

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
РАСЧЕТ ТРЕХОПОРНЫХ РАМ**

Задания и методические указания для выполнения
курсовых работ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение сопротивления материалов требует решения конкретных задач, что позволяет глубже понять теоретические основы дисциплины. В настоящей работе рассмотрены типовые задачи по следующим разделам курса сопротивления материалов:

1. Расчет статически неопределимых стержней, работающих на растяжение (сжатие).
2. Определение геометрических характеристик сечений.
3. Расчет трехопорных рам. Построение эпюр нормальных сил N_x , поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z .

По перечисленным темам студенты выполняют курсовые работы. Кроме примеров выполнения курсовых работ в методических рекомендациях, даны решения и некоторых других задач по излагаемым темам. Каждый раздел предваряется краткими сведениями из теории, необходимыми при решении рассматриваемых задач.

1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, ИСПЫТЫВАЮЩИХ РАСТЯЖЕНИЕ

Статически неопределимыми системами называются системы, для которых реакции связей и внутренние усилия не могут быть определены при использовании только уравнений статики (уравнений равновесия).

Степенью статической неопределимости стержневой системы называется число лишних неизвестных, определяемых по формуле

$$L = H - U, \quad (1.1)$$

где H – общее число неизвестных реакций связей и внутренних усилий; U – число независимых уравнений статики, которое может быть составлено для данной стержневой системы; L – число лишних неизвестных – степень статической неопределимости.

В зависимости от типа стержневой системы, типов входящих в нее стержневых элементов и видов их соединений, формула (1.1) может конкретизироваться.

Для определения неизвестных в статически неопределимых системах к уравнениям статики добавляются уравнения деформаций системы. Порядок решения статически неопределимых систем следующий:

1. Заданную систему превращают в основную систему.

Основной системой называется статически определимая и геометрически неизменяемая система, получаемая из заданной путем отбрасывания лишних связей и замены их неизвестными силами. Для статически неопределимой системы можно построить бесконечное число основных систем.

2. Составляют уравнения неразрывности деформаций – условия соответствия перемещений в основной системе в местах отброшенных связей перемещениям в тех же точках заданной системы.

3. Решая систему уравнений неразрывности деформаций, определяют неизвестные усилия, заменяющие действие отброшенных связей.

4. Проводят полный расчет основной системы - определяют необходимые усилия и перемещения в основной системе от действия заданной нагрузки и найденных неизвестных реакций связей.

Усилия и перемещения, определенные таким образом в точках основной системы будут равны усилиям и перемещениям в соответствующих точках заданной системы.

Сложные статически неопределимые системы, в том числе статически неопределимые фермы (элементы ферм работают на растяжение, сжатие) и статически неопределимые рамы, рассматриваются в курсе строительной механики стержневых систем. В курсе сопротивления материалов рассматриваются обычно простейшие статически неопределимые системы, к которым относятся:

а) прямые стержни постоянного, кусочно-постоянного и переменного сечений, закрепленные с двух сторон, от нагрузки действующей вдоль оси стержня;

б) системы шарнирно соединяемых стержней с возможным включением жестких недеформируемых элементов.

1.1. Статически неопределимый стержень кусочно-постоянного сечения

Рассмотрим стержень кусочно-постоянного сечения, закрепленный с двух концов, под действием продольных сосредоточенных сил F_k и собственного веса γ (рис. 1.1).

Требуется: определить реакции в закреплениях, внутренние нормальные силы и напряжения в характерных сечениях, построить

эпюры нормальных сил и напряжений вдоль оси стержня, определить перемещение в сечении I-I (рис. 1.1).

Исходные данные

$$\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3$$

$$E = 2,0 \times 10^5 \text{ МПа}$$

$$a_1 = 25 \text{ см}; \quad A_1 = A;$$

$$a_2 = 15 \text{ см}; \quad A_2 = 4A;$$

$$a_3 = 10 \text{ см}; \quad A_3 = 4A;$$

$$a_4 = 20 \text{ см}; \quad A_4 = 2A;$$

$$A = 20 \text{ см}^2;$$

$$F_1 = 1,0 \text{ кН}; \quad F_2 = 0,5 \text{ кН};$$

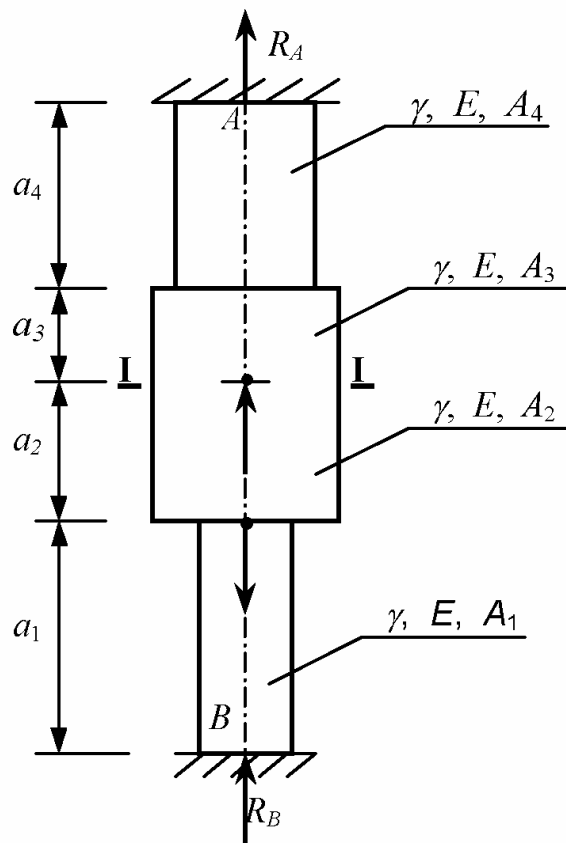


Рис. 1.1. Схема статически неопределимого стержня кусочно-переменного сечения

На концах стержня A и B , в закреплениях возникают реакции R_A и R_B . Следовательно, общее число неизвестных - $N = 2$. Для системы сил действующих вдоль одной прямой линии можно составить только одно уравнение равновесие - $Y = 1$.

Следовательно

$$L = N - Y = 2 - 1 = 1.$$

Таким образом, прямой стержень, закрепленный с двух концов, при силах, действующих на него вдоль его оси, является один раз статически неопределимым.

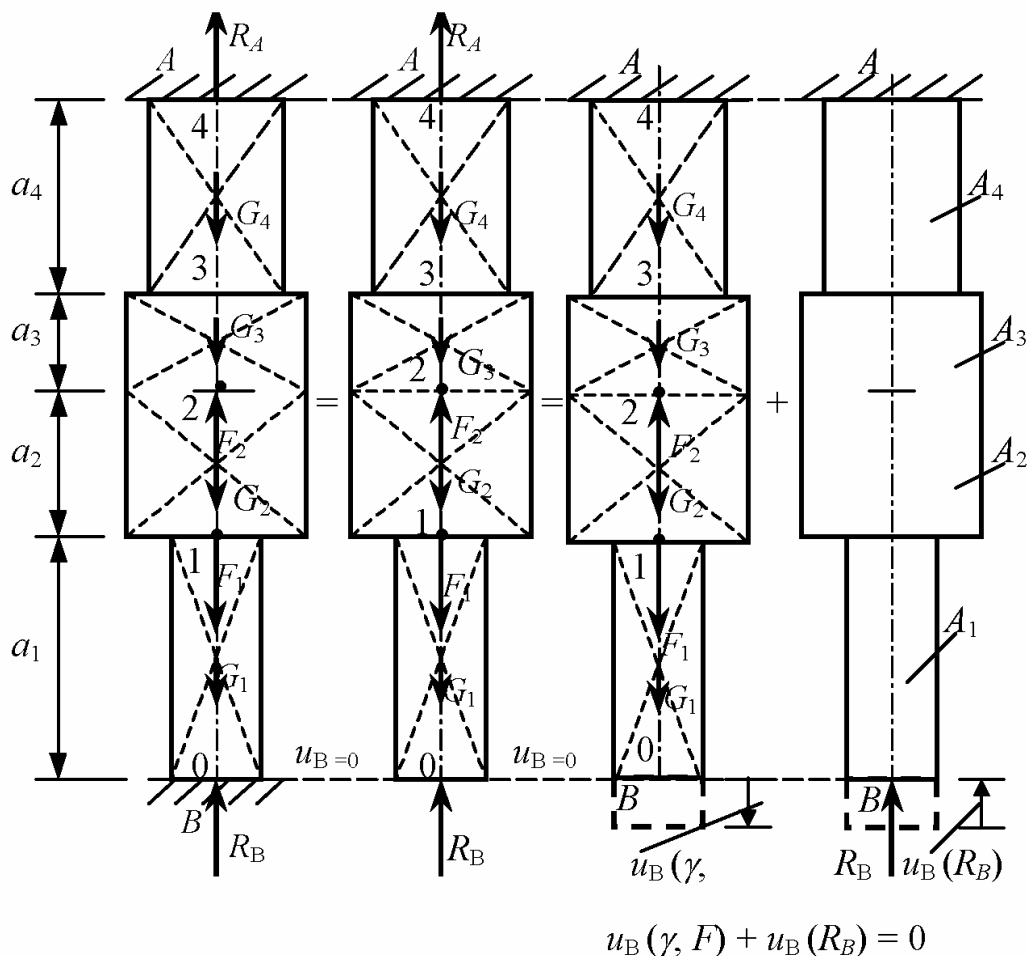


Рис. 1.2. Схема деформирования основной системы

Основную систему получим, отбросив закрепление нижней опоры в сечении B и заменив действие опоры неизвестной реакцией R_B . Условием эквивалентности основной и заданной систем является равенство нулю перемещения точки B , так как в заданной системе эта точка закреплена.

На рис. 1.2 показаны заданная и основная системы и процесс деформирования основной системы от действия заданной нагрузки (сосредоточенных сил F_1 и F_2 и собственного веса стержня G) и неизвестной реакции R_B . Знак равенства для последовательных схем стержня указывает на эквивалентность напряженно деформированного состояния заданной и основной систем.

Условие неразрывности деформаций – равенство нулю перемещения на опоре B для основной системы, на основе принципа независимости действия сил, запишется в виде

$$u_B = u_B(\gamma, F, R_B) = u_B(\gamma, F) + u_B(R_B) = 0, \quad (1.2)$$

где $u_B(\gamma, F)$ - перемещение точки B от действия внешних продольных сил F_1 и F_2 и собственного веса стержня γ ; $u_B(R_B)$ - перемещение сечения B от действия неизвестной реакции R_B .

Для определения внутренних усилий и перемещений в стержне его разбивают на участки. Границами участков являются сечения стержня, где приложены сосредоточенные внешние силы или меняется площадь поперечного сечения стержня. Рассматриваемый стержень состоит из четырех участков. Пронумеруем граничные сечения стержня, присвоив точке B нулевой номер. В этом случае номера участка будет совпадать с номером верхнего сечения участка стержня. Очевидно, в основной системе перемещение верхнего сечения стержня в точке A равно нулю, так как он закреплен. Тогда перемещение точки B равно сумме удлинений участков стержня

$$u_B = \sum \Delta_k, \quad (1.3)$$

где Δ_k - удлинение k -го участка.

Для стержня с закрепленным верхним концом (точка A) каждый участок стержня растягивается силой N_{k-1}^B , равной сумме продольных внешних сил, приложенных не выше нижнего конца рассматриваемого участка стержня, и веса нижележащих участков стержня, а также собственным весом участка стержня

$$\Delta_k = \Delta_k(N_{k-1}^B) + \Delta_k(G_k), \quad (1.4, a)$$

или

$$\Delta_k = \Delta_k(N_k^H) - \Delta_k(G_k). \quad (1.4, б)$$

Здесь и далее обозначено N_i^B, N_i^H - нормальные силы в сечениях выше $(^B)$ и ниже $(^H)$ i -ой точки (сечения) на бесконечно малую величину; G_k - собственный вес участка ($G_k = \gamma \cdot A_k \cdot a_k$); A_k, a_k - площадь и длина k -го участка.

При последовательном проходе характерных сечений от нижнего нулевого сечения к верхнему, внутренние усилия определяются по формулам

$$N_k^H = N_{k-1}^B + G_k; \quad N_k^B = N_k^H \pm F_{(k)}, \quad (1.5)$$

где $F_{(k)}$ - сосредоточенная сила, приложенная в k -ом сечении. Знак принимается в зависимости от направления действия силы (+ при направлении силы $F_{(k)}$ вниз).

Значения внутренних усилий N_i^B, N_i^H различаются на величину сосредоточенной силы приложенной в i -том сечении. При отсутствии продольной внешней силы в сечении эти внутренние усилия равны.

Удлинение участка стержня постоянного сечения длиной a_k от действия сосредоточенной силы N_{k-1}^B , приложенной к нижней границе участка, определяется по формуле

$$\Delta_k(N_{k-1}^B) = \frac{N_{k-1}^B a_k}{EA_k}. \quad (1.6)$$

Удлинение k -го участка от собственного веса равно

$$\Delta_k(G_k) = \frac{\gamma a_k^2}{2E} = \frac{G_k a_k}{2EA_k}. \quad (1.7)$$

Суммируя удлинения участка нормальной силы N_{k-1}^B и собственного веса, с учетом формул (1.4а,б) получим

$$\Delta_k(F, \gamma) = \left(N_{k-1}^B + \frac{G_k}{2} \right) \frac{a_k}{EA_k} = \left(N_k^H - \frac{G_k}{2} \right) \frac{a_k}{EA_k}. \quad (1.8)$$

В соответствии с исходными данными, вычислим собственные веса участков и всего стержня:

$$\gamma = 78,5 \text{ кН/м}^3 = 78,5 \cdot 10^3 \text{ Н/см}^3 \cdot 10^{-6} = 0,0785 \text{ Н/см}^3;$$

$$G_1 = 0,0785 \times 20 \times 25 = 39,25 \text{ Н};$$

$$G_2 = 0,0785 \times 4 \times 20 \times 15 = 94,2 \text{ Н};$$

$$G_3 = 0,0785 \times 4 \times 20 \times 10 = 62,8 \text{ Н};$$

$$G_4 = 0,0785 \times 2 \times 20 \times 20 = 62,8 \text{ Н};$$

$$G = \sum G_k = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = 259,8 \text{ Н};$$

Определяем значения внутренних усилий в характерных сечениях в основной системе от действия внешней нагрузки:

$$N_0^B(F, \gamma) = 0; \quad N_0^B = G_1 = 39,25 \text{ Н};$$

$$N_1^B(F, \gamma) = N_1^H(F, \gamma) + F_1 = 39,25 + 1000 = 1039,25 \text{ Н};$$

$$N_2^H(F, \gamma) = N_1^B(F, \gamma) + G_2 = 1039,25 + 94,2 = 1133,45 \text{ Н};$$

$$N_2^B(F, \gamma) = N_2^H(F, \gamma) - F_2 = 1133,45 - 500 = 633,45 \text{ Н};$$

$$N_3^H(F, \gamma) = N_2^B(F, \gamma) + G_3 = 633,45 + 62,8 = 696,25 \text{ Н};$$

$$N_3^B = N_3^H = 696,25 \text{ Н};$$

$$N_4^H(F, \gamma) = N_3^B(F, \gamma) + G_4 = 696,25 + 62,8 = 759,05 \text{ Н};$$

Проверка: из условий равновесия стержня в целом от действия внешних сил

$$N_4^H(F, \gamma) = F_1 - F_2 + G = 1000 - 500 + 259,05 = 759,05 \text{ Н}.$$

Согласно формулам (1.4 – 1.7) получим

$$\Delta_1(F, \gamma) = \Delta_1(G_1) = \frac{G_1 \cdot a_1}{2EA_1} = \frac{39,25 \cdot 25}{2EA} = \frac{491}{EA} \text{ (Н, см)};$$

$$\Delta_2(F, \gamma) = \Delta_2(N_1^B) + \Delta_2(G_2) = \left(1039,25 + \frac{94,2}{2} \right) \frac{15}{4EA} = \frac{4074}{EA} \text{ (Н, см)};$$

$$\Delta_3(F, \gamma) = \Delta_3(N_2^B) + \Delta_3(G_3) = \left(633,45 + \frac{62,8}{2} \right) \frac{10}{4EA} = \frac{1662}{EA} \text{ (Н, см)};$$

$$\Delta_4(F, \gamma) = \Delta_4(N_3^B) + \Delta_4(G_4) = \left(696,25 + \frac{62,8}{2} \right) \frac{20}{2EA} = \frac{7276}{EA} \text{ (Н, см)};$$

$$u_B(F, \gamma) = \sum_k \Delta_k(F, \gamma) = \frac{491 + 4074 + 1662 + 7276}{EA} = \frac{13500}{EA} \text{ (Н, см)};$$

Здесь в скобках показаны размерности величин используемых в вычислениях.

Определяем перемещение в основной системе нижнего конца стержня от неизвестной реакции R_B

$$\begin{aligned} u(R_B) &= -\frac{R_B}{E} \left(\frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} + \frac{a_3}{A_3} + \frac{a_4}{A_4} \right) = \\ &= -\frac{R_B}{EA} \left(25 + \frac{15 + 10}{4} + \frac{20}{2} \right) = -\frac{41,25}{EA} R_B. \end{aligned}$$

Из условия неразрывности (1.2) определяем неизвестную реакцию

$$u_B = u_B(\gamma, F) + u_B(R_B) = \frac{13500}{Ea} - \frac{41,25}{EA} R_B = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{13500}{41,5} = 327,25 \text{ Н.}$$

Окончательно, внутренние усилия в заданной системе определяются суммированием внутренних усилий в основной системе от действия внешних нагрузок $F_{(k)}$ и собственного веса γ и реакции R_B

$$N = N(F, \gamma) - R_B. \quad (1.9)$$

Вычисляем внутренние усилия в заданной системе:

$$N_0^B = N_0^B(F, \gamma) - R_B = -327,25 \text{ Н;}$$

$$N_1^H = N_1^H(F, \gamma) - R_B = 39,25 - 327,25 = -288,0 \text{ Н;}$$

$$N_1^B = N_1^B(F, \gamma) - R_B = 1039,25 - 327,25 = -712,0 \text{ Н;}$$

$$N_2^H = N_2^H(F, \gamma) - R_B = 1133,45 - 327,25 = 806,2 \text{ Н;}$$

$$N_2^B = N_2^B(F, \gamma) - R_B = 633,45 - 327,25 = -306,2 \text{ Н;}$$

$$N_3^B = N_3^H = N_3^H(F, \gamma) - R_B = 696,25 - 327,25 = -369,0 \text{ Н;}$$

$$R_A = N_4^H = N_4^H(F, \gamma) - R_B = 759,05 - 327,25 = 431,8 \text{ Н;}$$

Проверка: выполнение условие равновесия стержня $\sum X = 0$
 $-R_B + G + F_1 - F_2 - R_A = -327,25 + 259,05 + 1000 - 500 - 431,8 = 0.$

Отметим, что данная проверка является неполной, она проверяет лишь правильные значения нормальных сил в сечениях при вычисленном значения реакции R_B . Если реакция определена не верно, то данная проверка не сможет выявить ошибки. Глобальная проверка правильности вычислений будет проведена ниже.

