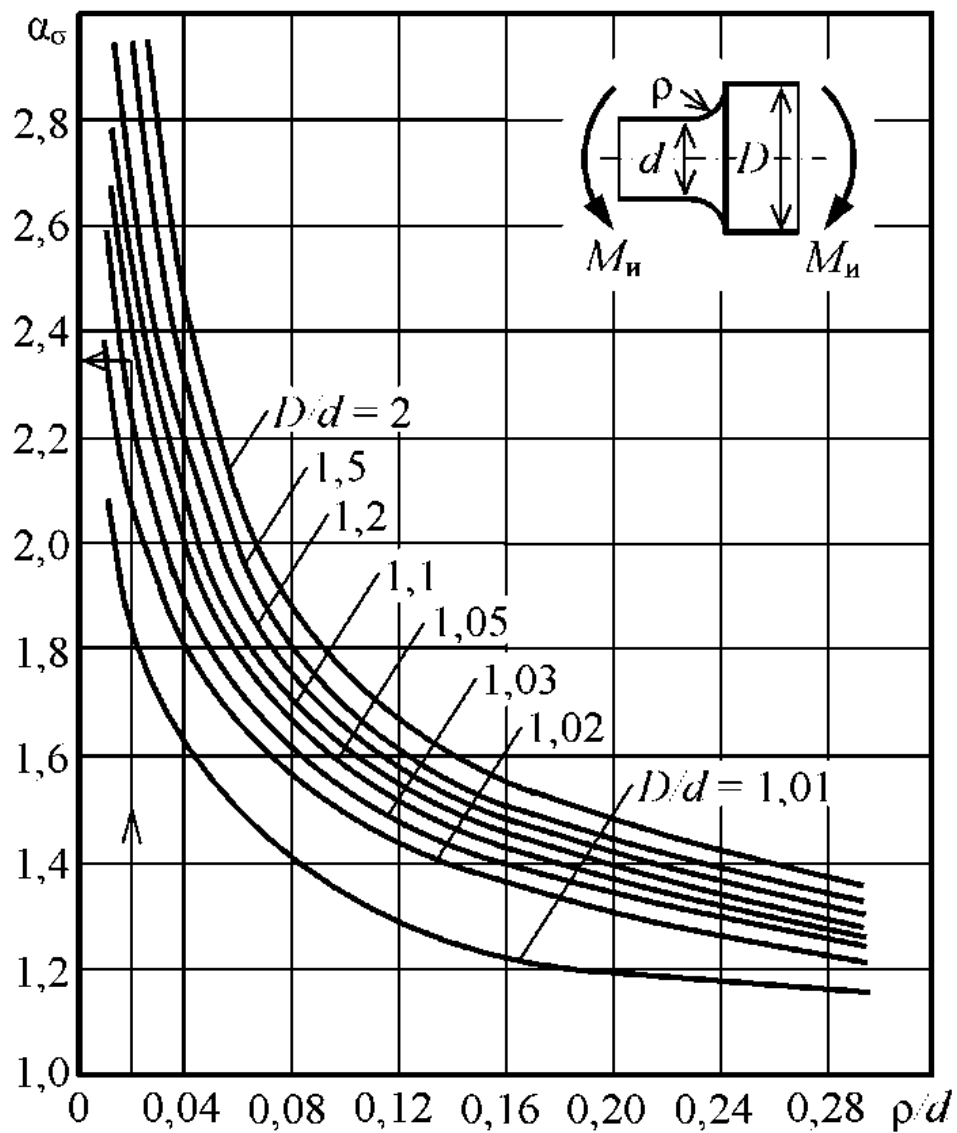


Рис. П.5. Теоретический коэффициент концентрации нормальных напряжений при изгибе ступенчатого вала с галтелью

