ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания по выполнению расчетно-графических работ
с вариантами индивидуальных заданий

Содержат задания и методические рекомендации по выполнению расчетно-графических работ по курсу «Механика» (раздел «Сопротивление материалов»). Для каждой темы приведены 30 вариантов схем, для каждой схемы – по 10 вариантов числовых значений.

Предназначены для курсантов направления 161000.62 – Аэронавигация, профилей подготовки 161000.62.08 – Поисковое и аварийно-спасательное обеспечение полетов воздушных судов и 161000.6209 – Обеспечение авиационной безопасности; для курсантов направления 280700.62 – Техносферная безопасность, профиля подготовки 280700.62.02 – Безопасность технологических процессов и производств.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

1.1. Основные понятия

Растяжение (сжатие) – такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только ***продольная сила*** N. При растяжении продольная сила направлена от сечения, при сжатии – к сечению.

На растяжение (сжатие) работают тросы, тяги приводов управления, шатуны, болты и многие другие детали.

Как показывает опыт, плоские поперечные сечения, перпендикулярные оси бруса, остаются плоскими и перпендикулярными к его оси при растяжении или сжатии (рис. 1.1). Это положение называют гипотезой плоских сечений. Из этой гипотезы следует, что напряжение во всех точках поперечного сечения одинаково, а значит, его можно найти как отношение внутренней силы N к площади поперечного сечения A.

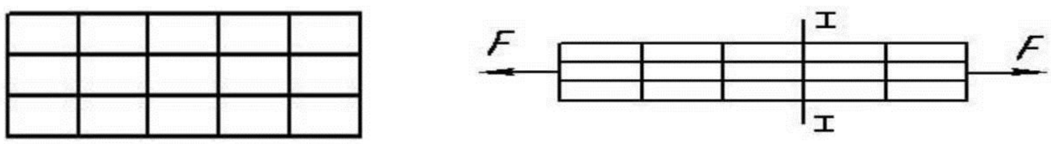


Рис. 1.1

В поперечном сечении I–I при растяжении (сжатии) возникает только ***нормальное напряжение*** σ, так как сила N перпендикулярна плоскости сечения:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \tag{1.1}$$

Под действием растягивающей силы (рис. 1.2) происходит удлинение бруса в продольном направлении и одновременное сужение в поперечном направлении.

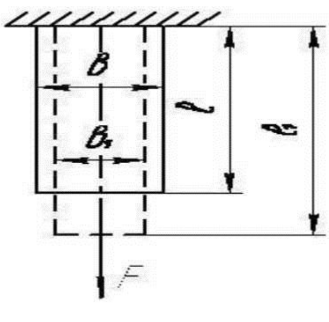


Рис. 1.2

Абсолютное удлинение бруса:

$$\Delta l = l_1 - l. \tag{1.2}$$

Относительное удлинение (***относительная продольная деформация***):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{1.3}$$

Абсолютное сужение:

$$\Delta b = b_1 - b. \tag{1.4}$$

Относительное сужение (***относительная поперечная деформация***):

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}. \tag{1.5}$$

При растяжении абсолютная и относительная продольные деформации – величины положительные, поперечная деформация – величина отрицательная (так как $b > b_1$). При сжатии, наоборот, поперечная деформация – положительна, продольная – отрицательна.

Как показывает опыт, продольная и поперечная деформации связаны прямопропорциональной зависимостью:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \tag{1.6}$$

где μ – ***коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона)*** – физическая постоянная материала, характеризующая его упругие свойства.

Величина коэффициента Пуассона определяется опытным путем. Его значения для разных материалов лежат в пределах $0 \le \mu \le 0{,}5$. Для большинства сталей $\mu = 0{,}3$.

Для большинства материалов в определенных пределах справедлив ***закон Гука***. Применительно к растяжению (сжатию) закон Гука формулируется так: нормальное напряжение при растяжении (сжатии) прямопропорционально относительной продольной деформации:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \tag{1.7}$$

где ***E – модуль упругости (модуль Юнга)*** – физическая постоянная, характеризующая жесткость материала. Для сталей $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Подставим в формулу (1.7) зависимости для определения напряжения (1.1) и деформаций (1.3). Получим

$$\frac{N}{A} = \frac{E\Delta l}{l},$$

откуда

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \tag{1.8}$$

По формуле (1.8) определяют абсолютное удлинение (укорочение) бруса. Произведение EA называется жесткостью при растяжении (сжатии).

1.2. Построение эпюр продольных сил, нормальных напряжений и осевых перемещений

Для проведения расчетов на прочность и жесткость необходимо знать, как изменяются продольные силы, нормальные напряжения и осевые перемещения по длине бруса. С этой целью строят специальные графики, называемые ***эпюрами***. Рассмотрим построение эпюр на следующем примере.

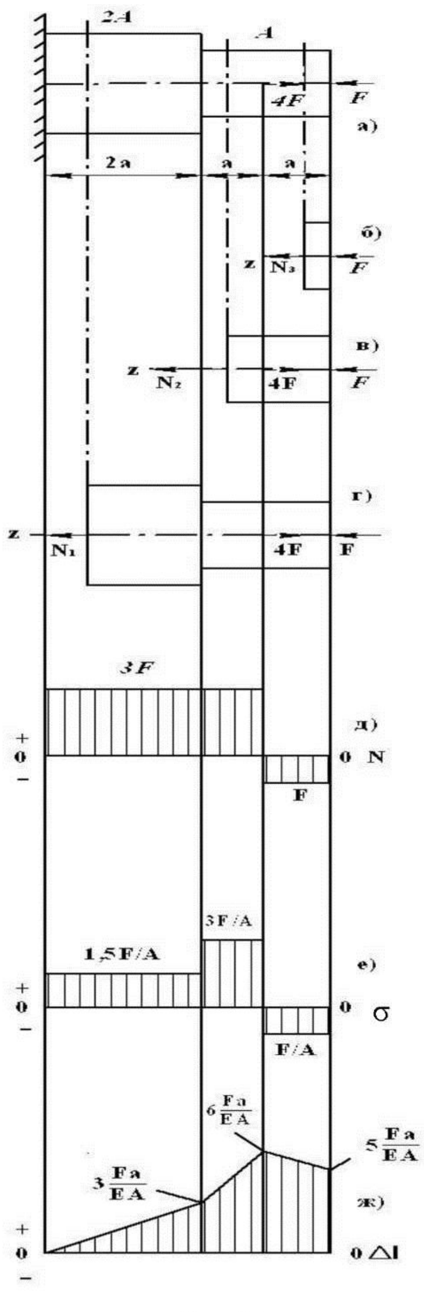


Рис. 1.3

Пусть ступенчатый брус с площадью поперечного сечения A в правой части и $2A$ – в левой нагружен осевыми силами F и $4F$ (рис. 1.3, *а*). Последовательность расчета бруса такова:

1. Разбиваем брус на участки, границами которых являются точки приложения сосредоточенных сил и места изменения поперечного сечения.

2. Методом сечений на каждом участке определяем продольную силу N. Расчет начинаем со свободного конца бруса. Разрежем третий участок произвольным поперечным сечением и отбросим левую часть. Покажем оставшуюся часть бруса и заменим действие отброшенной части продольной силой N_3 (рис. 1.3, *б*).

Составляем уравнение равновесия:

$$\Sigma Z_i = 0,\; N_3 + F = 0,\; N_3 = -F.$$

Таким образом, третий участок испытывает сжатие ($N_3 < 0$). По аналогии на втором и первом участках имеем

$$N_2 - 4F + F = 0,\; N_2 = N_1 = 3F,$$

т. е. первые два участка испытывают растяжение.

Для построения эпюры продольных сил (рис. 1.3, *д*) проводим нулевую линию 0–0 параллельно оси бруса. Будем откладывать положительные величины вверх, а отрицательные – вниз от нулевой линии. На первом участке $N_1 = 3F$, т. е. первые два участка испытывают растяжение. Поскольку сечение было сделано произвольно, можно утверждать, что в любом сечении на первом участке $N_1 = 3F$, т. е. эпюра имеет вид прямоугольника, высота которого в выбранном масштабе равна силе $3F$ и отложена вверх от нулевой линии.

По аналогии строится эпюра на втором и третьем участках.

3. Находим нормальное напряжение, возникающее в поперечных сечениях бруса на каждом участке:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

На первом участке продольная сила $N_1 = 3F$, площадь поперечного сечения – $2A$, поэтому

$$\sigma_1 = \frac{3F}{2A}.$$

На втором и третьем участках имеем

$$\sigma_2 = \frac{3F}{A}, \quad \sigma_3 = -\frac{F}{A}.$$

Откладывая от нулевой линии найденные значения в масштабе, строим эпюру нормальных напряжений (рис. 1.3, *е*). Из эпюры видим, в частности, что максимальное напряжение возникает на втором участке.

4. Вычисляем осевые перемещения Δ. В заделке перемещение отсутствует ($\Delta = 0$), поэтому расчеты начнем с заделки. В начале первого участка ($z = 0$) $\Delta_0 = 0$. В конце первого участка ($z = 2a$) перемещение будет равно удлинению бруса на этом участке, которое найдем по формуле (1.8):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

$$\Delta_1 = \Delta l_1 = \frac{3F \cdot 2a}{EA} = \frac{3Fa}{EA}.$$

В конце второго участка ($z = 3a$) перемещение будет складываться из перемещения правого конца первого участка и удлинения второго участка:

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \Delta l_2 = \frac{3Fa}{EA} + \frac{3Fa}{EA} = \frac{6Fa}{EA}.$$

По аналогии на третьем участке ($z = 4a$):

$$\Delta_3 = \Delta_2 + \Delta l_3 = \frac{6Fa}{EA} + \frac{(-F) \cdot a}{EA} = \frac{5Fa}{EA}.$$

В промежуточных точках участков перемещения определяются точками прямых, соединяющих значения Δ на границах участков, так как удлинение прямопропорционально расстоянию до сечения. С учетом этого строим эпюру осевых перемещений (рис. 1.3, *ж*). Из эпюры, в частности, видно, что свободный конец бруса переместится вправо (знак «+») на величину $\frac{5Fa}{EA}$.

Иногда производится расчет по условию жесткости, в соответствии с которым максимальное перемещение $\overline{\Delta}_{max}$ сравнивается с допускаемым значением осевого перемещения $[\Delta]$: $\Delta_{max} \leq [\Delta]$.

1.3. Условие прочности при растяжении (сжатии)

При расчете на прочность по допускаемым напряжениям считается, что прочность обеспечена, если максимальное возникающее в нем напряжение не превышает допускаемого напряжения, поэтому при растяжении (сжатии) условие прочности имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma], \qquad (1.9)$$

здесь

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]} \quad \text{или} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_B}{[n]},$$

где σ_T – предел текучести; σ_B – предел прочности; $[n]$ – заданный запас прочности.

Условие прочности позволяет решать три типа задач:

1. *Определение необходимых размеров поперечного сечения бруса.*

Из неравенства (1.9) находится необходимая площадь поперечного сечения бруса:

$$A \ge \frac{N}{[\sigma]}.$$

Если сечение бруса – круг, то, зная площадь сечения, находят его диаметр; если сечение – прямоугольник, то по заданному соотношению сторон находят их размеры. Сечение бруса может быть стандартным профилем (уголок, двутавр, швеллер), в этом случае по найденной площади сечения находят соответствующий профиль по ГОСТам сортамента проката.

2. *Определение безопасной нагрузки для бруса.*

Из условия прочности (1.9) допустимое значение продольной силы, возникающей в брусе, удовлетворяет следующему условию:

$$N \le A[\sigma].$$

По найденному значению N определяется и безопасная внешняя осевая нагрузка F. Если продольная сила постоянна по длине бруса, то $F = N$.

3. *Проверка прочности бруса.*

По заданным нагрузкам и размерам бруса определяется максимальное напряжение, возникающее в нем, и сравнивается с допустимым. Расхождение этих величин характеризует недогрузку или перегрузку бруса:

$$\eta = \frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\ \%.$$

Рекомендуется, чтобы эта величина лежала в пределах ± 5 %.

Если материал бруса по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то проверку прочности ведут отдельно для растянутых и сжатых участков:

$$\sigma_{P\max} \le [\sigma_P], \quad \sigma_{C\max} \le [\sigma_C].$$

1.4. Задание на расчетно-графическую работу № 1

Расчетно-графическая работа № 1 по теме «Растяжение и сжатие» включает две задачи: подбор сечений статически определимого бруса из хрупкого материала (чугуна) и определение безопасной нагрузки для статически определимого бруса.

Задача 1. Для чугунного бруса построить эпюру продольных сил. Из расчета на прочность подобрать размеры круглого и квадратного поперечных сечений участков бруса.

Вариант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
F, кН	2	4	6	8	10	12	16	18	20	22
σ_{BP}, МПа	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
σ_{BC}, МПа	340	360	380	400	420	500	540	560	600	800
$[n]$	2,5	3,0	3,5	4,0	3,5	2,5	3,0	3,5	4,0	3,5

Варианты расчетных схем к задаче 1 приведены на с. 13–15.

Задача 2. Для стального бруса построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и осевых перемещений. Из расчета на прочность по допускаемым напряжениям определить безопасное значение силы F. Вычислить перемещение точки приложения этой силы.

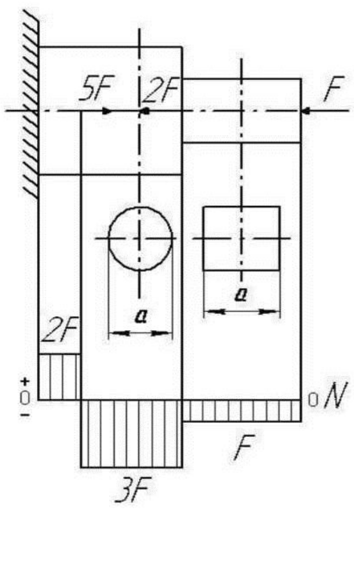
Вариант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
A, мм^2	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
l, мм	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
$[\sigma]$, МПа	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

Варианты расчетных схем к задаче 2 приведены на с. 16–18.

1.5. Пример выполнения расчетно-графической работы № 1

Задача 1

Исходные данные:
$F = 2$ кН;
$\sigma_{BP} = 100$ МПа;
$\sigma_{BC} = 320$ МПа;
$[n] = 2{,}5$.
Требуется определить:
d, a – ?



Решение:

1. Методом сечений определяем продольные силы на участках бруса. Разрезая каждый участок и отбрасывая мысленно закрепленную часть, составляем уравнения равновесия:

$N_1 - 5F + 2F + F = 0$, $N_2 + 2F + F = 0$, $N_3 + F = 0$,

$N_1 = 2F$ (растяжение), $N_2 = -3F$ (сжатие), $N_3 = -F$ (сжатие).

По рассчитанным данным строим эпюру продольных сил.

2. Из расчета на прочность определяем необходимые размеры круглого и квадратного поперечных сечений участков бруса.

Условие прочности бруса на первом участке:

$$\sigma_P = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2F}{A_1} \le [\sigma_P],$$

где

$$[\sigma_P] = \frac{\sigma_{BP}}{[n]}, \quad A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4},$$

тогда

$$\frac{2F \cdot 4}{\pi d_1^2} \le \frac{\sigma_{BP}}{[n]},$$

откуда

$$d_1 \ge \sqrt{\frac{8F[n]}{\pi \cdot \sigma_{BP}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5}{3{,}14 \cdot 100}} = 11 \text{ (мм)}.$$

Условие прочности бруса на втором участке:

$$\sigma_C = \frac{3F}{A_2} \le [\sigma_C].$$

По аналогии с первым участком получим:

$$d_2 \ge \sqrt{\frac{12F[n]}{\pi \cdot \sigma_{BC}}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5}{3{,}14 \cdot 320}} = 8 \text{ (мм)}.$$

Для того чтобы удовлетворить условие прочности и на первом, и на втором участках, выбираем большее из двух найденных значений диаметра d = 11 мм.

Условие прочности бруса на третьем участке:

$$\sigma_C = \frac{F}{A_3} \le [\sigma_C],$$

где

$$A_3 = a^2,$$

тогда

$$\frac{F}{a^2} \le \frac{\sigma_{BC}}{[n]},$$

откуда

$$a \geq \sqrt{\frac{F[n]}{\sigma_{BC}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5}{320}} = 4\,(\text{мм}).$$

Ответ: диаметр круга $d = 11$ мм, сторона квадрата $a = 4$ мм.