Для построения эпюры нормальных напряжений вдоль оси стержня, определим значения напряжения в опорных сечениях. При принятой нумерации границ участков напряжения в сечениях определяются пор формулам:

$$\sigma_k^H = \frac{N_k^H}{A_k}; \quad \sigma_k^B = \frac{N_k^B}{A_{k+1}}.$$

$$\sigma_B = \sigma_0 = \frac{N_0}{A_1} = \frac{-327,25}{20} = -16,34 \text{ Н/см}^2 = -163,6 \text{ кПа};$$

$$\sigma_1^H = \frac{N_1^H}{A_1} = \frac{-288,0}{20} 10 = -144,0 \text{ кПа};$$

$$\sigma_1^B = \frac{N_1^B}{A_2} = \frac{712,0}{20} 10 = 89,0 \text{ кПа};$$

$$\sigma_2^H = \frac{N_2^H}{A_2} = \frac{806,2}{80} 10 = 100,8 \text{ кПа};$$

$$\sigma_2^B = \frac{N_2^B}{A_3} = \frac{306,2}{80} 10 = 38,3 \text{ кПа};$$

$$\sigma_3^H = \frac{N_3^H}{A_3} = \frac{369,0}{80} 10 = 46,1 \text{ кПа};$$

$$\sigma_3^B = \frac{N_3^B}{A_4} = \frac{369,0}{40} 10 = 92,2 \text{ кПа};$$

$$\sigma_A = \sigma_4^H = \frac{N_4^H}{A_4} = \frac{431,8}{40} 10 = 108,0 \text{ кПа}.$$

Как видно из результатов расчета и графиков, приведенных на рис. 1.3, эпюра нормальных напряжений σ_x может иметь по отношению к эпюре нормальных сил N_x дополнительные точки разрыва на границах изменения площади поперечного сечения стержня.

Проверка. Контроль правильности проведенных расчетов может быть проведен проверкой выполнения условий неразрывности деформаций (перемещений), в частности, равенством нулю перемещения в защемлении стержня на опоре B :

$$u_B = \int_l \frac{N(x)}{EA(x)} dx = \frac{1}{E} \int_l \sigma_x dx = \frac{1}{E} A_\sigma = 0, \quad (1.10)$$

где $A_\sigma = \int_l \sigma_x dx$ - площадь эпюры нормальных напряжений.

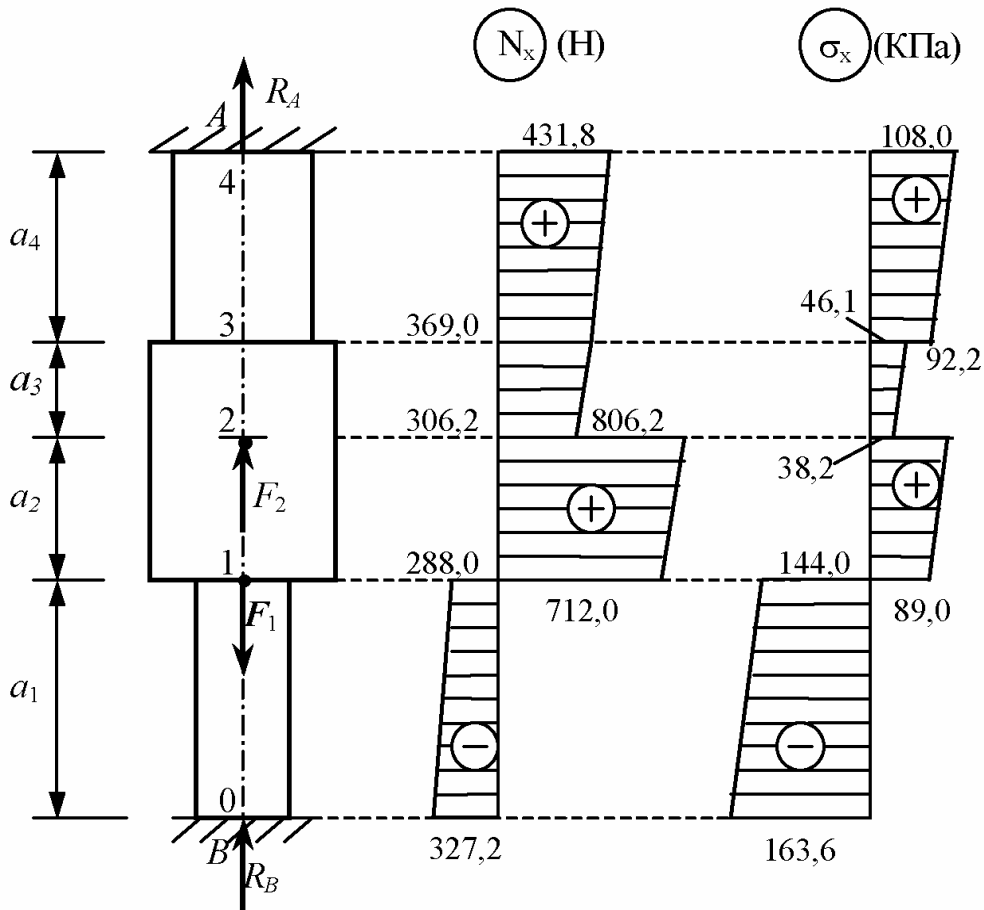


Рис. 1.3. Эпюры нормальных сил и нормальных напряжений

Таким образом, критерием правильности решения задачи расчета статически неопределимого прямого стержня, защемленного с двух концов, при действии сил, действующих вдоль оси стержня, является равенство нулю площади эпюры нормальных напряжений (с учетом знаков напряжений).

Для оценки точности вычислений подсчитаем независимо площади положительной и отрицательной частей эпюры напряжений:

$$\begin{aligned}
 A_{\sigma_+} &= \frac{108 + 92,2}{2} 25 + \frac{46,1 + 38,2}{2} 15 + \frac{100,8 + 144,0}{2} 10 = \\
 &= 1423,5 + 421,5 + 2002 = 3848;
 \end{aligned}$$

$$A_{\sigma-} = -\frac{163,6 + 144,0}{2} 25 = -3850;$$

$$A_{\sigma} = A_{\sigma+} + A_{\sigma-} = 3848 - 3850 = -2;$$

Относительную погрешность (в процентах) определяем как отношение абсолютного значения полученной невязки (A_{σ}) к значению $A_{\sigma+}$ (или $A_{\sigma-}$)

$$\delta = \left| \frac{A_{\sigma}}{A_{\sigma-}} \right| \cdot 100 = \frac{2}{3500} 100 = 0,06 \%$$

Отметим особенности эпюр нормальных сил и нормальных напряжений при центральном растяжении (сжатии) прямых стержней (эпюры должны быть построены в масштабе, для чего принимают независимые масштабы внутренних усилий и напряжений и масштаб длин стержня):

а) наклон линий эпюры нормальных сил к оси стержня больше на участках с большей площадью поперечного сечения;

б) наклон линий эпюры нормальных напряжений (для стержней из однородного материала – $E = const$, $\gamma = const$) на всех участках одинаков (линии параллельны);

в) эпюра нормальных сил имеет скачки (разрывы) в точках приложения сосредоточенных продольных сил на величину этих сил;

г) эпюра нормальных напряжений имеет дополнительные точки разрыва напряжений в местах изменения поперечных сечений стержня.

Для определения перемещения какого-либо сечения стержня, стержень разрезают в заданном сечении и рассматривают его верхнюю или нижнюю часть, заменяя действие отброшенной части известным из предыдущего расчета нормальным усилием N_i (i – номер сечения, где определяется перемещение). Если в рассматриваемом сечении приложена внешняя сосредоточенная сила, то сечение проводят чуть заглубляясь в выбранную часть стержня, т.е. в верхней части стержня прикладывают нормальную силу N_i^B , а к нижней – N_i^H . Вычисление перемещения в сечении для верхней и нижней частей стержня можно использовать для дополнительной проверки правильности проведенных расчетов. Перемещения в рассматриваемом сечении, полученные при рассмотрении верхней и нижней частей, должны совпадать с

точностью до знака. Знак перемещения зависит от принятого положительного направления перемещения (оси). В расчетах удобно принимать за положительное направление для рассматриваемой части стержня - направление внешней нормали к сечению. Для верхней и нижней частей стержня эти направления приняты противоположными, соответственно, перемещения для верхней и нижней частей получаются противоположными по знаку.

Рассчитаем перемещение сечения I-I (см. рис. 1.1). Нижняя и верхняя части стержня показаны на рис 1.4,а и б.

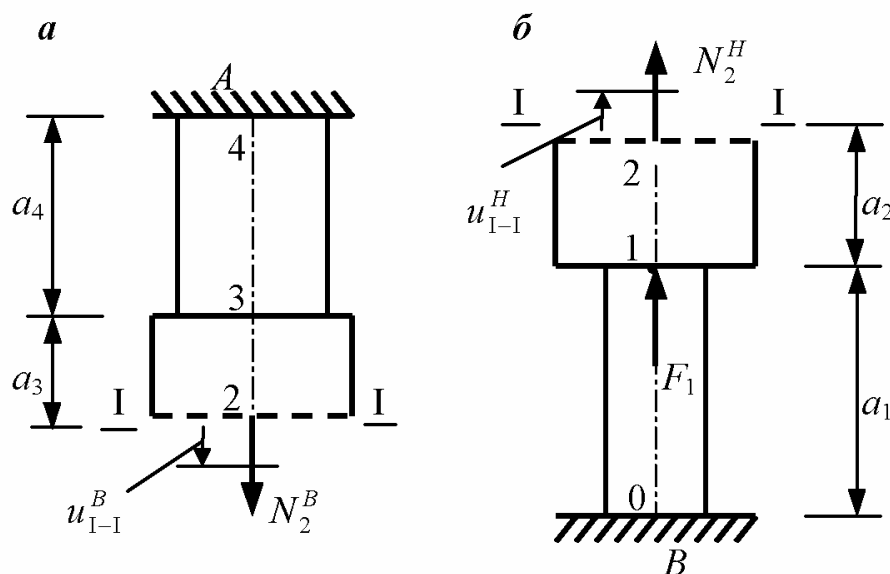


Рис.1.4. К определению перемещения сечения I-I
 а – верхняя часть стержня
 б – нижняя часть стержня

Перемещение сечения стержня равно сумме удлинений участков рассматриваемой части стержня.

Согласно рис. 1.4,а получим для верхней части стержня

$$\begin{aligned}
 u_{I-I}^B &= \Delta_3(N_2^B) + \Delta_3(G_3) + \Delta_4(N_2^B + G_3) + \Delta_4(G_4) = \\
 &= \left(N_2^B + \frac{G_3}{2}\right) \frac{a_3}{EA_3} + \left(N_2^B + G_3 + \frac{G_4}{2}\right) \frac{a_4}{EA_4} = \\
 &= \frac{1}{EA} \left[\left(306,2 + \frac{62,8}{2}\right) \frac{10}{4} + \left(306,2 + 68,2 + \frac{68,2}{2}\right) \frac{20}{2} \right] = \frac{4840}{EA} \text{ (Н, см)}.
 \end{aligned}$$

Для нижней части стержня (рис. 1.4,б) имеем

$$u_{I-I}^H = \Delta_2(N_2^H) - \Delta_2(G_2) + \Delta_1(N_2^B - F_1 - G_2) - \Delta_1(G_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(N_2^H - \frac{G_2}{2} \right) \frac{a_2}{EA_2} + \left(N_2^H - F_1 - G_2 - \frac{G_1}{2} \right) \frac{a_1}{EA_1} = \\
&= \frac{1}{EA} \left[\left(806,2 - \frac{94,2}{2} \right) \frac{15}{4} + \left(806,2 - 1000 - 94,2 + \frac{39,25}{2} \right) \cdot 25 \right] = \\
&= - \frac{4840}{EA} \text{ (Н, см)}.
\end{aligned}$$

Как видно из результатов вычислений перемещения сечения I-I, вычисленные для верхней и нижней частей стержня совпадают с точностью до знака. В случае различных численных значений относительная точность вычисления перемещения может быть определена по формуле

$$\delta u = \left| \frac{|u^B| - |u^H|}{u^B} \right| \cdot 100\%.$$

Невязка не должны превышать, принятой в инженерных расчетах величины – 3%.

Заметим, что при вычислении перемещений u_{I-I}^B и u_{I-I}^H не использовалась сила F_2 . Нет этой силы и на рис. 1.4,а и рис. 4.1,б. В расчетах эта сила учитывается разностью значений внутренних усилий N_2^B и N_2^H ($N_2^B = N_2^H - F_2$).

Вычислим абсолютное значение перемещения в сечении I-I

$$u_{I-I} = \frac{4840}{EA} = \frac{4840}{2 \cdot 10^7 \cdot 20} = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

Замечание: проводя вычисления, нужно следить, чтобы соблюдалось соответствие размерностей всех используемых величин.

В

частности,

$$E = 2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 2 \cdot 10^5 \frac{10^6 \text{ Н}}{10^4 \text{ см}^2} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}.$$

1.2. Расчет систем стержней, соединенных с недеформируемым элементом

На рис. 1.5 изображена стержневая система, состоящая из жесткого, недеформируемого стержня АВ, шарнирно опертого в точке А и подкрепленного тремя деформируемыми стержнями.

Схема деформирования такой системы определяется возможными перемещениями жесткого элемента. Для рассматриваемой системы (рис.1.5) возможен поворот элемента АВ, как жесткого диска, вокруг шарнира А. При этом стержни, подкрепляющие жесткий элемент, деформируются.

Неизвестными в заданной системе являются усилия в подкрепляющих стержнях - N_1, N_2, N_3 и реакции в шарнире - R_A, R_B . Таким образом, число неизвестных $H = 5$. Для плоской системы можно составить $Y = 3$ независимых уравнений равновесия. Следовательно, $L = H - Y = 5 - 3 = 2$ - система два раза статически неопределима.

Для решения задачи необходимо использовать условия неразрывности деформаций. Для составления этих условий в системе с жестким элементом нужно рассмотреть схему ее деформирования. Схема деформирования рассматриваемой системы представлена на рис. 1.6. При определении перемещений узлов системы принимаются следующие положения:

- 1/ деформации (перемещения) малы, вследствие чего, точки элементов при их вращении вокруг закрепленных (опорных) точек перемещаются перпендикулярно оси элементов в их первоначальном положении;
- 2/ после деформирования системы углы между элементами не изменяются.

Для заданной системы (рис. 6.1) точки 1, 2, 3 жесткого элемента АВ перемещаются вертикально. При этом, очевидно, что перемещения этих точек связаны соотношениями:

$$u_2 = 2u_1; \quad u_3 = 3u_1. \quad (1.2.1)$$

Точки деформируемых элементов, соединенных с жестким элементом, перемещаются соответственно в точки $1'; 2'; 3'$. При этом стержни удлиняются (или укорачиваются). Процесс деформирования первого и второго стержней можно разложить на два этапа (рис. 1.6 - узлы 1, 2):

1-й этап - поворот стержней вокруг неподвижных точек O_1 и O_2 - точки 1, 2 переходят в положение $1''$ и $2''$ соответственно;

2-й этап - удлинения (укорочение) стержней - точки $1''$, $2''$ переходят в положение $1'$ и $2'$ соответственно.

Из схемы деформирования видно, что удлинения стержней определяются по формулам:

$$\Delta_1 = u_1 \cdot \sin \alpha_1; \quad \Delta_2 = -u_2 \cdot \sin \alpha_2 = 2u_1 \cdot \sin \alpha_2; \quad \Delta_3 = u_3 = 3u_1. \quad (1.2.2)$$

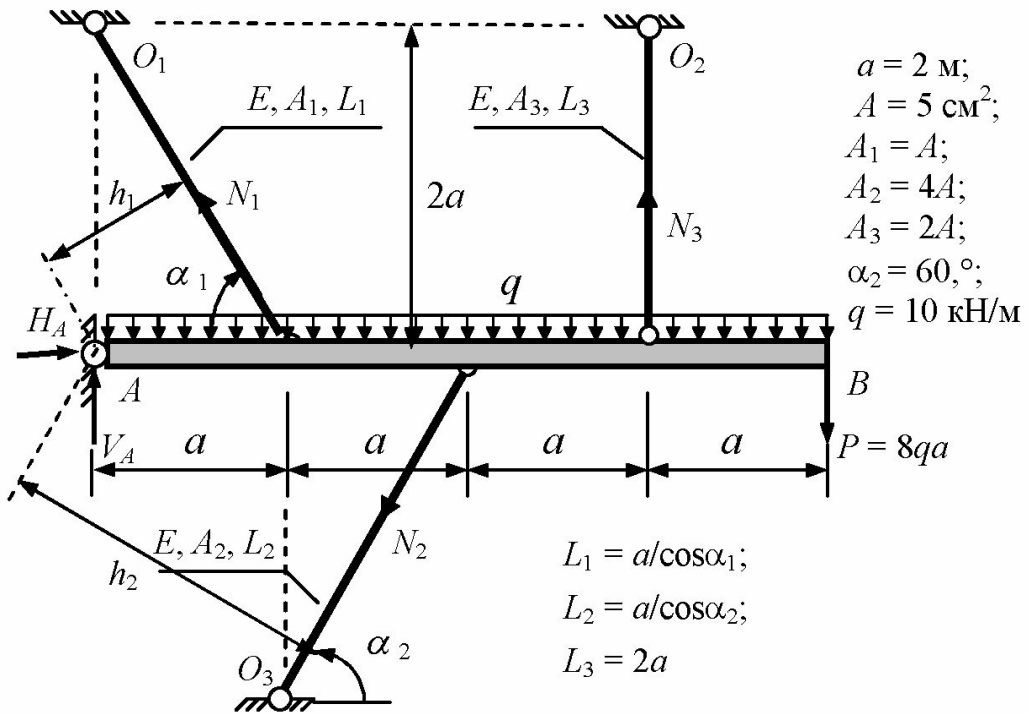


Рис. 1.5. Стержневая система с жестким элементом Узел 1

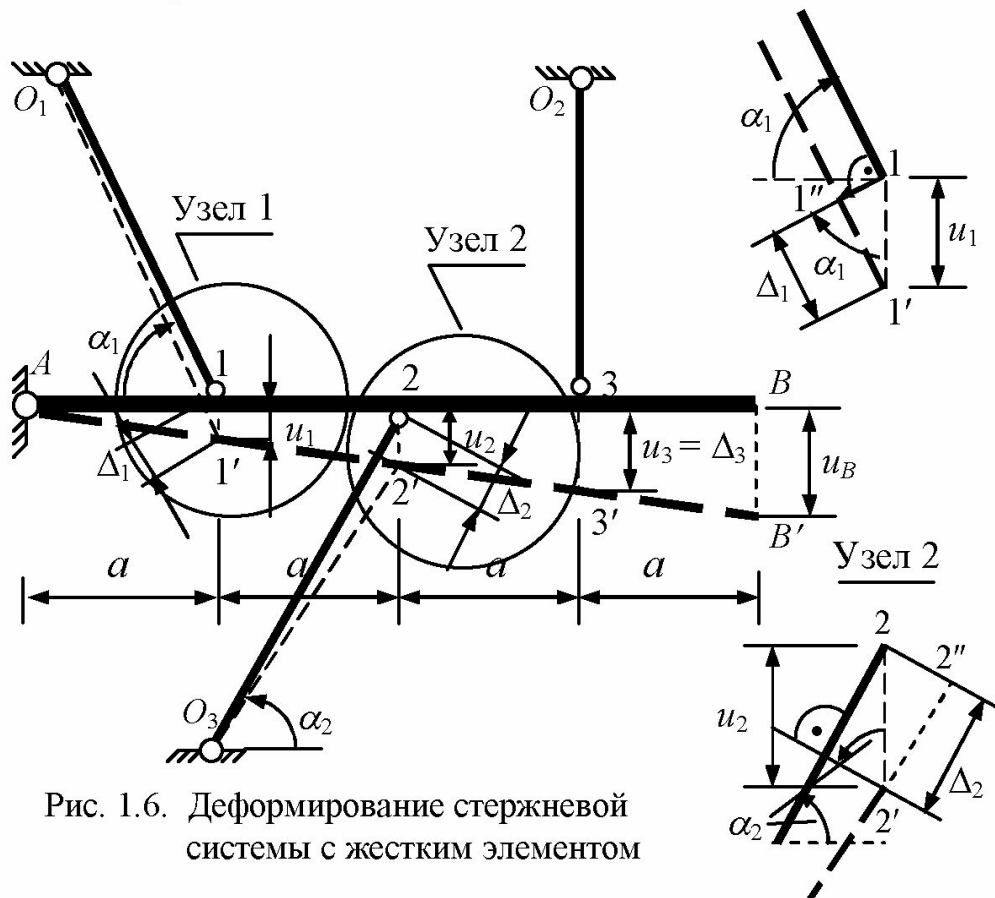


Рис. 1.6. Деформирование стержневой системы с жестким элементом

В формулах (1.2.2) удлинения стержней выражены через один общий параметр - u_1 . Эти формулы являются уравнениями неразрывности рассматриваемой стержневой системы с жестким элементом. Знак минус в формуле деформации Δ_2 2-го стержня соответствует сжатию (укорачиванию) этого элемента.

