ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕЙ
Учебно-методические указания

Методическое указание составлено в соответствии с рабочими программами по курсу «Сопротивление материалов» для механических специальностей.

Методическое указание содержит задания к расчетно-графическим работам по расчету стержней и стержневых систем на жесткость, устойчивость и действие динамических нагрузок. В первой части приведены краткие сведения из теории, необходимые для решения задач.

Методическое указание предназначено для студентов очной и заочной формы обучения.

Краткие сведения из теории.

1. Общий метод определения перемещений точек оси стержня.

В инженерной практике наряду с расчетами на прочность необходимо проводить и расчеты на жесткость, максимальное перемещение линейное или угловое не должно превышать его допустимого для данной конструкции значения.

$\delta_{max} \leq [\delta]$,

где δ – может быть любое линейное перемещение точек оси стержня или угловое перемещение поперечного сечения стержня.

Используя условие жесткости можно, так же как и при расчете на прочность, определить размеры поперечного сечения при заданных внешних нагрузках, определить грузоподъёмность при известных размерах конструкции и, кроме того, можно провести проверочный расчет при заданных размерах и внешних нагрузках.

Перемещения в стержнях может быть вычислено различными методами.

1.1. Растяжение, $q_z \neq 0$.

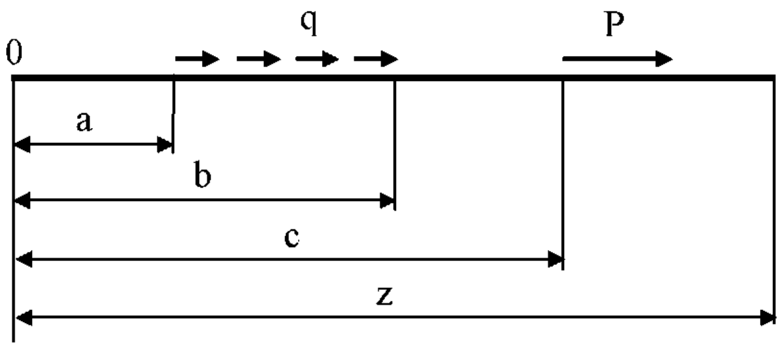


Рис.1

Перемещения поперечных сечений стержня вдоль оси z описывается уравнением:

$$W(z) = A + Bz - \frac{1}{EF}\left[\frac{q(z-a)^2}{2} - \frac{q(z-b)^2}{2} + P(z-c)\right],$$

где A, B – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий и имеющие следующий физический смысл:

$A = W(0)$, $B = W'(0) = EFN(0)$;

a, b, c – координаты приложения внешних нагрузок;

E – модуль упругости;

F – площадь поперечного сечения.

Выражение, стоящее в скобках, называют нагрузочной функцией.

Граничные условия (учитывают кинематические и статические граничные условия):

а) свободный конец $W'(0) = 0$ $(N = 0)$,

б) закрепленный конец $W = 0$.

Найдя выражение для функции W (z), можно найти выражение для продольных усилий $N(z) = EFW'$.

1.2. Кручение, $m_z \neq 0$.

Угловое перемещение поперечного сечения стержня (угол закручивания) относительно оси z определяется по формуле:

$$\theta(z) = A + Bz - \frac{1}{GI_\rho}\left[\frac{m(z-a)^2}{2} - \frac{m(z-b)^2}{2} + L(z-c)\right],$$

где m – интенсивность распределенного крутящего момента,

L – внешний крутящий момент,

a, b, c – координаты точек приложения внешних нагрузок,

G – модуль сдвига,

I_ρ - полярный момент инерции поперечного сечения стержня,

A и B – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий, которые имеют следующий физический смысл:

$A = \theta(0)$, $B = \theta'(0) = GI_\rho M_k(0)$.

Граничные условия:

а) свободный конец $\theta' = 0$ $(M_к = 0)$,

б) закрепленный конец $\theta = 0$.

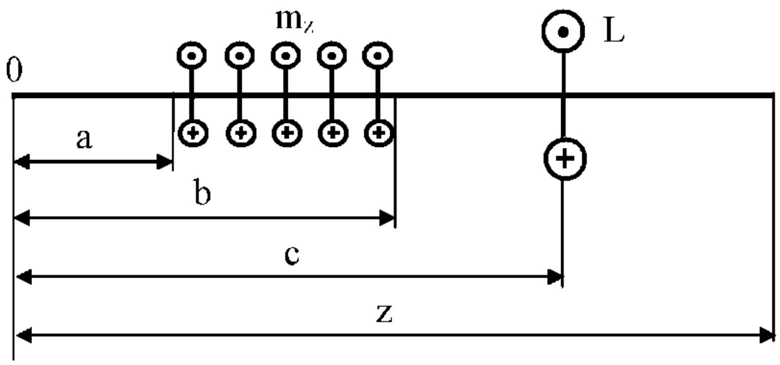


Рис.2

Крутящий момент связан с угловыми перемещениями зависимостью $M_k(z) = GI_\rho\theta'$ и для его вычисления можно воспользоваться следующим выражением: $M_k(z) = BGI_\rho - [m(z - a) - m(z - b) + L]$.

1.3. Поперечный изгиб, $q_y \neq 0$.

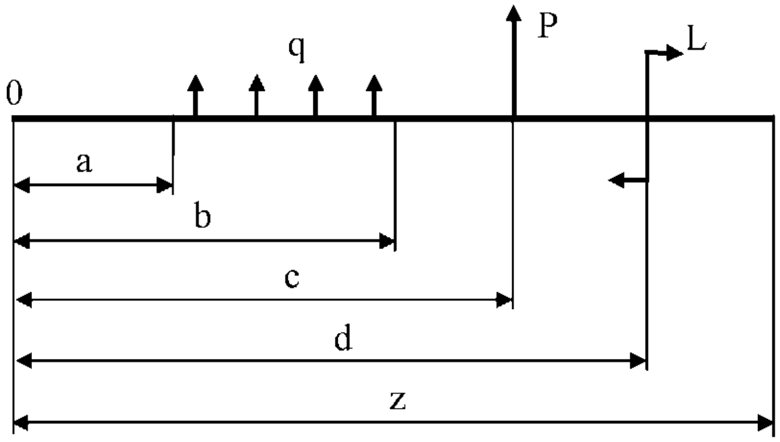


Рис.3

Вертикальные перемещения точек оси стержня для приведенных частных случаев нагружения определяются по формуле:

$$V(z) = A + Bz + Cz^2/2 + Dz^3/6 + \frac{1}{EI_x}\left[\frac{q(z-a)^4}{24} - \frac{q(z-b)^4}{24} + \frac{P(z-c)^3}{6} + \frac{L(z-d)^2}{2}\right].$$

Углы поворота поперечных сечений стержня относительно оси x:

$$\varphi(z) = -dV/dz = -B - Cz - Dz^2/2 - \frac{1}{EI_x}\left[\frac{q(z-a)^3}{6} - \frac{q(z-b)^{34}}{6} + \frac{P(z-c)^2}{2} + L(z-d)\right].$$

Для составления этих выражений рекомендуется предварительно разбить стержень на силовые участки и записывать по порядку все нагрузки, начиная с левого концевого сечения и отмечая границы участков.

Учитывая, что $EI_x \cdot dV^2/dz^2 = -M_x$ и $EI_x \cdot dV^3/dz^3 = -Q_y$, получим выражения для изгибающего момента и поперечной силы в следующем виде:

$$M_x(z) = - C \cdot EI_x - D \cdot EI_x\, z - \left[\frac{q(z-a)^2}{2} - \frac{q(z-b)^2}{2} + P(z-c) + L\right],$$

$$Q_y(z) = - D \cdot EI_x - [q(z-a) - q(z-b) + P].$$

Постоянные интегрирования имеют следующий физический смысл:

$A = V(0)$, $B = -\varphi(0)$, $C = -M_x(0) / EI_x$, $D = -Q_y(0) / EI_x$.

В формуле принято:

a – абсцисса сечения, в котором началась распределенная нагрузка,

b – абсцисса сечения, в котором закончилась распределенная нагрузка,

c – абсцисса сечения, в котором приложена сосредоточенная нагрузка,

d – абсцисса сечения, в котором приложена сосредоточенная пара сил.

Для определения четырех неизвестных постоянных необходимо использовать статические и кинематические граничные условия.

В зависимости от условий закрепления концов стержня имеем следующие граничные условия:

1) свободный конец: $M_x = 0$ ($V'' = 0$),

$Q_y = 0$ ($V''' = 0$),

2) шарнирное опирание: $V = 0$, $M_x = 0$ ($V'' = 0$),

3) жесткая заделка (защемление): $V = 0$, $\varphi = 0$.

Подбор размеров поперечного сечения стержней из расчета на прочность по нормальным напряжениям производится исходя из условия прочности $\sigma_{z\,max} = [\sigma]$.

При расчете на жесткость размеры сечения определяются из условий жесткости по вертикальным и угловым перемещениям, т.е. $\delta_{max} \le [\delta]$ и

$\theta_{max} \le [\theta]$.

1.4. Определение перемещений по формуле Мора.

Если при решении задач возникает необходимость определить перемещение отдельной точки оси или угловое перемещение заданного сечения, то в этом случае можно воспользоваться формулой Мора:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{C^P(z)C^0(z)}{ж} \quad ,$$

где δ - искомое линейное или угловое перемещение,

$C^P_{(z)}$- уравнение внутреннего силового фактора от внешней заданной нагрузки на данном участке,

$C^0_{(z)}$- уравнение внутреннего силового фактора от единичной нагрузки на том же участке, в той же системе отсчета,

Ж – жесткость стержня, соответствующая виду нагружения,

n – число силовых участков стержня.

При вычислении по интегралу Мора линейного перемещения необходимо к освобожденному от заданных внешних нагрузок стержню в направлении определяемого перемещения приложить единичную силу P^0 =1 в том сечении, где определяется перемещение.

Если окажется, что результат вычисления положителен, то направление искомого перемещения совпадает с выбранным направлением единичной силы; если отрицателен – то направление перемещения противоположно принятому для единичной нагрузки.

При вычислении углового перемещения некоторого сечения, необходимо в этом сечении приложить пару сил с моментом равным единице в направлении определяемого перемещения.

Формула Мора будет иметь вид:

для растяжения $$\delta = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{N^P(z)N^0(z)}{EF} \quad ,$$

для изгиба $$\delta = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{M^P(z)M^0(z)}{EI_x} \quad ,$$

для кручения $$\delta = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{M_k^p(z) M_k^o(z)}{GI_p} .$$

1.5. Расчет рам.

Рамой называется стержневая конструкция, состоящая из жестко соединенных прямых стержней. В дальнейшем рассматриваются только рамы, для которых оси всех стержней и внешние нагрузки лежат в одной плоскости. Такие рамы называются плоскими. Рамы могут быть статически определимыми и статически неопределимыми. Статически определимой называется рама, у которой число наложенных связей равно числу степеней свободы. Если же число наложенных связей будет больше, то такая система называется статически неопределимой, а разница между ними определяет степень статической неопределимости плоской рамы: $n = m - 3$, где n - степень статической неопределимости, m - число наложенных связей.

Для определения интегральных характеристик напряжений (внутренних силовых факторов) в статически определимой системе можно воспользоваться выражениями для $N(z)$, $Q_y(z)$ и $M_x(z)$, полученными для прямых стержней.

Только для определения всех постоянных интегрирования необходимо к статическим граничным условиям добавить условия сопряжения стержней в жестком узле: $M_{x1}(l) = M_{x2}(0)$ – изгибающий момент в конце предыдущего стержня равен моменту в начале следующего стержня.

Для определения внутренних усилий можно воспользоваться и методом сечений, если схема нагружения не слишком сложна.

Для раскрытия статической неопределимости заменяют заданную систему эквивалентной статически определимой системой. Для этого необходимо в заданной системе отбросить лишние связи и заменить их неизвестными реакциями опор X_i. Эти неизвестные реакции можно найти, воспользовавшись канонической системой уравнений метода сил в виде:

$$\begin{cases} \Delta_{1p} + \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1n}x_n = 0 \\ \Delta_{n1} + \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots + \delta_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

где x_i – «лишние» неизвестные реакции связей,

n – степень статической неопределимости,

Δ_{ip} – перемещение в основной системе в направлении i-той неизвестной под действием заданных нагрузок,

δ_{ik} – перемещение в основной системе в направлении i-той неизвестной под действием k-той неизвестной.

Причем $\delta_{ik} = \delta_{ki}$,

Поскольку стержни рамы работают на растяжение – сжатие и изгиб, то нормальные напряжения в поперечных сечениях определяют по формуле:

$$\sigma_Z = \frac{N}{F} + \frac{M_X}{I_X}y$$

Максимальные нормальные напряжения по абсолютной величине:

$$\sigma_Z = \left|\frac{N}{F}\right| + \left|\frac{M_X}{W_X}\right|,$$

где W_x – осевой момент сопротивления сечения стержня.

Подбор размеров поперечного сечения стержня из расчета на прочность проводят только по изгибающему моменту, а затем проверяют с учетом продольной силы.

1.6. Стержни с круговой осью.

Рассматриваются плоские криволинейные стержни, ось которых представляет собой часть окружности. Все внешние нагрузки лежат в плоскости оси стержня. В этом случае в поперечных сечениях стержня только три интегральных характеристики будут отличны от нуля: $N \neq 0$, $Q_y \neq 0$, $M_x \neq 0$.

Выражения для этих величин могут быть составлены с использованием метода сечений, для чего необходимо предварительно определить реакции опор. В произвольном сечении Y:

$N(\varphi) = -T \cdot \cos(\varphi - \alpha_2) + P \cdot \sin(\varphi - \alpha_1)$,

$Q_y(\varphi) = -P \cdot \cos(\varphi - \alpha_1) - T \cdot \sin(\varphi - \alpha_2)$,

$M_x(\varphi) = -P \cdot r \cdot \sin(\varphi - \alpha_1) - T \cdot r \cdot [1 - \cos(\varphi - \alpha_2)]$.

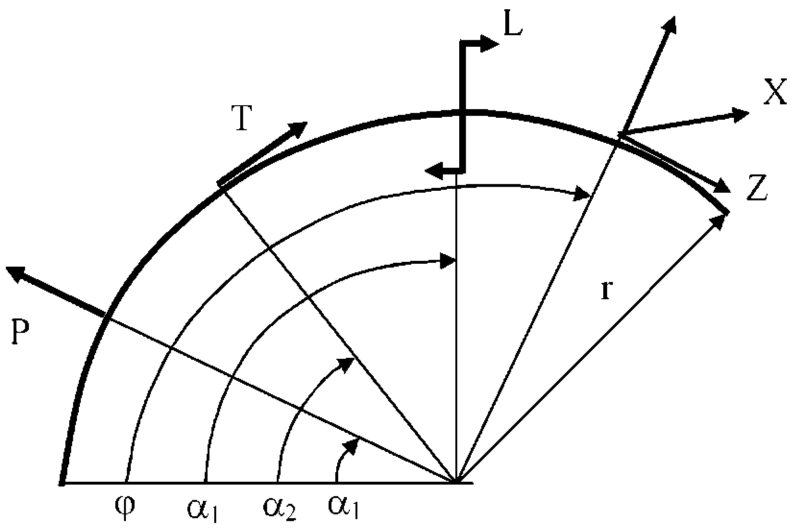


Рис.4

Линейные и угловые перемещения в стержнях с круговой осью можно определить с помощью формулы Мора в следующем виде:

$$\delta = \int_s \frac{M_x^{p}(\varphi) M_x^{0}(\varphi)}{EI_x} r d\varphi ,$$

$M^p_x(\varphi)$ – уравнение изгибающих моментов от заданных нагрузок,

$M^0_x(\varphi)$ – уравнение изгибающих моментов от единичной нагрузки, приложенной в том сечении, где определяются перемещения.

При определении линейного перемещения в сечении прикладывается единичная сила $P^0 = 1$ в направлении определяемого перемещения; при определении угловых перемещений прикладывают единичный момент $L^0 = 1$.

Если стержень является статически неопределимым, то статическую неопределимость можно раскрыть с помощью метода сил.

Нормальные напряжения в стержнях малой кривизны ($r > 5h$, где h – высота поперечного сечения) можно вычислить по формуле для прямого стержня: $\sigma_z = N/F + y \cdot M_x/I_x$.

Для стержней большой кривизны ($z < 5h$) применяют специальные формулы.

1.7. Расчет прямых стержней на устойчивость.

Прямолинейный центрально сжатый стержень при определенной величине нагрузки может потерять устойчивость, т.е. изогнуться. Эта нагрузка, при которой прямолинейная форма перестает быть формой устойчивого равновесия, называется критической.

В общем случае сжатого монолитного стержня критическое значение силы определяется по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \pi^2 \cdot EI_{min}/(\mu l)^2,$$

где μ – коэффициент приведенной длины стержня, зависящий от способов закрепления концов стержня,

I_{min} – наименьший из главных центральных моментов инерции сечения,

l – полная длина стержня.

Условие применимости формулы Эйлера может быть записано в виде:

$\lambda \geq \lambda_{пр}$,

где $\lambda = \mu l/i_{min}$ – гибкость стержня,

i_{min} – наименьший радиус инерции сечения,

$\lambda_{пр} = \pi\sqrt{E/\sigma_п}$ - гибкость, при которой критическое напряжение равно пределу пропорциональности $\sigma_п$.

В случае сжимающей нагрузки, меняющейся по длине стержня, ее критическое значение можно определить приближенным способом из условий равновесия деформированного стержня:

$$EI_x\int_0^l (V'')^2 dz = q\int_0^l dz\int_0^z (V')^2 dz,$$

где V (z) – уравнение изогнутой оси стержня, задается приближенно из условий закрепления стержня.

Эта функция может быть подобрана в тригонометрическом виде или в виде полинома.

1.8. Расчет стержней на ударную нагрузку.

Под ударом понимают взаимодействие движущихся тел (или одного неподвижного, а другого движущегося) связанное с резким изменением скорости этих тел за весьма короткий промежуток времени. Полученные при

При изучении поведения упругого тела под действием ударной нагрузки принимают следующие допущения:

а) в ударяемой конструкции возникают напряжения, не превышающие предела пропорциональности материала, и закон Гука при ударе сохраняет свою силу;

б) удар считают неупругим, т.е. после удара тела не отделяются друг от друга и продолжают дальнейшее движение вместе;

в) ударяющее тело является абсолютно жестким и не деформируется;

г) силами сопротивления движению пренебрегают;

д) масса конструкции, по которой наносится удар, в расчете не учитывается.

При ударе некоторой массы m по стержню со скоростью v максимальные напряжения и перемещения в нем равны:

$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot к_{дин}$,

$\delta_{дин} = \delta_{ст} \cdot к_{дин}$,

где $\sigma_{ст}$ и $\delta_{ст}$ - соответственно напряжения и перемещения в заданной точке стержня, вызванные статически приложенной в месте удара силой

$P = mg$.

$к_{дин}$ - так называемый динамический коэффициент.

Этот коэффициент определяется следующим образом:

а) если задана скорость v_0 в момент удара, то

$$К_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{ст}^0}} ;$$

б) если масса падает с высоты H, то эта формула примет вид:

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta^{0}_{ст}}},$$

где $\delta^{0}_{ст}$ - перемещение сечения в месте удара при статическом приложении силы Р, которое можно определить любым из вышеизложенных методов.

Пример 1.

Для заданной схемы нагружения стержня построить эпюры продольной силы N(z) и линейных перемещений W(z) при следующих исходных данных: q=10 кН/м, l=1м, из расчета на прочность и жесткость определить размеры прямоугольного поперечного сечения при h/b=1.5, [σ] =160 МПа, [W] =0.002l.

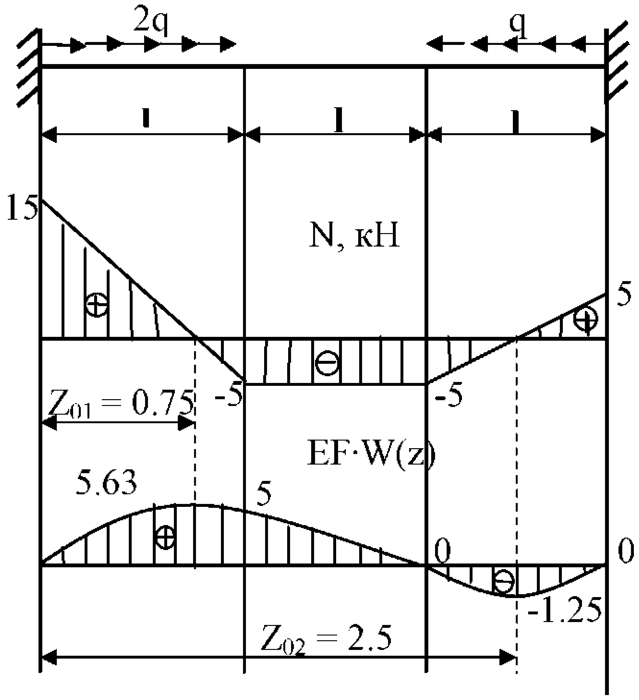


Рис.5

Решение.

1. Совместим начало системы координат с левым концом стержня и направим координатную ось z вдоль его продольной оси.

В соответствии со схемой нагружения разделим стержень на три участка и запишем уравнения линейных перемещений и продольных сил следующим образом:

$$W(z) = A + B\cdot z - 2q\cdot z^2/2EF\,\big|_1 + 2q\,(z-l)^2/2EF\,\big|_2 + q\,(z-2l)^2/2EF\,\big|_3,$$

$$N(z) = W'(z)\cdot EF = N(0) - 2q\cdot z\,\big|_1 + 2q\,(z-l)\,\big|_2 + q\,(z-2l)\,\big|_3.$$

В этих уравнениях приняты следующие обозначения:

A=W(0) – линейное перемещение в начале координат,

B=N(0)/EF – отношение продольной силы в начале координат к жесткости стержня при растяжении, E – модуль Юнга для стали $E=2\cdot10^5$ МПа,

F – площадь поперечного сечения стержня.

Для решения задачи необходимо определить две неизвестные величины – W(0) и N(0). Для этого запишем два граничных условия:
W (0) =0 и W (3l) =0.

Напомним, что граничные условия – это известные значения интегральных характеристик или перемещений в какой-либо точке стержня.

В соответствии с первым граничным условием имеем, что константа A=0; для определения B = N(0)/EF необходимо приравнять уравнение линейных перемещений к нулю, подставив в нем вместо координаты «z» координату «3l»:

$$B\cdot3l-2q\,(3l)^2/2EF+2q\,(3l-l)^2/2EF+q\,(3l-2l)^2/2EF=0.$$

Решая это уравнение, найдем: B=15 / EF и, следовательно, N(0)=15 кн.

2. Построение графиков продольных сил и линейных перемещений.

При построении графиков уравнения рассматриваются на каждом участке в отдельности и вместо координаты «z» подставляется соответствующая координата начала и конца рассматриваемого участка.

График N (z):

1 участок - $0 \le z \le l$:

$$N(0)=15 \text{ кн},$$

$$N(l)=15-2\cdot10\cdot1=-5 \text{ кн}.$$

2 участок - $l \le z \le 2l$:

$$N(l)=15-2\cdot10\cdot1+2\cdot10(1-1)=-5 \text{ кн},$$

$$N(2l)=15-2\cdot10\cdot2+2\cdot10(2-1)=-5 \text{ кн}.$$

3 участок - $2l \le z \le 3l$:

$$N(2l)=15-2\cdot10\cdot2+2\cdot10(2-1)+2\cdot10(2-2)=-5 \text{ кн},$$

$$N(3l)=15-2\cdot10\cdot3+2\cdot10(3-1)+2\cdot10(3-2)=5 \text{ кн}.$$

График W (z):

1 участок - $0 \le z \le l$:

$$W(0)=0 \text{ м},$$

$$W\ (l) = 15\cdot 1/EF - 2\cdot 10\cdot 1^2/2EF = 5/EF.$$

2 участок - $l \le z \le 2l$:

$$W\ (l) = 15\cdot 1/EF - 2\cdot 10\cdot 1^2/2EF + 2\cdot 10(1-1)^2/2EF = 5/EF,$$

$$W\ (2l) = 15\cdot 2/EF - 2\cdot 10\cdot 2^2/2EF + 2\cdot 10(2-1)^2/2EF = 0 \text{ м}.$$

3 участок - $2l \le z \le 3l$:

$$W\ (2l) = 15\cdot 2/EF - 2\cdot 10\cdot 2^2/2EF + 2\cdot 10(2-1)^2/2EF + \\ + 10(2-2)^2/2EF = 0 \text{ м},$$

$$W\ (3l) = 15\cdot 3/EF - 2\cdot 10\cdot 3^2/2EF + 2\cdot 10(3-1)^2/2EF + \\ + 10(3-2)^2/2EF = 0 \text{ м}.$$

Т.к. между графиками W (z) и N (z) существует дифференциальная зависимость, то при пересечении графиком N (z) нулевой линии на графике W (z) будет наблюдаться экстремум. Для определения координаты экстремума необходимо приравнять уравнение соответствующего участка к нулю и решить его относительно неизвестной координаты z_0. Определим координаты z_{01} и z_{02}:

$N\ (0) - 2\cdot q\cdot z_{01} = 0$, откуда $z_{01} = N\ (0)/\ 2\cdot q = 15/20 = 0.75$ м;

$N\ (0) - 2\cdot q\cdot z_{02} + 2\cdot q\ (z_{02} - 1) + q\ (z_{02} - 2) = 0$, откуда $z_{02} = 2.5$ м.

Теперь определим значения перемещений в экстремальных точках. Для этого в уравнение перемещений на соответствующем участке подставим вместо координаты z найденную координату z_0:

$$W\ (0.75) = 15\cdot 0.75/EF - 2\cdot 10\cdot 0.75^2/2EF = 5.63/EF,$$

$$W\ (2.5) = 15\cdot 2.5/EF - 2\cdot 10\cdot 2.5^2/2EF + 2\cdot 10\ (2.5-1)^2/2EF + \\ + 10\ (2.5-2)^2/2EF = -1.25/EF.$$

3. Расчет на прочность и жесткость.

Условие прочности: $\sigma_{max} \le [\sigma]$, где $\sigma_{max} = N_{max}/F$.

В пределе получим: $F = Nmax/\ [\sigma] = 15\cdot 10^3/160\cdot 10^6 = 0.000094$ м^2.

$F = bh = 1.5b^2$, отсюда $b = \sqrt{F/1.5} = 0.008$ м, тогда $h = 0{,}012$ м.

Условие жесткости: $W_{max} \le [W] = 0.002\cdot 3 = 0.006$ м.

$5{,}63/EF = 0.006$, откуда $F = 5.63\cdot 10^3/\ 0.006\cdot 2\cdot 10^{11} = 0.0000047$м^2.

$b = \sqrt{F/1.5} = 0.002$ м, $h = 0{,}003$ м.

Теперь из полученной пары значений размеров необходимо выбрать удовлетворяющие условиям прочности и жесткости. В нашем случае примем: b =0.008 м, h = 0,012 м.

Пример 2.

Из расчета на прочность и жесткость определить диаметр круглого поперечного сечения стержня при следующих исходных данных:

m_z = 10 кН/м, L = 10 кНм, l = 0,5 м, [σ] = 160 МПа, [Θ] = 0.01 рад.

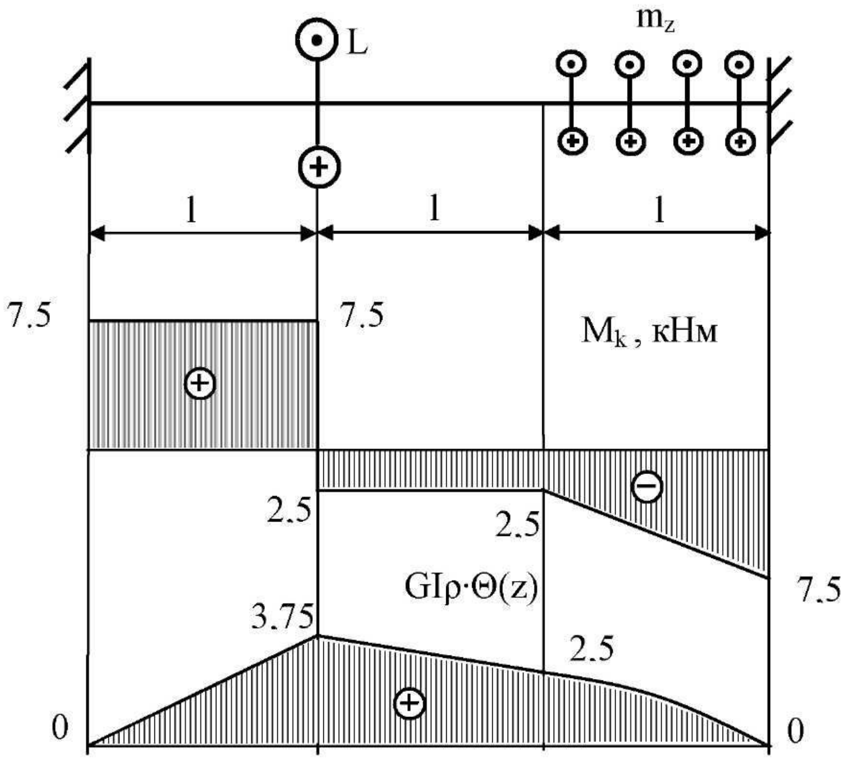


Рис.6

Решение.

