

## **ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Методические указания и контрольные задания  
к курсовой работе для студентов  
вечерней формы обучения

Даны указания и задания, необходимые для выполнения курсовых работ по сопротивлению материалов в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов. По каждому разделу дисциплины приводятся задачи и примеры решения их различных типов.

Методические указания составлены на кафедре «Теоретическая и прикладная механика» и предназначены для студентов вечерней формы обучения (ИИТО) машино- и приборостроительных специальностей.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Общие указания о порядке выполнения и оформления курсовых работ.....	5
<b>I Центральное растяжение и сжатие</b> .....	8
Задача 1.....	8
Задача 2.....	11
Задача 3.....	16
<b>II Кручение</b> .....	23
Задача 4.....	23
<b>III Изгиб</b> .....	30
Расчет балки на прочность.....	30
Задача 5.....	30
Геометрические характеристики плоских фигур.....	38
Задача 6.....	38
Расчет балки на жесткость.....	50
Задача 7.....	50
Расчет статически неопределимой балки.....	54
Задача 8.....	54
<b>IV Сложное сопротивление</b> .....	65
Задача 9.....	65
Задача 10.....	75
Задача 11.....	80
<b>V Устойчивость сжатых стержней</b> .....	86
Задача 12.....	86
<b>VI Динамическое действие нагрузок</b> .....	91
Задача 13.....	91
<b>Список рекомендуемой литературы</b> .....	95
Приложение А. Структура пояснительной записки курсовой работы.....	96
Приложение Б. Образец оформления титульного листа.....	97
Приложение В. Образец рефератов.....	98
Приложение Г. Образец содержания.....	99
Приложение Д. Образец введения.....	100
Приложение Е. Образец основного раздела.....	101
Приложение Ж. Образец списка использованной литературы.....	104
Приложение И. Геометрические параметры элементарных фигур.....	105
Приложение К. Геометрические характеристики плоских сечений брусьев.....	106
Приложение Л. Стандартные профили прокатной стали.....	109

## Введение

У студентов, изучающих курс «Сопротивление материалов», наибольшие трудности обычно возникают при решении задач.

Настоящие указания облегчат процесс изучения данного курса, помогут овладеть методикой решения практических задач, получить необходимый навык в их решении и выполнить курсовую работу.

Указания содержат следующие сведения, относящиеся к основным разделам курса «Сопротивление материалов»:

- растяжение и сжатие;
- геометрические характеристики плоских фигур;
- кручение стержней;
- плоский поперечный изгиб;
- сложное сопротивление прямых брусьев;
- расчет упругих систем на устойчивость;
- динамическое действие нагрузок.

Даны ссылки на основные положения теории и необходимые методические пояснения.

В каждом разделе даны примеры решения типовых задач, необходимый справочный материал и исходные данные для самостоятельного решения задач.

## Общие указания о порядке выполнения и оформления курсовых работ

Методические указания содержат 13 задач по курсу «Сопротивление материалов». Количество задач, входящих в объем курсовой работы, устанавливается преподавателем в зависимости от специализации и действующего учебного плана. Данные для решения каждой задачи выбираются из таблиц заданий и приложений согласно шифру, который определяется по номеру зачетной книжки и пяти буквам русского алфавита. Курсовая работа оформляется в соответствии с ЕСКД (см. приложения).

Для определения варианта данных следует из номера зачетной книжки исключить буквы, а последнюю цифру номера поместить в начало шифра и под полученным цифровым шифром записать буквы (а, б, в, г, д), например:

номер зачетной книжки – 8ЦМУ102;

номер шифра                    **28**        **102**;

расположение букв        аб            вгд.

Записав шифр и под каждой его цифрой соответствующую букву для каждой задачи, из таблицы выбирают число, которое находится на пересечении соответствующей строки (буквы) и столбца (цифры шифра). Причем вначале берется буква, а затем находится соответствующая ей цифра. Номер зачетной книжки и соответствующий ему шифр задания указываются на титульном листе курсовой работы.

Курсовая работа оформляется в виде расчетно-пояснительной записки формата А4.

Пример оформления титульного листа и текстовой части пояснительной записки приведены в приложении А–Ж.

В начале решения каждой задачи записываются ее название, условие, вычерчивается расчетная схема со всеми исходными данными.

На расчетной схеме должны быть указаны условными обозначениями все внешние нагрузки, соответствующие шифру задания.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными без сокращения слов объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны только в условных обозначениях.



При использовании формул и данных, отсутствующих в рекомендуемых учебниках, необходимо кратко и точно указать источник используемой литературы. Подстановка цифр должна выполняться полностью.

Вычисления должны вестись с точностью до трех значащих цифр с обязательным указанием размерности полученного результата в системе СИ (см. таблицу «Основные единицы механических величин» в Международной системе единиц (СИ)).

Порядок решения задач приведен в примерах, помещенных после условия каждой задачи.

Перед выполнением каждой задачи предварительно следует изучить соответствующие разделы курса «Сопротивление материалов» по лекциям и рекомендуемым учебникам [2, 3, 4].

Курсовая работа оформляется в соответствии с учебным пособием [5].

**Основные единицы механических величин  
в Международной системе единиц (СИ)**

Величина		Единица СИ		
Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение	Соотношение единиц
Сила	$P, Q, N$	ньютон	Н	$10 \text{ Н} = 1 \text{ кгс}$
Напряжение	$\sigma, \tau$	паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$
Модуль упругости	$E, G$	паскаль	Па	$1 \text{ МПа} = 10 \text{ кгс/см}^2$
Момент силы	$M, m$	ньютон·метр	Н·м	$1 \text{ Н·м} = 0,1 \text{ кгс·м}$
Погонная нагрузка	$q$	ньютон на метр	Н/м	$1 \text{ Н/м} = 0,1 \text{ кгс/м}$

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 100 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 1 \frac{\text{гН}}{\text{см}^2}.$$

### Кратные и дольные единицы

Приставка	Гига	Мега	Кило	Гекто	Дека	Деци	Санتي	Милли	Микро	Нано
Обозначение	Г	М	к	г	да	д	с	м	мк	н
Множитель	$10^9$	$10^6$	$10^3$	$10^2$	$10^1$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$

Перед подстановкой числовых значений необходимо все исходные величины привести к единым согласованным единицам измерения.

# I Центральное растяжение и сжатие

## Задача 1

Ступенчатый стержень (рисунок 1.1), участки которого имеют площади поперечных сечений  $F_i$ , нагружен продольными силами  $P_i$ . Сечения участков стержня – квадрат со стороной  $a_i$ , длины участков равны  $l_i$ .

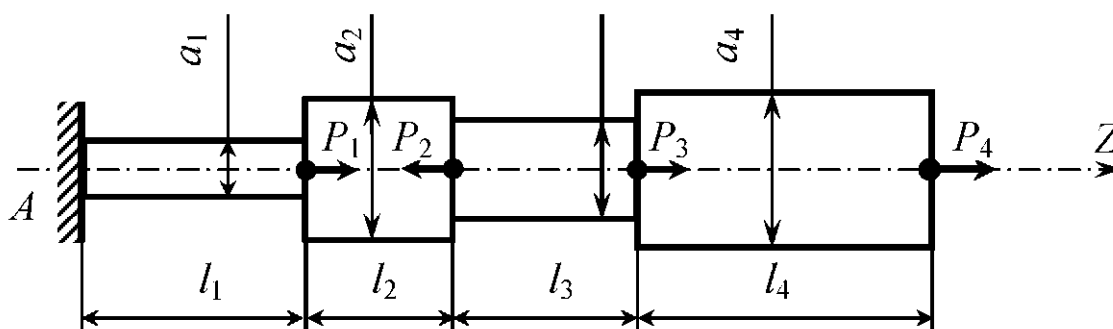


Рисунок 1.1

Требуется построить эпюры нормальных усилий  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$ , вычислить полное удлинение стержня и сделать вывод о прочности стержня. Материал стержня – сталь с модулем упругости первого рода  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа и допусковым напряжением  $[\sigma] = 160$  МПа. Данные для расчета принять по таблице 1.1. Для получения численного результата принять значения:  $P = 10$  кН,  $a = 10$  мм,  $l = 500$  мм.

Таблица 1.1

Номер строки	$P_i$				$a_i$				$l_i$			
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
1	$P$	$3P$	$P$	$P$	$2a$	$a$	$2a$	$a$	$l$	$l$	$l$	$l$
2	$P$	$3P$	$2P$	$P$	$a$	$a$	$2a$	$2a$	$2l$	$l$	$l$	$l$
3	$P$	$3P$	$P$	$3P$	$3a$	$a$	$3a$	$3a$	$l$	$2l$	$l$	$l$
4	$P$	$P$	$2P$	$2P$	$4a$	$2a$	$a$	$a$	$l$	$l$	$2l$	$l$
5	$P$	$2P$	$2P$	$P$	$4a$	$a$	$2a$	$2a$	$l$	$l$	$l$	$2l$
6	$2P$	$3P$	$P$	$P$	$3a$	$2a$	$4a$	$4a$	$2l$	$2l$	$l$	$l$
7	$2P$	$5P$	$P$	$2P$	$4a$	$4a$	$2a$	$2a$	$2l$	$l$	$2l$	$l$
8	$P$	$2P$	$P$	$P$	$4a$	$3a$	$a$	$2a$	$l$	$l$	$2l$	$2l$
9	$P$	$4P$	$P$	$2P$	$a$	$a$	$2a$	$2a$	$l$	$l$	$l$	$l$
0	$P$	$2P$	$P$	$2P$	$4a$	$3a$	$2a$	$3a$	$l$	$2l$	$l$	$l$
Буква шифра	в	г	д	д	в	г	в	в	г	д	в	г