Удлинениям стержней соответствуют растягивающие (сжимающие) усилия в стержнях:

$$N_k = \Delta_k \frac{EA_k}{L_k}. \quad (1.2.3)$$

Используя отношения N_k к N_1 , выразим усилия в стержнях через один силовой параметр:

$$\frac{N_k}{N_1} = \frac{\Delta_k A_k L_1}{\Delta_1 A_1 L_k}; \quad N_k = \frac{\Delta_k A_k L_1}{\Delta_1 A_1 L_k} \cdot N_1.$$

И далее, учитывая соотношения (1.2.2) и размеры стержней (см. рис. 1.5), получим:

$$L_1 = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5} \cdot a; \quad \sin \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\sin \alpha_2 = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{1}{2}; \quad L_2 = \frac{a}{\cos \alpha_2} = 2 \cdot a; \quad L_3 = 2 \cdot a;$$

$$\Delta_1 = u_1 \cdot \sin \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} u_1; \quad \Delta_2 = -2u_1 \cdot \sin \alpha_2 = -\sqrt{3} \cdot u_1; \quad \Delta_3 = 3 \cdot u_1;$$

И, следовательно, имеем

$$N_2 = \frac{\Delta_2 A_2 L_1}{\Delta_1 A_1 L_2} \cdot N_1 = \frac{-\sqrt{3} \cdot u_1 \cdot 4A \sqrt{5} \cdot a}{\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot u_1 \cdot A \cdot 2a} \cdot N_1 = -5\sqrt{3} \cdot N_1;$$

$$N_3 = \frac{\Delta_3 A_3 L_1}{\Delta_1 A_1 L_3} \cdot N_1 = \frac{3 \cdot u_1 \cdot 2A \sqrt{5} \cdot a}{\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot u_1 \cdot A \cdot 2a} \cdot N_1 = -\frac{15}{2} \cdot N_1; \quad (1.2.4)$$

Для окончательного решения задачи составим уравнение равновесия – равенство нулю момента относительно точки А (при этом из уравнения исключаются опорные реакции - V_A и H_A)

$$\sum m_A = 0; \quad \rightarrow \quad N_1 \cdot h_1 - N_2 \cdot h_2 + N_3 \cdot h_3 - q \cdot 4a \cdot 2a - P \cdot 4a = 0;$$

$$h_1 = a \cdot \sin \alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{5}}; \quad h_2 = 2a \cdot \sin \alpha_2 = \sqrt{3} \cdot a; \quad h_3 = 3 \cdot a;$$

С учетом формул (1.2.4) получаем

$$N_1 \left(\frac{a}{\sqrt{5}} - (-5\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} \cdot a + \frac{15}{2} \cdot 3a \right) = 8 \cdot qa^2 + 4 \cdot 8 \cdot qa^2,$$

или $37,95 \cdot N_1 = 40 \cdot qa$

Откуда

$$N_1 = \frac{40 \cdot qa}{37,95} = 1,05 \cdot qa = 1,05 \cdot 10 \cdot 2 = 21 \cdot \text{кН};$$

$$N_2 = -5\sqrt{3} \cdot N_1 = -8,66 \cdot 21 = 182 \text{ кН};$$

$$N_3 = 7,5 \cdot N_1 = 7,5 \cdot 21 = 157,5 \text{ кН}.$$

Вычисляем напряжения в стержнях;

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{21}{5} = 4,2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 4,2 \cdot \frac{10^{-3} \text{ МН}}{10^{-4} \text{ м}^2} = 42 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{182}{4 \cdot 5} = 9,1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 91 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{157}{2 \cdot 5} = 15,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 157 \text{ МПа}.$$

1.3. Расчет стержневой системы по предельному состоянию

Расчет по предельному состоянию позволяет определить несущую способность конструкцию, т.е. предельную нагрузку, при которой конструкция теряет свою работоспособность. Потеря конструкцией работоспособности происходит по причине разрушения или потери конструкции или отдельных ее элементов, либо по причине возникновения в конструкции больших деформаций и превращения конструкции в механизм. Именно по последней причине происходит выход из рабочего состояния конструкций, состоящих из пластичных материалов.

Рассмотрим стержневую конструкцию, рассчитанную в последнем примере (рис. 1.5). Все элементы конструкции, за исключением жесткого элемента, предполагаются обладающими идеальной пластичностью, т.е. после достижения в элементах напряжений, равных пределу текучести материала, дальнейшее деформирование этих элементов происходит без увеличения напряжений вплоть до их разрушения. Реальная диаграмма деформирования элементов заменяется условной диаграммой идеально пластичного материала – диаграммой Прандтля (рис. 1.7).

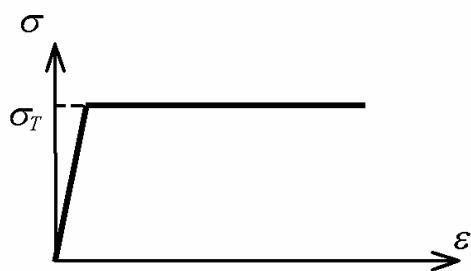


Рис. 1.7. Диаграмма Прандтля

При определении предельной нагрузки предполагается, что все нагрузки, действующие на конструкцию, увеличиваются в одинаковой пропорции вплоть до перехода конструкции в предельное состояние.

При увеличении нагрузки, в рассматриваемой конструкции (рис.1.5), вероятно, напряжения предела текучести возникнут в наиболее напряженном стержне 3, затем во 2-м стержне, затем в третьем. После этого деформации во всех стержнях будут происходить без увеличения нагрузки и система превращается в механизм, так как жесткий элемент при этом начнет свободно вращаться вокруг шарнира А.

Если силовой расчет конструкции в упругой стадии не проводился, мы не знаем, в каком порядке будут достигаться предельные напряжения (предел текучести) в отдельных элементах. Однако это не имеет существенного значения, так как пока хотя бы в одном стержне напряжения не достигнут предела текучести, конструкция будет сохранять свою несущую способность.

В предельном состоянии в стержнях системы возникают предельные усилия:

$$N_{1T} = A_1 \cdot \sigma_T = A \cdot \sigma_T ; N_{2T} = -A_2 \cdot \sigma_T = 4A \cdot \sigma_T ; N_{3T} = A_3 \cdot \sigma_T = 2A \cdot \sigma_T ;$$

Составим условие равновесия конструкции (сумму моментов всех действующих внешних сил относительно шарнира А) в момент потери конструкцией несущей способности (рис. 1.8):

$$\sum m_A = 0 ; \quad \rightarrow \quad N_{1T} \cdot h_1 - N_{2N} \cdot h_2 + N_{3T} \cdot h_3 - q_{np} \cdot 4a \cdot 2a - P_{np} \cdot 4a = 0 .$$

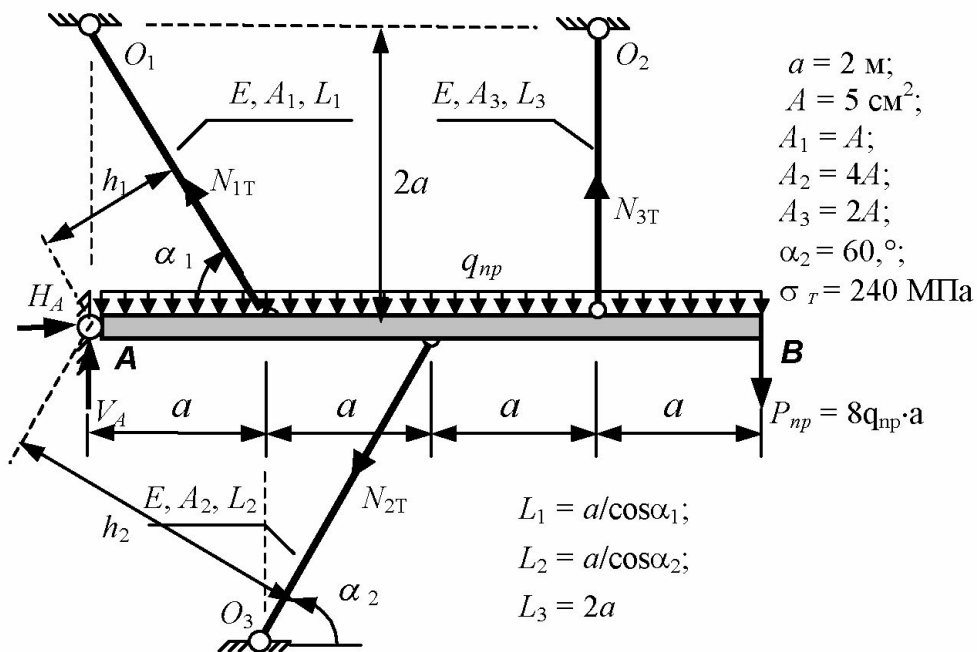


Рис. 1.8. К расчету стержневой системы с жестким элементом по предельному состоянию

Откуда получаем:

$$\sigma_T \cdot A \cdot (h_1 + 4h_2 + 2h_3) = 40q_{np}a^2;$$

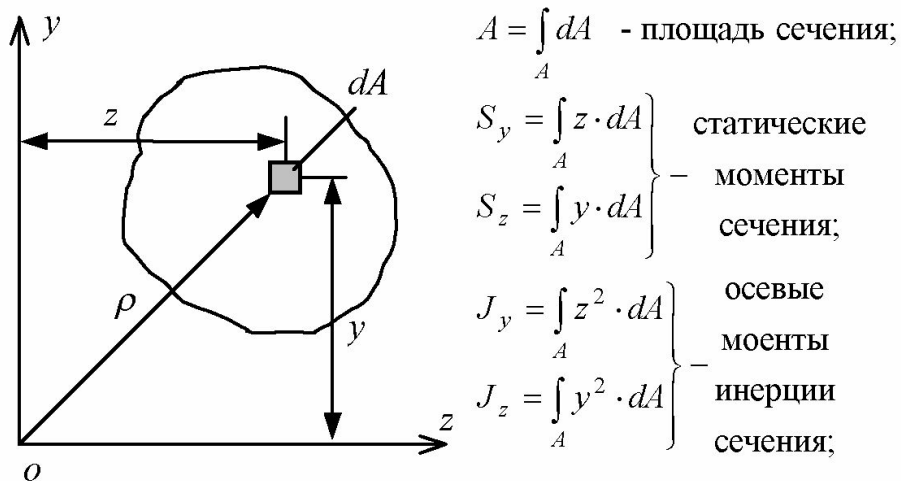
$$q_{np} = \sigma_T A \frac{\frac{a}{\sqrt{5}} + 4 \cdot \sqrt{3}a + 2 \cdot 3a}{40 \cdot a^2} = 0,334 \frac{\sigma_T A}{a} = 0,334 \frac{240 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{2} = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Определяем коэффициент запаса

$$K = \frac{q_{np}}{q} = \frac{20}{10} = 2.$$

II. Геометрические характеристики сечений При изучении напряженно деформированного состояния центрально-растянутых стержней использовалась единственная геометрическая характеристика – площадь поперечного сечения A . Изучение напряженно-деформированного состояния стержней, работающих на изгиб, кручение и другие виды сопротивления, выявляет новые интегральные характеристики сечений. Для определения напряжений и деформаций стержней необходимо знать численные значения этих геометрических характеристик. Следовательно, необходимо уметь определять эти характеристики, знать их свойства.

Геометрические характеристики сечений определяются как некоторые интегралы по площади сечений (рис. 2.1).



$$J_z = \int_A y \cdot z \cdot dA \text{ - центробежный момент инерции сечения;}$$

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA \text{ - полярный момент инерции сечения.}$$

Рис. 2.1. Геометрические характеристики сечений

Если сечение разбить на несколько подобластей, то любая из геометрических характеристик равна сумме соответствующих геометрических характеристик подобластей сечения относительно общих осей.

Обычно, при определении геометрических характеристик сечение сложной формы разбивают на подобласти - элементы сечения, геометрические характеристики которых либо могут быть вычислены по известным формулам - элементы сечений в форме прямоугольников, треугольников, круга, либо определены из справочных таблиц - геометрические характеристики прокатных профилей или геометрических характеристик сложных сечений определенных форм.

Расчет геометрических характеристик сечений начинают с определения координат центра тяжести сечения относительно произвольных начальных осей p, q . Координаты центра тяжести сечения определяются по формулам:

$$p_c = \frac{S_q}{A} = \frac{\int p \cdot dA}{A}; \quad q_c = \frac{S_p}{A} = \frac{\int q \cdot dA}{A}. \quad (2.1)$$

Если координаты центра тяжести элемента сечения известны, то статические моменты этого элемента относительно осей могут быть определены по формулам:

$$S_{pi} = A_i \cdot q_{ci}; \quad S_{qi} = A_i \cdot p_{ci}. \quad (2.2)$$

2.1. Определение геометрических характеристик сечений

Расчет геометрических характеристик сечения проводят в следующем порядке:

1. Заданное сечение *вычерчивается* в определенном масштабе и разбивается на элементы, элементы *нумеруются*, номера элементов указываются на чертеже.

2. *Задаются* начальными осями p, q . Начальные оси могут задаваться произвольно. Однако, для упрощения вычислений удобно, если начальные оси проходят через центр тяжести одного или нескольких элементов сечения, на которые разбито заданное сечение. Все *начальные размеры*, необходимые для вычисления геометрических характеристик элементов и определения координат центров тяжести элементов *указываются на чертеже*. Для прокатных профилей на чертеже сечения указываются необходимые для расчета размеры, взятые из таблиц проката.

3. *Определяют* координаты центров тяжести элементов сечения относительно начальных осей p_{ci} и q_{ci} и геометрические характеристики сечений относительно собственных осей элементов $A_i, J_{y_{0i}}, J_{z_{0i}}, J_{y_0z_{0i}}$. Собственные оси элементов – оси, параллельные начальным осям p, q , проходящие через центры тяжести элементов сечения.

Замечание. Необходимо проявлять внимательность при определении координат центров тяжести элементов сечения и их геометрических характеристик, так как ошибки, допущенные на этом этапе не имеют алгоритма проверки и приводят к ошибочным результатам при дальнейших вычислениях.

4. *Определяют* координаты центра тяжести всего сечения по формулам:

$$p_c = \frac{S_q}{A} = \frac{\sum S_{qi}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot p_{ci}}{\sum A_i}; \quad q_c = \frac{S_p}{A} = \frac{\sum S_{pi}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot q_{ci}}{\sum A_i}. \quad (2.3)$$

Центральные оси x, y (оси проходящие через центр тяжести всего сечения), параллельные начальным осям показываются на чертеже.

5. *Определяют* координаты центров тяжести элементов сечения относительно центральных осей сечения:

$$y_{ci} = p_{ci} - p_c; \quad z_{ci} = q_{ci} - q_c. \quad (2.4)$$

Замечание. Геометрические характеристики сечений, координаты центров тяжести сечений относительно начальных и центральных осей целесообразно оформить в виде таблицы (см. пример расчета),

6. *Проводится контроль правильности определения координат центров тяжести сечения и его элементов. Для этого вычисляется статический момент сечения относительно центральных осей, которые при правильном расчете должны равняться нулю:*

$$S_y = \sum S_{yi} = \sum A_i \cdot z_{ci}; \quad S_z = \sum S_{zi} = \sum A_i \cdot y_{ci}. \quad (2.5)$$

Замечание. Все расчеты проводятся с ограниченной точностью. Инженерные расчеты, обычно, проводят с учетом 3 – 4 значащих цифр. Оставлять большее число значащих цифр нецелесообразно, так как исходные данные (исходные размеры и значения геометрических характеристик) не обеспечивают большую точность и поэтому результаты с большим числом значащих цифр нельзя

считать более достоверными. Точность результата оценивают, обычно, относя невязку (разность между приближенным и точным значением) к точному или приближенному значению. Однако, если результатом вычислений должен быть ноль, такой подход невозможен. В этом случае отдельно подсчитывают положительные S_+ и отрицательные S_- слагаемые и абсолютное значение невязки и относят невязку к сумме положительных (или отрицательных) слагаемых:

$$\delta = \frac{|S_+ + S_-|}{S_+} 100 = \frac{|\Delta S|}{S_+} 100. \quad (2.6)$$

Погрешность инженерных расчетов обычно не должна превышать 3%.

7. *Определяют* геометрические характеристики сечения – осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей

$$\begin{aligned} J_y &= \sum J_{y_i} = \sum (J_{y_0^i} + A_i \cdot z_{ci}^2) = \sum J_{y_0^i} + \sum A_i \cdot z_{ci}^2; \\ J_z &= \sum J_{z_i} = \sum (J_{z_0^i} + A_i \cdot y_{ci}^2) = \sum J_{z_0^i} + \sum A_i \cdot y_{ci}^2; \quad J_p = J_y + J_z; \\ J_{yz} &= \sum J_{yzi} = \sum (J_{y_0z_0^i} + A_i \cdot y_{ci} \cdot z_{ci}) = \sum J_{y_0z_0^i} + \sum A_i \cdot y_{ci} \cdot z_{ci}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Заметим, что площадь, осевые и полярный моменты инерции являются строго положительными характеристиками сечений. Однако, для сечений с отверстиями бывает удобным считать отверстия элементами сечений с отрицательными характеристиками.

Пример. Определить координаты центра тяжести и осевые моменты инерции сечения в виде круга радиусом $r = 3a$ с круговым отверстием радиуса $r_0 = a$, касающимся центра круга (рис. 2.2).

Принимаем за 1-й элемент сплошной круг радиусом $r = 3a$, за второй элемент отверстие радиуса $r_0 = a$. Начальные оси проводим через центр тяжести 1-го элемента.