В соответствии со схемой нагружения запишем уравнения угловых перемещений и крутящего момента в следующем виде:

$\Theta\ (z) = A + Bz\,\big|_1 - M(z\text{-}l)/GI_\rho\,\big|_2 - m_z(z\text{-}2l)^2/2GI_\rho\,\big|_3$,

$GI_\rho\Theta'\,(z) = M_k\,(z) = M_k\,(0)\ \big|_1 - L\,\big|_2 - m_z(z\text{-}2l)\ \big|_3$.

Исходя из условий закрепления стержня, запишем следующие граничные условия: $\Theta\ (0) = 0 \rightarrow A = 0$, $\Theta\ (3l) = 0$.

Использовав второе граничное условие, найдём неизвестную константу

$B = 7.5/GI_{\rho}$.

Учитывая первое граничное условие и найденную константу, уравнения можно переписать в виде:

$\Theta(z) = 7.5z/GI_{\rho}\,\big|_1 - M(z-l)/GI_{\rho}\,\big|_2 - m_z(z-2l)^2/2GI_{\rho}\,\big|_3,$

$GI_{\rho}\Theta'(z) = M_k(z) = 7.5\,\big|_1 - L\,\big|_2 - m_z(z-2l)\,\big|_3$.

Рассчитывая значения функций в граничных точках участков аналогично примеру 1, получим:

1 участок: $0 \le z \le l$:

$\Theta(0) = 0$ $\qquad M_k(0) = 7.5$ кНм

$\Theta(l) = 3.75/GI_{\rho}$ $\qquad M_k(l) = 7.5$ кНм

2 участок: $l \le z \le 2l$:

$\Theta(l) = 3.75/GI_{\rho}$ $\qquad M_k(l) = -2.5$ кНм

$\Theta(l) = 2.5/GI_{\rho}$ $\qquad M_k(2l) = -2.5$ кНм

3 участок: $2l \le z \le 3l$:

$\Theta(2l) = 2.5/GI_{\rho}$ $\qquad M_k(2l) = -2.5$ кНм

$\Theta(l) = 0$ $\qquad M_k(3l) = -7.5$ кНм

Расчет на прочность будем проводить по теории максимальных касательных напряжений: $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = [\sigma]$.

При кручении в опасных точках возникает напряженное состояние чистого сдвига, которое характеризуется равными по величине и противоположными по знаку главными напряжениями: $\sigma_1 = \tau_{max}$ и $\sigma_3 = -\tau_{max}$.

$\sigma_{экв} = \tau_{max} + \tau_{max} = 2\tau_{max} = [\sigma]$.

$\tau_{max} = [\sigma]/2$.

Тогда: $\tau_{max} = M_{k\,max}/W_{\rho} = [\sigma]/2$.

Для круглого сечения полярный момент сопротивления равен:

$W_{\rho} = 0,2d^3$.

$d = \sqrt[3]{M_{k\,max}/0.1[\sigma]} = \sqrt[3]{7.5\cdot10^3/0.1\cdot160\cdot10^6} = 0.078$ м.

Из стандартного ряда размеров примем d = 0.08 м.

Теперь произведем расчет стержня на жесткость. Для этого приравняем максимальное угловое перемещение, определяемое по графику, к допускаемому:

$$\Theta_{max} = 3.75/GI_\rho = [\Theta].$$

Для круглого сечения полярный момент инерции равен: $I_\rho = 0.1d^4$.

Тогда: $d = \sqrt[4]{3.75\cdot10^3/0.1\cdot0.01\cdot8\cdot10^{10}} = 0.083$ м.

Из стандартного ряда d = 0.085 м.

Теперь из полученных значений диаметров необходимо выбрать удовлетворяющие условиям прочности и жесткости. В нашем случае примем:

d = 0.085 м.

Пример 3.

Для заданной схемы нагружения стержня построить эпюры $Q_y(z)$, $M_x(z)$, $\varphi(z)$ и $V(z)$. Из расчета на прочность и жесткость подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения при следующих исходных данных:

$[\sigma] = 160$ МПа, $L = 5$ кНм, $P = 10$ кН, $q = 20$ кН/м, $l = 1$ м, $\beta = h/b = 1.5$, $[v] = 0.002l$.

Решение.

Запишем уравнения прогибов, углов поворота, изгибающего момента и поперечных сил:

$$V(z) = A+Bz+Cz^2/2+Dz^3/6 \,\big|_1 +P(z-l)^3/6EI_x+q(z-l)^4/24EI_x \,\big|_2$$

$$\varphi(z) = -B - Cz - Dz^2/2 \,\big|_1 - P(z-l)^2/2EI_x - q(z-l)^3/6EI_x \,\big|_2$$

$$M_x(z) = -CEI_x - DzEI_x \,\big|_1 - P(z-l) - q(z-l)^2/2 \,\big|_2$$

$$Q_y(z) = -DEI_x \,\big|_1 - P - q(z-l) \,\big|_2$$

В соответствии с условиями закрепления стержня запишем граничные условия в следующем виде: $V(0) = 0 \rightarrow A = 0$,

$$M_x(0) = -L \rightarrow C = L/EI_x,$$

$$V(3l) = 0,$$

$$M_x(3l) = 0.$$

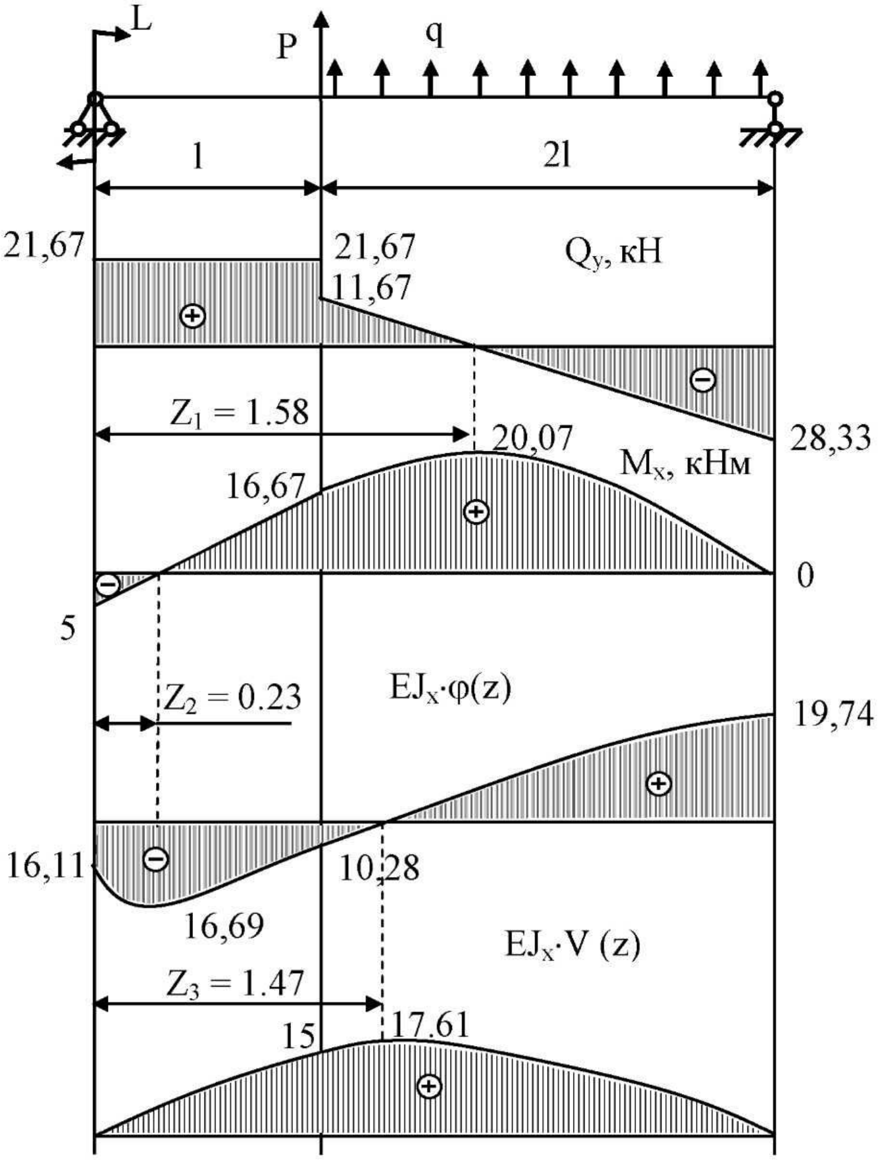


Рис.7

Для нахождения неизвестных B и D составим систему уравнений, учитывая граничные условия: V (3l) = 0 и M_x (3l) = 0. Решив эту систему, получим: D = -21.67/EI_x и B = 16.11/EI_x , откуда следует, что Q_y (0) = 21.67кН и φ (0) = -16,11/EI_x.

Теперь, учитывая найденные константы, уравнения интегральных характеристик можно переписать в следующем виде:

$Q_y (z) = 21.67 \,\big|_1 - P - q\,(z-l)\,\big|_2$

$M_x (z) = -L - 21.67z \,\big|_1 - P\,(z-l) - q\,(z-l)^2/2 \,\big|_2$

$\varphi(z) = -16.11/EI_x - Lz/EI_x + 21.67z^2/2EI_x \,|_1 - P(z\text{-}l)^2/2EI_x - q(z\text{-}l)^3/6EI_x \,|_2$

$V(z) = 16.11z/EI_x + Lz^2/2EI_x - 21.67z^3/6EI_x \,|_1 + P(z\text{-}l)^3/6EI_x + q(z\text{-}l)^4/24EI_x \,|_2$

Построение графиков будем производить аналогично примеру 1.

1 участок: $0 \le z \le l$

$Q_y(0) = 21.67$ кН	$\varphi(0) = -16.11/EI_x$
$Q_y(l) = 21.67$ кН	$\varphi(l) = -10.28/EI_x$
$M_x(0) = -5$ кНм	$V(0) = 0$
$M_x(l) = 16.67$ кНм	$V(l) = 15/EI_x$

2 участок: $l \le z \le 2l$

$Q_y(l) = 11.67$ кН	$\varphi(l) = -10.28/EI_x$
$Q_y(2l) = -28.33$ кН	$\varphi(2l) = 19.74/EI_x$
$M_x(l) = 16.67$ кНм	$V(l) = 15/EI_x$
$M_x(2l) = 0$ кНм	$V(l) = 0$

Определим координаты экстремумов и значения функций в экстремальных точках:

1) $Q_y(z1) = 21.67 - P - q(z1\text{-}l) = 0 \rightarrow z1 = 1.58$ м.

$M_x(1.58) = -L + 21.67\cdot 1.58 - P(1.58\text{-}l) - q(1.58\text{-}l)^2/2 = 20.07$ кНм.

2) $M_x(z2) = -L - 21.67\cdot z2 = 0 \rightarrow z2 = 0.23$ м.

$\varphi(0.23) = -16.11/EI_x - L\cdot 0.23/EI_x + 21.67(0.23)^2/2EI_x = -16.69/EI_x$.

3) $\varphi(z3) = -16.11/EI_x - L\cdot z3/EI_x + 21.67(z3)^2/2EI_x - P(z3\text{-}l)^2/2EI_x -$

$- q(z3\text{-}l)^3/6EI_x = 0 \rightarrow z3 = 1.47$м.

$V(1,47) = 16.11\cdot 1,47/EI_x + L\cdot(1,47)^2/2EI_x - 21.67\cdot(1,47)^3/6EI_x +$

$+ P(1,47\text{-}l)^3/6EI_x + q(1,47\text{-}l)^4/24EI_x = 17,61/EI_x$.

Расчет на прочность: $\sigma_{max} \le [\sigma]$, $\sigma_{max} = M_{x\,max}/I_x$.

Для прямоугольника $I_x = bh^3/12 = b(1.5b)^3/12 = 0.28b^4$.

Найдем b: $b = \sqrt[4]{M_x/0.28[\sigma]} = \sqrt[4]{20.07\cdot 10^3/(0.28\cdot 160\cdot 10^6)} = 0.145$м.

$h = 0.218$м.

Расчет на жесткость: $V_{max} \le [v]$.

$17.61/EI_x = 0.002 \rightarrow I_x = 17.61\cdot 10^3/(2\cdot 10^{11}\cdot 0.002) = 0.000044$ м^4.

$I_x = 0.28b^4 \rightarrow b = \sqrt[4]{0.000044/0.28} = 0.112$ м, $h = 0.168$ м.

Из полученной пары значений необходимо выбрать удовлетворяющие условиям прочности и жесткости. После выбора из стандартного ряда: b = 0.15м, h = 0.22м

Пример 4.

Для заданной схемы нагружения стержня построить графики поперечных сил, изгибающего момента, угловых и линейных перемещений. Из расчета на прочность и жесткость подобрать размеры двутаврового поперечного сечения при следующих исходных данных: L = 20 кНм, q = 10 кН/м, l = 1м, [σ] = 160 МПа, [V] = 0.002l.

Решение.

Заменим промежуточную опору эквивалентной ей неизвестной пока реакцией R (см. рис.), которая будет внесена в уравнения как сосредоточенная сила:

$V(z) = A + Bz + Cz^2/2 + Dz^3/6 + q\,z^4/24EI_x \,\big|_1 + R\,(z-l)^3/6EI_x\,\big|_2$

$\varphi(z) = -B - Cz - Dz^2/2 - q\,z^3/6EI_x\,\big|_1 - R\,(z-l)^2/2EI_x\,\big|_2$

$M_x(z) = -CEI_x - DzEI_x\ q\,z^3/6EI_{x\ 1} - R\,(z-l)\,\big|_2$

$Q_y(z) = -DEI_x - q\,z\,\big|_1 - R\,\big|_2$

Запишем граничные условия: $V(0) = 0 \rightarrow A = 0$,

$M_x(0) = 0 \rightarrow C = 0$,

$V(l) = 0$

$V(3l) = 0$

$M_x(3l) = -L \rightarrow V''(3l) = L/EI_x$

Составив систему из трех неиспользованных граничных условий, найдем неизвестные B, R и D: $D = -7.94/EI_x \rightarrow Q_y(0) = 7.94$ кН,

$B = 0.91/EI_x \rightarrow \varphi(0) = -0.91/EI_x$,

$R = 0.6$ кН.

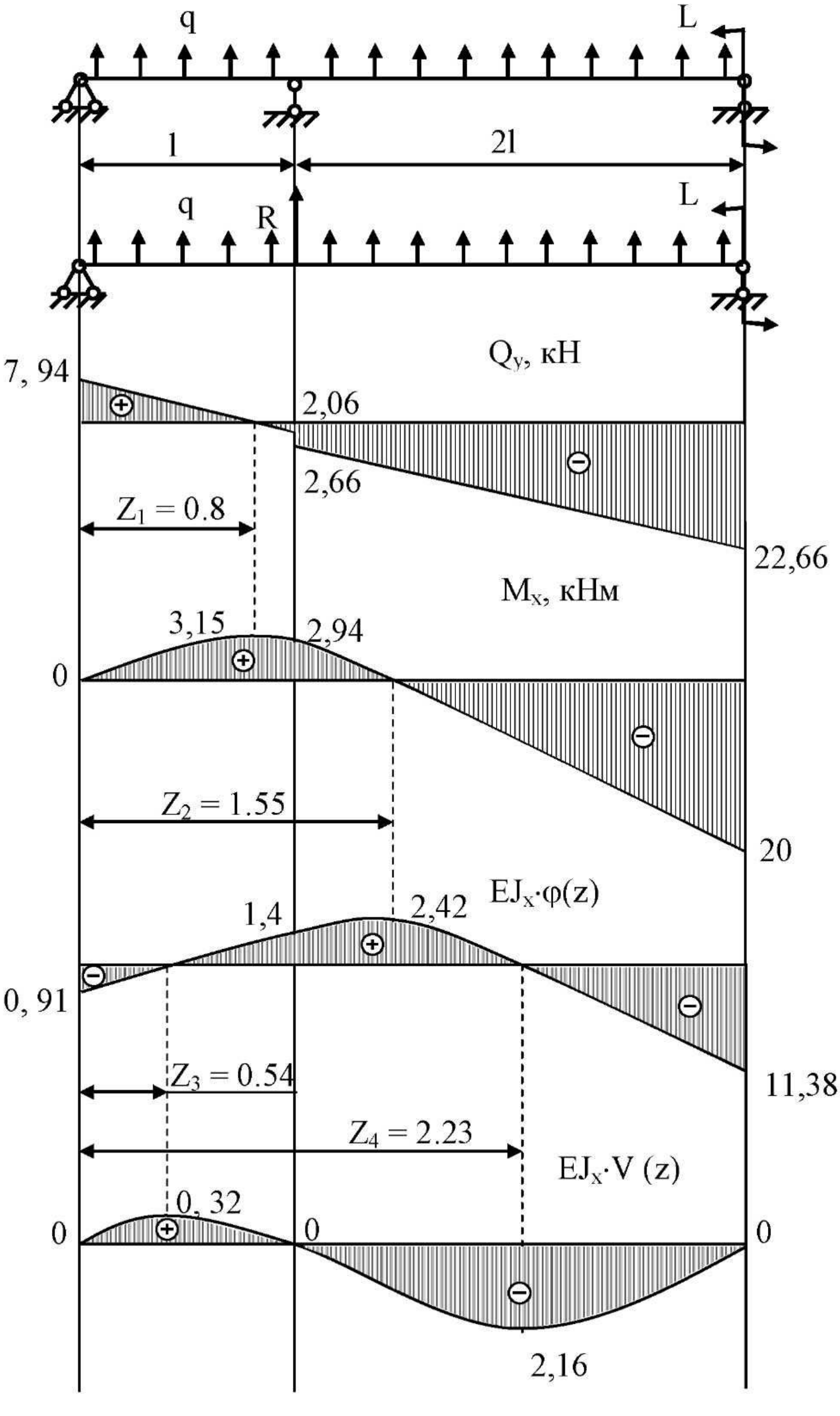


Рис.8

С учетом найденных констант уравнения перепишутся следующим образом:

$V(z) = 0.91z/EI_x - 7.94\, z^3/6EI_x + q\, z^4/24EI_x \,\big|_1 + 0.6\,(z-l)^3/6EI_x \big|_2$

$\varphi(z) = -0.91/EI_x + 7.94\, z^2/2EI_x - q\, z^3/6EI_x \,\big|_1 - 0.6\,(z-l)^2/2EI_x \,\big|_2$

$M_x(z) = 7.94z - q\, z^3/6EI_x \big|_1 - 0.6\,(z-l) \,\big|_2$

$Q_y(z) = 7.94 - q\, z \,\big|_1 - 0.6 \big|_2$.

Вычислим значения для границ участков:

1 участок: $0 \le z \le l$

$Q_y(0) = 7.94$ кН	$\varphi(0) = -0.91/EI_x$
$Q_y(l) = -2.06$ кН	$\varphi(l) = 1.4/EI_x$
$M_x(0) = 0$ кНм	$V(0) = 0$
$M_x(l) = 2.94$ кНм	$V(l) = 0$

2 участок: $l \le z \le 3l$

$Q_y(l) = -2.66$ кН	$\varphi(l) = 1.4/EI_x$
$Q_y(3l) = -22.66$ кН	$\varphi(3l) = -11.38/EI_x$
$M_x(l) = 2.94$ кНм	$V(l) = 0$
$M_x(3l) = -20$ кНм	$V(l) = 0$

Расчет координат экстремума и значений интегральных характеристик в экстремальных точках проведем аналогично показанным ранее примерам. В нашем случае: $z_1 = 0.8$ м, $M_x(0{,}8) = 3{,}15$ кНм,

$z_2 = 1.55$ м, $\varphi(1.55) = 2.42/EI_x$,

$z_3 = 0.54$ м, $V(0.54) = 0.32/EI_x$,

$z_4 = 2.23$ м, $V(2.23) = -2.16/EI_x$.

По полученным значениям строим графики.

Расчет на прочность и жесткость:

1) Расчет на прочность: $\sigma_{max} \le [\sigma]$.

$\sigma_{max} = M_{x\,max}/ W_x$.

В пределе получим: $M_{x\,max}/ W_x = [\sigma]$.

Откуда: $W_x = M_{x\,max}/[\sigma] = 20\cdot10^3/160\cdot10^6 = 0{,}000125$ м^3 = 125 см^3.

Из таблиц сортамента выберем двутавр № 18 с $W_x = 143$ см^3.

2) Расчет на жесткость: $V_{max} \le [V]$.

$2.16/EI_x = 0.002\cdot1$,

откуда: $I_x = 2.16 \cdot 10^3/(0.002 \cdot 2 \cdot 10^{11}) = 0.0000054$ м^4 = 540 м^4.

Из таблиц сортамента выберем двутавр № 14 с I_x = 572 см^4.

Окончательно примем двутавр № 18, т.к. он удовлетворяет условиям прочности и жесткости.

Пример 5.

Для заданной схемы нагружения кривого стержня радиуса R построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающего момента при следующих исходных данных: L = 10 кНм, l = 1 м.

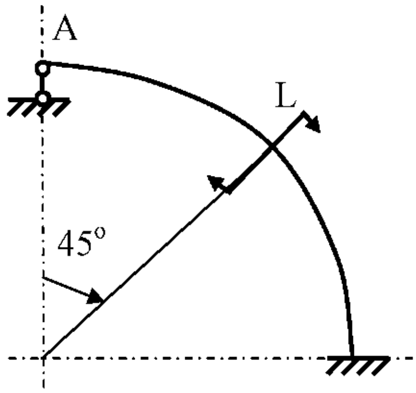


Рис.9

Решение.

Данный кривой стержень является статически неопределимым, т.к. имеет четыре связи – три в жесткой заделке и одну – в подвижном шарнире. Задачу будем решать методом сил, т.е. «лишнюю» связь отбрасываем и заменяем ее реакцией.

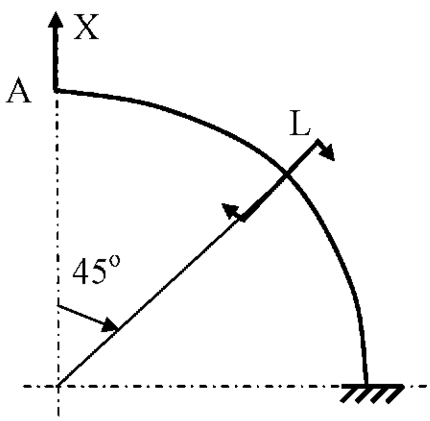


Рис.10

Запишем каноническое уравнение метода сил:

$x\cdot\delta_{11} + \delta_{1P} = 0,$

где x – неизвестная реакция, заменяющая отброшенную связь,

δ_{11} – перемещение точки А от силы x = 1,

δ_{1P} – перемещение точки А под действием внешних сил.

Перемещения будем искать при помощи интеграла Мора.

Составим уравнения моментов:

- от действия внешних сил $M_{xp}(\varphi) = 0\,|_1 - L\,|_2$;

- от действия силы x = 1: $M_{x1}(\varphi) = -1R\sin\varphi$.

$$\delta_{11} = \int_0^{\pi/2}\frac{M_{x1}\cdot R\cdot d\varphi}{EI_x} = \int_0^{\pi/2}\frac{R^2\cdot\sin^2\varphi\cdot R\cdot d\varphi}{EI_x} = \frac{R^3}{EI_x}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cdot d\varphi = 0.785/EI_x$$

$$\delta_{1P} = \int_0^{\pi/4}\frac{M^1{}_{xp}\cdot M_{x1}\cdot R\cdot d\varphi}{EI_x} + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{M^2{}_{xp}\cdot M_{x1}\cdot R\cdot d\varphi}{EI_x} = 7.07/EI_x.$$

Определим неизвестную реакцию:

$$x = -\,\delta_{1P}/\,\delta_{11} = -\,7{,}07\cdot EI_x/\,EI_x\cdot 0.785 = -\,9 \text{ кН}.$$

Теперь рассмотрим стержень, приложив в подвижном шарнире найденную реакцию x. Составим уравнения изгибающих моментов, поперечных и продольных сил:

$M_x(\varphi) = X\cdot R\cdot\sin\varphi\,|_1 - L\,|_2$,

$Q_y(\varphi) = X\cdot\cos\varphi\,|_{1,2}$

$N(\varphi) = -\,X\cdot\sin\varphi\,|_{1,2}$

Рассчитаем значения функций на границах участков.

1 участок - $0 \le \varphi \le \pi/4$:	2 участок - $\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$:
$N(0) = 0$	$N(\pi/4) = -6.36$ кН
$N(\pi/4) = -6.36$ кН	$N(\pi/2) = -9$ кН
$Q_y(0) = 9$ кН	$Q_y(\pi/4) = 6.36$ кН
$Q_y(\pi/4) = 6.36$ кН	$Q_y(\pi/2) = 0$
$M_x(0) = 0$	$M_x(\pi/4) = -3.64$кНм

$M_x(\pi/4) = 6.36$ кНм $\qquad$ $M_x(\pi/2) = -1$ кНм

Построим графики:

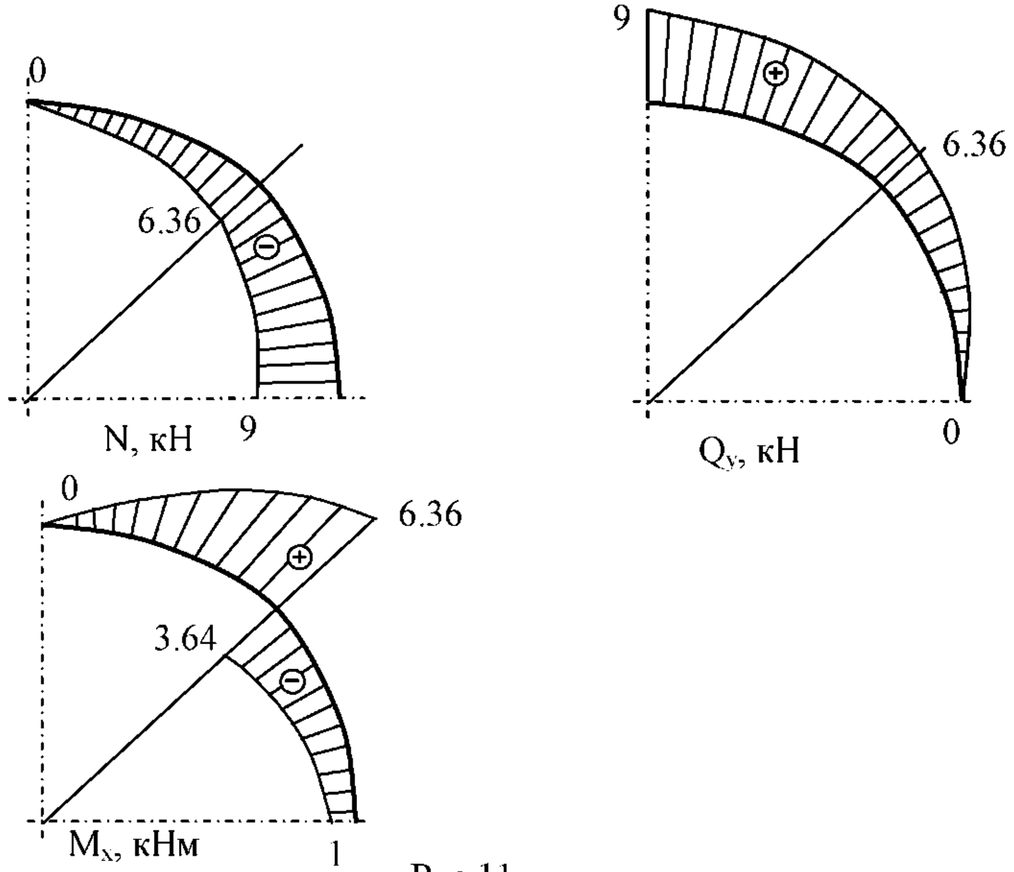


Рис.11

Пример 6.

Для кривого стержня радиуса r, показанного на рисунке, построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающего момента при следующих исходных данных: r = 1м, P = 10 кН, [σ] = 160 МПа. Найти также перемещение точки А.

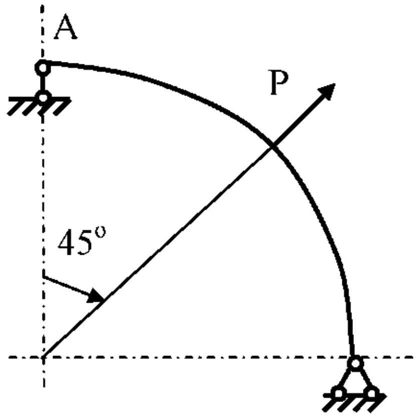


Рис.12

Решение.

Данный стержень является статически определимым, поэтому решать задачу будем классическим методом.