**Пример.** В соответствии с условиями задачи 1 выполнить расчет стержня, изображенного на рисунке 1.2,а.

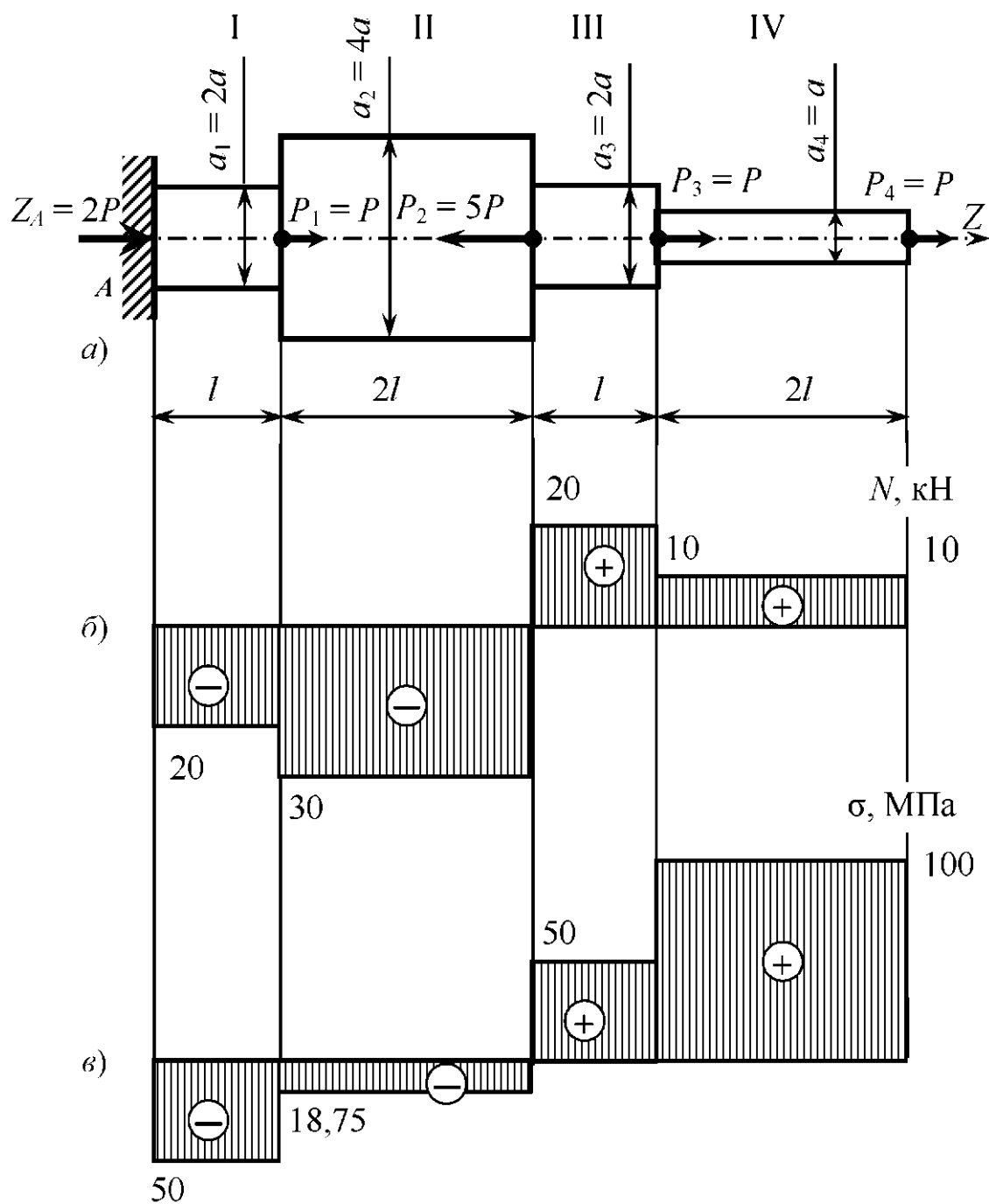


Рисунок 1.2

Решение.

1) Определяем опорные реакции из уравнения равновесия

$$\sum Z = 0; \quad Z_A + P_1 - P_2 + P_3 + P_4 = 0;$$

$$Z_A = -P_1 + P_2 - P_3 - P_4; \quad Z_A = -P + 5P - P - P = 2P.$$

2) Определяем нормальные усилия  $N_i$  на каждом участке, применяя метод сечений.

В произвольном сечении  $i$ -го участка нормальное усилие  $N_i$  равно алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к сечению, т.е.

$$N_i = \sum_1^n P_i.$$

Растягивающие усилия считаются положительными, сжимающие – отрицательными. При составлении уравнений направление внутреннего усилия  $N_i$  полагаем растягивающим (положительным), т.е. направленным в сторону внешней нормали к произвольному сечению, совпадающей с положительным направлением оси  $Z$ .

Если в результате расчета усилие  $N_i$  примет отрицательное значение, это указывает на то, что направление усилия противоположно предполагаемому, т.е. оно сжимающее.

Рассмотрим левую отсеченную часть стержня:

- на I участке  $N_1 = -Z_A = -2P$ ;
- на II участке  $N_2 = -Z_A - P_1 = -2P - P = -3P$ ;
- на III участке  $N_3 = -Z_A - P_1 + P_2 = -2P - P + 5P = 2P$ ;
- на IV участке  $N_4 = -Z_A - P_1 + P_2 - P_3 = -2P - P + 5P - P = P$ .

Отрицательные значения усилий  $N_1$  и  $N_2$  показывают, что участки I и II работают на сжатие. Подставив числовое значение  $P = 10$  кН, получим:

$$N_1 = -20 \text{ кН}; N_2 = -30 \text{ кН}; N_3 = 20 \text{ кН}; N_4 = 10 \text{ кН}.$$

По полученным результатам строим эпюру нормальных усилий  $N$  (рисунок 1.2,б).

3) Определяем нормальные напряжения  $\sigma_i$ :

- на I участке

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{N_1}{(2a)^2} = \frac{-20 \cdot 10^3}{(2 \cdot 10)^2} = -50 \text{ Н/мм}^2 = 50 \text{ МПа};$$

- на II участке

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-30 \cdot 10^3}{(4 \cdot 10)^2} = -18,75 \text{ МПа};$$

– на III участке

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{(2 \cdot 10)^2} = 50 \text{ МПа};$$

– на IV участке

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{10 \cdot 10^3}{10^2} = 100 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру  $\sigma$  (рисунок 1.2,в).

Из эпюры  $\sigma$  следует, что наиболее нагружен IV участок стержня (опасный участок). При центральном растяжении условие прочности имеет вид  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ .

Так как  $\sigma_{\max} = 100 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$  – условие прочности выполняется.

4) Вычисляем полную деформацию стержня как алгебраическую сумму абсолютных деформаций его участков:

$$\Delta l = \sum_1^n \Delta l_i,$$

где  $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{E F_i} = \frac{\sigma_i l_i}{E}$ .

Таким образом,  $\Delta l = \frac{1}{E} (\sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 + \sigma_3 l_3 + \sigma_4 l_4) =$   
 $= \frac{1}{2 \cdot 10^5} (-50 \cdot 500 - 18,75 \cdot 1000 + 50 \cdot 500 + 100 \cdot 1000) = 40,625 \cdot 10^{-2} \text{ мм}.$

## Задача 2

Стержень постоянного поперечного сечения (рисунок 2.1) защемлен обоими торцами и нагружен продольными силами.

Раскрыть статическую неопределимость, построить эпюру нормальных усилий  $N$  и эпюру линейных перемещений  $\Delta$ .

Расчетную схему принять по рисунку 2.1. Данные для расчета принять по таблице 2.1.