Задача 2

Исходные данные:

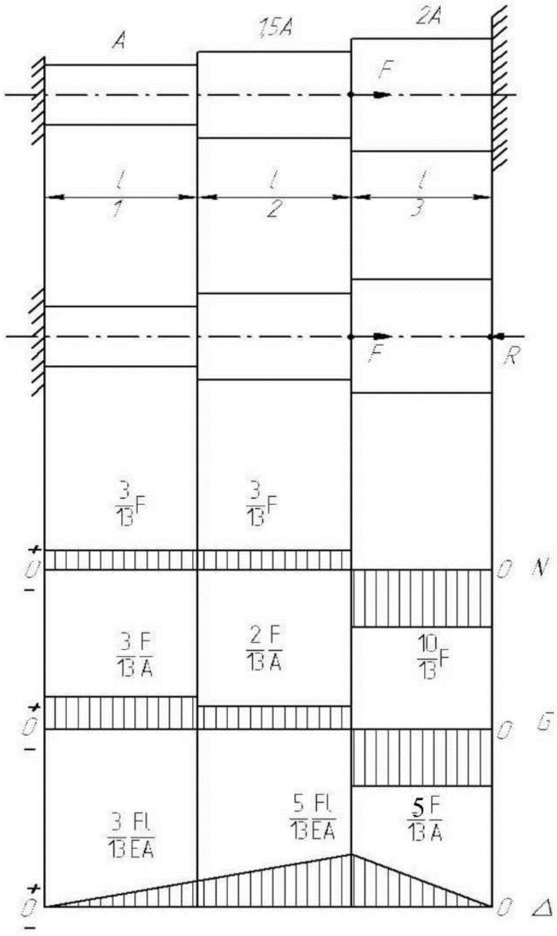
$A = 40$ мм^2;

$l = 100$ мм;

$[\sigma] = 200$ МПа.

Требуется определить:

F, Δ_F – ?



Решение:

1. Брус один раз статически неопределим, так как неизвестных реакций заделок – две, а уравнение статики можно составить только одно. В качестве лишней неизвестной примем реакцию правой заделки R. Для раскрытия статической неопределимости бруса составим уравнение перемещений.

Поскольку справа – заделка, перемещение правого конца бруса должно быть равно нулю: $\Delta = 0$.

Это перемещение складывается из удлинений или укорочений каждого из трех участков бруса: $\Delta = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$.

По закону Гука

$$\Delta = \frac{N_1 l}{EA} + \frac{N_2 l}{1{,}5EA} + \frac{N_3 l}{2EA}.$$

Выразим продольные силы на каждом участке:

$N_1 - F + R = 0$, $\quad N_2 - F + R = 0$, $\quad N_3 + R = 0$,

$N_1 = F - R$, $\quad N_2 = F - R$, $\quad N_3 = -R$.

Подставим найденные значения в уравнение перемещений:

$$\frac{(F-R)l}{EA} + \frac{(F-R)l}{1{,}5EA} + \frac{(-R)l}{2EA} = 0,$$

откуда

$$(F-R)+\frac{F-R}{1,5}-\frac{R}{2}=0\,,\quad R=\frac{10}{13}F\,.$$

2. Строим эпюру продольных сил:

$$N_1=N_2=F-R=F-\frac{10}{13}F=\frac{3}{13}F \text{ (растяжение)},$$

$$N_3=-R=-\frac{10}{13}F \text{ (сжатие)}.$$

3. Строим эпюру нормальных напряжений:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A}=\frac{3}{13}\frac{F}{A}\,,$$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{1,5A}=\frac{3\cdot 2F}{13\cdot 3A}=\frac{2}{13}\frac{F}{A}\,,$$

$$\sigma_3=\frac{N_3}{2A}=-\frac{10F}{13\cdot 2A}=-\frac{5}{13}\frac{F}{A}\,.$$

4. Из расчета на прочность определим безопасное значение силы F. Брус стальной, поэтому наиболее опасен третий участок, на котором возникает максимальное напряжение (несмотря на то, что его площадь сечения самая большая).

$$\sigma_{max}=|\sigma_3|=\frac{5}{13}\frac{F}{A}\le|\sigma|,$$

откуда

$$F\le\frac{13[\sigma]A}{5}=\frac{13\cdot 200\cdot 40}{5}=28,8\cdot 10^3\,(\text{Н})=20,8\,(\text{кН}).$$

5. Строим эпюру осевых перемещений:

– в левой заделке: $\Delta = 0$;

– в конце первого участка:

$$\Delta_1=\Delta l_1=\frac{N_1 l}{EA}=\frac{3}{13}\frac{Fl}{EA}\,;$$

– в конце второго участка:

$$\Delta_2=\Delta_1+\Delta l_2=\frac{3}{13}\frac{Fl}{EA}+\frac{3Fl}{13\cdot 1,5EA}=\frac{5}{13}\frac{Fl}{EA}\,;$$

– в конце третьего участка:

$$\Delta_3=\Delta_2+\Delta l_3=\frac{5}{13}\frac{Fl}{EA}+\left(-\frac{10}{13}F\right)\frac{l}{2EA}=0\,.$$

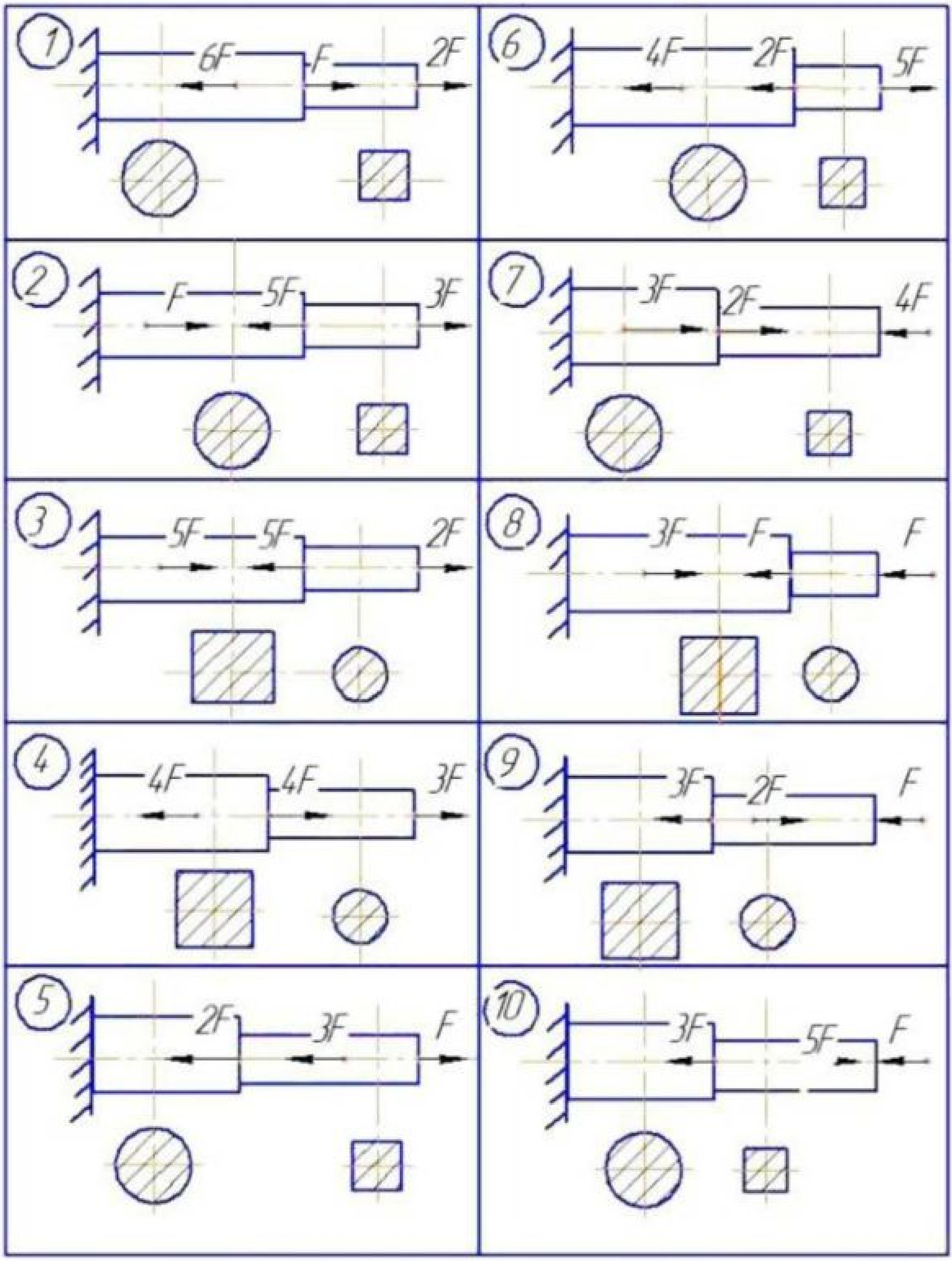
6. Находим перемещение точки приложения силы F:

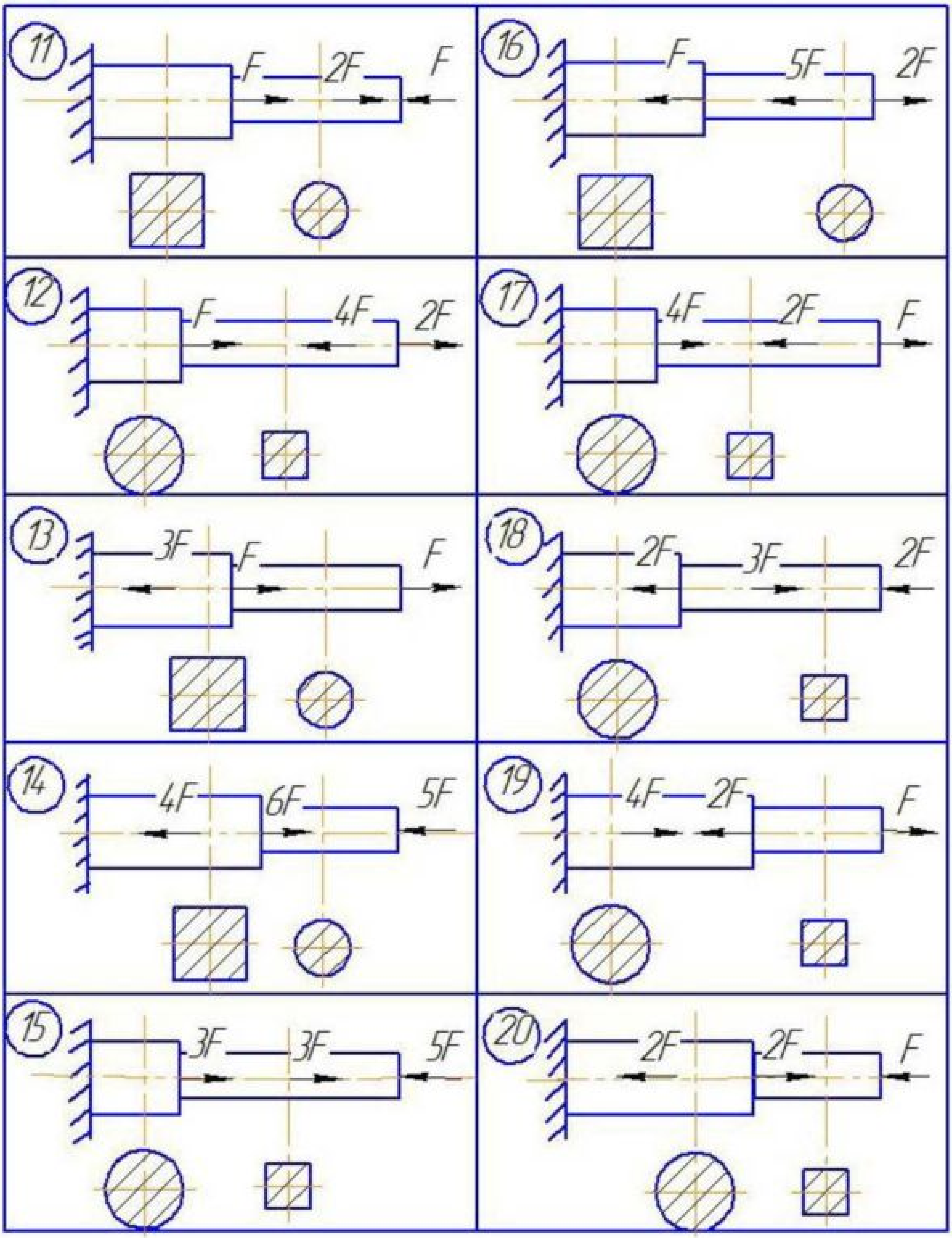
$$\Delta_F=\Delta_2=\frac{5}{13}\frac{Fl}{EA}=\frac{5\cdot 20,8\cdot 10^3\cdot 100}{13\cdot 2\cdot 10^5\cdot 40}=0,1\,(\text{мм}).$$

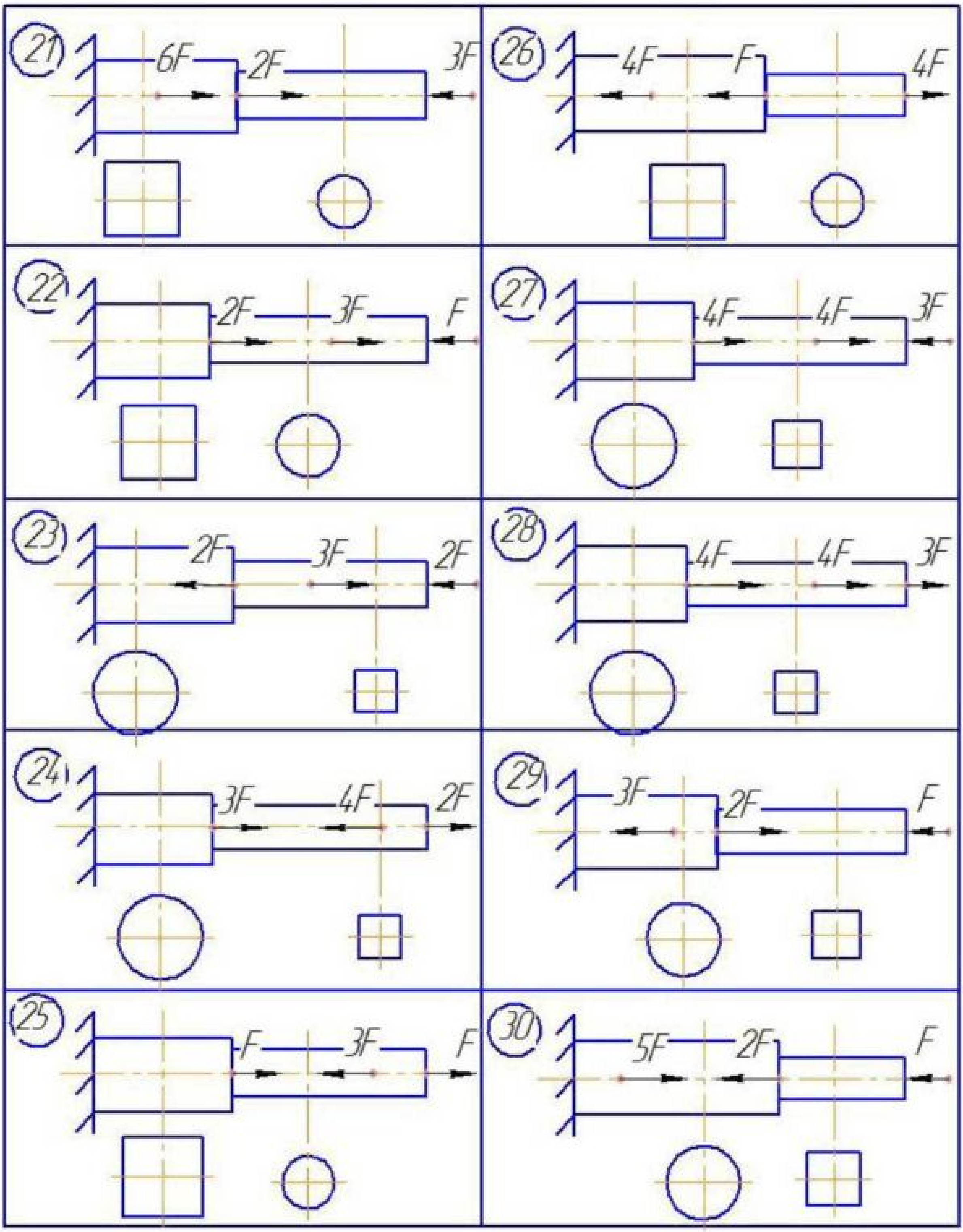
Ответ: безопасное значение силы $F = 20,8$ кН, точка приложения этой силы сместится вправо на 0,1 мм.

