

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Контрольные задания и методические указания
по выполнению самостоятельных контрольных работ
для студентов всех форм обучения направлений
подготовки и специальностей, изучающих дисциплину

Издание предназначено для студентов, изучающих дисциплину сопротивление материалов и расчеты на прочность. Даны рекомендации по изучению дисциплины, перечень вопросов. На которые должны ответить студенты по каждому изучаемому разделу. Приведены задания к контрольным работам, а также методические указания по их выполнению. Рассмотрены примеры выполнения задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ТЕМАМ ПРОГРАММЫ	3
Тема 1. Основные понятия	3
Тема 2. Растяжение – сжатие	4
Тема 3. Напряженное и деформированное состояние	4
Тема 4. Геометрические характеристики плоских сечений	5
Тема 5. Сдвиг. Напряжения и деформации при сдвиге	5
Тема 6. Кручение. Напряжения и деформации при кручении	6
Тема 7. Изгиб. Расчеты на прочность при изгибе	6
Тема 8. Общие методы определения перемещений в балках при изгибе	7
Тема 9. Статически неопределимые системы при изгибе	8
Тема 10. Сложное сопротивление	8
Тема 11. Устойчивость продольно сжатых стержней	9
Тема 12. Динамическое действие нагрузки	10
Тема 13. Явление усталости материалов	11
КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ	11
ЗАДАЧА № 1. РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ	12
Пример решения задачи № 1	14
ЗАДАЧА № 2. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ	17
ЗАДАЧА № 3. РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ	20
Пример решения задачи № 3	22
ЗАДАЧА № 4. РАСЧЕТ ЗАКЛЕПОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ	24
Пример решения задачи № 4	26
ЗАДАЧА № 5. КРУЧЕНИЕ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ	27
Пример решения задачи № 5	28
ЗАДАЧА № 6. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК	30
Пример решения задачи № 6	33
ЗАДАЧА № 7. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ДЛЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ36 ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ	39
Пример решения задачи № 7	42
ЗАДАЧА № 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ	45
Пример решения задачи № 8	47
ЗАДАЧА № 9. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ	49
Пример решения задачи № 9	52
ЗАДАЧА № 10. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ	54
Пример решения задачи № 10	56
ЗАДАЧА № 11. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ	57
Методические указания к задаче № 11	57
ЗАДАЧА № 12. РАСЧЕТ БАЛКИ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ	59
Пример решения задачи № 12	60
ЗАДАЧА № 13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ	61
Пример решения задачи № 13	62
ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ И ЭКЗАМЕНУ	63
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	65

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ТЕМАМ ПРОГРАММЫ

Сопротивление материалов – одна из основных инженерных дисциплин, изучаемых в высших технических учебных заведениях. Занятия по курсу должны сопровождаться составлением конспекта лекций, решением задач и выполнением лабораторных работ. Изучая курс "Сопротивление материалов", студенты заочной формы обучения должны:

- 1) самостоятельно изучить теоретический материал по основным темам программы курса по учебникам, рекомендуемым в данных методических указаниях;
- 2) ответить на вопросы для самопроверки;
- 3) выполнить контрольные работы;
- 4) выполнить лабораторные работы;
- 5) получить зачет и сдать экзамен.

Тема 1. Основные понятия

В этой теме даны основные понятия, которые необходимо хорошо усвоить. Особое внимание обратите на понятие деформаций и напряжений. Необходимо усвоить понятие расчетной схемы, знать основные гипотезы сопротивления материалов, классификацию внешних сил, а также классификацию внутренних силовых факторов.

Для определения величины внутренних силовых факторов и напряжений пользуются методом сечений. Необходимо изучить простые случаи воздействия сил на стержень. Изучить механические характеристики материалов, диаграмму растяжения пластичных и хрупких материалов. Знать, что, пользуясь формулами, основанными на законе Гука, надо учитывать, что этот закон справедлив только до предела пропорциональности. Следует обратить внимание на такие важные понятия как предел прочности, допускаемое напряжение, коэффициент запаса прочности.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит задача расчета на прочность, жесткость и устойчивость?
2. Что называется брусом, оболочкой, массивным телом?
3. Что называется осью бруса?
4. Что называется расчетной схемой, чем она отличается от реального объекта?
5. По каким признакам и как классифицируют нагрузки, какую размерность имеют нагрузки?
6. Что такое диаграмма растяжения, как она строится?
7. Что называют механическими характеристиками материалов?
8. Какие материалы называются пластичными, а какие – хрупкими, в чем различия характера разрушения этих материалов?
9. Какие деформации называют упругими, остаточными (пластичными)?
10. Какие деформации называются абсолютными, относительными?
11. Сколько внутренних силовых факторов может возникнуть в теле под действием внешних сил?
12. В чем заключается сущность метода сечений?
13. Что называется напряжением в точке в данном сечении?
14. Какое напряжение называется нормальным, а какое – касательным?
15. Перечислить основные гипотезы сопротивления материалов.

Тема 2. Растяжение – сжатие

Изучить при каких внешних силах возникает напряженно деформированное состояние – центральное растяжение – сжатие. Уметь строить эпюры продольных сил, деформаций и напряжений. Знать условие прочности, уметь подбирать размеры поперечных сечений.

Для решения статически неопределимых систем необходимо вводить дополнительное уравнение совместности перемещений.

После изучения этой темы можно решать задачу № 1 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. Какие случаи деформации бруса называются центральным растяжением (сжатием)? 2. Как вычисляется значение продольной силы в произвольном поперечном сечении бруса? 3. Что представляет собой эпюра продольных сил и как она строится? 4. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса, как они рассчитываются? 5. Как строится эпюра нормальных напряжений по длине бруса? 6. Что называется модулем упругости E ? Как влияет величина E на деформации бруса? 7. Как формулируется закон Гука? 8. Что происходит с поперечными размерами бруса при его растяжении или сжатии? 9. Как определяется величина абсолютной деформации стержня? 10. Что называется степенью статической неопределимости? 11. Что представляют собой дополнительные уравнения для раскрытия статической неопределимости? Как записать условие прочности конструкции при растяжении – сжатии? Что такое допускаемое напряжение? Какие факторы обязательно учитываются при выборе коэффициента запаса?

Тема 3. Напряженное и деформированное состояние

Совокупность напряжений в точке на всевозможных проходящих через нее сечениях называется напряженным состоянием в этой точке. Необходимо изучить виды напряженного состояния. Знать правило знаков для нормальных и касательных напряжений. Изучить методы определения главных напряжений и главных площадок. Знать обобщенный закон Гука, уметь применять его для расчета напряженного состояния тела. Знать основные гипотезы прочности. После изучения этой темы можно решать задачу № 2 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. Какое напряженное состояние называется пространственным, плоским и линейным? 2. Каково правило знаков для нормальных и касательных напряжений? 3. Докажите закон парности касательных напряжений. 4. Чему равна сумма нормальных напряжений по любым двум взаимно перпендикулярным площадкам?

5. Что представляют собой главные напряжения и главные площадки? Как расположены главные площадки друг относительно друга? 6. Чему равны касательные напряжения на главных площадках? 7. Как определить главную площадку, по которой действует главное напряжение σ_{max} в общем случае плоского напряженного состояния? 8. Чему равны экстремальные значения касательных напряжений в случае плоского напряженного состояния? 9. Что представляют собой площадки сдвига и как они наклонены к главным площадкам? 10. Чему равна сумма нормальных напряжений на любых трех взаимно перпендикулярных площадках? 11. На основе какого из допущений, принятых в курсе сопротивления материалов, составлены выражения обобщенного закона Гука? Какие напряжения называются эквивалентными? Какие критерии равноопасности положены в основу основных теорий прочности? В каких случаях находят применение эти теории?

Тема 4. Геометрические характеристики плоских сечений

Прочность, жесткость и устойчивость инженерных конструкций определяется формой и размерами сечений ее элементов. При изучении этой темы необходимо изучить геометрические характеристики сечений: статический момент площади, моменты инерции сечения, главные моменты инерции, моменты сопротивления и т.д. Необходимо научиться определять направление главных осей инерции, выбирать рациональную форму поперечных сечений. Знать, как меняются моменты инерции при параллельном переносе и повороте осей. После изучения этой темы можно решать задачу № 3 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется статическим моментом сечения относительно оси? 2. Что называется осевым, полярным и центробежными моментами инерции сечения? 3. В каких единицах выражается статический момент сечения? 4. Как определяются координаты центра тяжести простого и сложного сечения? 5. В каких единицах выражаются моменты инерции сечения? 6. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей? 7. Изменится ли сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте этих осей? 8. Что представляют собой главные центральные моменты инерции? 9. Какие оси называются главными осями инерции? 10. Чему равен центробежный момент инерции относительно главных осей?

Тема 5. Сдвиг. Напряжения и деформации при сдвиге

Необходимо изучить чистый сдвиг, закон Гука при сдвиге, условия прочности при сдвиге. Знать зависимость между модулями сдвига 1-го и 2-го рода и коэффициентом Пуассона. Научиться производить расчеты на срез и смятие болтовых, заклепочных соединений, уметь рассчитывать сварные соединения. После изучения темы можно решать задачу № 4 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. Какой случай плоского напряженного состояния называется чистым сдвигом? 2. Что представляют собой площадки чистого сдвига и чем они отличаются от площадок сдвига? 3. Как деформируется под действием касательных напряжений элементарный параллелепипед, боковые грани которого совпадают с площадками чистого сдвига? 4. Что называется абсолютным сдвигом, относительным сдвигом и углом сдвига? 5. Сформулировать закон Гука при сдвиге. 6. Как рассчитывают стыковые, торцовые и фланговые швы? Как связаны между собой упругие константы E , G и μ изотропного материала?

Тема 6. Кручение. Напряжения и деформации при кручении

Необходимо изучить деформации бруса при кручении, научиться определять величину крутящих моментов, строить эпюры крутящих моментов, напряжений и углов закручивания. Изучить статически определимые и статически неопределимые задачи при кручении. Уметь подбирать диаметры вала сплошного и круглого сечения по условиям прочности и жесткости. Изучить кручение и условие прочности бруса прямоугольного сечения. После изучения этой темы можно решать задачу № 5 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. При каком нагружении прямой брус испытывает деформацию кручения? 2. Как вычисляется скручивающий момент, передаваемый шкивом заданной мощности и числу оборотов в минуту? 3. Что собой представляют эпюры крутящих моментов и как они строятся? 4. Что называется полным и относительным углом закручивания бруса? 5. Перечислите предпосылки теории кручения прямого бруса круглого поперечного сечения? 6. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого бруса при кручении и как они направлены? 7. Что называется жесткостью сечения при кручении? 8. Что называется полярным моментом сопротивления, в каких единицах он выражается и чему равен? 9. Как производится расчет скручиваемого бруса на прочность? 10. Как производится расчет скручиваемого бруса на жесткость? 11. Как производят расчет пружин? 12. Как происходит разрушение образцов из хрупких, пластичных, анизотропных материалов при кручении? Объяснить механизм образования трещин.

Тема 7. Изгиб. Расчеты на прочность при изгибе

При изучении этой темы необходимо научиться строить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в консольных и двухопорных статически определимых балках. Необходимо научиться определять опасное сечение в балке и уметь подбирать по условиям прочности по нормальным и касательным напряжениям размеры поперечных сечений балок.

Студенты строительных специальностей и направлений подготовки должны научиться строить эпюры внутренних силовых факторов в простейших стержневых системах – рамах. После изучения этой темы можно решать задачи № 6 и 7 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется прямым изгибом? 2. Что называется чистым и поперечным изгибом? 3. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях балки при изгибе? 4. Какие внутренние силовые факторы возникают в рамах при изгибе? 5. Какие правила знаков приняты для каждого из внутренних усилий? 6. Как вычисляются изгибающий момент и поперечная сила в сечении балки? 7. Какая дифференциальная зависимость существует между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки? 8. Что называется нейтральной линией и где она расположена? 9. Что называется моментом сопротивления сечения при изгибе? 10. Привести формулы Навье и Журавского для расчета нормальных и касательных напряжений. 11. Как распределяются касательные и нормальные напряжения в сечении балки при изгибе? 12. В каких напряженных состояниях находятся слои сечения балки при изгибе? 13. В чем заключается полная проверка прочности балки при изгибе?

Тема 8. Общие методы определения перемещений в балках при изгибе

В инженерной практике кроме расчета балок на прочность проводят их расчеты на деформативность (прогибы и углы поворота сечений). Необходимо изучить общие методы определения прогибов и углов поворота при изгибе. Знать дифференциальное уравнение упругой линии балки. Научиться определять прогибы по методу начальных параметров, с использованием интеграла Мора и графоаналитическим способом. После изучения этой темы можно решать задачу № 8 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. Какой вид деформации называется изгибом? 2. Какими параметрами характеризуется упругая линия балки? 3. С какой целью определяются перемещения в балках при изгибе? 4. В чем заключается смысл метода Мора при определении перемещений? 5. Какой существует способ решения интеграла Мора? 6. Что такое жесткость балки и как она влияет на величину прогиба? 7. В чем заключается принцип суперпозиции? 8. Как на основании приближенного дифференциального уравнения упругой линии балки можно определить прогиб и угол поворота сечения? 9. Как находят постоянные интегрирования? 10. Как определяют наибольшее значение прогиба?

Тема 9. Статически неопределимые системы при изгибе

При изучении этой темы необходимо научиться раскрывать статическую неопределимость балок. Подбирать размеры поперечных сечений в статически неопределимых балках. Изучить метод сил, метод сравнения перемещений, уметь составлять канонические уравнения метода сил и решать их. После изучения этой темы можно решать задачи № 9 и 10 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется степень статической неопределимости? 2. Какая система называется основной, единичной и эквивалентной? 3. В каком случае вместо «лишней» связи вводится неизвестная сила, а в каком – неизвестный момент? 4. В чем заключается сущность метода сравнения перемещений? 5. В чем сущность метода сил? Объяснить последовательность метода при раскрытии статической неопределимости. 6. Чему равняется число канонических уравнений в методе сил? 7. Какой смысл имеют коэффициенты при неизвестных в канонических уравнениях? 8. Какие балки называются неразрезными? 9. Какие балки называются фиктивными? 10. Как по виду эпюры изгибающих моментов можно построить примерный вид изогнутой оси балки? Как следует выбирать основную систему для рам? Почему для проверки решения, как правило, выбирается новая эквивалентная система? В чем смысл такой проверки?

Тема 10. Сложное сопротивление

Необходимо изучить методы расчета балки, нагруженной внешними силами, действие которых не совпадает с главными осями инерции сечения. Знать, как определяется положение нейтральной линии, направление прогиба. Уметь рассчитывать прогибы и напряжения с использованием принципа независимости действия сил. Уметь определять положение опасных точек. Необходимо знать, в каком случае при инженерных расчетах нельзя допускать явления косоугольного изгиба.

Внецентренное приложение внешней нагрузки приводит к тому, что в поперечных сечениях стержня возникают напряжения разных знаков. При изучении этой темы необходимо научиться определять положение нейтральной линии, положение опасных точек и производить расчеты по условиям прочности. Знать, как строится ядро сечения. После изучения этой темы можно решать задачу № 11 контрольной работы.

Изгиб с кручением имеет место в работающих валах, колесах и т.д. При изучении темы необходимо научиться определять опасное сечение бруса. Уметь определять величину эквивалентного момента. В сечении бруса возникают как нормальные, так и касательные напряжения, поэтому при расчете размеров поперечных сечений необходимо использовать 3-ю или 4-ю теории прочности. После изучения темы можно решать задачу № 12 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит явление косоугольного изгиба? При каких условиях возникает косоугольный изгиб? 2. Для чего необходимо знать явление косоугольного изгиба, привести примеры из практики. 3. Дать определение нейтральной линии. 4. Какие оси поперечного сечения называются главными осями? 5. Как вычисляются составляющие прогиба по главным осям? 6. Как вычислить полный прогиб и определить его направление? 7. Как найти направление нейтральной линии при косоугольном изгибе? 8. Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косоугольный изгиб? 9. Какие точки сечения являются опасными? 10. В каком случае угол нейтральной линии и угол плоскости изгиба имеют одинаковую величину? 11. Как определяются напряжения в сечениях балки при косоугольном изгибе? 12. В каком случае возникает внецентренное растяжение – сжатие? Укажите конструктивные или технологические причины этого явления. 13. Какие внутренние силовые факторы присутствуют в поперечном сечении стержня при внецентренном приложении нагрузки? 14. Чему равно напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном сжатии? 15. Что представляют собой опасные точки при внецентренном сжатии и как их определяют? 16. Записать условия прочности для области растяжения и области сжатия хрупкого материала. 17. В чем заключается принцип независимости действия сил? 18. Что называется ядром сечения, почему необходимо знать его границы? 19. Как пройдет нейтральная линия, если продольная сила приложена в вершине ядра сечения? 20. Какое напряженное состояние возникает при изгибе с кручением? Изобразите напряжения по граням прямоугольного элемента с учетом направления нагрузок. 21. Что такое «опасные точки» в сечениях образца? 22. Как распределяются напряжения (нормальные и касательные) по высоте сечения? Изобразить графически. 23. Как определяется коэффициент Пуассона? 24. В чем заключается принцип независимости действия сил? 25. Что представляют собой главные площадки и главные напряжения, с какой целью они определяются? 26. Как связаны между собой главные напряжения и главные относительные удлинения в случае плоского напряженного состояния? 27. Какие правила знаков приняты для нормальных и касательных напряжений и для измерения угла, определяющего направления главных напряжений?

Тема 11. Устойчивость продольно сжатых стержней

Опасность явления потери устойчивости заключается в том, что разрушение стержня может произойти при напряжениях, значительно меньше допустимых. При изучении темы необходимо научиться определять величину критической силы.

Знать, в каком случае применима формула Эйлера, а в каком – формула Ясинского. Уметь рассчитывать допускаемое напряжение с использованием коэффициентов понижения. Изучить, при каких нагрузках возникает продольно-поперечный изгиб. Как определяются деформации и напряжения в стержне при продольно-поперечном изгибе. После изучения темы можно решать задачу № 13 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение критической силы? 2. В чем заключается явление потери устойчивости? 3. По каким формулам определяется величина критической силы? 4. В каких пределах применима формула Эйлера? 5. Почему в формуле Эйлера используется минимальный момент инерции сечения? 6. Что называется гибкостью стержня? 7. Что называется предельной гибкостью, от чего она зависит? 8. От чего зависит коэффициент приведения длины? 9. Как определяется критическое напряжение для стержней малой и средней гибкости? 10. Какой вид имеет график критических напряжений? 11. Как подбирают сечение стержня при расчете на устойчивость? Как выбирается допускаемое напряжение для сжатых элементов при расчете строительных конструкций? От чего зависит значение коэффициента снижения допускаемых напряжений? Как найти изгибающий момент и прогиб при продольно-поперечном изгибе?

Тема 12. Динамическое действие нагрузки

В этой теме необходимо рассмотреть два вопроса: 1) напряжения в движущихся телах; 2) напряжения при ударе. В первом случае динамическое действие сводится к дополнительной статической нагрузке соответствующими силами инерции. Во втором случае напряжения при ударе вычисляют, приравнявая кинетическую энергию ударяющего тела к потенциальной энергии деформации тела, принимающего удар. Необходимо научиться определять значение динамического коэффициента. После изучения этой темы можно решать задачу № 14 контрольной работы.

Вопросы для самопроверки

1. Как вычисляются напряжения в телах при равноускоренном движении? 2. Что называется динамическим коэффициентом? 3. Как находят напряжения в ободе вращающегося колеса, в спарниках и шатунах, во вращающемся диске постоянной толщины? 4. Как выводят формулу для определения напряжений при ударе? 5. Чему равен динамический коэффициент при ударе? 6. Как изменится напряжение при продольном ударе в случае увеличения площади поперечного сечения в два раза? 7. Зависит ли напряжение при ударе от материала балки? 8. Каким образом можно уменьшить напряжения в стержне при продольном ударе? 9. Как учитывается масса упругой системы, испытывающей удар?

Тема 13. Явление усталости материалов

В деталях машин часто возникают переменные напряжения. Необходимо изучить вопросы, связанные с расчетами на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени. Необходимо уяснить понятие предела выносливости, уметь строить диаграммы для несимметричного цикла, знать, от каких факторов зависит коэффициент концентрации напряжений. Практические меры по борьбе с изломами: 1) повышение прочности при достаточной пластичности; 2) создание однородной мелкозернистой структуры; 3) проектирование внешних очертаний деталей без резких переходов; 4) тщательная обработка поверхности.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется пределом выносливости? 2. Какие виды циклов нагружений существуют? 3. Перечислить характеристика цикла нагружения. 4. Какая существует зависимость между пределом выносливости и пределом прочности? 5. Как определяют предел выносливости при несимметричном цикле? 6. Какие напряжения называются местными? 7. Как влияет характер обработки материала на действительный коэффициент концентрации напряжений? 8. Каким образом влияют размеры детали на предел выносливости? 9. Какие практические меры применяют по борьбе с изломами усталости? 10. Как устанавливают допускаемые напряжения при переменных напряжениях?

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Данные для выполнения контрольных работ студент выбирает в соответствии с личным номером, которым являются три последние цифры зачетной книжки. Личный номер необходимо представить в виде сотен, десятков и единиц, из таблиц заданий выписать данные, соответствующие полученным числам сотен, десятков и единиц. Например (см. табл. 1), личный номер студента 320 представляем в виде $320 = \text{№ } 300 + \text{№ } 20 + \text{№ } 0$, последняя цифра 0 соответствует номеру расчетной схемы, под № 20 берем числовые значения $P_1 = 1300 \text{ кН}$ и $P_2 = 800 \text{ кН}$, под № 300 берем $a = 1,2 \text{ м}$, $b = 1,4 \text{ м}$.

Расчетно-графические работы следует выполнить на листах писчей бумаги четким почерком. Перед решением каждой задачи надо выписать ее условие с числовыми данными, аккуратно нарисовать эскиз в масштабе и указать на нем в числах все величины, необходимые для расчета.

Необходимо указывать размеры всех величин. Арифметические расчеты производятся до 3-х значащих цифр, а окончательные ответы округляются до 2-х значащих цифр.

ЗАДАЧА № 1. РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ

Требуется: вычислить напряжения во всех характерных сечениях стержня и величину изменения длины всего стержня. Задача состоит из двух условий: статически определимого (а) и статически неопределимого (б) ступенчатого стержня, находящегося под действием продольных сил.

Условия задания:

Материал стержня – сталь с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Расчетные схемы стержней представлены на рис. 1, числовые данные указаны в табл. 2. Площадь поперечного сечения большей ступени $F_1 = 50 \text{ см}^2$, меньшей ступени – $F_2 = 40 \text{ см}^2$. Линейные размеры стержней в статически неопределимой задаче такие же, как и для статически определимой схемы. При решении задачи схему стержня следует изобразить вертикально.

Последовательность выполнения задания:

1. Вычертить схему стержня с приложенными силами, соблюдая масштаб размеров по длине стержня. Проставить числовые значения размеров и сил.
2. Изобразить реакции в заделках и вычислить их величину.
3. Установить число участков. Под участком понимают часть стержня, в пределах которой не изменяются ни продольная сила, ни площадь поперечного сечения.
4. Для каждого участка вычислить величину продольной силы (N_z) с учетом знака. Продольная растягивающая сила имеет знак "+", а продольная сжимающая сила знак "-".
5. Вычислить величины нормальных напряжений для каждого участка.
6. Вычислить величину продольной деформации для каждого участка, построить эпюру деформаций по длине стержня.
7. Рассчитать, на какую величину изменится длина всего стержня.