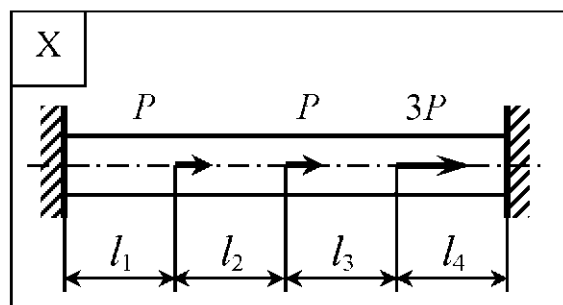
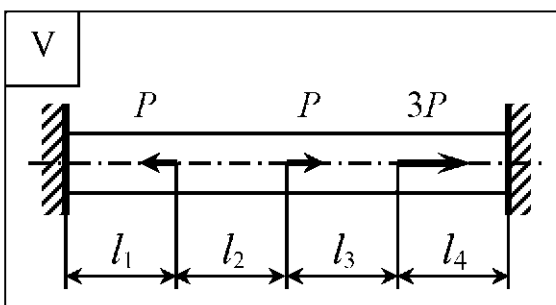
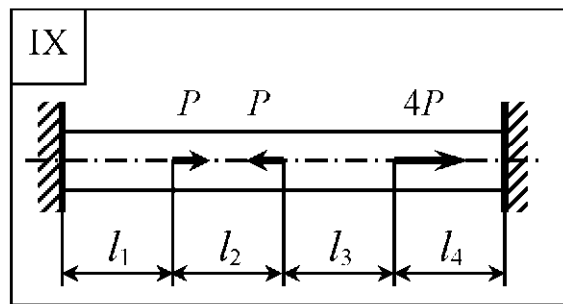
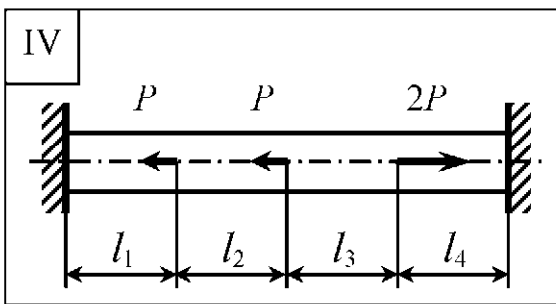
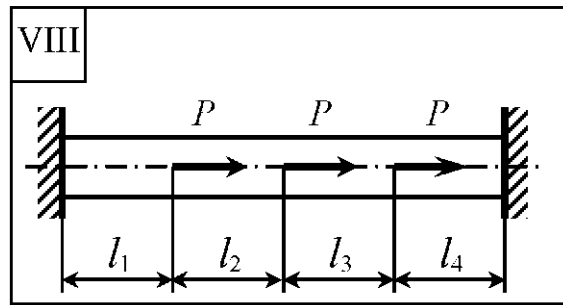
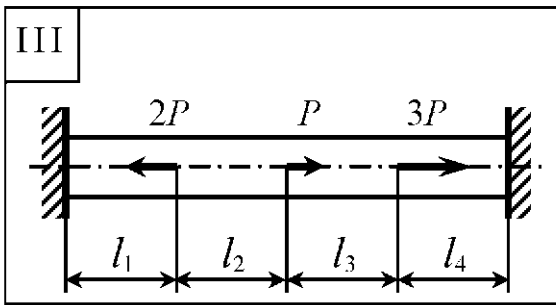
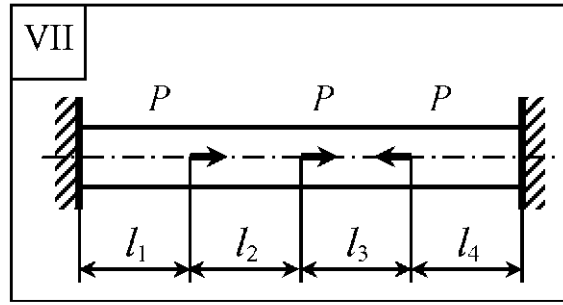
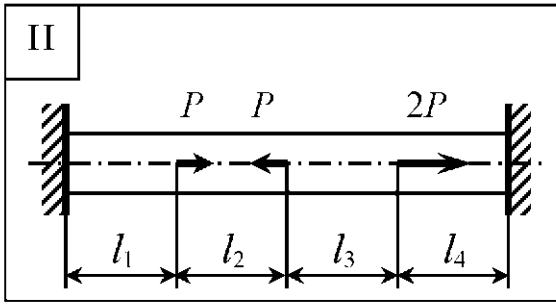
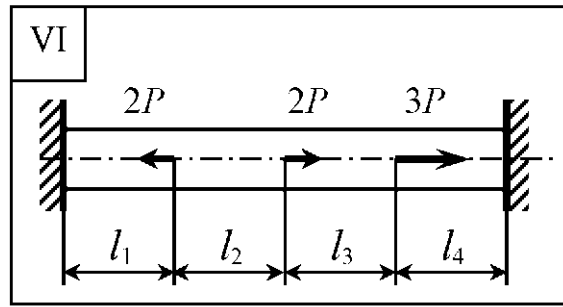
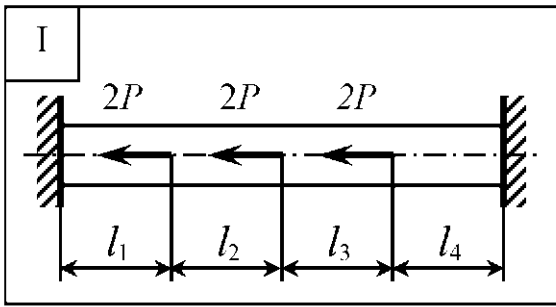


Рисунок 2.1

Таблица 2.1

Номер строки	Номер схемы по рисунку 2.1	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
1	I	$l$	$1,8l$	$0,2l$	$0,4l$
2	II	$1,2l$	$1,6l$	$0,4l$	$0,6l$
3	III	$1,4l$	$1,4l$	$0,6l$	$0,8l$
4	IV	$0,6l$	$1,2l$	$0,8l$	$l$
5	V	$1,8l$	$l$	$l$	$2,0l$
6	VI	$2,0l$	$1,2l$	$1,2l$	$l$
7	VII	$1,6l$	$0,4l$	$1,4l$	$1,6l$
8	VIII	$2,4l$	$0,6l$	$1,6l$	$1,6l$
9	IX	$2,0l$	$0,8l$	$0,8l$	$2,0l$
0	X	$2,0l$	$l$	$2,0l$	$1,2l$
Буква шифра	а	б	в	г	д

**Пример.** Раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры нормальных усилий  $N$  и линейных перемещений  $\Delta$  для стержня, изображенного на рисунке 2.2,а. Принять  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$ .

Решение (задача решается в алгебраическом виде).

1) Составляем уравнения равновесия:

$$\sum Z = 0; \quad R_A - 2P + P + P - R_B = 0. \quad (2.1)$$

$$R_A = R_B.$$

Получено одно уравнение с двумя неизвестными, т.е. система один раз статически неопределима.

2) Выбираем основную систему. Она получается из заданной путем освобождения от лишней связи. Принимаем за лишнюю связь защемление в опоре  $B$ . Нагружаем основную систему заданными силами и накладываем условие эквивалентности ее заданной системе: перемещение сечения  $B$  в заданной и основной системах должно быть одинаковым, т.е.  $\Delta_B = 0$ .

В сечении  $B$  приложим активную силу  $X$ , величина которой должна быть такой, чтобы условие эквивалентности выполнялось (рисунок 2.2,б).

3) Раскрываем условие эквивалентности.

Перемещение  $\Delta_B$  сечения  $B$  выразим через приложенные нагрузки, применяя принцип независимости действия сил (нагрузки, вызывающие сжатие, считаем отрицательными):

$$\Delta_B = \Delta_B(P_i) + \Delta_B(X),$$

где  $\Delta_B(P_i)$  – перемещение сечения  $B$  от каждой из приложенных известных сил  $P_i$ ;  $\Delta_B(X)$  – перемещение сечения  $B$  от неизвестной силы  $X$ .



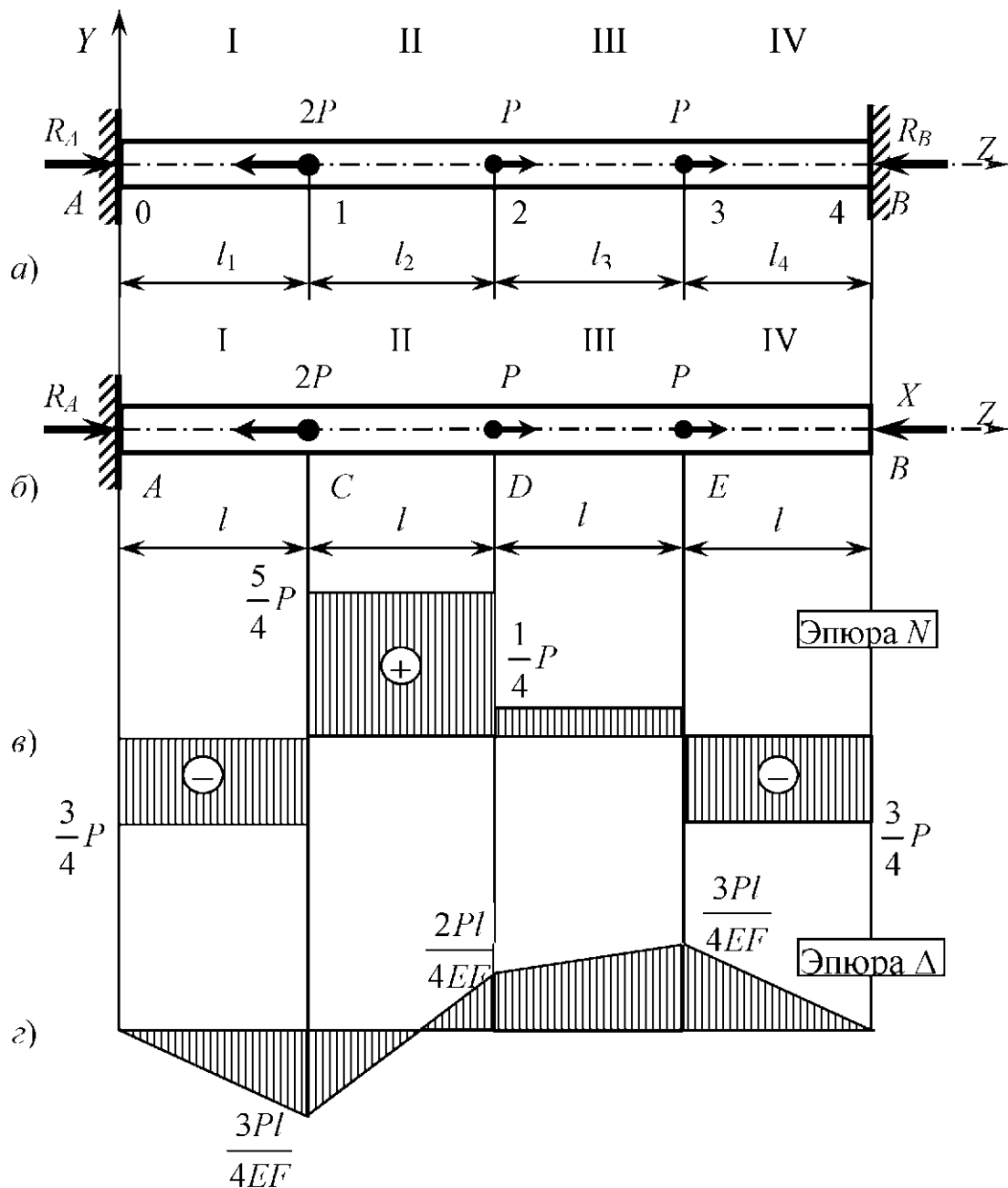


Рисунок 2.2

Запишем данное выражение, используя 2-е выражение закона Гука:

$$\Delta_B = \frac{Pl}{EF}.$$

В результате получим уравнение совместности деформаций в виде

$$-\frac{2Pl}{EF} + \frac{P2l}{EF} + \frac{P3l}{EF} - \frac{X4l}{EF} = 0, \quad (2.2)$$

из которого следует, что  $X = \frac{3}{4}P$ , следовательно, реакция  $R_B = \frac{3}{4}P$ .