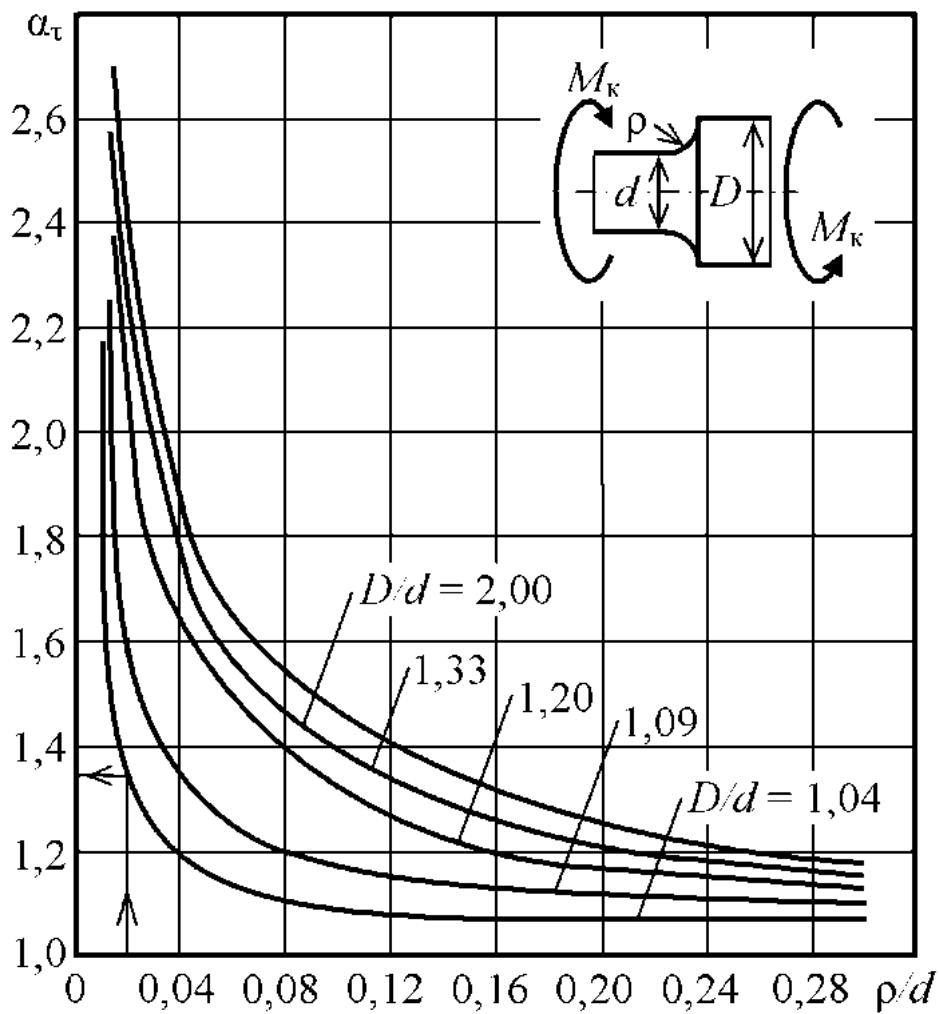


Рис. П.6. Теоретический коэффициент концентрации касательных напряжений при кручении ступенчатого вала с галтелью