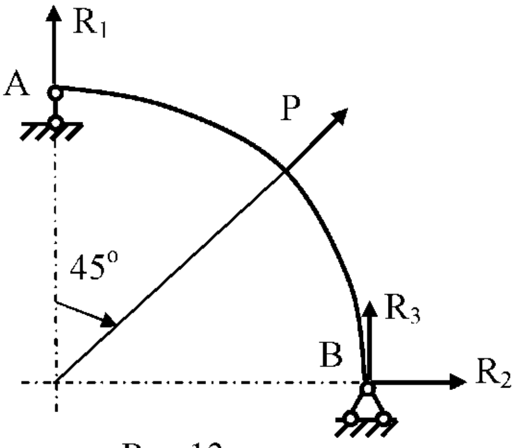


Рис.13

Реакции в опорах найдем, составив уравнения равновесия:

$\Sigma\ Y = R_1 + R_3 + P_1 \cdot \cos 45 = 0$,

$\Sigma\ X = R_2 + P_1 \cdot \sin 45 = 0$,

$\Sigma\ M_B = R_1 \cdot r + P \cdot r \cdot \sin 45 = 0$.

Решая систему, получим:

$R_2 = -P \cdot \sin 45 = -7.07$кН,

$R_1 = -P \cdot r \cdot \sin 45 / r = -7.07$кН,

$R_3 = -\ P \cdot \cos 45\ -\ R_1 = 0$.

Составим теперь уравнения продольных, поперечных сил и изгибающего момента:

$M_x\ (\varphi) = -\ R_1 \cdot r \cdot \sin\varphi \Big|_1 - P \cdot r(\varphi - \pi/4)\ \Big|_2$,

$Q_y\ (\varphi) = -\ R_1 \cdot \cos\varphi \Big|_1 - P \cdot \cos(\varphi - \pi/4)\ \Big|_2$,

$N\ (\varphi) = R_1 \cdot \sin\varphi \Big|_1 + P(\varphi - \pi/4)\ \Big|_2$.

Рассчитаем значения функций на границах участков.

1 участок - $0 \le \varphi \le \pi/4$:	2 участок - $\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$:
$N\ (0) = 0$	$N\ (\pi/4) = -5$ кН
$N\ (\pi/4) = -5$ кН	$N\ (\pi/2) = 0$ кН

$Q_y(0) = 7.07$ кН $\qquad Q_y(\pi/4) = -5$ кН

$Q_y(\pi/4) = 5$ кН $\qquad Q_y(\pi/2) = -7.07$ кН

$M_x(0) = 0 \qquad M_x(\pi/4) = 5$ кНм

$M_x(\pi/4) = 5$ кНм $\qquad M_x(\pi/2) = 0$ кНм

Построим графики:

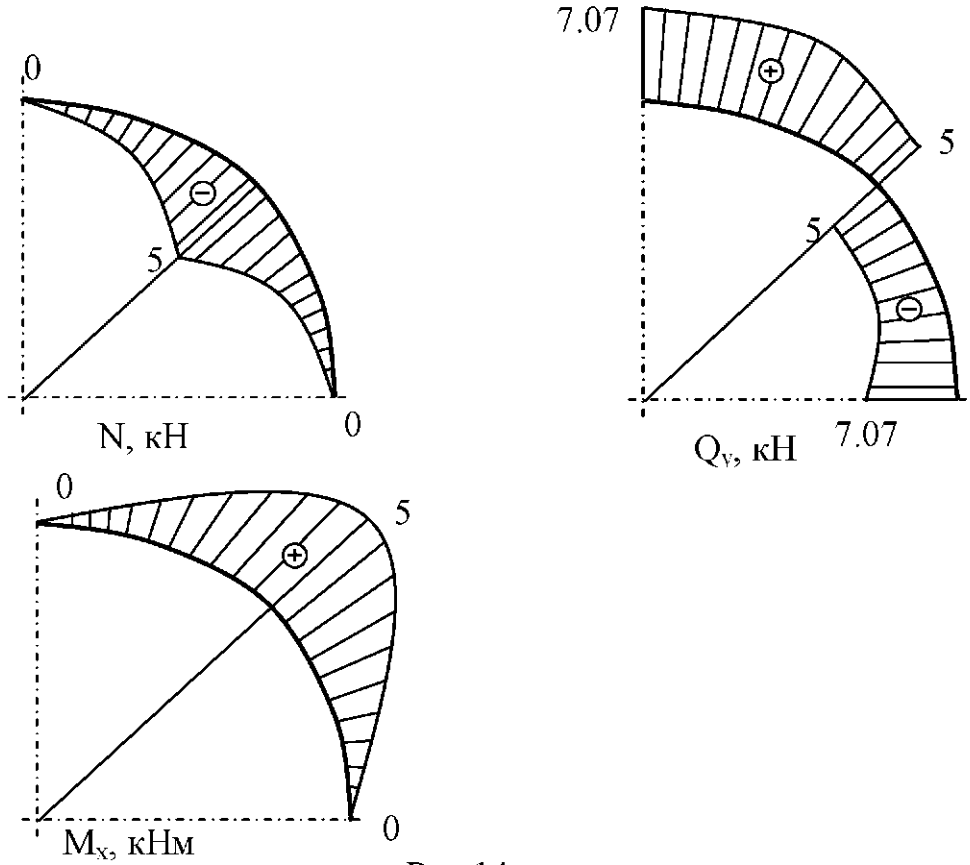


Рис.14

Расчет на прочность произведем по изгибающему моменту:

$\sigma_{max} = M_{x\,max}/\,W_x \le [\sigma]$,

где W_x – момент сопротивления сечения изгибу.

$W_x = M_{x\,max}/\,[\sigma] = 5\cdot10^3/\,160\cdot10^6 = 3.125\cdot10^{-5}$ м^3.

С другой стороны, $W_x = 0.1d^3$.

Приравняв полученные выражения, найдем:

$d = \sqrt[3]{W_x/0.1} = \sqrt[3]{3.125\cdot10^{-5}/0.1} = 0.068$ м.

Из стандартного ряда примем d = 0.07 м.

Найдем линейное перемещение точки А. Для этого, в точке А приложим единичную силу в направлении предполагаемого перемещения.

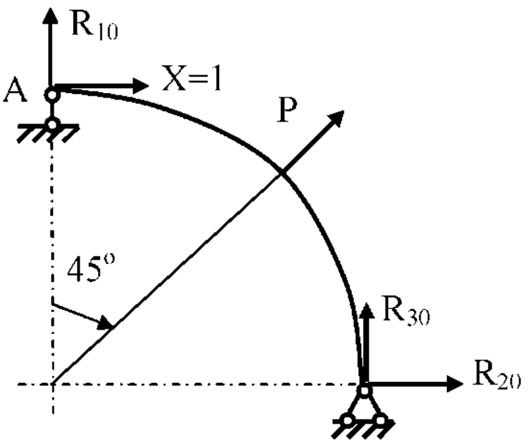


Рис.15

Для определения реакций в опорах составим следующие уравнения равновесия:

$\Sigma\, Y = R_{10} + R_{30} = 0,$

$\Sigma\, X = X + R_{20} = 0,$

$\Sigma\, M_B = X \cdot r + R_{10} \cdot r = 0.$

Решая систему, получим:

$R_{10} = -\, X \cdot r / r = -\, 1,$

$R_{30} = -\, R_{10} = 1,$

$R_{20} = -\, X = -1.$

Запишем уравнение изгибающего момента:

$M_{x0}\,(\varphi) = -\, R_{10} \cdot r \cdot \sin\,\varphi - X \cdot r\,(1 - \cos\,\varphi).$

Перемещение точки А найдем с помощью интеграла Мора:

$$\delta_A = \int_0^{\pi/2} \frac{M_x \cdot M_{x0}\, r d\varphi}{EI_x} = \int_0^{\pi/4} \frac{7.07 \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot (r \cdot \sin\varphi - r(1 - \cos\varphi)) r \cdot d\varphi}{EI_x} +$$

$$+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(7.07 \cdot r \cdot \sin\varphi - P \cdot r \cdot \sin(\varphi - \pi/4)) \cdot (r \cdot \sin\varphi - r \cdot (1 - \cos\varphi)) r \cdot d\varphi}{EI_x} = \frac{1.963}{EI_x} =$$

$$= \frac{1.963 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0.05 \cdot 0.07^4} = 0{,}008\text{м}.$$

Пример 7.

Для стержневой системы, показанной на рисунке, построить графики поперечных сил и изгибающего момента, из расчета на прочность подобрать размеры квадратного поперечного сечения при следующих исходных данных: $q = 10$ кН/м, $L = 20$ кНм, $l = 1$ м, $[\sigma] = 160$ МПа. Найти перемещение сечения А.

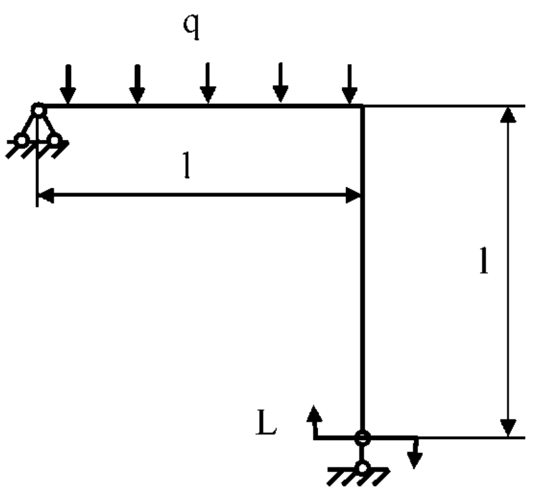


Рис.16

Решение.

Рассматриваемая стержневая система является статически определимой, т.к. не имеет «лишних» связей, поэтому решать ее будем классическим методом, т.е., разбив систему на два стержня, запишем уравнения интегральных характеристик для каждого в отдельности.

Для первого стержня:

$Q_{y1}(z) = Q_{y1}(0) + qz$,

$M_{x1}(z) = M_{x1}(0) + Q_{y1}(0)\cdot z + qz^2/2$.

Для второго стержня:

$Q_{y2}(z) = Q_{y2}(0)$,

$M_{x2}(z) = M_{x2}(0) + Q_{y2}(0)\cdot z$.

Запишем граничные условия: $M_{x1}(0) = 0$,

$M_{x2}(l) = L$,

$Q_{y2}(l) = 0$,

$M_{x1}(l) = M_{x2}(0)$ – условие сопряжения.

Используя граничные условия и условие сопряжения, определим неизвестную константу $Q_{y1}(0)$: $Q_{y1}(0) = 15$ кН.

Построим графики.

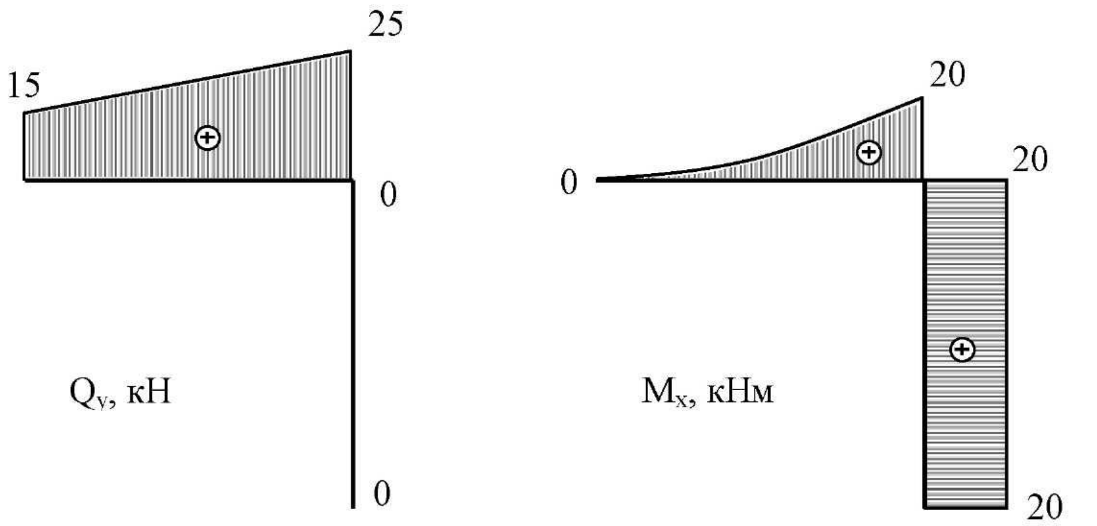


Рис.17

Расчет на прочность.

Условие прочности: $\sigma_{max} \leq [\sigma]$.

В нашем случае $\sigma_{max} = M_{x\,max} / W_x$; $W_x = a^3/6$.

$6M_{x\,max}/ a^3 = [\sigma] \rightarrow a = \sqrt[3]{6M_x/[\sigma[} = \sqrt[3]{6 \cdot 20 \cdot 10^3/(160 \cdot 10^6)} = 0.028$ м.

Примем a = 0.03 м.

Пример 8.

Для стержневой системы, показанной на рисунке, построить эпюры поперечных сил и изгибающего момента при следующих исходных данных: q = 10 кН, l = 1м.

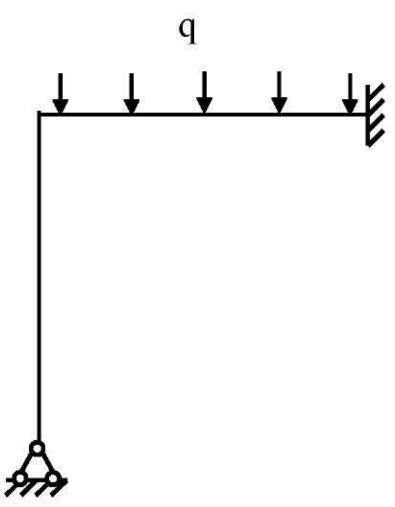
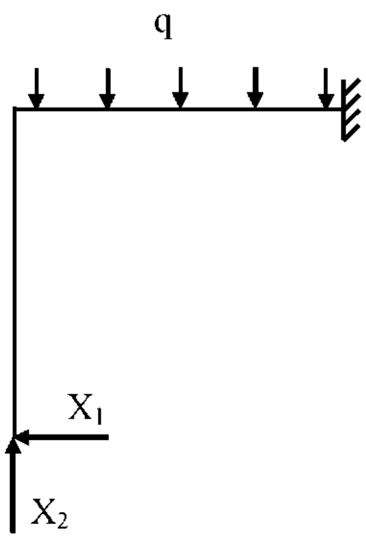


Рис.18

Решение.

Данная система является статически неопределимой, поэтому сначала необходимо определить количество «лишних» связей: $n = m - 3$,
где m – количество связей, наложенных на систему.
В нашем случае: $n = 5 - 3 = 2$, т.е. система дважды статически неопределима.

Для решения задачи отбросим «лишние» связи в неподвижном шарнире и заменим их неизвестными пока реакциями X_1, X_2.



основная система метода сил

Рис.19

Запишем каноническую систему уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \Delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \Delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

Здесь X_1, X_2 – силы, действующие как реакции в опоре,

Δ_{1P}, Δ_{2P} – перемещения опорных сечений, вызванные внешними нагрузками в основной системе,

δ_{11}, δ_{22}, δ_{12}, δ_{21} – перемещения от единичных сил (причем $\delta_{12} = \delta_{21}$).

Рассмотрим основную систему:

а) нагруженную реальной нагрузкой (без реакций опор)

1 стержень:	2 стержень:
$Q_{y1}(0) = 0$	$Q_{y2}(0) = 0$
$M_{x1}(0) = 0$	$M_{x2}(0) = 0$
$M_{x1}(z) = 0$	$M_{x2}(z) = qz^2/2$

б) нагруженную единичной горизонтальной силой

1 стержень:

$M^0_{x1}(0) = 0$

$Q^0_{y1}(0) = -1$

$M^0_{x1}(z) = Q^0_{y1}(0)\cdot z = -1z$

2 стержень:

$M^0_{x2}(0) = M^0_{x1}(l) = -1\cdot l$

$Q^0_{y2}(0) = 0$

$M^0_{x2}(z) = -1\cdot l$

в) нагруженную единичной вертикальной силой

1 стержень:

$M^0_{x1}(0) = 0$

$Q^0_{y1}(0) = 0$

$M^0_{x1}(z) = 0$

2 стержень:

$M^0_{x2}(0) = 0$

$Q^0_{y2}(0) = -1$

$M^0_{x2}(z) = Q^0_{y2}(0)\cdot z = -1\cdot z$

Определим перемещения:

$$\Delta_{1P} = \sum\int_{l_i}\frac{M_x(z)\cdot M_x^0(z)dz}{EI_x} = \int_0^l\frac{0\cdot(-1\cdot z)dz}{EI_x} + \int_0^l\frac{(q\cdot z^2/2)\cdot(-1\cdot l)dz}{EI_x} = -\frac{q\cdot l^4}{6EI_x}$$

$$\Delta_{2P} = \int_0^l\frac{0\cdot 0\cdot dz}{EI_x} + \int_0^l\frac{(q\cdot z^2/2)\cdot(-1\cdot z)\cdot dz}{EI_x} = -\frac{q\cdot l^4}{8EI_x}$$

$$\delta_{11} = \int_0^l\frac{z^2\cdot dz}{EI_x} + \int_0^l\frac{l^2\cdot dz}{EI_x} = \frac{4\cdot l^3}{3EI_x}$$

$$\delta_{22} = \int_0^l\frac{0^2\cdot dz}{EI_x} + \int_0^l\frac{z^2\cdot dz}{EI_x} = \frac{l^3}{3EI_x}$$

$$\delta_{12} = \int_0^l\frac{(-z)\cdot 0\cdot dz}{EI_x} + \int_0^l\frac{(-z)\cdot(-l)\cdot dz}{EI_x} = \frac{l^3}{2EI_x}$$

С учетом найденных значений перемещений перепишем каноническую систему уравнений метода сил следующим образом:

$$\begin{cases} -\dfrac{q\cdot l^4}{6EI_x} + \dfrac{4\cdot l^3}{3EI_x}\cdot X_1 + \dfrac{l^3}{2EI_x}\cdot X_2 = 0 \\ -\dfrac{q\cdot l^4}{8EI_x} + \dfrac{l^3}{2EI_x}\cdot X_1 + \dfrac{l^3}{3EI_x}\cdot X_2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получим: $X_1 = 3ql / 7$

$$X_2 = -ql / 28.$$

Отрицательное значение реакции X_2 говорит о том, что направление этой реакции на схеме необходимо изменить на противоположное.

Теперь, когда известны все силы, можно строить графики ИХНС.

Запишем уравнения поперечных сил и изгибающего момента для каждого стержня в отдельности.

1 стержень:

$Q_{y1}(z) = Q_{y1}(0) = X_1 = ql / 28.$

$M_{x1}(z) = M_{x1}(0) + Q_{y1}(0) \cdot z = ql \cdot z / 28.$

2 стержень:

$Q_{y2}(z) = Q_{y2}(0) + q \cdot z = -3ql / 7 + q \cdot z.$

$M_{x2}(z) = M_{x2}(0) + Q_{y2}(0) \cdot z + qz^2 / 2 = ql^2 / 28 - 3ql \cdot z / 7 + q \cdot z^2 / 2.$

$M_{x2}(0) = M_{x1}(l) = ql^2 / 28.$

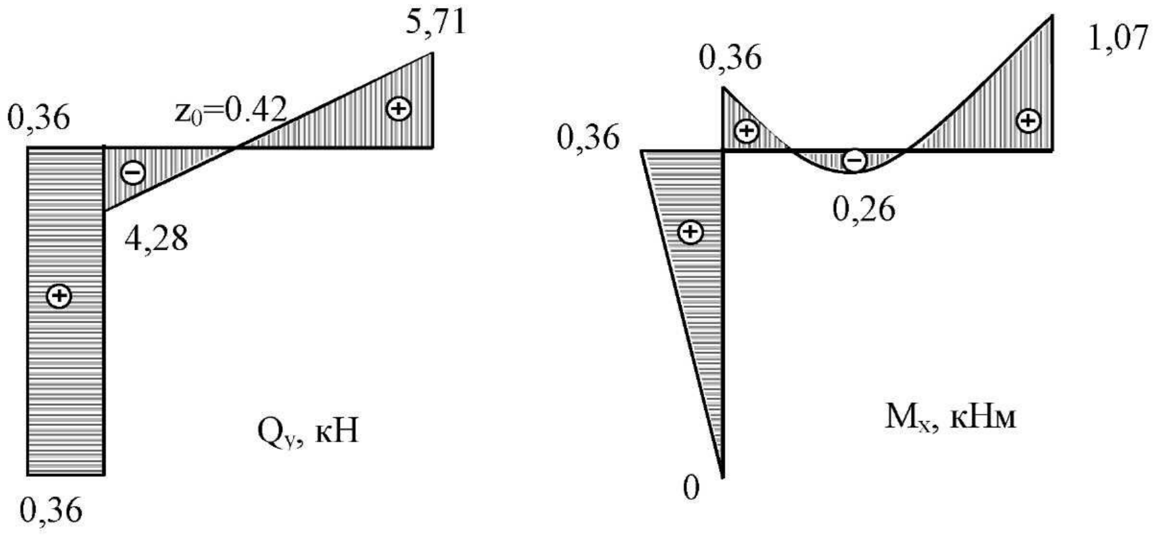


Рис.20

Пример 9.

Для заданной схемы нагружения стержня определить значение критической силы.

Решение.

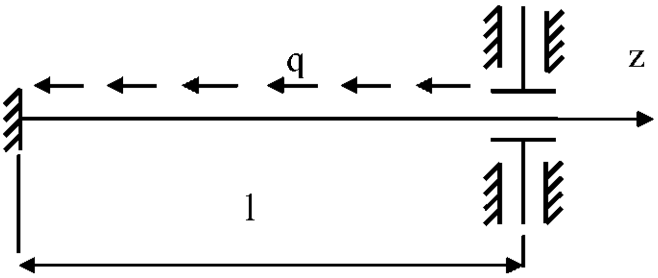


Рис.21

Форму изогнутой оси выберем в тригонометрическом виде (см. приложение 2):

$$V(z) = a(1 - \cos\pi z/l).$$

Для расчетов и проверки граничных условий нам потребуется первая, вторая и третья производные: $V'(z) = a\pi/l \cdot \sin\pi z/l$,

$$V''(z) = a\pi^2/l^2 \cdot \cos\pi z/l,$$

$$V'''(z) = -a\pi^3/l^3 \cdot \sin\pi z/l.$$

Граничные условия на концах стержня: $V(0) = 0$,

$$V'(0) = 0,$$

$$V'(l) = 0,$$

$$V'''(l) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия деформированного стержня:

$$EI_X\int_0^l (V'')^2 dz = q\int_0^l dz\int_0^z (V')^2 dz.$$

$$EI_X\int_0^l a^2\pi^4/l^4 \cdot \cos^2\pi z/l \cdot dz = EI_X a^2\pi^4/l^4 \cdot (z/2 + l/4\pi \cdot \sin 2\pi z/l)\ \Big|_0^l = EI_X \cdot a^2\pi 4/2l^3.$$

$$q\int_0^l dz\int_0^z a^2\pi^2/l^2 \cdot \sin^2(\pi\pi z/l)d = (qa^2\pi^2/l^2) \cdot (z^2/4 + l^2/8\pi^2 \cdot \cos 2\pi z/l)\ \Big|_0^l = qa^2\pi^2/4.$$

Приравняем полученные выше выражения:

$EI_x \cdot a^2 2\pi^4/2l^3 = qa^2\pi^2/4.$

Формула Эйлера для критической силы записывается в виде: $P_{кр} = EI_x\pi^2/(\mu l)^2$.

Приведем полученное выражение к виду формулы Эйлера:

$$(ql)_{кр} = EI_x\,\pi^2/\,(0.71\cdot l)^2.$$

Пример 10.

Груз массой 400 кг падает с высоты H на балку двутаврового сечения № 20, длина балки l =2м, I_x = 2370 см^4, W_x = 237 см^3. Определить максимальные напряжения, возникающие в балке при ударе и высоту падения груза при [σ] = 160 МПа.

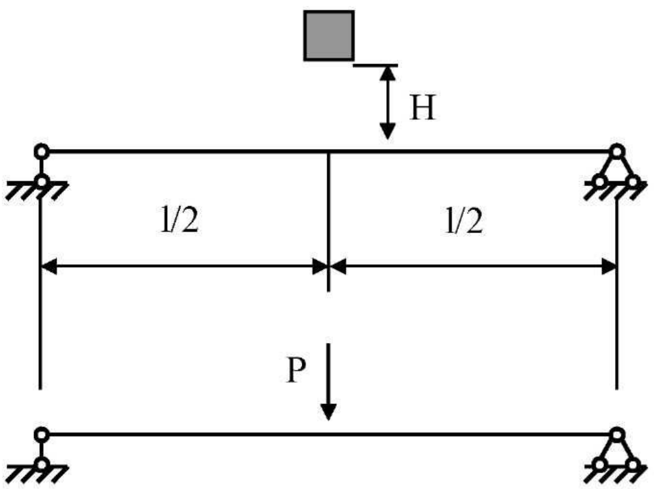


Рис.22

Решение.

В точке падения груза приложим сосредоточенную силу, равную весу груза.

Максимальное напряжение при ударе: $\sigma_{max\ дин} = \sigma_{ст}\cdot к_{дин}$, где:

$\sigma_{ст}$ – статическое напряжение от силы P = mg,

$к_{дин}$ – динамический коэффициент, который определяется следующим образом: $к_{дин} = 1 + \sqrt{1+2H/\delta_{ст}}$.

P = mg = 400·9.8 = 3920 Н ≈ 0.004МН.

Запишем уравнение изогнутой оси стержня:

$V(z) = A + Bz + Cz^2/2 + Dz^3/6 \,\big|_{\,1} - P\,(z\text{-}l/2)^3/6EI_x$.

Граничные условия: $V(0) = 0 \rightarrow A = 0$,

$V''(0) = 0 \rightarrow C = 0$,

$V(l) = 0$,

$V''(l) = 0$.

Из граничных условий найдем неизвестные константы: $D = P/2EI_x$,

$B = -Pl^3/16EI_x$.

Прогиб в месте падения груза равен: $V(l/2) = -Pl^3/48\,EI_x$.

Определим $\delta_{ст}$.

$$\delta_{ст} = (0{,}004 \cdot 2^3) / (48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2370 \cdot 10^{-8}) = 0{,}000141 \text{ м}.$$

Коэффициент динамичности определим как отношение: $K_{дин} = [\sigma]/\sigma_{ст}$.

Для определения $\sigma_{ст\ max}$ необходимо определить максимальное значение изгибающего момента:

$$M_x(z) = -EI_x V'' = -Pz/2 \,\Big|_1 + P(z-l/2)\,\Big|_2 \rightarrow M_{x\,max}(l/2) = -Pl/4.$$

Максимальное статическое напряжение:

$$\sigma_{ст\,max} = M_{x\,max}/W_x = Pl/4W_x = 0.004 \cdot 2/(4 \cdot 237 \cdot 10^{-6}) = 8.44 \text{ МПа}.$$

Тогда коэффициент динамичности:

$$K_{дин} = 160/8.44 = 18.96.$$

Найдем теперь высоту падения груза:

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + 2H/\delta_{ст}},$$

$$H = [(K_{дин} - 1)^2 - 1] \cdot \delta_{ст} / 2.$$

Подставив значения, получим:

$$H = [(18.96 - 1)^2 - 1] \cdot 0.000141/2 = 0.023 \text{ м} = 2.3 \text{ см}.$$

Приложение 1

Для стержней, выбранных в соответствии с выданным вариантом, требуется:

В задаче № 1:

Построить эпюры продольных сил N(z) и продольных перемещений W(z). Из условий прочности и жесткости подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения при отношении высоты к ширине h:b=β.

В задаче № 2:

Построить эпюры крутящих моментов $M_к(z)$ и углов закручивания θ(z). Из условий прочности и жесткости подобрать размеры кольцевого поперечного сечения вала при отношении диаметров D:d=β.

В задаче № 3:

Построить эпюры поперечных сил $Q_y(z)$, изгибающих моментов $M_x(z)$, углов поворота сечений φ(z) и прогибов V(z). Из условий прочности и жесткости подобрать указанное в исходных данных поперечное сечение. Вычислить касательные напряжения τ_{max} в сечении, где Q_{ymax}.

В задаче № 4:

Построить эпюры поперечных сил $Q_y(z)$, изгибающих моментов $M_x(z)$, углов поворота сечений φ(z) и прогибов V(z). Из условий прочности и жесткости подобрать размеры круглого сечения.

В задаче № 5:

Построить эпюры продольных сил N(z), поперечных сил $Q_y(z)$ и изгибающих моментов $M_x(z)$. Принять радиус кривизны R = 1 м. Подобрать круглое поперечное сечение стержня из расчета на прочность по изгибающему моменту. Определить линейное перемещение в точке A или угловое перемещение в точке B.

В задаче № 6:

Построить эпюры поперечных сил $Q_y(z)$ и изгибающих моментов $M_x(z)$. Из расчета на прочность подобрать размеры квадратного сечения. Длины стержней принять равными l.

В задаче № 7:

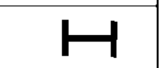
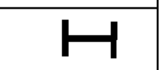
Приближенным методом определить критическое значение интенсивности $q_{кр}$, вычислить действительное значение коэффициента приведения длины стержня μ.

В задаче № 8:

Определить высоту H падения груза, при которой $\sigma_{дин} \leq [\sigma]$. При расчетах принять сечение, подобранное в задаче 3.