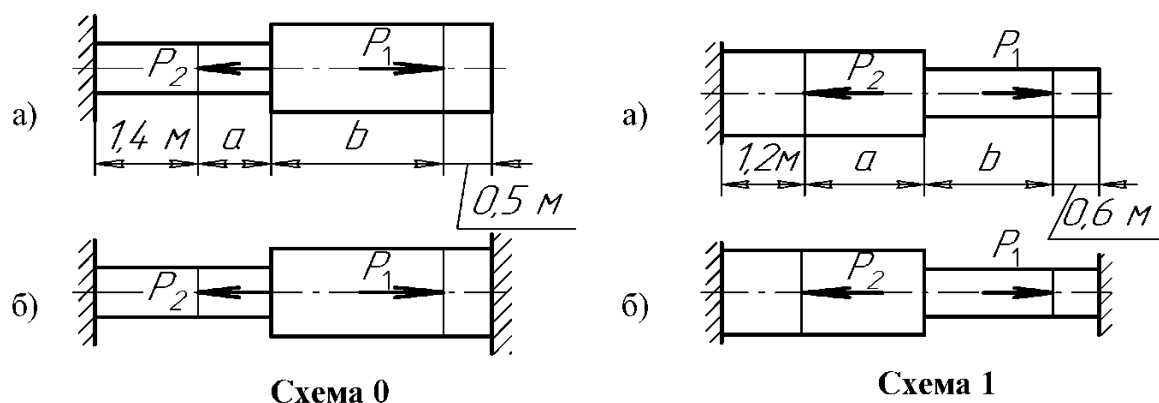


Рис. 1. Расчетные схемы к задаче № 1

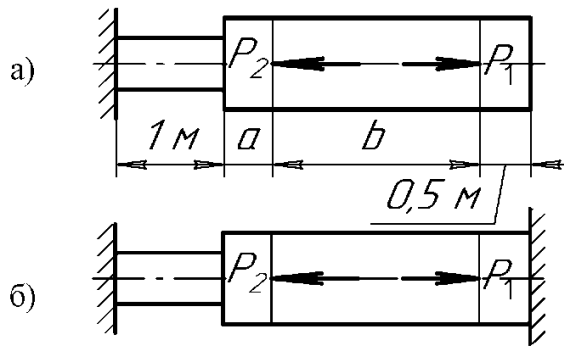


Схема 2

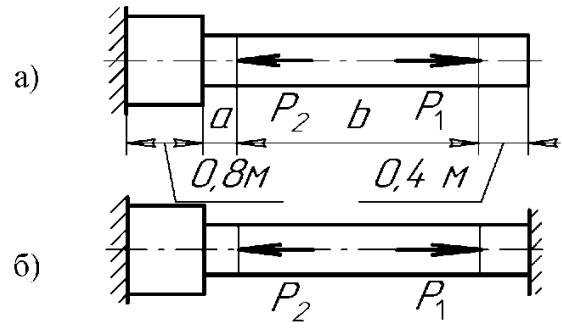


Схема 3

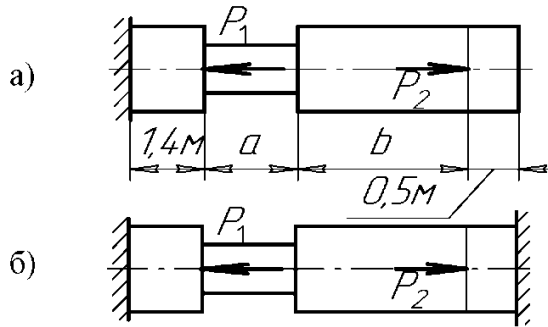


Схема 4

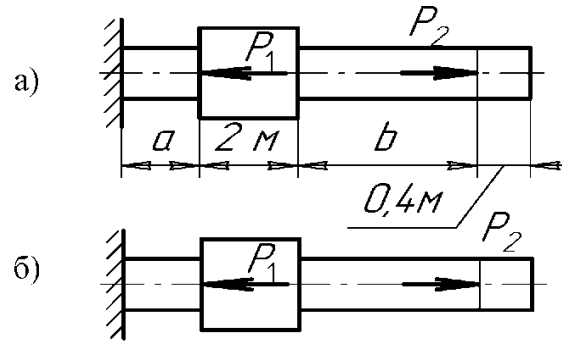


Схема 5

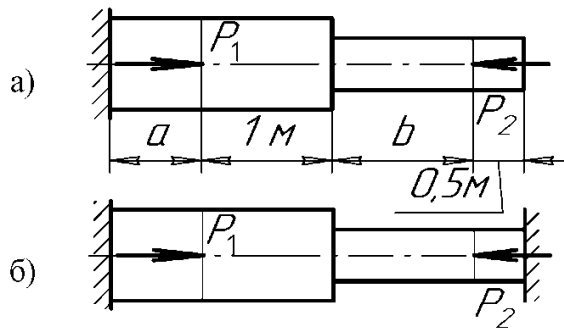


Схема 6

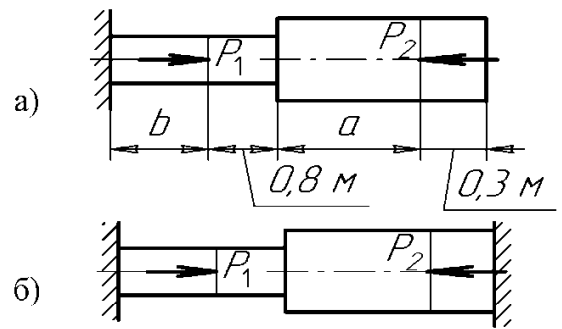


Схема 7

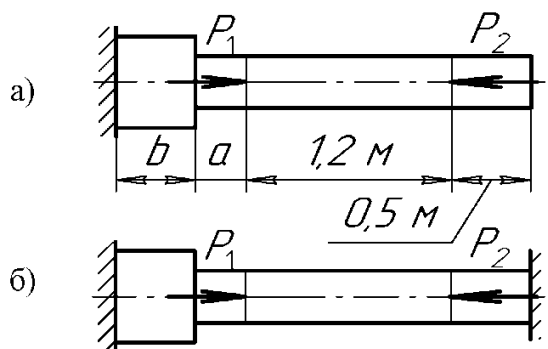


Схема 8

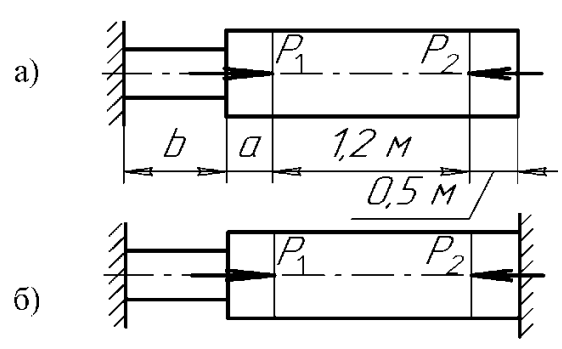


Схема 9

Рис. 1. Расчетные схемы к задаче № 1 (окончание)

Числовые данные к задаче № 1

Последняя цифра	Схема	№	P_1 , кН	P_2 , кН	№	a , м	b , м
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	10	1400	900	100	1,2	0,8
2	2	20	1300	800	200	1,2	1,0
3	3	30	1200	600	300	1,2	1,4
4	4	40	1100	500	400	1,0	1,6
5	5	50	1400	800	00	1,0	1,4
6	6	60	1300	700	600	0,8	1,2
7	7	70	1200	500	700	1,0	1,2
8	8	80	1100	400	800	1,2	1,6
9	9	90	1400	700	900	1,4	1,2
0	0	00	1300	500	000	1,6	1,2

Пример решения задачи № 1

В качестве примера статически определимого стержня рассмотрим стержень, изображенный на рис. 2. Стержень состоит из пяти участков.

Реакцию в жесткой заделке определим из уравнения статики $\sum z = 0$.

$-R_A + P_1 - P_2 = 0$, из уравнения следует, что реакция $R_A = 700$ кН и направлена вниз.

I участок ($0 \leq z_1 \leq 0,6$ м).

На этом участке отсутствуют внешние силы, поэтому продольная сила, нормальные напряжения и деформации равны нулю.

$N_1 = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\Delta l = 0$.

II участок ($0 \leq z_2 \leq 1,6$ м).

$N_2 = P_2 = 700$ кН (растяжение).

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{700 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = 17,5 \cdot 10^7 \text{ Па} = 175 \text{ МПа.}$$

Деформацию второго участка вычислим по формуле [1, 2, 3]

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = \frac{700 \cdot 10^3 \cdot 1,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = 14 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

III участок ($0 \leq z_3 \leq 1,2$ м).

$N_3 = P_2 = 700$ кН (растяжение).

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{700 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-4}} = 140 \text{ МПа.}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3} = \frac{700 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 8,4 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

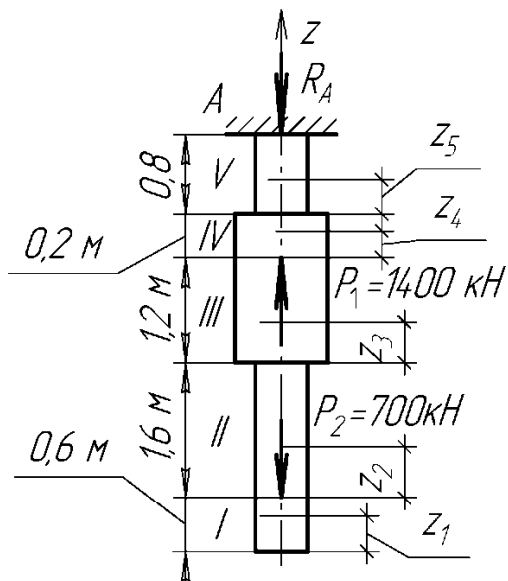


Рис. 2. Расчетная схема статически определимого стержня

IV участок ($0 \leq z_4 \leq 0,2$ м).

$N_4 = P_2 - P_1 = 700 - 1400 = -700$ кН (сжатие).

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{-700 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-4}} = -140 \text{ МПа.}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot F_4} = \frac{-700 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = -1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

V участок ($0 \leq z_5 \leq 0,8$ м).

$N_5 = P_2 - P_1 = 700 - 1400 = -700$ кН (сжатие).

$$\sigma_5 = \frac{N_5}{F_5} = \frac{-700 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = -175 \text{ МПа.}$$

$$\Delta l_5 = \frac{N_5 \cdot l_5}{E \cdot F_5} = \frac{-700 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = -7,0 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Эпюры распределения продольных сил, нормальных напряжений и линейных деформаций показаны на рис. 3.

Длина стержня изменится на величину

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 + \Delta l_5 = (0 + 14 + 8,4 - 1,4 - 7,0) \cdot 10^{-4} = 14 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Схема статически неопределимого стержня показана на рис. 4. Наличие двух заделок на концах стержня создает две реакции R_A и R_B .

Определить реакции из уравнения статики $\sum z = 0$.

$-R_A - P_1 + P_2 + R_B = 0$ не представляется возможным.

Необходимо ввести еще одно дополнительное уравнение, которое составим на основании деформаций стержня.

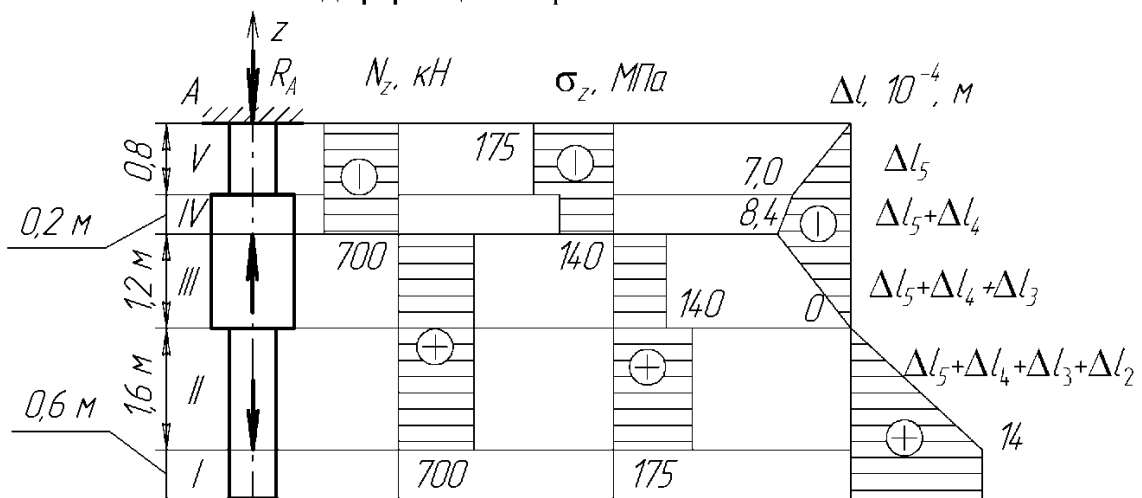


Рис. 3. Эпюры сил, напряжений и деформаций в статически определимом стержне

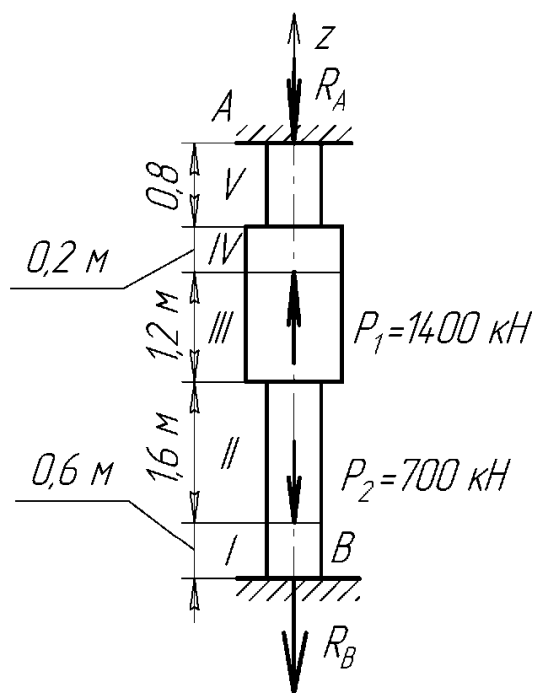


Рис. 4. Расчетная схема статически неопределимого стержня

Определим деформацию каждого участка.

I участок

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{R_B \cdot l_1}{E \cdot F_1}.$$

II участок

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = \frac{(R_B + P_2) \cdot l_2}{E \cdot F_2}.$$

III участок

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot F_3} = \frac{(R_B + P_2) \cdot l_3}{E \cdot F_3}.$$

IV участок

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot F_4} = \frac{(R_B + P_2 - P_1) \cdot l_4}{E \cdot F_4}.$$

V участок

$$\Delta l_5 = \frac{N_5 \cdot l_5}{E \cdot F_5} = \frac{(R_B + P_2 - P_1) \cdot l_5}{E \cdot F_5}.$$

Стержень расположен между двумя жесткими заделками, поэтому его длина не может измениться. Второе уравнение, которое позволит раскрыть статическую неопределенность – уравнение совместности перемещений.

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 + \Delta l_5 = 0.$$

Подставляем в это уравнение деформации участков с численными значениями, из чего определим неизвестную реакцию R_B . Величину E в этом уравнении можно не учитывать.

$$\Delta l = \frac{R_B \cdot 0,6}{40} + \frac{(R_B + 700) \cdot 1,6}{40} + \frac{(R_B + 700) \cdot 1,2}{50} + \frac{(R_B + 700 - 1400) \cdot 0,2}{50} + \frac{(R_B + 700 - 1400) \cdot 0,8}{40} = 0.$$

Приводим уравнение к общему знаменателю, решаем его и находим, что $R_B = -271,84$ кН. Знак "-" указывает на то, что принятое направление реакции следует направить в обратную сторону.

Реакцию в опоре A определим из уравнения статики $-R_A + P_1 - P_2 - R_B = 0$.

$-R_A + 1400 - 700 + 271,84 = 0$, $R_A = 971,84$ кН. Знак «+» указывает на то, что принятое направление реакции R_A выбрано верно.

Определение величины продольной силы, напряжений и деформаций для статически неопределимого стержня проводится по той же методике, что и для статически определимого стержня. Эпюры сил, напряжений и деформаций показаны на рис. 5.

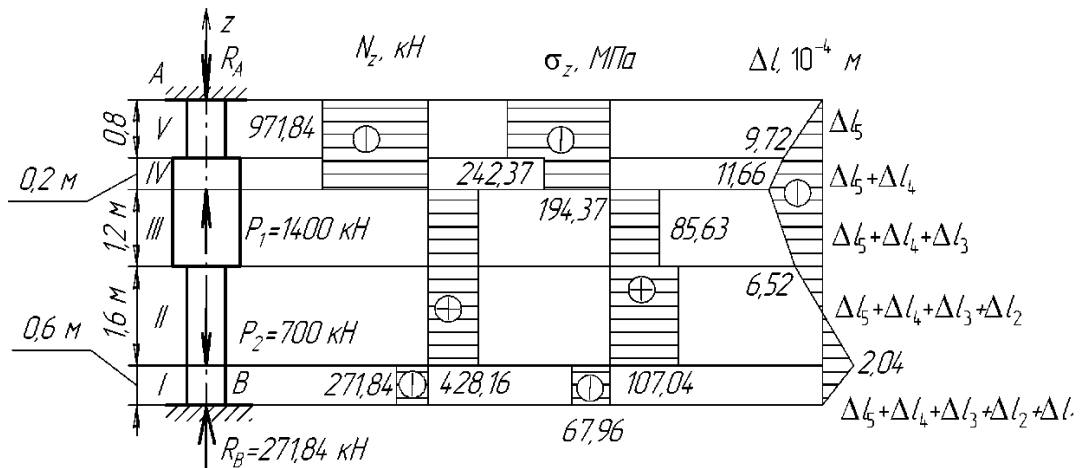


Рис. 5. Эпюры продольных сил, напряжений и деформаций для статически неопределимого стержня

Условие $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 + \Delta l_5 = 0$ выполняется, следовательно, силы и деформации стержня определены верно.

ЗАДАЧА № 2. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Требуется: Для заданного напряженного состояния определить экстремальные касательные напряжения (τ_1, τ_2, τ_3), нормальные, касательные и результирующие напряжения в одной из площадок, наклоненных к главной плоскости под углом α_1 или α_2 или β . Рассчитать главные линейные деформации, относительное изменение объема, удельную потенциальную энергию упругой деформации и удельную потенциальную энергию изменения формы.

Условия задания: Материал стержня – сталь с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Расчетные схемы детали представлены на рис. 6, числовые данные указаны в табл. 2.

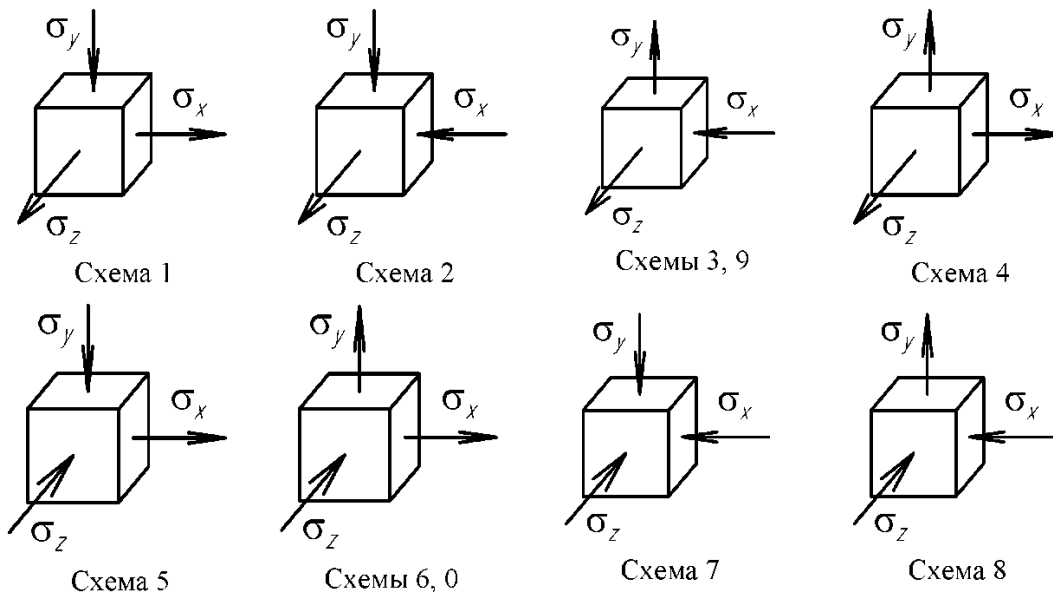


Рис. 6. Расчетные схемы к задаче № 2

Числовые данные к задаче № 2

№ схемы	№	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	№	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	μ
1	10	200	150	300	100	30	–	–	0,30
2	20	150	150	200	200	–	30	–	0,25
3	30	200	150	180	300	–	–	–	0,28
4	40	100	200	180	400	60	–	–	0,30
5	50	150	300	150	500	–	60	–	0,30
6	60	250	100	150	600	–	–	60	0,26
7	70	100	250	150	700	20	–	–	0,27
8	80	250	200	150	800	–	20	–	0,28
9	90	180	150	200	900	–	–	20	0,30
0	00	200	150	180	000	35	–	–	0,28

Последовательность выполнения задания:

1. Изобразить заданную схему напряженного состояния. Определить значения главных напряжений по заданной схеме.

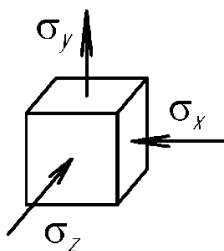


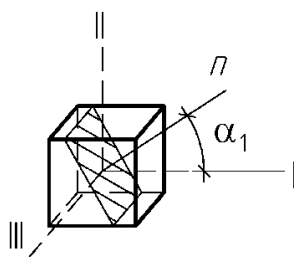
Рис. 7

Например, заданные для схемы (рис. 7) напряжения $\sigma_x = 150$ МПа, $\sigma_y = 120$ МПа, $\sigma_z = 90$ МПа. В соответствии с правилом $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ главные напряжения будут:
 $\sigma_1 = \sigma_y = 120$ МПа (растяжение «+»),
 $\sigma_2 = \sigma_z = -90$ МПа (сжатие «-»),
 $\sigma_3 = \sigma_x = -120$ МПа.

2. Рассчитать экстремальные касательные напряжения по формулам

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

3. Рассчитать аналитически и с помощью круга Мора нормальные, касательные и результирующие напряжения (МПа) в заданной наклонной плоскости.



а)

В плоскости, параллельной оси III под углом α_1 (рис. 8, а).

Нормальные напряжения

$$\sigma' = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1.$$

Касательные напряжения

$$\tau' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1.$$

Результирующие напряжения

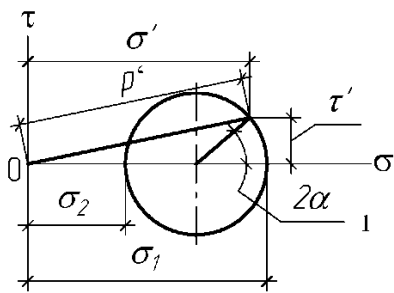
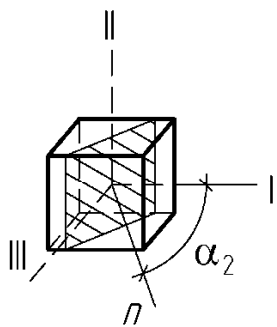


Рис. 8

б)

Графическое определение напряжений показано на рис. 8, б.

$$p' = \sqrt{\sigma'^2 + \tau'^2}.$$


а)

В плоскости, параллельной оси II под углом α_2 (рис. 9, а).

Нормальные напряжения

$$\sigma'' = \sigma_1 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_2.$$

Касательные напряжения

$$\tau'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha_2.$$

Результирующие напряжения

$$p'' = \sqrt{\sigma''^2 + \tau''^2}.$$

Графическое определение напряжений показано на рис. 9, б.