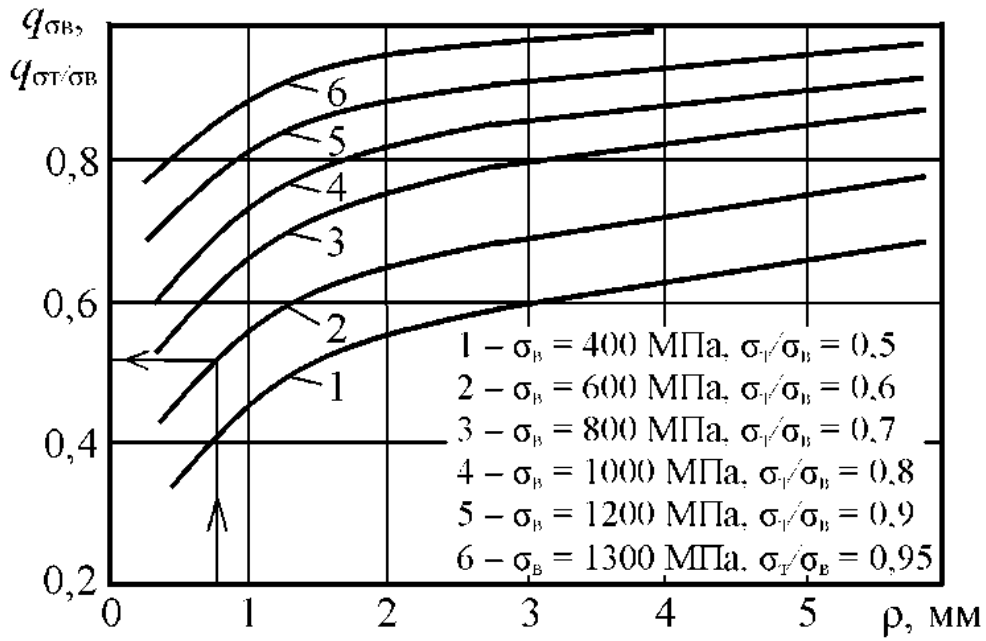


Рис. П.7. Коэффициенты чувствительности к концентрации напряжений в зависимости от радиуса галтели

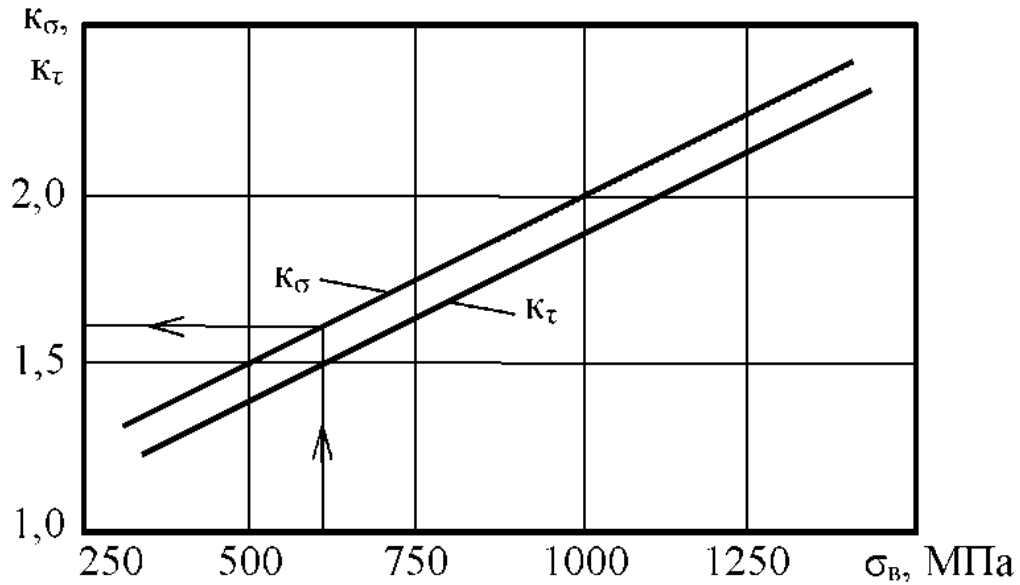


Рис. П.8. Эффективные коэффициенты концентрации нормальных и касательных напряжений для валов со шпоночным пазом по ГОСТ 8788-78

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.В. и др. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 2001. – 399 с.
2. Амбарцумян С.А., Бидерман В.Л., Биргер И.А. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. Т. 1. – М.: Машиностроение, 1988. – 831 с.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1988. – 248 с.
4. Безухов Н.И. Сборник задач по теории упругости и пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1977. – 286 с.
5. Варданян Г.С. и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1999. – 572 с.
6. Вольмир А.С., Григорьев Ю.П., Марьин А.В. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1998.
7. Кутуков Б.Н. и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Методические указания. Изд. 2 – М.: Высшая школа, 1993. – 56 с.
8. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1988. – 401 с.
9. Малинин Н.Н. и др. Сборник задач по прикладной теории пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1984. – 230 с.
10. Миролубов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 347 с.
11. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов. – Киев: Выща школа, 1986. – 775 с.
12. Писаренко Г.С. и др. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наук. Думка, 1998. – 734 с.
13. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наукова думка, 1976. – 415 с.
14. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. – М.: Высшая школа, 1984. – 217 с.
15. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 197 с.
16. Смирнов А.Ф. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975. – 480 с.
17. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / Под ред. А.В. Алек-