1.6. Варианты расчетных схем

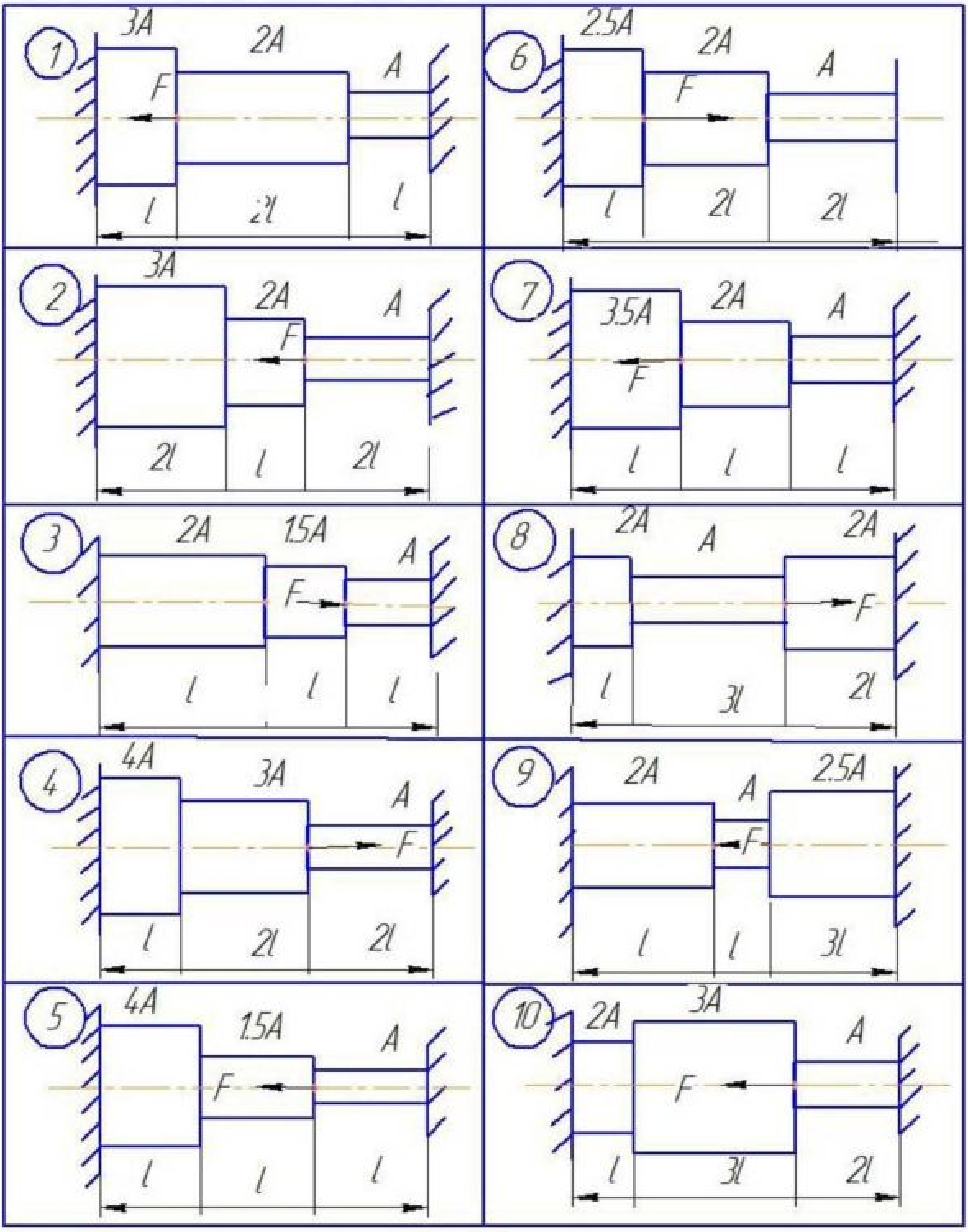
Задача 1

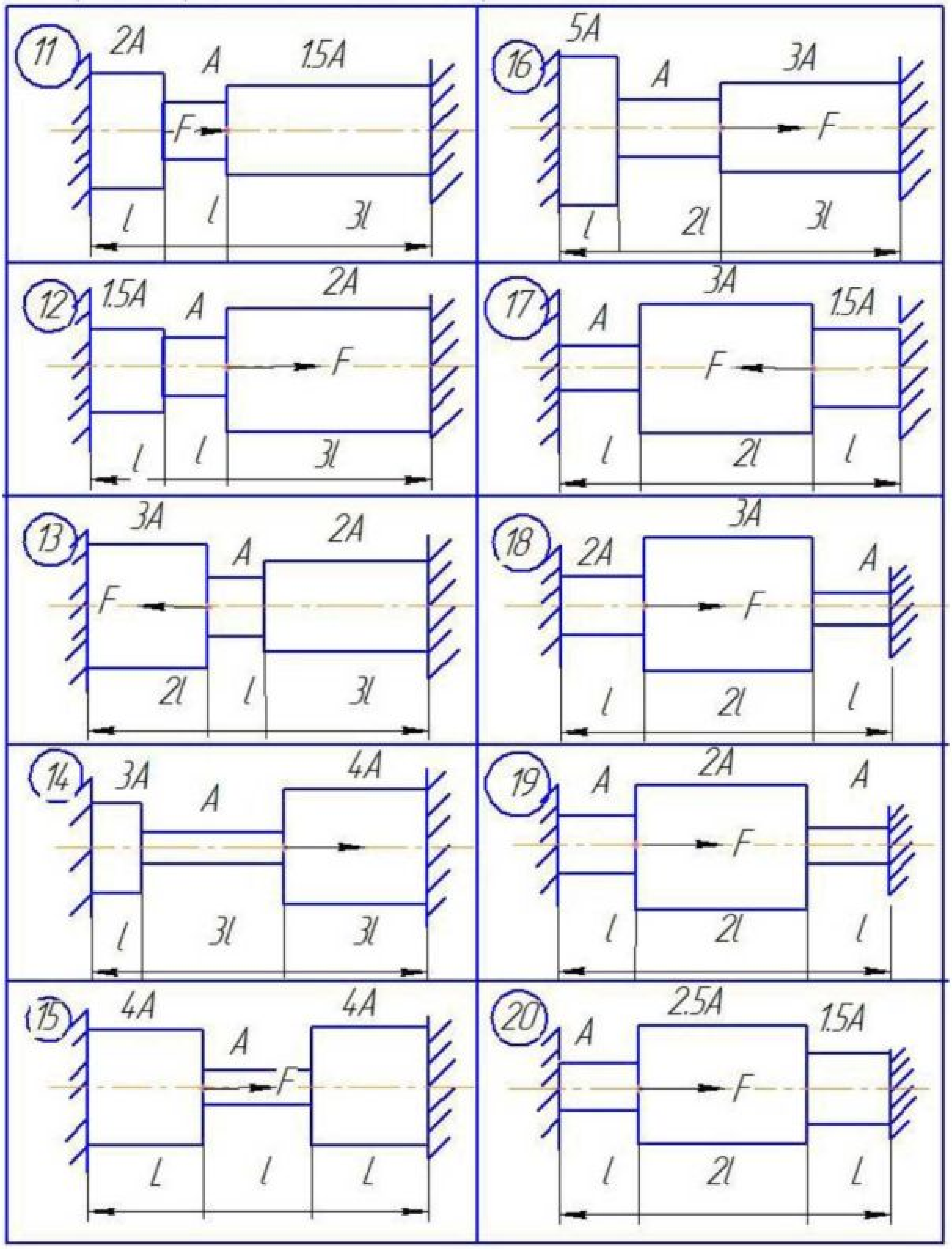



11
F
2F
F
12
F
4F
2F
13
3F
F
F
14
4F
6F
5F
15
3F
3F
5F
16
F
5F
2F
17
4F
2F
F
18
2F
3F
2F
19
4F
2F
F
20
2F
2F
F

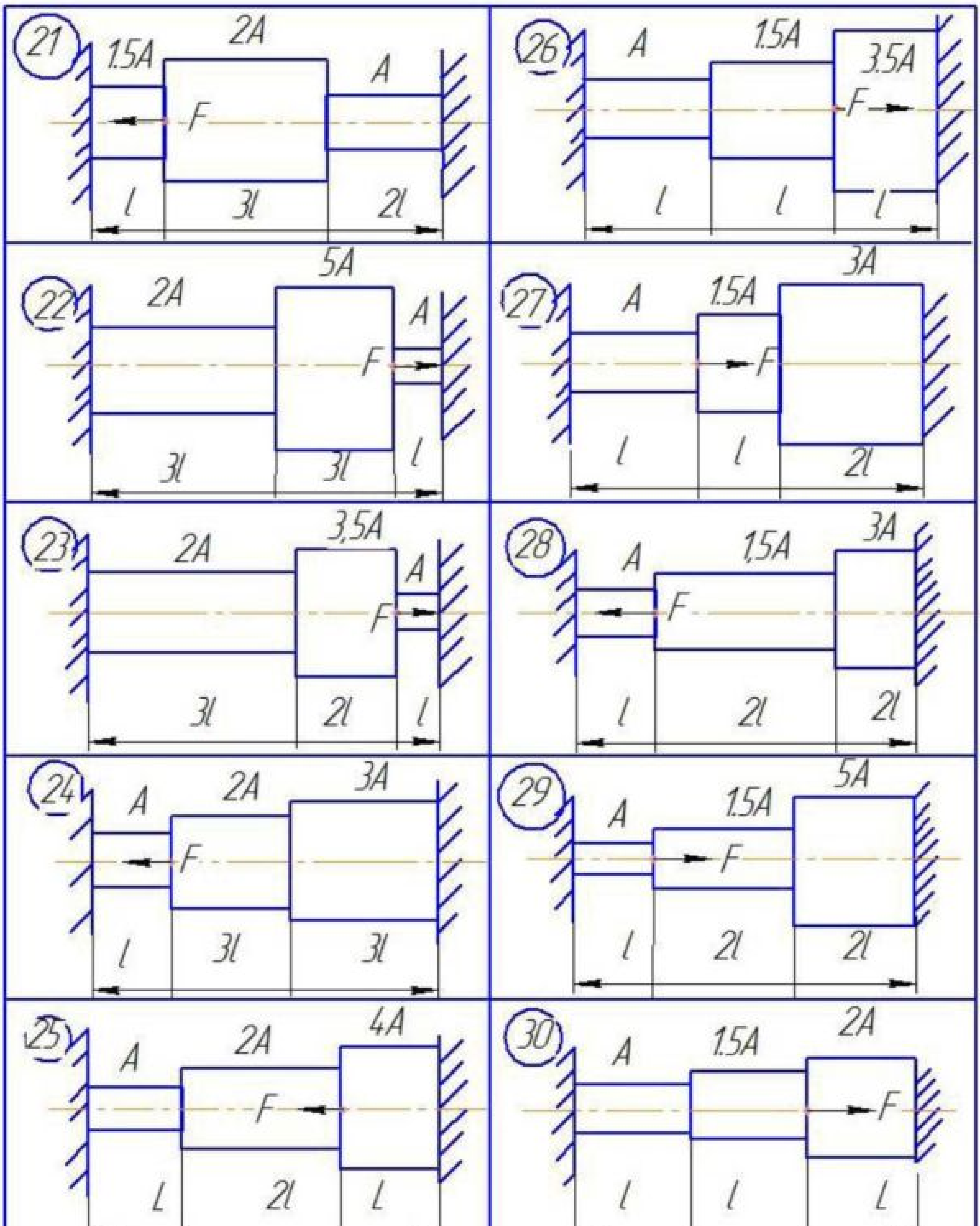

21
6F
2F
3F
26
4F
F
4F
22
2F
3F
F
27
4F
4F
3F
23
2F
3F
2F
28
4F
4F
3F
24
3F
4F
2F
29
3F
2F
F
25
F
3F
F
30
5F
2F
F

Задача 2


1
3A
2A
A
F
l
2l
l
6
2.5A
2A
A
F
l
2l
2l
2
3A
2A
A
F
2l
l
2l
7
3.5A
2A
A
F
l
l
l
3
2A
1.5A
A
F
l
l
l
8
2A
A
2A
F
l
3l
2l
4
4A
3A
A
F
l
2l
2l
9
2A
A
2.5A
F
l
l
3l
5
4A
1.5A
A
F
l
l
l
10
2A
3A
A
F
l
3l
2l



11
2A
A
1.5A
F
l
l
3l
16
5A
A
3A
F
l
2l
3l
12
1.5A
A
2A
F
l
l
3l
17
A
3A
1.5A
F
l
2l
l
13
3A
A
2A
F
2l
l
3l
18
2A
3A
A
F
l
2l
l
14
3A
A
4A
l
3l
3l
19
A
2A
A
F
l
2l
l
15
4A
A
4A
F
L
l
L
20
A
2.5A
1.5A
F
l
2l
L


21
1.5A
2A
A
F
l
3l
2l
26
A
1.5A
3.5A
F
l
l
l
22
2A
5A
A
F
3l
3l
l
27
A
1.5A
3A
F
l
l
2l
23
2A
3,5A
A
F
3l
2l
l
28
A
1,5A
3A
F
l
2l
2l
24
A
2A
3A
F
l
3l
3l
29
A
1.5A
5A
F
l
2l
2l
25
A
2A
4A
F
L
2l
L
30
A
1.5A
2A
F
l
l
L

2. СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

2.1. Основные понятия

Сдвиг – такой вид деформации, при котором в поперечном сечении действует только перерезывающая сила, а остальные силовые факторы отсутствуют.

Закон Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma, \tag{2.1}$$

где γ – угол сдвига; τ – касательное напряжение; G – модуль сдвига (физическая постоянная материала).

Модуль сдвига связан с двумя другими постоянными – модулем упругости E и коэффициентом поперечной деформации μ – следующей зависимостью:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{2.2}$$

В частности, для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$, тогда $G = 8 \cdot 10$ МПа.

Деформация сдвига возникает в болтовых соединениях, нагруженных силами, перпендикулярными оси болта, в заклепочных, шпоночных, шлицевых соединениях, а также в ряде других случаев. Обычно сдвиг сопровождается изгибом, смятием; касательные напряжения сдвига распределяются неравномерно по сечению. На практике для простоты проводят условные расчеты, полагая напряжение распределенным по сечению равномерно.

Условие прочности при сдвиге:

$$\tau = \frac{Q}{A} \le [\tau_c], \tag{2.3}$$

где τ – касательное напряжение сдвига; Q – поперечная сила; A – площадь поперечного сечения; $[\tau_c]$ – допускаемое касательное напряжение при сдвиге.

Кручение – такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает крутящий момент $T_к$. Брус, работающий на кручение, называют валом. Кручение испытывают валы коробок передач, редукторов, торсионные, карданные валы, пружины и другие детали. Крутящий момент, как внутреннее усилие, определяется методом сечений.

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{max} = \frac{T_к}{W_p} \le [\tau], \tag{2.4}$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение при кручении.

Полярный момент сопротивления W_p для круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3, \tag{2.5}$$

где d – диаметр круга.

По аналогии для кольцевого сечения с наружным диаметром d и внутренним d_1 получим

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right). \qquad (2.6)$$

С помощью условия прочности (2.4) с учетом зависимостей (2.5) и (2.6) можно проверить прочность вала, определить допустимое значение момента на валу, а также провести проектный расчет – определить необходимый диаметр вала. Для определения диаметра вала из условия (2.4) имеем

$$W_p \geq \frac{T_{\text{К}}}{[\tau]},$$

откуда, учитывая условие (2.5), найдем

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T_{\text{К}}}{0{,}2[\tau]}} \qquad (2.7)$$

Жесткость вала при кручении оценивается по относительному углу закручивания θ (град/м).