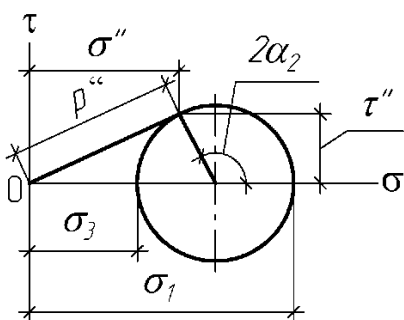
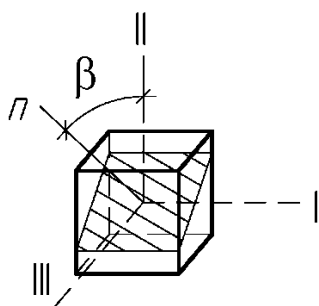


Рис. 9

б)



а)

В плоскости, параллельной оси I под углом α_2 (рис. 10, а).

Нормальные напряжения

$$\sigma''' = \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta.$$

Касательные напряжения

$$\tau''' = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta.$$

Результирующие напряжения

$$p''' = \sqrt{\sigma'''^2 + \tau'''^2}.$$

Графическое определение напряжений показано на рис. 10, б.

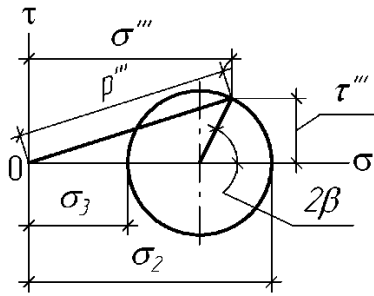


Рис. 10

б)

4. Рассчитать главные линейные деформации по формулам обобщенного закона Гука

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases}$$

5. Рассчитать относительное изменение объема по формуле

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

6. Рассчитать потенциальную энергию упругой деформации и энергию изменения объема по формулам

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \quad u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

7. Рассчитать потенциальную энергию изменения формы

$$u_{\sigma\phi} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

ЗАДАЧА № 3. РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ

Требуется: Требуется определить положение главных осей инерции и значения главных моментов инерции составного сечения.

Условия задания:

Числовые данные к задаче приведены в табл. 3, схемы сечений представлены на рис. 11. Характеристики уголков – площадь поперечного сечения, моменты инерции, положение центра тяжести необходимо взять из сортамента. Геометрические характеристики пластин рассчитать по известным формулам.

Последовательность выполнения задания:

1. Вычертить в масштабе 1:2 или 1:5 все сечение.
2. Определить положение центра тяжести всего сечения.
3. Определить положение главных осей инерции, показать на чертеже.

4. Вычислить значения главных моментов инерции.

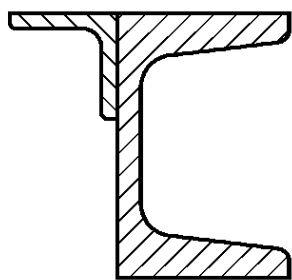


Схема 1

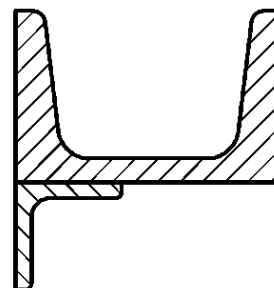


Схема 2

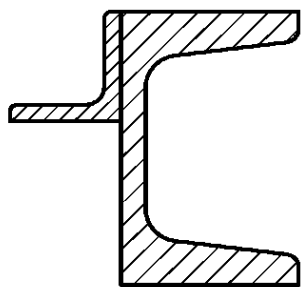


Схема 3

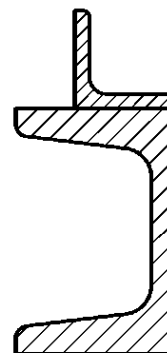


Схема 4

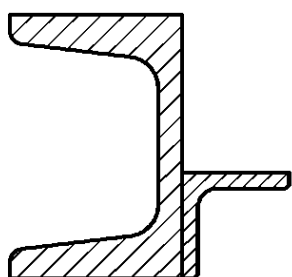


Схема 5

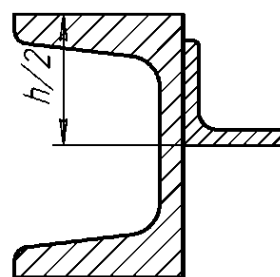


Схема 6

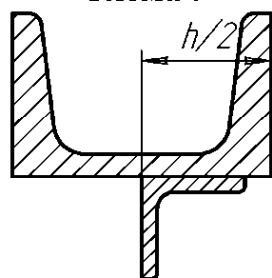


Схема 7

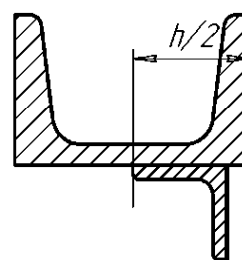


Схема 8

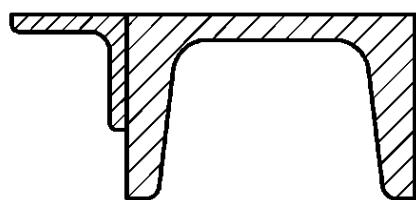


Схема 9

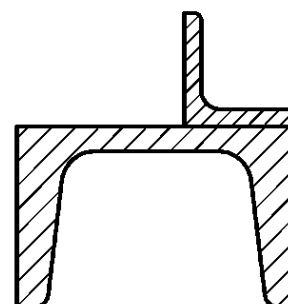


Схема 0

Рис. 11. Расчетные схемы к задаче № 3

Числовые данные к задаче № 3

№	Схема	№	Уголок равнобокий	№	Швеллер
1	1	10	100 x 100 x 8	100	№ 16
2	2	20	70 x 70 x 7	200	№ 16a
3	3	30	75 x 75 x 9	300	№ 18
4	4	40	125 x 125 x 10	400	№ 18a
5	5	50	80 x 80 x 8	500	№ 20
6	6	60	60 x 60 x 8	600	№ 20a
7	7	70	63 x 63 x 6	700	№ 22
8	8	80	110 x 110 x 7	800	№ 24
9	9	90	56 x 56 x 4	900	№ 30
0	0	00	120 x 120 x 10	000	№ 27

Пример решения задачи № 3

Схема составного сечения показана на рис. 12, размеры элементов сечения указаны в см.

Выписываем из сортамента характеристики сечений.

Двутавр № 12.

Площадь поперечного сечения $F_d = 14,7 \text{ см}^2$. Осевые моменты инерции следует поменять местами, т. к. двутавр расположен горизонтально $J_{x0} = 27,9 \text{ см}^4$, $J_{y0} = 350 \text{ см}^4$.

Уголок № 56 x 56 x 4.

$F = 4,38 \text{ см}^2$, $J_x = J_y = 13,10 \text{ см}^4$, центробежный момент инерции уголка $J_{xy} = 7,69 \text{ см}^4$. Координата центра тяжести $z_0 = 1,52 \text{ см}$.

Определяем положение центра тяжести составного сечения. Для этого проводим вспомогательные оси (x_0, y_0) так, чтобы все сечение располагалось в первом квадранте. Отмечаем координаты центра тяжести каждого элемента относительно точки принятой отсчета.

Положение центра тяжести определим по формулам

$$x_c = \frac{x_0 \cdot F_0 + x_y \cdot F}{F_0 + F}, \quad y_c = \frac{y_0 \cdot F_0 + y_y \cdot F}{F_0 + F}.$$

$$x_c = \frac{11,6 \cdot 14,7 + 4,08 \cdot 4,38}{14,7 + 4,38} = 9,874 \text{ см.}$$

$$y_c = \frac{3,2 \cdot 14,7 + 1,52 \cdot 4,38}{14,7 + 4,38} = 2,814 \text{ см.}$$

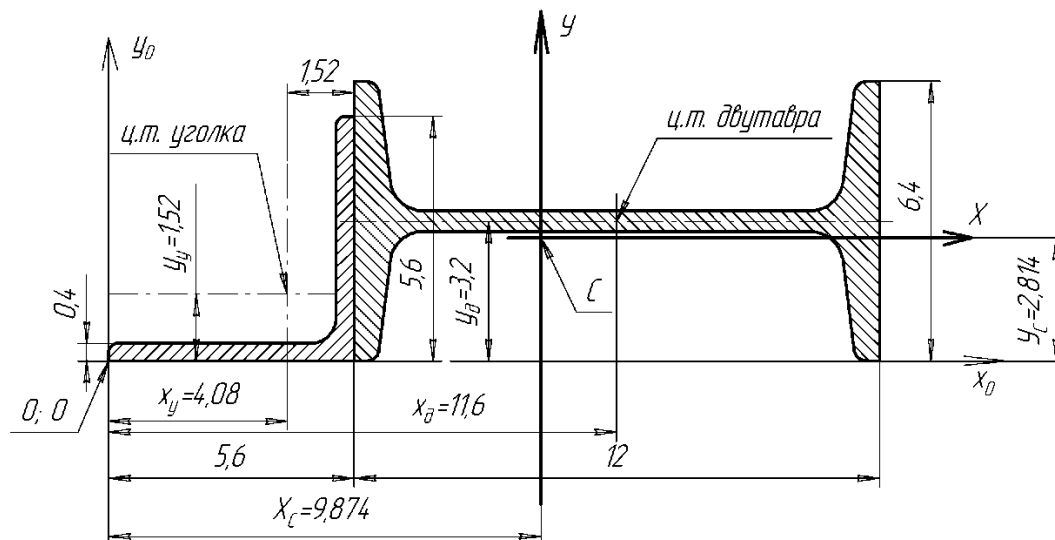


Рис. 12. Схема определения центра тяжести сечения

Пересечение центральных координатных осей дает нам положение центра тяжести составного сечения (точка С).

Рассчитаем осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей (рис. 13). Для этого необходимо определить координаты центров тяжести каждого элемента относительно общего центра тяжести.

Осевой момент инерции сечения относительно оси x

$$J_{xc} = J_{x0} + y_{c0}^2 \cdot F_0 + J_x + y_{cy}^2 \cdot F.$$

$$J_{xc} = 27,9 + 0,386^2 \cdot 14,7 + 13,10 + 1,294^2 \cdot 4,38 = 50,52 \text{ см}^4.$$

Осевой момент инерции сечения относительно оси y

$$J_{yc} = J_{y0} + x_{c0}^2 \cdot F_0 + J_y + x_{cy}^2 \cdot F.$$

$$J_{yc} = 350 + 1,726^2 \cdot 14,7 + 13,10 + 5,794^2 \cdot 4,38 = 553,93 \text{ см}^4.$$

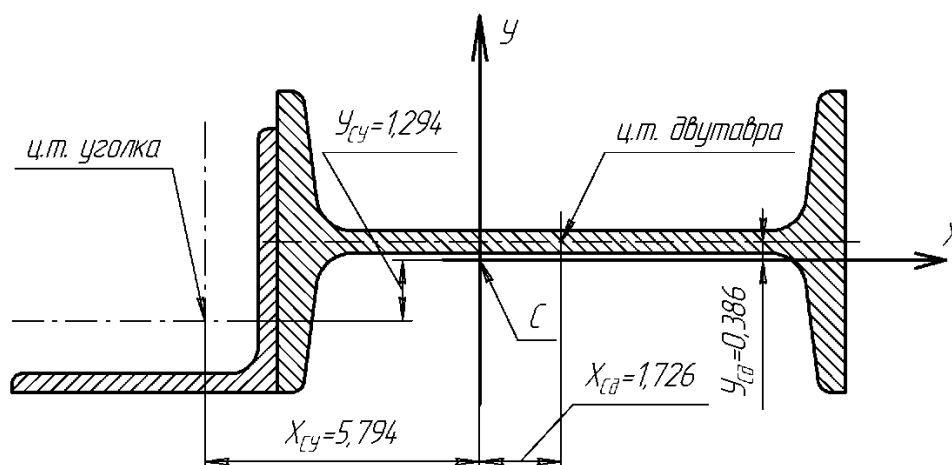


Рис. 13. Схема определения осевых моментов инерции

Определим центробежный момент сечения (J_{xy}). У двутавра центробежный момент равен нулю, т. к. сечение симметрично. Момент инерции уголка (J_{xyy}) взят из сортамента.

$$J_{xy} = J_{xyy} + F_0 \cdot x_{c0} \cdot y_{c0} + F \cdot (-x_{cy}) \cdot (-y_y).$$

$$J_{xy} = 7,69 + 14,7 \cdot 1,726 \cdot 0,386 + 4,38 \cdot (-5,794) \cdot (-1,294) = 50,32 \text{ см}^4.$$

Определим положение главных осей инерции v и u (рис. 14).

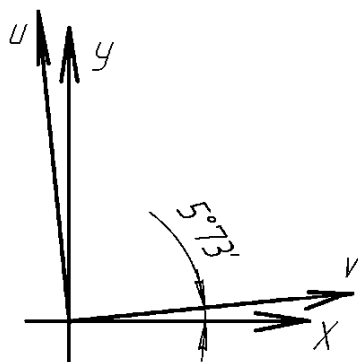


Рис. 14. Схема поворота осей

Величина угла, на который необходимо повернуть главные оси относительно центра тяжести, равна:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_{yc} - J_{xc}} = \frac{2 \cdot 50,53}{553,93 - 50,52} = 0,20075,$$

$\alpha = 5,73^\circ$. Знак «+» указывает на то, что главные оси следует повернуть против хода часовой стрелки.

Определяем значения главных моментов инерции

$$J_{uv} = \frac{1}{2} \left[(J_{xc} + J_{yc}) \pm \sqrt{(J_{xc} - J_{yc})^2 + 4J_{xy}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [604,45 \pm 513,37] \text{ см}^4.$$

$$J_u = \frac{1}{2} [604,45 + 513,37] = 558,91 \text{ см}^4, \quad J_v = \frac{1}{2} [604,45 - 513,37] = 45,54 \text{ см}^4.$$

Проверка: $J_{xc} + J_{yc} = J_v + J_u$.

$(553,93 + 50,52) = (558,91 + 45,54)$, $604,45 \text{ см}^4 = 604,45 \text{ см}^4$ – сумма моментов инерции относительно центральных осей равна сумме моментов инерции относительно главных осей. Условие выполнено.

Знание положения главных осей инерции и значения главных моментов инерции необходимо в инженерной практике, т. к. внешнюю нагрузку следует прикладывать в направлении главных осей и наибольшей жесткости поперечного сечения. Произведение EJ – является жесткостью поперечного сечения балки при изгибе.

ЗАДАЧА № 4. РАСЧЕТ ЗАКЛЕПОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ

Требуется: рассчитать диаметр заклепки исходя из условий прочности на срез и смятие. Подобрать ширину соединяемых листов исходя из условия прочности на растяжение.

Условия задания: Материал заклепок – сталь с допускаемым напряжением на срез $[\tau] = 100$ МПа, на смятие $[\sigma_c] = 240$ МПа. Материал листов – сталь с допустимым напряжением на растяжение $[\sigma_p] = 160$ МПа. Расчетные схемы заклепочных соединений представлены на рис. 15, числовые данные указаны в табл. 4.

Последовательность выполнения задания:

1. Изобразить расчетную схему соединения с нанесением размеров.
2. Рассчитать диаметр заклепки исходя из условия прочности на срез

$$\tau = \frac{P}{n \cdot i \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq [\tau], \text{ где } n - \text{ число срезов, } i - \text{ число заклепок.}$$

3. Рассчитать диаметр заклепки исходя из условия прочности на смятие $\sigma_c = \frac{P}{i \delta d} \leq [\sigma_c]$, где $\delta = t_{\min}$ – минимальная толщина листов сборки в направлении действия растягивающей силы.

4. Выбрать наибольшее из рассчитанных значений диаметра заклепки.

5. Исходя из условия прочности на растяжение, рассчитать ширину соединяемых листов $\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]$, где F – площадь поперечного сечения листов, ослабленного отверстиями под заклепки.

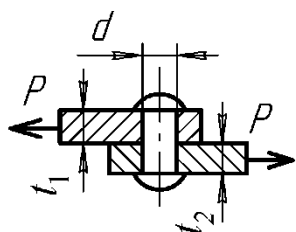


Схема 1

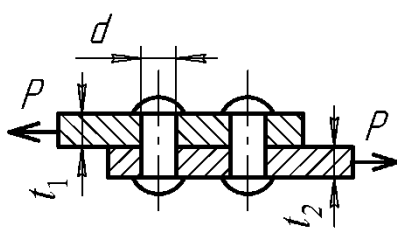


Схема 2

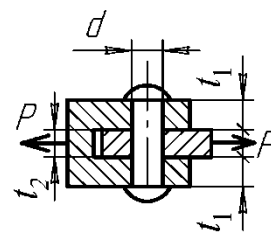


Схема 3

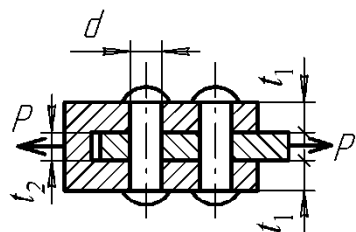


Схема 4

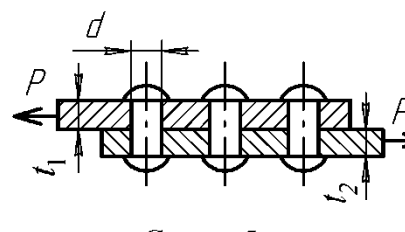
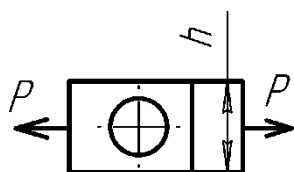
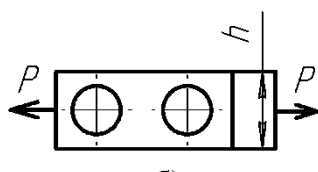


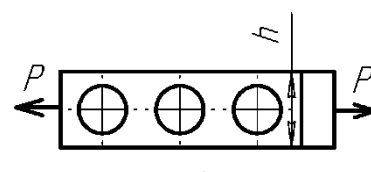
Схема 5



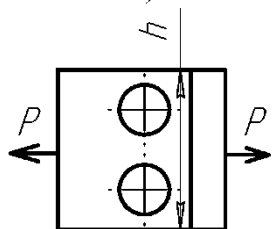
а)



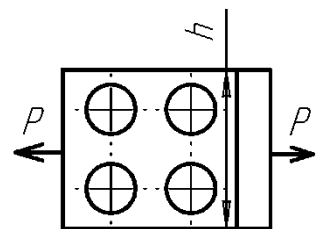
б)



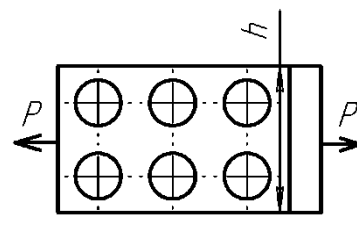
в)



г)



д)



е)

Рис. 15. Расчетные схемы к задаче № 4

Таблица 4

Числовые данные к задаче № 4

№	Схема	№	t_1 , мм	t_2 , мм	№	P , кН
1	1, а	10	6	8	100	12
2	1, г	20	4	6	200	14
3	2, а	30	5	5	300	16
4	2, г	40	3	4	400	18
5	3, а	50	5	6	500	20
6	3, г	60	4	6	600	12
7	4, б	70	5	6	700	14
8	4, д	80	4	5	800	16
9	5, в	90	3	5	900	18
0	5, е	00	6	8	000	20

Пример решения задачи № 4

Рассмотрим заклепочное соединение (рис. 16).

Число срезов заклепок $n = 2$, число заклепок $i = 8$.

Исходя из условий прочности на срез, необходимый диаметр заклепки составит $d \geq \sqrt{\frac{4P}{n \cdot i \cdot \pi [\tau]}} = 0,0048$ м.

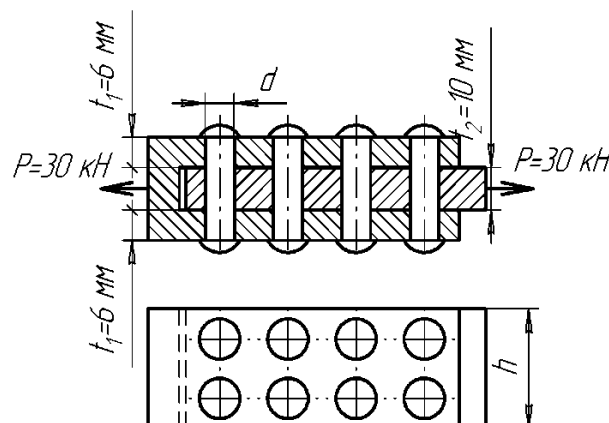
Округляем до стандартного значения и получаем $d = 5$ мм.

При расчете на смятие определяем, что $\delta_{\min} = t_2 = 10$ мм (меньше, чем $2t_1 = 12$ мм). Исходя из условий прочности на смятие, диаметр заклепки составит

$$d \geq \frac{P}{i \cdot t_2 [\sigma_c]} = \frac{30 \cdot 10^3}{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 240 \cdot 10^6} = 3,125 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Выбираем диаметр заклепки, полученный по условию прочности на срез $d = 5$ мм.

Поперечное сечение соединяемых листов ослаблено отверстиями под заклепку. Площадь поперечного сечения уменьшится на величину $F_1 = 2(5 \cdot 22) \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ (рис. 16, а)



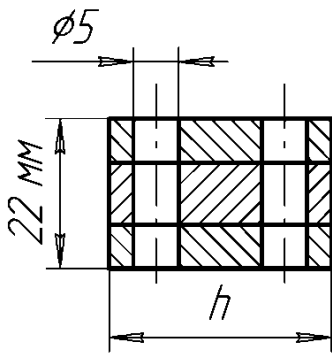


Рис. 16, а

Рис. 16. Расчетная схема

Исходя из условий прочности на растяжение, размеры поперечного сечения соединяемых листов должны удовлетворять требованию

$$\sigma = \frac{P}{F - F_1} \leq [\sigma], \text{ где } F = (2t_1 + t_2)h - \text{площадь}$$

сплошного сечения.

Исходя из условий прочности, минимальная ширина листа h составит 0,019 м.

ЗАДАЧА № 5. КРУЧЕНИЕ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Требуется: подобрать диаметр вала сплошного и кольцевого сечения по условиям прочности. Построить эпюры крутящих моментов, напряжений и углов закручивания.

Условия задания:

К стальному валу приложены три известных момента T_1, T_2, T_3 . Расчетные схемы валов представлены на рис. 17, числовые данные указаны в табл. 5.

Последовательность выполнения задания:

1. Из условия равновесия вала определить значение момента X ;
2. Построить эпюру крутящих моментов и определить опасное сечение вала;
3. Из условия прочности определить диаметр вала сплошного сечения;
4. Из условия прочности подобрать вал кольцевого поперечного сечения при заданном соотношении d/D ;
5. Выбрать вал с меньшей площадью поперечного сечения;
6. Провести подбор вала выбранного сечения по условию жесткости $[\theta] = 1 \text{ град/м} = 0,0174 \text{ рад}$.
7. Для выбранного вала построить эпюру углов закручивания, вычислить наибольший относительный угол закручивания.