Тогда имеем:

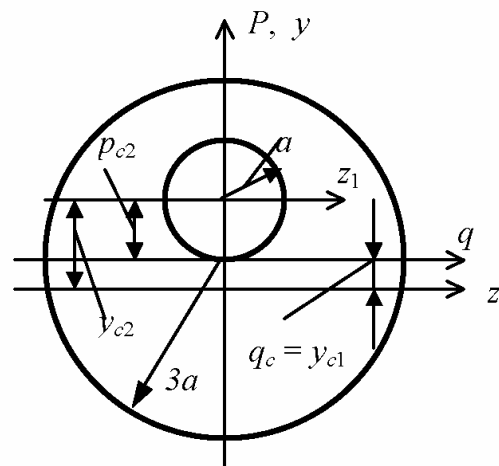


Рис. 2.2. Сечение с отверстием

$$A_1 = 9\pi a^2; \quad A_2 = -\pi a^2;$$

$$p_{c1} = q_{c1} = 0; \quad p_{c2} = a; \quad q_{c2} = 0.$$

Так как ось p является осью симметрии сечения, так же как и осями симметрии элементов сечения, то эта ось является центральной осью y и $z_{c1} = z_{c2} = 0$. Следовательно, для определения положения центра тяжести сечения требуется определить только координату p_c

$$p_c = \frac{S_q}{A} = \frac{\sum S_{qi}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot p_{ci}}{\sum A_i} = \frac{9\pi a^2 \cdot 0 + (-\pi a^2) \cdot a}{9\pi a^2 + (-\pi a^2)} = -\frac{a}{8}.$$

Координаты центров тяжести элементов относительно центральных осей:

$$y_{c1} = \frac{a}{8}; \quad y_{c2} = a - \left(-\frac{a}{8}\right) = \frac{9}{8}a; \quad z_{c1} = 0; \quad z_{c2} = 0.$$

Осевые моменты инерции круга относительно собственных центральных осей определяются по формуле

$$J_{y0} = J_{z0} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}.$$

Следовательно, имеем:

$$J_{y01} = J_{z01} = \frac{81}{4}\pi a^4; \quad J_{y02} = J_{z02} = -\frac{1}{4}\pi a^4.$$

Определяем осевые моменты инерции сечения

$$J_y = \sum (J_{y0i} + A_i \cdot z_{ci}^2) = \frac{81}{4}\pi a^4 - \frac{1}{4}\pi a^4 = 20\pi a^4;$$

$$J_z = \sum (J_{z0i} + A_i \cdot y_{ci}^2) = \frac{81}{4}\pi a^4 + 9\pi a^2 \cdot \left(\frac{a}{8}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi a^4 - \pi a^2 \cdot \left(\frac{9}{8}a\right)^2 = 18,9\pi a^4.$$

Так как сечение имеет ось симметрии, то центробежный момент инерции сечения равен нулю и оси y , z являются главными.

8. Определяем положение главных осей сечения

Главными осями сечения являются центральные оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают максимального и минимального значений и называются главными моментами инерции сечения. Центробежный момент инерции относительно главных осей равен нулю. Положение главных осей

определяется поворотом центральных осей на угол α_0 , определяемый по формуле

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z}. \quad (2.8)$$

При этом берется главное значение арктангенса, т.е.

$$-90^\circ < 2\alpha_0 < 90^\circ; \quad -45^\circ < \alpha_0 < 45^\circ.$$

Главные оси *показываются* на схеме (чертеже) сечения.

9. *Вычисление* главных моментов инерции.

Осевые моменты инерции при повороте осей на угол α *вычисляются по* формулам:

$$\begin{aligned} J_{y_\alpha} &= \frac{J_y + J_z}{2} + \left(\frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha + J_{yz} \sin 2\alpha \right); \\ J_{z_\alpha} &= \frac{J_y + J_z}{2} - \left(\frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha + J_{yz} \sin 2\alpha \right); \\ J_{yz} &= \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha - J_{yz} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Значения главных моментов инерции получаем при подстановке в формулы осевых моментов (2.9) угла α_0 , определенного по формуле (2.8). Подстановка значение угла α_0 в формулу (2.9) для центробежного момента инерции должна дать нулевое значение, что позволяет провести проверку правильности определения угла поворота главных осей.

Определяя значения главных моментов инерции по формулам (2.9) мы одновременно определяем относительно какой оси осевой момент инерции будет иметь максимальное и относительно какой минимальное значение.

Значения главных моментов инерции может быть определено без использования значения угла α_0 . В этом случае используются формулы:

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) не дает ответа относительно какой из двух взаимно перпендикулярных осей главный момент инерции будет иметь максимальное, а относительно какой минимальное значение. Однако можно показать, что из двух главных осей, ось, относительно которой главное значение будет максимальным, будет ближе к центральной оси (y или z) с наибольшим значение осевого момента (J_y или J_z соответственно).

Так как при повороте осей полярный момент не изменяется то правильность их определения проверяется по формуле

$$J_p = J_y + J_z = J_{\max} + J_{\min} . \quad (2.11)$$

Отметим, что знание значений главных моментов инерции и положение главных осей поперечных сечений стержня необходимо при проведении расчетов напряженно деформированного состояния стержней на изгиб, кручение и различные виды сложных видов сопротивления стержней.

2.2. Круг Мора моментов инерции сечений

Кроме аналитического метода определения положения главных осей и вычисления главных моментов инерции по формулам (2.8 – 2.10) можно использовать графический метод – построение круга Мора моментов инерции сечения. Графический метод может использоваться как независимо, так и для контроля правильности аналитических расчетов. При аккуратном построении круга Мора графический метод позволяет определить положение главных осей и значения главных моментов инерции с точностью 3-х – 5-ти процентов. Круг Мора моментов инерции сечения строится после определения положения центральных осей и вычисления осевых J_y и J_z и центробежного моментов инерции J_{yz} . При построении круга Мора моментов инерции сечения в прямоугольной системе координат в принятом масштабе на горизонтальной оси откладывают осевые моменты инерции, на вертикальной – центробежный момент инерции:

Порядок построения круга Мора моментов инерции (рис. 2.3).

1. Откладываем на горизонтальной оси осевые моменты инерции J_y - точка 1 и J_z - точка 2;

5. Из точки 1 по вертикальной оси откладываем (с учетом знака) центробежный момент инерции J_{yz} - точка 3;

6. Делим отрезок 12 пополам – точка 4.

При этом получаем длины отрезков L_{ij} между точками ij :

$$L_{04} = \frac{J_y + J_z}{2}; \quad L_{14} = L_{24} = \frac{J_y - J_z}{2}; \quad L_{34} = \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}.$$

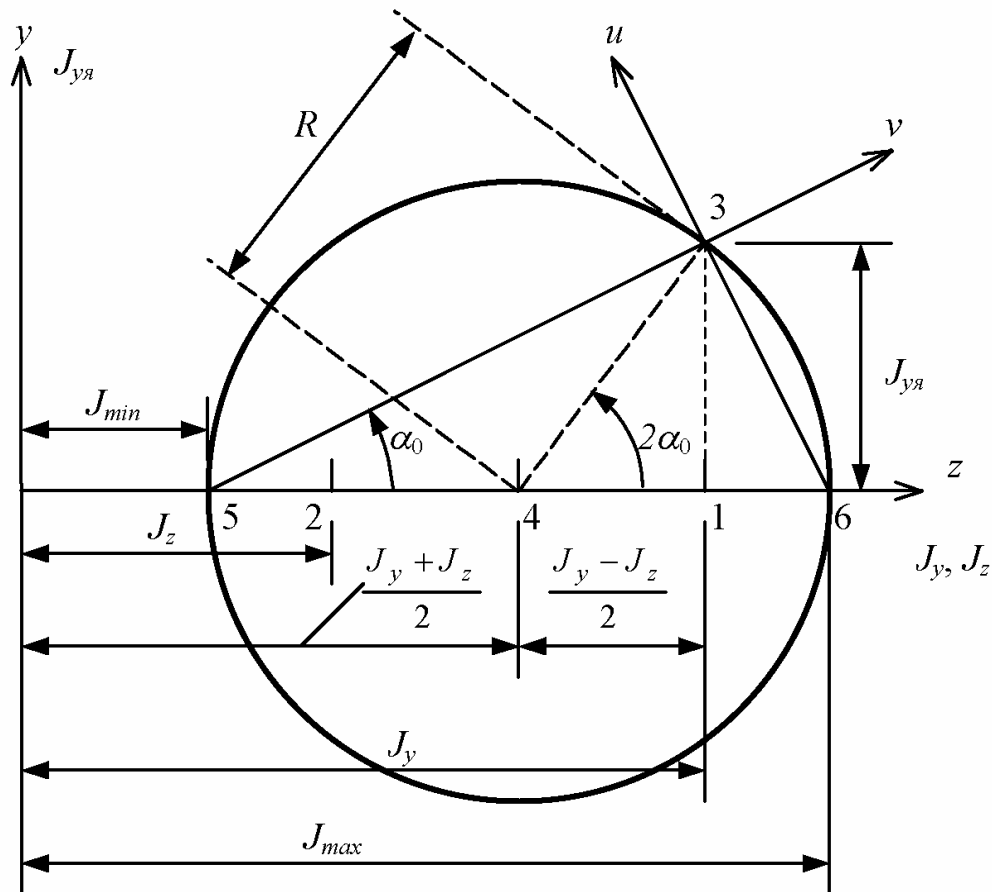


Рис. 2.3. Круг Мора Моментов инерции сечения

4. Из точки 4 проводим окружность радиусом $R = L_{34}$.

Получаем точки 5 и 6 пересечения окружности с горизонтальной осью. Длины отрезков от начала координат до этих точек соответственно равны:

$$L_{05} = L_{04} - R = \frac{J_y + J_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2};$$

$$L_{05} = L_{04} + R = \frac{J_y + J_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}. \quad (2.12)$$

Сравнивая Формулы (2.12) с формулами (2.10) главных моментов инерции, видим, что

$$L_{05} = J_{\min}; \quad L_{06} = J_{\max}.$$

Из рис. 2.3. с учетом формулы (2.8) видно также, что

$$\operatorname{tg} \angle 143 = \frac{L_{13}}{L_{14}} = \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} = \operatorname{tg} 2\alpha_0; \quad \angle 143 = 2\alpha_0;$$

Тогда, из геометрии круга известно, что

$$\angle 153 = \frac{\angle 143}{2} = \alpha_0$$

и, что отрезки 53 и 63, опирающиеся на диаметр круга, пересекаются под прямым углом.

Следовательно, если вертикальную и горизонтальную оси круга Мора совместить с центральными осями сечения y, z , то направления отрезков 53 и 63 будут совпадать с направлением главных осей сечения.

Таким образом, круг Мора (рис. 2.3) позволяет графически определить величины главных моментов инерции и направление главных осей сечения.

Замечание. Чтобы направления главных осей были получены правильно, необходимо значение центробежного момента инерции откладывать с учетом знака из точки 1 – из конца отрезка 01, равного осевому моменту инерции J_y (момент инерции относительно вертикальной оси).

2.3. Геометрические характеристики прокатных профилей

Для сечений, составленных из прокатных профилей (двутавры, швеллера, уголки) геометрические характеристики определяются в соответствии с ГОСТ (государственный общероссийский стандарт). В таблицах прокатных профилей приводятся все размеры, согласно которым изготавливаются прокатные профили, а так же значение геометрических характеристик - осевых моментов инерции, моментов сопротивления, радиусов инерции, координаты центра

тяжести сечения, а также значение $\operatorname{tg}\alpha_0$, определяющего положение главных осей несимметричных сечений (неравнобокий уголок).

При выборе геометрических характеристик необходимо *обращать внимание* на положение профиля в сечении и обозначения осей, которые могут не совпадать с обозначениями осей в таблицах профилей.

На рис. 2.4 показано соответствие обозначений геометрических характеристик при горизонтальном расположении швеллера на чертеже и вертикальном расположении соответствующего швеллера в таблицах ГОСТ.

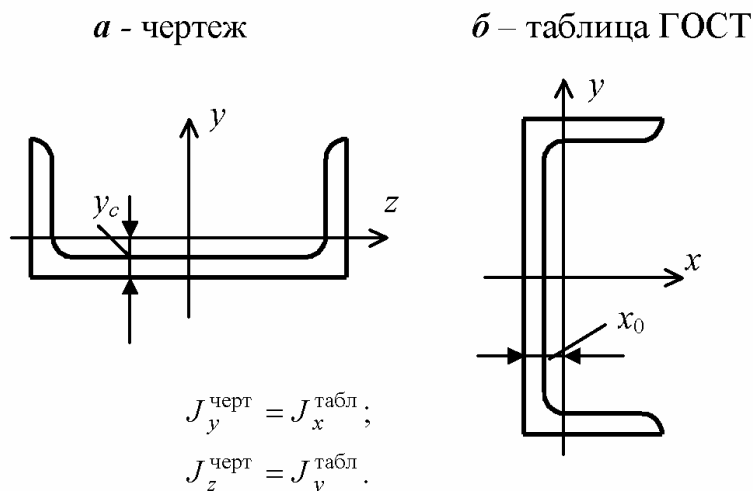


Рис. 2.4. Соответствие геометрических характеристик на чертеже и в таблицах ГОСТ

Центробежные моменты двутавров и швеллеров, поперечные сечения которых имеют ось симметрии, параллельную обычно центральным осям всего сечения, равны нулю. Центробежные моменты уголков не равны нулю и их требуется вычислять. Особое внимание требуется обращать на правильное определение знаков.

В таблицах ГОСТ для *неравнобоких уголков* приводится значение $\operatorname{tg}\alpha_0$. Центробежный момент инерции сечения определяется в соответствии с формулой (2.8)

$$J_{yz} = \frac{J_y - J_z}{2} \operatorname{tg} 2\alpha_0; \quad (2.13)$$

Значение $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ находим, либо определяя предварительно α_0 по значению $\operatorname{tg}\alpha_0$, либо вычисляя по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0} . \quad (2.14)$$

Знак α_0 зависит от положения уголка в сечении по отношению к центральным осям и принимается в соответствии с рис. 2.5.

Для *равнобоких* уголков угол $\alpha_0 = 45^\circ$, $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \operatorname{tg} 90^\circ = \infty$. Поэтому формула (2.13) неприменима. Для определения центробежного момента инерции используют формулу

$$J_{yz} = (J_{\max} - J_y) \cdot \operatorname{sign} \alpha_0 = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \cdot \operatorname{sign} \alpha_0 . \quad (2.14)$$

Здесь $\operatorname{sign} \alpha_0$ - знак α_0 , определяемый в соответствии с рис. 2.5,б.

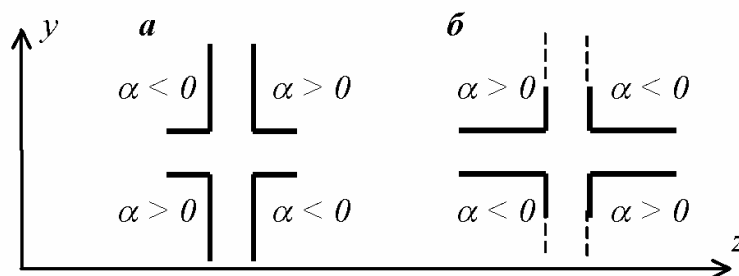


Рис. 2.5. К определению знака угла α_0 положения главных осей уголков

2.4. Пример расчета геометрических характеристик составного сечения

Рассмотрим сечение, состоящее из прокатных профилей (рис.2.6).

1. Вычертив в масштабе сечение, *нумеруем элементы*, с указанием их размерных характеристик – номера двутавра и швеллера, размеры перьев и толщину уголков, высоту и толщину листа

2. *Проставляем начальные размеры*, необходимые для определения положения элементов в сечении – ширина полки двутавра, расстояния до центров тяжести уголка и швеллера от их граней (из таблицы ГОСТ).

3. Принимаем положение начальных осей сечения. Пусть горизонтальная ось q проходит через центр тяжести вертикального листа, а вертикальная p – через центр тяжести двутавра. Указываем на чертеже положение начальных осей. Рассчитываем и указываем на чертеже координаты центров тяжести элементов относительно начальных осей.

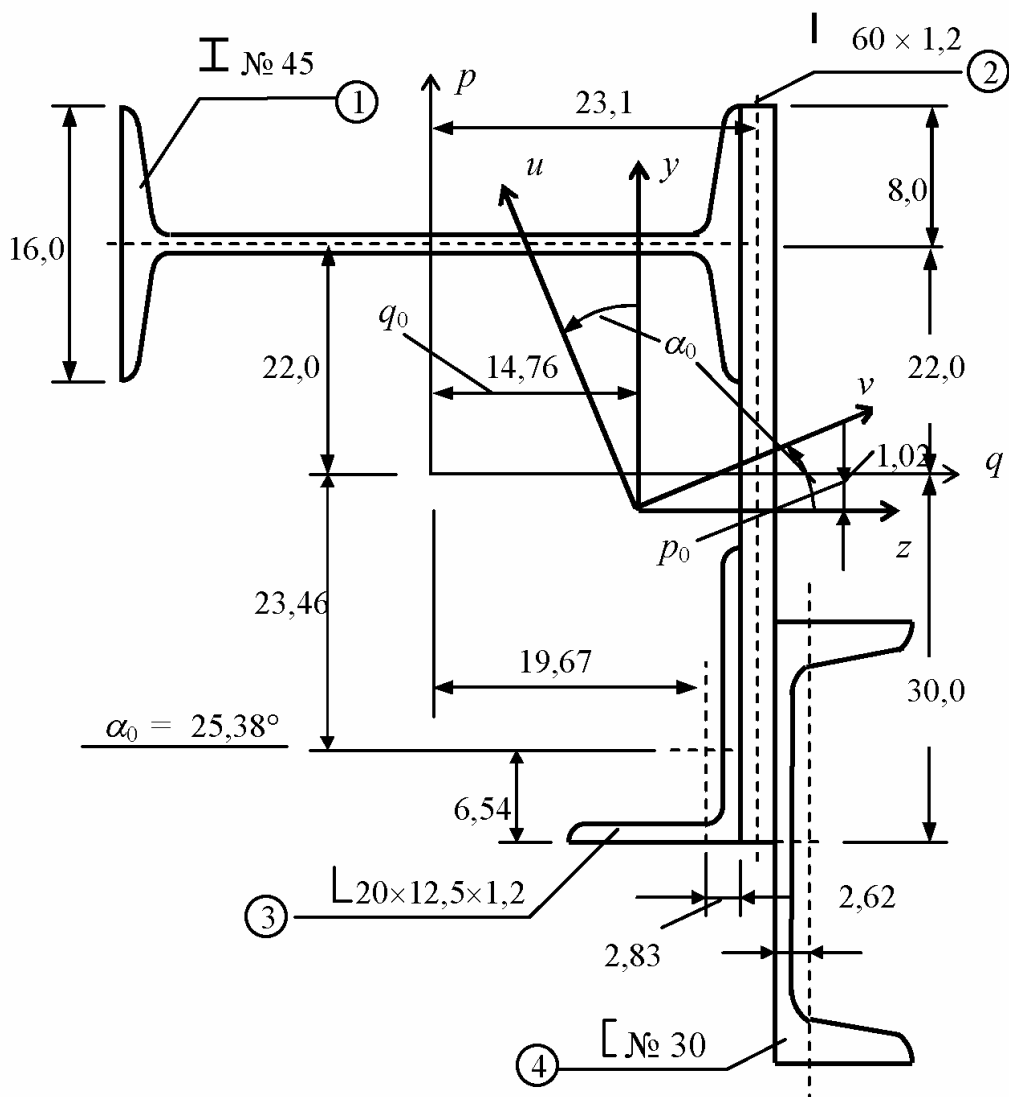


Рис. 2.6. Составное сечение из прокатных профилей

ГОСТ – 89

таблица 2.1

№ п/п	Тип элемента	A , см ²	J_{y_0} , см ⁴	J_{z_0} , см ⁴	$J_{y_0z_0}$, см ⁴	p_c , см	q_c , см	y_c , см	z_c , см
-------	--------------	--------------------------	--------------------------------	--------------------------------	-----------------------------------	---------------	---------------	---------------	---------------

1.	I № 45	84,7	27696	808	0	22,0	0	23,02	-14,76
2.	60×1,2	72,0	8,64	21600	0	0	23,10	1,02	8,34
3.	L 20×12,5×1,2	37,9	482	1568	503	-23,46	19,67	22,44	4,91
4.	[№ 30	40,5	327	5810	0	-30,00	26,22	28,98	11,46
	Σ	235,1	28510	29790	503				

$$p_c = -1,02 \text{ см}; \quad q_c = 14,76 \text{ см}$$

4. Определяем осевые J_{y_0i} , J_{z_0i} и центробежный $J_{y_0z_0i}$ моменты инерции элементов относительно собственных центральных осей параллельных начальным осям сечения. Осевые моменты инерции двутавра, швеллера и уголков принимаются из таблиц ГОСТ, с учетом положения их осей. Осевые моменты инерции листа (прямоугольное сечение) рассчитываются по формуле $J_{y(z)} = \frac{bh^3}{12}$, где b - размер параллельный, h - размер перпендикулярный оси, относительно которой вычисляется момент инерции.