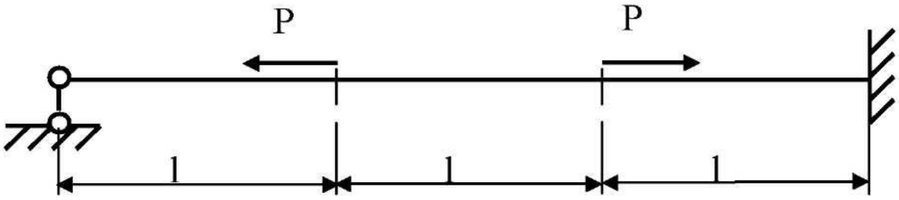
При решении задач принять равными: модуль Юнга $E=2\cdot10^5$МПа, модуль сдвига $G=8\cdot10^4$МПа, допускаемые линейные перемещения [W]= [V]=0,002·l м, допускаемое угловое перемещение [θ]=0,002·l рад/м.

Таблица исходных данных

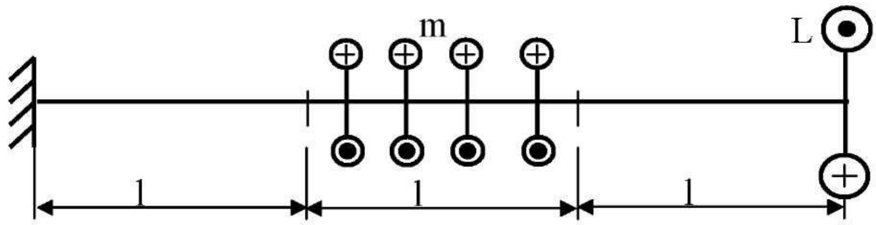
№ п/п	q, $\frac{кН}{м}$	P, кН	L, кН·м	m, $\frac{кН \cdot м}{м}$	l, м	α,	β	$m_г$, кг	[σ], МПа	[τ], МПа	Форма сечения
1	10	20	16	12	1,0	30	1,5	100	160	100	
2	12	22	18	14	1,1	45	1,6	150	155	98	
3	14	24	20	16	1,2	60	1,7	200	150	96	
4	16	26	22	18	1,3	30	1,8	250	145	94	
5	18	28	24	20	1,4	45	1,9	300	140	92	
6	20	30	26	22	1,5	60	2,0	350	135	90	
7	22	32	28	24	1,6	30	2,1	400	130	88	
8	24	34	30	26	1,7	45	2,2	100	125	86	
9	26	36	28	28	1,8	60	2,3	150	120	84	
10	28	38	26	30	1,9	30	2,4	200	115	82	
11	30	40	24	32	2,0	45	2,5	250	110	80	
12	32	42	22	34	1,9	60	2,6	300	100	78	
13	34	44	20	36	1,8	30	2,7	350	160	100	
14	36	46	22	38	1,7	45	2,8	400	155	98	
15	38	48	24	40	1,8	60	2,9	100	150	96	
16	40	50	26	20	1,6	30	3,0	150	145	94	
17	42	52	28	22	1,5	45	3,1	200	140	92	
18	44	54	30	24	1,4	60	3,2	250	135	90	
19	46	56	32	26	1,3	30	3,3	300	130	88	
20	48	58	34	28	1,2	45	3,4	350	125	86	
21	50	60	36	30	1,1	60	3,5	400	120	84	
22	52	58	38	32	1,0	30	3,6	100	115	82	
23	54	56	40	34	1,1	45	3,7	150	110	80	
24	56	54	42	36	1,2	60	3,8	200	100	78	
25	58	52	44	38	1,3	30	3,9	250	160	100	
26	60	50	46	40	1,4	45	4,0	300	155	98	

ВАРИАНТ № 1

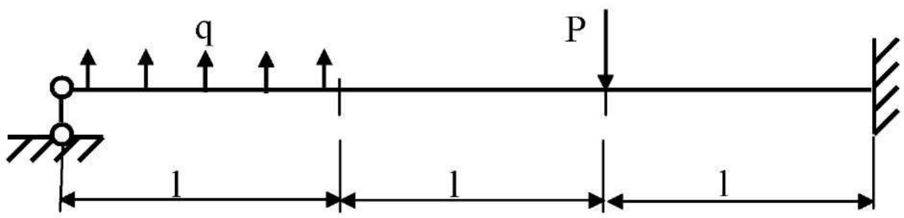
1.



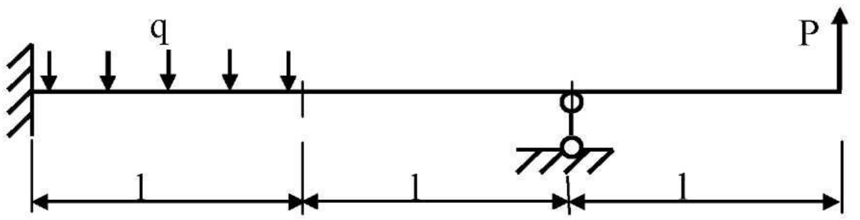
2.



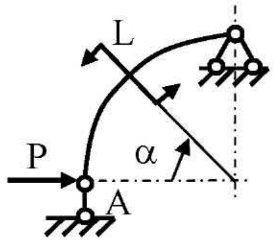
3.



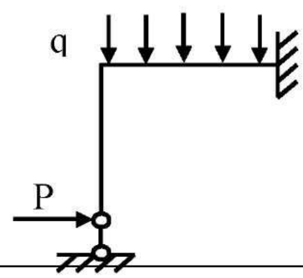
4.



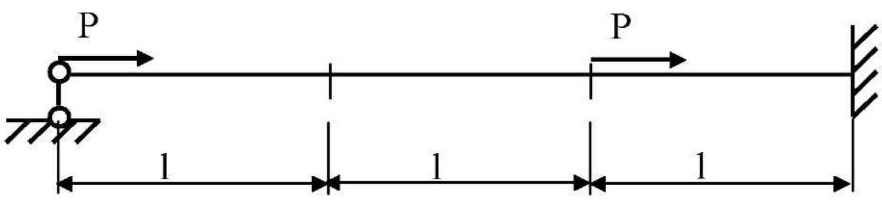
5.



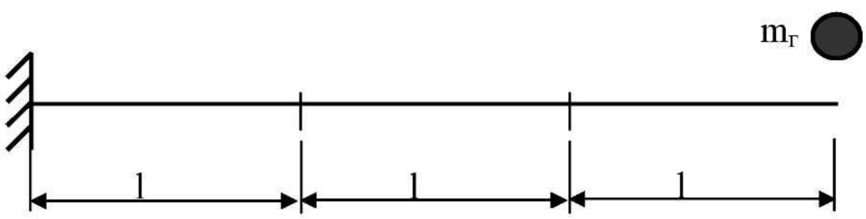
6.



7.

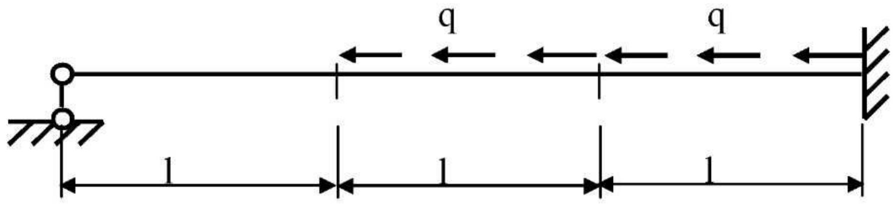


8.



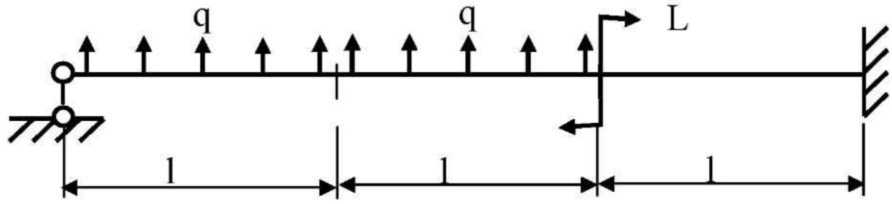
ВАРИАНТ № 2

1.

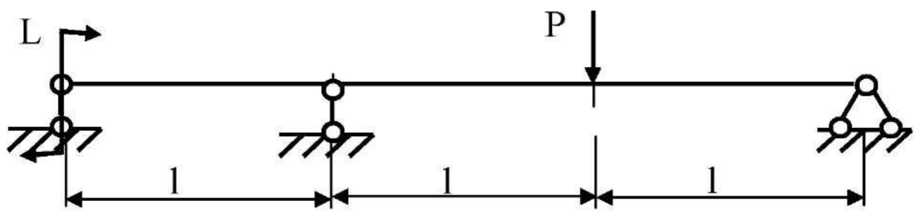


2.

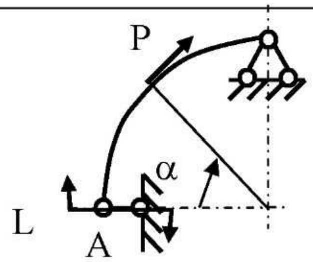
3.



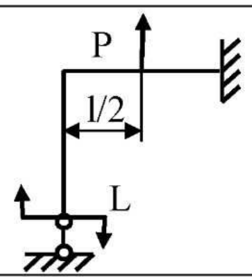
4.



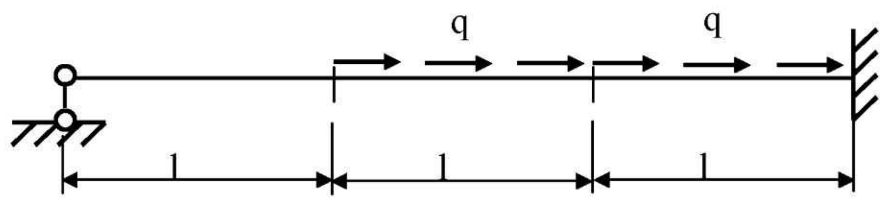
5.



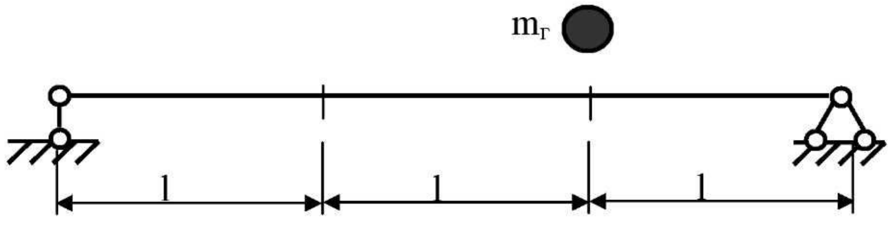
6.



7.

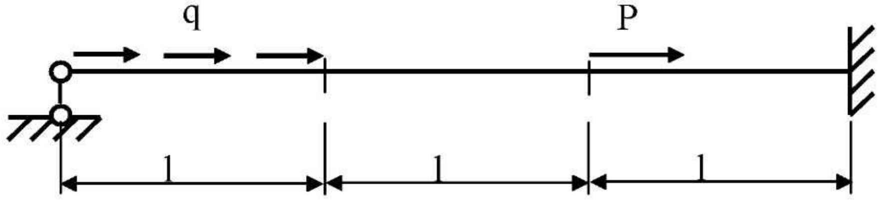


8.

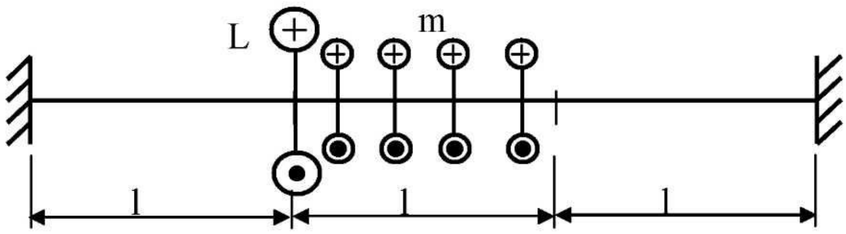


ВАРИАНТ № 3

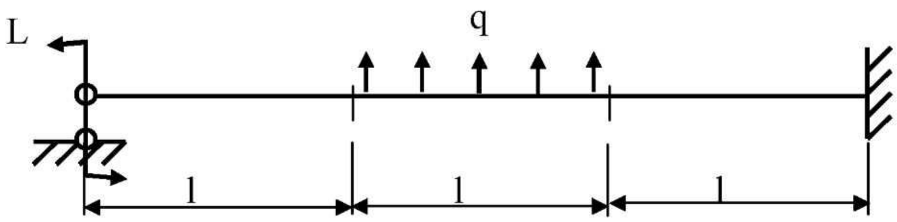
1.



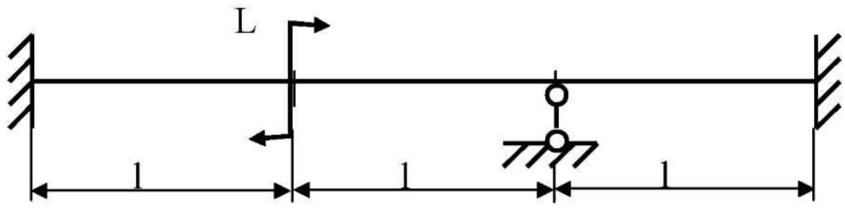
2.



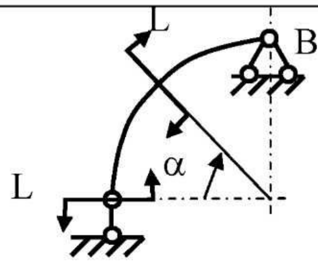
3.



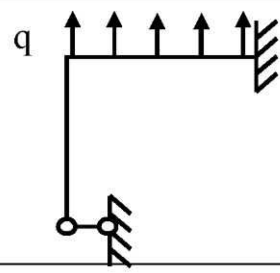
4.



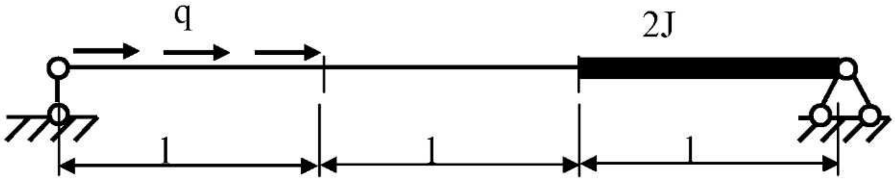
5.



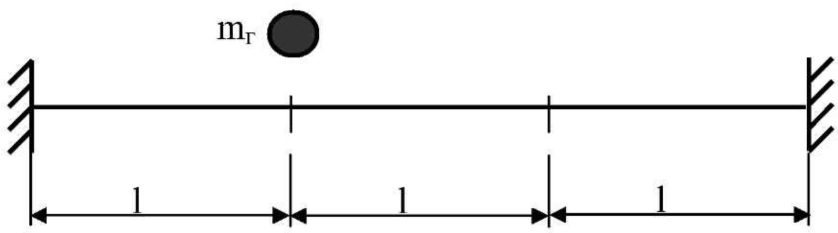
6.



7.

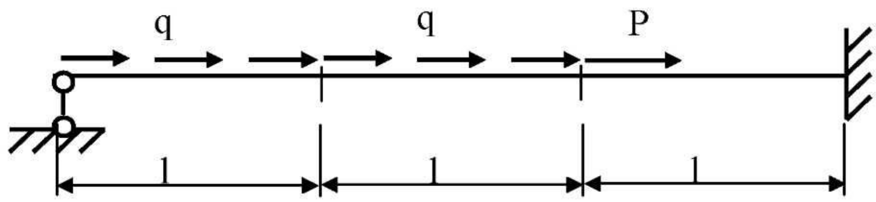


8.

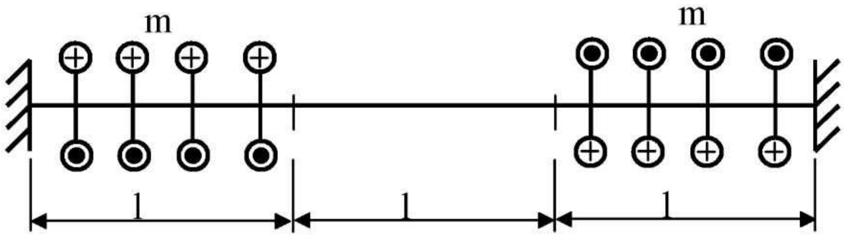


ВАРИАНТ № 4

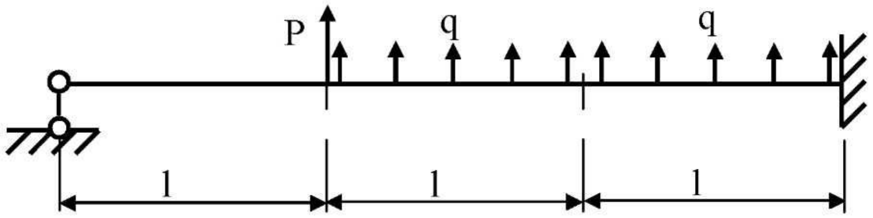
1.



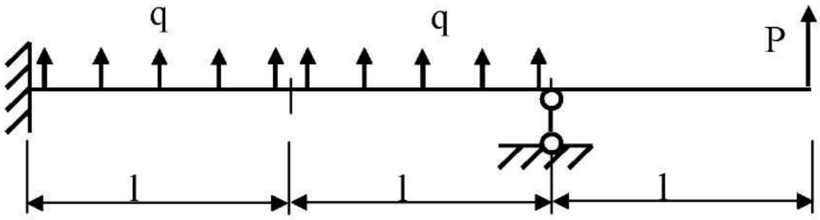
2.



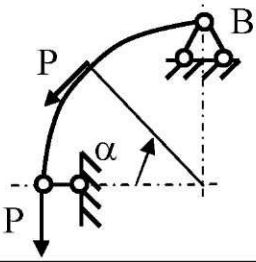
3.



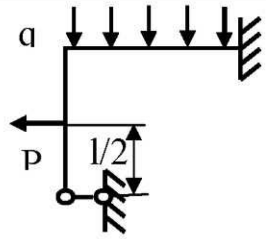
4.



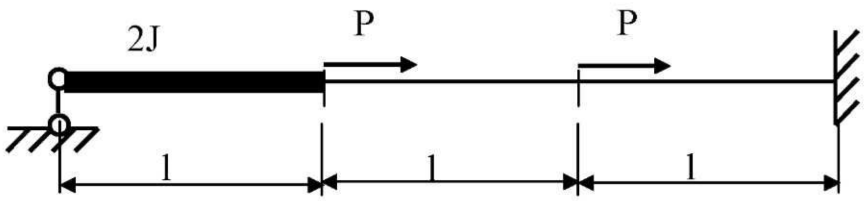
5.



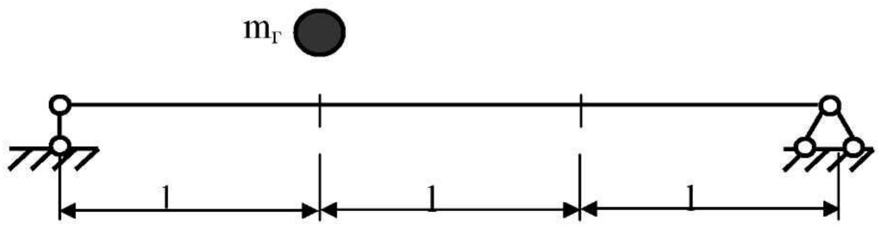
6.



7.

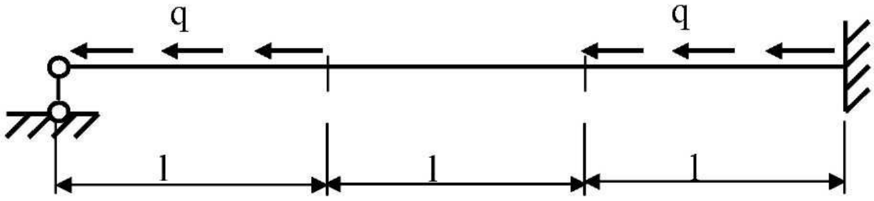


8.

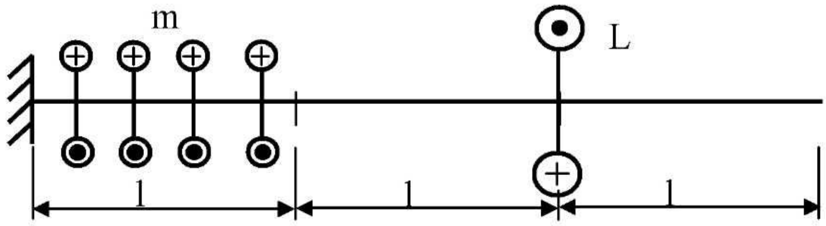


ВАРИАНТ № 5

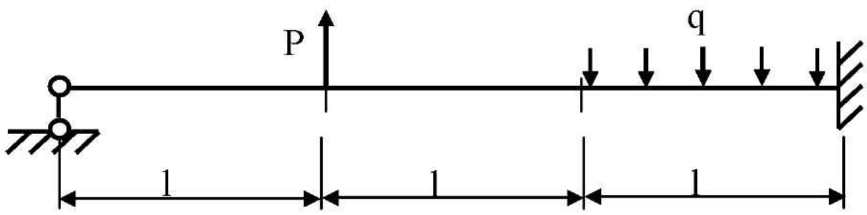
1.



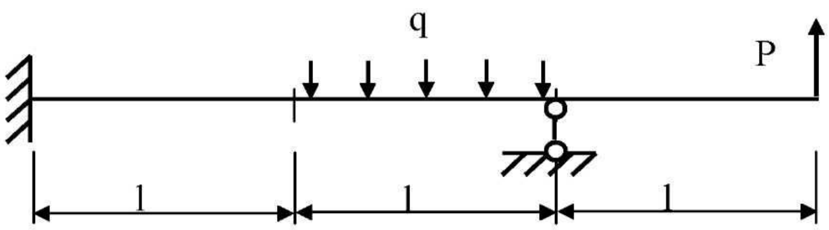
2.



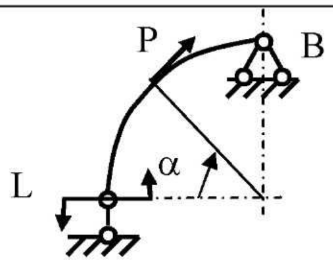
3.



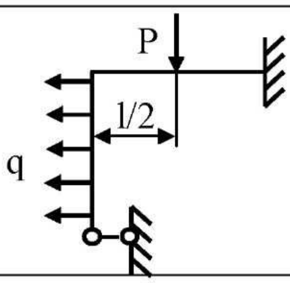
4.



5.

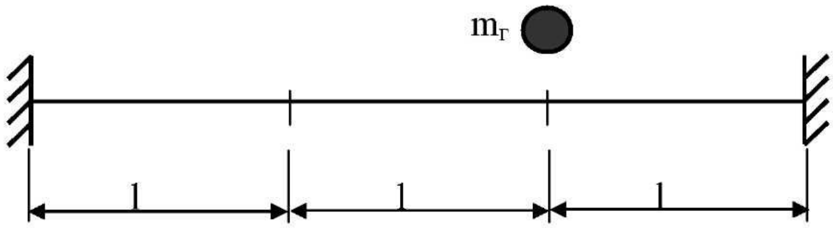


6.



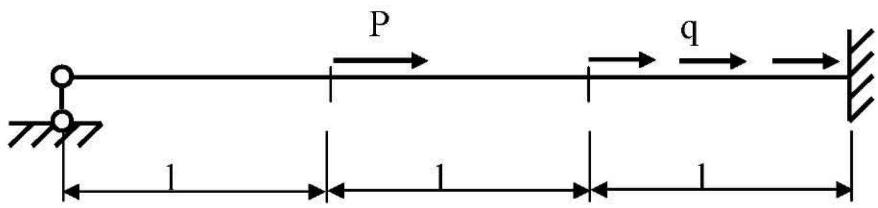
7.

8.

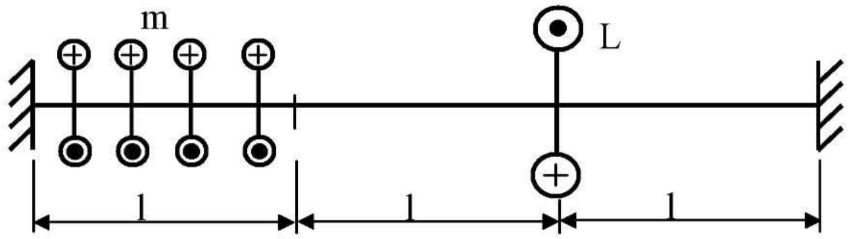


ВАРИАНТ № 6

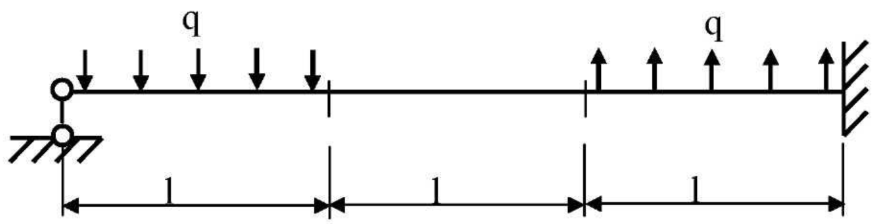
1.



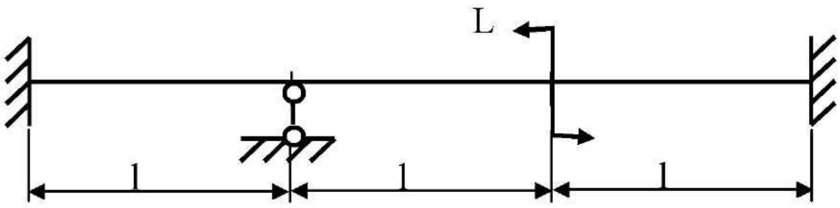
2.



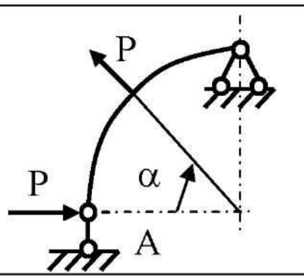
3.



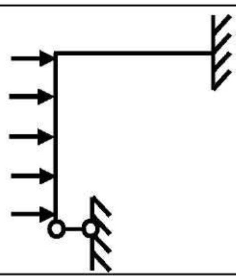
4.



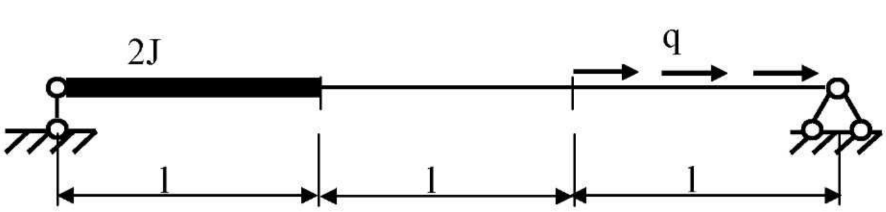
5.



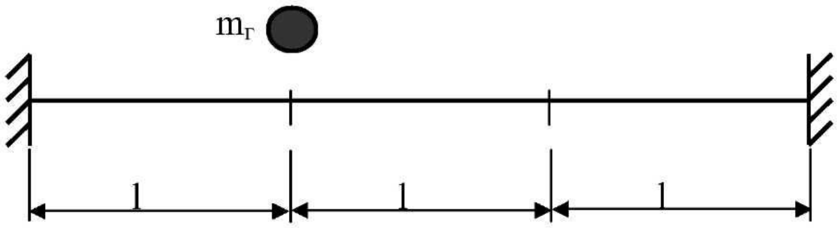
6.



7.

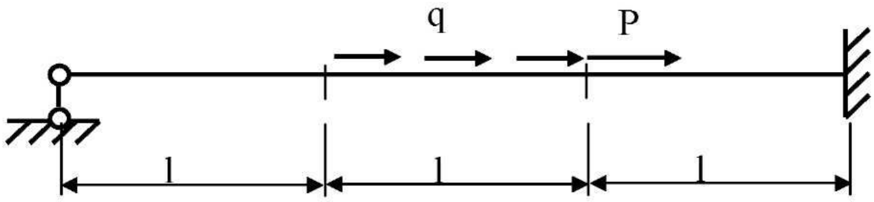


8.

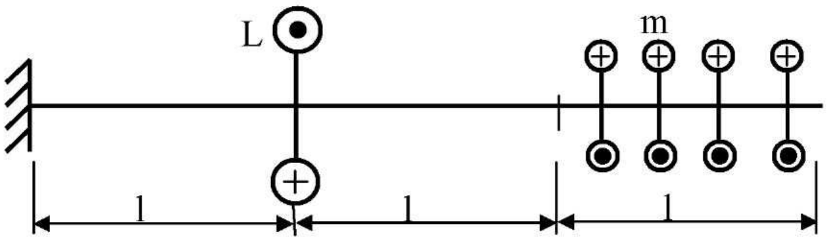


ВАРИАНТ № 7

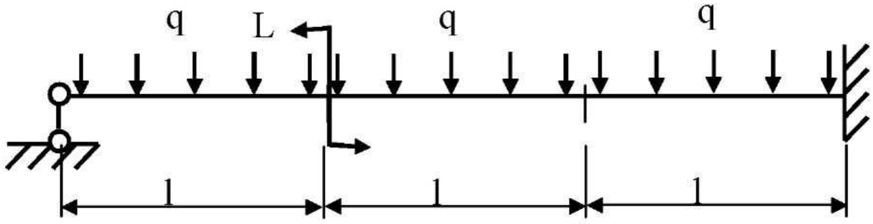
1.