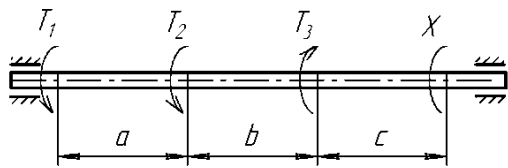


Схема 1

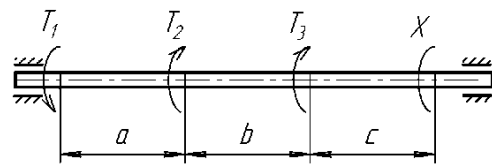


Схема 2

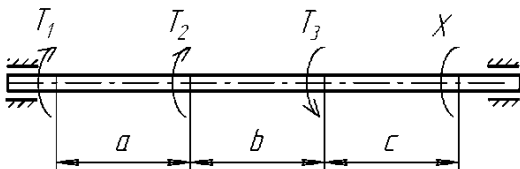


Схема 3

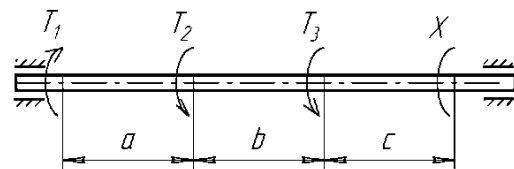


Схема 4

Рис. 17. Расчетные схемы к задаче № 5

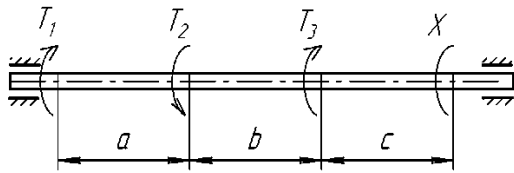


Схема 5

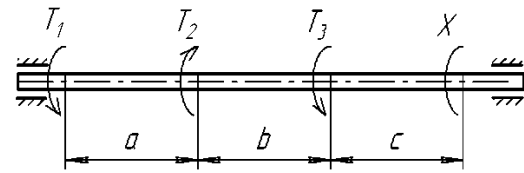


Схема 6

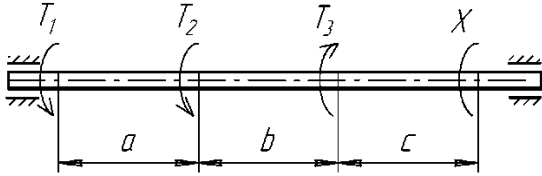


Схема 7

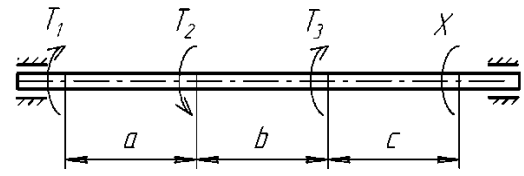


Схема 8

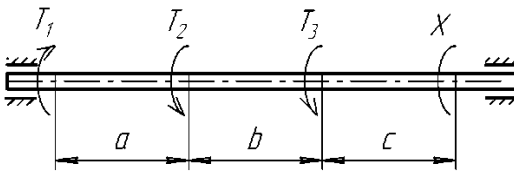


Схема 9

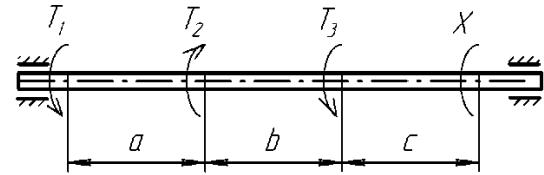


Схема 0

Рис. 17. Расчетные схемы к задаче № 5 (окончание)

Таблица 5

Числовые данные к задаче № 5

№	Схема	$[\tau]$, МПа	d/D	№	a , м	b , м	c , м	№	T_1 , кН·м	T_2 , кН·м	T_3 , кН·м
1	1	35	0,4	10	1,1	1,8	1,5	100	2,0	1,7	1,1
2	2	40	0,4	20	1,2	1,9	1,6	200	1,9	1,8	1,2
3	3	45	0,5	30	1,3	2,0	1,7	300	1,8	1,9	1,3
4	4	50	0,5	40	1,4	1,1	1,8	400	1,7	2,0	1,4
5	5	55	0,6	50	1,5	1,2	1,9	500	1,6	1,1	1,5
6	6	60	0,6	60	1,6	1,3	2,0	600	1,5	1,2	1,6
7	7	65	0,7	70	1,7	1,4	1,1	700	1,4	1,3	1,7
8	8	70	0,7	80	1,8	1,5	1,2	800	1,3	1,4	1,8
9	9	75	0,8	90	1,9	1,6	1,3	900	1,2	1,5	1,9
0	0	80	0,8	00	2,0	1,7	1,4	000	1,1	1,6	2,0

Пример решения задачи № 5

Рассмотрим вал, расчетная схема которого приведена на рис. 18. Допустимое напряжение $[\tau] = 55$ МПа. $d/D = 0,6$.

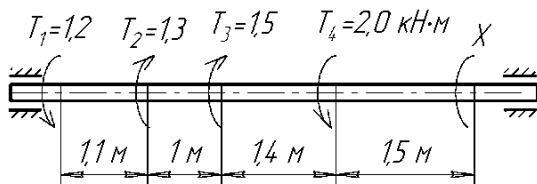


Рис. 18. Расчетная схема вала

Из условия равновесия $\sum M = 0$ находим значение неизвестного момента X .

$$-T_1 + T_2 + T_3 - T_4 + X = 0$$

$$X = 1,2 - 1,3 - 1,5 + 2,0 = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Направление – по ходу часовой стрелки.

Строим эпюру крутящих моментов (рис. 19). На эпюре в сечении, в котором приложен внешний момент, происходит скачок на величину момента.

По эпюре моментов определяем опасный участок.

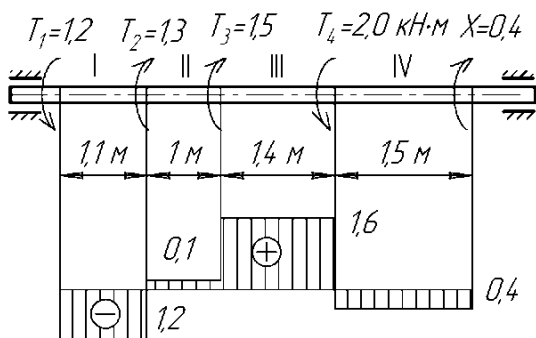


Рис. 19. Расчетная схема вала

Опасным является III участок, т. к. в сечении вала действует наибольший по величине крутящий момент 1,6 кН·м.

Условие прочности для вала

$$\text{круглого сечения } \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кmax}}}{W_p} \leq [\tau],$$

где $M_{\text{кmax}} = 1,6$ кН·м, W_p – полярный момент сопротивления круглого сечения.

Учитывая, что $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ из условия прочности находим требуемый

диаметр вала сплошного сечения $d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кmax}}}{\pi [\tau]}}$. После подстановки известных величин получаем $d \geq 0,053$ м.

Находим площадь поперечного сечения вала сплошного сечения

$$F_{\text{спл}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \approx 2,21 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Вычислим по условию прочности диаметр вала кольцевого сечения, т.к.

момент сопротивления кольца равен $W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right)$, то требуемый

внешний диаметр кольца $D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{кmax}}}{\pi \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) [\tau]}}$. Подстановка величин в формулу

дает $D \geq 0,055$ м. Внутренний диаметр кольца составит $d = 0,033$ м.

Площадь поперечного сечения вала, имеющего форму кольца, составит $F_k \approx 1,52 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

Сравнивая площади поперечных сечений, выбираем вал кольцевого поперечного сечения, имеющего меньшую площадь.

Уточним размеры кольцевого сечения по условию жесткости. Максимальный относительный угол закручивания вала $\theta_{\max} = \frac{M_{\kappa \max}}{G \cdot J_p} \leq [\theta]$,

где $G = 8 \cdot 10^4$ МПа – модуль упругости при сдвиге.

$$\text{Полярный момент инерции кольцевого сечения } J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right).$$

$$\text{Требуемый диаметр вала } D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\kappa \max}}{\pi \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) G [\theta]}}.$$

Вычисления дают $D = 0,061$ м, внутренний диаметр $d = 0,0366$ м.

Полярный момент инерции выбранного кольцевого сечения составит $J_p = 1,18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$.

Рассчитываем угол закручивания каждого участка:

$$\text{I участок } \varphi_1 = \frac{M_1 \cdot l_1}{G \cdot J_p} = \frac{-1,2 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,18 \cdot 10^{-6}} = -1,39 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

$$\text{II участок } \varphi_2 = \frac{M_2 \cdot l_2}{G \cdot J_p} = \frac{0,1 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,18 \cdot 10^{-6}} = 0,11 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

$$\text{III участок } \varphi_3 = \frac{M_3 \cdot l_3}{G \cdot J_p} = \frac{1,6 \cdot 10^3 \cdot 1,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,18 \cdot 10^{-6}} = 2,37 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

$$\text{IV участок } \varphi_4 = \frac{M_4 \cdot l_4}{G \cdot J_p} = \frac{-0,4 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,18 \cdot 10^{-6}} = -0,64 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Строим эпюру углов закручивания (рис. 20).

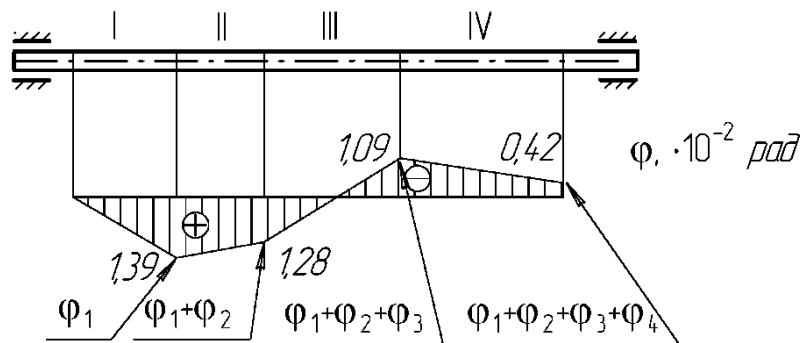


Рис. 20. Эпюра углов закручивания вала кольцевого сечения

ЗАДАЧА № 6. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Требуется: для заданных двух схем балок (консольная балка и балка на двух шарнирных опорах) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать по условиям прочности размеры поперечных сечений.

Условия задания:

Балки загружены сосредоточенными силами (P), распределенными нагрузками (q) и изгибающими моментами (M). Расчетные схемы балок представлены на рис. 21, числовые данные указаны в табл. 6. Материал двутавровой балки – сталь $[\sigma] = 160$ МПа, материал балки прямоугольного сечения – дерево $[\sigma] = 12$ МПа, $[\tau] = 1,5$ МПа.

Последовательность выполнения задания:

1. Вычертить расчетную схему балки с заданными нагрузками, соблюдая масштаб размеров по длине. Проставить числовые значения размеров и нагрузок. Вычислить величину реакций. Установить число участков.

2. Построить эпюры поперечных сил (Q_y) и изгибающих моментов (M_x) с указанием размерности на границах участков и в сечениях, где Q_y и M_x имеют экстремальные значения.

3. Для каждой из 2-х балок по допускаемым напряжениям $[\sigma]$ подобрать размеры одного из следующих профилей поперечного сечения: для балки с самым большим значением наибольшего изгибающего момента M_x – двутавровый профиль; для другой балки – профиль прямоугольника с соотношением ширины к высоте $b/h = 2/3$.

4. Произвести проверку поперечного сечения деревянной балки по касательным напряжениям.

Размеры двутаврового профиля следует выбирать из таблиц сортамента.

5. Начертить профиль поперечного сечения и проставить размеры.

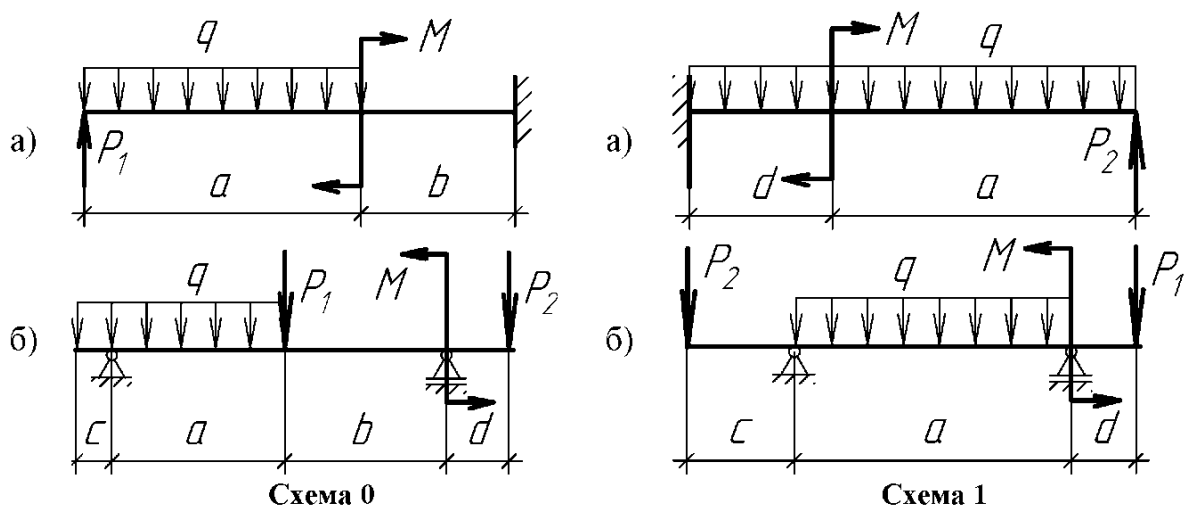


Рис. 21. Расчетные схемы к задаче № 6

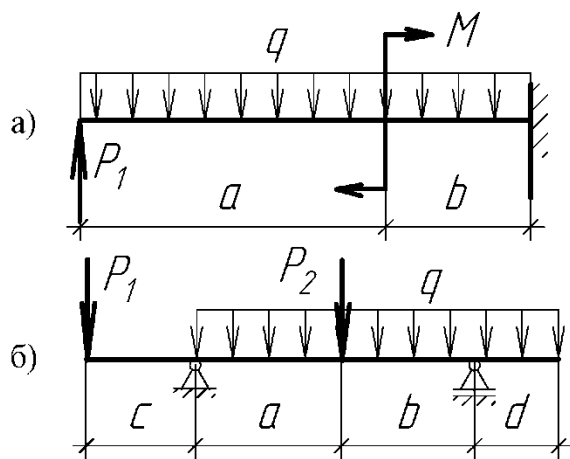


Схема 2

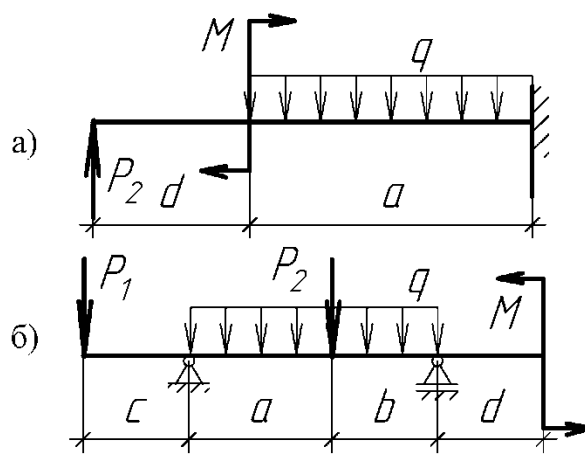


Схема 3

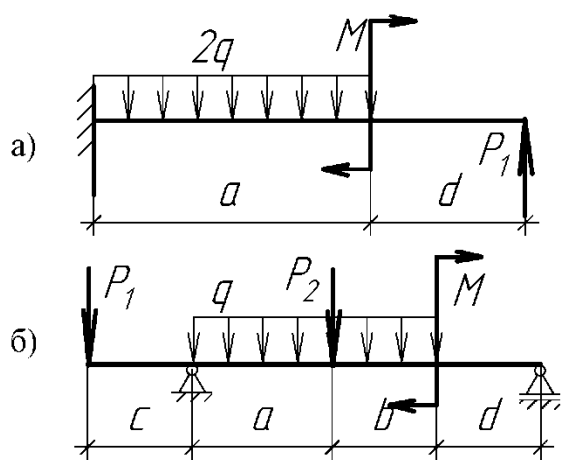


Схема 4

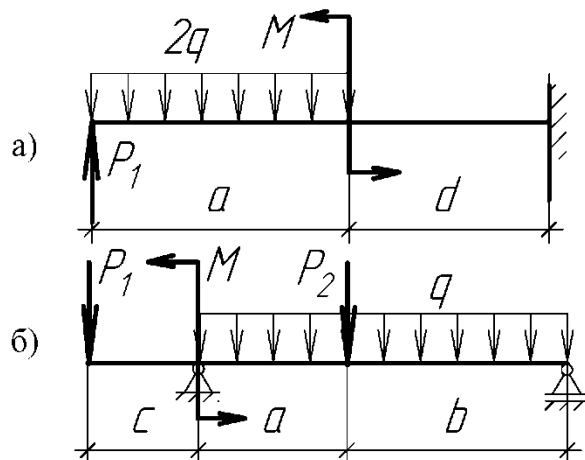


Схема 5

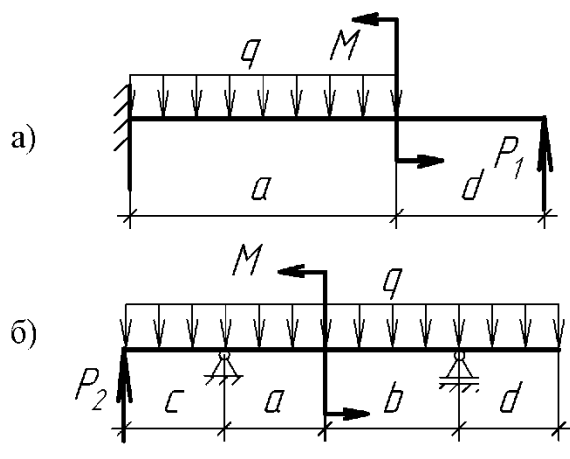


Схема 6

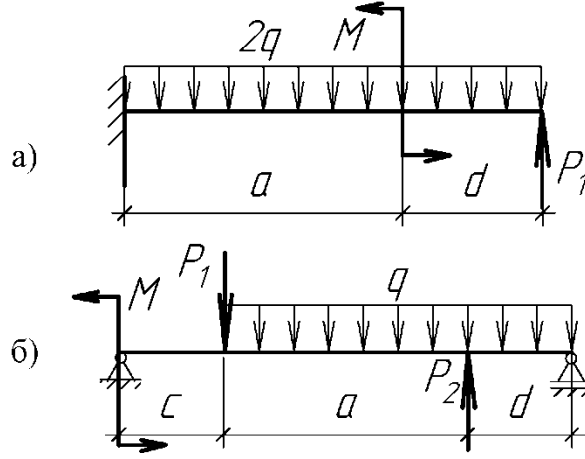


Схема 7

Рис. 21. Расчетные схемы к задаче № 6 (продолжение)

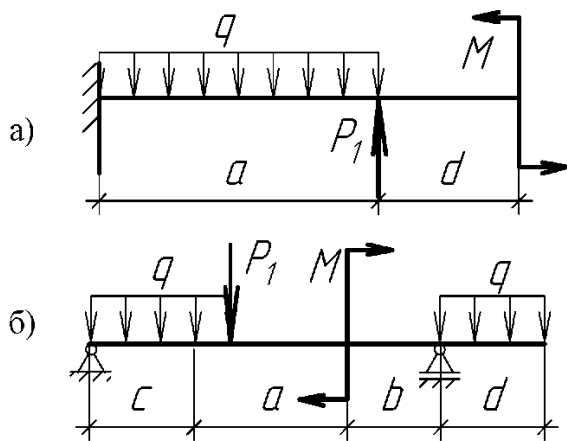


Схема 8

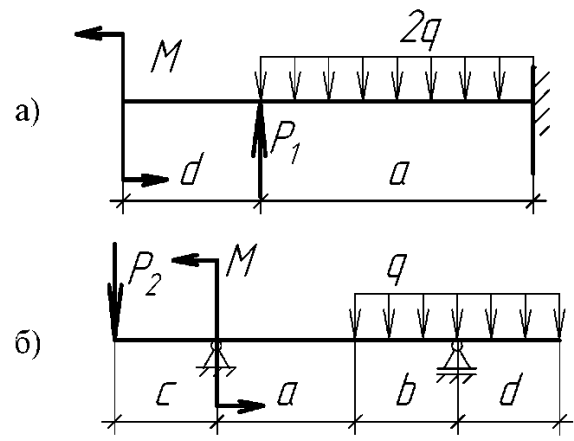


Схема 9

Рис. 21. Расчетные схемы к задаче № 6 (окончание)

Таблица 6

Числовые данные к задаче № 6

№ схемы	№	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кН·м	№	a , м	b , м	c , м	d , м
1	10	10	10	14	12	100	2,0	2,0	0,6	1,0
2	20	12	12	12	16	200	2,2	2,4	0,8	0,8
3	30	14	14	10	20	300	2,4	2,8	0,4	0,6
4	40	6	10	12	20	400	2,6	3,0	0,6	0,5
5	50	8	8	18	22	500	2,8	2,8	0,8	0,4
6	60	10	12	10	24	600	2,6	2,6	0,7	0,5
7	70	18	18	14	22	700	2,0	2,0	0,5	0,7
8	80	15	15	15	16	800	2,4	2,4	1,0	0,9
9	90	18	16	16	18	900	2,2	2,2	0,9	1,0
0	00	10	10	14	24	000	3,0	3,0	0,8	1,2

Пример решения задачи № 6

Рассмотрим две балки – консольную балку и балку на двух опорах. Для консольной балки (рис. 22) опорные реакции в заделке не вычисляются, т. к. построение эпюр начинается со свободного конца балки.

Первый участок $0 \leq z_1 \leq 4$ м.

Поперечная сила:

$$Q_1 = -P + q \cdot z_1,$$

при $z_1 = 0$ $Q_1 = -30$ кН,

при $z_1 = 4$ м $Q_1 = 10$ кН;

при $z_1 = z_0 = P/q = 3$ м $Q_1 = 0$.

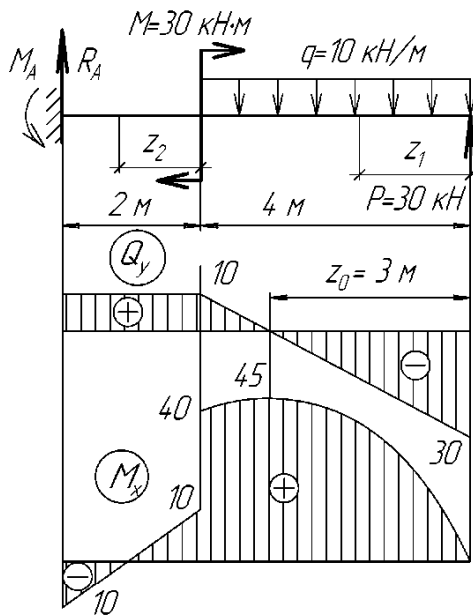


Рис. 22. Консольная балка

Изгибающий момент:

$$M_1 = P \cdot z_1 - \frac{q \cdot z_1^2}{2},$$

при $z_1 = 0$ $M_1 = 0$,

при $z_1 = 4$ м $M_1 = 40$ кН·м;

при $z_0 = P/q = 3$ м

$M_1 = M_{\max} = 45$ кН·м.

Эпюра изгибающего момента на первом участке имеет форму квадратичной параболы, выпуклость которой направлена навстречу q .

Второй участок $0 \leq z_2 \leq 2$ м.

Поперечная сила:

$$Q_2 = -P + q \cdot 4 = 10 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент:

$$M_2 = P \cdot (4 + z_2) - M - q \cdot 4 \cdot (2 + z_2),$$

при $z_2 = 0$ $M_2 = 10$ кН·м,

при $z_2 = 2$ м $M_2 = -10$ кН·м. Расчетная схема балки на двух опорах представлена на рис. 23.