- сандрова. – 2-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2001. – 560 с.
18. Степин П.А. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1993. – 327 с.
19. Терегулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1994. – 432 с.
20. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев.: Будивельник, 1992. – 432 с.
21. Фсодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебн. для вузов. – 10-е изд., перераб. и . доп. – М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.– 592 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Abramov I.V., Dobrovolsky V.I., Dobrovolsky S.V. Load-carrying capacity of hydraulic jacks elements with energy-based approach to low-cycle failure // Proceedings of the VIII intern. conf. on fracture (Lviv, June 1993). – Kyiv: Naukova Dumka, 1993. – P. 601 – 602.
2. Abramov I.V., Dobrovolsky S.V. Methods of experimental and analytical modelling of low-cycle carrying ability of details of hydroequipment // Proceedings of the 5-th International Conference “Dynamics of machine aggregates” (Bratislava, 27 – 29 June 2000). – Bratislava: Slovak university of technology, 2000. – P. 13 – 21.
3. Abramov I.V., Dobrovolsky S.V. Regularities of a similarity of low-cycle deformation of a model and detail // Proceedings of the 5-th International Conference “Dynamics of machine aggregates” (Bratislava, 27 – 29 June 2000). – Bratislava: Slovak university of technology, 2000. – P. 22 – 33.
4. Abramov I.V., Dobrovolsky V.I., Dobrovolsky S.V. Force, deformation and energy regularities of similarity of low-cycle fatigue of model and detail // Proceedings of the fifth intern. conf. on low cycle fatigue (Berlin, 9 – 11 September 2003). – Berlin: Federation of European Materials Societies, 2003. – P. 22.
5. Абрамов И.В., Добровольский С.В. Анализ концентрации циклических напряжений, упругопластических деформаций и энергий в корпусе гидродомкрата // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1996. – № 5. – С. 63 – 70.
6. Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной прочности материалов. – Киев: АН УССР, 1953. – 123 с.
7. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов. – М.: Машиностроение, 1964. – 275 с.
8. Гордон Дж. Почему мы не проваливаемся сквозь пол. Перевод с англ. – М. Мир, 1971. – 272 с.

9. Добровольский В.И., Карпунин В.А. Машина для испытаний материалов на малоцикловую усталость при изгибе // Заводская лаборатория. – 1968. – № 6. – С. 73 – 75.
10. Добровольский В.И. Определение напряжений при чистом упругопластическом изгибе или кручении // Проблемы прочности. – 1972. – № 12. – С. 93 – 94.
11. Добровольский В.И. Обобщение зависимости для описания диаграмм чистого упругопластического изгиба // Проблемы прочности. – 1976. – № 12. – С. 60 – 62.
12. Добровольский В.И. Теория подобия малоциклового усталостного разрушения // Проблемы прочности. – 1981. – № 6. – С. 12 – 17.
13. Добровольский В.И., Кучерявый Б.П., Пряхин В.В. Руководящий технический материал РТМЗ-1637-84. Материалы для штампов. Методы определения прочности при механической малоцикловой усталости. – М.: Стандарты. – 1984. – 60 с.
14. Добровольский В.И. Установка для малоцикловых испытаний материалов при постоянной ширине петли пластического гистерезиса // Заводская лаборатория. – 1984. – № 10. – С. 1341 – 1343.
15. Добровольский В.И. Закономерности подобия при малоцикловой усталости и их использование для прочностных расчетов элементов штампов: Автореферат дисс. ... д-ра техн. наук. – Челябинск, ЧПИ, 1985. – 32 с.
16. Добровольский В.И., Пряхин В.В. Методы испытаний и расчетов на малоцикловую прочность материалов и элементов кузнечных штампов. – Ижевск: Удм. ЦНТИ, 1992. – 192 с.
17. Добровольский В.И., Добровольский С.В., Шакиров Р.Ф. Результаты конечноэлементного анализа напряжений в зонах концентрации деталей гидрооснастки // Вестник машиностроения. – 1999. – № 1. – С. 11 – 14.
18. Добровольский В.И., Добровольский С.В. Методы моделирования малоцикловой прочности элементов конструкций // Вестник ИжГТУ. – 2003. – № 1. – С. 40 – 46.
19. Добровольский В.И., Добровольский С.В. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для трещин, расположенных в надрезах элементов конструкций // Известия ВУЗ. Авиационная техника. – 2003. – № 2. – С. 64 – 66.
20. Добровольский В.И., Добровольский С.В. Анализ напряжений, упругопластических деформаций и энергий элементов конструкций с учетом типа трещин // Известия ВУЗ. Авиационная техника. – 2004. – № 1. – С. 6–9.
21. Добровольский В.И., Добровольский С.В. Кинетика напряжений, упругопластических деформаций и энергий в окрестности трещин при циклическом нагружении // Известия ВУЗ. Авиационная техника. – 2004. – № 4. – С. 6 – 9.