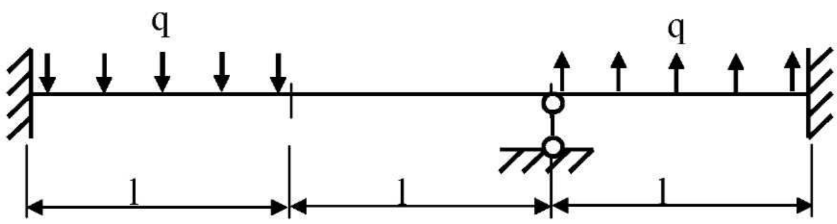
2.



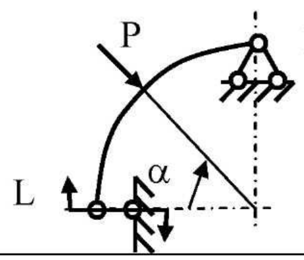
3.



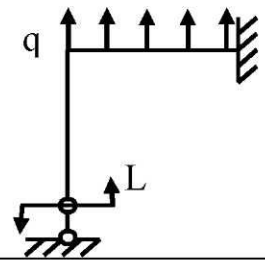
4.



5.

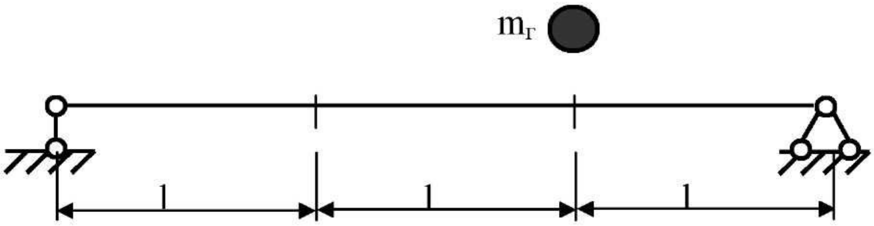


6.



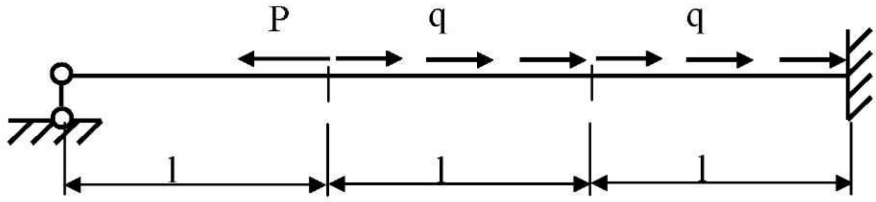
7.

8.

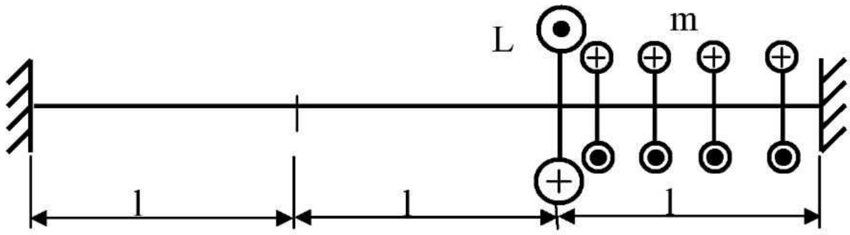


ВАРИАНТ № 8

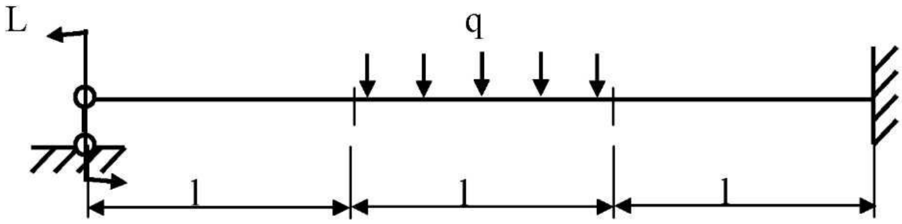
1.



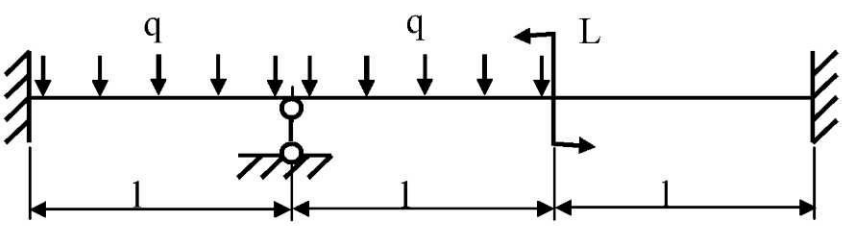
2.



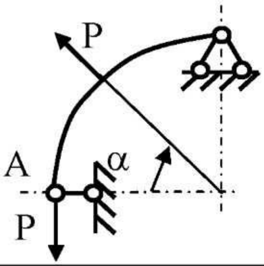
3.



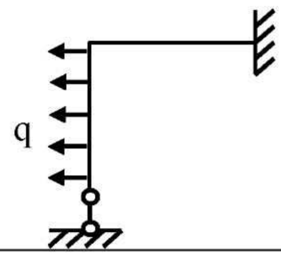
4.



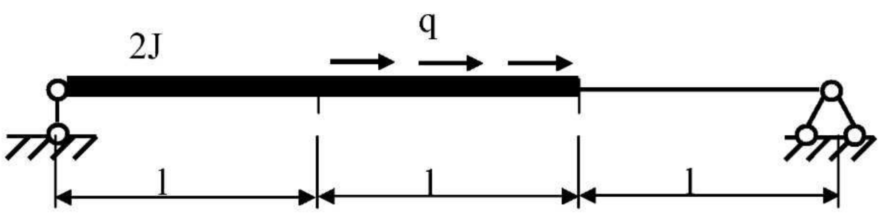
5.



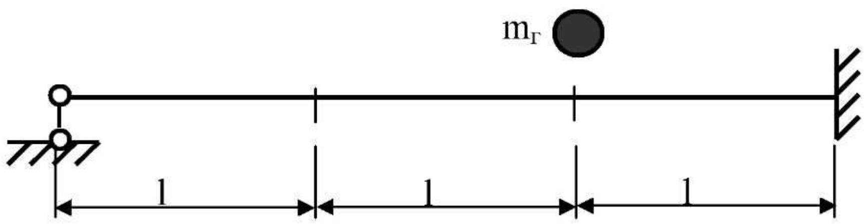
6.



7.

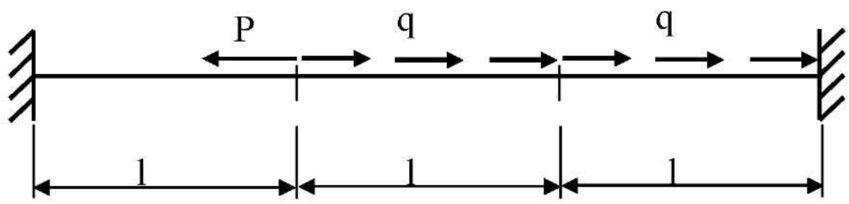


8.

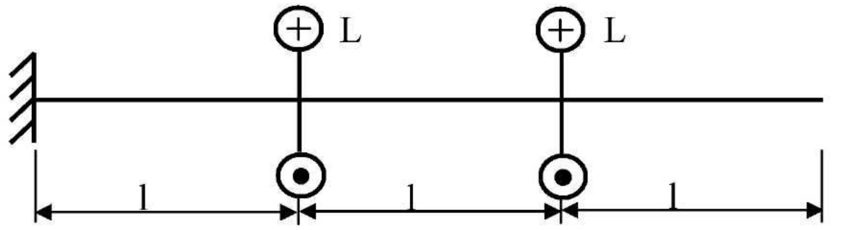


ВАРИАНТ № 9

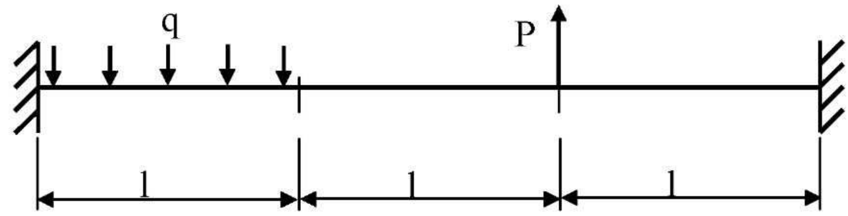
1.



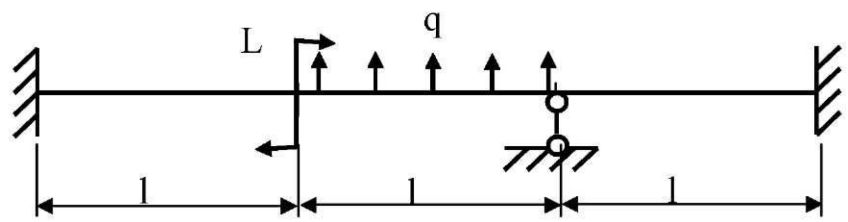
2.



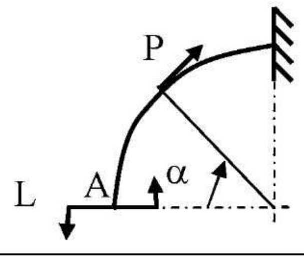
3.



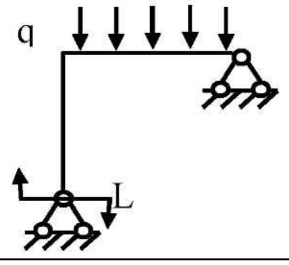
4.



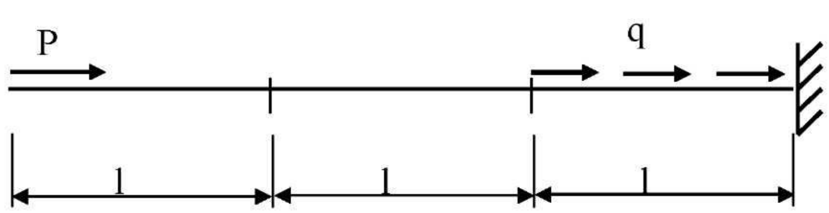
5.



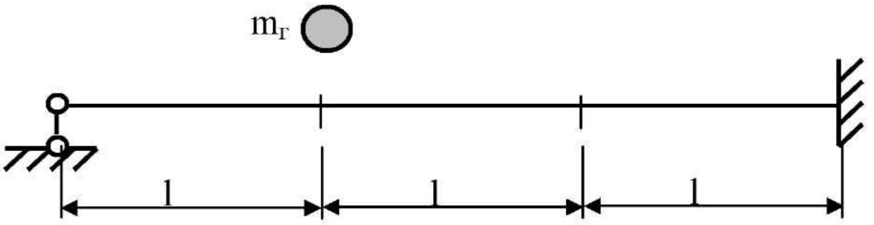
6.



7.

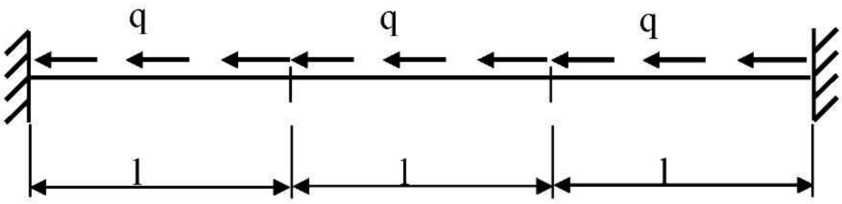


8.

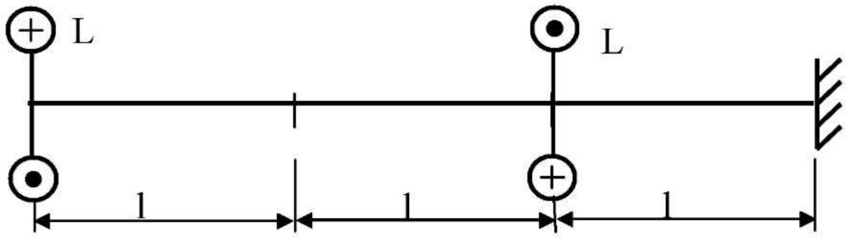


ВАРИАНТ № 10

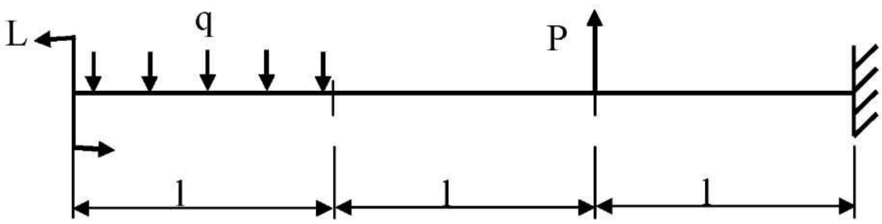
1.



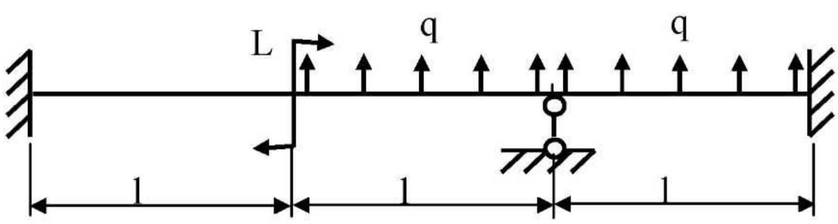
2.



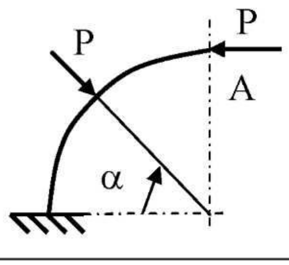
3.



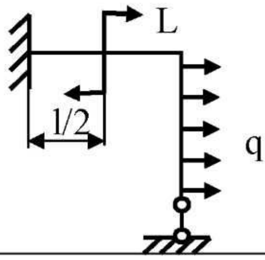
4.



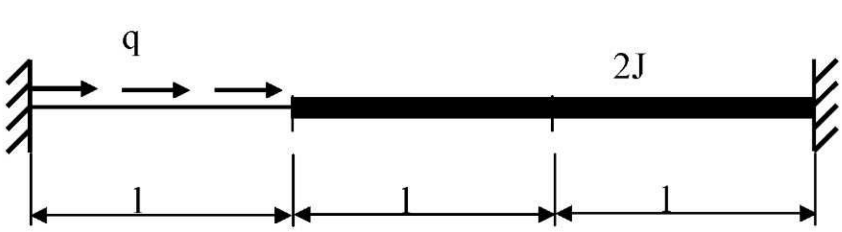
5.



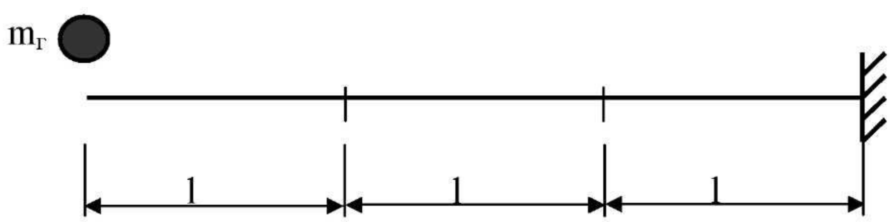
6.



7.

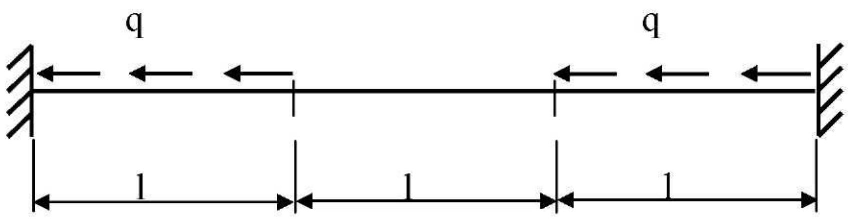


8.

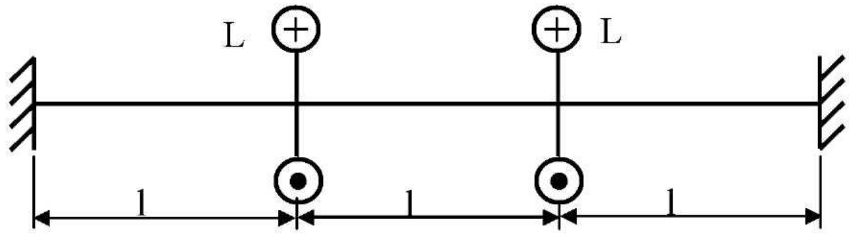


ВАРИАНТ № 11

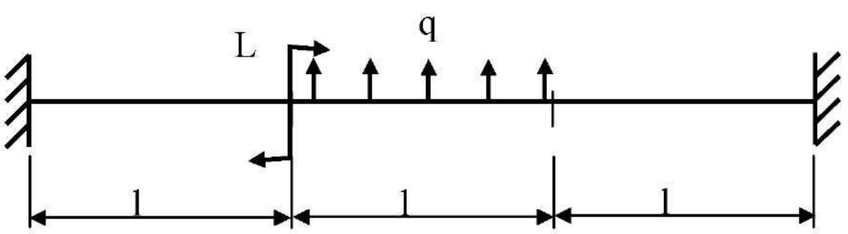
1.



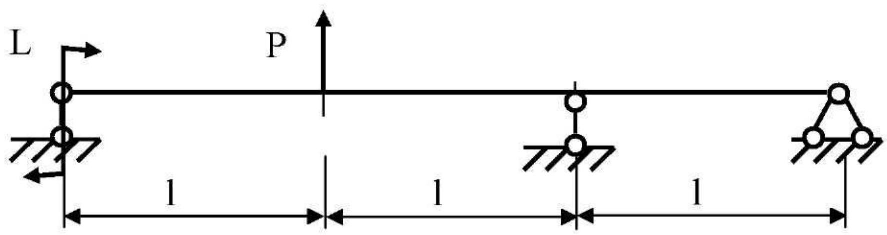
2.



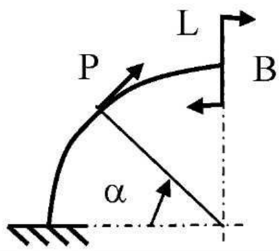
3.



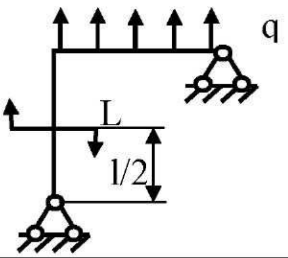
4.



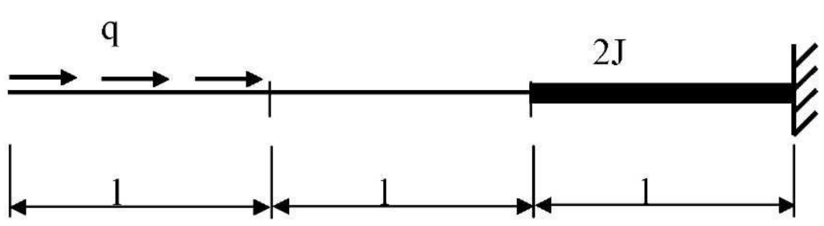
5.



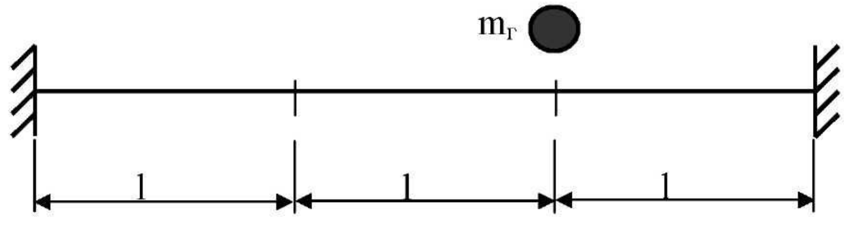
6.



7.

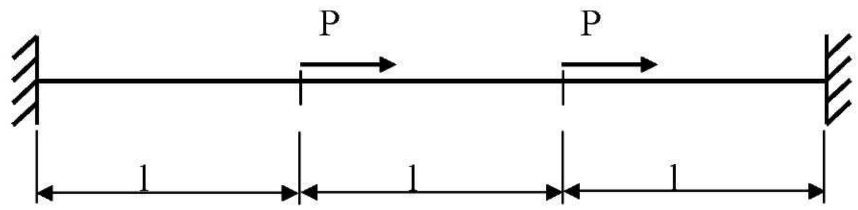


8.

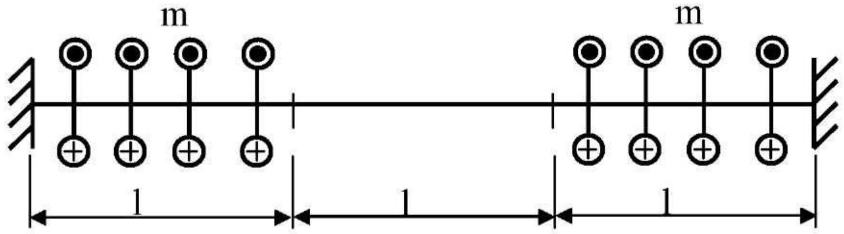


ВАРИАНТ № 12

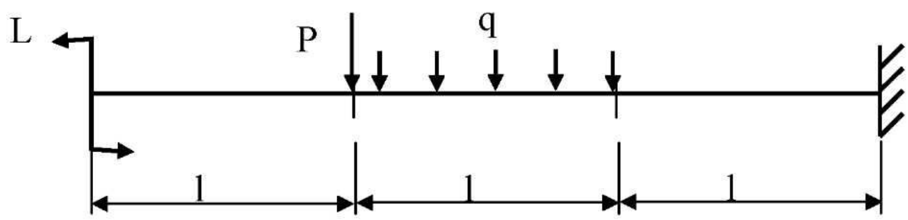
1.



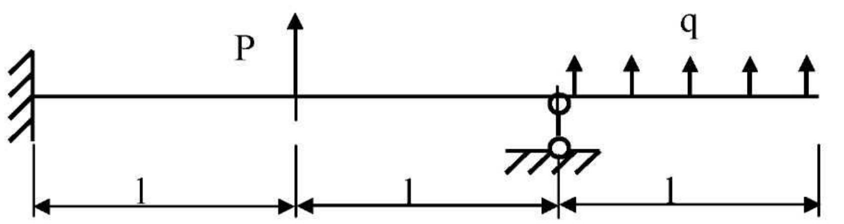
2.



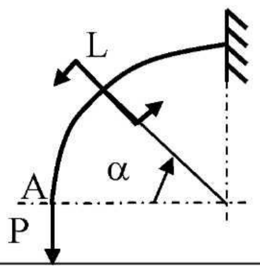
3.



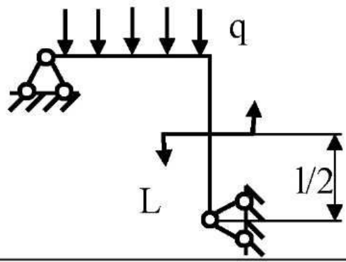
4.



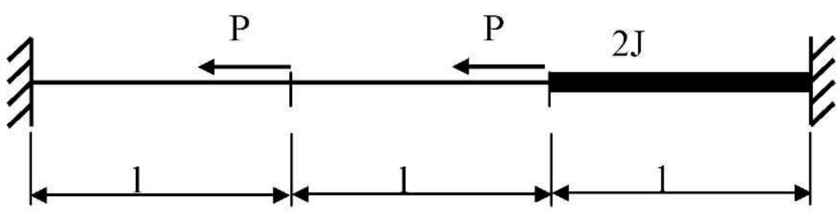
5.



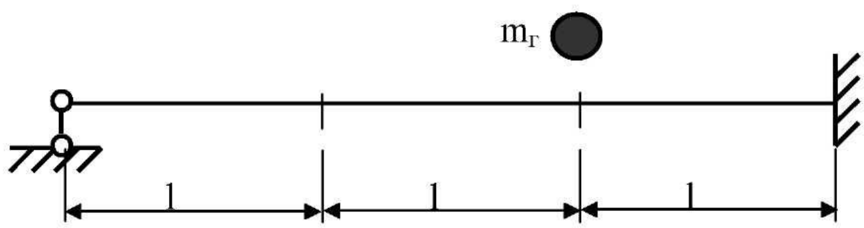
6.



7.

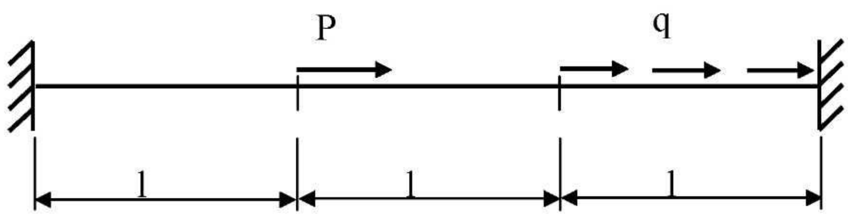


8.

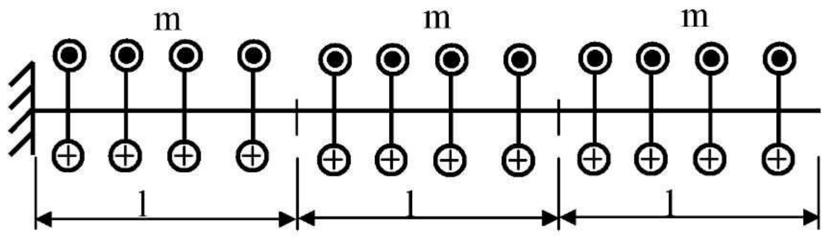


ВАРИАНТ № 13

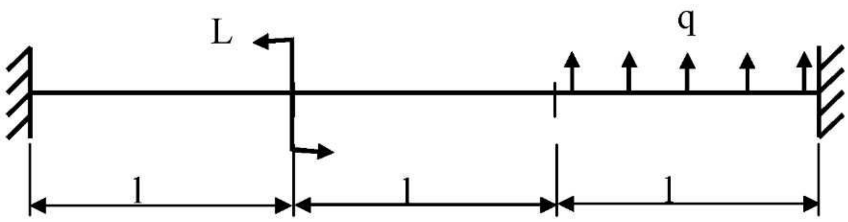
1.



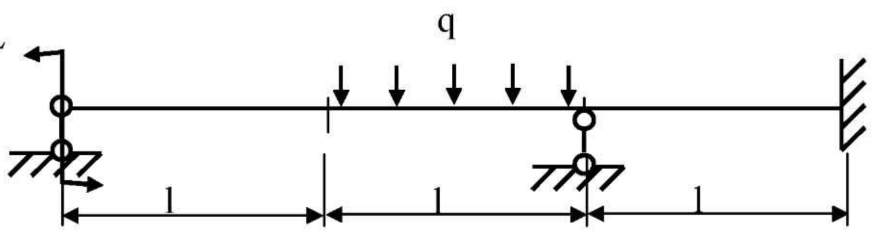
2.



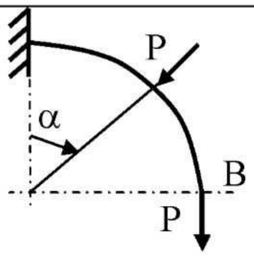
3.



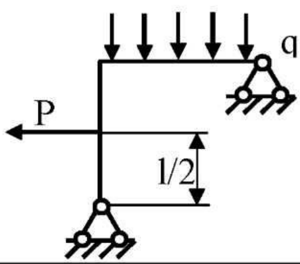
4.



5.

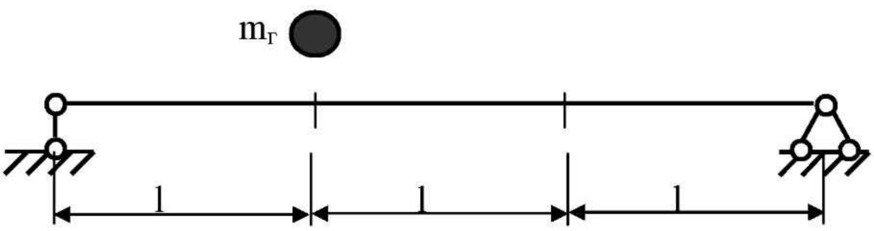


6.



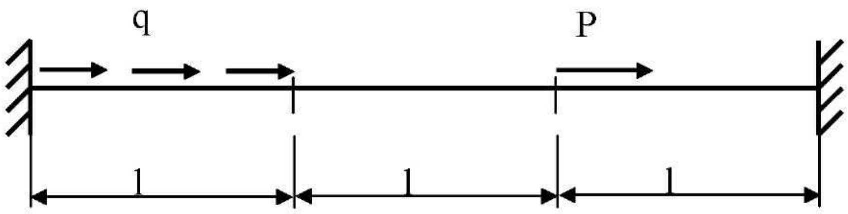
7.