Определение реакций в опорах осуществляется через уравнения статики:

$$\sum m_A = 0, \quad \sum m_B = 0.$$

$$\sum m_A = 0 \Rightarrow q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 3 + M - R_B \cdot 5 = 0 \Rightarrow R_B = 22 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = 0 \Rightarrow R_A \cdot 5 - q \cdot 2 \cdot 4 - P \cdot 2 + M = 0 \Rightarrow R_A = 18 \text{ кН.}$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - q \cdot 2 - P = 0.$$

Балка имеет 4 участка. Составляем для каждого участка уравнения поперечных сил и изгибающих моментов.

Первый участок $0 \leq z_1 \leq 1$ м.

$$Q_1 = -R_B = -22 \text{ кН.}$$

$$M_1 = R_B \cdot z_1, \text{ при } z_1 = 0 \text{ } M_1 = 0, \text{ при } z_1 = 1 \text{ м } M_1 = 22 \text{ кН·м.}$$

Второй участок $0 \leq z_2 \leq 1$ м.

$$Q_2 = -R_B = -22 \text{ кН.}$$

$$M_2 = R_B \cdot (1 + z_2) - M,$$

$$\text{при } z_2 = 0$$

$$M_2 = -8 \text{ кН·м, при } z_2 = 1 \text{ м}$$

$$M_2 = 14 \text{ кН·м.}$$

Третий участок $0 \leq z_3 \leq 2$ м.

$$Q_3 = R_A - q \cdot z_3, \text{ при } z_3 = 0$$

$$Q_3 = 18 \text{ кН, при } z_3 = 2 \text{ м}$$

$$Q_3 = -2 \text{ кН},$$

$$Q_3 = 0, \text{ при } z_3 = 1,8 \text{ м.}$$

Эпюра моментов имеет вид квадратичной параболы, максимум которой находится при $z_3 = 1,8 \text{ м}$.

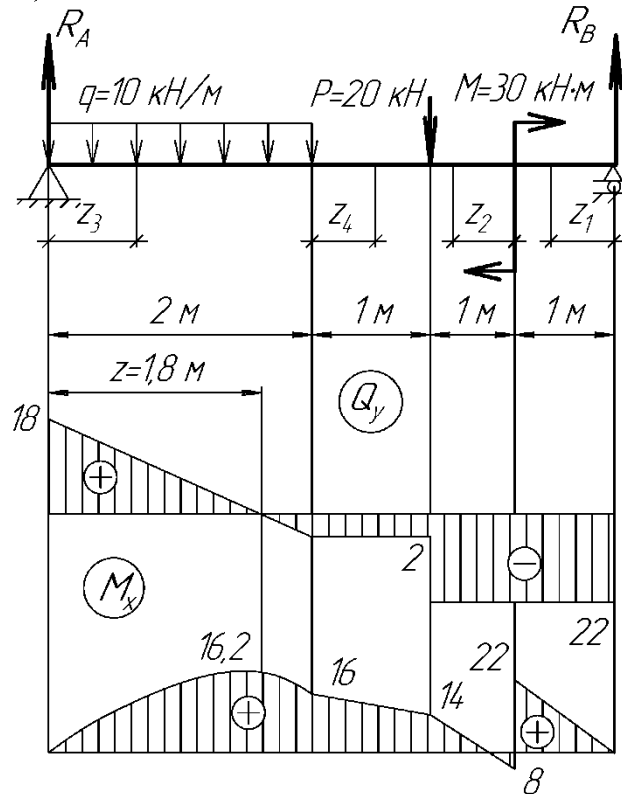


Рис. 23. Балка на двух опорах

$M_3 = R_A \cdot z_3 - q \cdot z_3 \cdot z_3 / 2$, при $z_3 = 0$ $M_3 = 0$, при $z_3 = 1,8 \text{ м}$ $M_3 = 16,2 \text{ кН·м}$, при $z_3 = 2 \text{ м}$ $M_3 = 16 \text{ кН·м}$.

Четвертый участок $0 \leq z_4 \leq 1 \text{ м}$.

Для четвертого участка необязательно записывать уравнения сил и моментов, достаточно соединить точки значений сил и моментов на 3-м и 2-м участках.

Подбор размеров поперечных сечений.

Из эпюр Q_y и M_z следует, что $M_{max} = 45 \text{ кН·м}$ имеет консольная балка. Для этой балки подберем из условия прочности по нормальным напряжениям профиль поперечного сечения – двутавр $\sigma_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$. Из условия

прочности следует, что требуемый момент сопротивления сечения должен быть $W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} \approx 0,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. В сортаменте значения геометрических характеристик выражены в сантиметрах, поэтому $W_x = 0,28 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 = 280 \text{ см}^3$.

Ближайшее из сортамента значение момента сопротивления составляет 289 см^3 , оно соответствует двутавру № 24, этот двутавр и следует использовать для балки.

В балке на двух опорах $M_{\max} = 22 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $Q_{\max} = 22 \text{ кН}$.

Требуемый момент сопротивления из условия прочности по нормальным напряжениям $W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{22 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^6} = 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Момент сопротивления

прямоугольного сечения $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$, т. к. $b = \frac{2}{3}h$, то $W_x = \frac{2h^3}{18}$. Требуемая высота

балки составит: $h = \sqrt[3]{\frac{18W_x}{2}} = 0,254 \text{ м}$. Округляем до четного числа и получаем $h = 0,26 \text{ м}$. Ширина балки составит $b = 0,18 \text{ м}$.

Проверим балку с выбранными размерами поперечного сечения по условию прочности по касательным напряжениям:

$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|Q_{\max}|}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{22 \cdot 10^3}{0,26 \cdot 0,18} \approx 0,71 \text{ МПа}$, что меньше допустимых напряжений $[\tau] = 1,5 \text{ МПа}$.

В том случае, если условие прочности по касательным напряжениям не выполняется, то размеры поперечного сечения следует увеличить.

ЗАДАЧА № 7. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ДЛЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

Требуется: для заданной схемы статически определимой рамы построить эпюры внутренних силовых факторов (N_z , Q_y , M_x).

Условия задания:

Рама загружена силами (P_1 и P_2), моментом (M) и равномерно распределенной нагрузкой (q). Расчетные схемы представлены на рис. 24, числовые данные в табл. 7.

Последовательность выполнения задания:

1. Вычертить расчетную схему рамы с заданными нагрузками. Проставить числовые значения размеров и нагрузок. Изобразить реакции и вычислить их величину.

2. Построить эпюры N_z , Q_y , M_x на каждом участке. Эпюры строят на контуре рамы. Контур рамы для построения каждой эпюры следует чертить заново в том же масштабе, что и расчетную схему. Контур рамы выделяют утолщенной линией. На всех эпюрах проставить числовые значения N_z , Q_y , M_x с указанием размерности.

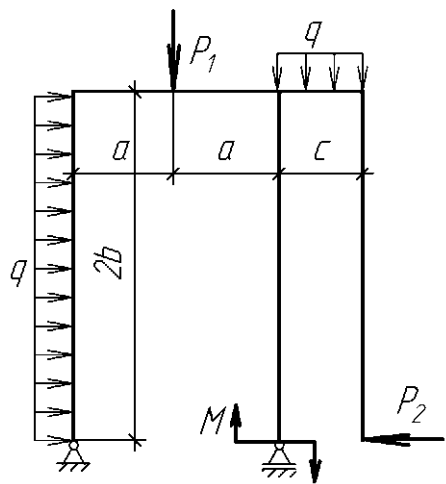


Схема 1

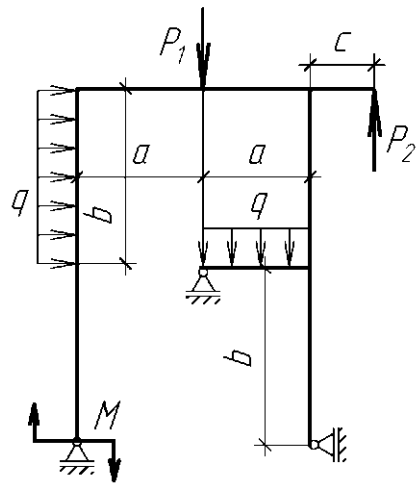


Схема 2

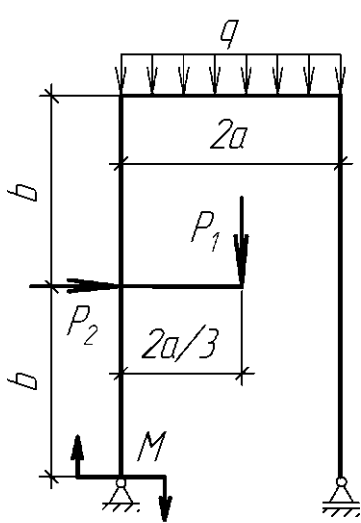


Схема 3

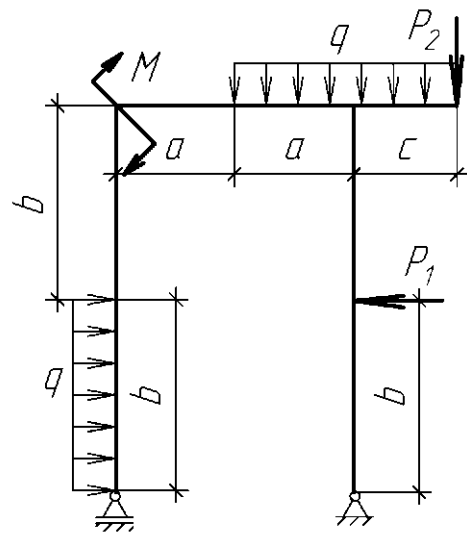


Схема 4

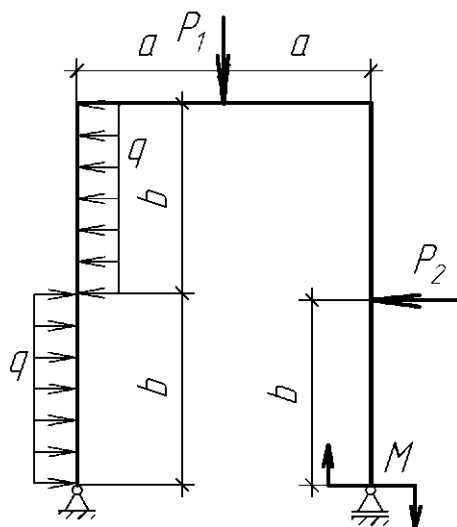


Схема 5

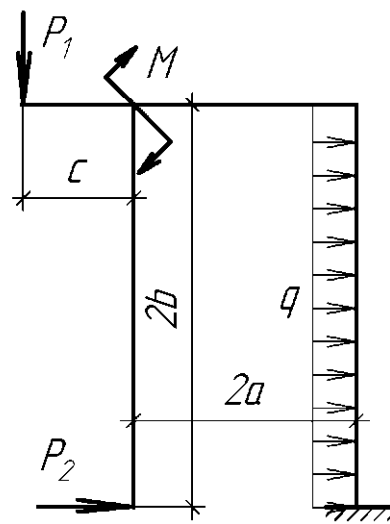


Схема 6

Рис. 24. Расчетные схемы к задаче № 7

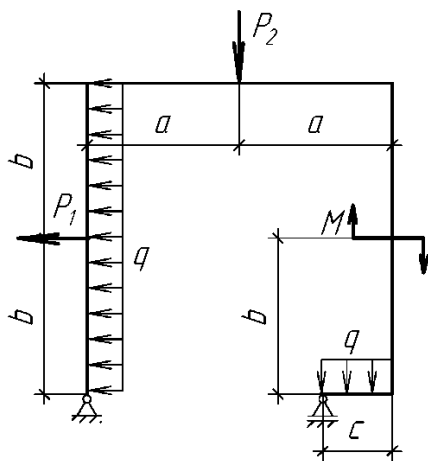


Схема 7

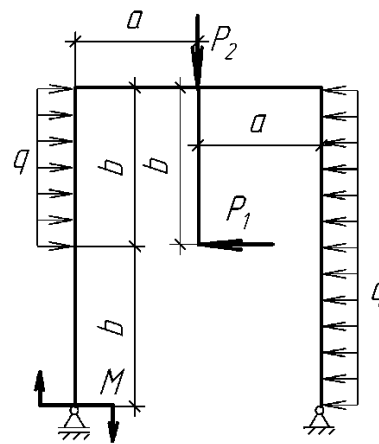


Схема 8

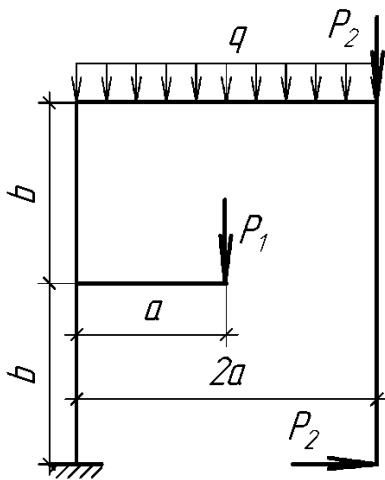


Схема 9

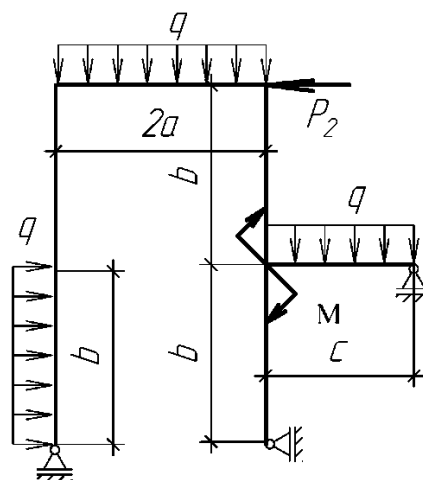


Схема 0

Рис. 24. Расчетные схемы к задаче № 7 (окончание)

Таблица 7

Числовые данные к задаче № 7

№ схемы	№	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кН·м	q , кН/м	№	a , м	b , м	c , м
0	00	26	34	24	12	000	3,0	4,0	1,0
1	10	28	32	26	14	100	3,2	3,8	1,0
2	20	30	30	28	16	200	3,4	3,6	1,0
3	30	32	28	30	18	300	2,4	3,4	2,0
4	40	34	26	32	20	400	2,6	4,2	1,6
5	50	36	24	34	22	500	2,8	4,4	1,4
6	60	38	32	36	24	600	3,0	4,6	1,3
7	70	40	30	38	16	700	3,2	4,8	1,2
8	80	38	28	40	18	800	3,4	5,0	1,1
9	90	36	26	40	10	900	3,6	4,5	1,0

Пример решения задачи № 7

Для продольных сил (N_z) и поперечных сил (Q_y) сохраняют принятые ранее правила знаков. Ординаты эпюр N_z и Q_y откладывают перпендикулярно к оси элементов рамы в произвольную сторону, но обязательно указывается знак.

Для изгибающих моментов специального правила знаков нет, а при вычислении момента в любом сечении знак принимается произвольно. Но результат вычислений всегда откладывается со стороны сжатого волокна элемента рамы.

Рассмотрим жестко заземленную плоскую раму (рис. 25, а). В жесткой заделке возникают три реакции, но строить эпюры внутренних силовых факторов для такого типа рамы можно без вычисления реакций в заделке.

Рама имеет 4 участка.

Построение эпюры N_z .

Первый участок $0 \leq z_1 \leq 3$ м.

$$N_1 = 0.$$

Второй участок $0 \leq z_2 \leq 3$ м.

$$N_2 = 0.$$

Третий участок $0 \leq z_3 \leq 4$ м.

$$N_3 = -P = -20 \text{ кН (сжатие «-»)}.$$

Четвертый участок $0 \leq z_4 \leq 6$ м.

$$N_4 = -q \cdot 4 = -40 \text{ кН (сжатие «-»)}.$$

Эпюра продольных сил показана на рис. 25, б. Из эпюры видно, что вертикальная реакция в заземлении $R_A = 40$ кН и направлена вверх, вызывая сжатие в стойке рамы.

Построение эпюры Q_y .

Первый участок $0 \leq z_1 \leq 3$ м.

$$Q_1 = 0.$$

Второй участок $0 \leq z_2 \leq 3$ м.

$Q_2 = P = 20$ кН (знак «+», т. к. сила P стремится повернуть сечение по ходу часовой стрелки).

Третий участок $0 \leq z_3 \leq 4$ м.

$$Q_3 = q \cdot z_3. \text{ При } z_3 = 0, Q_3 = 0, z_3 = 4 \text{ м, } Q_3 = 40 \text{ кН.}$$

Четвертый участок $0 \leq z_4 \leq 6$ м.

$$Q_4 = -P = -20 \text{ кН.}$$

Эпюра поперечных сил показана на рис. 25, в. Из эпюры видно, что горизонтальная реакция заземления $H_A = 20$ кН и направлена вправо.

Построение эпюры M_x .

Первый участок $0 \leq z_1 \leq 3$ м.

$M_1 = M = 40$ кН·м (сжатым является правое волокно в сечении, поэтому ордината отложена вправо от оси стойки).

Второй участок $0 \leq z_2 \leq 3$ м.

$$M_2 = M - P \cdot z_2. \text{ При } z_2 = 3 \text{ м } M_2 = -20 \text{ кН·м.}$$

Третий участок $0 \leq z_3 \leq 4$ м.

$M_3 = M - P \cdot 3 - q \cdot z_3 \cdot z_3 / 2$. При $z_3 = 0$, $M_3 = -20$ кН·м, $z_3 = 4$ м, $M_3 = -100$ кН·м (сжаты нижние волокна). Эпюра изгибающих моментов имеет вид квадратичной параболы.

Четвертый участок $0 \leq z_4 \leq 6$ м.

В верхнем левом углу стойки $M_4 = M - P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 = -100$ кН·м.

В опоре А $M_A = M + P \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 = 20$ кН·м.

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 25, г. Реактивный момент в защемлении $M_A = 20$ кН·м.

Проверка правильности определения реакций из уравнений статики.

$$\sum X = 0, H_A - P = 20 - 20 = 0;$$

$$\sum Y = 0, R_A - q \cdot 4 = 40 - 10 \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M = 0, M_A + q \cdot 4 \cdot 2 - P \cdot 3 - M = 20 + 10 \cdot 4 \cdot 2 - 20 \cdot 3 - 40 = 0.$$

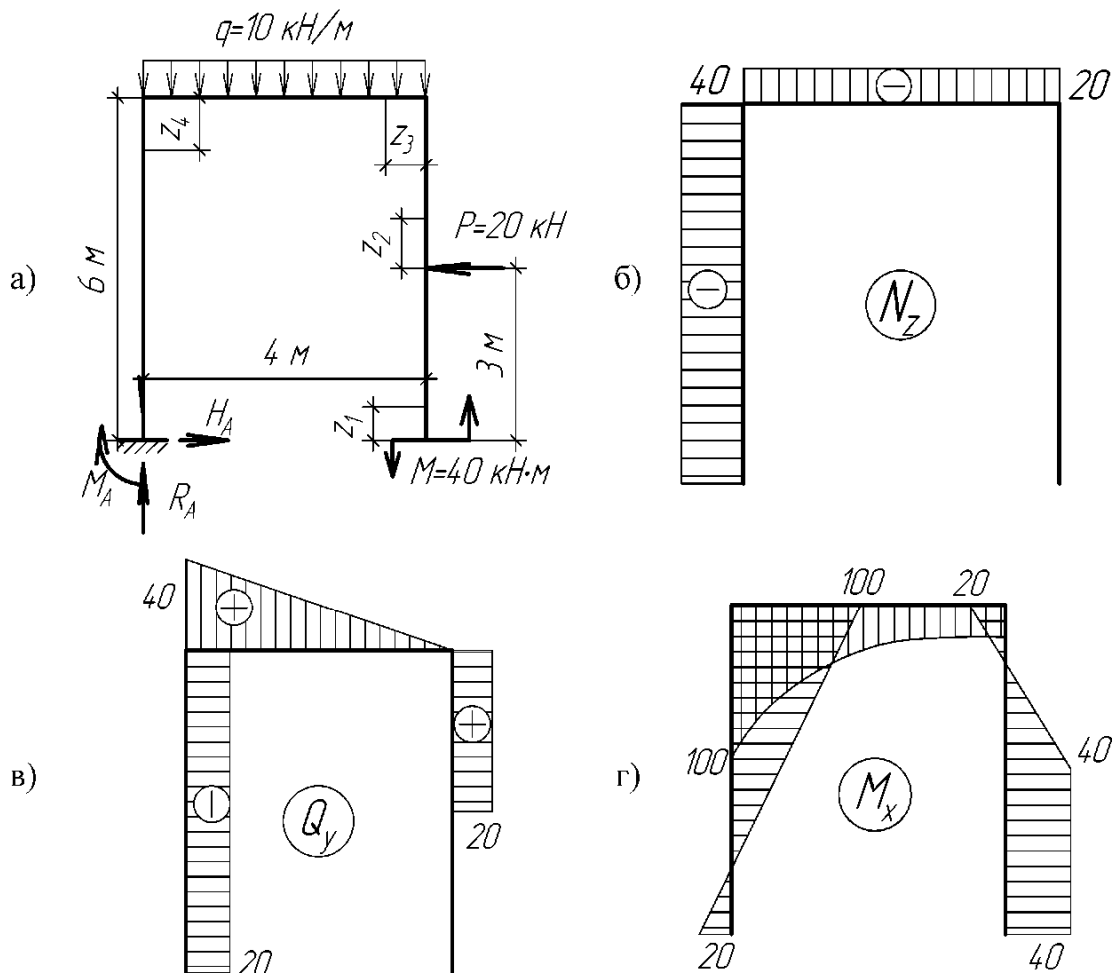


Рис. 25. Пример построения эпюр внутренних силовых факторов в жестко защемленной раме

Рассмотрим раму на двух шарнирных опорах (рис. 26, а). Определим реакции в опорах рамы из уравнений статики

$$\sum X = 0, H_A - P = 0 \Rightarrow H_A = 20 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0, q \cdot 4 \cdot 2 - P \cdot 3 - M - R_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_B = -5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - P \cdot 3 - M = 0 \Rightarrow R_A = 45 \text{ кН}.$$

Построение эпюры N_z .

Первый участок $0 \leq z_1 \leq 6$ м.

$$N_1 = -R_B = -45 \text{ кН (сжатие)}.$$

Второй участок $0 \leq z_2 \leq 4$ м.

$$N_2 = -H_A = -20 \text{ кН (сжатие)}.$$

Третий участок $0 \leq z_3 \leq 3$ м.

$$N_3 = R_B = 5 \text{ кН (растяжение)}.$$

Четвертый участок $0 \leq z_4 \leq 3$ м.

$$N_4 = R_B = 5 \text{ кН}.$$

Эпюра продольных сил представлена на рис. 26, б.

Построение эпюры Q_y .

Первый участок $0 \leq z_1 \leq 6$ м.

$$Q_1 = -H_A = -20 \text{ кН}.$$

Второй участок $0 \leq z_2 \leq 4$ м.

$$Q_2 = R_A - q \cdot z_2. \text{ При } z_2 = 0 \text{ } Q_2 = 45 \text{ кН, при } z_2 = 4 \text{ м } Q_2 = 5 \text{ кН}.$$

Третий участок $0 \leq z_3 \leq 3$ м.

$$Q_3 = 0.$$

Четвертый участок $0 \leq z_4 \leq 3$ м.

$$Q_4 = P = 20 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил показана на рис. 26, в.

Построение эпюры M_x .