Для вертикального листа 60×1,2 (см) (элемент № 2) имеем:

$$J_{y_02} = \frac{60 \cdot 1,2^3}{12} = 8,64 \text{ см}^4; \quad J_{z_02} = \frac{1,2 \cdot 60^3}{12} = 21600 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции в рассматриваемом сечении отличен от нуля только у неравнобокого уголка (элемент № 3). Согласно ГОСТ 8210-86 для неравнобокого уголка - 20×12,5×1 $J_{y_0} = 482 \text{ см}^4$; $J_{z_0} = 1568 \text{ см}^4$; $\text{tg}\alpha_0 = 0,392$. Согласно рис. 2.5 угол

$\alpha_0 < 0$. Тогда по формуле (2.14) получим $\text{tg}2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0,392}{1 - 0,392^2} = 0,926$ и

по формуле (2.13) $J_{y_0z_03} = \frac{482 - 1568}{2} \cdot (-0,926) = 503 \text{ см}^4$.

Все данные по элементам сечения - моменты инерции относительно центральных осей элементов и координаты центров тяжести заносятся в таблицу (см. табл. 2.1). Табличная форма позволяет удобно контролировать правильность подготовки исходных данных, от которых зависит корректность дальнейших расчетов.

5. Вычисляем координаты центра тяжести сечения относительно начальных осей:

$$p_c = \frac{\sum A_i \cdot p_{ci}}{\sum A_i} = \frac{84,7 \cdot 22,0 + 72,0 \cdot 0 + 37,9 \cdot (-23,46) + 40,5 \cdot (-30,0)}{235,1} =$$

$$= \frac{-24,7}{235,1} = -1,02 \text{ см};$$

$$q_c = \frac{\sum A_i \cdot q_{ci}}{\sum A_i} = \frac{84,7 \cdot 0 + 72,0 \cdot 23,1 + 37,9 \cdot 19,67 + 40,5 \cdot 26,22}{235,1} =$$

$$\frac{3471}{235,1} = 14,76 \text{ см}.$$

7. Определяем координаты центров тяжести элементов сечения относительно центральных осей:

$$y_{ci} = p_{ci} - p_c; \quad z_{ci} = q_{ci} - q_c;$$

$$y_{c1} = 22,0 - (1,02) = 23,02 \text{ см}; \quad z_{c1} = 0 - 14,76 = -14,76 \text{ см};$$

$$y_{c2} = 0 - (1,02) = 1,02 \text{ см}; \quad z_{c2} = 23,1 - 14,76 = 8,34 \text{ см};$$

$$y_{c3} = -23,460 - (1,02) = -22,44 \text{ см}; \quad z_{c3} = 19,67 - 14,76 = 4,91 \text{ см};$$

$$y_{c4} = -30,0 - (1,02) = -28,98 \text{ см}; \quad z_{c4} = 26,22 - 14,76 = 11,46 \text{ см}.$$

Координаты центров тяжести элементов записываем в таблицу.

6. Проводим проверку правильности вычисления координат центров тяжести сечения и его элементов:

$$S_z = \sum S_{zi} = \sum A_i \cdot y_{ci} = 0; \quad S_y = \sum S_{yi} = \sum A_i \cdot z_{ci} = 0;$$

$$S_z = 84,7 \cdot 23,02 + 72,0 \cdot 1,02 + 37,9 \cdot (-22,44) + 40,5 \cdot (-28,98) =$$

$$1950 + 73 - 850 - 1174 = 2023 - 2024 = -1.$$

Относительная невязка:

$$\delta S_y = \frac{1}{2024} 100 \cong 0,05\% < 3\%;$$

$$S_y = 84,7 \cdot (-14,76) + 72,0 \cdot 8,34 + 37,9 \cdot 4,91 + 40,5 \cdot 11,46 =$$

$$= -1250 + 600 + 186 + 464 = -1250 + 1250 \cong 0.$$

7. Определяем осевые, центробежный и полярный моменты инерции сечения относительно центральных осей:

$$J_y = \sum J_{y_0i} + \sum A_i \cdot z_{ci}^2 =$$

$$= 28510 + 84,7 \cdot (-14,76)^2 + 72,0 \cdot 8,34^2 + 37,9 \cdot 4,91^2 + 40,5 \cdot 11,46^2 =$$

$$= 28510 + 18450 + 5010 + 910 + 5320 = 58200 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} J_z &= \sum J_{z_0i} + \sum A_i \cdot y_{ci}^2 = \\ &= 29790 + 84,7 \cdot 23,02^2 + 72,0 \cdot 1,02^2 + 37,9 \cdot (-22,44)^2 + 40,5 \cdot (-28,98)^2 = \\ &= 29790 + 44880 + 75 + 19080 + 34010 = 127800 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \sum J_{y_0z_0i} + \sum A_i \cdot y_{ci} \cdot z_{ci} = \\ &= 503 + 84,7 \cdot 23,02 \cdot (-14,76) + 72,0 \cdot 1,02 \cdot 8,34 + \\ &\quad + 37,9 \cdot (-22,44) \cdot 4,91 + 40,5 \cdot (-28,98) \cdot 11,46 = \\ &= 503 - 28780 + 610 - 4180 - 13450 = -45300 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$J_p = J_y + J_z = 58200 + 127800 = 186000 \text{ см}^4.$$

Замечание. Результаты расчетов округлялись до четырех значащих цифр.

8. Определяем положение главных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{yz}}{J_y - J_z} = \frac{2 \cdot (-45300)}{58200 - 127800} = 1,30; \quad 2 \cdot \alpha_0 = 52,50^\circ; \quad \alpha_0 = 26,25^\circ.$$

9. Определяем главные моменты инерции:

$$\begin{aligned} J_{\max}^{\min} &= \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2} = \\ &= \frac{58200 + 127800}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{58200 - 127800}{2}\right)^2 + 45300^2} = 93000 \pm 57120 \text{ (см}^4\text{)}; \\ J_{\max} &= 150100 \text{ см}^4; \quad J_{\min} = 35900 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

или, в соответствии с формулами (2.9):

$$\cos 2\alpha_0 = \cos 52,5^\circ = 0,609; \quad \sin 2\alpha_0 = \sin 52,5^\circ = 0,793;$$

$$\begin{aligned} J_{\frac{u}{v}} &= \frac{J_y + J_z}{2} \pm \left(\frac{J_y - J_z}{2} \cos 2\alpha_0 + J_{yz} \cdot \sin 2\alpha_0 \right) = \\ &= \frac{58200 + 127800}{2} \pm \left(\frac{58200 - 127800}{2} \cdot 0,609 + (-45300) \cdot 0,793 \right) = \\ &= 93000 \mp (57100); \end{aligned}$$

$$J_u = 35900 \text{ см}^4; \quad J_v = 150100 \text{ см}^4;$$

Из расчета по формулам (2.9), видно, что $J_{\max} = J_v$, т.е. максимальный момент инерции возникает относительно оси v , которая ближе к оси z , оси с наибольшим значением момента инерции $J_z = \sup(J_y, J_z)$.

Сумма главных моментов инерции должна быть равна сумме осевых моментов инерции, или полярному моменту инерции

$$J_{\max} + J_{\min} = 150100 + 35900 = 186000 \text{ см}^4 = J_p.$$

10. *Определение главных моментов инерции и положения главных осей с помощью круга Мора (рис 2.7).*

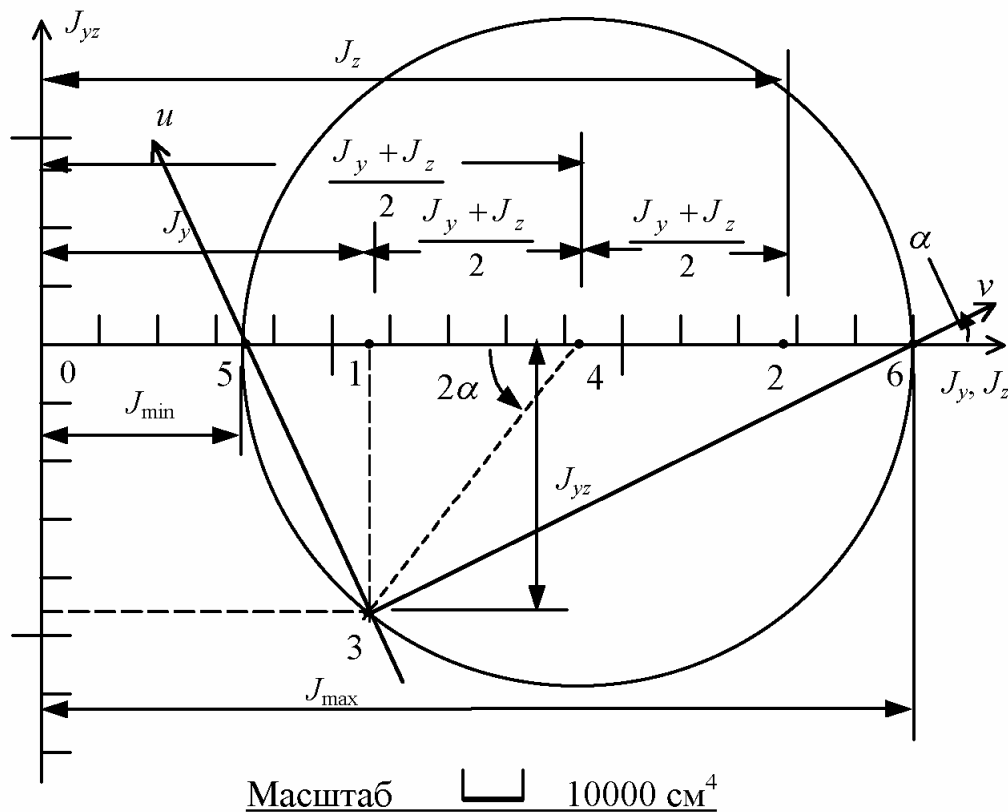


Рис. Круг Мора составного сечения

Определяем из чертежа в масштабе главные моменты инерции и угол α_0 поворота главных осей (с помощью транспортира): $J_{\max} = 150000 \text{ см}^4$; $J_{\min} = 35000 \text{ см}^4$; $\alpha_0 = 25^\circ$.

Графический метод показал хорошее совпадение с результатами аналитического расчета.

3. РАСЧЕТ ТРЕХОПОРНЫХ РАМ

Рамы представляют собой геометрически неизменяемую систему, состоящую из стержней, расположенных в плоскости (плоские рамы) или в пространстве, жестко или шарнирно соединенных между собой. Сложные рамные системы, в том числе статически неопределимые, изучаются в курсе строительной механики стержневых систем. В данной работе рассматриваются простейшие плоские статически определимые рамы, состоящие из жестко соединенных прямых стержней. Конструкция рамы не имеет замкнутых контуров и имеет три опорных стержня.

Рамы могут быть загружены произвольной нагрузкой - сосредоточенные силы и моменты, распределенные нагрузки, действующие в плоскости рамы. При действии таких нагрузок внутренние усилия в поперечных сечениях рам приводятся к нормальным и поперечным силам N_x и Q_y и изгибающим моментам M_z . На каждом участке стержня принимается местная система координат: ось x - вдоль оси рассматриваемого участка стержня, ось y - перпендикулярно оси стержня в плоскости рамы, ось z - перпендикулярно плоскости рамы. Для решения вопросов прочности рамы, в них строятся эпюры внутренних усилий.

Правило знаков внутренних усилий:

а/. Положительная нормальная сила растягивает ближайший к сечению участок стержня (направлена от сечения) (рис. 3.1,а);

б/. Знак поперечной силы определяется по вращению. *Положительная поперечная сила* вращает ближайший к сечению участок стержня по часовой стрелке (рис. 3.1,б).

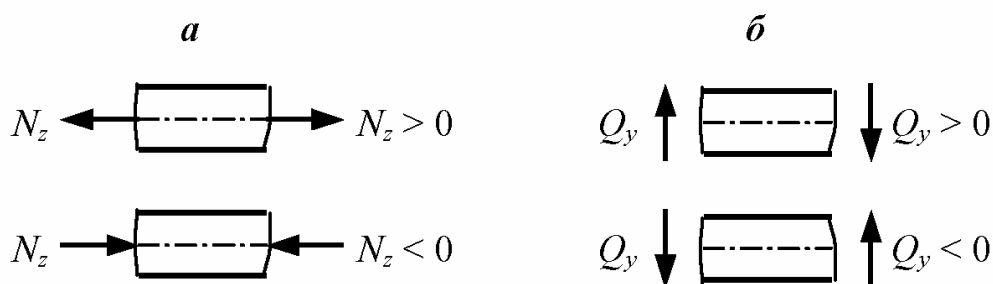


Рис. 3.1. Правило знаков нормальных и поперечных сил

в/. Для изгибающих моментов в рамах правило знаков отсутствует, так как любое принятое правило знаков в сложных рамных системах будет противоречивым. Принимается следующее положение при построении эпюр изгибающих моментов в рамах – *эпюра изгибающих моментов откладывается со стороны растянутых волокон* (со стороны выпуклости изогнутой оси участка стержня) (рис 3.1, в).

В тоже время, правило знаков необходимо при вычисления изгибающего момента, так как внешние силы могут по разному изгибать участок стержня. Поэтому при вычислении изгибающего момента в конкретном сечении принимается правило знаков, связанное с формой изгиба (растянутым волокном) прилегающего к сечению участка стержня: – за положительный момент принимается момент, растягивающий нижнее (для горизонтального или наклонного стержня) или левое (для вертикального стержня) волокно участка стержня, прилегающего к сечению. После вычисления изгибающего момента от всех внешних сил, действующих на рассматриваемую часть рамы, изгибающий момент откладывается со стороны растянутого волокна в соответствии с принятым правилом – снизу (слева), если вычисленный момент положительный, и сверху (справа), если вычисленный момент отрицательный. Знак момента на эпюре изгибающих моментов не проставляется. На время расчета можно принимать и противоположное правило знаков – положительный момент растягивает верхнее (правое) волокно стержня.

Примечание. При расчете рамных систем на ЭВМ, правило знаков необходимо при расчете и выводе (распечатке) результатов расчета. Обычно, это правило в программах связывают с локальной

системой координат на каждом участке стержня. Для этого производят нумерацию узлов рамы. Положительное направление оси x участка стержня связывают с направлением возрастания номеров узлов вдоль оси стержня.

Для вычисления внутренних усилий используется метод сечений. Для простых рам, не имеющих замкнутых контуров и состоящей из стержней жестко соединенных между собой, сечение разбивает раму на две части. Для определения внутренних усилий составляют уравнение равновесия для одной из частей рамы. Обычно берут часть рамы с меньшим количеством внешних нагрузок. В сечении рамы показывают положительные направления внутренних усилий.

Нормальная сила N_x равна сумме проекций внешних сил, действующих на рассматриваемую часть рамы, на ось параллельную, а *поперечная сила* Q_y - сумме проекций внешних сил, действующих на рассматриваемую часть рамы, на ось перпендикулярную оси участка стержня рамы вблизи сечения. При этом, со знаком плюс (+) берутся проекции нагрузок, направленных противоположно положительному направлению внутреннего усилия в сечении, со знаком минус (-), совпадающие по направлению с внутренним усилием (рис. 3.2):

$$\begin{aligned} \vec{N} = \sum \overleftarrow{F} \quad \text{или} \quad \overleftarrow{N} = \sum \vec{F}; \\ \vec{Q} = \sum \overleftarrow{F} \quad \text{или} \quad \overleftarrow{Q} = \sum \vec{F}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь стрелками показаны положительные направления внутренних усилий и внешних нагрузок.

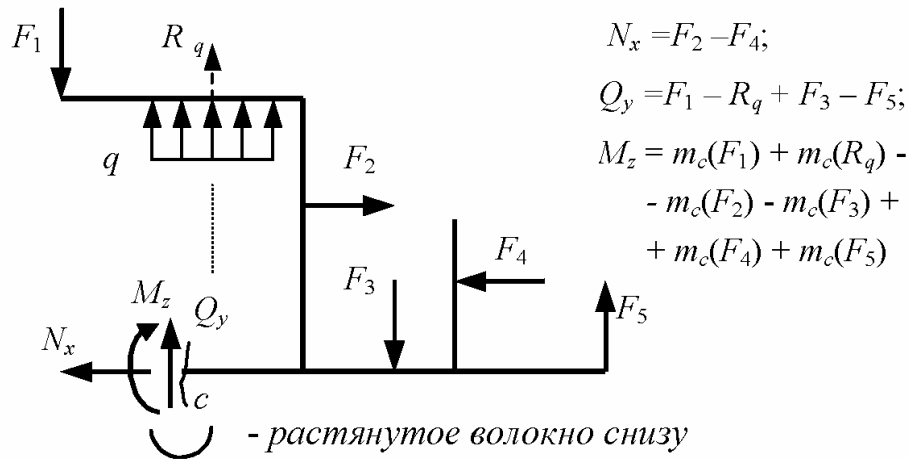


Рис. 3.2. К расчету внутренних усилий в рамах

При вычислении *изгибающего момента* в сечении принимают его *положительное направление* (вращение по часовой или против часовой стрелки) и отмечают *растянутое волокно* (сверху или снизу горизонтальных или наклонных стержней и слева или справа вертикальных стержней) (рис. 3.2). Изгибающий момент в сечении равен сумме моментов внешних сил, действующих на рассматриваемую часть рамы, относительно точки в сечении на оси стержня. Знак плюс (+) для нагрузок, вращающих рассматриваемую часть рамы относительно сечения в направлении противоположном принятому для изгибающего момента в сечении, минус (-) - при вращении в направлении изгибающего момента.

$$\vec{M} = \sum m(\vec{F}) \quad \text{или} \quad \overleftarrow{M} = \sum m(\vec{F}).$$

Стрелками показаны положительные направления вращения изгибающего момента в сечении и внешних сил относительно сечения.