8.

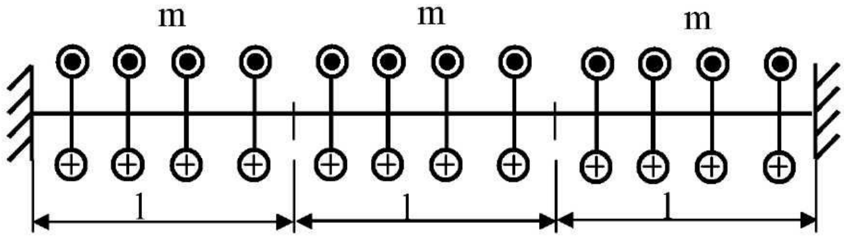


ВАРИАНТ № 14

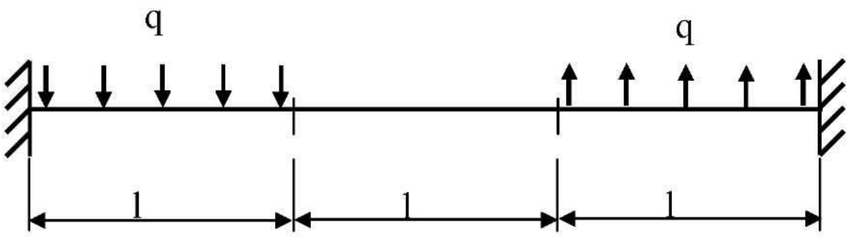
1.



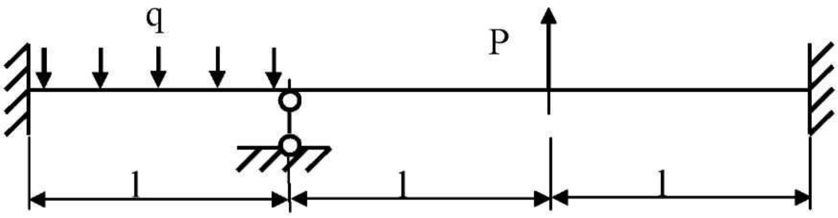
2.



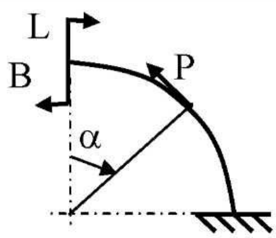
3.



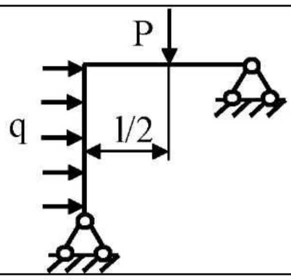
4.



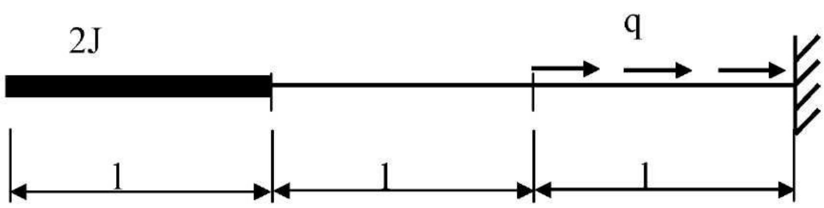
5.



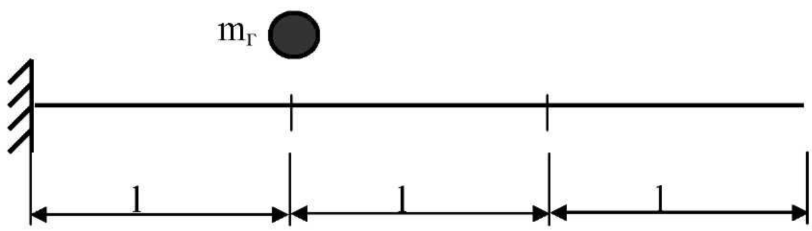
6.



7.

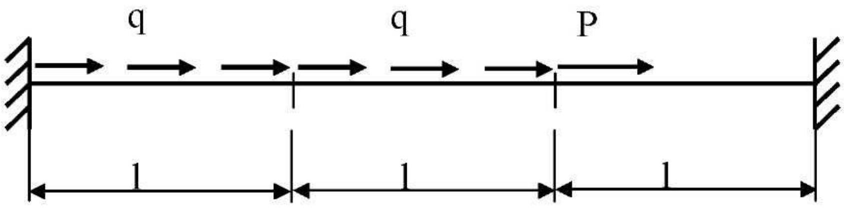


8.

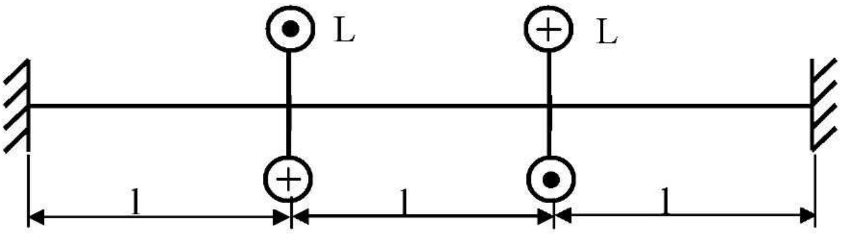


ВАРИАНТ № 15

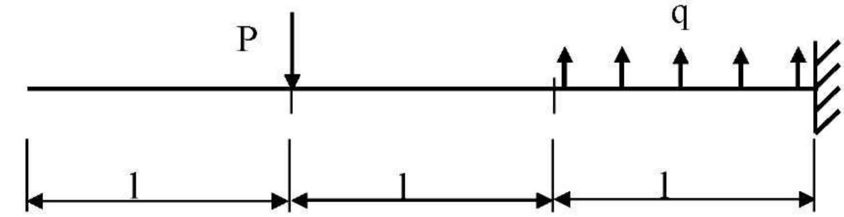
1.



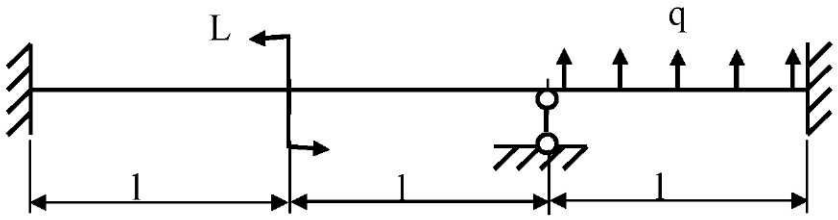
2.



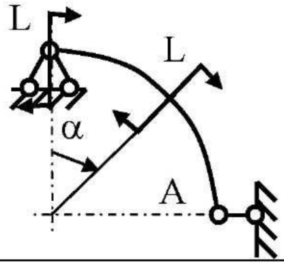
3.



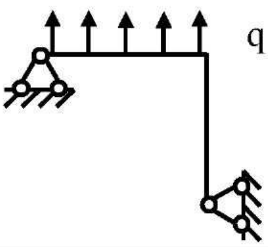
4.



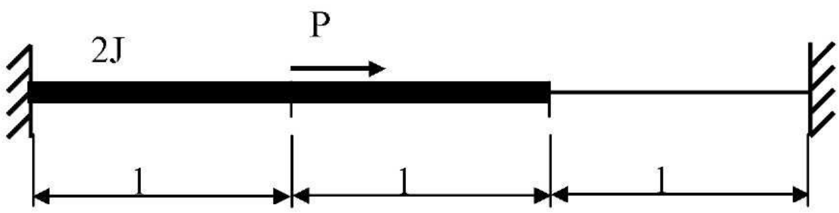
5.



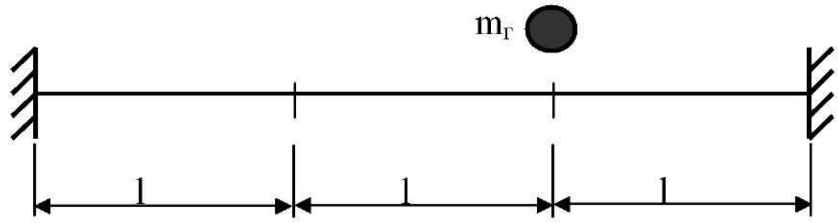
6.



7.

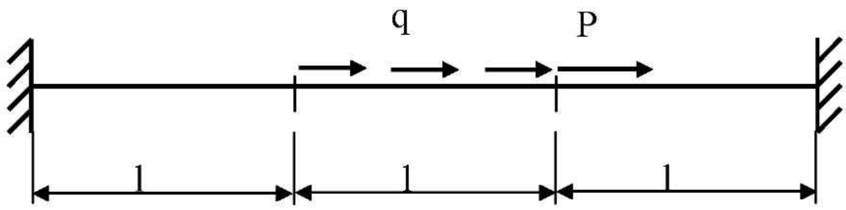


8.

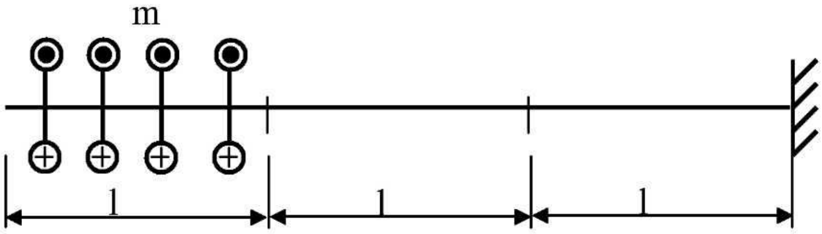


ВАРИАНТ № 16

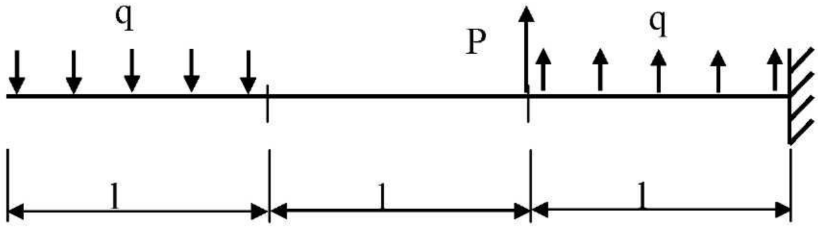
1.



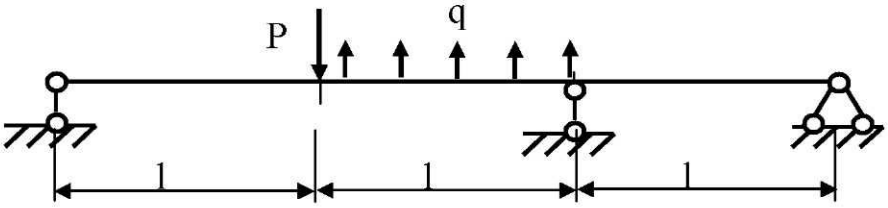
2.



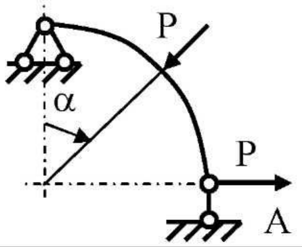
3.



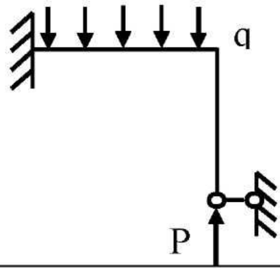
4.



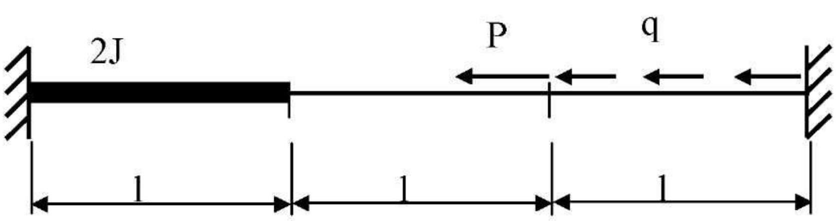
5.



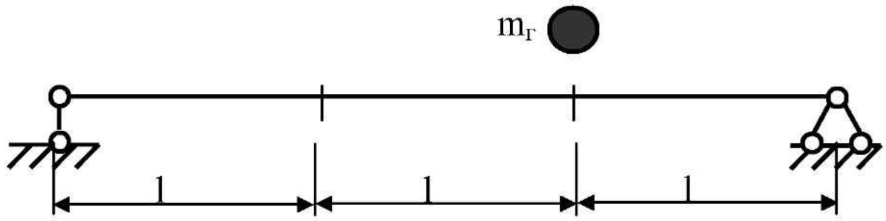
6.



7.

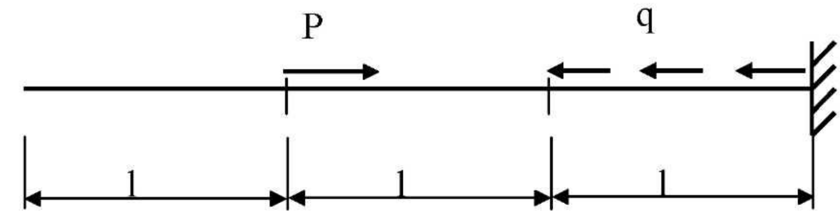


8.

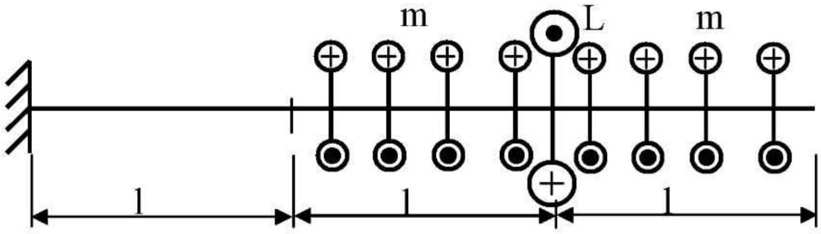


ВАРИАНТ № 17

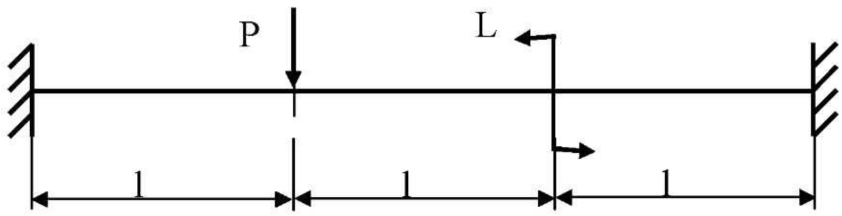
1.



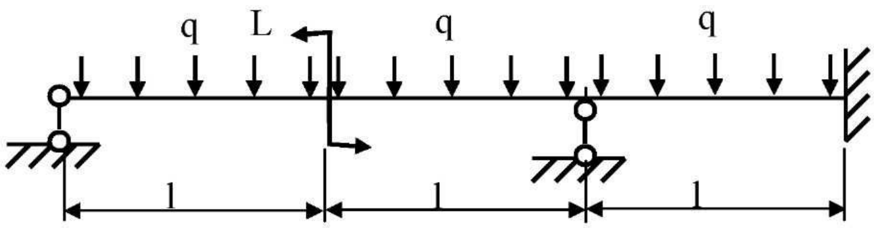
2.



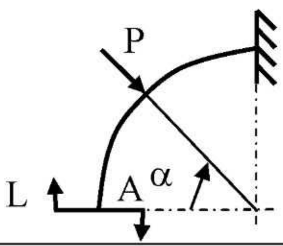
3.



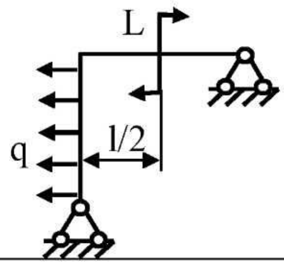
4.



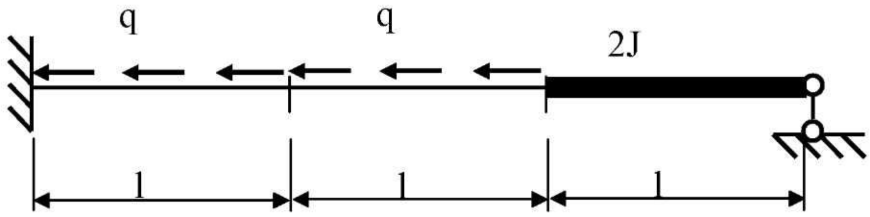
5.



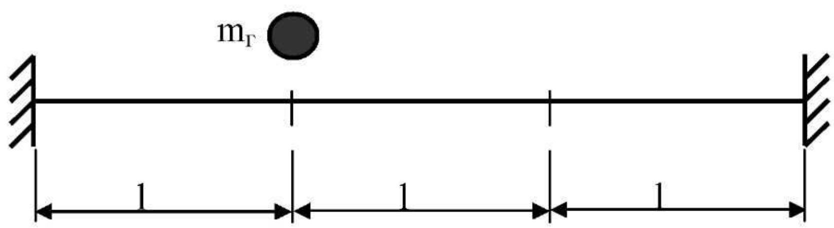
6.



7.

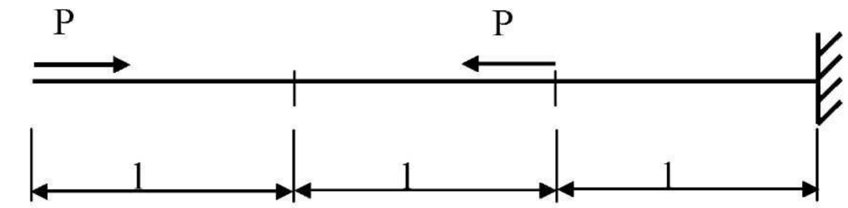


8.

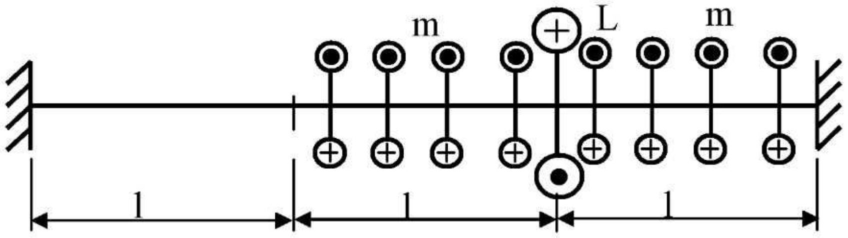


ВАРИАНТ № 18

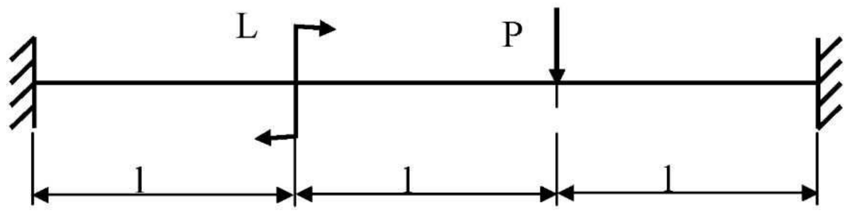
1.



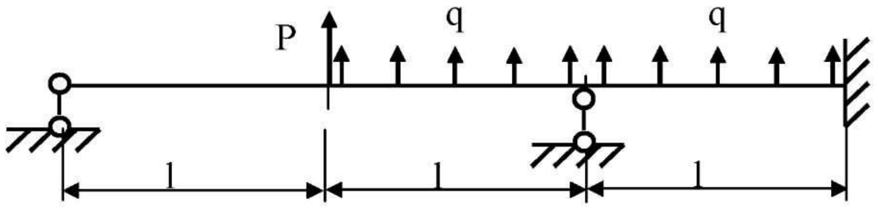
2.



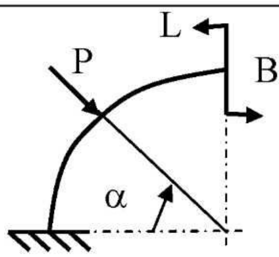
3.



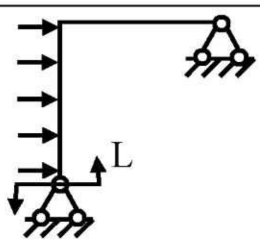
4.



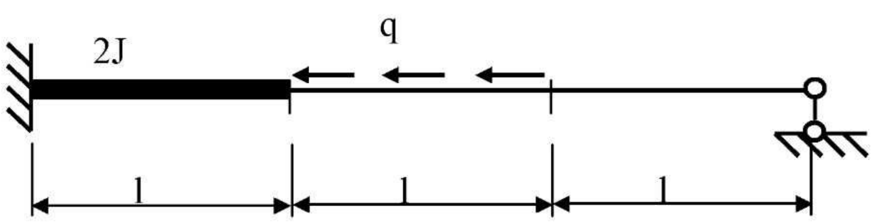
5.



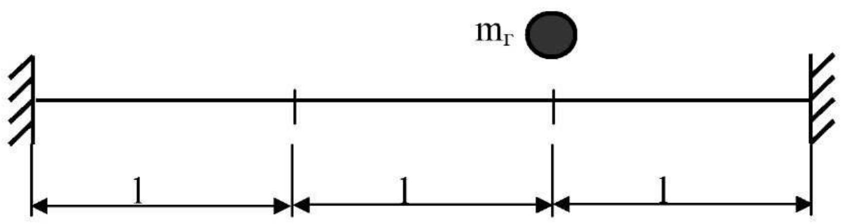
6.



7.

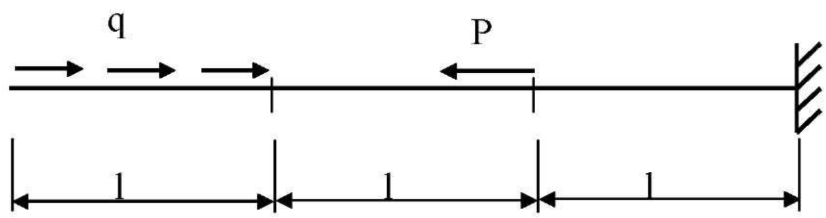


8.

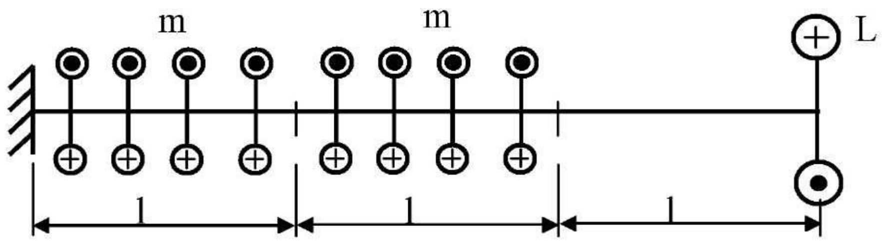


ВАРИАНТ № 19

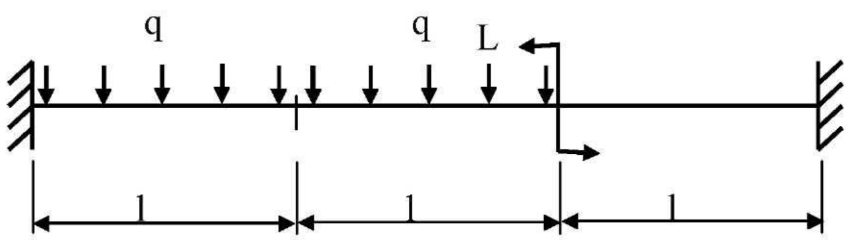
1.



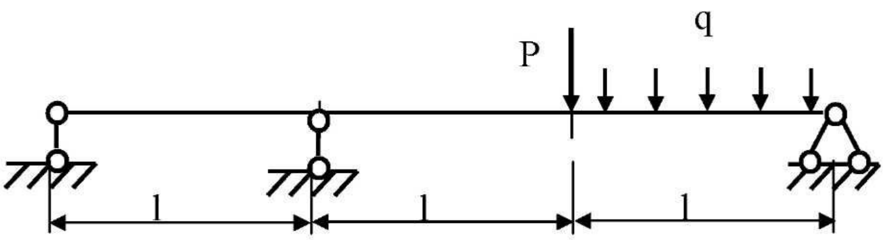
2.



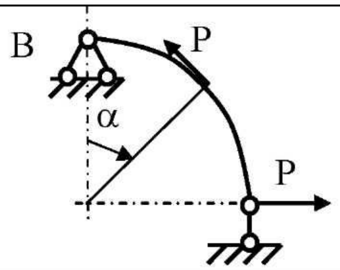
3.



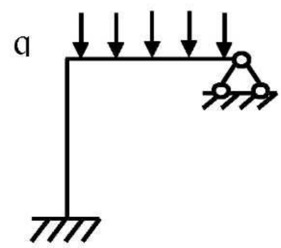
4.



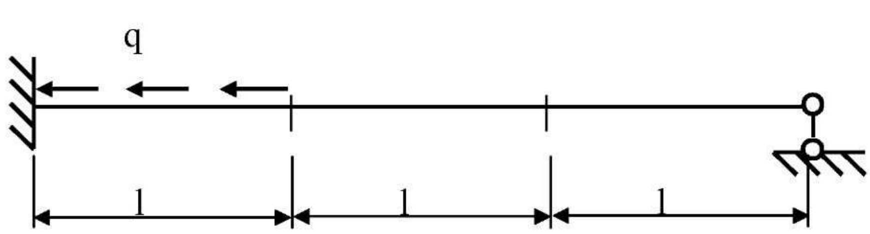
5.



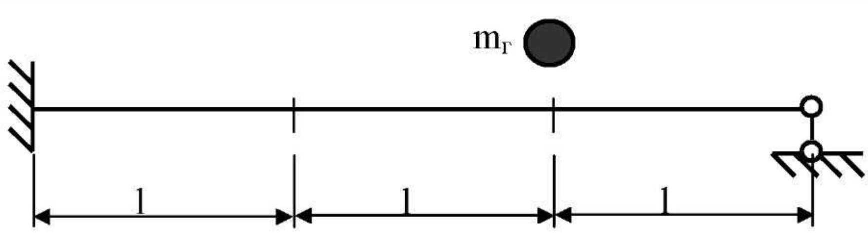
6.



7.

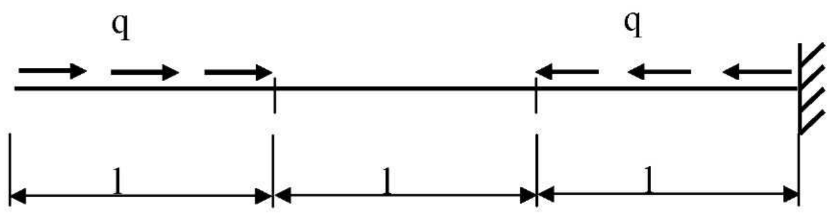


8.

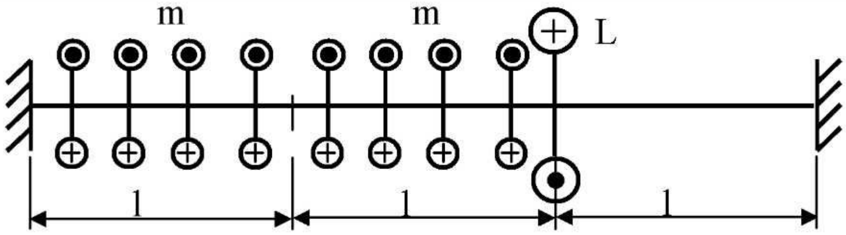


ВАРИАНТ № 20

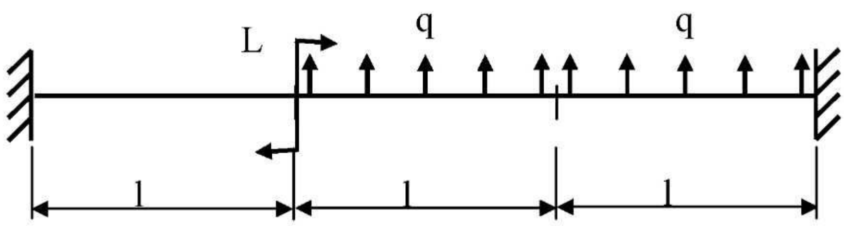
1.



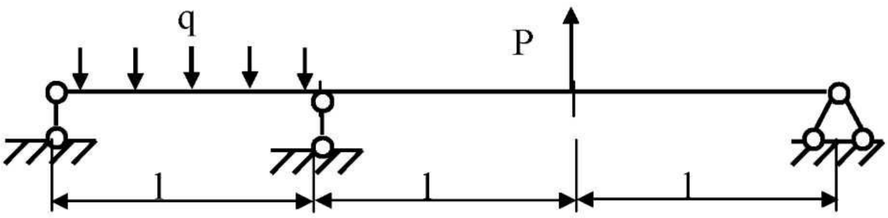
2.



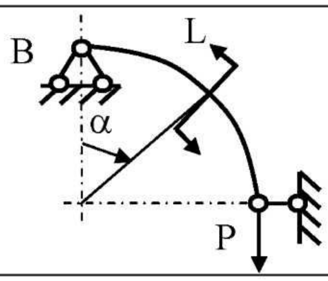
3.



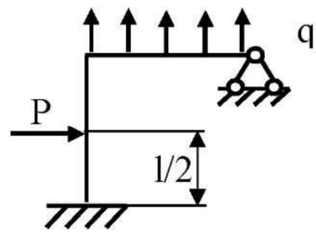
4.