Подставляя найденную  $R_B$  в (2.1), получаем

$$R_A = \frac{3}{4}P.$$

Таким образом, статическая неопределимость раскрыта, т.е. выявлены все неизвестные в уравнении (2.1).

4) Определяем нормальные усилия  $N_i$  методом сечений (см. пример 1). Разбиваем стержень на участки I, II, III, IV (см. рисунок 2.2,а):

- на I участке  $N_1 = -R_A = -\frac{3}{4}P$ ;
- на II участке  $N_2 = -R_A + 2P = -\frac{3}{4}P + 2P = \frac{5}{4}P$ ;
- на III участке  $N_3 = -R_A + 2P - P = -\frac{3}{4}P + 2P - P = \frac{1}{4}P$ ;
- на IV участке  $N_4 = -R_A + 2P - P - P = -\frac{3}{4}P + 2P - P - P = -\frac{3}{4}P$ .

По полученным значениям строим эпюру нормальных усилий  $N$  (рисунок 2.2,в).

5) Строим эпюру перемещений сечений (0, 1, 2, 3, 4), используя следующее правило их подсчета:

*перемещение сечения в конце участка равно перемещению сечения в начале этого участка плюс его абсолютная «деформация», т.е.*

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + \frac{N_i l_i}{(EF)_i}.$$

Перемещение сечения 0:  $\Delta_0 = 0$ .

$$\text{Перемещение сечения 1: } \Delta_1 = \Delta_0 + \frac{N_1 l_1}{EF} = -\frac{3Pl}{4EF}.$$

$$\text{Перемещение сечения 2: } \Delta_2 = \Delta_1 + \frac{N_2 l_2}{EF} = -\frac{3Pl}{4EF} + \frac{5Pl}{4EF} = \frac{2Pl}{4EF}.$$

$$\text{Перемещение сечения 3: } \Delta_3 = \Delta_2 + \frac{N_3 l_3}{EF} = \frac{2Pl}{4EF} + \frac{Pl}{4EF} = \frac{3Pl}{4EF}.$$

$$\text{Перемещение сечения 4: } \Delta_4 = \Delta_3 + \frac{N_4 l_4}{EF} = \frac{3Pl}{4EF} - \frac{3Pl}{4EF} = 0.$$

Эпюра перемещений  $\Delta$  изображена на рисунке 2.2,з.

**П р и м е ч а н и е.** Построение эпюры перемещений  $\Delta$  является также деформационной проверкой. Равенство нулю перемещения конечного сечения  $\Delta_4$  показывает, что статическая неопределимость раскрыта верно.

### Задача 3

Абсолютно жесткая балка (рисунок 3.1) удерживается в горизонтальном положении шарнирной опорой и двумя стальными стержнями одинакового диаметра  $d$ , соединенными шарнирно с балкой и опорами. Балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  и сосредоточенной силой  $P = qa$ .

Выполнить проектировочный расчет, т.е. определить площади поперечных сечений стержней  $F$  и их диаметры.

Данные для расчета принять по таблице 3.1.

Характеристики стержней:

- $F_1 = F, F_2 = 2F$ ;
- допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа;
- модуль упругости  $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Таблица 3.1

Номер строки	Номер схемы по рисунку 3.1	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$q$ , кН/м
1	I	0,5	0,4	1,0	10
2	II	0,6	0,6	0,5	12
3	III	0,4	1,0	1,0	10
4	IV	0,5	1,0	1,0	20
5	V	1,0	1,0	1,0	20
6	VI	1,0	1,0	2,0	24
7	VII	1,0	1,0	2,0	20
8	VIII	1,0	0,6	2,0	10
9	IX	0,5	0,5	1,0	20
0	X	2,0	2,0	1,0	30
Буква шифра	а	б	в	г	д

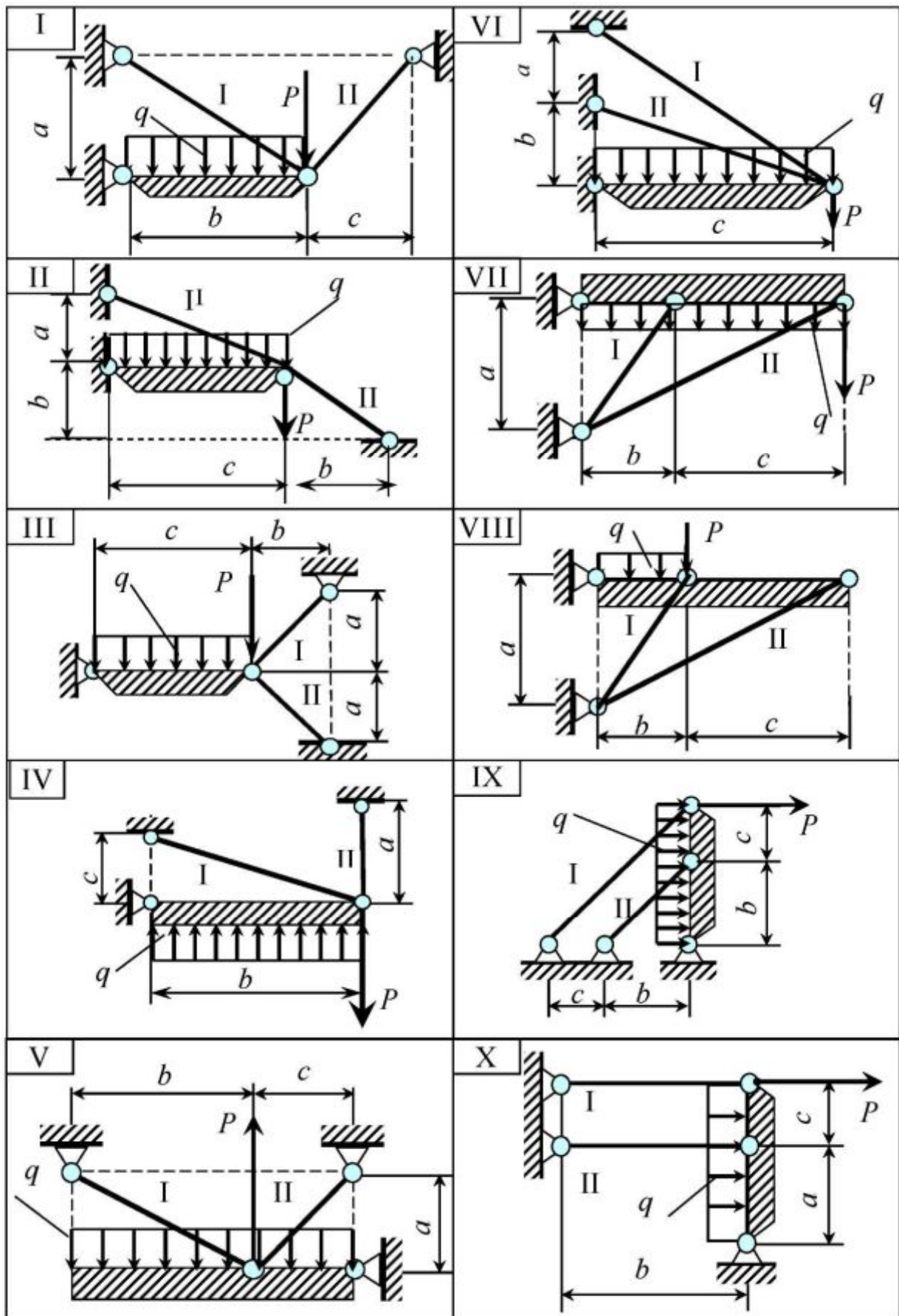


Рисунок 3.1

**Пример.** В соответствии с условиями задачи 3 выполнить проектировочный расчет стержней системы, приведенной на рисунке 3.2,*а*, при  $a = 0,5 \text{ м} = 500 \text{ мм}$ ;  $b = 0,4 \text{ м} = 400 \text{ мм}$ ;  $q = 10 \text{ кН/м} = 10 \text{ Н/мм}$ .

Решение.

1) Применяя метод сечений к заданной конструкции (см. рисунок 3.2,*а*), мысленно рассечем стержни и действие отброшенных частей заменим усилиями  $N_1$  и  $N_2$ .

В шарнирно-неподвижной опоре возникают опорные реакции  $A_Z$  и  $A_Y$ . Схема усилий изображена на рисунке 3.2,*б*.

Составим возможные уравнения равновесия:

$$\sum Z = 0; \quad -A_Z - N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta = 0; \quad (3.1)$$

$$\sum Y = 0; \quad A_Y + N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \beta - qa - P = 0; \quad (3.2)$$

$$\sum \text{mom}_A = 0; \quad N_1 \sin \alpha \cdot a + N_2 \sin \beta \cdot a - P \cdot a - qa \frac{a}{2} = 0. \quad (3.3)$$

Получили три уравнения с четырьмя неизвестными  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $A_Z$ ,  $A_Y$ . Следовательно, рассматриваемая система один раз статически неопределима и для решения задачи требуется составить еще одно дополнительное уравнение – уравнение совместности деформаций. Оно получается при рассмотрении конструкции после деформации от нагрузок.