Условие жесткости:

$$\theta = \frac{180^\circ}{\pi}\frac{T_{\text{К}}}{GJ_p} \leq [\theta], \qquad (2.8)$$

где [θ] – допустимое значение относительного угла закручивания; J_p – полярный момент инерции сечения.

В зависимости от назначения вала допустимое значение относительного угла закручивания изменяется в широких пределах, например, для валов силовых передач [θ] = 2,5 град/м.

Условие (2.8) позволяет проверить жесткость вала, определить допустимый момент на валу, а также определить диаметр вала из расчета на жесткость. В последнем случае из условия (2.8) имеем

$$J_p \geq \frac{180^\circ}{\pi}\frac{T_{\text{К}}}{G[\theta]},$$

но для вала круглого сечения $J_p \approx 0{,}1d^4$, откуда

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{180^\circ}{\pi}\frac{T_{\text{К}}}{0{,}1G[\theta]}}.$$

2.2. Задание на расчетно-графическую работу № 2

Расчетно-графическая работа № 2 по теме «Сдвиг и кручение» включает одну задачу.

Задача 1. Найти диаметры фланцевого соединения, при которых конструкция является равнопрочной. Определить необходимое количество болтов М10 с внутренним диаметром резьбы d_1 = 8,4 мм для соединения фланцев, полагая $D = 1{,}2d_{\text{Н}}$. Допускаемое напряжение при сдвиге и кручении считать одинаковыми.

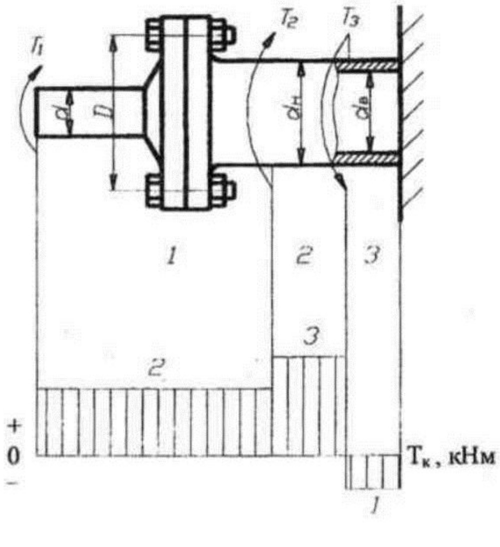
Вариант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
T_1, кНм	2	3	4	5	6	7	8	8	7	6
T_2, кНм	1	3	5	7	5	3	1	3	5	7
T_3, кНм	2	4	6	8	10	12	12	10	8	6
[τ], МПа	200	250	300	350	400	450	500	450	400	350
$d_в$ / $d_н$	0,6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6	0,6	0,7	0,8	0,8

Варианты расчетных схем приведены на с. 24–27.

2.3. Пример выполнения расчетно-графической работы № 2

Задача 1

Найти диаметры фланцевого соединения, при которых конструкция является равнопрочной. Определить необходимое количество болтов М8 для отверстий из-под развертки с расчетным диаметром d_1 = 7 мм для скрепления фланцев, полагая $D = 1{,}4d_н$. Допускаемое напряжение при сдвиге и кручении считать одинаковыми, равными 140 МПа. Фланец нагружен моментами T_1 = 2 кНм, T_2 = 1 кНм, T_3 = 4 кНм. Соотношение диаметров в трубчатой части соединения $\frac{d_в}{d_н} = 0{,}6$.



Исходные данные:

T_1 = 2кНм;

T_2 = 1 кНм;

T_3 = 4 кНм;

d_1 = 7 мм;

$D = 1{,}4d_н$;

$\frac{d_в}{d_н} = 0{,}6$;

[τ] = 140 МПа.

Требуется определить:

d, $d_н$, $d_в$, m – ?

Решение:

1. Методом сечений определяем крутящие моменты в сечениях на каждом участке вала:

$$T_{К1} = T_1 = 2 \text{ кНм},$$

$$T_{К2} = T_1 + T_2 = 3 \text{ кНм},$$

$$T_{К3} = T_1 + T_2 - T_3 = 1 \text{ кНм}.$$

По рассчитанным данным строим эпюру крутящих моментов.

2. Из расчета на прочность при кручении найдем диаметр d левой части фланцевого соединения:

$$\tau_1 = \frac{T_{\text{К}1}}{W_{p1}} \le [\tau].$$

Здесь полярный момент сопротивления круглого сечения

$$W_p \approx 0{,}2d^3,$$

т.е.

$$\frac{T_{\text{К}1}}{0{,}2d^3} \le [\tau],$$

откуда

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{T_{\text{К}1}}{0{,}2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 10^6}{0{,}2\cdot 140}} \approx 42 \text{ (мм)}.$$

3. Из расчета на прочность при кручении найдем диаметры $d_\text{в}$ и $d_\text{н}$ трубчатой части соединения. Наиболее опасен здесь второй участок, где возникает максимальный крутящий момент, поэтому условие прочности имеет следующий вид:

$$\tau_2 = \frac{T_{\text{К}2}}{W_{p2}} \le [\tau].$$

Для кольцевого сечения

$$W_p \approx 0{,}2d_\text{н}^3\left(1 - \frac{d_\text{в}^3}{d_\text{н}^4}\right),$$

т. е.

$$\frac{T_{\text{К}2}}{0{,}2d_\text{н}^3\left(1 - \frac{d_\text{в}^4}{d_\text{н}^4}\right)} \le [\tau],$$

откуда

$$d_\text{н} \ge \sqrt[3]{\frac{T_{\text{К}2}}{0{,}2[\tau]\left(1 - \frac{d_\text{в}^4}{d_\text{н}^4}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 10^6}{0{,}2\cdot 140\cdot\left(1 - 0{,}6^4\right)}} \approx 50 \text{(мм)},$$

тогда

$$d_\text{в} = 0{,}6 d_\text{н} = 0{,}6 \cdot 50 = 30 \text{ (мм)}.$$

4. Из расчета на прочность при сдвиге найдем необходимое количество болтов М8 для соединения фланцев:

$$\tau = \frac{Q}{A} \le [\tau],$$

где Q – поперечная сила в сечении болта.

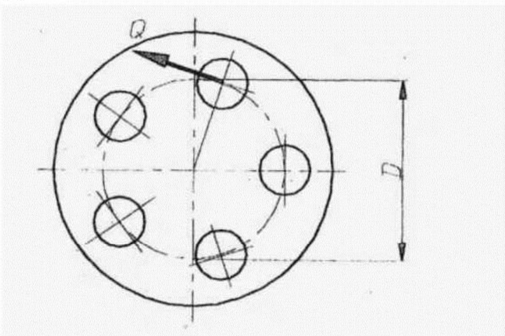
Сила Q на плече, равном $\frac{D}{2}$, создает момент относительно оси вала. Результирующий момент, создаваемый силами Q, возникающими во всех m болтах, равен крутящему моменту на фланце, который, как видно из эпюры, равен $T_{К1}$ = 2 кНм. Т. е.

$$T_{К1} = Q\frac{D}{2}m,$$

откуда поперечная сила равна

$$Q = \frac{2T_{К1}}{mD} = \frac{2T_{К1}}{m \cdot 1{,}4d_{н}},$$

где $d_{н}$ – наружный диаметр трубы.



Площадь поперечного сечения болта равна

$$A = \frac{\pi d_1^2}{4},$$

тогда условие прочности болта на сдвиг примет следующий вид:

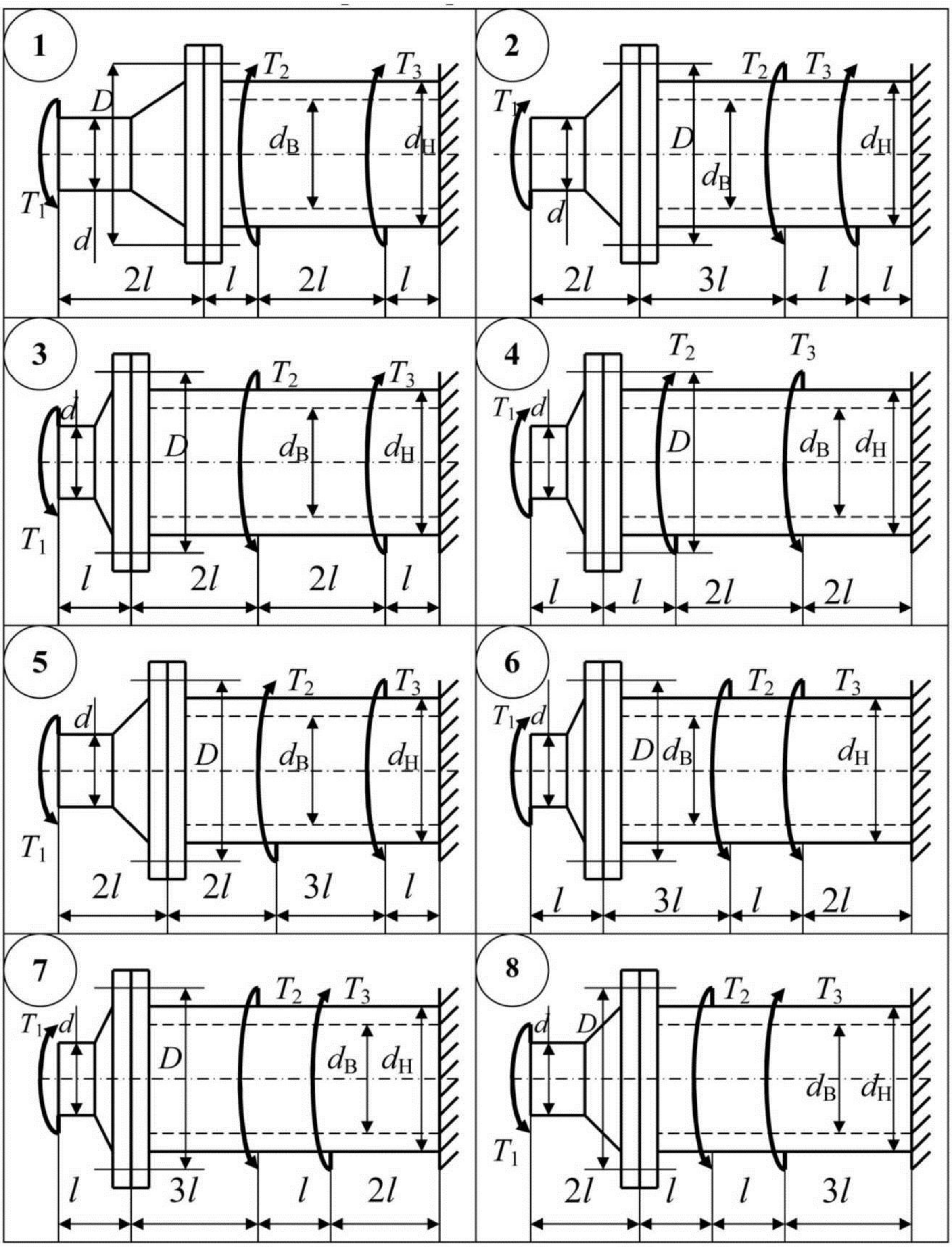
$$\frac{2T_{К1} \cdot 4}{m \cdot 1{,}4d_{н} \cdot \pi \cdot d_1^2} \le [\tau],$$

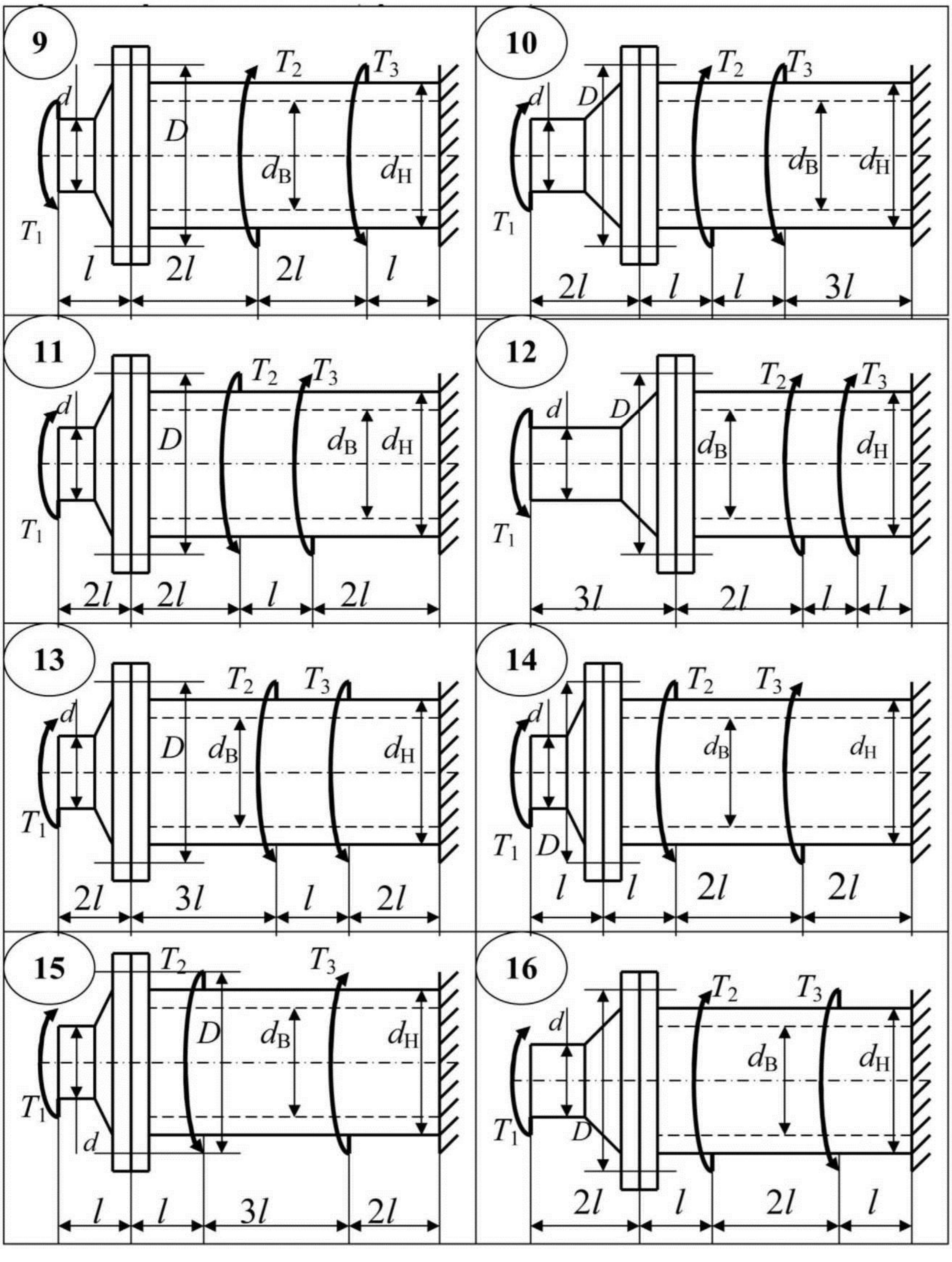
откуда искомое число болтов

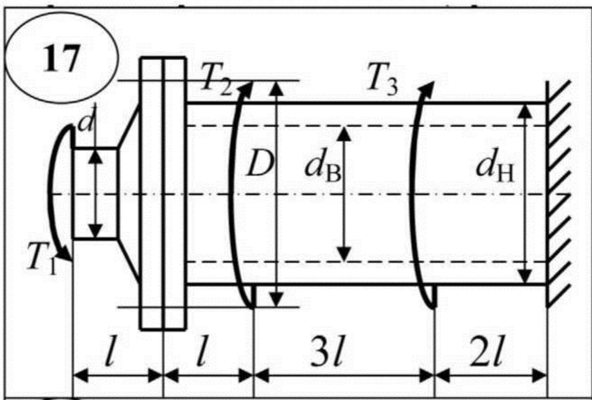
$$m \ge \frac{2T_{К1} \cdot 4}{1{,}4d_{н} \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot [\tau]} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4}{1{,}4 \cdot 50 \cdot 3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 140} = 11.$$

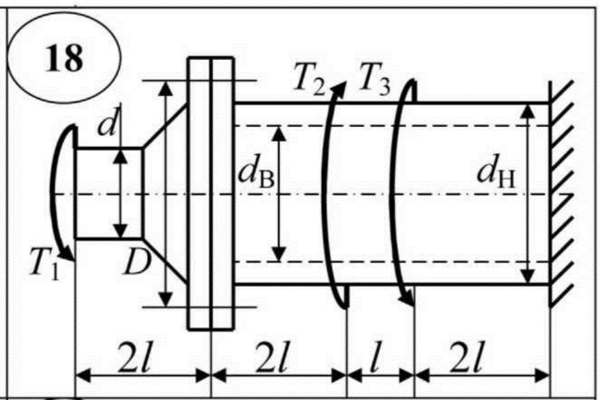
Ответ: диаметры фланцевого соединения d = 42 мм, $d_{н}$ = 50 мм, $d_{в}$ = 30 мм; для соединения необходимо не менее 11 болтов М8.