После вычисления значения изгибающего момента в сечении его откладывают со стороны растянутого волокна, т.е. со стороны, отмеченной при назначении направления изгибающего момента при положительном значении вычисленного момента и с противоположной при отрицательном значении.

Характерные особенности эпюр внутренних усилий в рамах и контроль за правильностью их построения.

Нормальные силы на участках рамы, при отсутствии продольных распределенных нагрузок, *постоянны*.

Для контроля за правильностью вычисления и построению эпюр поперечных сил и изгибающих моментов используют дифференциальные соотношения Журавского:

$$\frac{dQ_y}{dx} = q; \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y. \quad (3.3)$$

Так как производная от любой функции равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции, то из формул (3.3) следует:

а) если на участке стержня отсутствует распределенная поперечная нагрузка ($q = 0$), то на этом участке кривая поперечной силы имеет нулевой уклон касательной, следовательно, поперечная сила постоянна ($Q_y = const$), а изгибающий момент имеет постоянный наклон касательной и, следовательно, график изгибающего момента – прямая линия, функция линейная;

б) если на участке балки действует равномерно распределенная нагрузка ($q = const$), то Q_y – линейная функция (прямая линия), а функция изгибающего момента – квадратная парабола;

в) если поперечная сила равна нулю ($Q_y = 0$) в точке, то функция изгибающего момента в этой точке достигает экстремального значения - $M_z = M_{\max} ; \min$;

Для вычисления точек экстремального значения изгибающего момента необходимо определить координату точки, где значение поперечной силы равно нулю. Для этого необходимо записать выражение поперечной силы в произвольном сечении участка и найти

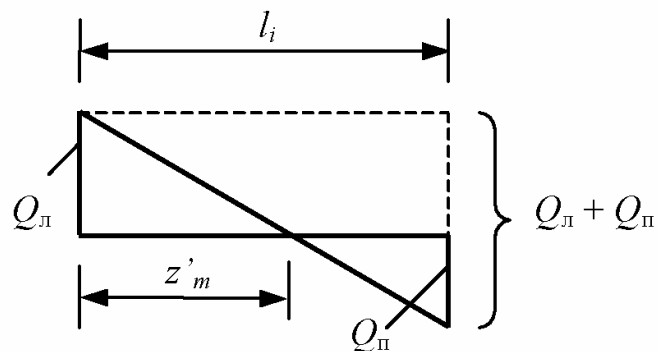


Рис. 3.3. К определению точки экстремума

значение координаты, приравняв это выражение нулю. Для участка с равномерно распределенной нагрузкой, где эпюра поперечных сил

линейна, можно получить формулу координаты из подобия треугольников эпюры Q_y на участке (поперечная сила меняет на участке знак) (рис. 3.3)

$$x'_m = \frac{|Q_{\text{л}}|}{|Q_{\text{л}}| + |Q_{\text{п}}|} l_i; \quad (3.4)$$

Как отмечалось выше, при отсутствии экстремальных точек на участках с распределенной нагрузкой эпюры изгибающих моментов можно построить либо с учетом дифференциального соотношения Журавского (3.3), либо вычислив дополнительно значение изгибающего момента в середине участка. Значение момента в середине участка можно определять по формуле

$$M_C = \frac{M_{\text{нач}} \pm M_{\text{кон}}}{2} \pm \frac{q_i l_i^2}{8}. \quad (3.5)$$

В формуле (3.5) знак (+) для моментов берется, если моменты одного знака (отложены с одной стороны), знак (+) или (-) для нагрузки принимается так, чтобы выпуклость на эпюре моментов была направлена в сторону действия нагрузки.

г) если на участке поперечная сила равна нулю – изгибающий момент на участке постоянный.

Эпюра *поперечных сил* имеет *разрывы* в точках приложения сосредоточенных поперечных нагрузок, а эпюра изгибающих моментов в точках действия внешних сосредоточенных моментов, действующих в плоскости рамы, на величину этих нагрузок.

Любая часть рамы, вырезанная из конструкции, должна находиться в равновесии под действием внешних нагрузок, действующих на рассматриваемую часть рамы, и внутренних усилий в сечениях, отсекающих часть конструкции. Этот способ используется для контроля правильности проведенных расчетов и построения эпюр внутренних усилий.

В частности, всегда проводится контроль равновесия узлов рамы.

3.1. Порядок расчета рамы

1. Определяются опорные реакции.

Простые статически определимые рамы, состоящие из жестко соединенных стержней, имеют три опорных стержня, не

пересекающихся в одной точке – трехопорная рама, или одну опору с жестким защемлением - консольная рама. В трехопорной раме опорные реакции действуют вдоль опорных стержней. В консольной раме в защемлении действуют две взаимно перпендикулярные реакции и опорный момент. Направление опорных реакций (вправо, влево от сечения опорного стержня) и опорного момента выбирается произвольно.

Для трехопорной рамы для определения опорных реакций используют уравнения моментов. Чтобы опорные реакции определялись независимо, в качестве моментных точек берут точки, где пересекаются направления двух опорных стержней (направления двух реакций). Если направления двух опорных стержней параллельны (стержни не пересекаются), то для определения третьей реакции, непараллельной им, используется уравнение проекций на ось, перпендикулярную параллельным опорным стержням.

Для определения опорных реакций консольной рамы используются уравнения проекций на взаимно перпендикулярные оси x , y и уравнение момента относительно опоры (защемления) для определения опорного момента.

Если в результате расчета реакции получаются со знаком плюс, направления реакции совпадает с принятым. При отрицательном знаке реакции, ее направление противоположно принятому.

2. Нумеруются характерные сечения рамы.

Характерными сечениями являются узлы рамы, а также точки приложения внешних сосредоточенных сил и моментов, точки начала и конца распределенных нагрузок. Порядок нумерации точек произвольный.

3. Вычисляются значения нормальных N и поперечных сил Q сил и изгибающих моментов M_z в сечениях вокруг опорных точек.

При отсутствии распределенных продольных нагрузок вдоль стержней рамы *нормальные силы* на участках стержней постоянны и могут вычисляться по участкам ($N = N_{ij}$, i, j – номера концов участка), т.е. без вычисления их значений в сечениях вокруг каждой характерной точки.

Для построения эпюры *изгибающих моментов* на участках с распределенной нагрузкой, кроме значений в на концах участков, вычисляют экстремальные значения моментах в точках с нулевым значением поперечных сил на участках (если таковые имеются), или

значения моментов в серединах участков, или строят эпюры, согласуясь с эпюрой поперечных сил в соответствии с дифференциальным соотношением Журавского (3.3).

4. Проводится контроль равновесия узлов.

Для узлов рамы проводится два вида контроля:

а) выполнение условий равновесия на действие нормальных и поперечных сил;

б) выполнение условий равновесия на действие изгибающих моментов.

Для проверки условий равновесия узел вырезается вместе с приложенными в нем внешними сосредоточенными нагрузками.

При проверке выполнения условий равновесия узла на действие нормальных и поперечных сил вычерчивается узел и к нему прикладываются действующие сосредоточенные силы и нормальные и поперечные усилия положительного направления – нормальные силы направлены от сечения (в направлении оси стержня), поперечные силы перпендикулярно осям стержней так, чтобы они вращали узел по часовой стрелке. Выписываются значения нормальных и поперечных сил с учетом знака (значение и знак усилия берутся из эпюр нормальных или поперечных сил соответственно). Составляются условия равновесия узла (рис.3.4,а):

$$\sum X_{уз} = 0; \quad \sum Y_{уз} = 0;$$

где $\sum X_{уз}$, $\sum Y_{уз}$ - суммы проекций всех сил действующих в узле (внешних и внутренних) на взаимно перпендикулярные оси x и y (направление осей произвольно).

При проверке выполнения условий равновесия узла на действие моментов вычерчивается узел и к каждому стержню прикладываются действующие изгибающие моменты (рис. 3.4,б). Направление действия момента принимается так, чтобы он растягивал волокно стержня соответственно эпюре изгибающих моментов. Направление моментов на рис 3.4,б условно принято: на правом и левом стержнях растянуто нижнее волокно, на верхнем и нижнем стержнях растянуто волокно слева от оси стержня. К узлу прикладывается также внешний момент, если он имеется в узле рамы, условие выполнения равновесия которого проверяется. Выполняют проверку выполнения равновесие узла

$$\sum m_{y3} = 0.$$

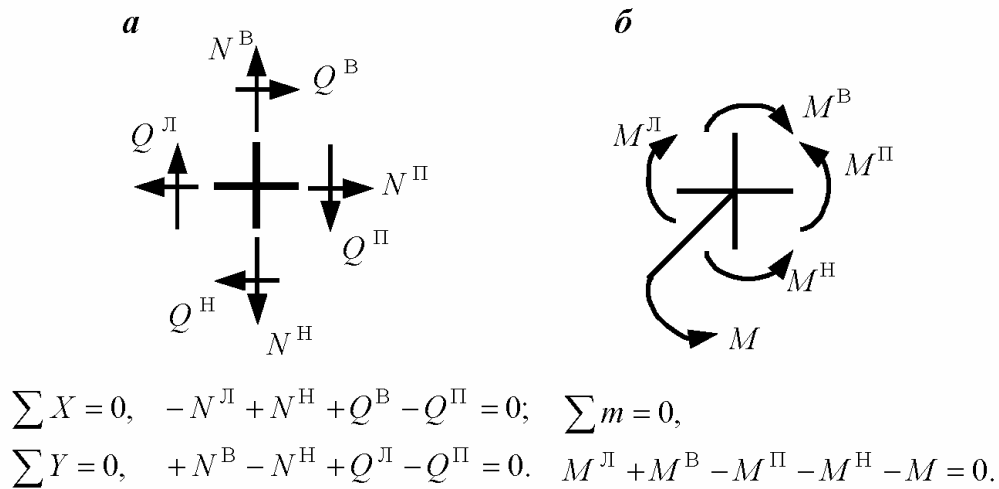


Рис. 3. 4. Проверка равновесия узлов

На рис. 3.4 индексы - л, п, в, н при внутренних усилий обозначают, что сечение проведено в стержнях слева, справа, выше или ниже от характерной точки (узла). При наличии наклонных стержней можно использовать двойную индексацию – лв, пн и т.д.

В узлах, где сходятся только два стержня и нет внешнего момента, выполнение равновесия узла на действие изгибающих моментов проводится наиболее просто – значения изгибающих моментов в сечениях двух сходящихся стержней узла рамы равны и растягивают волокна их внутренних или внешних волокон одновременно. Значения моментов на эпюре откладываются либо внутри, либо снаружи угла рамы.

3.2. Пример расчета трехопорной рамы

Для рамы, приведенной на рис 3.5., построить эпюры внутренних усилий: нормальных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

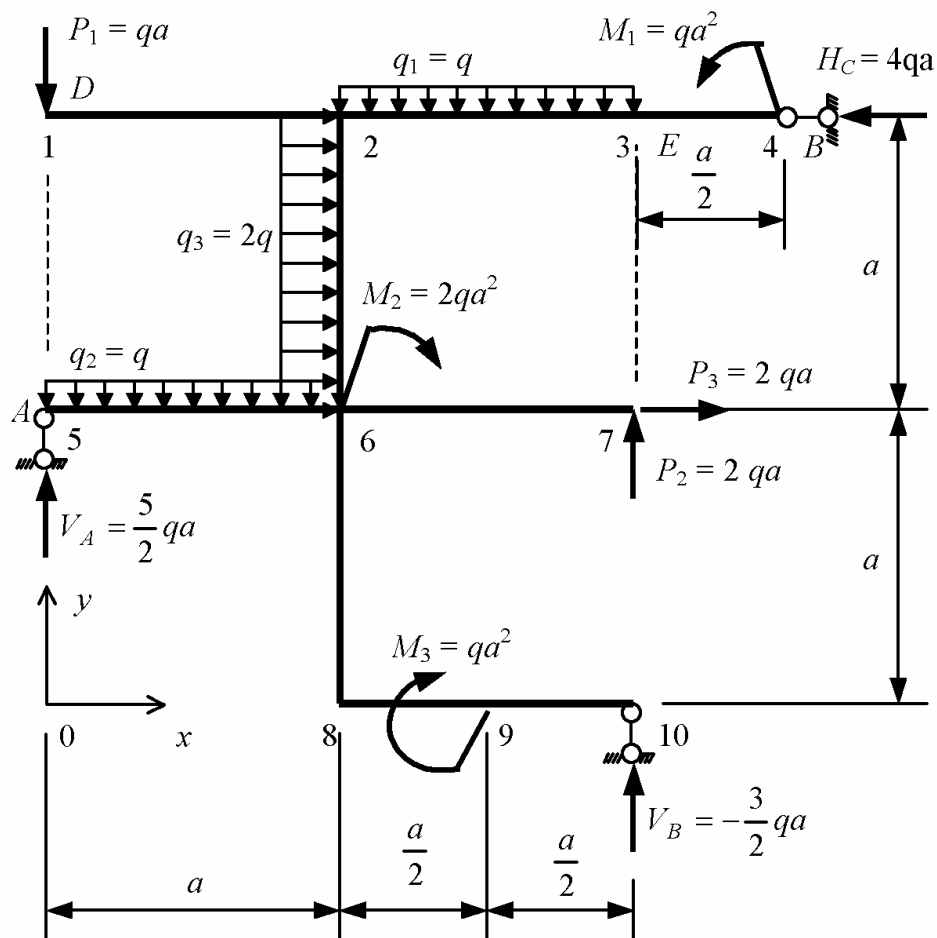


Рис. 3.5. Схема нагружения плоской рамы

1. Определяем опорные реакции.

Для определения реакции V_A составляем уравнение моментов относительно точки E – точки где пересекаются реакции V_A и H_C , для реакции V_B - уравнение моментов относительно точки D (пересечение реакций V_B и H_C), для реакции H_C - уравнение проекций на горизонтальную ось X .

$$a/. \quad \sum m_E = 0;$$

$$V_A \cdot 2a - P_1 \cdot 2a - P_3 \cdot a - q_1 \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q_2 \cdot a \cdot \frac{3}{2}a - q_3 \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M_1 + M_2 + M_3 = 0;$$

$$V_A = \frac{2qa^2 + 2qa^2 + \frac{1}{2}qa^2 + \frac{3}{2}qa^2 + qa^2 + qa^2 - 2qa^2 - qa^2}{2a} = \frac{5qa^2}{2a} = \frac{5}{2}qa.$$

$$б/. \quad \sum m_D = 0;$$

$$q_1 \cdot a \cdot \frac{3}{2}a + q_2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}a - q_3 \cdot a \cdot \frac{1}{2}a - P_2 \cdot 2a - P_3 \cdot a - M_1 + M_2 + M_3 - V_B \cdot 2a = 0;$$

$$V_B = \frac{\frac{3}{2}qa^2 + \frac{1}{2}qa^2 - qa^2 - 4qa^2 - 2qa^2 - qa^2 + 2qa^2 - qa^2}{2a} = -\frac{3}{2}qa.$$

$$в/. \quad \sum X = 0;$$

$$q_3 \cdot a + P_3 - H_c = 0; \quad H_c = q_3 \cdot a + P_3 = 2qa + 2qa = 4qa.$$

Так как реакция V_B получилась со знаком минус, то реальное ее направление противоположно указанному на схеме рамы (рис. 3.5). Не меняя направление реакции на чертеже, в последующих расчетах подставляем отрицательное значение реакции.

Для проверки правильности определения вертикальных реакций используем уравнение проекций на вертикальную ось Y - $\sum Y = 0$;

$$-P_1 - q_1 \cdot a - q_2 \cdot a + P_2 + V_A - V_B = -qa - qa - qa + 2qa + 2qa - qa \equiv 0.$$

Уравнение равновесия удовлетворяется, вертикальные реакции определены верно.

2. Вычисляем значения внутренних усилий – нормальных N и поперечных Q сил и изгибающих моментов M .

Для определения внутренних сил проводим сечение, которое всегда разбивает простую раму на две части, вычерчиваем одну из частей (ту, при рассмотрении которой проще определить внутренние усилия), указываем на чертеже положительные направления внутренних усилий и определяем внутренние усилия из уравнений равновесия отсеченной части рамы.

Примечание. На концах стержней значения внутренних усилий всегда равны соответствующим внешним сосредоточенным силам (в том числе опорным реакциям), приложенным в этих точках рамы: продольным внешним силам (силам, действующим вдоль оси стержня) - для нормальных сил N ; поперечным внешним силам (силам, действующим перпендикулярно оси стержня) - для поперечных сил Q ; внешнему моменту - для изгибающих моментов M . При отсутствии внешних сосредоточенных усилий

соответствующие внутренние усилия равны нулю. Знаки внутренних сил определяются по сформулированным выше правилам. Поэтому для этих точек расчетную схему вычерчивать не будем. Для рассчитываемой рамы это точки 1, 4, 5, 7, 9. Соответственно, для этих точек можно не использовать индексы л, п, н, в, так как сечения определяются однозначно.

Точка 1. $N_1 = 0$; $Q_1 = -P_1 = -qa$; $M_1 = 0$.

Точка 4. $N_4 = -H_C = -4qa$; $Q_3 = 0$; $M_4 = qa^2$ -растянуто
нижнее волокно.

Точка 5. $N_5 = 0$; $Q_5 = V_A = \frac{5}{2}qa$; $M_5 = 0$.

Точка 7. $N_7 = P_3 = qa$; $Q_7 = -P_2 = -2qa$; $M_7 = 0$.

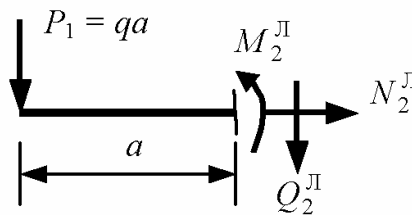
Точка 10. $N_{10} = 0$; $Q_{10} = -V_B = \frac{3}{2}qa$; $M_{10} = 0$.

Точка 2.

Сечение слева

$N_2^{\text{л}} = 0$; $Q_2^{\text{л}} = -P_1 = -qa$;

$M_2^{\text{л}} = -P \cdot a = -qa^2$



- растянуто верхнее волокно.

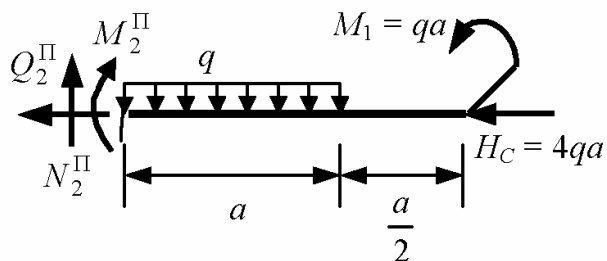
Сечение справа.