Первый участок $0 \leq z_1 \leq 6$ м.

$$M_1 = H_A \cdot z_1 \text{ (сжаты правые волокна стойки)}. \text{ При } z_1 = 6 \text{ м } M_1 = 120 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Второй участок $0 \leq z_2 \leq 4$ м.

$$M_2 = H_A \cdot 6 - q \cdot z_2 \cdot z_2 / 2. \text{ При } z_2 = 4 \text{ м } M_2 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Третий участок $0 \leq z_3 \leq 3$ м.

$$M_3 = M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м (сжаты правые волокна стойки)}.$$

Четвертый участок $0 \leq z_4 \leq 3$ м.

$$M_4 = M - P \cdot z_4. \text{ При } z_4 = 3 \text{ м } M_4 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 26, г.

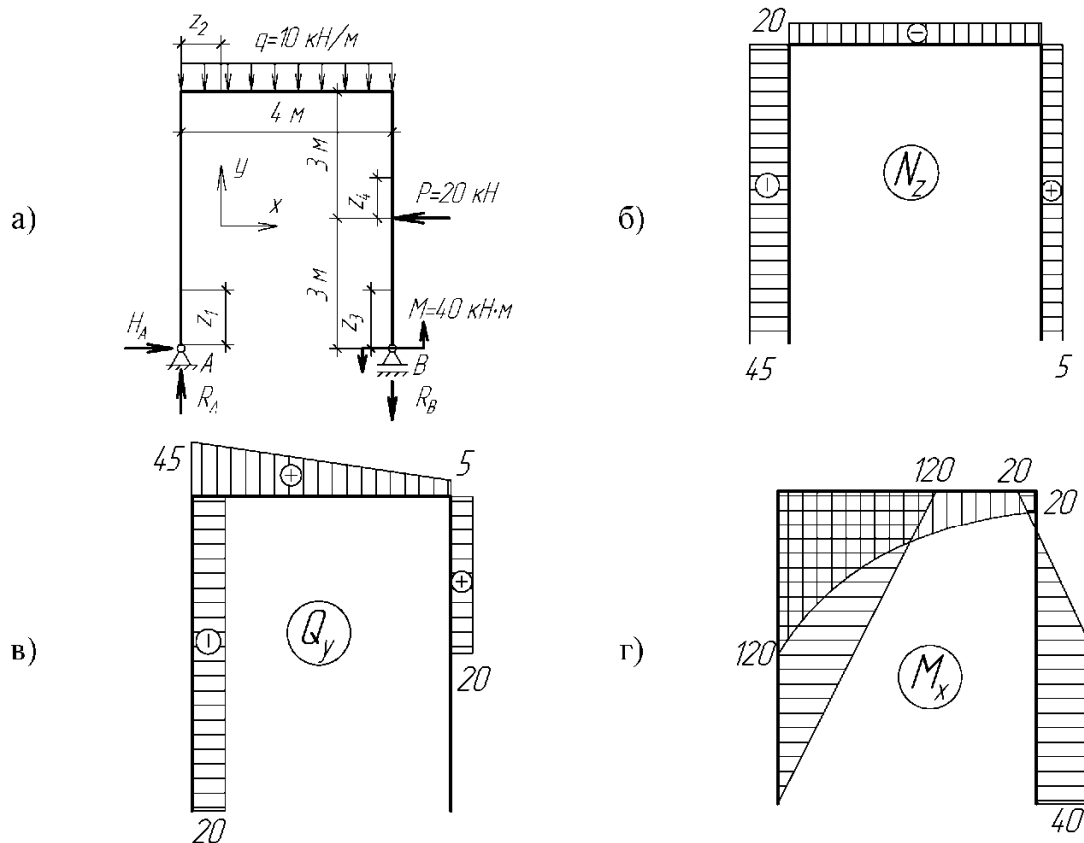


Рис. 26. Пример построения эпюр внутренних силовых факторов в раме на двух шарнирных опорах

ЗАДАЧА № 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ

Требуется: для заданной схемы статически определимой балки определить вертикальное перемещение указанного сечения (y_D или y_E) и угол поворота сечения в одной из опор балки (θ_A или θ_B), используя графоаналитический метод.

Условия задания:

Балка загружена силой P и моментом M . Расчетные схемы представлены на рис. 27, числовые данные в табл. 8.

Последовательность выполнения задания:

1. Начертить расчетную схему балки с размерами и значениями внешних нагрузок.
2. Начертить грузовую эпюру M_p – эпюру изгибающих моментов от заданных внешних сил.
3. Составить единичное состояние. Начертить единичную эпюру \overline{M}_i изгибающих моментов.

4. Перемещения в балке определить методом перемножения эпюр. Выражения для площадей эпюр и положения центров тяжести приведены в табл. 9. Выражения интеграла Мора для различных сочетаний единичных и грузовых эпюр приведены в табл. 9 а.

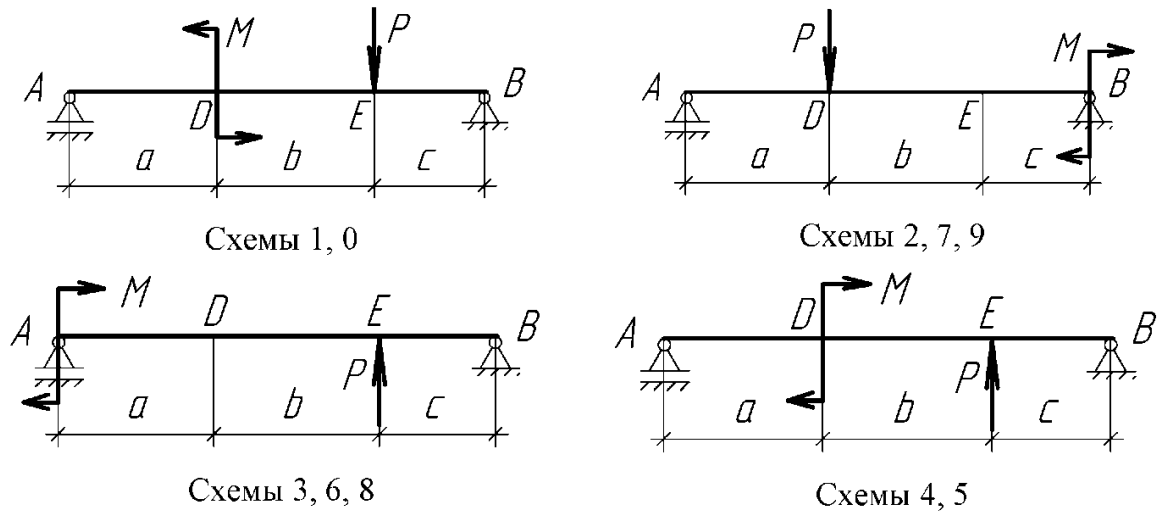


Рис. 27. Расчетные схемы к задаче № 8

Таблица 8

Числовые данные к задаче № 8

№ схемы	№	P , кН	M , кН·м	Угол	№	a , м	b , м	c , м	Сечение
1	10	6,0	4,0	θ_A	100	1,2	1,4	1,4	E
2	20	8,0	6,0	θ_B	200	1,4	1,6	1,2	D
3	30	4,0	8,0	θ_A	300	1,6	1,2	1,8	E
4	40	10,0	4,0	θ_B	400	1,0	1,8	1,2	D
5	50	6,0	10,0	θ_A	500	1,2	1,4	1,6	E
6	60	8,0	6,0	θ_B	600	1,8	1,6	1,2	D
7	70	4,0	8,0	θ_A	700	1,4	1,0	1,6	E
8	80	10,	4,0	θ_B	800	1,6	1,4	1,2	D
9	90	6,0	8,0	θ_A	900	1,8	1,2	1,0	E
0	00	8,0	6,0	θ_B	000	1,0	1,6	1,4	D

Таблица 9

Геометрические характеристики эюр

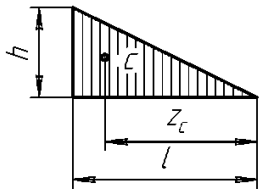
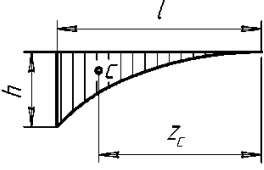
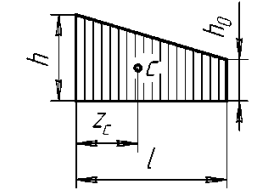
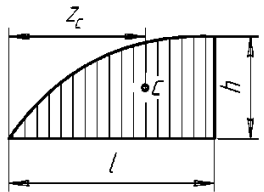
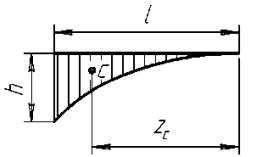
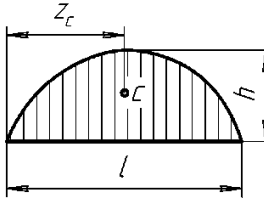
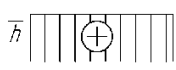

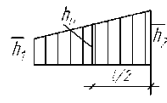
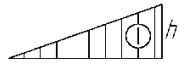

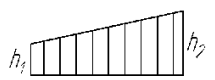
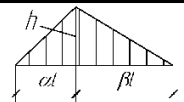
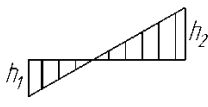
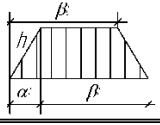
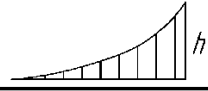
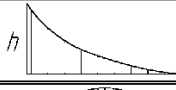

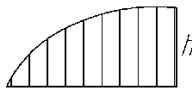
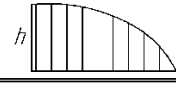
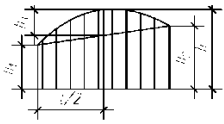
Эюра изгибающего момента	Площадь ω	Координата центра тяжести z_c	Эюра изгибающего момента	Площадь ω	Координата центра тяжести z_c
	$\frac{hl}{2}$	$\frac{2}{3}l$	Кубическая парабола 	$\frac{hl}{4}$	$\frac{4}{5}l$
	$\frac{(h+h_0)}{2}l$	$\frac{h+h_0}{3(h+h_0)}l$		$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$
Квадратичная парабола 	$\frac{hl}{3}$	$\frac{3}{4}l$		$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$

Таблица 9 а

Выражения интеграла Мора $\int \bar{M}_i M_p dz$ для различных сочетаний эюр

Эюра \bar{M}_i			
Эюра M_p	1	2	3
	$\frac{1}{2}h\bar{h}l$	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}h(\bar{h}_1 + 2\bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{1}{2}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}h(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{1}{2}(h_1 + h_2)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}(h_1 + 2h_2)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}[h_1(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) + h_2(2\bar{h}_2 + \bar{h}_1)] \cdot l$
	$\frac{1}{2}h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}(1 + \alpha)h\bar{h}l$	$\frac{1}{6}[(1 + \beta)\bar{h}_1 + (1 + \alpha)\bar{h}_2] \cdot hl$

Продолжение таблицы 9, а

1	2	3	4
	$\frac{1}{2}(h_2 - h_1)\bar{h}l$	$\frac{1}{6}(2h_2 - h_1)\bar{h} \cdot l$	$\frac{1}{6}[h_2(2\bar{h}_2 + \bar{h}_1) - h_1(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2)] \cdot l$
	$h\bar{h} \beta \cdot l$	$\frac{1}{2}h\bar{h} \beta \cdot l$	$\frac{1}{2}h \cdot (\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \cdot \beta \cdot l$
	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{4}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h(\bar{h}_1 + 3\bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h(3\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{2}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{3}h(\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{2}{3}h\bar{h}l$	$\frac{5}{12}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h(3\bar{h}_1 + 5\bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{2}{3}h\bar{h}l$	$\frac{1}{4}h\bar{h}l$	$\frac{1}{12}h(5\bar{h}_1 + 3\bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{1}{6}\bar{h}(h_1 + h_2 + 4h) \cdot l$	$\frac{1}{6}\bar{h}(h_2 + 2h) \cdot l$	$\frac{1}{6}(\bar{h}_1 h_1 + 4h\bar{h}_0 + h_2 \bar{h}_2) \cdot l$

Пример решения задачи № 8

Расчетная схема балки показана на рис. 28, а. Требуется определить вертикальное перемещение в сечении D (прогиб y_D) и угол поворота сечения над опорой A (θ_A).

Определяем прогиб балки в сечении D . Строим грузовую эпюру (M_P) изгибающих моментов от внешнего момента M (рис. 28, б).

Составляем единичное состояние. В сечение D устанавливаем единичную сосредоточенную силу и строим единичную эпюру \bar{M} (рис. 28, г). Максимальный изгибающий момент под единичной нагрузкой составит

$$\overline{M}_{\max} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Искомый прогиб в сечении

$$y_D = \frac{M_P \cdot \bar{M}}{EJ}.$$

Воспользуемся таблицей 10а для перемножения грузовой и единичной эпюры. Эпюры разбиваем на три участка (рис. 29), определяем ординаты, исходя из геометрических пропорций фигур.

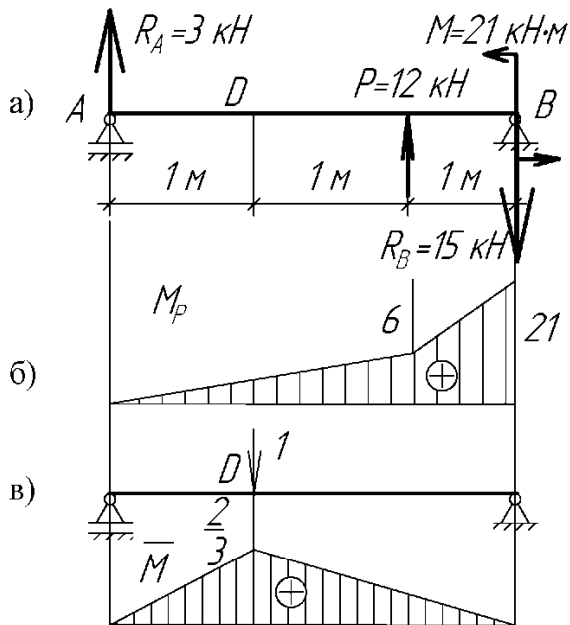


Рис. 28

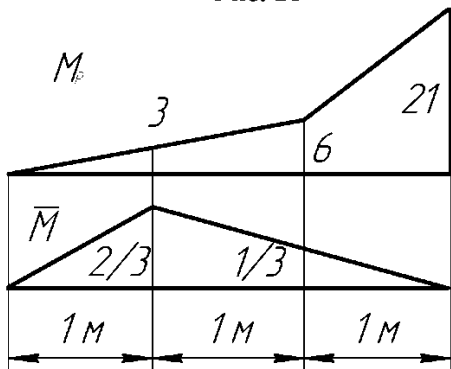
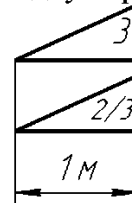


Рис. 29

Перемножение двух треугольников



дает следующий результат

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right) / EJ = \frac{2}{3EJ}$$

Перемножение двух трапеций:

$$\frac{1}{6} \left[3 \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + 6 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \right] \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{7}{2EJ}$$

Перемножение трапеции и треугольника

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} (2 \cdot 6 + 21) \frac{1}{EJ} = \frac{11}{6EJ}$$

Окончательно прогиб в сечении D:

$$y_D = \frac{M_P \cdot \bar{M}}{EJ} = \frac{2}{3EJ} + \frac{7}{2EJ} + \frac{11}{6EJ} = \frac{6}{EJ} \text{ м.}$$

Положительный знак прогиба указывает на то, что направление единичной силы совпадает с направлением прогиба. Если результат перемножения эпюр получается отрицательным, следовательно, направление прогиба не совпадает с направлением единичной силы.

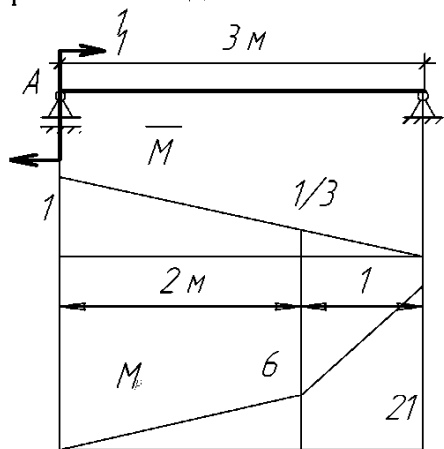


Рис. 30

При определении угла поворота сечения в это сечение устанавливают единичный момент сил – единичное состояние. Т. к. мы определяем угол поворота сечения балки над опорой, то единичное состояние и единичная эпюра \bar{M} выглядят так, как указано на рис. 30. Угол поворота найдем перемножением единичной и грузовой эпюр:

$$\theta_A = \frac{M_p \cdot \bar{M}}{EJ}$$

$$\theta_A = \frac{M_p \cdot \bar{M}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \right) \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} (2 \cdot 6 + 21) \cdot 1 \right] = \frac{13}{2EJ}$$

ЗАДАЧА № 9. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

Требуется: для заданной схемы балки определить реакции в шарнирных опорах, построить эпюры внутренних силовых факторов.

Условия задания:

Расчетные схемы один раз статически неопределимых балок представлены на рис. 31, числовые данные в табл. 10.

Последовательность выполнения задания:

1. Начертить расчетную схему балки с размерами и значениями внешних нагрузок.
2. Выбрать основную систему. Написать каноническое уравнение метода сил.
3. Построить эпюры изгибающих моментов от единичных сил, от внешних нагрузок и вычислить при помощи правила Верещагина все необходимые перемещения, входящие в каноническое уравнение.
4. Найти величину «лишней» неизвестной, решив каноническое уравнение.
5. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

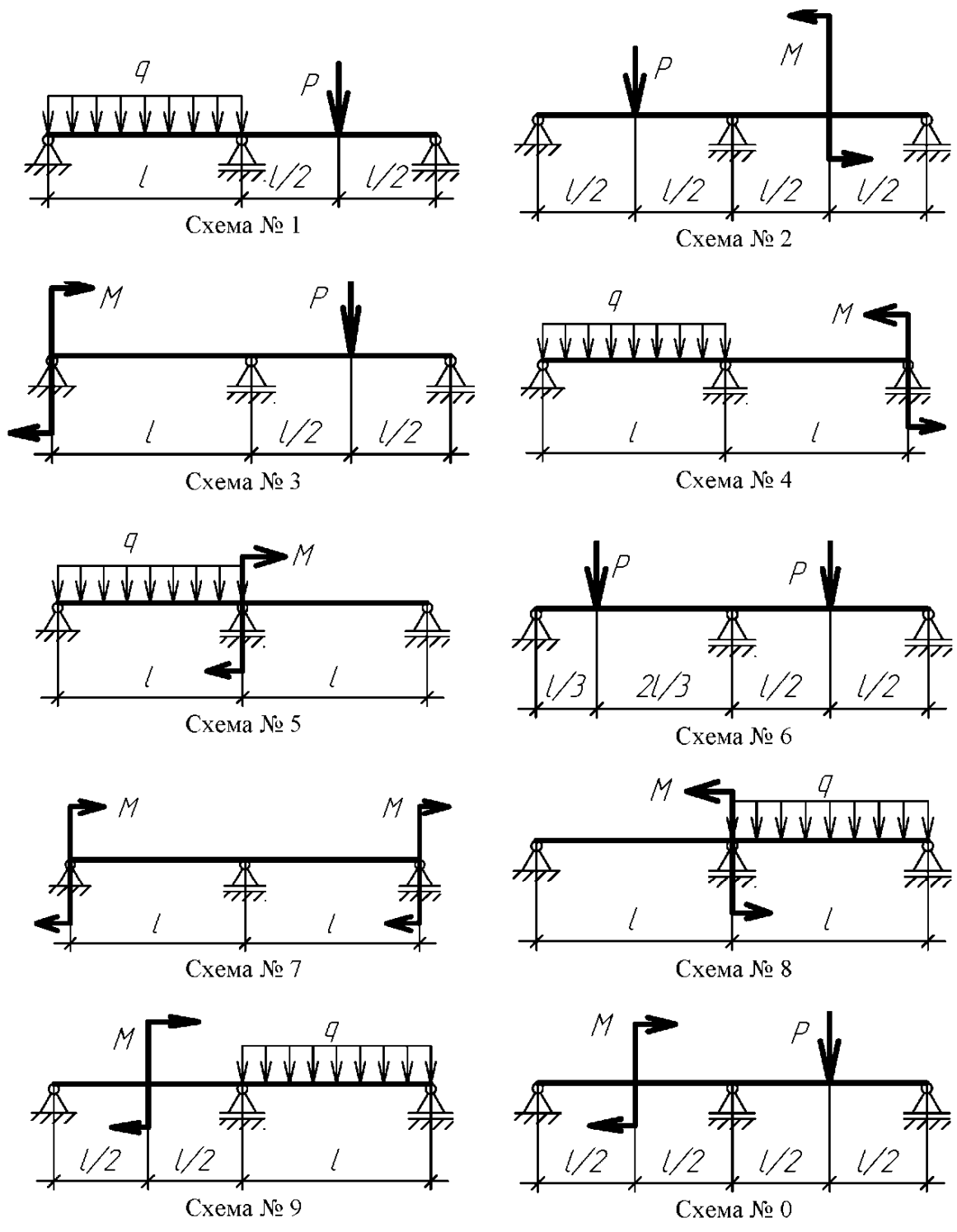


Рис. 31. Расчетные схемы к задаче № 9

Числовые данные к задаче № 9

№ схемы	№	P , кН	M , кН·м	№	q , Н/м	l , м
1	10	18	6	100	10	1,4
2	20	20	8	200	12	1,6
3	30	22	10	300	14	1,8
4	40	24	12	400	16	2,0
5	50	26	14	500	18	2,2
6	60	28	16	600	18	2,4
7	70	30	14	700	20	2,6
8	80	28	12	800	22	2,8
9	90	26	10	900	24	3,0
0	00	24	8	000	26	3,2

Пример решения задачи № 9

Дано $l = 1,8$ м, $P = 10$ кН, $M = 12$ кН·м.

Схема балки показана на рис. 32, а. На рис. 32, б приведена основная система, которая получена путем удаления "лишней" связи (опоры B) и размещения на ее месте шарнира.

Шарнир позволяет двум частям балки поворачиваться, что приводит к возникновению моментов X равных по величине, но противоположно направленных. К основной системе прикладываем неизвестные моменты X , заданные нагрузки и получаем эквивалентную систему (рис. 32, в).

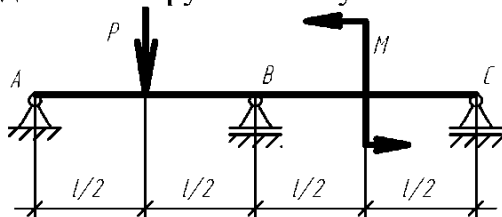


Рис. 32, а. Заданная система

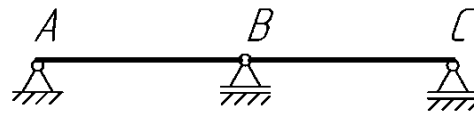


Рис. 32, б. Основная система

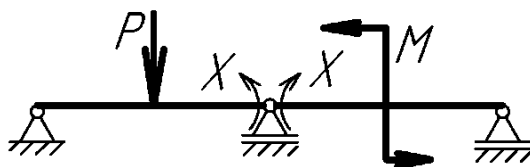


Рис. 32, в. Эквивалентная система

Каноническое уравнение метода сил для один раз статически неопределимой балки будет записано в следующем виде $X \cdot \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0$.

Для определения неизвестных моментов рассчитаем коэффициенты в каноническом уравнении, используя правило Верещагина.

Для определения коэффициента δ_{11} строим единичную эпюру. Для этого вместо неизвестных моментов X устанавливаем единичные моменты $\bar{X} = 1$ (рис. 33). Искомый коэффициент определится по формуле $\delta_{11} = 2(\omega \cdot y_c)$, где ω – площадь единичной эпюры как прямоугольного треугольника со сторонами 1 Н·м и 1,8 м, y_c – ордината центра тяжести единичной эпюры.