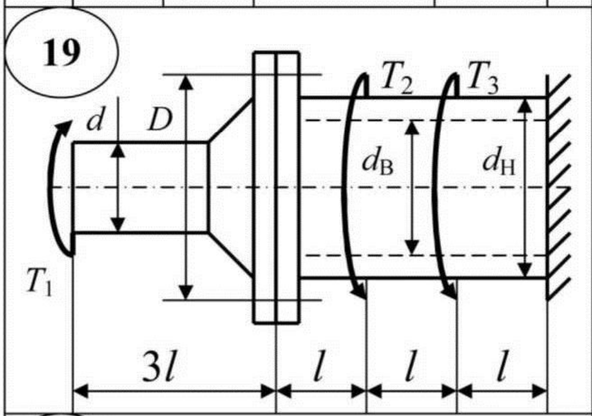
2.4. Варианты расчетных схем

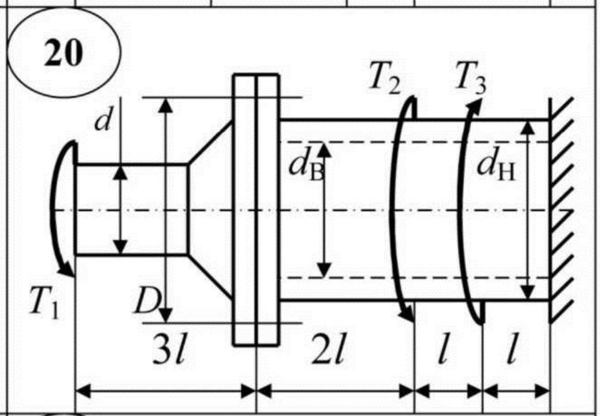


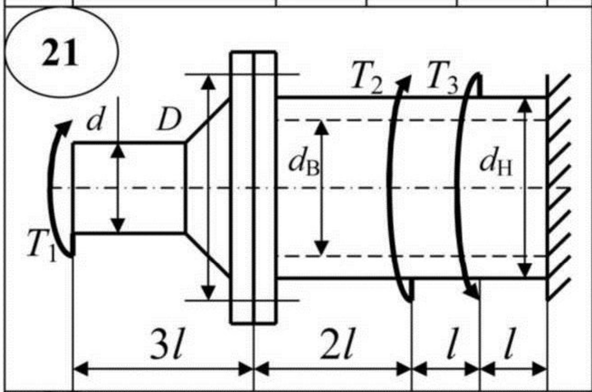

9
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
l $2l$ $2l$ l
10
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
$2l$ l l $3l$
11
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
$2l$ $2l$ l $2l$
12
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
$3l$ $2l$ l l
13
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
$2l$ $3l$ l $2l$
14
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
l l $2l$ $2l$
15
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
l l $3l$ $2l$
16
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
$2l$ l $2l$ l

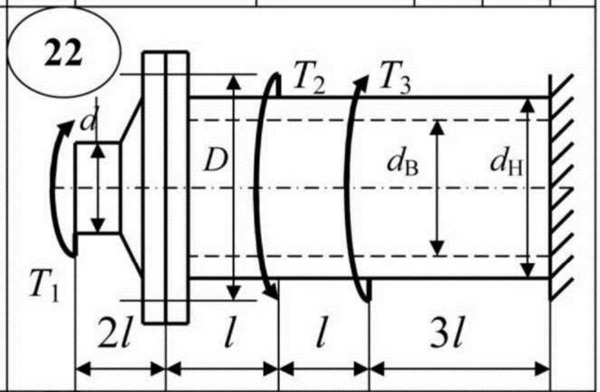

17
T_1
d
T_2
D
T_3
$d_В$
$d_Н$
l l $3l$ $2l$

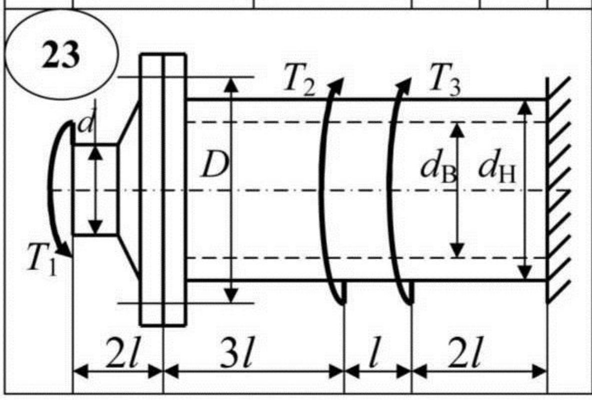

18
T_1
d
D
T_2 T_3
$d_В$
$d_Н$
$2l$ $2l$ l $2l$

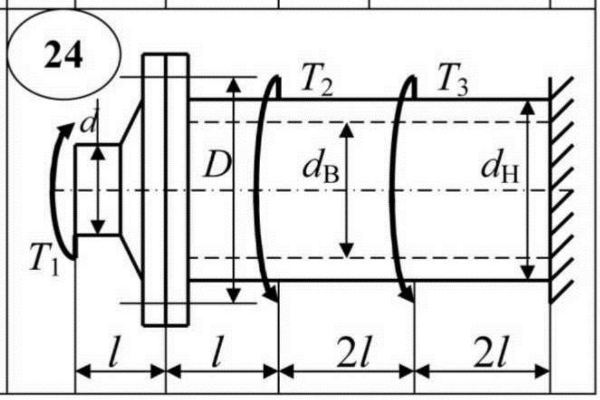

19
T_1
d D
T_2 T_3
$d_В$
$d_Н$
$3l$ l l l

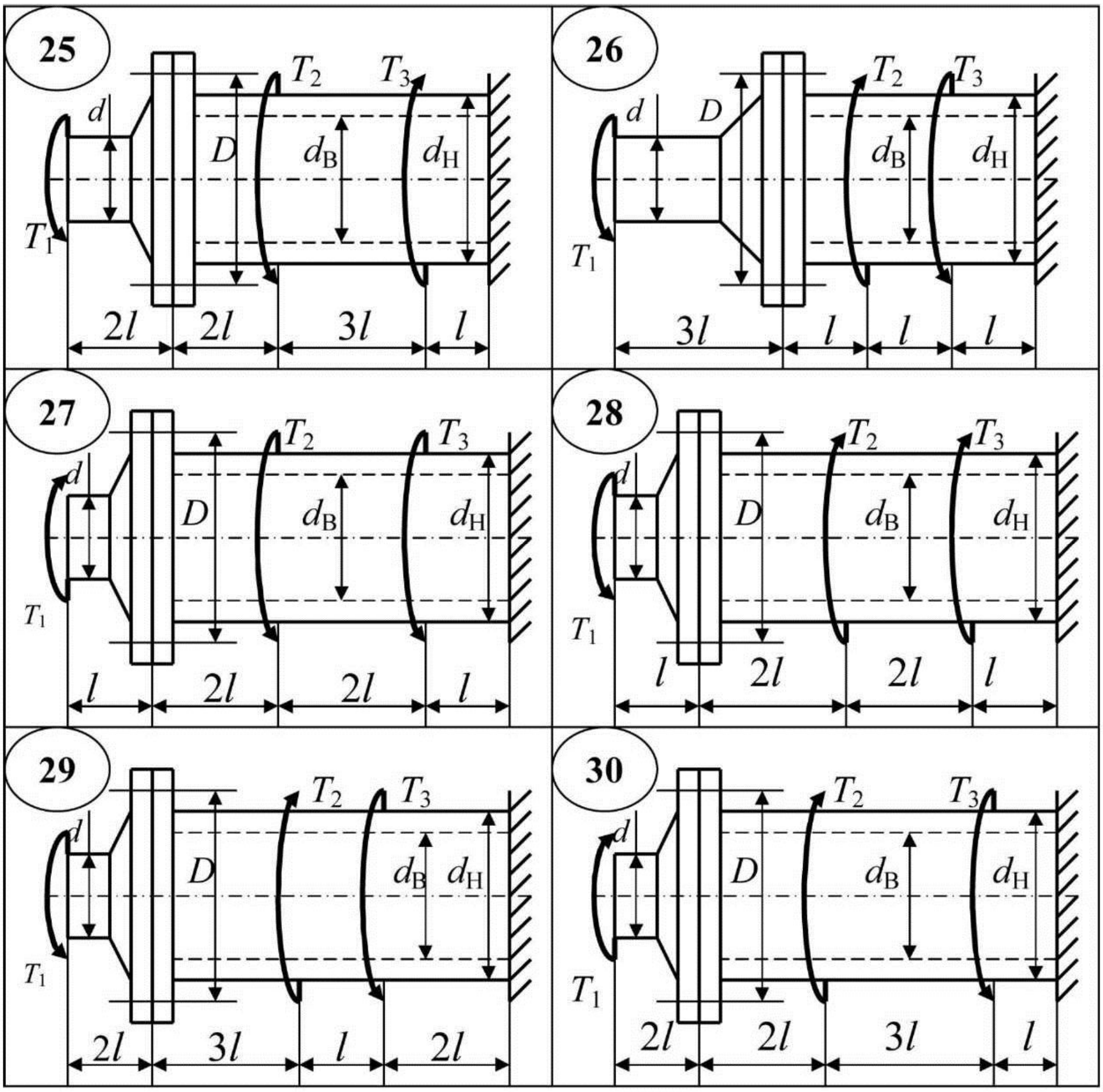

20
T_1
d
D
T_2 T_3
$d_В$
$d_Н$
$3l$ $2l$ l l


21
T_1
d D
T_2 T_3
$d_В$
$d_Н$
$3l$ $2l$ l l


22
T_1
d
D
T_2 T_3
$d_В$
$d_Н$
$2l$ l l $3l$


23
T_1
d
D
T_2 T_3
$d_В$ $d_Н$
$2l$ $3l$ l $2l$


24
T_1
d
D
T_2 T_3
$d_В$
$d_Н$
l l $2l$ $2l$


25
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
$2l$ $2l$ $3l$ l
26
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
$3l$ l l l
27
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
l $2l$ $2l$ l
28
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
l $2l$ $2l$ l
29
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
$2l$ $3l$ l $2l$
30
T_1 d D T_2 T_3 d_B d_H
$2l$ $2l$ $3l$ l

3. ИЗГИБ

3.1. Основные понятия

Изгиб – такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает изгибающий момент. Если изгибающий момент – единственное внутреннее усилие в сечении, изгиб называется ***чистым***. Если же одновременно с изгибающим моментом в сечении возникает поперечная сила, то изгиб называется ***поперечным***. Такой изгиб наиболее распространен. При изгибе прямого бруса происходит искривление его оси.

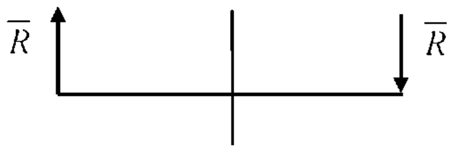
Брус, работающий на изгиб, называется балкой. Балки устанавливают на опоры. Расстояние между опорами называется пролетом. Балка, жестко защемленная одним концом, называется консольной.

При расчете балок необходимо заменить опоры опорными реакциями.

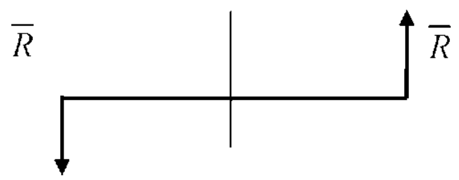
Правило знаков при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

При определении внутренних усилий при игибе используется следующее правило знаков:

1. Поперечная сила Q_y положительна, если равнодействующая R внешних сил слева от сечения направлена вверх, а справа – вниз (рис. 3.1).



$Q_y > 0$



$Q_y < 0$

Рис. 3.1

2. Изгибающий момент M_x положителен, если он вызывает положительную кривизну балки (рис. 3.2). При определении знака кривизны рассматриваемое сечение балки условно считается жестко закрепленным.

Чтобы выяснять, характер распределения поперечных сил и изгибающих моментов по длине балки, строят соответствующие эпюры.

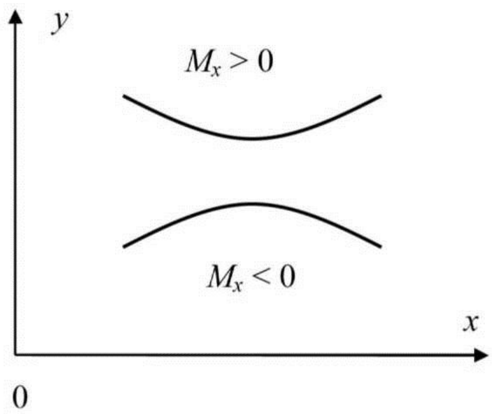


Рис. 3.2

Условие прочности при изгибе

Нормальное напряжение при изгибе определяется по следующей формуле:

$$\sigma = M_x \frac{y}{J_x}, \tag{3.1}$$

где M_x – изгибающий момент; J_x – осевой момент инерции сечения; y – координата точки, в которой определяется напряжение.

Максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x y_{\max}}{J_x}.$$

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; \tag{3.2}$$

– для прямоугольного сечения:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \ y_{\max} = \frac{h}{2}, \ W_x = \frac{bh^2}{6}; \tag{3.3}$$

– для круглого сечения:

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64}, \ y_{\max} = \frac{d}{2}, \ W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1d^3. \tag{3.4}$$

С учетом формулы (3.2) условие прочности при изгибе примет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma], \tag{3.5}$$

где [σ] – допускаемое нормальное напряжение при изгибе.

3.2. Задание на расчетно-графическую работу № 3

Расчетно-графическая работа № 3 по теме «Изгиб» включает в себя две задачи: подбор сечений консольной балки с оценкой их рациональности и определение безопасной нагрузки для двухопорной балки.

Задача 1. Из расчета консольной балки на прочность подобрать двутавровое, прямоугольное ($\frac{h}{b}$ = 1,5) и круглое сечения. Принять [σ] = 160 МПа. Сравнить по массе балки указанных сечений.

Вариант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII	IX	X
F, кН	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
M, кНм	20	22	24	26	28	30	28	26	24	22
l, м	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0

Варианты расчетных схем к задаче 1 приведены на с. 34–37.

Задача 2. Прогон пролетного строения низководного моста изготавливается в виде сварного пакета из двух стальных горячекатаных швеллеров по ГОСТ 8240–72. Определить допустимую нагрузку на прогон, принимая допускаемое напряжение на изгиб [σ] = 100 МПа; сосредоточенная сила $F = ql$.

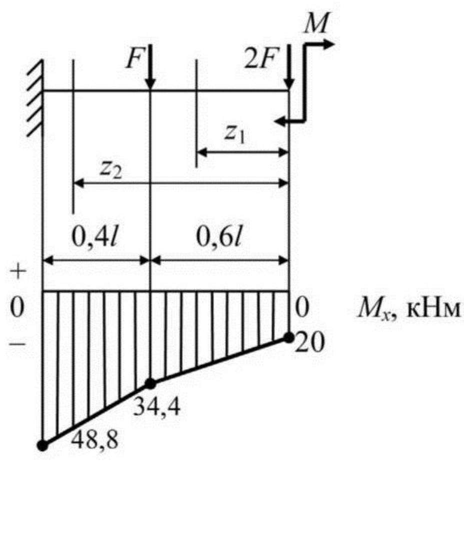
Вариант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII	IX	X
Швеллер	40	36	33	30	27	24а	24	22а	22	20а
l, м	8,0	7,0	6,0	5,6	5,0	4,8	4,0	3,6	3,0	2,4

Варианты расчетных схем к задаче 2 приведены на с. 38–41.