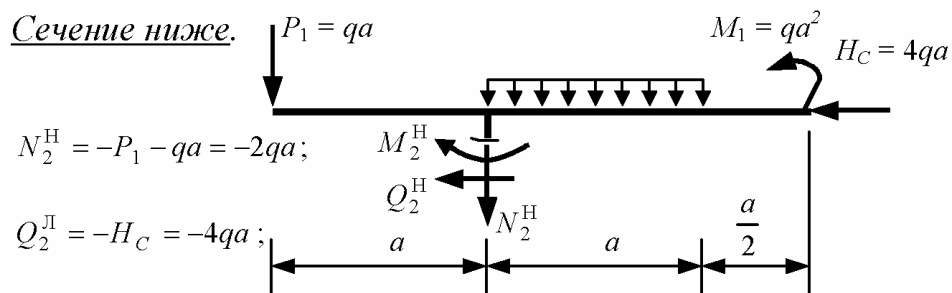
$N_2^{\text{п}} = -H_C = -4qa$;

$Q_2^{\text{п}} = -P_1 = -qa$;

$M_2^{\text{п}} = -q \frac{a^2}{2} + M_1 =$

$= -q \frac{a^2}{2} + qa^2 = q \frac{a^2}{2}$ - растянуто нижнее волокно.





$$N_2^H = -P_1 - qa = -2qa;$$

$$Q_2^H = -H_c = -4qa;$$

$$M_2^H = P_1 - q \frac{a^2}{2} + M_1 = qa^2 - q \frac{a^2}{2} + qa^2 = \frac{3}{2} qa^2$$

- растянуто правое волокно.

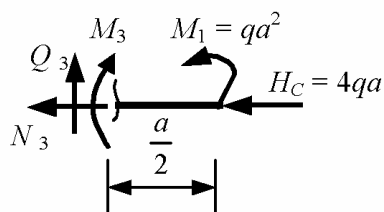
Точка 3.

Так как в точке 3, соединяются два участка прямого стержня и здесь нет сосредоточенных внешних усилий, значения внутренних усилий в сечениях слева и справа одинаковы.

$$N_3^H = N_3^П = -H_c = -4qa;$$

$$N_3^H = N_3^П = 0;$$

$$N_3^H = N_3^П = M_1 = qa^2$$



- растянуто нижнее волокно.

Точка б.

Сечение выше.

$$N_6^B = -P_1 - qa = -2qa;$$

$$Q_6^B = -H_C = -6qa;$$

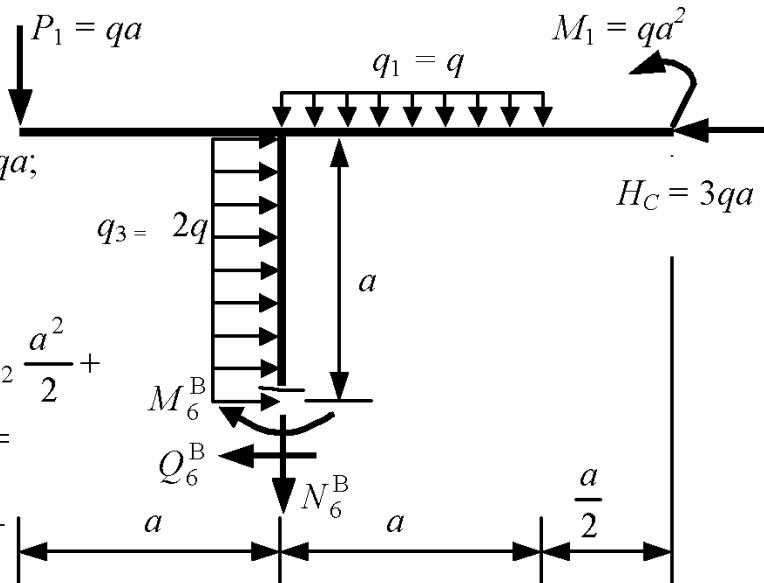
$$M_6^B = P_1 \cdot \frac{a^2}{2} - q_1 \cdot \frac{a^2}{2} - q_2 \cdot \frac{a^2}{2} +$$

$$+ M_1 + H_C \cdot a =$$

$$= qa^2 - q \cdot \frac{a^2}{2} - qa^2 +$$

$$+ qa^2 + 4qa^2 = \frac{9}{2} qa^2$$

- растянуто правое волокно.



Сечение слева.

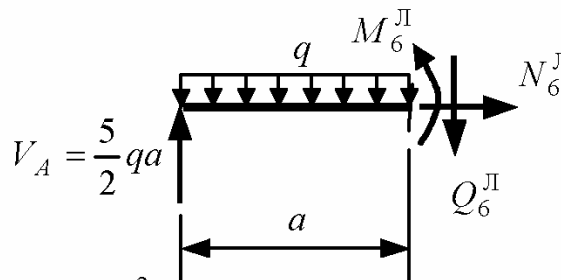
$$N_6^I = 0;$$

$$Q_6^I = V_A - qa =$$

$$\frac{5}{2} qa - qa = \frac{3}{2} qa;$$

$$M_6^I = V_A \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{5}{2} qa^2 - q \cdot \frac{a^2}{2} = 2qa^2$$

- растянуто нижнее волокно.



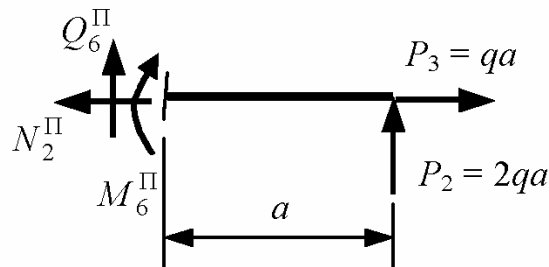
Сечение справа.

$$N_6^II = P_3 = qa;$$

$$Q_6^II = -P_2 = -2qa;$$

$$M_6^II = P_2 \cdot a = 2qa^2$$

- растянуто нижнее волокно.

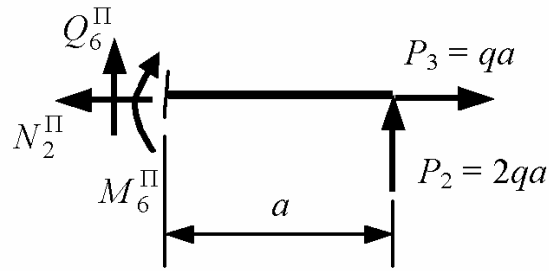


Сечение справа.

$$N_6^{\Pi} = P_3 = qa;$$

$$Q_6^{\Pi} = -P_2 = -2qa;$$

$$M_6^{\Pi} = P_2 \cdot a = 2qa^2$$



- растянуто нижнее волокно.

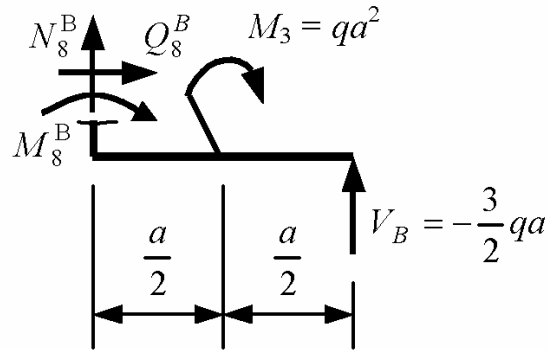
Точка 8.

Сечение выше.

$$N_8^B = -V_B = \frac{3}{2} qa;$$

$$Q_8^B = 0;$$

$$M_8^B = V_B \cdot a - M_3 = \\ = -\frac{3}{2} qa^2 - qa^2 = -\frac{5}{2} qa^2$$



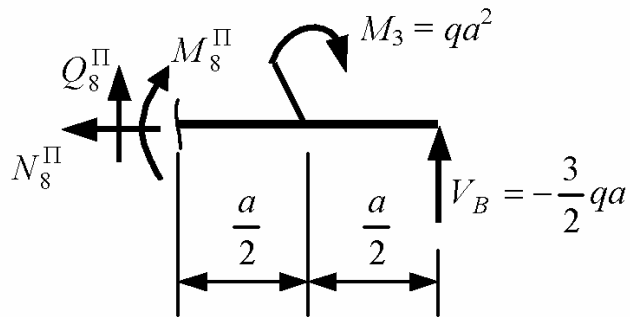
- растянуто волокно справа.

Сечение справа.

$$N_8^{\Pi} = 0;$$

$$Q_8^{\Pi} = -V_B = \frac{3}{2} qa;$$

$$M_6^{\Pi} = V_B \cdot a - M_3 = \\ = -\frac{3}{2} qa^2 - qa^2 = -\frac{5}{2} qa^2$$



- растянуто волокно справа.

Точка 9.

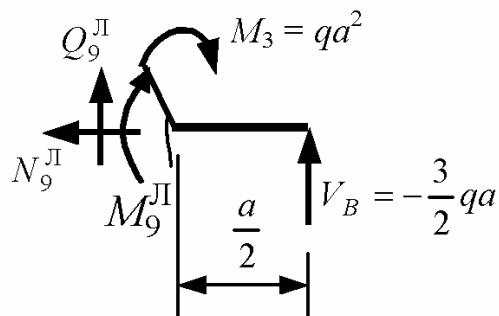
Сечение слева.

$$N_9^{\Pi} = 0$$

$$Q_9^{\Pi} = -V_B = \frac{3}{2} qa;$$

$$M_9^{\Pi} = V_B \cdot \frac{a}{2} - M_3 =$$

$$= -\frac{3}{4} qa^2 - qa^2 = -\frac{7}{4} qa^2$$



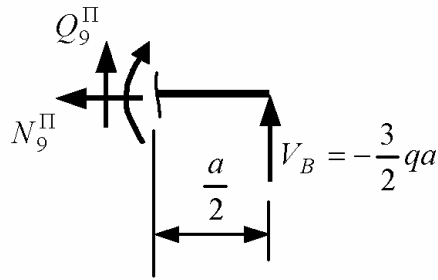
- растянуто волокно справа.

Сечение справа.

$$N_9^{\Pi} = 0;$$

$$Q_9^{\Pi} = -V_B = \frac{3}{2}qa;$$

$$M_9^{\Pi} = V_B \cdot \frac{a}{2} = -\frac{3}{4}qa^2$$



2. Строим эпюры внутренних усилий – N , Q , M .

Предварительно выпишем полученные значения внутренних усилий по участкам (табл. 3.1). В первой графе таблицы идут номера точек ограничивающих участок. Значения нормальных сил приведены на весь участок. Для поперечных сил и изгибающих моментов приведены их значения в начале и в конце участка – начало участка соответствует первой точке номера участка, конец – второй. Например для участка 2 – 6, начало участка в точке 2, конец участка в точке 6. Для моментов, указывается с какой стороны стержня откладывается указанное значение (растянутое волокно): н – снизу, в – сверху, л – слева, п – справа. При нулевом значении момента указывается растянутое волокно в окрестности точки.

Таблица 3.1

Уч-ок	N	$Q_{\text{нач}}$	$Q_{\text{кон}}$	$M_{\text{нач}}$	Раст.	$M_{\text{кон}}$	Раст.
1 - 2	0	$-qa$	$-qa$	0	в	qa^2	в
2 - 3	$-4qa$	qa	0	$0,5qa^2$	н	qa^2	н
3 - 4	$-4qa$	0	0	qa^2	н	qa^2	н
2 - 6	$-2qa$	$-4qa$	$-2qa$	$1,5qa^2$	л	$4,5qa^2$	л
5 - 6	0	$-2,5qa$	$-1,5qa$	0	н	$2qa^2$	н
6 - 7	$2qa$	$-2qa$	$-2qa$	$2qa^2$	н	0	н
6 - 8	qa	0	0	$2,5qa^2$	п	$2,5qa^2$	п
8 - 9	0	$1,5qa$	$1,5qa$	$2,5qa^2$	в	$1,75qa^2$	в
9 - 10	0	$1,5qa$	$1,5qa$	$0,75qa^2$	в	0	в

Для построения эпюры изгибающих моментов на участках с распределенной нагрузкой (участки 2 – 3, 2 – 6 и 5 – 6) эпюры строятся по трем точкам.

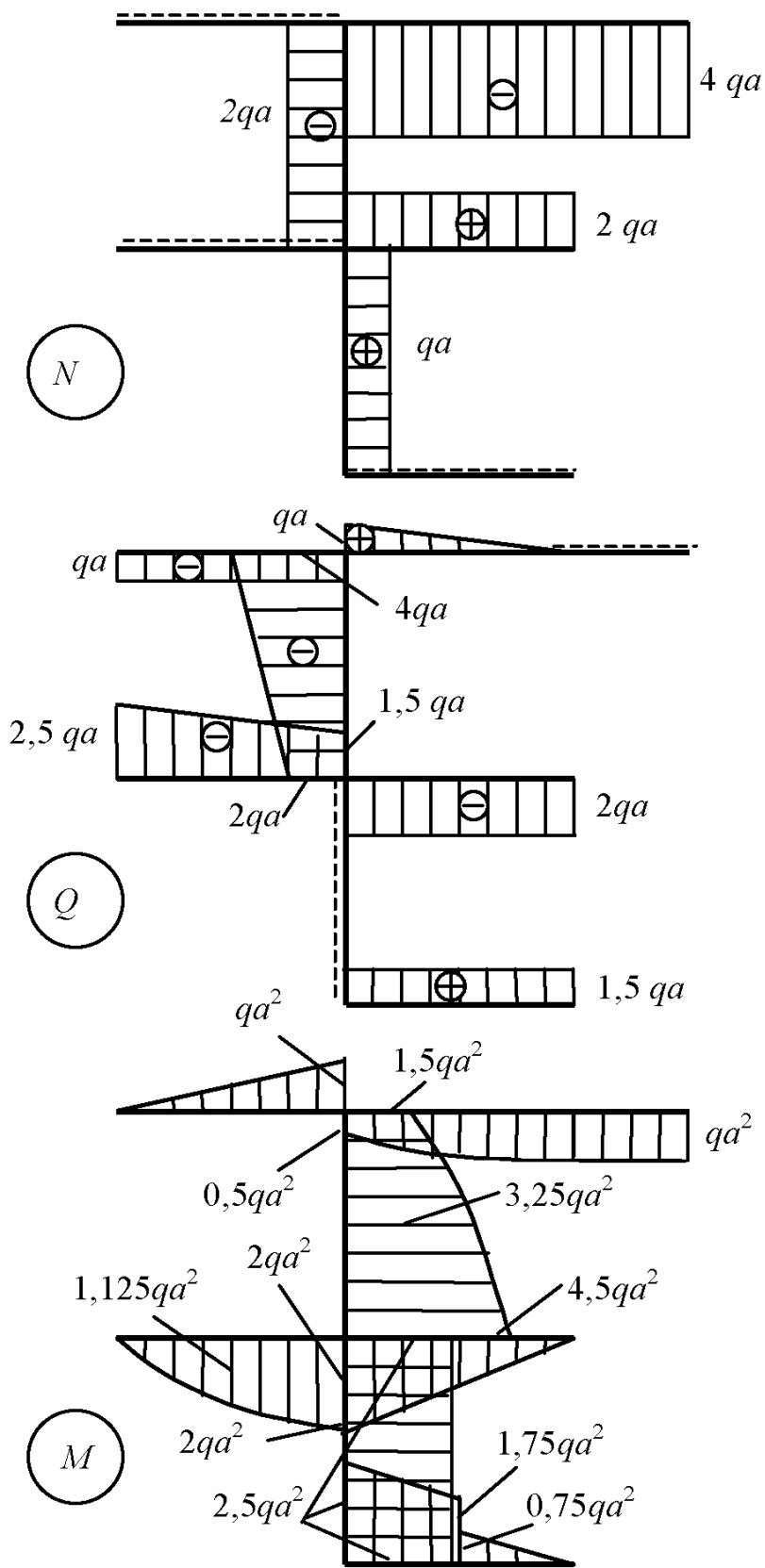


Рис. 3.6. Эпюры внутренних усилий в раме

Так как в рассматриваемой раме на участках с распределенной нагрузкой нет нулевых значений поперечной силы (нет экстремальных значений изгибающих моментов), то вычислим моменты в серединах участков в соответствии с формулой (3.5):

участок 2 – 3

$$M_{c,23} = \frac{M_2^{\text{II}} + M_3^{\text{I}}}{2} + \frac{q_1 a^2}{8} = \frac{0,5qa^2 + qa^2}{2} + \frac{qa^2}{8} = 0,875qa^2;$$

участок 2 – 6

$$M_{c,26} = \frac{M_2^{\text{H}} + M_6^{\text{B}}}{2} + \frac{q_2 a^2}{8} = \frac{1,5qa^2 + 4,5qa^2}{2} + \frac{2qa^2}{8} = 3,25qa^2;$$

участок 5 – 6

$$M_{c,56} = \frac{M_5 + M_6^{\text{I}}}{2} + \frac{q_3 a^2}{8} = \frac{0 + 2qa^2}{2} + \frac{qa^2}{8} = 1,125qa^2.$$

Эпюры внутренних усилий в раме, построенные на основании приведенных сечениях, приведены на рис. 3.6.

3. *Проводим контроль характерных особенностей полученных эпюр.*

а/. Эпюры нормальных усилий N постоянны на всех участках.

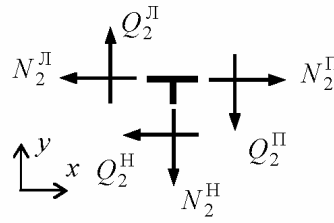
б/. Эпюры поперечных сил Q постоянны на участках 1-2, 3-4, 5-6, 6-8, 8-9, 9-10, где отсутствует распределенная нагрузка. На участках 2-3, 2-6, 5-6, где действует равномерно распределенная нагрузка, эпюры изменяются линейно.

в/. На участках 1-2, 5-6, 8-9, 9-10, где поперечные силы постоянны, изгибающие моменты изменяются линейно. На участках 3-4, 6-8, где поперечные силы равны нулю, изгибающие моменты постоянны. На участках 2-3, 2-6, 5-6, где действует распределенная нагрузка, эпюры изгибающих моментов криволинейны – квадратная парабола, выгнутая в сторону действия нагрузки, и согласуются с эпюрами поперечных сил на этих участках в соответствии с соотношениями Журавского (3.3). Так как на участках с распределенной нагрузкой эпюра поперечных сил не пересекает оси стержней (нет точек, где $Q = 0$), то на этих участках нет экстремумов изгибающих моментов.

3. Проводим проверку равновесия узлов.

а/. Проверка равновесия узлов на совместное действие нормальных и поперечных сил.

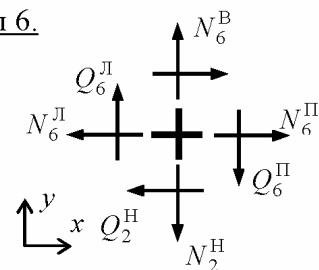
Узел 2.



$$\sum X = -N_2^I + N_2^{II} - Q_2^H = 0 - 4qa - (-qa) \equiv 0;$$

$$\sum Y = -N_2^H + Q_2^I - Q_2^{II} = -(-2qa) - qa - qa \equiv 0.$$

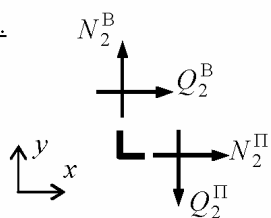
Узел 6.



$$\sum Y = -N_2^I + N_2^{II} + Q_2^B - Q_2^H = 0 + 2qa - (-2qa) - 0 \equiv 0;$$

$$\sum Y = N_2^B - N_2^H + Q_2^I - Q_2^{II} = -2qa - 1,5qa + 1,5qa - (-2qa) \equiv 0.$$

Узел 8.