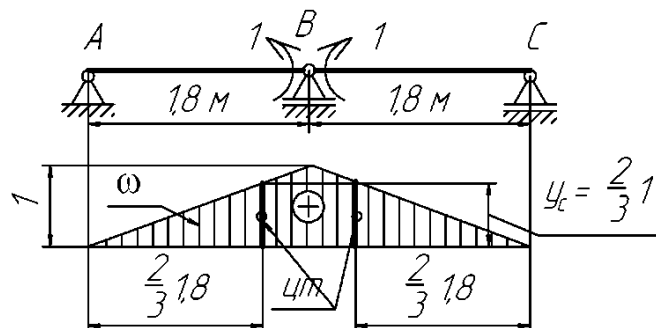


Рис. 33. Эпюра изгибающих моментов от единичных моментов

Исходя из пропорций в треугольном треугольнике $y_c = 2/3$. После подстановки известных величин получим $\delta_{11} = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right) = 1,2$.

Для определения коэффициента Δ_{1p} строим эпюры изгибающих моментов от заданных нагрузок (рис. 34) и производим перемножение грузовых (а) и единичной эпюры (б).

$\Delta_{1p} = \omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4$, где $\omega_1, \dots, \omega_4$ – площади эпюр изгибающих моментов от заданных внешних нагрузок (рис. 34, а), y_1, \dots, y_4 – ординаты центров тяжести грузовых эпюр, взятых с единичной эпюры (рис. 33, б).

После подстановки известных величин получим $\Delta_{1p} = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 0,9 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 0,9 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,9 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,9 \cdot \frac{2}{3} = \frac{17,55}{6}$.

Из канонического уравнения находим выражение для неизвестного момента $X = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}$. Подставляем найденные коэффициенты в полученное выражение и получаем $X = -2,44$ кН·м. Значение момента получилось со знаком «минус», поэтому направление момента X меняем на противоположное.

Определять коэффициенты в каноническом уравнении можно также, используя табличные выражения (табл. 9, а).

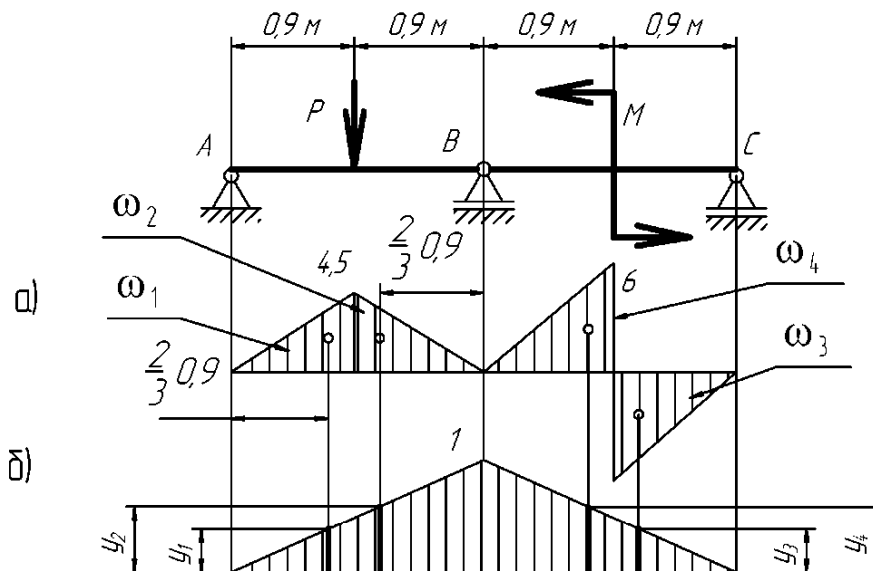


Рис. 34. Схема определения коэффициента Δ_{1P}

Разбиваем заданную балку на две фиктивные балочки, для каждой балочки определяем реакции в опорах, строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Схема балочки № 1 показана на рис. 35.

Из уравнений статики определяем реакции в опорах 1-й фиктивной балочки.

$$\sum m_A = 0, \quad -X - P \cdot 0,9 + R'_B \cdot 1,8 = 0, \quad \Rightarrow \quad R'_B = \frac{9 + 2,44}{1,8} = 6,36 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = 0, \quad -R_A \cdot 1,8 + P \cdot 0,9 - X = 0, \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{9 - 2,44}{1,8} = 3,64 \text{ кН.}$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов представлены на рис. 35.

Схема второй фиктивной балочки показана на рис. 36. Реакции в опорах определим из уравнений статики по аналогии с первой балочкой. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов 2-й балочки приведены на рис. 36.

Окончательная схема неразрезной балки с эпюрами внутренних силовых факторов получается путем соединения схем фиктивных балок (рис. 37).

Реакции в балке составят: $R_A = 3,64 \text{ кН}$, $R_B = R'_B + R''_B = 6,36 + 8,02 = 14,38 \text{ кН}$, $R_C = 8,02 \text{ кН}$.

Проверка правильности определения реакций $\sum y = 0$.
 $R_A + R_B - R_C - P = 3,64 + 14,38 - 8,02 - 10 = 0$ – сумма вертикальных сил, приложенных к балке равна нулю, следовательно, реакции определены верно. Примерный вид изогнутой оси балки представлен на рис. 37.

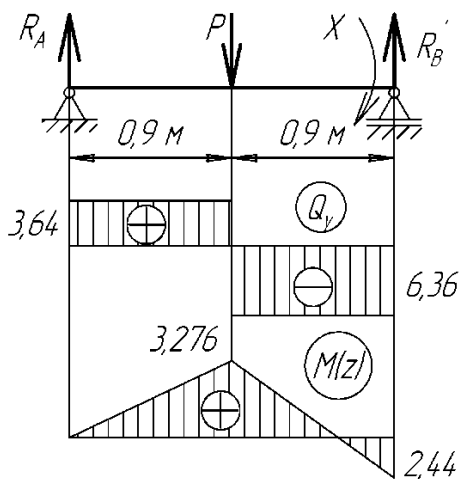


Рис. 35. Балочка № 1

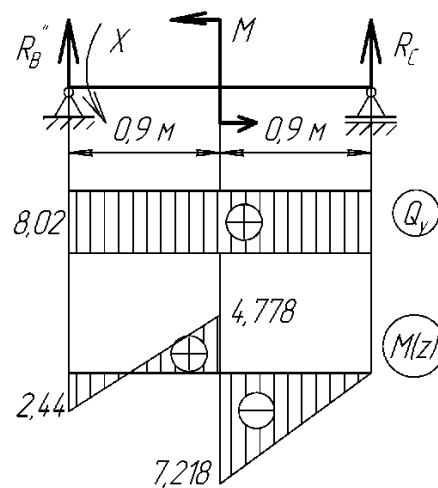


Рис. 36. Балочка № 2

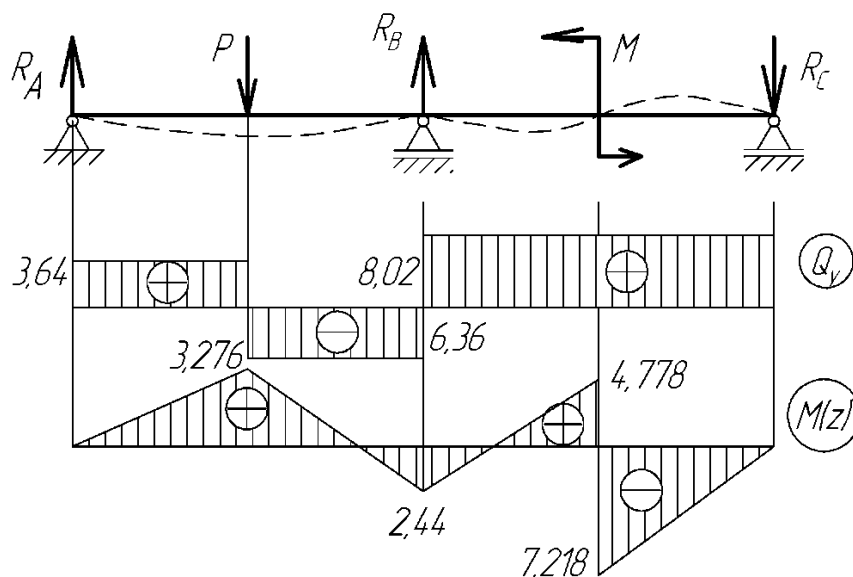


Рис. 37. Расчетная схема неразрезной статически неопределимой балки с эпюрами внутренних силовых факторов

ЗАДАЧА № 10. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ

Требуется: для короткого стержня, сжимаемого силой P в заданном полюсе, вычислить максимальные напряжения в сечении, найти допускаемую нагрузку P при заданных размерах сечения и расчетных сопротивлениях материала на сжатие $[\sigma_c]$ и на растяжение $[\sigma_p]$.

Условия задания:

Схемы сечений заданы на рис. 38, числовые данные в табл. 11.

Последовательность выполнения задания:

1. Начертить схему сечения с заданными размерами и определить положение центра тяжести сечения.
2. Определить геометрические характеристики сечения: площадь, осевые моменты инерции, радиусы инерции.

3. Рассчитать положение нейтральной линии и нанести ее на сечение.
4. Определить максимальные растягивающие и сжимающие напряжения в опасных точках сечения.
5. Составить условия прочности по нормальным растягивающим и сжимающим напряжениям.
6. Определить величину допускаемой нагрузки P .

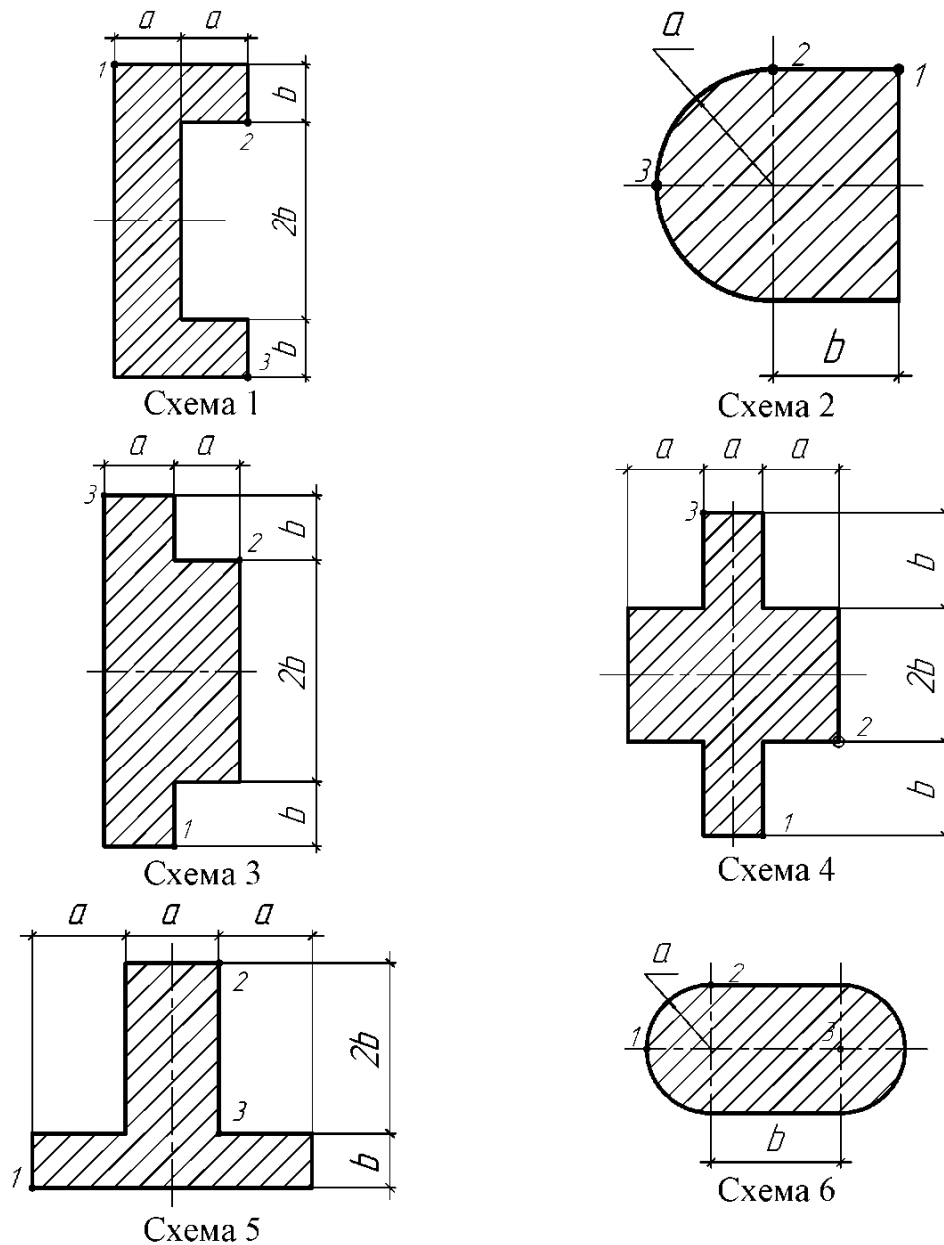


Рис. 38. Расчетные схемы к задаче № 10

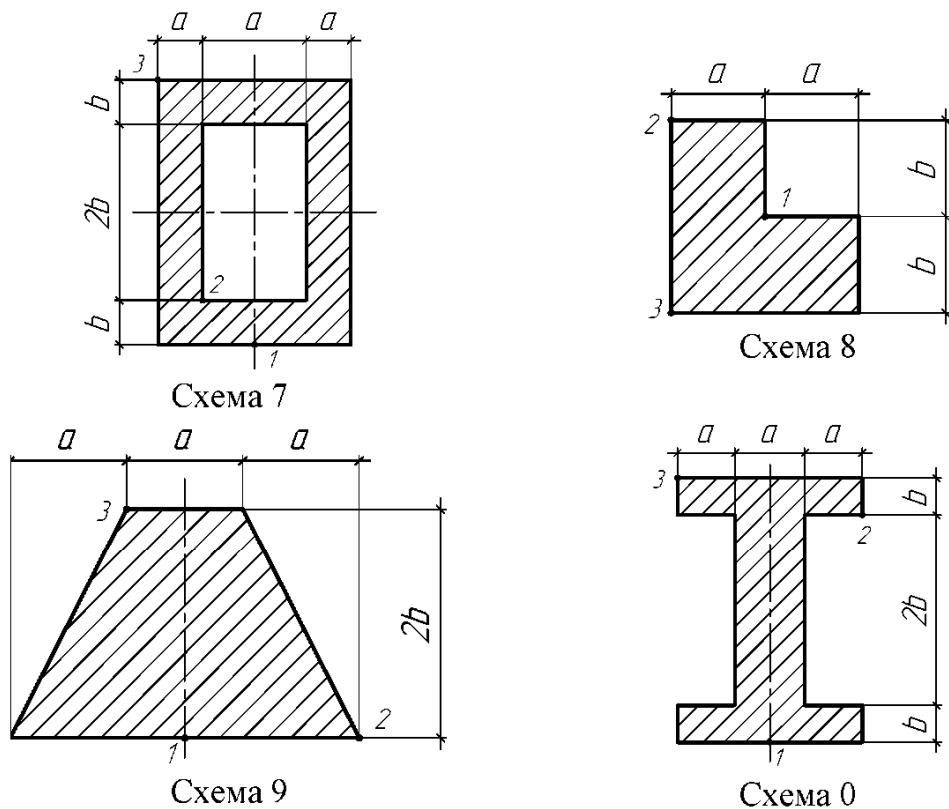


Рис. 38. Расчетные схемы к задаче № 10 (окончание)

Таблица 11

Числовые данные к задаче № 10

№ схемы	№	a , см	b , см	Полюс силы	№	$[\sigma_c]$, МПа	$[\sigma_p]$, МПа
1	10	5	5	1	100	60	21
2	20	6	6	2	200	70	22
3	30	3	3	3	300	80	23
4	40	4	4	1	400	90	24
5	50	5	5	2	500	100	25
6	60	6	6	3	600	110	26
7	70	3	3	1	700	120	27
8	80	4	4	2	800	130	28
9	90	5	5	3	900	140	29
0	00	6	6	1	000	150	30

Пример решения задачи № 10

Короткий стержень, сечение которого изображено на рис. 39, находится под действием сжимающей силы P , полюс которой расположен в точке 1.

$$[\sigma_c] = 70 \text{ МПа}, [\sigma_p] = 20 \text{ МПа}.$$

1. Определим положение центра тяжести, разбив сечение на простые фигуры. Сечение симметрично относительно горизонтальной оси, поэтому $Y_c = 15$ см. Положение координаты X_c определим через статические моменты

$$X_c = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2,5 + 10 \cdot 30 \cdot 10 + 5 \cdot 5 \cdot 2,5}{5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 10 \cdot 30} = 8,929 \text{ см.}$$

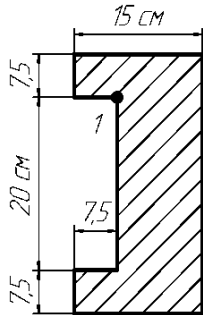


Рис. 39

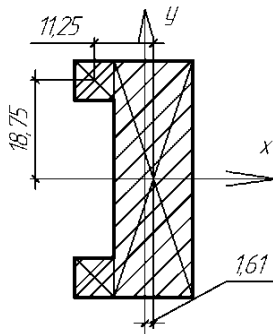


Рис. 40

2. Определим геометрические характеристики сечения.

Площадь сечения $F = 350 \text{ см}^2$.

Момент инерции $J_x = 30416,7 \text{ см}^4$.

Момент инерции $J_y = 5760,14 \text{ см}^4$.

Радиус инерции $i_x = 9,32 \text{ см}$.

Радиус инерции $i_y = 4,06 \text{ см}$.

3. Определим положение нейтральной

линии, используя формулы $x_0 = -\frac{i_y^2}{x_p}$ и $y_0 = -\frac{i_x^2}{y_p}$,

где $y_p = 10$ см, $x_p = 3,93$ см – координаты полюса силы P . $x_0 = -4,19$ см, $y_0 = -8,68$ см.

Наносим вычисленные координатные отрезки на оси и получаем положение нейтральной линии (рис. 41).

4. Вычисляем наибольшее растягивающее и сжимающее напряжение. Опасными точками сечения являются точки A и B , которые наиболее удалены от нейтральной линии. Координаты точки A относительно центра тяжести $x_A = 6,07$ см, $y_A = 15$ см, координаты точки B $x_B = -8,93$ см, $y_B = -15$ см.

Напряжения в точке A вычисляем по формуле:

$$y_A = y_{\min} = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_p \cdot x_A}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y_A}{x_x^2} \right) = -\frac{P}{350} \left(1 + \frac{3,93 \cdot 6,07}{4,06^2} + \frac{10 \cdot 15}{9,32^2} \right) \cdot 10^4 =$$

$$= -119,26P \text{ кН.}$$

$$\text{Напряжения в точке } B \quad y_B = y_{\max} = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_p \cdot x_B}{i_y^2} + \frac{y_p \cdot y_B}{x_x^2} \right) =$$

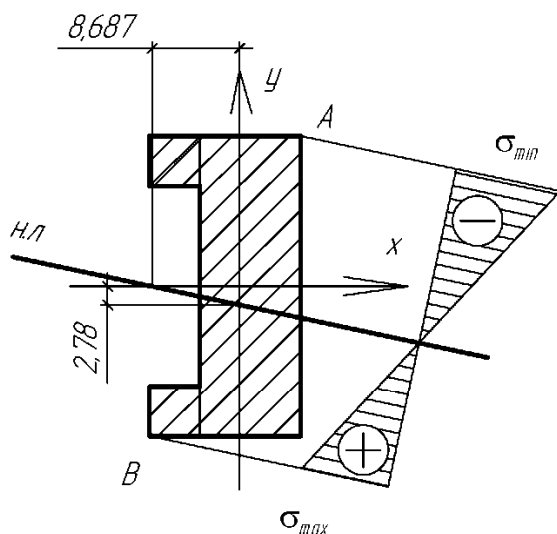
$$= -\frac{P}{350} \left(1 - \frac{3,93 \cdot 8,93}{4,06^2} - \frac{10 \cdot 15}{9,32^2} \right) \cdot 10^4 = 81,6P \text{ кН.}$$

5. Составим условие прочности по максимальным и минимальным нормальным напряжениям

$$\sigma_A = \sigma_{\min} \leq [\sigma_c], \quad \sigma_B = \sigma_{\max} \leq [\sigma_p].$$

6. Определим величину допускаемой нагрузки P .

$$[P] = \frac{[\sigma_c]}{\sigma_A} = \frac{20 \cdot 10^6}{119,26 \cdot 10^3} = 0,167 \text{ кН. } [P] = \frac{[\sigma_p]}{\sigma_B} = \frac{70 \cdot 10^6}{81,6 \cdot 10^3} = 0,86 \text{ кН.}$$



За допустимую нагрузку принимаем наименьшее значение, т.е. $[P] = 0,167 \text{ кН.}$

На эпюре нормальных напряжений (рис. 41) в сечении значения напряжений равны $\sigma_{max} = 13,63 \text{ МПа, } \sigma_{min} = 19,9 \text{ МПа}$

Рис. 41. Эпюра распределения нормальных напряжений в сечении стержня при внецентренном сжатии

ЗАДАЧА № 11. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ

Требуется: для стержня длиной l с заданной формой поперечного сечения, сжатого силой P подобрать размеры поперечного сечения с использованием коэффициентов снижения допустимого напряжения.

Условия задания:

Числовые данные в табл. 12, расчетные схемы заданы на рис. 42,.

Таблица 12

Числовые данные к задаче № 11

№	Задача № 1		№	Схема стойки	Схема сечения
	P , кН	l , м			
1	2	3	4	5	6
100	15	1,6	10	10	1
200	70	1,8	20	20	2
300	40	4,0	30	30	3
400	50	1,6	40	40	4
500	40	5	50	50	5
600	13	3,5	60	60	6
700	30	1	70	70	7
800	8	3	80	80	8
900	100	1,3	90	90	9
000	160	2	00	00	0

1. Основные допускаемые напряжения: для стали $[\sigma] = 160$ МПа, для чугуна $[\sigma] = 100$ МПа, для сосны $[\sigma] = 10$ МПа.