3.3. Пример выполнения расчетно-графической работы № 3

Задача 1

Исходные данные:
F = 10 кН;
M = 20 кНм;
l = 1,2 м;
[σ] = 160 МПа.
Требуется определить:
номер двутавра, h, b, d – ?



Решение:

1. Строим эпюру изгибающих моментов:

$0 \le z_1 \le 0{,}6l$,

$M_{x_1} = -M - 2Fz_1$,

при $z_1 = 0$, $M_{x_1} = -M = -20$ (кНм),

при $z_1 = 0{,}6l$, $M_{x_1} = -20 - 2 \cdot 10 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}2 = -34{,}4$ (кНм);

$0{,}6l \le z_2 \le l$,

$M_{x_2} = -M - 2Fz_2 - F(z_2 - 0{,}6l)$,

при $z_2 = 0{,}6l$, $M_{x_2} = -34{,}4$ (кНм),

при $z_2 = l$, $M_{x_2} = -48{,}8$ (кНм).

По рассчитанным данным строим эпюру, опасное сечение – в заделке.

2. Из расчета на прочность при изгибе найдем необходимый осевой момент сопротивления сечения балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma],$$

откуда

$$W_x \ge \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{48{,}8 \cdot 10^6}{160} = 305 \cdot 10^3 \text{ (мм}^3\text{)} = 305 \text{ (см}^3\text{)}.$$

3. Подбираем заданные сечения.

По ГОСТ 8239–72 находим двутавр, имеющий $W_x \ge 305$ см^3. Для двутавра № 24а $W_x = 317$ см^3.

Прямоугольное сечение:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b1{,}5^2b^2}{6} = 0{,}375b^3 = 305 \text{ (см}^3\text{)},$$

откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{305}{0{,}375}} = 9{,}3 \text{ (см)}, \quad h = 1{,}5b = 14 \text{ (см)}.$$

Круглое сечение:

$$W_x = 0{,}1d^3 = 305 \text{ (см}^3\text{)},$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{3050} = 14{,}5 \text{ (см)}.$$

4. Сравним по массе балки найденных сечений:

$$m_д : m_п : m_к = \rho V_д : \rho V_п : \rho V_к = lA_д : lA_п : lA_к = A_д : bh : \frac{\pi d^2}{4},$$

где m – масса; ρ – плотность; V – объем; $A_д$ – площадь сечения двутавра, прямоугольника, круга.

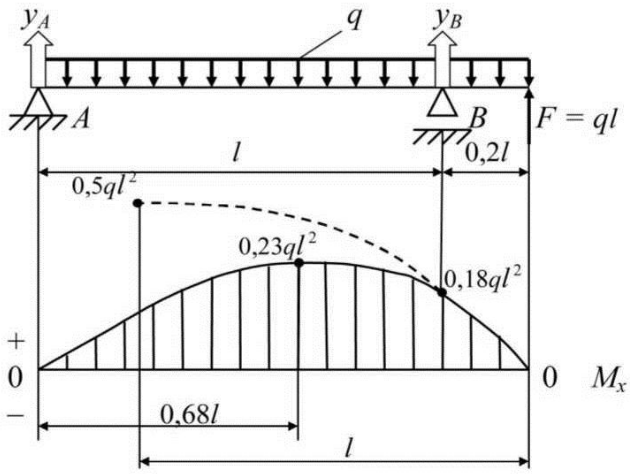
По ГОСТ 8239–72 для двутавра № 24а $A_д = 37{,}5$ см^2.

$$m_д : m_п : m_к = 37{,}5 : (9{,}3 \times 14) : \frac{3{,}14 \cdot 14{,}5^2}{4} = 37{,}5 : 130{,}2 : 165{,}1 = 1 : 3{,}5 : 4{,}4.$$

Ответ: двутавр № 24а, прямоугольник 9,3 × 14 см, круг диаметром 14,5 см; наиболее рационально двутавровое сечение, масса балки прямоугольного сечения в 3,5 раза больше, а круглого – в 4,4 раза больше, чем двутаврового, при одинаковой прочности.

Задача 2

Исходные данные:
швеллер № 40;
$l = 8{,}0$ м;
$[\sigma] = 100$ МПа.
Требуется определить:
q, F – ?



Решение:

1. Определяем реакции опор, составляя уравнения моментов относительно точек A и B:

$$\sum M_A = 0, \quad -q \cdot 1{,}2l \cdot 0{,}6l + F \cdot 1{,}2l + y_B\, l = 0, \quad y_B = -0{,}4\, ql;$$

$$\sum M_B = 0, \quad -y_A l + q \cdot 1{,}2l \cdot 0{,}4l + F \cdot 0{,}2l = 0, \quad y_A = 0{,}68ql.$$

Проверка:

$$\sum y = 0; \ \ y_A + y_B + F - q \cdot 1{,}2l = 0, \ \ 0{,}68ql - 0{,}48ql + ql - 1{,}2ql = 0.$$

2. Рассчитываем эпюру изгибающих моментов:

$$0 \le z_1 \le l,$$

$$M_{x_1} = y_A z_1 - \frac{q z_1^2}{2},$$

при $z_1 = 0$, $M_{x_1} = 0$;

при $z_1 = l$, $M_{x_1} = 0{,}68\, ql^2 - 0{,}5ql^2 = 0{,}18ql^2$.

Найдем положение вершины параболы:

$$\frac{dM_{x_1}}{dz_1} = y_A - q z_1 = 0, \quad z_1 = \frac{y_A}{q} = 0{,}68l,$$

при $z_1 = 0{,}68l$, $M_{x_1} = 0{,}23ql^2$.

$$0 \le z_2 \le 0{,}2l,$$

$$M_{x_2} = F z_2 - q\frac{z_2^2}{2};$$

при $z_2 = 0$, $M_{x_2} = 0$;

при $z_2 = 0{,}2l$, $M_{x_2} = 0{,}18ql^2$.

Найдем положение вершины параболы на втором участке:

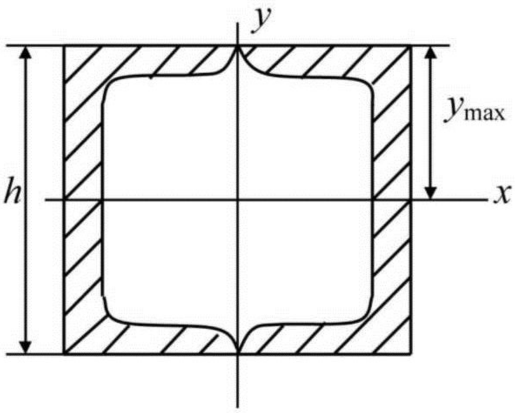
$$\frac{dM_{x_2}}{dz_2} = F - qz_2 = 0\,, \quad z_2 = \frac{F}{q} = l\,,$$

при $z_2 = l$, $M_{x_2} = 0{,}5\ ql^2$.

По рассчитанным данным строим эпюру изгибающих моментов. Опасным является сечение при $z_1 = 0{,}68l$, где $M_x = 0{,}23ql^2$.

2. Определим геометрические характеристики сечения прогона, которое состоит из двух сваренных швеллеров.

3. Сечение имеет две оси симметрии, которые и являются главными центральными осями.



Момент инерции одного швеллера № 40 относительно оси x (по ГОСТ 8240–72) $J_{x_1} = 15220\,\text{см}^4$. Для сварочного сечения, учитывая, что ось x для всего сечения совпадает с главной центральной осью швеллера: $J_x = 2J_{x_1}$, $J_x = 2 \cdot 152200 = 30440\ \text{см}^4$.

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{30440}{20} = 1522\,(\text{см}^3),$$

здесь $y_{max} = \dfrac{h}{2}$, $h = 40$ см (для швеллера № 40).

5. Из расчета на прочность при изгибе найдем допустимую нагрузку на прогон. Условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma],$$

где $M_x = 0{,}23ql^2$; $l = 8$ м; $W_x = 1522 \cdot 10^{-6}$ м^3; $[\sigma] = 100 \cdot 10^6$ Н/м^2, тогда

$$\frac{0{,}23q \cdot 8^2}{1522 \cdot 10^{-6}} \le 100 \cdot 10^6\,(\text{Н/м}^2),$$

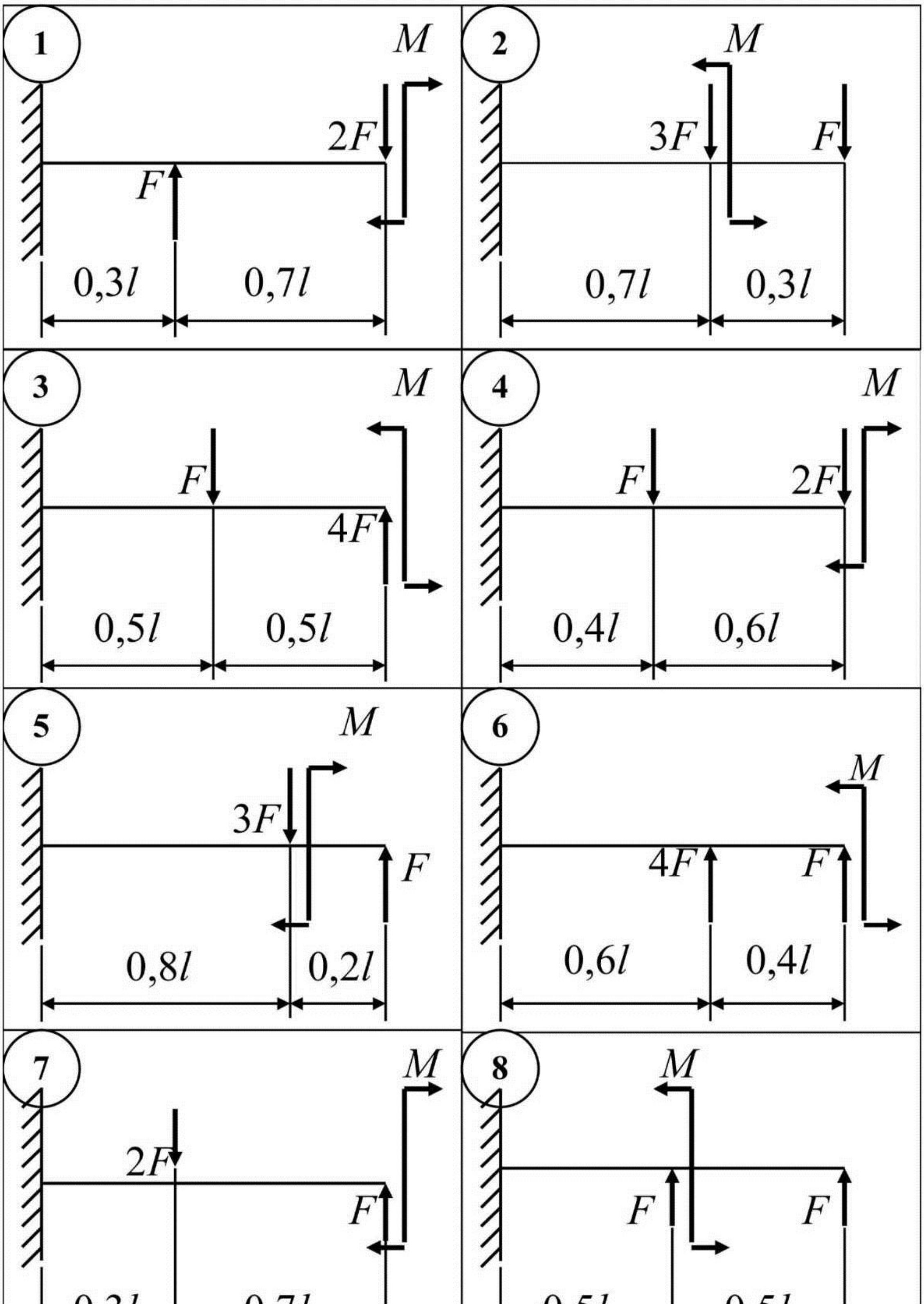
$$q \le \frac{1522 \cdot 100}{0{,}23 \cdot 8^2} = 10{,}3 \cdot 10^3\,(\text{Н/м}) = 10{,}3\ (\text{кН/м}),$$

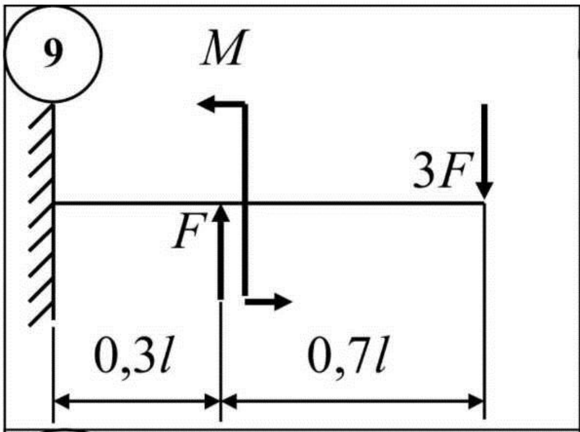
$$F = ql = 10{,}3 \cdot 8 = 82{,}4\ (\text{кН}).$$

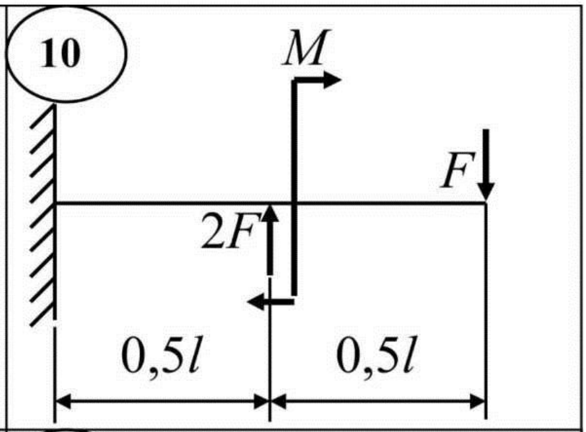
Ответ: распределенная нагрузка $q = 10{,}3$ кН/м, допустимая нагрузка $F = 82{,}4$ кН.