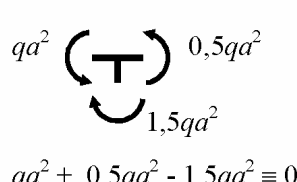


$$\sum X = N_2^{II} - Q_2^B = 0;$$

$$\sum Y = N_2^B - Q_2^{II} = 1,5qa - 1,5qa \equiv 0.$$

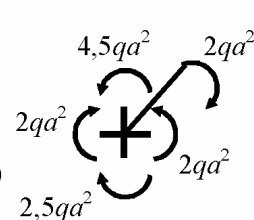
б/. Проверка равновесия узлов по изгибающим моментам

Узел 2.



$$qa^2 + 0,5qa^2 - 1,5qa^2 \equiv 0$$

Узел 6.



$$2,5qa^2 + 2qa^2 - 4,5qa^2 + 2qa^2 - 2qa^2 \equiv 0$$

Узел 8 также находится в равновесии, так как на него действуют два равных, противоположно направленных изгибающих момента. Таким образом, все узлы рамы находятся в равновесии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЗАДАНИЯ НА ВЫПОЛНЕНИЕ КУРСОВЫХ РАБОТ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

I. КУРСОВАЯ РАБОТА № 1

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СТЕРЖНЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Содержание задания.

Для статически неопределимого стержня кусочно-переменного сечения, жестко защемленного с двух концов и нагруженного сосредоточенной силой F и собственным весом ($\gamma = 7,85 \text{ т/м}^3$), требуется:

1. Определить реакции в защемлениях A и B .

2. Построить эпюры нормальных сил и нормальных напряжений вдоль оси бруса, указать опасное сечение и величину нормальных напряжений в этом сечении.
3. Проверить выполнение условия защемления концов стержня – равенство нулю удлинения стержня

$$\Delta_L = \int_L \varepsilon dx = \int_L \frac{\sigma}{E} dx = \frac{1}{E} \int_L \sigma dx = \frac{A_\sigma}{E} = 0 \rightarrow A_\sigma = 0,$$

где \int_L - интегрирование по длине стержня; $A_\sigma = \int_L \sigma dx$ -

площадь эпюры нормальных напряжений.

4. Определить перемещение сечения I – I (см. схему).

Для контроля правильности вычисления перемещения определить перемещение сечения I–I, рассматривая верхнюю и нижнюю от сечения I–I части стержня.

При расчете перемещения сечения I–I, принять модуль упругости стержня $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

Данные к расчету берутся из таблиц 1 и 2, согласно варианта задания.

Вариант задания, определяется преподавателем в виде двух цифр: 1-я цифра - № строки первой таблицы, 2-я цифра - № строки второй таблицы.

Темы для самостоятельных исследований:

Для варианта задания, при заданном соотношении площадей сечения участков стержня, подобрать сечения стержня из условия прочности в опасном сечении.

Таблица 1

№ строки	Схема бруса	A , см ²	F , кН
1	I	11	1,2
2	II	12	1,4
3	III	13	1,5
4	IV	14	1,6
5	V	15	1,1
6	VI	16	1,3
7	VII	17	1,5
8	VIII	18	1,6
9	IX	19	1,8

0	X	20	2,0
---	---	----	-----

Таблица 2

№ строки	a , см	b , см	c , см
1	42	32	14
2	44	34	22
3	46	36	16
4	48	22	26
5	50	24	18
6	28	48	30
7	30	50	26
8	32	46	28
9	36	44	52
0	40	52	24

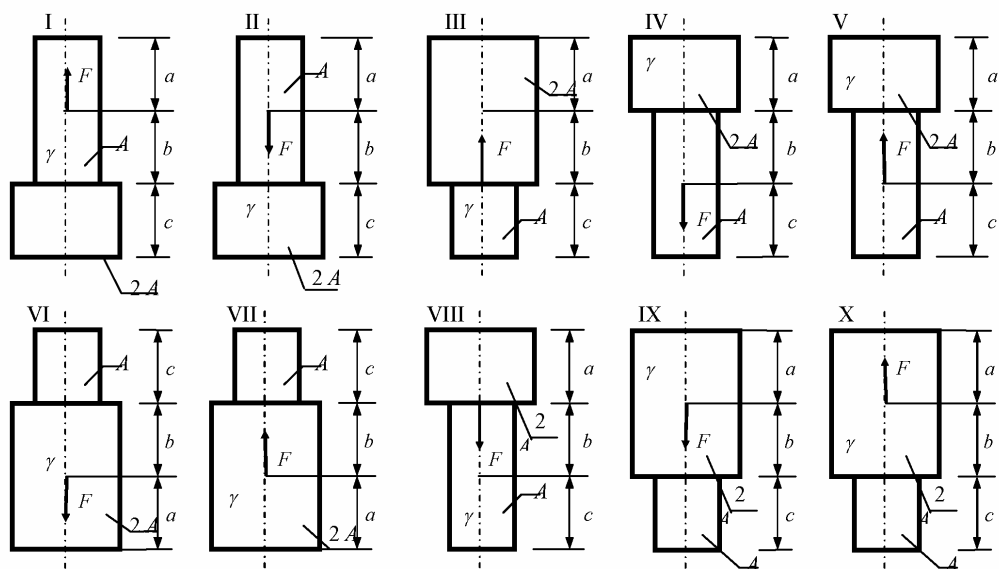


Рис. 1.1. Схемы статически неопределимых стержней

II. КУРСОВАЯ РАБОТА № 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ

Содержание задания.

1. Вычертить в масштабе 1 : 2 или 1 : 5 все сечение. При вычерчивании отдельные элементы сечения располагать вплотную друг к другу. За h (см. схемы сечений) принимать больший размер вертикального листа, за b - больший размер горизонтального листа.
2. Задаться первичными осями координат и определить координаты центров тяжести элементов сечения в первичной системе координат.

3. Аналитически определить положение центра тяжести сечения (координаты центра тяжести сечения в первичной системе координат).
4. Вычислить осевые, центробежный и полярный моменты инерции относительно центральных осей.
5. Определить положение главных осей сечения (угол поворота главных осей относительно центральных) и определить аналитически значения главных моментов инерции сечения.
6. Показать на чертеже сечения первичные, центральные и главные оси сечения.
7. Приняв за основу вычисленные осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных (не главных) осей, построить круг Мора моментов инерции и определить графически положение главных осей и величины главных моментов инерции.
8. Сравнить значения главных моментов инерции сечения, полученных графически и вычисленных аналитически.

Примечание. На чертеже сечения обязательно указываются начальные, привязочные размеры (размеры необходимые для определения координат центров тяжести элементов сечения) – размеры элементов, координаты центров тяжести швеллера и уголков (взяты из таблиц проката), ширина полок двутавра, швеллера.

Состав, расположение и размеры элементов сечения принимаются согласно данным таблиц 1, 2, в соответствии с вариантом задания - 1-я цифра - № строки первой таблицы (номер схемы сечения), 2-я цифра - № строки второй таблицы. Из таблицы 2 берутся только элементы, имеющиеся на схеме сечения.

Характеристики элементов сечения определяются для прокатных профилей по действующим ГОСТам, для вертикального и горизонтального листа, вычисляются.

Таблица 1

№ ст.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
схема сечения	I	II	III	IV	V	VI	VI	VIII	IX	X

Таблица 2

№ ст.	Равно-бокий уголок, мм	Неравно-бокий уголок, мм	Двутавр, №	Швеллер, №	Горизонтальный лист, мм	Вертикальный лист, мм
1	90×90×9	100×63×8	24	16	400×10	500×12
2	100×100×10	100×63×10	27	18	400×12	500×10
3	100×100×12	110×70×8	30	20	400×10	500×16
4	110×110×8	125×80×10	36	22	400×12	600×12
5	125×125×12	125×80×12	40	24	500×10	600×12
6	140×140×10	140×90×8	36	27	500×12	600×10
7	140×140×12	140×90×10	30	30	500×16	500×16
8	160×160×12	160×100×10	27	24	500×10	600×20
9	180×180×12	180×110×10	40	20	400×12	500×16
0	200×120×16	200×125×12	30	24	500×10	600×16

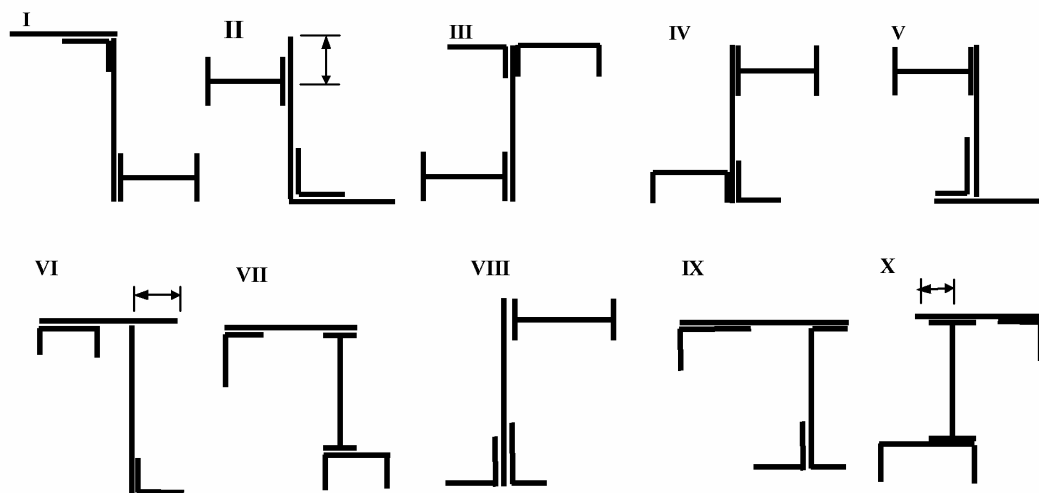


Рис. 2,п. Схемы составных сечений

III. КУРСОВАЯ РАБОТА №3

РАСЧЕТ ТРЕХОПОРНОЙ РАМЫ

Содержание задания.

Для статически определимой трех опорной рамы требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Вычислить и построить эпюры внутренних усилий - нормальных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M в раме.

3. Проверить выполнение условий равновесия узлов.
4. Показать общий характер изогнутой оси стержневой рамы.

Указание: а) для нагрузок принять соотношение

$$P = k_p \cdot qa, \quad M = k_m \cdot qa^2;$$

k_p, k_m - коэффициенты, задаваемые в табл. 2.

б) результаты расчета представлять в виде

$$N = \alpha \cdot qa, \quad Q = \beta \cdot qa, \quad M = \gamma \cdot qa^2;$$

α, β, γ - коэффициенты получаемые в результате расчета для каждого характерного сечения рамы.

Данные для расчета берутся из табл. 1, 2.

Таблица 1

№ ст.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Схема	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X

Таблица 2

№ ст.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
k_p	2,0	1,6	3,0	2,4	1,2	2,8	1,5	2,5	3,2	1,0
k_m	2,5	2,4	1,5	1,6	3,6	2,0	3,0	1,0	1,6	3,2

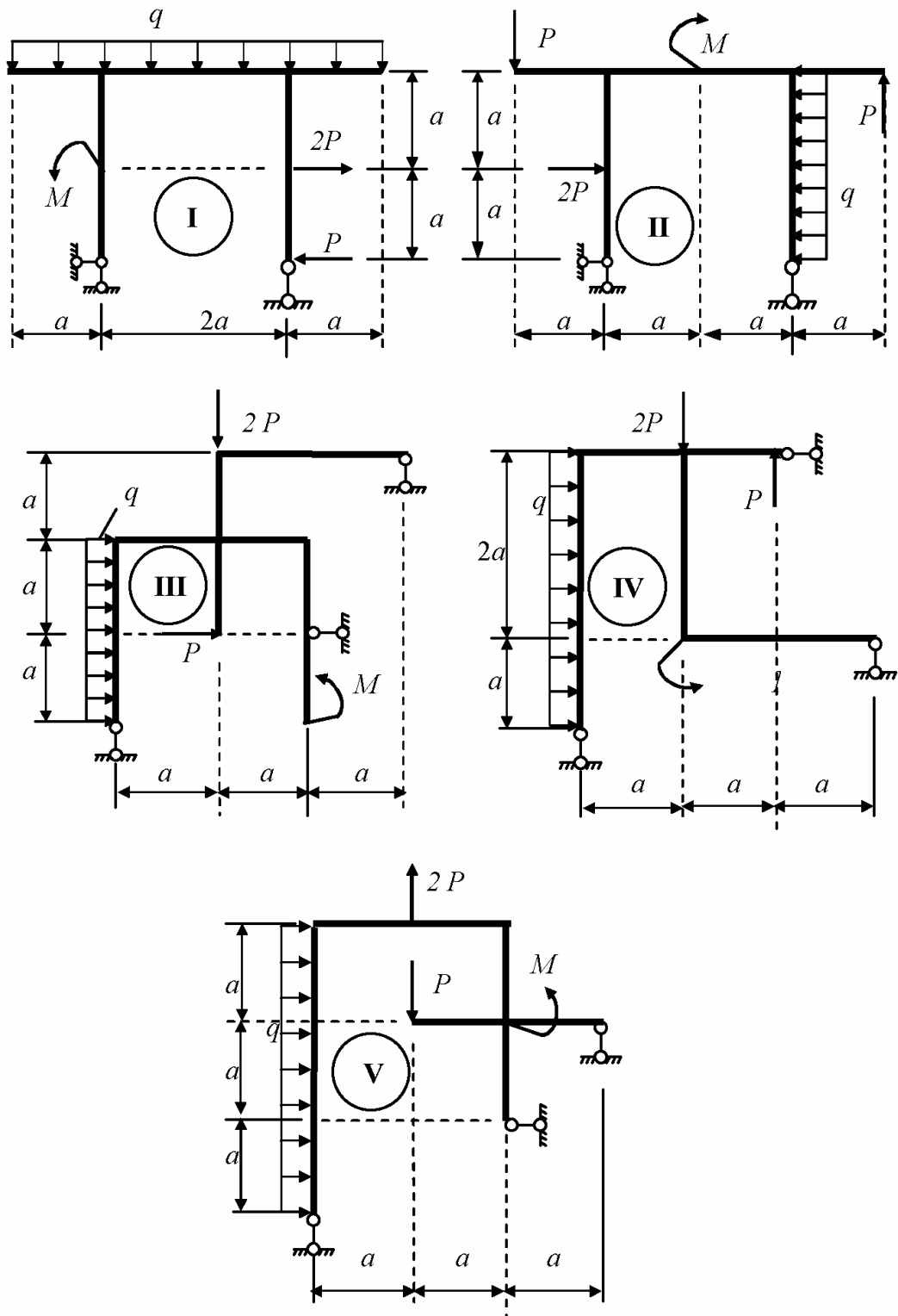


Рис. 3,п. Схемы трехпорных рам

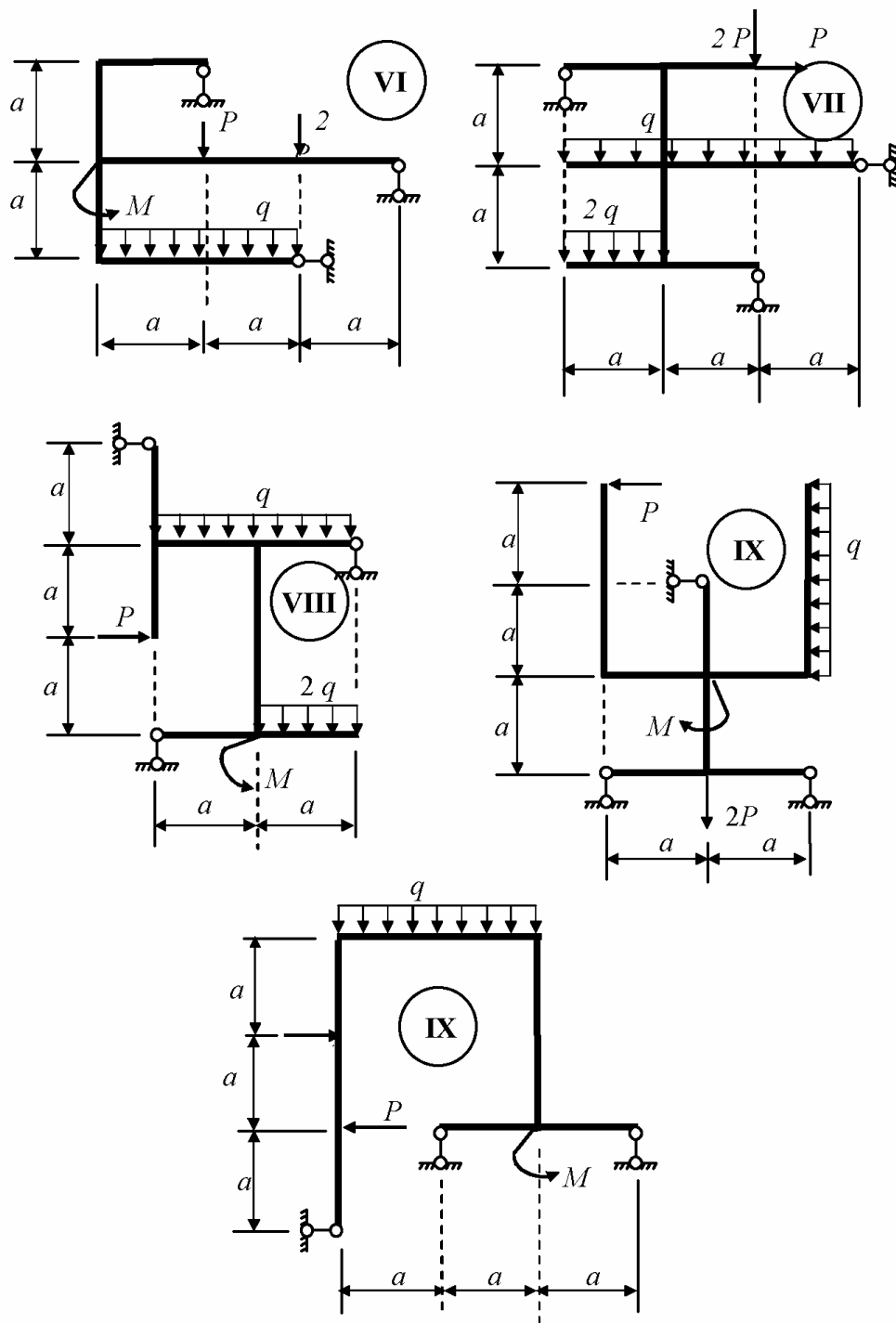


Рис. 3,п. Схемы трехпорных рам
(продолжение)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
I. Расчет статически неопределимых стержней и стержневых систем, испытывающих растяжение.....	3
1.1. Статически неопределимый стержень кусочно-постоянного сечения.....	4
1.2. Расчет систем стержней, соединенных с недеформируемым элементом.....	15
1.3. Расчет стержневой системы по предельному состоянию	19
II. Геометрические характеристики сечений.....	22
2.1. Определение геометрических характеристик сечений.....	23
2.2. Круг Мора моментов инерции сечений.....	28
2.3. Геометрические характеристики прокатных профилей.....	30
2.4. Пример расчета геометрических характеристик сечения.....	32
III. Расчет трехопорных рам.....	38
3.1. Порядок расчета рамы.....	43
3.2. Пример расчета трехопорной рамы.....	46
Приложение. Задания на выполнение курсовых работ по сопротивлению материалов.....	56
№ 1. Расчет статически неопределимого стержня на растяжение-сжатие.....	56
№ 2. Геометрические характеристики составного сечения.....	59
№ 3. Расчет трехопорной рамы.....	62