В проектировочном расчете реактивные силы  $A_Z$  и  $A_Y$  не требуются, нужно знать только усилия в стержнях  $N_1$  и  $N_2$ . Поэтому достаточно составить одно уравнение равновесия (3.3), которое содержит только эти неизвестные и в дальнейшем будет использоваться.

2) Составляем схему перемещений, изобразив начальное и конечное состояния конструкции до и после приложения нагрузок (рисунок 3.2,*в*).

Ввиду малости деформаций и перемещений считаем, что точка  $B$  переместится в положение  $B_1$  по нормали к исходному положению радиуса вращения  $AB$  ( $BB_1 \perp AB$ ). При совмещении концов стержней с точкой  $B_1$  описываемые ими при повороте относительно шарниров  $C$  и  $D$  дуги заменим прямыми  $B_1K$  и  $B_1M$ , перпендикулярными к первоначальным положениям стержней 1 и 2. Отрезки  $BK = \Delta l_1$  и  $BM = \Delta l_2$  являются абсолютными удлинениями стержней 1 и 2.

При составлении схемы перемещений (см. рисунок 3.2,*в*) нужно, чтобы знаки деформаций стержней соответствовали принятому направлению внутренних усилий  $N_1$  и  $N_2$  на схеме усилий (см. рисунок 3.2,*б*).

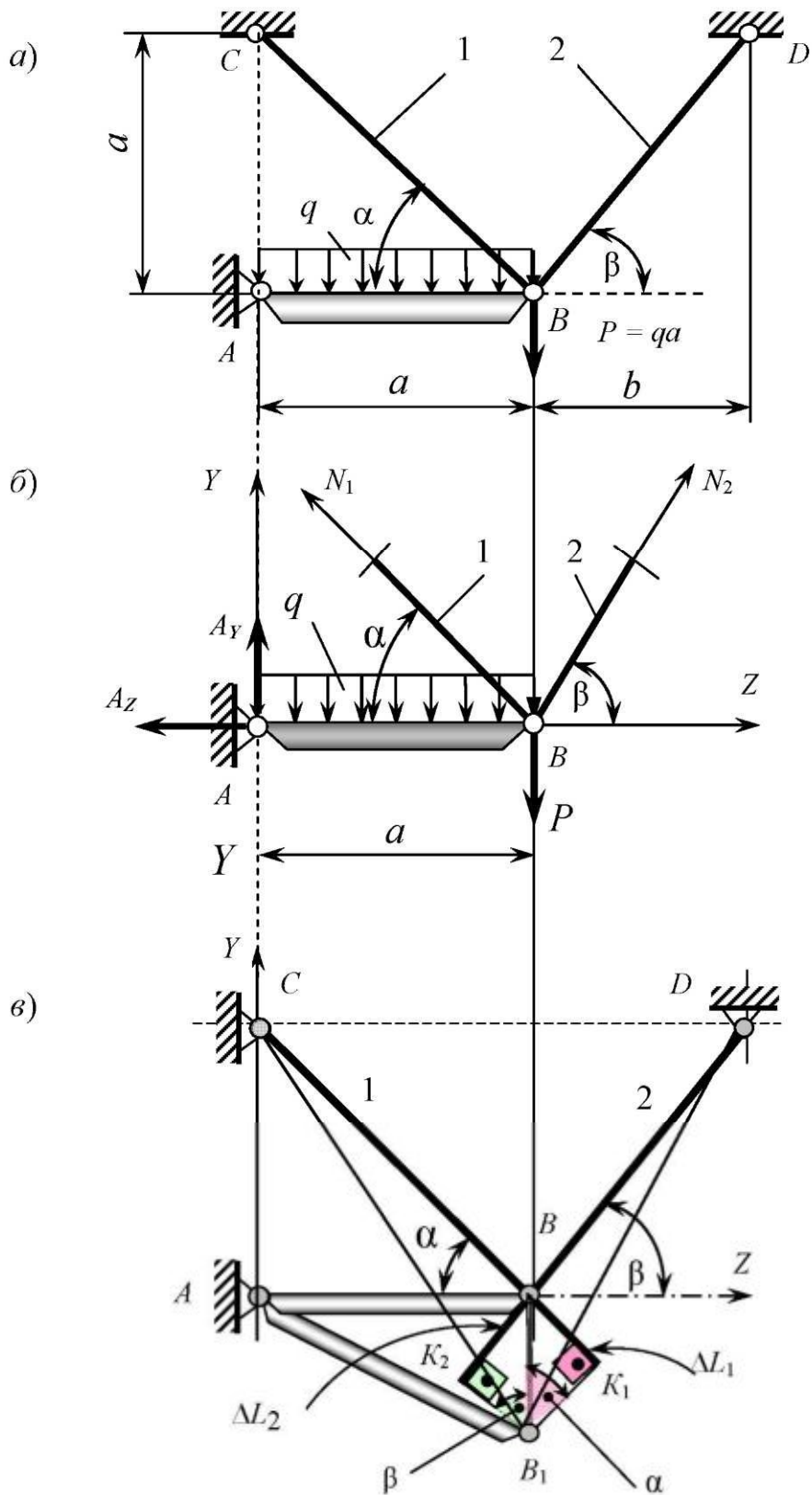


Рисунок 3.2

Так, в рассматриваемом примере растягивающие усилия  $N_1$  и  $N_2$  соответствуют тому, что на схеме перемещений стержни 1 и 2 изображены удлиняющимися на величины  $\Delta L_1$  и  $\Delta L_2$ .

**3)** Составляем уравнение совместности деформаций. Рассмотрим прямоугольные треугольники  $BB_1M$  и  $BB_1K$  с общей гипотенузой  $BB_1$ .

Выразив отрезок  $BB_1$  (перемещение точки  $B$ ) через удлинения стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ , получим

$$\begin{aligned} - \text{ из } \Delta BB_1K \quad BB_1 &= \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha}; \\ - \text{ из } \Delta BB_1M \quad BB_1 &= \frac{\Delta l_2}{\sin \beta}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{\Delta l_1}{\sin \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\sin \beta}. \quad (3.4)$$

Выразив деформации  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  через усилия в соответствии с законом Гука, получим

$$\frac{N_1 l_1}{EF_1 \sin \alpha} = \frac{N_2 l_2}{EF_2 \sin \beta}. \quad (3.5)$$

Учитывая, что по условию задачи  $F_1 = F$ ;  $F_2 = 2F$ ;  $l_1 = \frac{a}{\sin \alpha}$ ;  $l_2 = \frac{a}{\sin \beta}$  (см. рисунок 3.2,а), полученное выражение (3.5) преобразуем к виду

$$\frac{N_1 a}{EF \sin^2 \alpha} = \frac{N_2 a}{2EF \sin^2 \beta},$$

откуда

$$N_1 - N_2 \frac{\sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \beta} = 0. \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) является дополнительным уравнением и совместно с уравнением (3.3) образует систему уравнений для определения усилий  $N_1$  и  $N_2$ .

**4)** Определяем внутренние усилия  $N_1$  и  $N_2$ , решая совместно систему уравнений (3.3) и (3.6).

В результате получим

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{3qa}{(\sin^3 \alpha + 2 \sin^3 \beta)} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2}, \\ N_2 &= \frac{3qa}{(\sin^3 \alpha + 2 \sin^3 \beta)} \cdot \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

С учетом данных (см. рисунок 3.2,а)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a} = 1, \text{ т.е. } \alpha = 45^\circ; \quad \sin 45^\circ = 0,707; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b} = \frac{0,5}{0,4} = 1,25;$$

т.е.  $\beta = 51^\circ 20'$ ;  $\sin 51^\circ 20' = 0,781$ ;  $q = 10 \text{ Н/мм}$ ,  $a = 500 \text{ мм}$ , получим:

$$N_1 = \frac{3 \cdot 10 \cdot 500}{0,707^3 + 2 \cdot 0,781^3} \cdot \frac{0,707^2}{2} = 2,9 \cdot 10^3 \text{ Н} = 2,9 \text{ кН},$$

$$N_2 = \frac{3 \cdot 10 \cdot 500}{0,707^3 + 2 \cdot 0,781^3} \cdot 0,781^2 = 7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 7 \text{ кН}.$$

5) Вычисляем площади поперечных сечений и диаметры стержней. Сравним напряжения в стержнях, учитывая условия  $F_1 = F$  и  $F_2 = 2F$ :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2,9}{F};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{7}{2F_1} = \frac{3,5}{F}.$$

Так как  $\sigma_2 > \sigma_1$ , поэтому условие прочности нужно составить для наиболее нагруженного стержня 2, т.е.

$$\max \sigma = \frac{3,5}{F} \leq [\sigma],$$

откуда  $F \geq \frac{3,5}{[\sigma]}$ , где  $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 160 \text{ Н/мм}^2$ .

$$\text{Тогда } F \geq \frac{3,5 \cdot 10^3}{160} \geq 21,87 \text{ мм}^2.$$

Используя соотношения  $F_1 = F$  и  $F_2 = 2F$ , принимаем

$$F_1 = 21,87 \text{ мм}^2; \quad F_2 = 2 \cdot 21,87 = 43,75 \text{ мм}^2.$$

Определяем диаметры стержней:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{21,87}{3,14}} = 5,28 \text{ мм};$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{43,75}{3,14}} = 7,46 \text{ мм}.$$

Принимаем  $d_1 = 5,5 \text{ мм}$ ;  $d_2 = 7,5 \text{ мм}$  (нормальные ряды размеров). Так как округление выполнено в большую сторону, прочность



стержней обеспечена. При диаметрах  $d_1 = 5,5$  мм и  $d_2 = 7,5$  мм площади сечений равны соответственно

$$F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 5,5^2}{4} = 23,75 \text{ мм}^2;$$

$$F_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 7,5^2}{4} = 44,15 \text{ мм}^2.$$

Нормальные напряжения равны

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2,9 \cdot 10^3}{23,75} = 122 \text{ МПа} < [\sigma];$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{7 \cdot 10^3}{44,15} = 158 \text{ МПа} < [\sigma].$$

## II Кручение

### Задача 4

Стальной стержень круглого поперечного сечения зашпемлен обоими торцами (рисунок 4.1) и нагружен скручивающими парами сил.