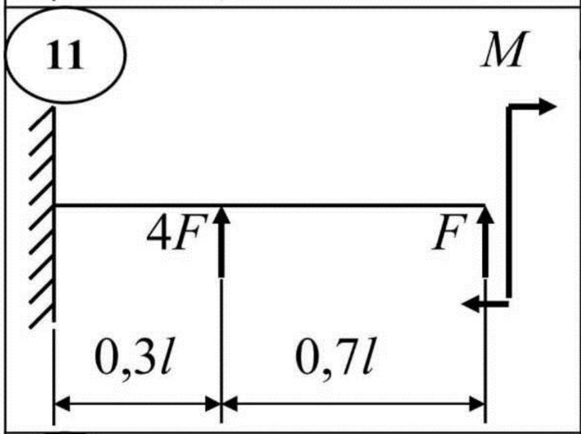
3.4. Варианты расчетных схем

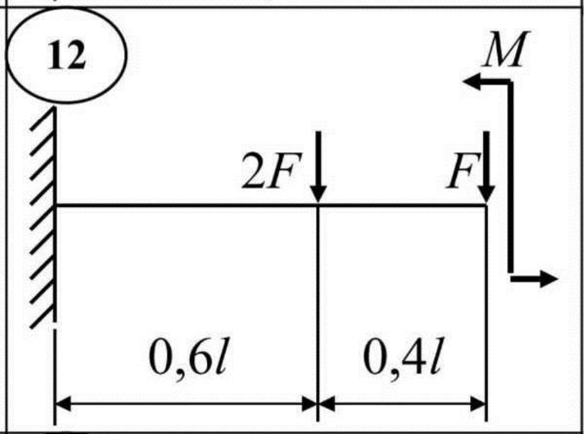
Задача 1

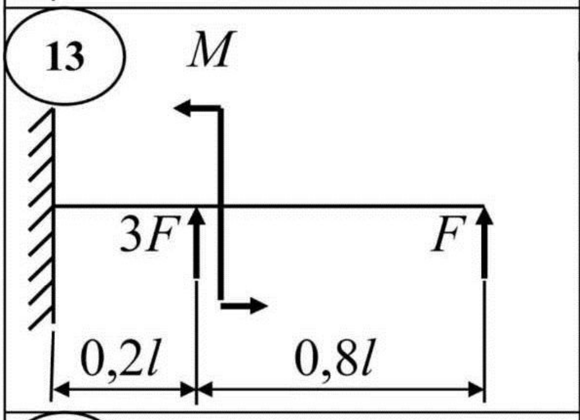


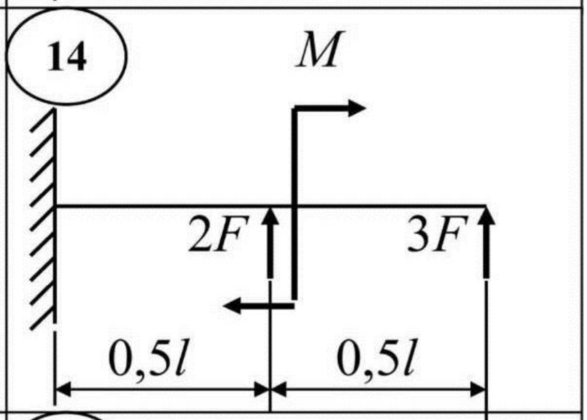

9
M
3F
F
0,3l
0,7l

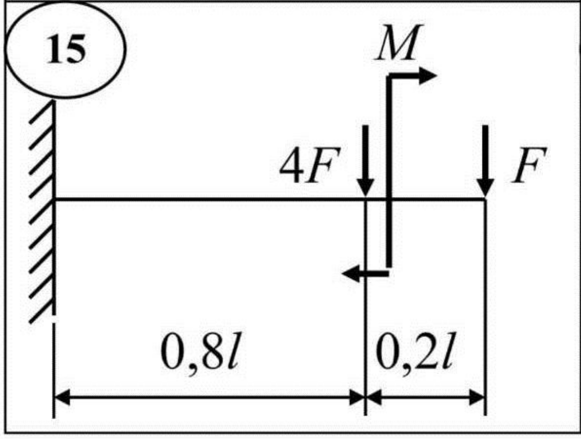

10
M
F
2F
0,5l
0,5l

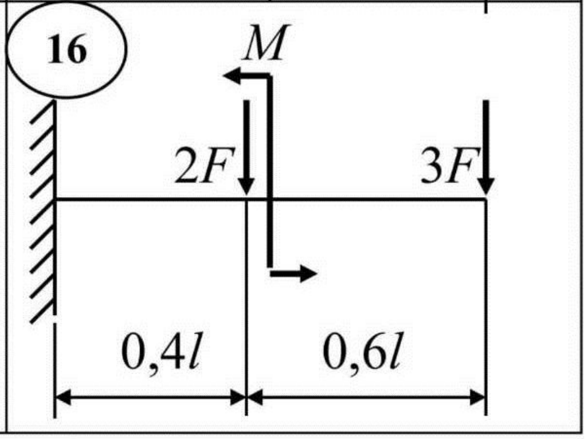

11
M
4F
F
0,3l
0,7l

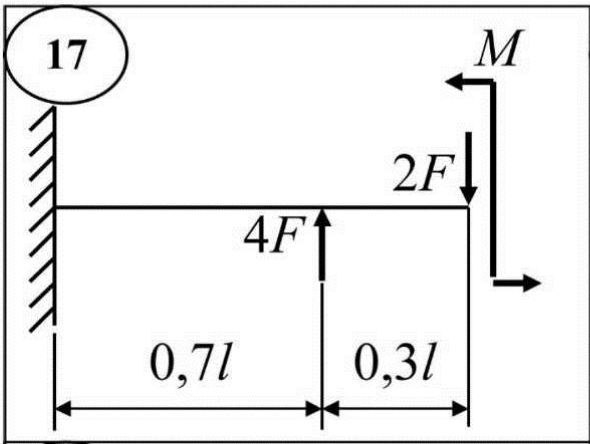

12
M
2F
F
0,6l
0,4l

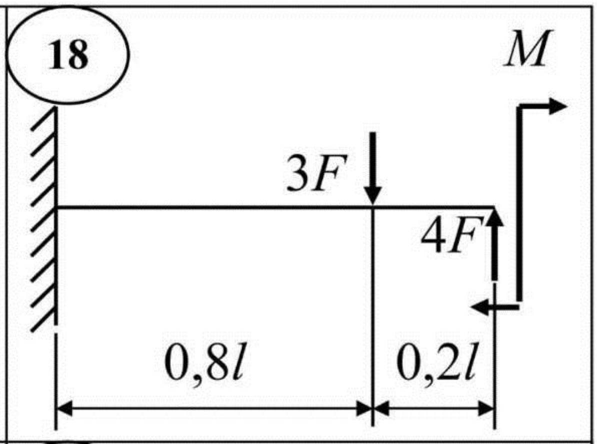

13
M
3F
F
0,2l
0,8l

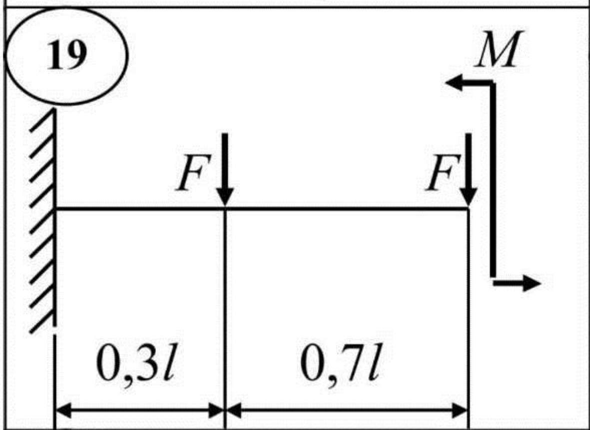

14
M
2F
3F
0,5l
0,5l

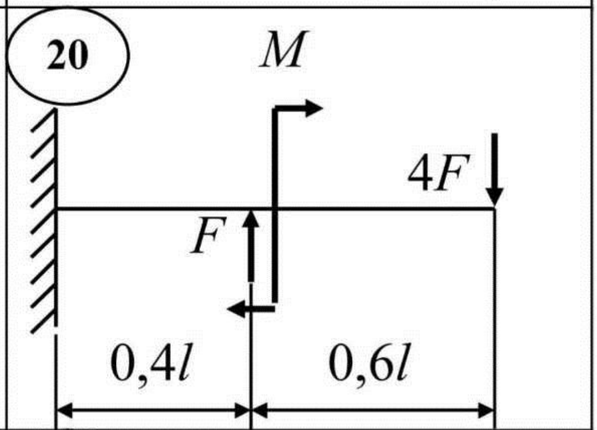

15
M
4F
F
0,8l
0,2l

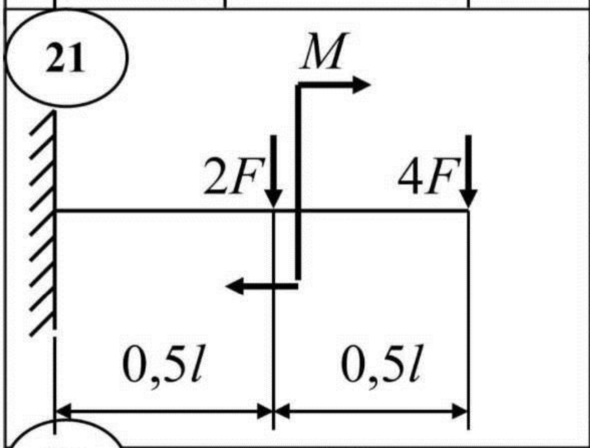

16
M
2F
3F
0,4l
0,6l

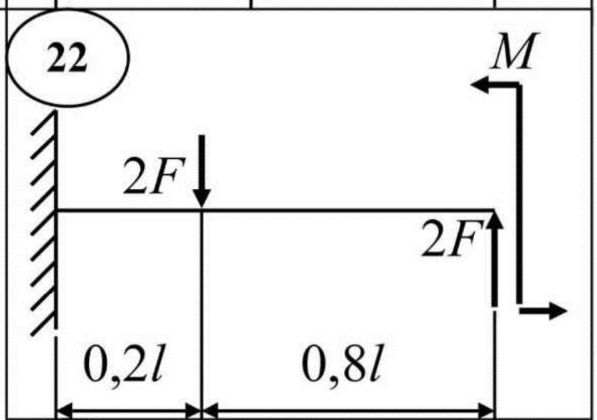

17
M
2F
4F
0,7l
0,3l

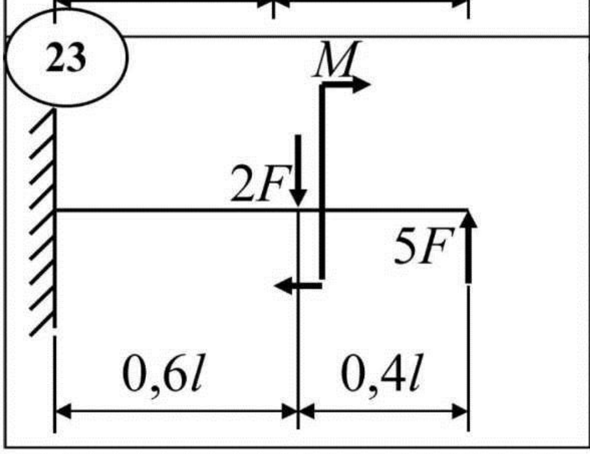

18
M
3F
4F
0,8l
0,2l

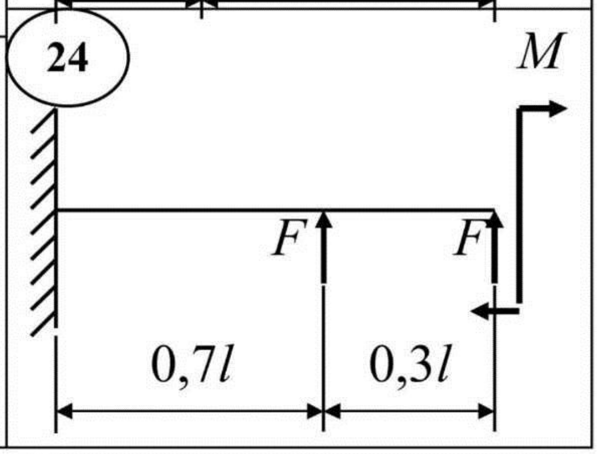

19
M
F
F
0,3l
0,7l

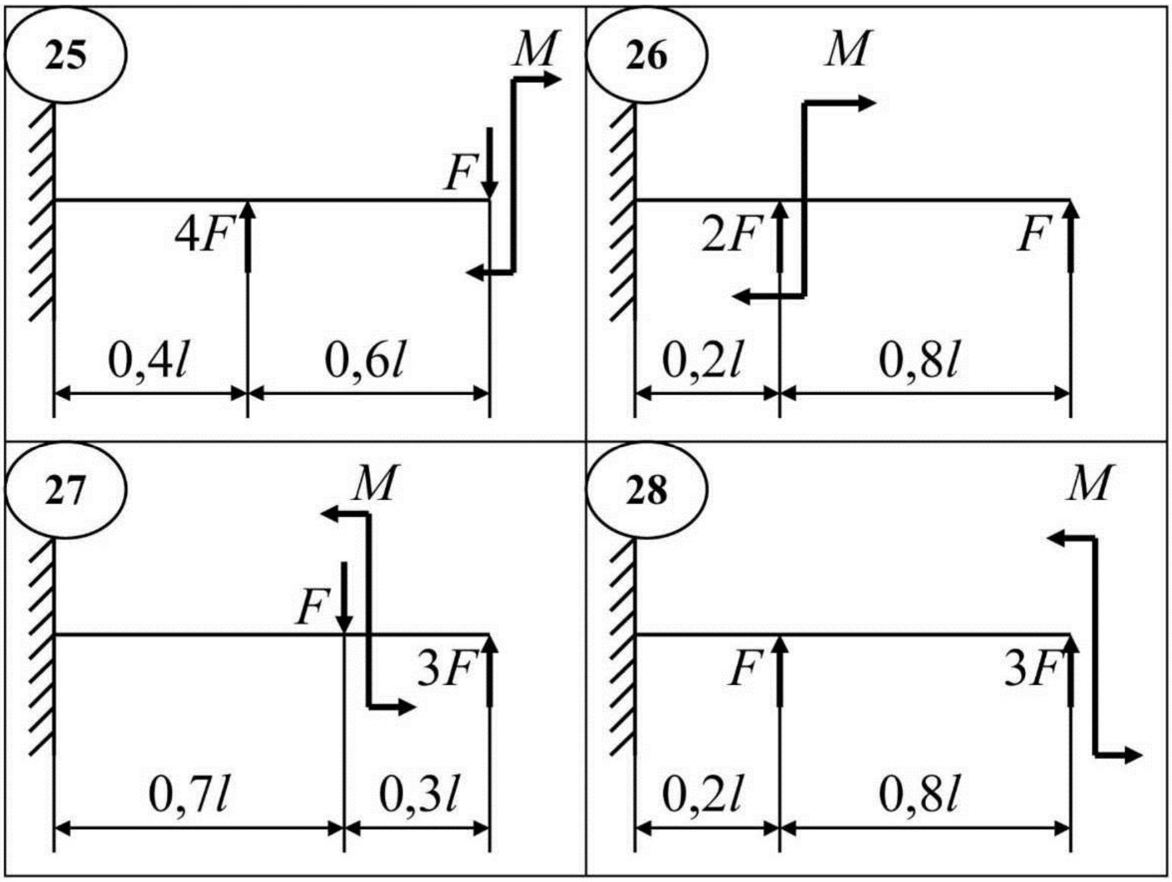

20
M
4F
F
0,4l
0,6l


21
M
2F
4F
0,5l
0,5l

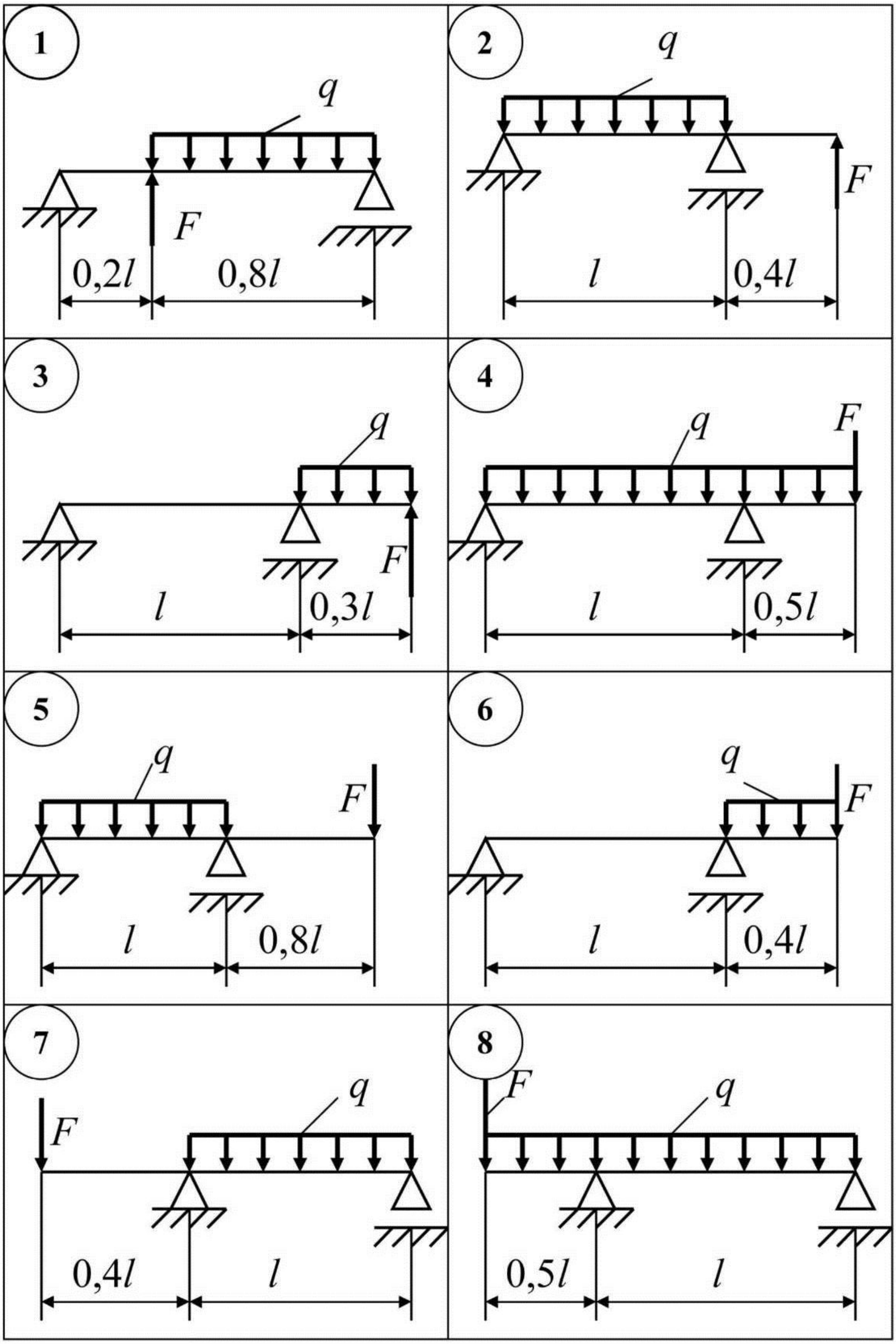

22
M
2F
2F
0,2l
0,8l


23
M
2F
5F
0,6l
0,4l

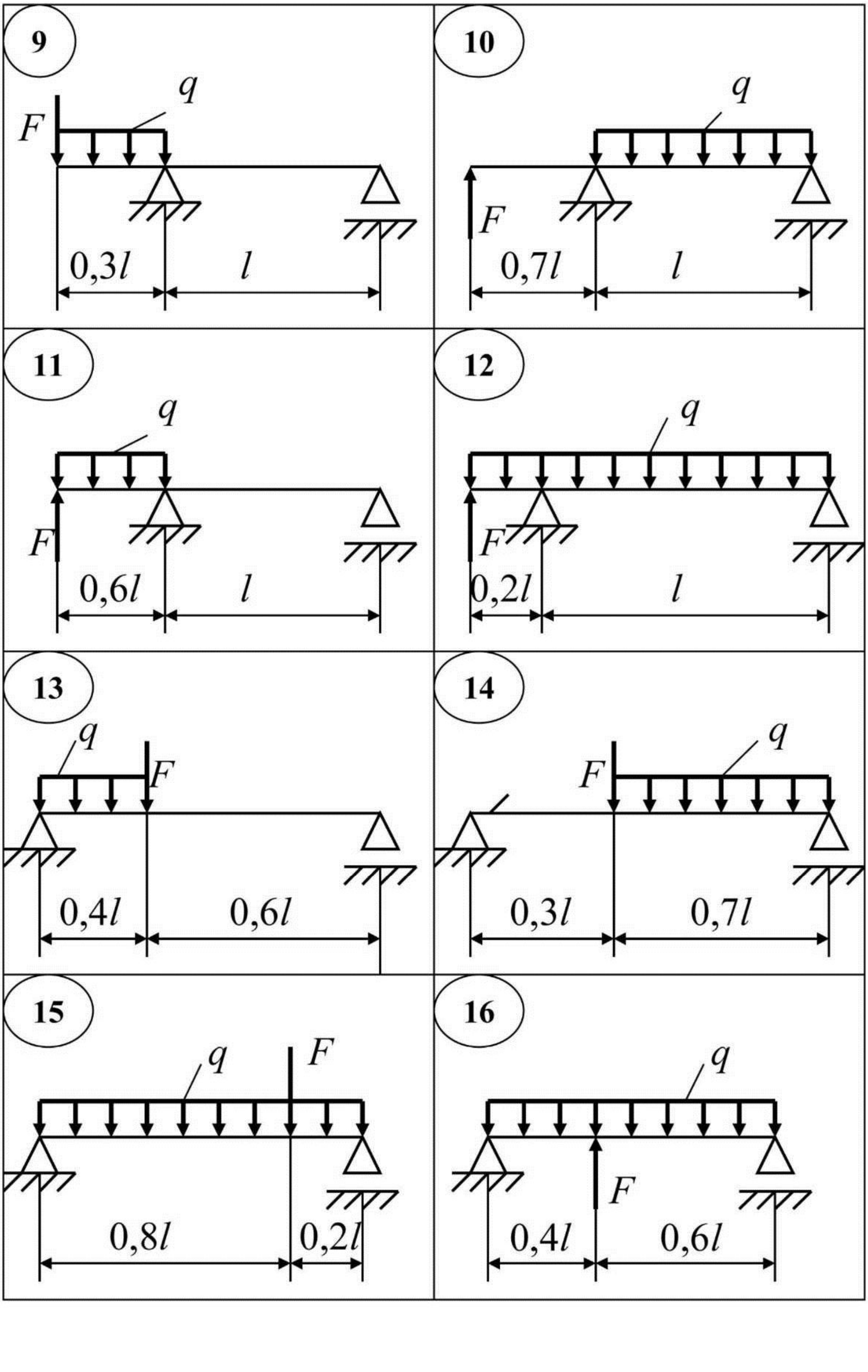

24
M
F
F
0,7l
0,3l

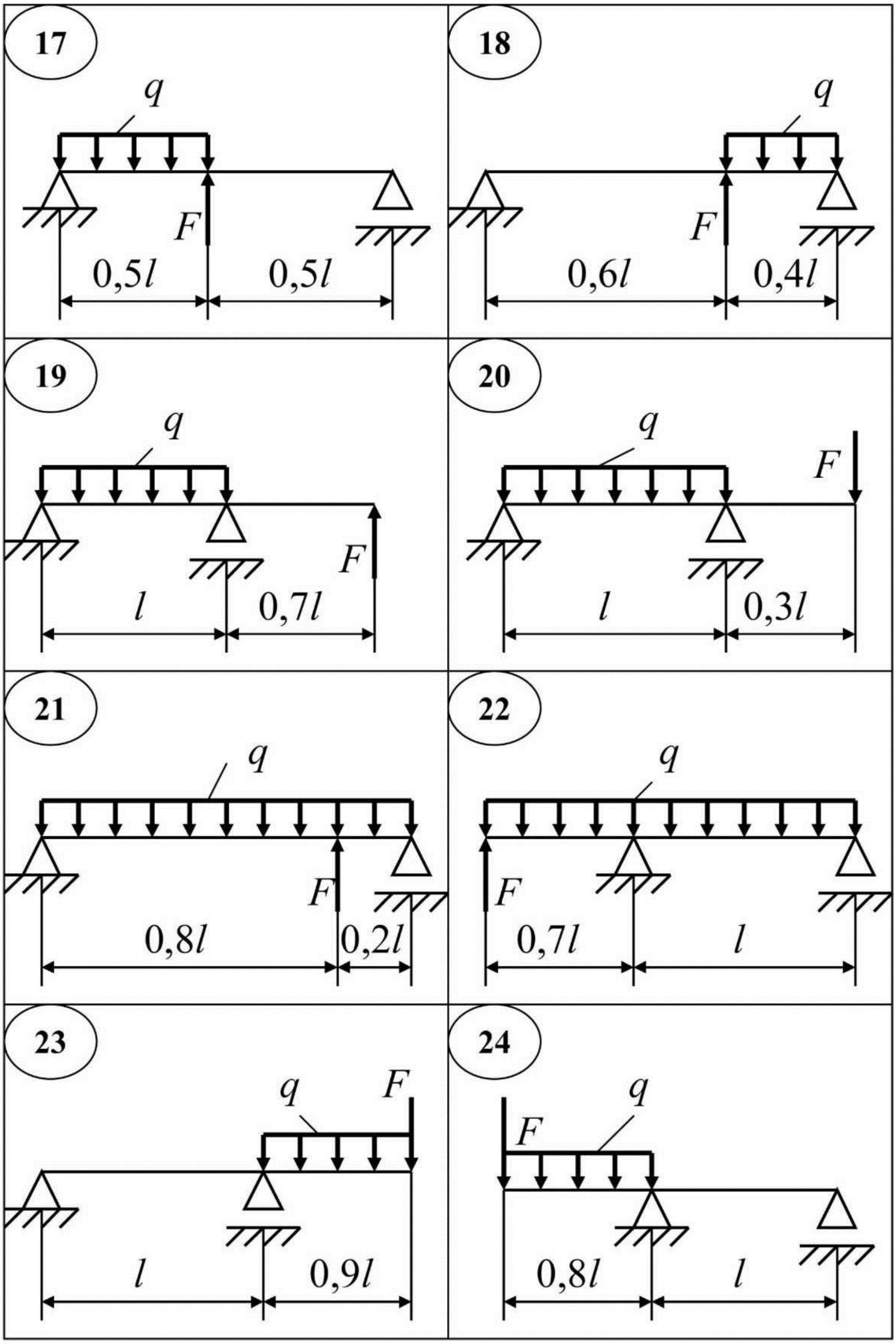

25
M
F
4F
0,4l
0,6l
26
M
2F
F
0,2l
0,8l
27
M
F
3F
0,7l
0,3l
28
M
F
3F
0,2l
0,8l

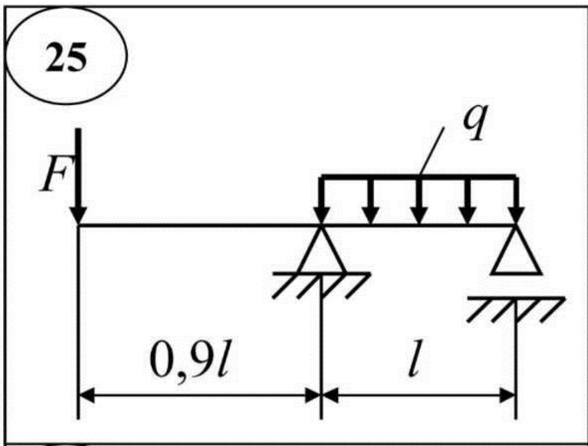
Задача 2