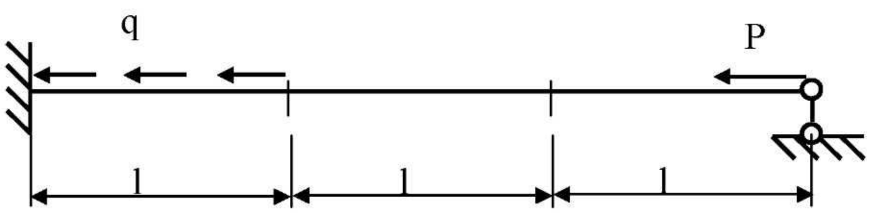
5.



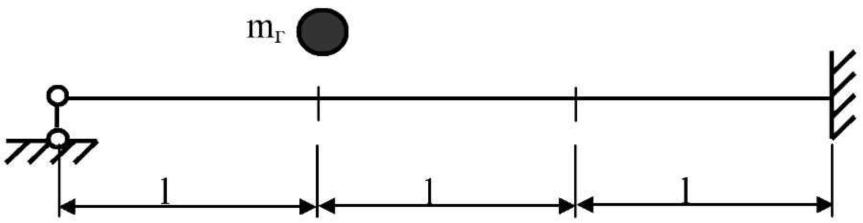
6.



7.

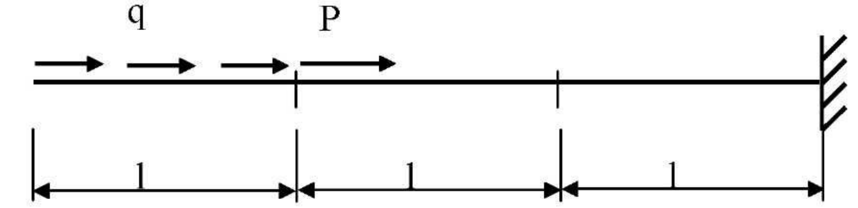


8.

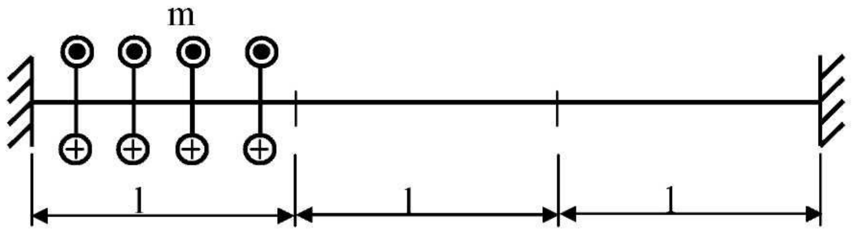


ВАРИАНТ № 21

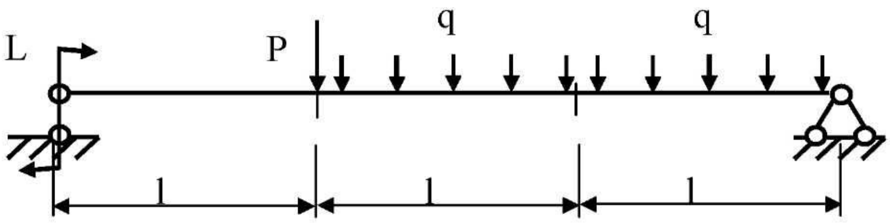
1.



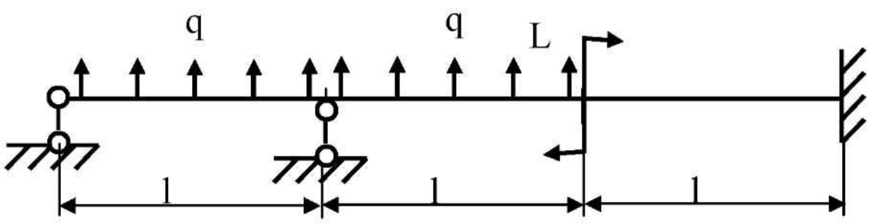
2.



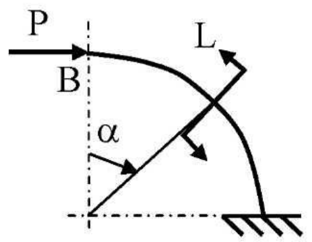
3.



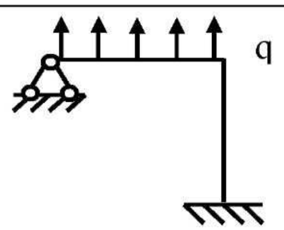
4.



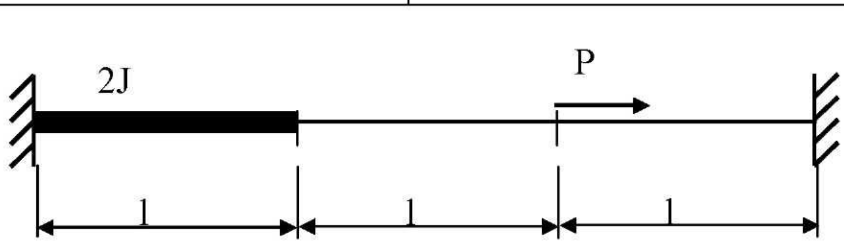
5.



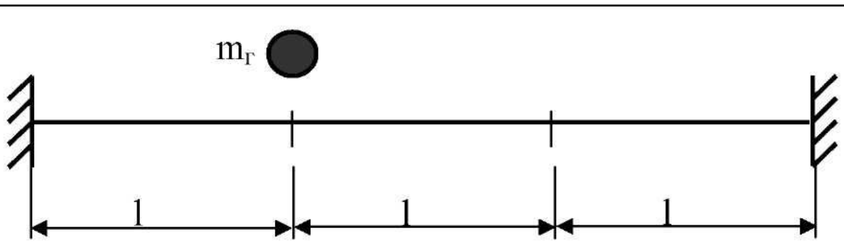
6.



7.

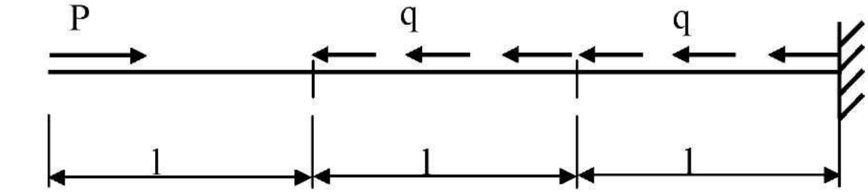


8.

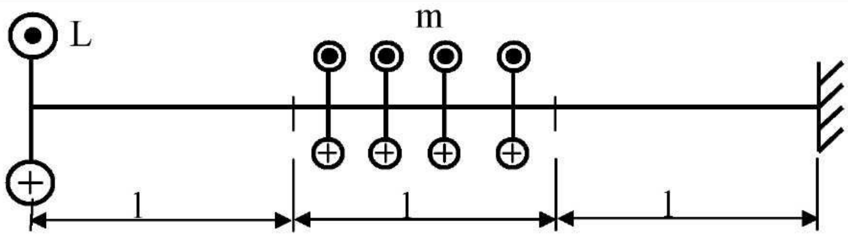


ВАРИАНТ № 22

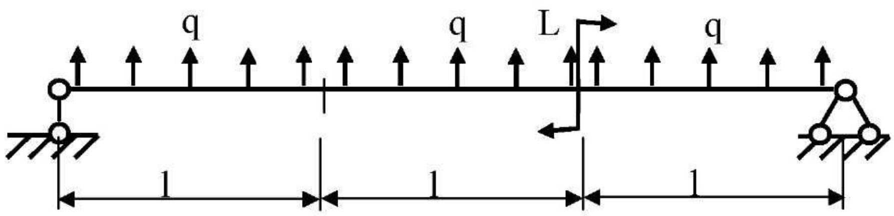
1.



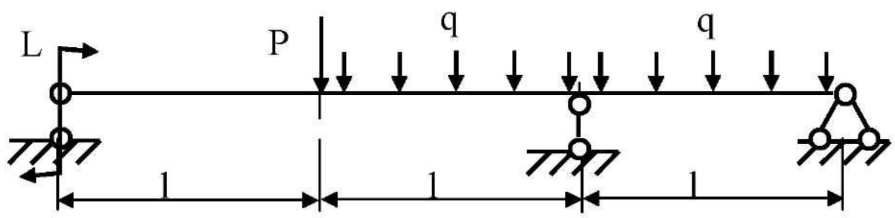
2.



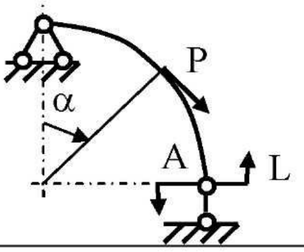
3.



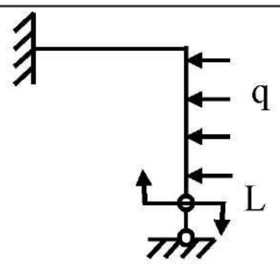
4.



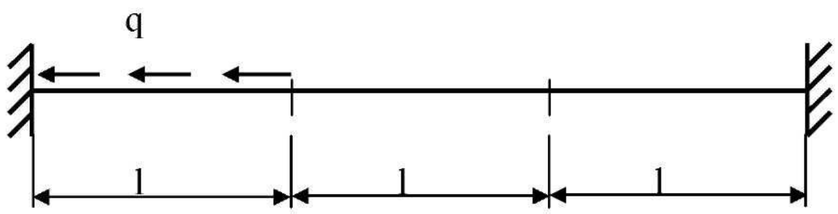
5.



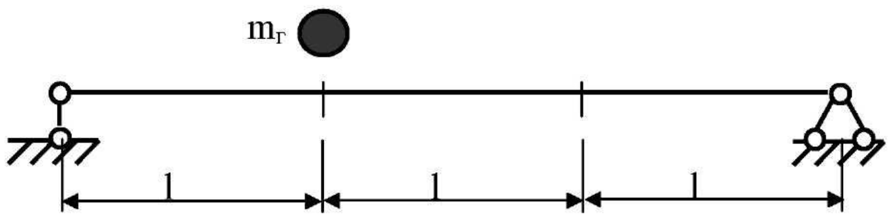
6.



7.

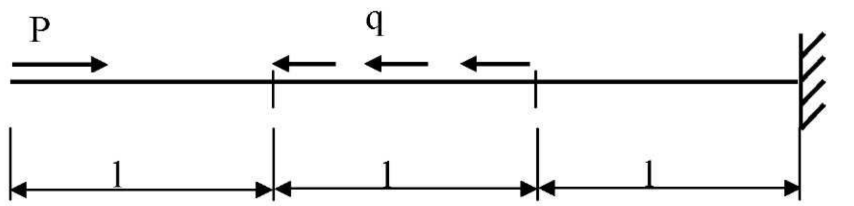


8.

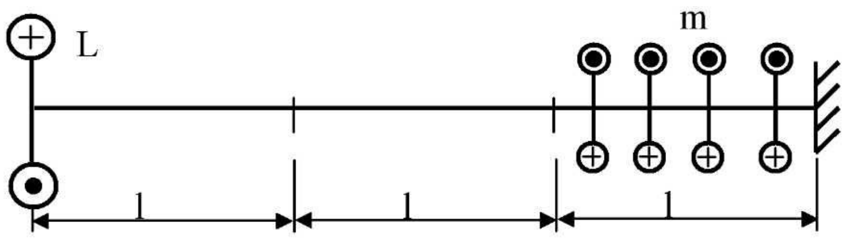


ВАРИАНТ № 23

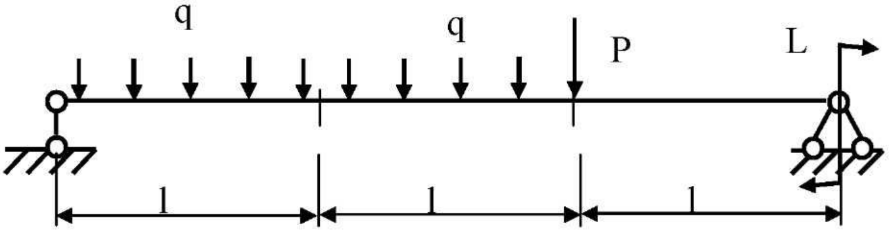
1.



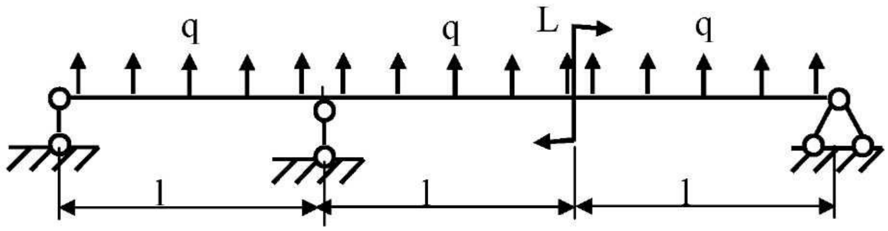
2.



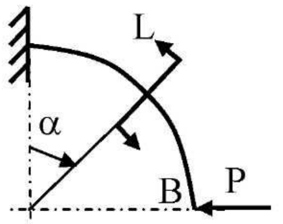
3.



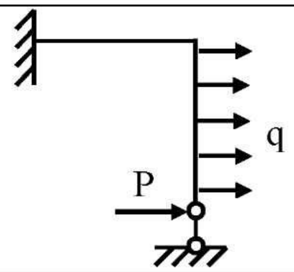
4.



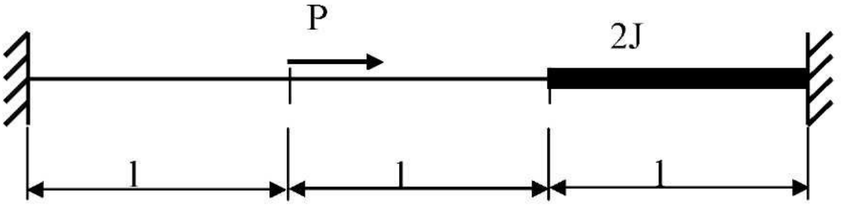
5.



6.



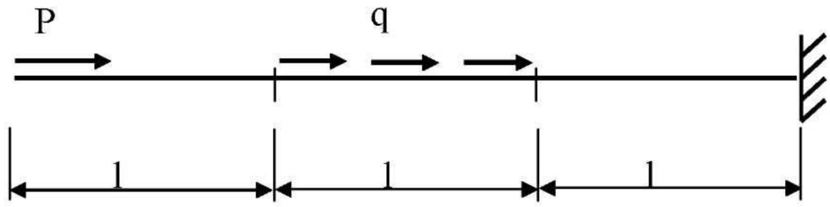
7.



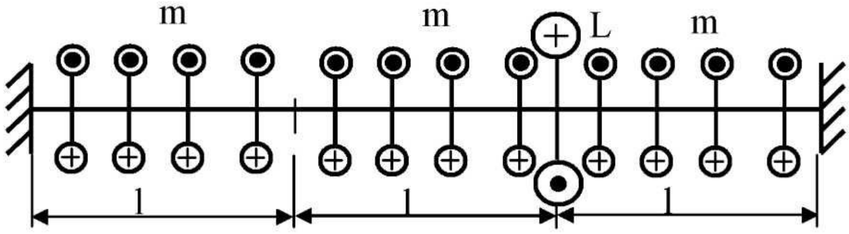
8.

ВАРИАНТ № 24

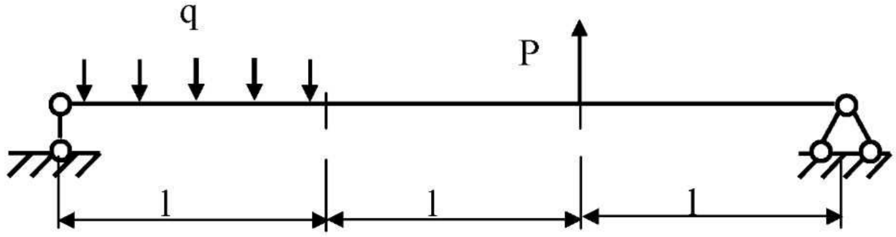
1.



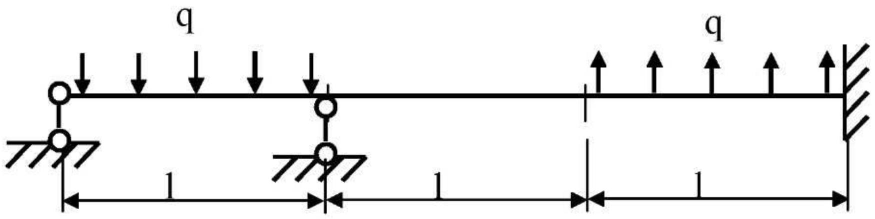
2.



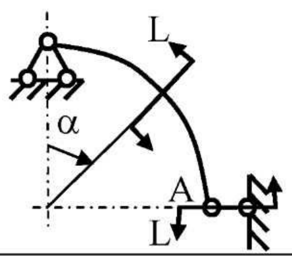
3.



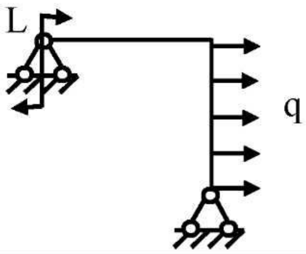
4.



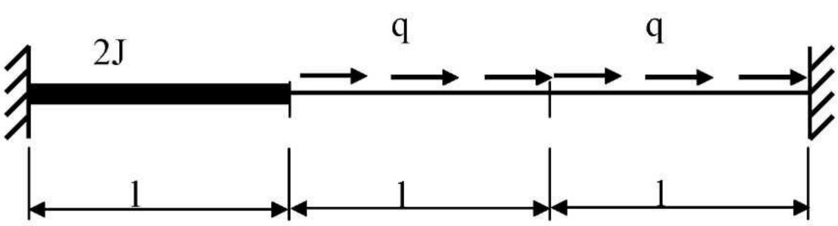
5.



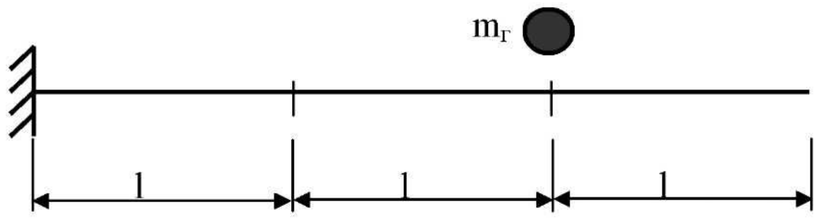
6.



7.

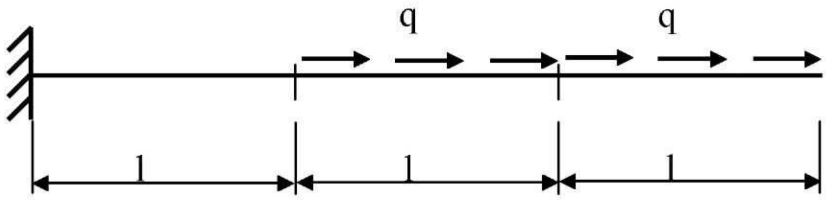


8.

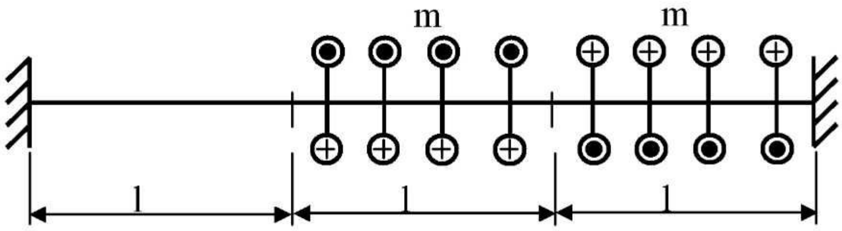


ВАРИАНТ № 25

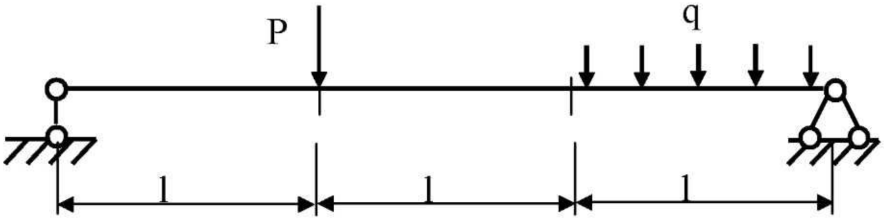
1.



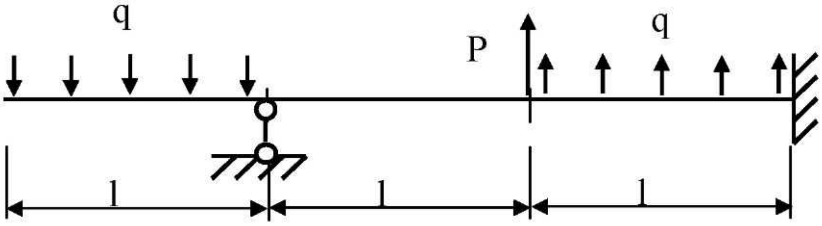
2.



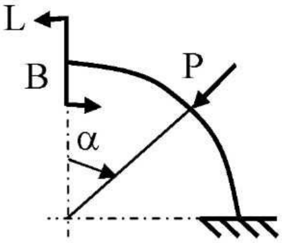
3.



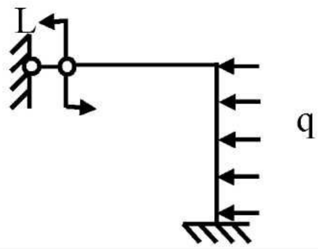
4.



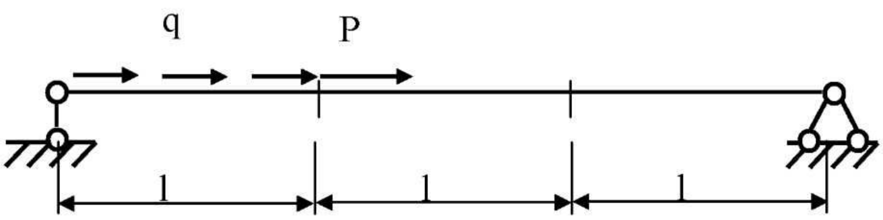
5.



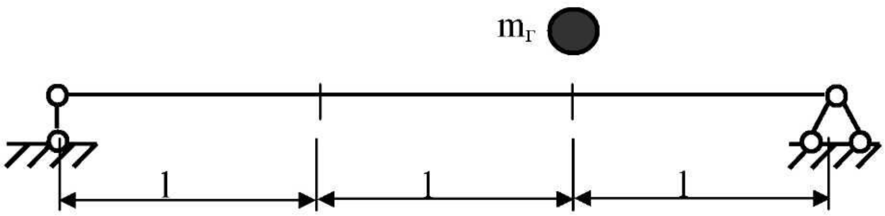
6.



7.

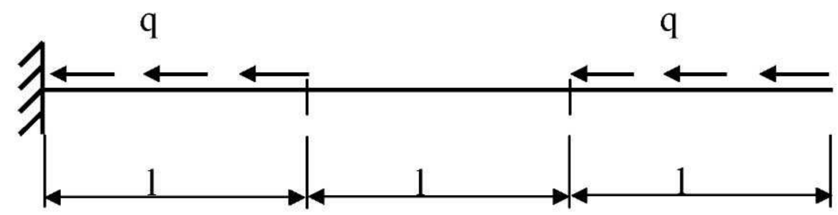


8.

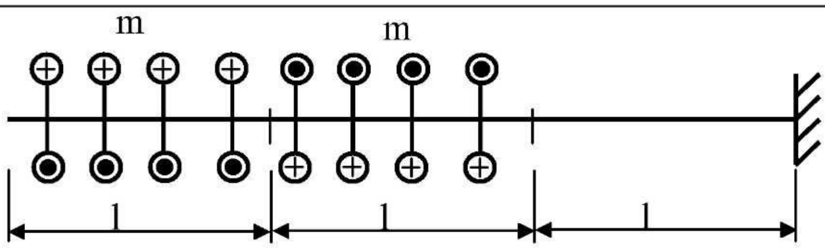


ВАРИАНТ № 26

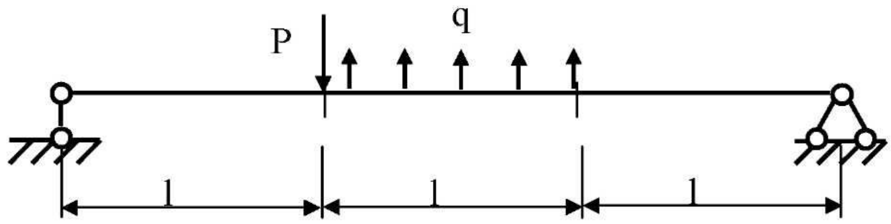
1.



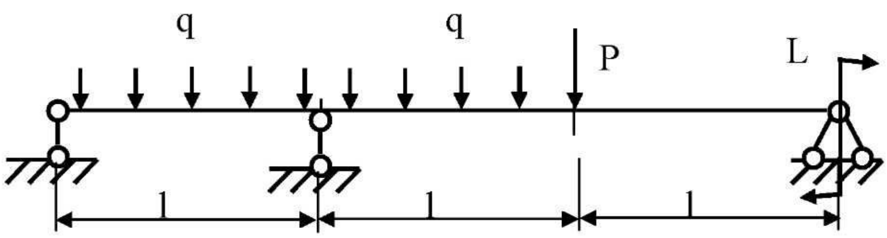
2.



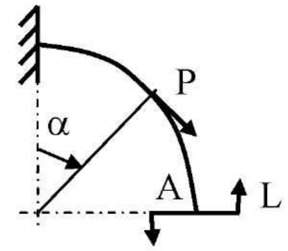
3.



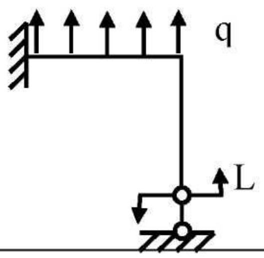
4.



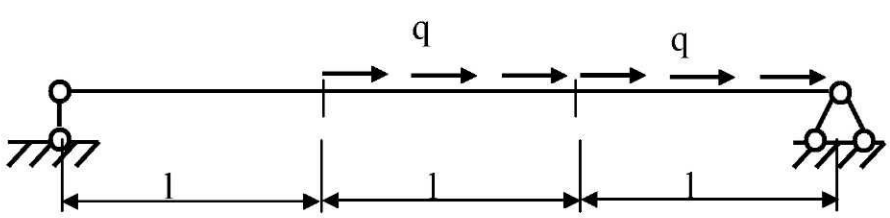
5.



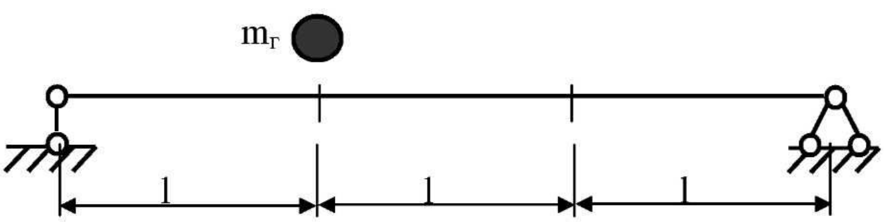
6.



7.

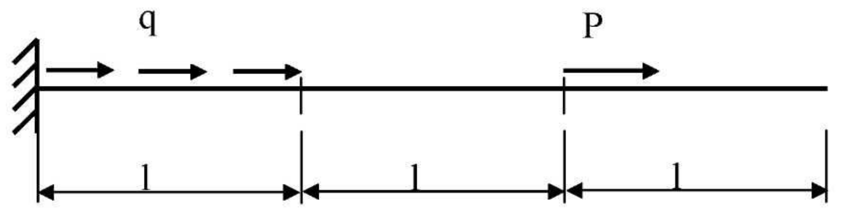


8.

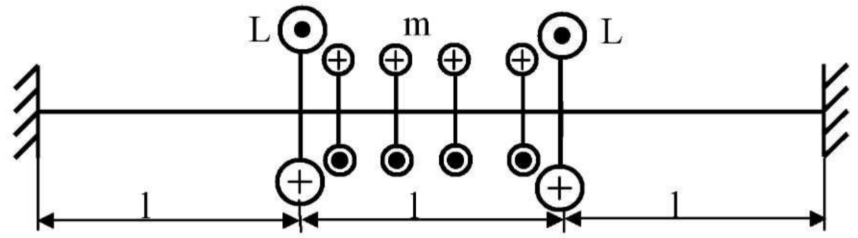


ВАРИАНТ № 27

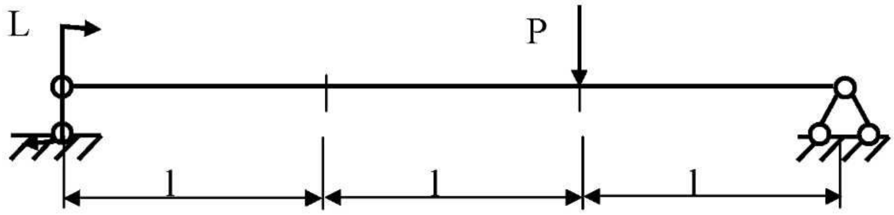
1.