Определить диаметр стержня из условий прочности и жесткости. Построить эпюру углов поворотов сечений.

Принять:

- модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа =  $8 \cdot 10^4$  Н/мм<sup>2</sup>;
- допускаемое напряжение на срез  $[\tau] = 80$  МПа =  $8 \cdot 10^4$  Н/мм<sup>2</sup>,
- допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 2$  °/м.

Остальные данные для расчета взять из таблицы 4.1, приняв значение  $m = 0,5$  кН·м =  $0,5 \cdot 10^6$  Н·мм.

Таблица 4.1

Номер строки	Номер схемы по рисунку 4.1	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
1	I	$m$	$m$	$m$	$l$	$l$	$l$	$l$
2	II	$m$	$m$	$2m$	$l$	$2l$	$l$	$l$
3	III	$m$	$2m$	$m$	$l$	$l$	$2l$	$l$
4	IV	$2m$	$m$	$m$	$l$	$l$	$l$	$2l$
5	V	$m$	$m$	$m$	$2l$	$l$	$l$	$l$
6	VI	$m$	$m$	$2m$	$l$	$2l$	$2l$	$l$
7	VII	$m$	$2m$	$m$	$l$	$l$	$2l$	$2l$
8	VIII	$m$	$m$	$2m$	$2l$	$l$	$l$	$2l$
9	IX	$2m$	$m$	$m$	$2l$	$2l$	$l$	$l$
0	X	$m$	$2m$	$m$	$2l$	$2l$	$l$	$l$
Буква шифра	а	б	в	г	д	а	г	д

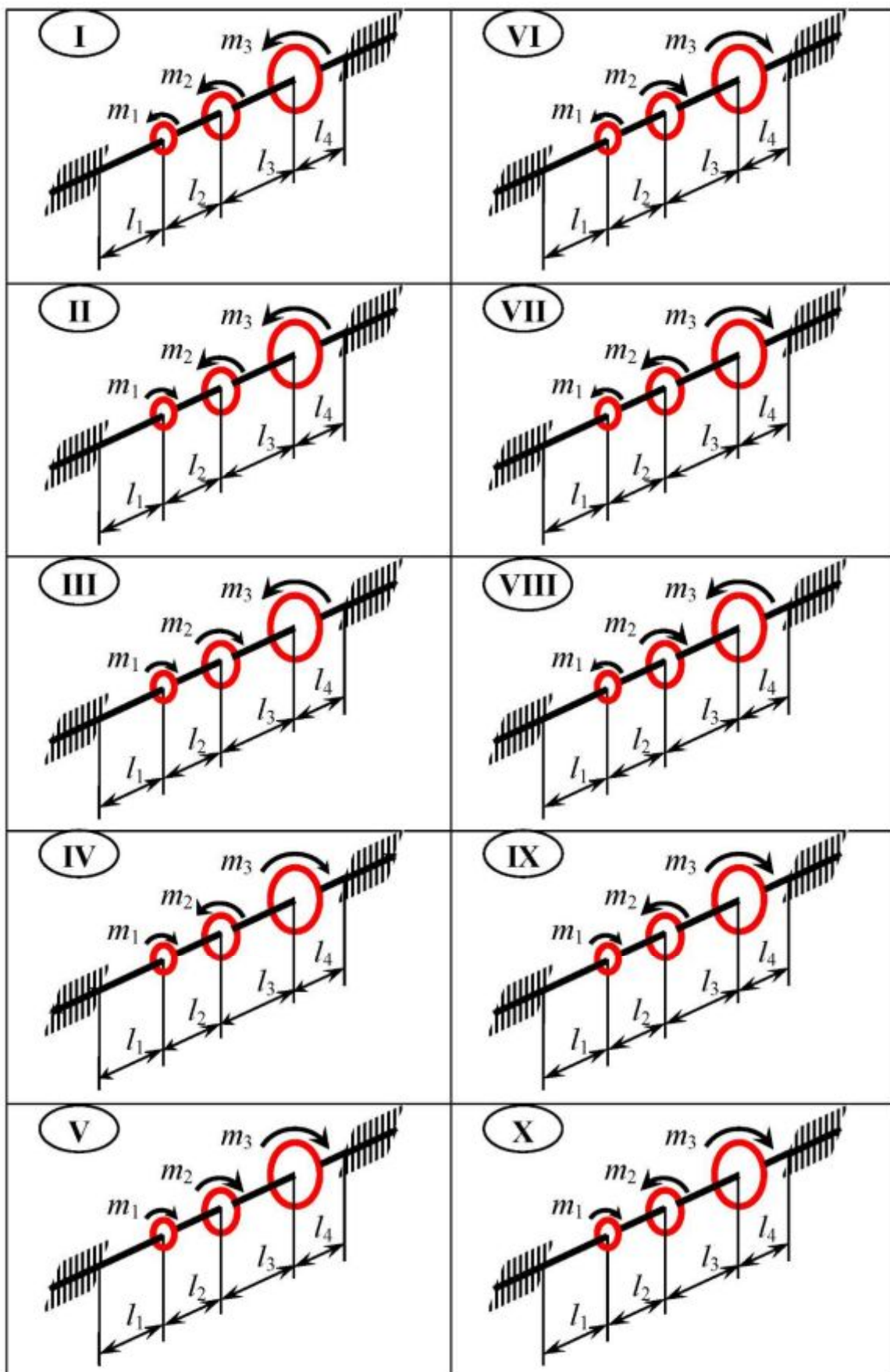


Рисунок 4.1

**Пример.** В соответствии с условиями задачи 4 выполнить расчет стального стержня при  $m_1 = 3m$ ,  $m_2 = m$ ,  $m_3 = 3m$ ;  $l_1 = 2l$ ,  $l_2 = l_3 = l_4 = l$  (рисунок 4.2,а).

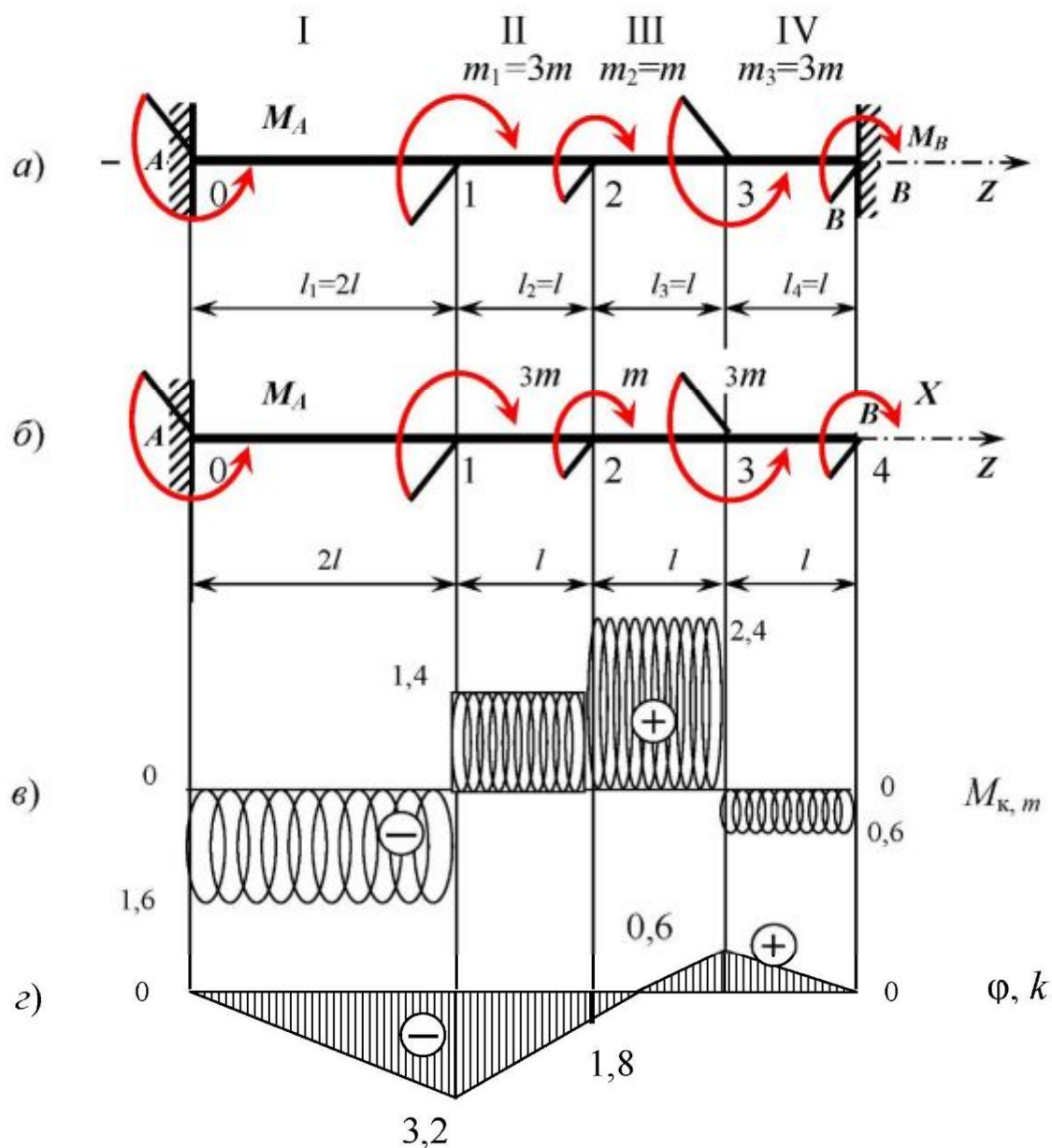


Рисунок 4.2

Решение.