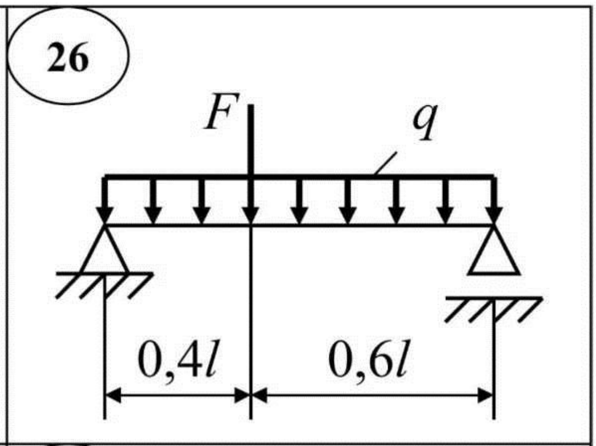


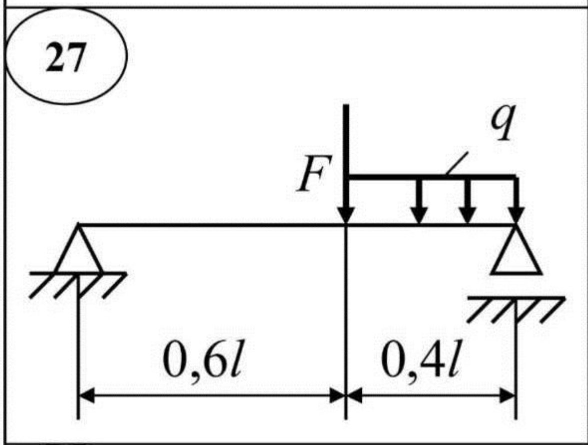
1
q
F
0,2l
0,8l
2
q
F
l
0,4l
3
q
F
l
0,3l
4
q
F
l
0,5l
5
q
F
l
0,8l
6
q
F
l
0,4l
7
F
q
0,4l
l
8
F
q
0,5l
l

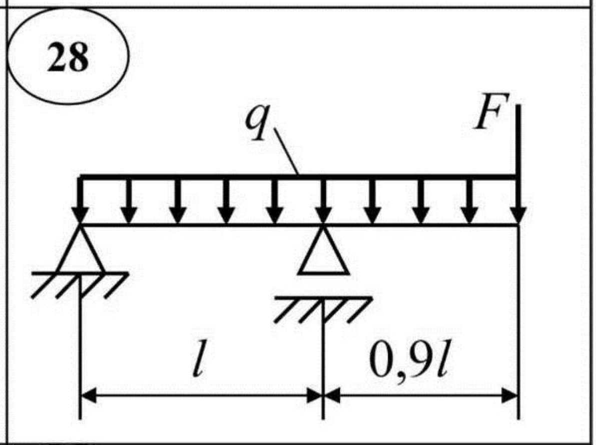

9
F
q
0,3l
l
10
q
F
0,7l
l
11
q
F
0,6l
l
12
q
F
0,2l
l
13
q
F
0,4l
0,6l
14
F
q
0,3l
0,7l
15
q
F
0,8l
0,2l
16
q
F
0,4l
0,6l

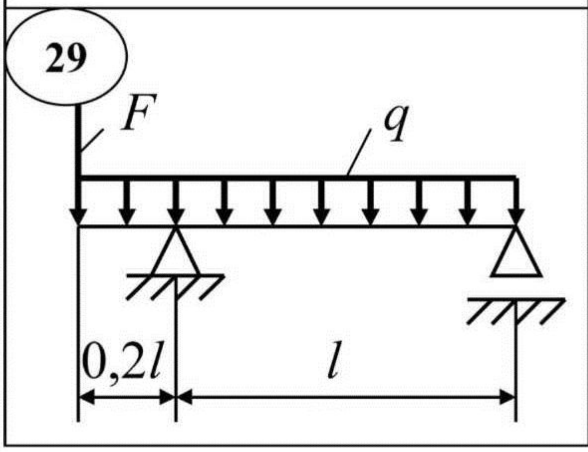

17
q
F
0,5l
0,5l
18
q
F
0,6l
0,4l
19
q
F
l
0,7l
20
q
F
l
0,3l
21
q
F
0,8l
0,2l
22
q
F
0,7l
l
23
q
F
l
0,9l
24
q
F
0,8l
l

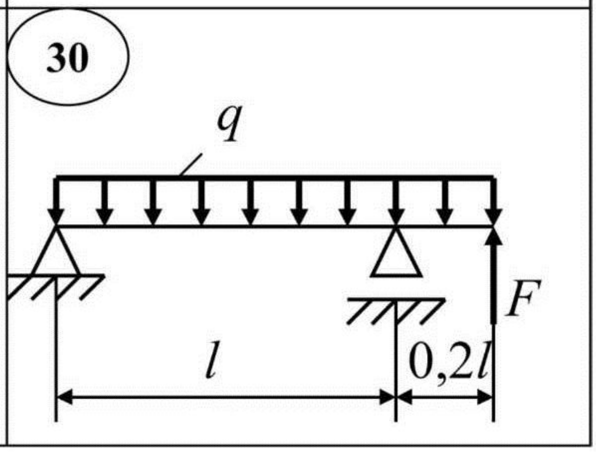

25
F
q
0,9l
l


26
F
q
0,4l
0,6l


27
F
q
0,6l
0,4l


28
q
F
l
0,9l


29
F
q
0,2l
l


30
q
F
l
0,2l

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Клячкин, В. Н. Сопротивление материалов : учеб. пособие / В. Н. Клячкин. – Ульяновск : УВГТУ, 1983. – 130 с.

2. Леденева, Н. Ф. Сборник задач по сопротивлению материалов : учеб.-метод. пособие для курсантов УВАУ ГА / Н. Ф. Леденева, И. Н. Карпунина. – Ульяновск : УВАУ ГА, 2001. – 53 с.

3. Степин, П. А. Сопротивление материалов : учебник для немашиностроительных специальностей вузов / П. А. Степин. – 8-е изд. – М. : Высшая школа, 1988. – 367 с.

4. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для втузов / В. И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.