22. Добровольский В.И., Добровольский С. В. Оценка вязкости разрушения модельных элементов с учетом размера трещин // Заводская лаборатория. – 2004. – № 10. – С. 47 – 52.
23. Добровольский С.В. Исследование силовых, деформационных и энергетических критериев малоциклового прочностии стали 5ХНМ при наличии концентраторов напряжений // Междунар. журн. «Проблемы прочностии». – 1996. – № 5. – С. 5 – 16.
24. Добровольский С.В. Методы оценки масштабного эффекта в расчетах на прочностть // Вестник машиностроения. – 1998. – № 5. – С. 12 – 15.
25. Добровольский С.В. Энергетический метод оценки концентрации напряжений и упругопластических деформаций // Междунар. журн. «Проблемы прочностии». – 1999. – № 3. – С. 29 – 35.
26. Добровольский С.В. Энергетическая модель подобия малоциклового разрушения образца и элемента конструкции // Междунар. журн. «Проблемы прочностии». – 1999. – № 6. – С. 23 – 34.
27. Добровольский С.В. Обобщенный метод оценки поверхностного эффекта при расчетах на малоцикловою прочностть // Вестник машиностроения. – 1999. – № 12. – С. 17 – 20.
28. Добровольский С.В. Методы моделирования малоциклового прочностии деталей гидрооснастки. Руководящий технический материал. – Ижевск: ИжГТУ, 1999. – 101 с.
29. Добровольский С.В. Моделирование малоциклового прочностии деталей гидрооснастки // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2000. – № 1. – С. 52 – 58.
30. Добровольский С.В. Методы оценки влияния конструктивной концентрации на малоцикловою прочностть // Вестник машиностроения. – 2000. – № 6. – С. 19 – 24.
31. Добровольский С.В. Напряженное состояние элементов конструкций в зоне концентраторов напряжений с трещинами при различных видах нагружения // Междунар. журн. «Проблемы прочностии». – 2001. – № 1. – С. 57 – 67.
32. Добровольский С.В. Энергетические модели подобия малоциклового разрушения и методы оценки прочностии элементов конструкций: Автореферат дисс. ... д-ра техн. наук. – Ижевск, ИжГТУ, 2001. – 32 с.
33. Добровольский С.В. Цикловое изменение полей остаточных напряжений и деформаций в окрестности трещин при неупругой разгрузке // Известия ВУЗ. Авиационная техника. – 2002. – № 1. – С. 6 – 9.
34. Добровольский С.В. Поля остаточных напряжений и деформаций в окрестности трещин после неупругой разгрузке // Известия ВУЗ. Авиационная техника. – 2004. – № 3. – С. 3 – 6.

35. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. Природа усталости металлов. – М.: Металлургия, 1975. – 455 с.
36. Кеннеди А. Ползучесть и усталость в металлах. – М.: Металлургия, 1965. – 312 с.
37. Коцаньда С. Усталостное разрушение металлов. – М.: Металлургия, 1976. – 455 с.
38. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. – М.: Машиностроение, 1981. – 271 с.
39. Писаренко Г.С., Трощенко В.Т. Статистические теории прочности и их применение к металлокерамическим материалам. – Киев: Наукова думка, 1974. – 106 с.
40. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
41. Расчеты на прочность в машиностроении. Справочник в 3-х томах / Под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Наука, 1979. – 964 с.
42. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
43. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. Перевод с англ. – М.: Гостехиздат, 1957. – 536 с.
44. Ужик Г.В. Сопротивление отрыву и прочность металлов. – М.: АН СССР, 1960. – 256 с.
45. Хейвуд Р. Проектирование с учетом усталости. – М.: Машиностроение, 1969. – 504 с.
46. Ugural A.C. Mechanics of Materials. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1991. – 441 p.