1) Выбираем направление опорных реакций. Стержень нагружен только парами сил, лежащими в плоскости поперечного сечения, поэтому возникают только две опорные реакции – моменты в защемлениях  $M_A$  и  $M_B$ .

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum m \cdot \text{от}_Z = 0; \quad M_A - m_1 - m_2 + m_3 - M_B = 0;$$

подставив заданные значения  $m_1, m_2, m_3$  в это выражение, получим

$$M_A - M_B - m = 0. \quad (4.1)$$

Имеем одно уравнение с двумя неизвестными, система один раз статически неопределима.

2) Выбираем основную систему. Она получается из заданной освобождением от лишней связи. За лишнюю связь принимаем заземление правого торца. Загружая основную систему заданной нагрузкой и неизвестным активным моментом  $X$ , превращаем ее в систему, эквивалентную заданной (рисунок 4.2,б). Условием эквивалентности в данном случае является равенство нулю угла поворота сечения  $B$

$$\varphi_B = 0.$$

В соответствии с принципом независимости действия сил угол поворота сечения  $B$  можно подсчитать как алгебраическую сумму углов поворота сечения  $B$  от каждого из внешних моментов в отдельности, т.е.

$$\varphi_B = \sum_1^k \varphi_B(m_i, X)$$

или 
$$\varphi_B(m_1) + \varphi_B(m_2) + \varphi_B(m_3) + \varphi_B(X) = 0.$$

Применяя формулу закона Гука при кручении  $\varphi = \frac{M_k l}{G J_p}$ , полу-

чим

$$\frac{3m \cdot 2l}{G J_p} + \frac{m \cdot 3l}{G J_p} - \frac{3m \cdot 4l}{G J_p} + \frac{X \cdot 5l}{G J_p} = 0. \quad (4.2)$$

Здесь  $G$  – модуль сдвига;  $J_p$  – полярный момент инерции площади поперечного сечения стержня.

*Внешний момент считается положительным, если при взгляде со стороны свободного торца  $B$  (см. рисунок 4.2,б) мы видим его вращающимся по часовой стрелке.*

Из уравнения совместности деформаций (4.2) получим

$$X = 0,6 m.$$

В силу эквивалентности  $X = M_B$ , т.е.  $M_B = 0,6 m$ .

Из уравнения равновесия получим

$$M_A = m + M_B = m + 0,6 m = 1,6 m.$$

Значения реактивных моментов  $M_A$  и  $M_B$  положительны, т.е. направление их выбрано верно (см. рисунок 4.2,а).

3) Строим эпюру крутящих моментов, определив их величину на каждом участке методом сечений. *Крутящий момент в произвольном сечении  $i$ -го участка по величине равен алгебраической сумме внешних моментов, расположенных по одну сторону от сечения:*

- на I участке  $M_{кI} = -M_A = -1,6 m$ ;
- на II участке  $M_{кII} = -M_A + 3m = -1,6 m + 3m = 1,4 m$ ;
- на III участке  $M_{кIII} = -M_A + 3m + m = -1,6 m + 3m + m = 2,4 m$ ;
- на IV участке  $M_{кIV} = -M_A + 3m + m - 3m = -1,6 m + m = -0,6 m$ .

Эпюры крутящих моментов показаны на рисунке 4.2,в.

4) Строим эпюру углов поворота сечений  $\varphi_i$ , используя формулу

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \frac{M_i z_i}{(GJ_p)_i}, \quad (4.3)$$

где  $\varphi_{i-1}$  – угол поворота сечения, расположенного в начале участка;  $z_i$  – длина участка;  $(GJ_p)_i$  – жесткость сечения.

Граничные сечения участков пронумерованы цифрами 0, 1, 2, 3, 4.

Используя формулу (4.3), получим

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_A = 0. \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + \frac{M_{кI} 2l}{GJ_p} = 0 + \frac{-1,6m \cdot 2l}{GJ_p} = -3,2 \frac{ml}{GJ_p}; \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + \frac{M_{кII} l}{GJ_p} = -3,2 \frac{ml}{GJ_p} + 1,4 \frac{ml}{GJ_p} = -1,8 \frac{ml}{GJ_p}; \\ \varphi_3 &= \varphi_2 + \frac{M_{кIII} l}{GJ_p} = -1,8 \frac{ml}{GJ_p} + 2,4 \frac{ml}{GJ_p} = 0,6 \frac{ml}{GJ_p}; \\ \varphi_4 &= \varphi_3 + \frac{M_{кIV} l}{GJ_p} = 0,6 \frac{ml}{GJ_p} - 0,6 \frac{ml}{GJ_p} = 0. \end{aligned}$$

При построении эпюры введем обозначение  $\frac{ml}{GJ_p} = k$ .

Эпюра углов поворота представлена на рисунке 4.2,г.

Факт, что  $\varphi_A = \varphi_B = 0$ , подтверждает правильность решения, т.е. построение эпюры  $\varphi$  одновременно является деформационной проверкой.

5) Определяем диаметр стержня.

Условие прочности имеет вид

$$\max \tau = \frac{\max M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau]. \quad (4.4)$$

Здесь  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$  – полярный момент сопротивления сечения.

Следовательно, при  $\max \tau = [\tau]$  из формулы (4.4) получим значение диаметра  $d$ :

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \max M_{\kappa}}{\pi [\tau]}}. \quad (4.5)$$

Стержень имеет постоянное сечение, т.е. очевидно, что опасным является участок III, где возникает наибольший крутящий момент

$$\max M_{\kappa} = 2,4m = 2,4 \cdot 0,5 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

$$\text{Следовательно, } d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{\pi 80}} = 42,4 \text{ мм}.$$

Условие жесткости имеет вид

$$\max \theta = \frac{\max M_{\kappa}}{G J_p} \leq [\theta]. \quad (4.6)$$

Здесь  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  – полярный момент инерции сечения.

Полагая  $\max \theta = [\theta]$ , из формулы (4.6) получим

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \max M_{\kappa}}{\pi G [\theta]}}. \quad (4.7)$$

Допускаемый угол закручивания в градусах по условию равен

$$[\theta] = 2 \text{ }^\circ/\text{м}.$$

Переведем в радианы:  $[\theta] = 2 \text{ }^\circ/\text{м} = \frac{2^\circ \pi}{180^\circ} \text{ рад/м} = 0,35 \cdot 10^{-4} \text{ рад/мм}.$

Тогда по формуле (4.7) получим значение диаметра  $d$ :

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{\pi \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,35 \cdot 10^{-4}}} = 45,7 \text{ мм}.$$

Диаметр, найденный из условия жесткости, больше диаметра, найденного из условия прочности.

Принимаем бóльший диаметр:  $d = 45,7$  мм, округляя его до стандартного ( $d = 45$  мм и  $48$  мм),  $d = 48$  мм.



### III Изгиб

#### Расчет балки на прочность

##### Задача 5

Для стальной балки, нагруженной в соответствии с расчетной схемой из условия прочности по нормальным напряжениям, подобрать размеры поперечного сечения двутаврового профиля. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасных поперечных сечениях балки. Исходные данные для расчета принять по таблице 5.1 и рисунку 5.1, полагая:  $P = qa$ ;  $m = Pa = qa^2$ ;  $q = 10$  кН/м;  $a = 1$  м.

Коэффициент запаса прочности принять  $n = 1,5$ ; допускаемые касательные напряжения принять  $[\tau] = 0,6[\sigma]$ . Силовая линия совпадает с осью наименьшей жесткости поперечного сечения балки.

Таблица 5.1

Номер строки	Схема по рисунку 5.1	Внешние нагрузки						Материал балки				
		$m_1$	$m_2$	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	Сталь		Чугун		
								Марка	Предел текучести $\sigma_T$ , МПа	Марка	Предел прочности, МПа	
при растяжении $\sigma_{вр}$	при сжатии $\sigma_{сж}$											
1	I	$m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$	20	250	СЧ35	380	1400
2	II	$2m$	$m$	$P$	$P$	$q$	$2q$	40Х	800	СЧ25	280	1000
3	III	$m$	$2m$	$2P$	$2P$	$q$	$2q$	30	300	СЧ15	120	500
4	IV	$2m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$	40ХН	900	СЧ25	280	1000
5	V	$m$	$m$	$2P$	$P$	$2q$	$q$	40	340	СЧ35	380	1400
6	VI	$3m$	$m$	$2P$	$P$	$2q$	$q$	20	250	СЧ25	280	1000
7	VII	$2m$	$m$	$P$	$2P$	$2q$	$q$	50	380	СЧ10	120	500
8	VIII	$m$	$m$	$P$	$P$	$q$	$2q$	40ХН	900	СЧ25	280	1000
9	IX	$m$	$m$	$2P$	$2P$	$q$	$q$	30	300	СЧ35	380	1400
0	X	$2m$	$m$	$P$	$P$	$2q$	$q$	40ХН	900	СЧ10	120	500
Буква шифра	а	б		д		г		в		д		