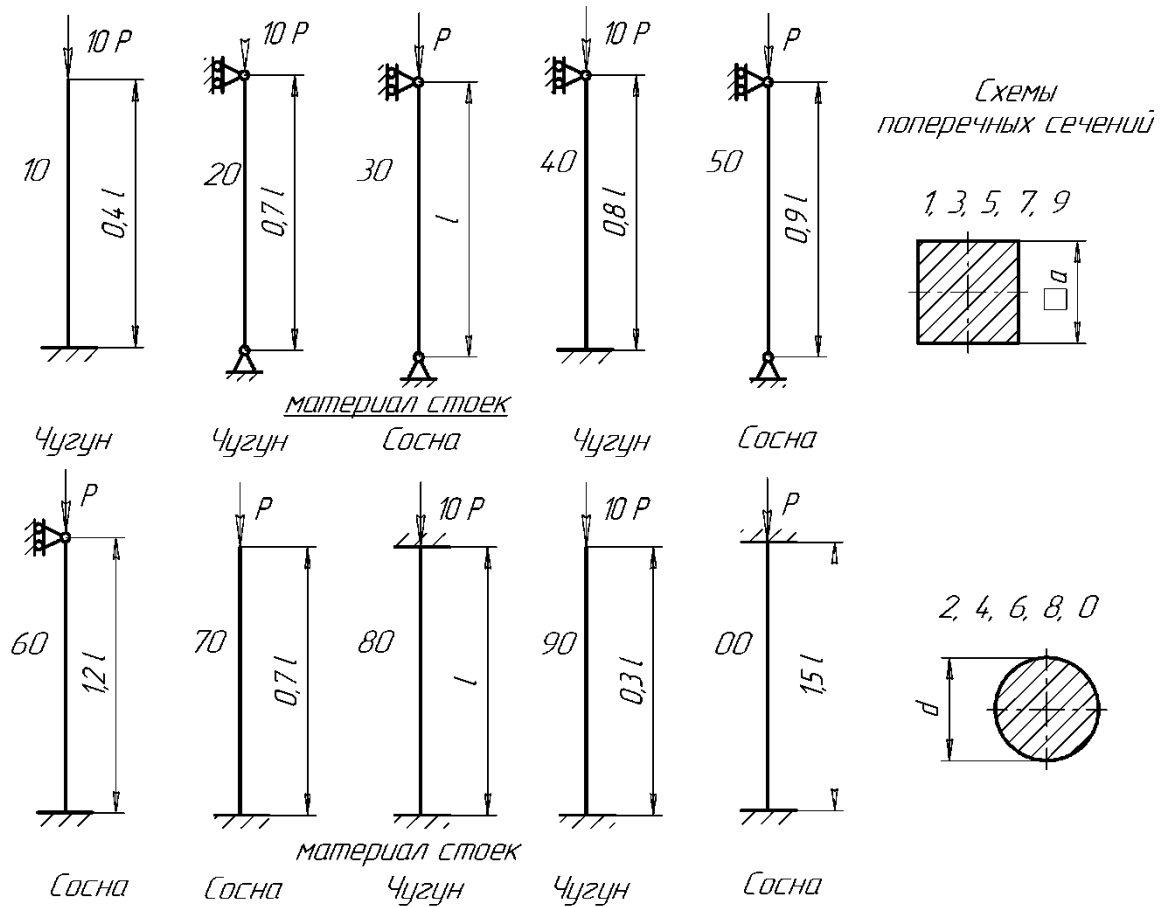


Рис. 42. Расчетные схемы к задаче № 11

Методические указания к задаче № 11

1. Вычертить расчетную схему сжатой стойки и эскиз профиля поперечного сечения.

2. Размеры поперечного сечения выбирают в соответствии с действующими стандартами:

а) для древесины круглого профиля – в целых сантиметрах;

б) для древесины квадратного профиля – сторона квадрата, мм – 25, 32, 40, 50, 60, 75, 100, 130, 150, 180, 200 и 220;

в) для стоек из чугуна, мм – 28, 32, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 250, 280 и 320.

3. При расчетах на устойчивость поперечные размеры центрально сжатого стержня выбирают по формуле: $\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y] = \phi[\sigma]$, где P – сжимающая сила,

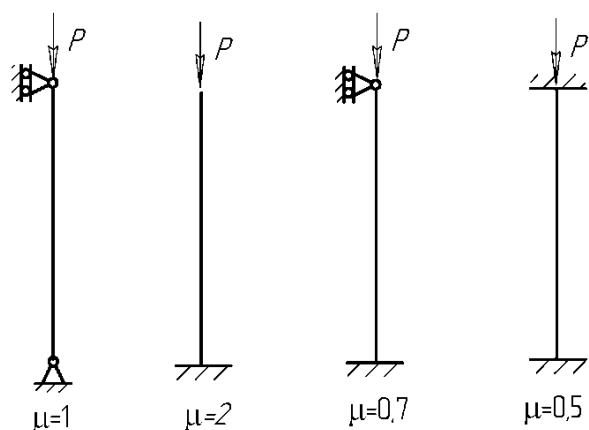
F – площадь поперечного сечения, $[\sigma_y]$ – допускаемое напряжение при расчетах на устойчивость, $[\sigma]$ – допустимое напряжение при расчетах на сжатие, φ – коэффициент уменьшения допускаемых напряжений.

Так как $[\sigma_y]$ и φ зависят от длины стержня, способа крепления концов, площади поперечного сечения и момента инерции, а кроме того эти зависимости разного вида для стержней большой, средней и малой гибкости, то из приведенного выше уравнения прямым расчетом невозможно определить F и назначить размеры поперечного сечения. Поэтому задачу подбора размеров поперечного сечения при расчетах на устойчивость решают методом последовательных приближений.

При первой попытке назначают $\varphi = 0,5$, вычисляют площадь F и выбирают размеры поперечного сечения, соответствующие этой площади.

Далее проверяют пригодность выбранных размеров. Для этого:

- а) по принятым размерам вычисляют площадь поперечного сечения F ;
- б) вычисляют минимальный главный момент инерции J_{min} ;
- в) вычисляют минимальный радиус инерции $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$;



- г) вычисляют гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}$, где μ – коэффициент, учитывающий способ крепления стержня (рис. 43);

- д) по гибкости λ (табл. 13) находят величину коэффициента φ . Для неуказанных в таблице значений λ коэффициент φ определяют линейной интерполяцией:

Рис. 43. Схемы закрепления концов стержня

$$\varphi_{\lambda=a+b} = \varphi_{\lambda=a} - 0,1b \cdot (\varphi_{\lambda=a} - \varphi_{\lambda=a+10}).$$

- е) вычисляют допускаемые напряжения на устойчивость $[\sigma_y] = \varphi[\sigma]$;
- ж) вычисляют величину напряжений сжатия $\sigma = \frac{P}{F}$;
- з) сопоставляют напряжения сжатия с допускаемыми напряжениями на устойчивость $\sigma \leq [\sigma_y]$;
- и) вычисляют расхождение напряжений $\delta = \frac{\sigma - [\sigma_y]}{[\sigma_y]} \cdot 100 \%$.

Если расхождение меньше 5 %, то выбранные размеры считают удовлетворительными и на этом заканчивают подбор размеров поперечного сечения. Если расхождение больше 5 %, то выбирают новые размеры поперечного сечения и повторяют проверку.

При второй и последующих попытках удобнее сразу назначать новые размеры поперечного сечения. Если напряжения σ больше допускаемых $[\sigma_y]$, то размеры поперечного сечения следует увеличить, и наоборот.

Площадь поперечного сечения при каждой следующей попытке удобнее изменять на величину $0,5F\delta$, где F – ранее выбранная площадь поперечного сечения, а δ – расхождение напряжений.

Расчеты производят до тех пор, пока не найдется такой размер, для которого расхождение напряжений будет меньше 5 %. Либо существуют два таких соседних стандартных размера, для меньшего из которых напряжения сжатия превышают допускаемые больше чем на 5 %, а для большего – напряжения сжатия меньше допускаемых с расхождением больше 5 %.

Таблица 13

Значения коэффициентов ϕ для разных материалов

Гибкость, λ	Сталь Ст. 3	Чугун	Дерево	Гибкость, λ	Сталь Ст. 3	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	110	0,52	0,13	0,25
10	0,99	0,97	0,99	120	0,45	0,11	0,22
20	0,96	0,91	0,97	130	0,40	0,10	0,18
30	0,94	0,81	0,93	140	0,36	0,08	0,16
40	0,92	0,69	0,87	150	0,32	0,07	0,14
50	0,89	0,57	0,80	160	0,29	–	0,12
60	0,86	0,44	0,71	170	0,26	–	0,11
70	0,81	0,34	0,60	180	0,23	–	0,10
80	0,75	0,26	0,48	190	0,21	–	0,09
90	0,69	0,20	0,38	200	0,19	–	0,08
100	0,60	0,16	0,31				

ЗАДАЧА № 12. РАСЧЕТ БАЛКИ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ

Требуется: определить максимальные напряжения в балке, испытывающей удар.

Условия задания: На балку падает груз массой m с высоты H . Расчетная схема балки представлена на рис. 44, числовые данные в табл. 14.

Последовательность выполнения задания:

1. Вычертить расчетную схему балку с указанием размеров.
2. В соответствии со схемой рассчитать максимальный статический прогиб.
3. Рассчитать величину динамического коэффициента.
4. Определить максимальные динамические напряжения в сечении балки.
5. Сравнить динамические напряжения с допускаемыми статическими $[\sigma] = 160$ МПа.

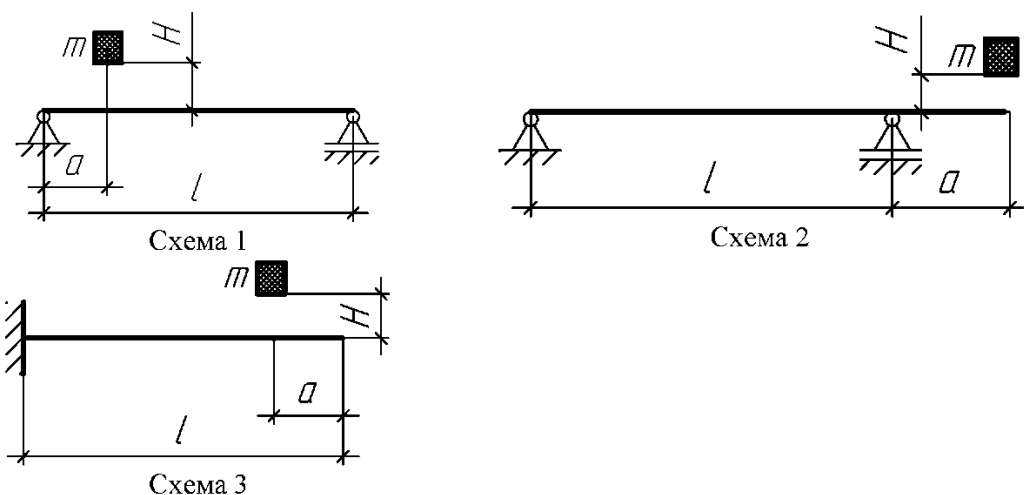


Рис. 44. Расчетные схемы к задаче № 12

Таблица 14

Числовые данные к задаче № 12

№ схемы	№	l , м	a , м	№	m , кг	H , см	№ двутавра
1	10	2,1	0,3	100	110	4	20
2	20	2,2	0,4	200	120	3	20а
3	30	2,3	0,5	300	130	2	24
1	40	2,4	0,6	400	140	1	24а
2	50	2,5	0,3	500	150	4	27
3	60	2,6	0,4	600	160	3	27а
1	70	2,7	0,5	700	170	2	30
2	80	2,8	0,6	800	180	1	30а
3	90	2,9	0,3	900	190	3	33
1	00	3,0	0,4	000	200	2	36

Пример решения задачи № 12

На двухопорную балку длиной $l = 3$ м падает груз массой $m = 300$ кг с высоты $H = 2$ см (рис. 45). Сечение балки – двутавр № 18. Определить максимальные напряжения в балке при ударе

1. Максимальный статический прогиб балки определяется по формуле $\delta_{ст} = \frac{Ql^3}{48EJ_x}$, где $Q = m \cdot g = 3$ кН.

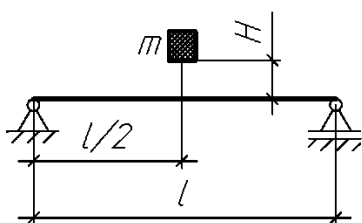


Рис. 45

$J_x = 1290$ см⁴ – осевой момент инерции двутавра, взятый из сортамента. $E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль упругости материала двутавра (сталь).

$$\delta_{ст} = \frac{3000 \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,654 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

2. Величина динамического коэффициента вычисляется по формуле $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{cm}}}$ и равен $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{0,654 \cdot 10^{-3}}} = 8,88$.

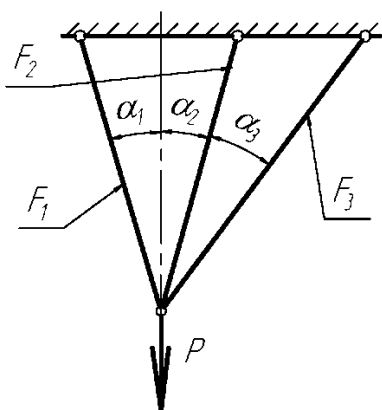
3. Динамические напряжения в балке определим по формуле $\sigma_d = k_d \cdot \sigma_c = k_d \frac{M_{max}}{W_x}$, где $M_{max} = (Q \cdot l)/4 = 2,25$ кН·м – максимальный изгибающий момент, действующий в сечении балки, $W_x = 143$ см³ – момент сопротивления двутавра, взятый из сортамента.

$\sigma_d = 8,88 \frac{2250}{143 \cdot 10^{-6}} = 139,7$ МПа, что меньше допускаемых напряжений $[\sigma] = 160$ МПа.

ЗАДАЧА № 13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Требуется: определить предельную продольную силу для каждого стержня.

Условия задания: Система состоит из трех стержней. Расчетная схема системы показана на рис. 46, числовые данные в табл. 15.



Предел текучести материала стержней $\sigma_T = 250$ МПа.

Последовательность выполнения задания:

1. Задаться возможными механизмами разрушения системы и изобразить каждый из них на схеме.

Рис. 46. Расчетная схема к задаче № 13

2. Составить уравнение предельного равновесия для каждого механизма и найти соответствующую предельную нагрузку P_{11}, P_{12}, P_{13} .
3. Установить предельную нагрузку для системы P_{II} .

Таблица 15

Числовые данные к задаче № 13

№	α_1 , град	α_2 , град	№	α_3 , град	F_1 , см ²	№	F_2 , см ²	F_3 , см ²
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	21	11	10	41	1,0	100	4,0	1,2
2	22	12	20	42	1,5	200	3,8	1,4
3	23	13	30	43	2,0	300	3,6	1,6
4	24	14	40	44	2,5	400	3,6	1,8

Продолжение таблицы 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	25	15	50	45	3,0	500	3,4	2,0
6	26	16	60	46	3,5	600	3,2	2,2
7	27	17	70	47	4,0	700	3,0	2,4
8	28	18	80	48	4,5	800	3,8	2,6
9	29	19	90	49	5,0	900	2,6	2,8
0	30	20	00	50	5,5	000	2,4	3,0

Пример решения задачи № 13

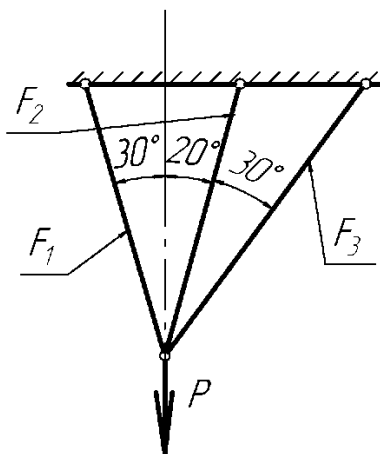


Рис. 47

Расчетная схема системы приведена на рис. 47.

Дано: $F_1 = 4 \text{ см}^2$, $F_2 = 3 \text{ см}^2$, $F_3 = 2 \text{ см}^2$.

В стержнях системы могут возникнуть предельные нормальные усилия, которые равны:

$$N_{n1} = \sigma_r \cdot F_1 = 250 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 100 \text{ кН};$$

$$N_{n2} = \sigma_r \cdot F_2 = 250 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 75 \text{ кН};$$

$$N_{n3} = \sigma_r \cdot F_3 = 250 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 50 \text{ кН}.$$

Для рассматриваемой системы возможны три механизма разрушения.

Первый механизм разрушения

Пусть текут стержни 1 и 2, а стержень 3 работает еще в упругой стадии. Проводим ось $a - a$ перпендикулярно направлению нормальной силы в стержне 3 и проецируем все силы на эту ось (рис. 48).

$$-N_{n1} \cdot \cos 10^\circ - N_{n2} \cdot \cos 60^\circ + P_{n3} \cdot \cos 40^\circ = 0.$$

Величина предельной нагрузки из составленного уравнения будет равна $P_{113} = 177,5 \text{ кН}$.

Второй механизм разрушения

Пусть текут стержни 1 и 3, стержень 2 работает еще в упругой стадии. Проводим ось $b - b$ перпендикулярно направлению продольной силы в стержне 2 и проецируем все силы на эту ось (рис. 49).

$$-N_{n1} \cdot \cos 40^\circ + N_{n3} \cdot \cos 60^\circ + P_{n2} \cdot \cos 70^\circ = 0$$

Величина предельной нагрузки из составленного уравнения будет равна $P_{112} = 150,8 \text{ кН}$.

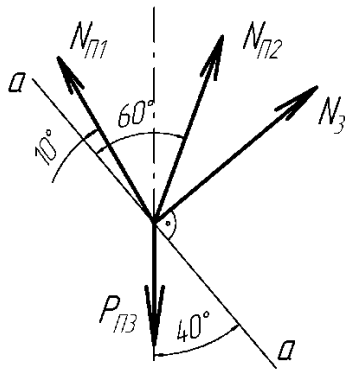


Рис. 48

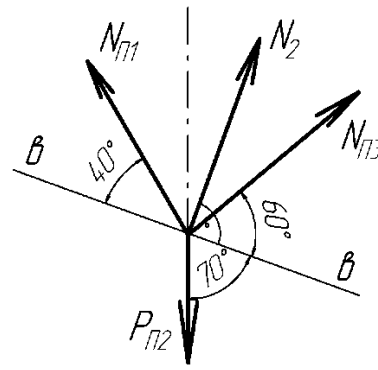


Рис. 49

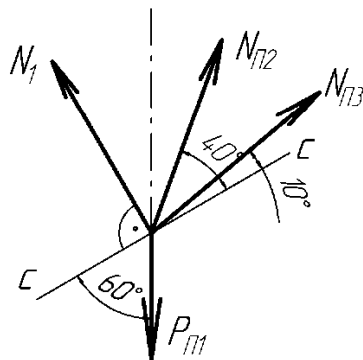


Рис. 50

Третий механизм разрушения

Пусть текут стержни 2 и 3, стержень 1 работает еще в упругой стадии. Проводим ось $c - c$ перпендикулярно направлению продольной силы в стержне 1 и проецируем все силы на эту ось (рис. 50).

$$N_{п2} \cdot \cos 40^\circ + N_{п3} \cdot \cos 10^\circ - P_{п1} \cdot \cos 60^\circ = 0.$$

Величина предельной нагрузки из составленного уравнения будет равна

$$P_{П1} = 213,4 \text{ кН.}$$

Истинное значение предельной нагрузки будет наименьшим из полученных значений трех нагрузок. Таким образом, несущая способность конструкции будет исчерпана, когда величина внешней нагрузки будет больше $P_{П} = 150,8 \text{ кН}$.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ И ЭКЗАМЕНУ

1. Задачи сопротивления материалов.
2. Классификация сил, действующих на элементы конструкций.
3. Понятие о деформациях и напряжениях, типы деформаций.
4. Вычисление деформаций по площадкам, перпендикулярным к оси стержня.
5. Допускаемые напряжения. Подбор поперечных сечений.
6. Деформации при растяжении – сжатии. Закон Гука, коэффициент поперечной деформации.
7. Диаграмма растяжения. Механические характеристики материала. Диаграммы напряжений.
8. Виды напряженного состояния материала. Примеры линейного, плоского и объемного напряженных состояний.
9. Нахождение главных напряжений и площадок с помощью кругов Мора.
10. Деформация при сложном напряженном состоянии. Обобщенный закон Гука.

11. Понятие о теориях прочности.
12. Геометрические характеристики плоских сечений.
13. Моменты инерции относительно главных осей.
14. Моменты инерции при параллельном переносе осей и при повороте осей.
15. Расчеты на сдвиг заклепочных, сварных, болтовых и сварных соединений.
16. Понятие о крутящем моменте. Вычисление моментов, передаваемых на вал.
17. Определение напряжений при кручении вала круглого и прямоугольного сечений. Условие прочности при кручении.
18. Понятия о деформации изгиба. Устройство опор балок.
19. Характер напряжений в балке. Изгибающий момент, поперечная сила при изгибе.
20. Вычисление напряжений при плоском изгибе.
21. Проверка прочности балок по нормальным и касательным напряжениям.
22. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
23. Интегрирование дифференциального уравнения балки.
24. Метод начальных параметров для определения перемещений в балках при изгибе.
25. Графоаналитический метод вычисления перемещений при изгибе.
26. Применение понятия о потенциальной энергии к определению перемещений.
27. Теорема о взаимности работ. Теорема Мора. Способ Верещагина.
37. Статически неопределимые балки. Общие понятия.
28. Основные этапы расчета статически неопределимых систем.
29. Канонические уравнения метода сил.
30. Статически неопределимые неразрезные балки.
31. Сложное сопротивление. Основные понятия.
32. Косой изгиб. Вычисление напряжений. Уравнение нейтральной линии.
33. Внецентренное растяжение – сжатие. Определение напряжений.
34. Уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении – сжатии. Ядро сечений.
35. Совместное действие изгиба и кручения. Определение изгибающих и крутящих моментов. Расчет на прочность.
36. Расчет поперечных сечений вала по третьей и четвертой теории прочности.
37. Продольно-поперечный изгиб.
38. Расчет по допускаемым нагрузкам.
39. Подбор сечения балок по допускаемым нагрузкам.
40. Толстостенные и тонкостенные сосуды. Расчет тонкостенных сосудов.

41. Проверка сжатых стержней на устойчивость. Формулы Эйлера и Ясинского для критической силы. Выбор типа сечения и материала.
42. Вычисление напряжений при равноускоренном движении.
43. Напряжения при ударе.
44. Частные случаи вычисления напряжений и проверки прочности при ударе.
45. Проверка прочности материала при переменных напряжениях.
46. Составление условия прочности при переменных напряжениях.
47. Определение предела выносливости при симметричном и асимметричном цикле.
48. Местные напряжения. Факторы, влияющие на величину предела выносливости.
49. Явление усталости материалов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Александров, А. В. Сопротивление материалов [Текст]** : учеб. для студ. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. - 5-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 560 с.
2. **Александров, А. В. Сопротивление материалов [Текст]** : учеб. для студ. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; ред. : А. В. Александров. - 4-е изд., испр. - М. : Высш. шк., 2004. - 560 с.
3. **Икрин, В. А. Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности [Текст]** : учеб. для студ. обучающихся по направлению 653500 - "Строительство" / В. А. Икрин. - М. : АСВ, 2005. - 424 с.
4. **Михайлов, А. М. Сопротивление материалов [Текст]** : учеб. для студ. вузов, обучающихся по направлению "Строительство" / А. М. Михайлов. - М. : Академия, 2009. - 448 с. - (Высшее профессиональное образование). –
5. **Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов [Текст]** : учеб. пособие / Ф. З. Алмаметов [и др.]. - 3-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2005. - 368 с.
6. **Семенов, В. В. Сопротивление материалов. Курсовые и расчетно-проектировочные работы [Текст]** : учеб. пособие для студ., обучающихся по направлению 653500 "Строительство" / В. В. Семенов. - М. : АСВ, 2004. - 128 с.
7. **Сопротивление материалов [Текст]** : пособие по решению задач / И. Н. Миролюбов [и др.]. - Изд. 7-е, испр. - СПб. : Лань, 2007. - 508 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература).
8. **Сопротивление материалов [Текст]** : учеб. для студ. вузов, обучающихся по машиностроительным спец. / Г. Д. Межецкий [и др.]. - М. : Дашков и К, 2008. - 416 с.
9. **Сопротивление материалов [Текст]** : учеб. пособие для студ. вузов / под ред. Н. А. Костенко. - Изд. 3-е перераб. и доп. - М. : Высш. шк., 2007. - 488 с. - (Для высших учебных заведений).

10. **Сопротивление материалов** [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обучающихся по группе направлений подготовки бакалавров 150000 - "Техника и технология" и группе направлений подготовки специалистов 150000 - "Техника и технология" / П. А. Павлов [и др.]. - 2-е изд., испр. и доп. - СПб. : Лань, 2007. - 560 с.

11. **Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов** [Текст] : учеб. для студ. вузов / В. И. Феодосьев. - М. : МГТУ, 2004. - 592 с.