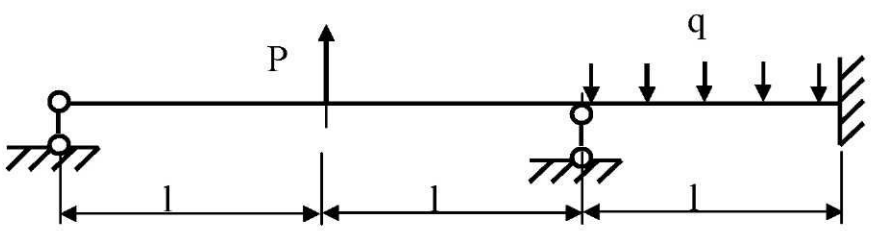
2.



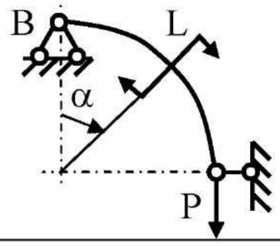
3.



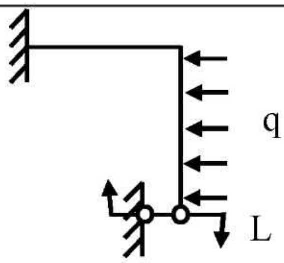
4.



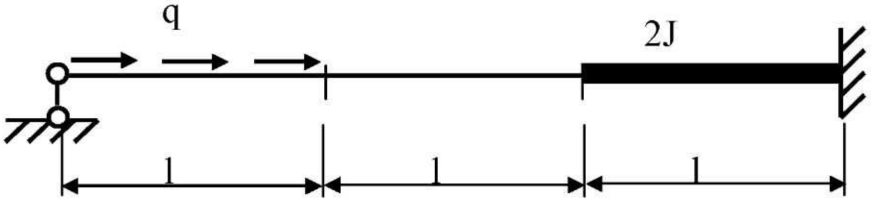
5.



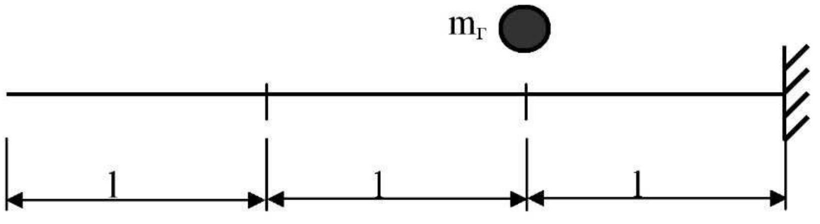
6.



7.

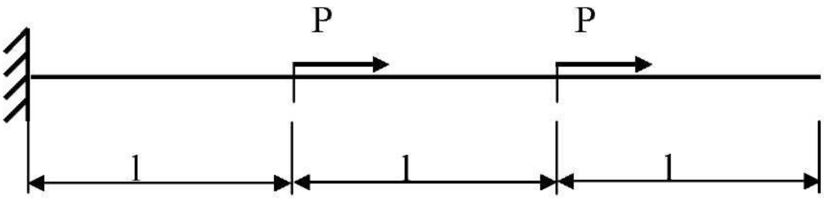


8.

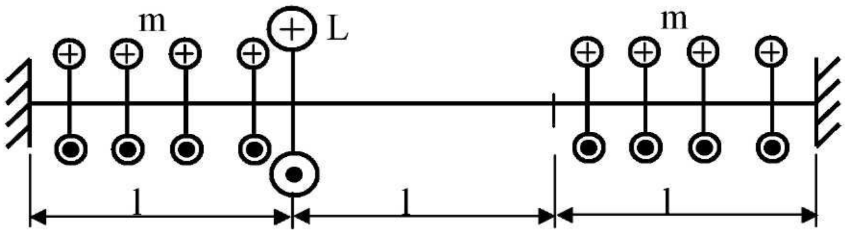


ВАРИАНТ № 28

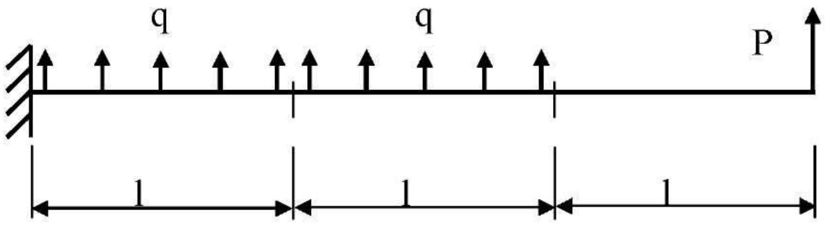
1.



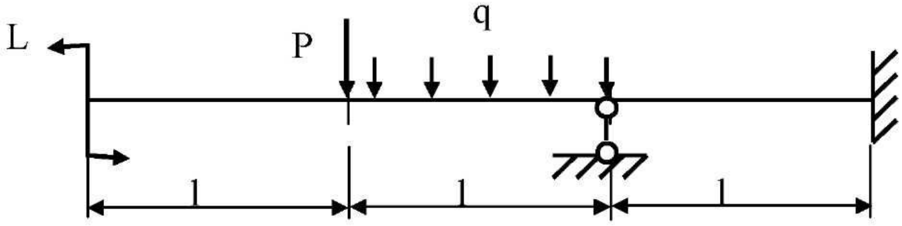
2.



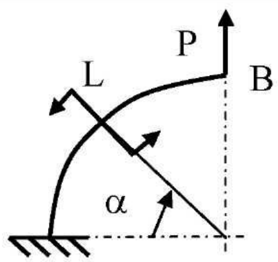
3.



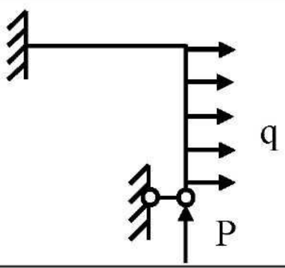
4.



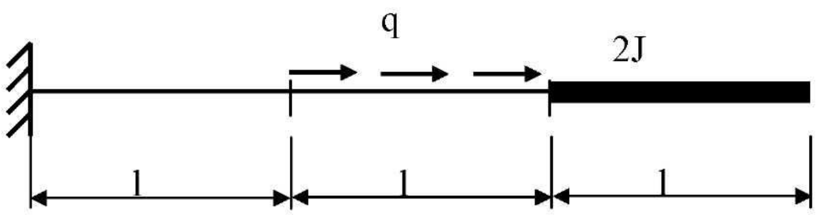
5.



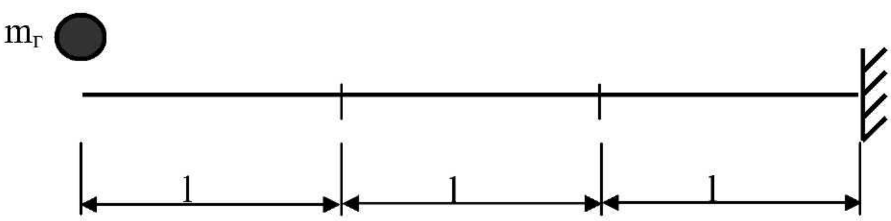
6.



7.

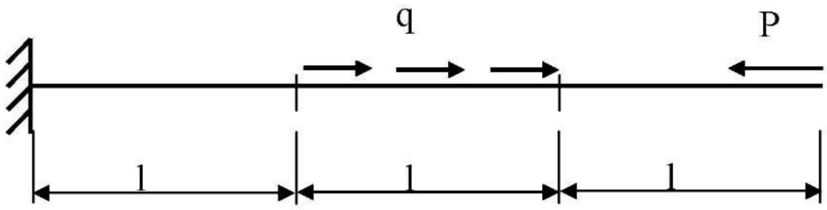


8.

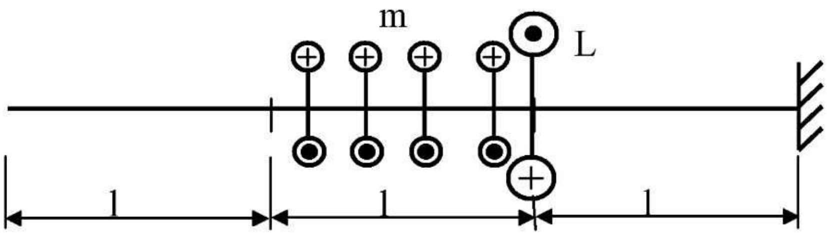


ВАРИАНТ № 29

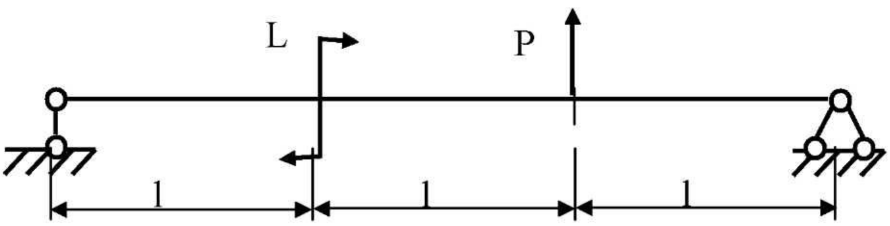
1.



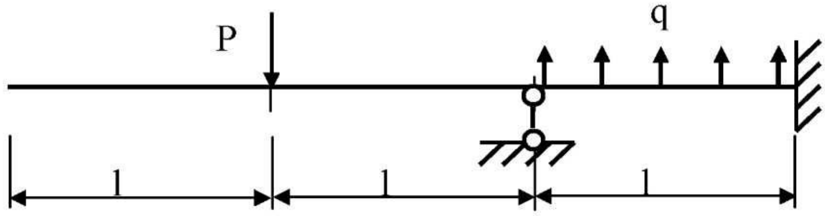
2.



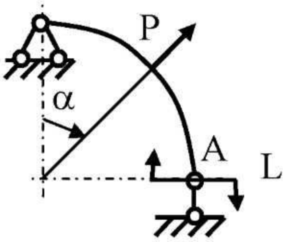
3.



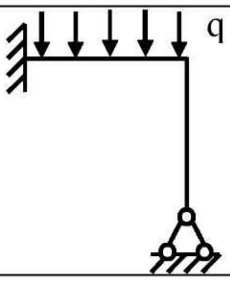
4.



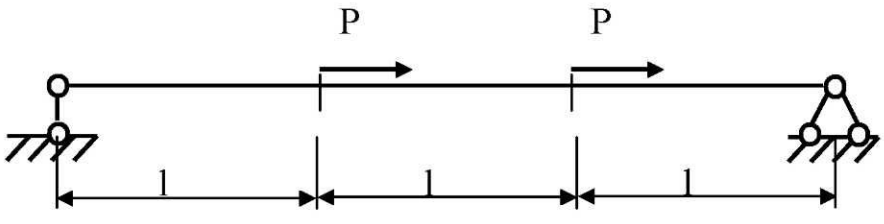
5.



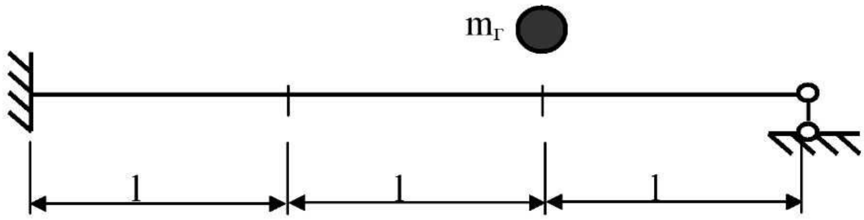
6.



7.

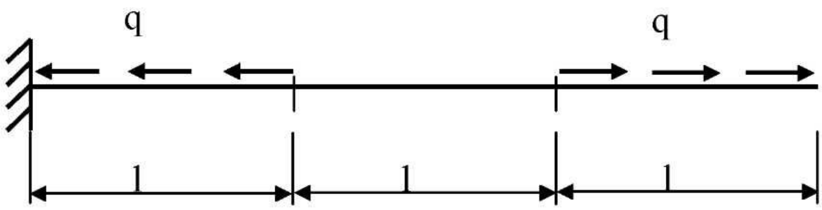


8.

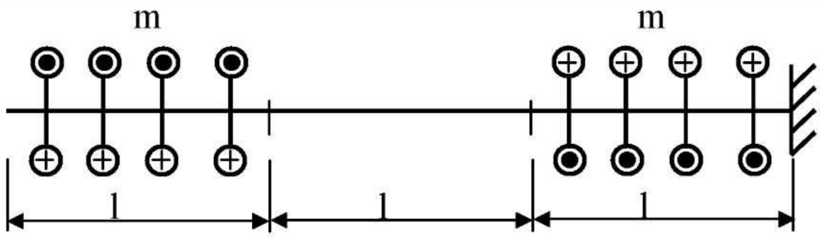


ВАРИАНТ № 30

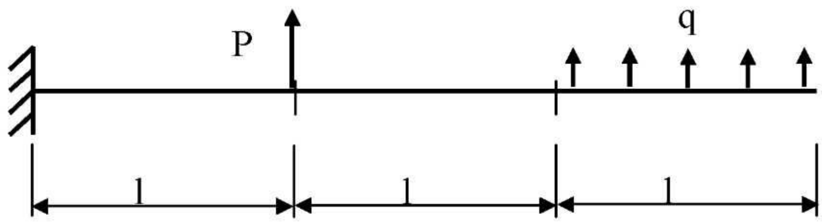
1.



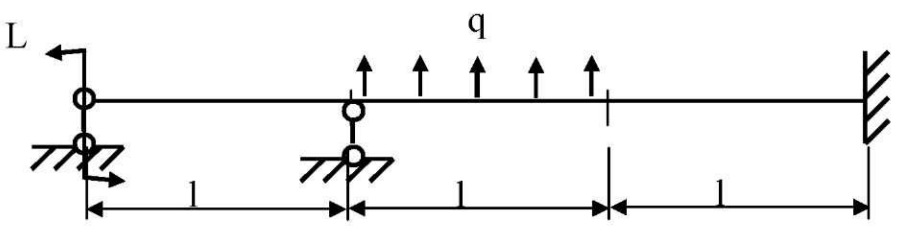
2.



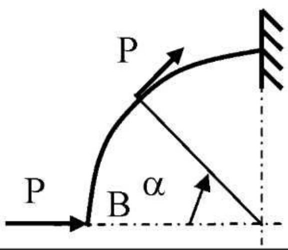
3.



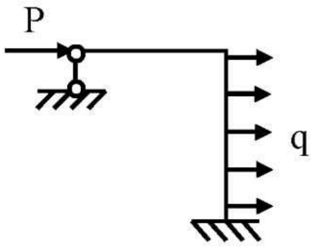
4.



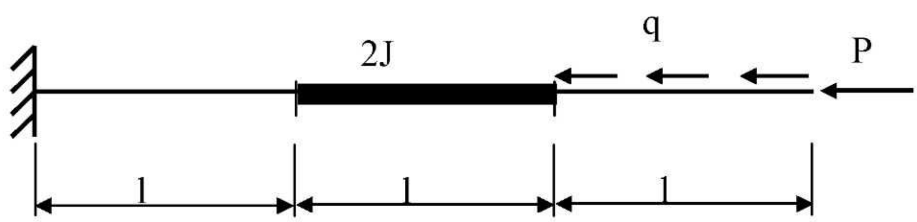
5.



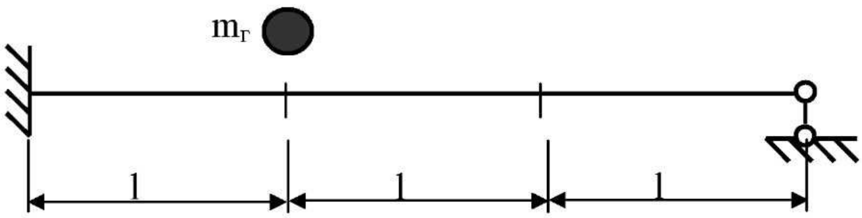
6.



7.

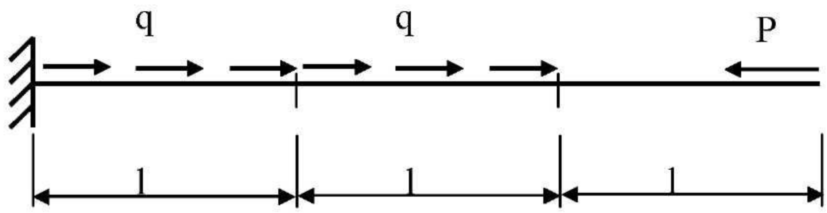


8.

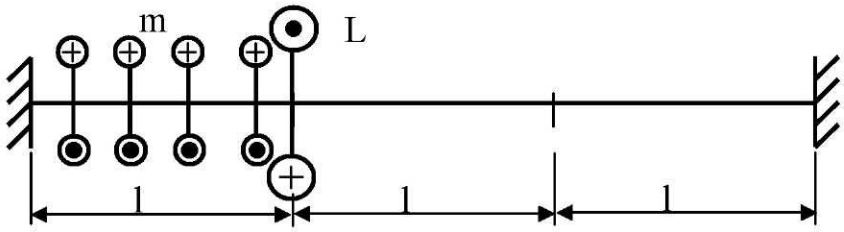


ВАРИАНТ № 31

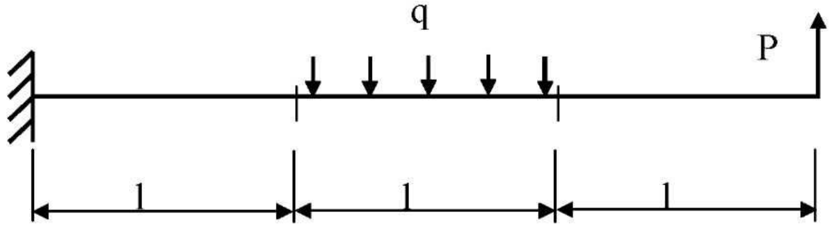
1.



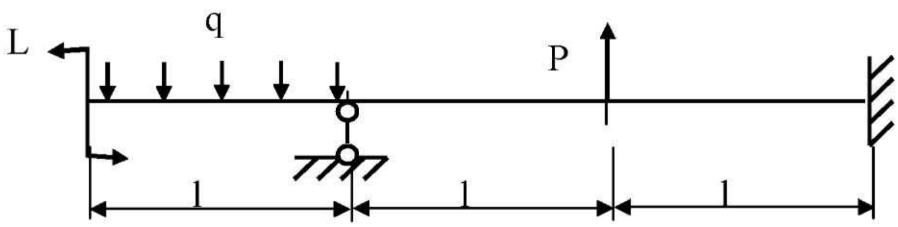
2.



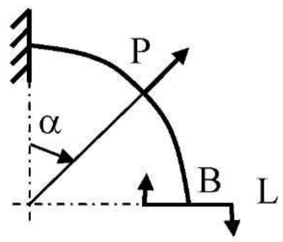
3.



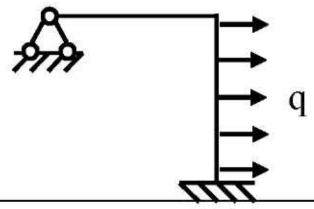
4.



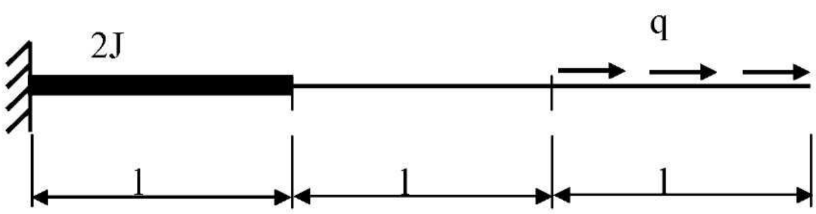
5.



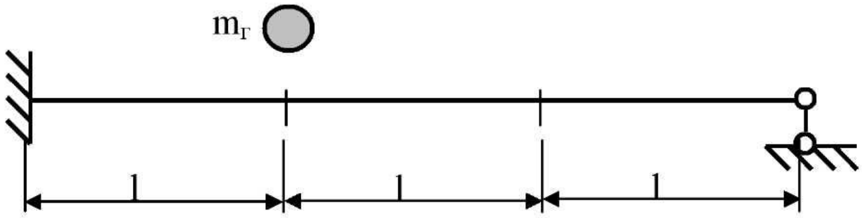
6.



7.

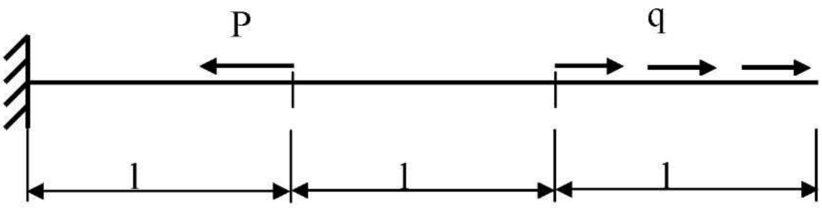


8.

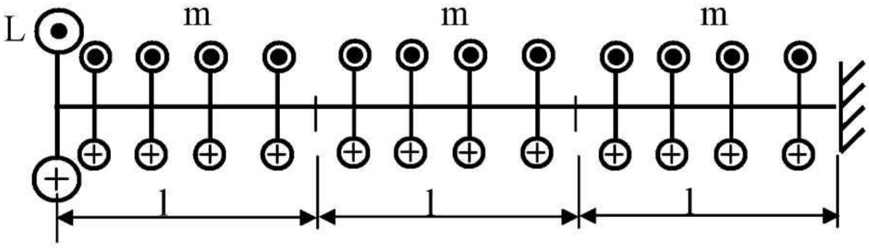


ВАРИАНТ № 32

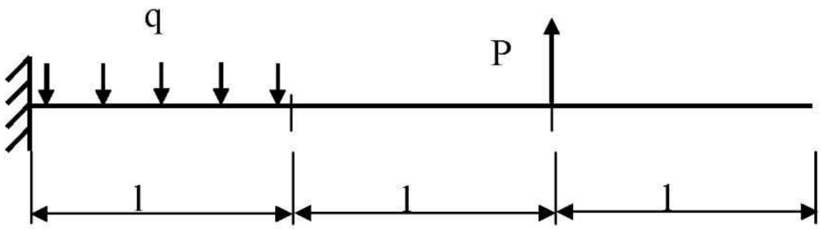
1.



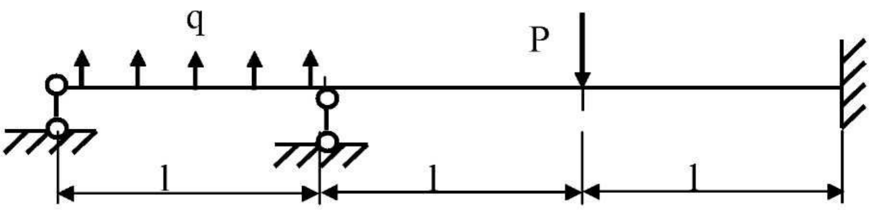
2.



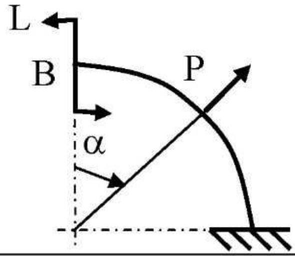
3.



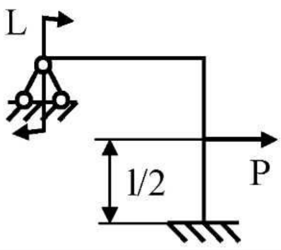
4.



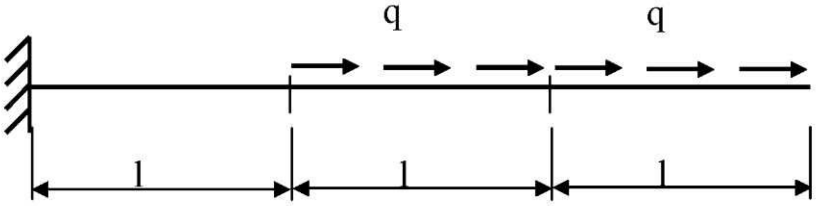
5.



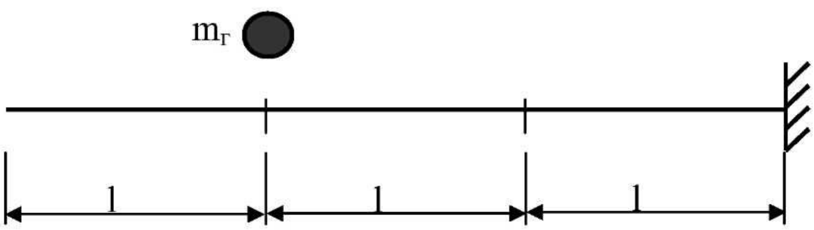
6.



7.

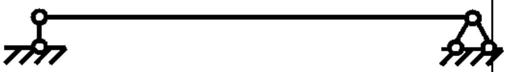
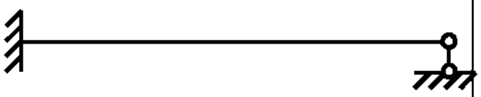
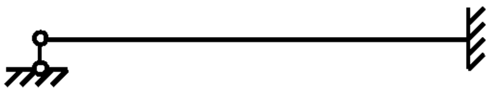
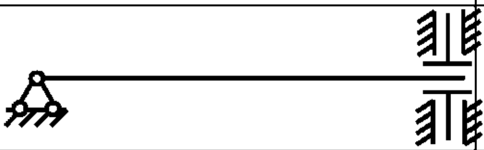
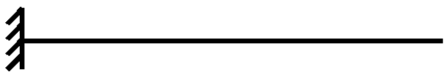
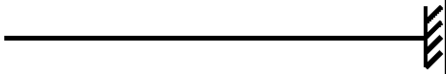
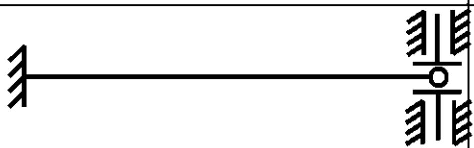
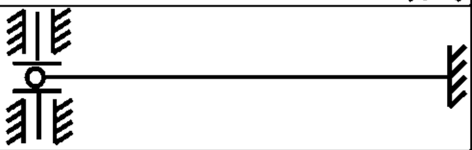
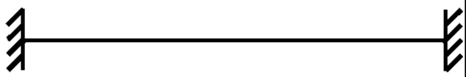
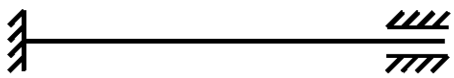


8.



Приложение 2

Таблица рекомендуемых функций для расчетов на устойчивость

№ п/п	Схема закрепления концов стержня (длина стержня равна l)	Граничные условия	Рекомендуемые функции
1		$V(0)=0,\ V''(0)=0$ $V(l)=0,\ V''(l)=0$	$V(z)=a\cdot\sin(\pi z/l)$ $V(z)=a(z^4-2z^3l+zl^3)$
2		$V(0)=0,\ V'(0)=0$ $V(l)=0,\ V''(l)=0$	$V(z)=a(2z^4-5z^3l+3z^2l^2)$
3		$V(0)=0,\ V''(0)=0$ $V(l)=0,\ V'(l)=0$	$V(z)=a(2z^4-3z^3l+zl^3)$
4		$V(0)=0,\ V''(0)=0$ $V'(l)=0,\ V'''(l)=0$	$V(z)=a\cdot\sin(\pi z/2l)$ $V(z)=a(z^4-4z^3l+8zl^3)$
5		$V(0)=0,\ V'(0)=0$ $V''(l)=0,$ $V'''(l)+k^2V'(l)=0$	$V(z)=a(1-\cos(\pi z/2l))$ $V(z)=a(z^4-4z^3l+6z^2l^2)$
6		$V''(0)=0,\ V(l)=0,$ $V'(l)=0$ $V'''(0)+k^2V'(0)=0$	$V(z)=a(1-\sin(\pi z/2l))$ $V(z)=a(z^4-4z^3l+3z^2l^2)$
7		$V(0)=0,\ V'(0)=0$ $V''(l)=0,$ $V'''(l)+k^2V'(l)=0$	$V(z)=a(1-\cos(\pi z/2l))$ $V(z)=a(z^4-4z^3l+6z^2l^2)$
8		$V''(0)=0,\ V(l)=0,$ $V'(l)=0$ $V'''(0)+k^2V'(0)=0$	$V(z)=a(1-\sin(\pi z/2l))$ $V(z)=a(z^4-4z^3l+3l^4)$
9		$V(0)=0,\ V'(0)=0$ $V(l)=0,\ V'(l)=0$	$V(z)=a(1-\cos(2\pi z/l))$ $V(z)=a(z^4-2z^3l+z^2l^2)$
10		$V(0)=0,\ V'(0)=0$ $V'(l)=0,\ V'''(l)=0$	$V(z)=a(1-\cos(\pi z/l))$ $V(z)=a(z^4-4z^3l+4z^2l^2)$
11		$V(0)=0,\ V'(0)=0$ $V(l)=0,\ V'(l)=0$	$V(z)=a(1-\cos(2\pi z/l))$ $V(z)=a(z^4-2z^3l+z^2l^2)$