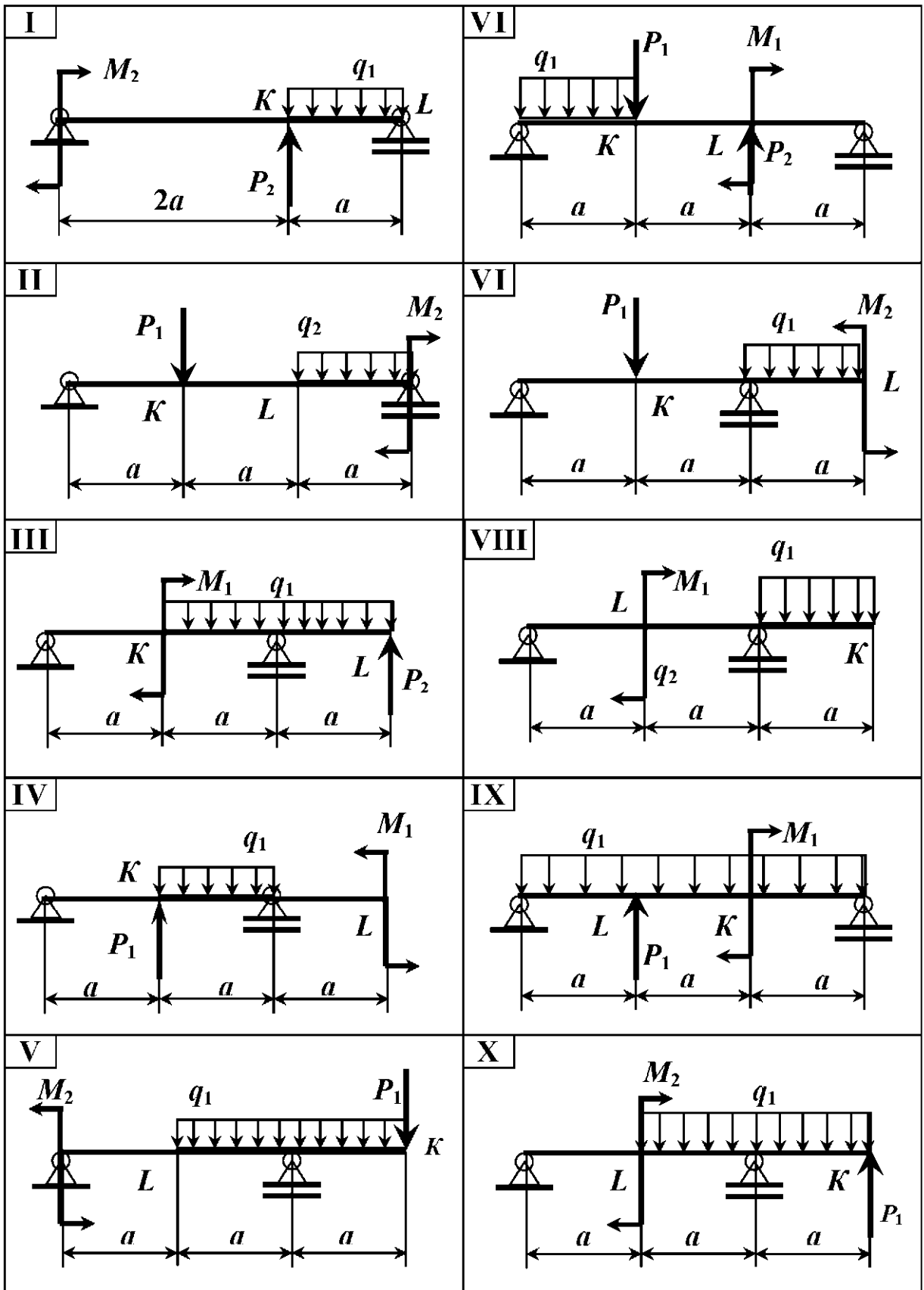


Рисунок 5.1

**Пример.** В соответствии с условиями задачи выполнить расчет на прочность балки, изображенной на рисунке 5.2,а.

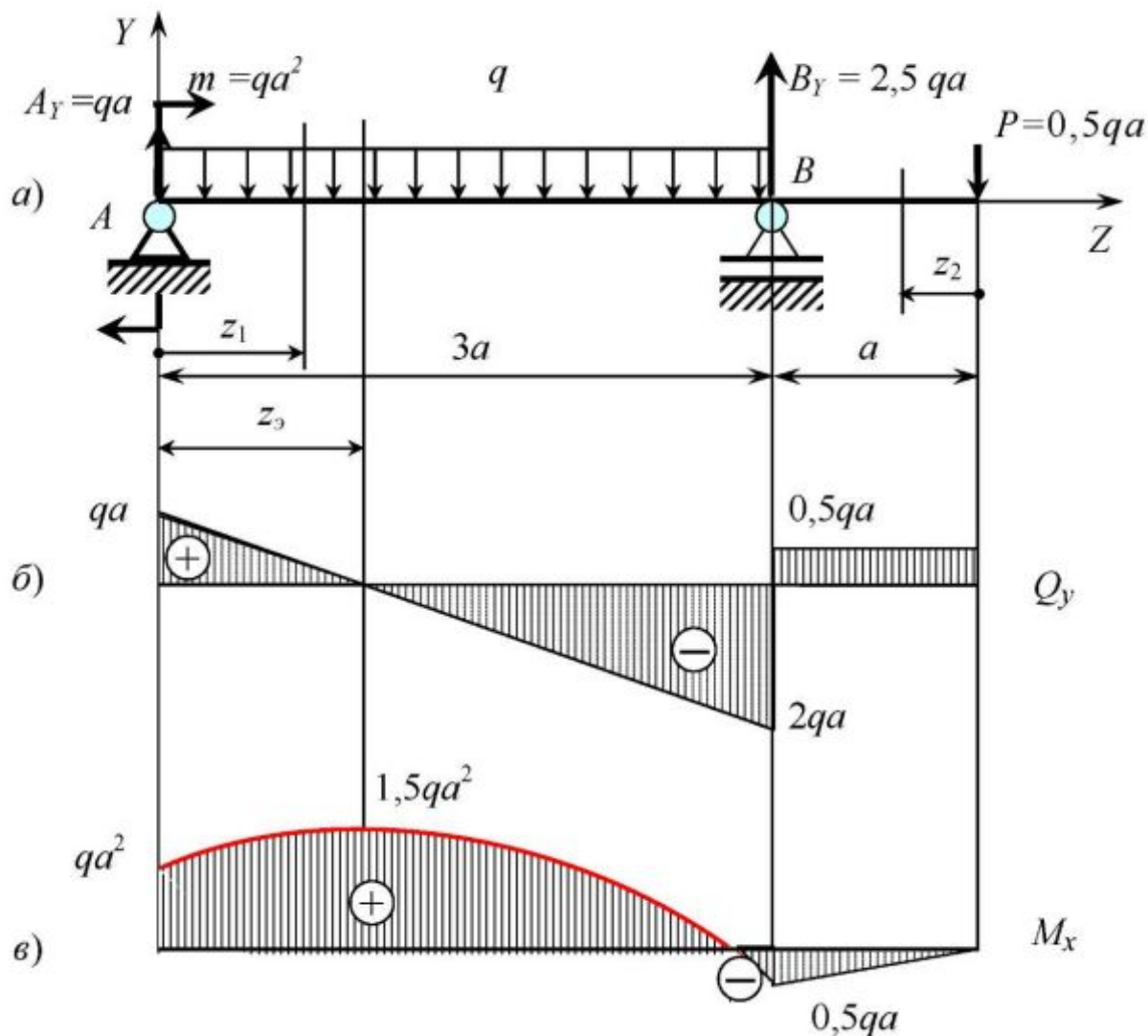


Рисунок 5.2

Дано:  $q = 20 \text{ кН/м} = 20 \text{ Н/мм}$ ;  $m = 0,5qa^2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м} = 10^7 \text{ Н}\cdot\text{мм}$ ;  
 $P = 0,5qa = 10 \text{ кН} = 10^4 \text{ Н}$ ;  $a = 1 \text{ м} = 1000 \text{ мм}$ .

Материал балки – сталь 20 с пределом текучести  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$  и модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Коэффициент запаса прочности  $n_T = 1,5$ .

Решение.

1) Определяем опорные реакции  $A_Y$  и  $B_Y$ :

$$\sum \text{mom}_A = 0; \quad -m - q \cdot 3a \frac{3a}{2} + B_Y \cdot 3a - P \cdot 4a = 0;$$

$$B_Y = \frac{m + 4,5qa^2 + P \cdot 4a}{3a} = \frac{qa^2 + 4,5qa^2 + 0,5qa \cdot 4a}{3a} = 2,5qa.$$

$$\sum \text{mom}_B = 0; \quad -m - A_Y \cdot 3a + q \cdot 3a \frac{3a}{2} - Pa = 0;$$

$$A_Y = \frac{-m + 4,5qa^2 - Pa}{3a} = \frac{-qa^2 + 4,5qa^2 - 0,5qa \cdot a}{3a} = qa.$$

Проверка.  $\sum Y = 0; \quad A_Y - q \cdot 3a + B_Y - P = 0;$   
 $qa - 3qa + 2,5qa - 0,5qa = 0; \quad 0 \equiv 0.$

Тождество показывает, что опорные реакции найдены верно. Положительные значения  $A_Y$  и  $B_Y$  показывают, что направления опорных реакций соответствуют принятым на рисунке 5.2,а.

2) Строим эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$ . Балку разбиваем на участки I и II. Используя метод сечений, для произвольного сечения каждого участка составляем уравнения внутренних усилий  $Q_y$  и  $M_x$ , в соответствии с которыми они изменяются в пределах каждого участка. Положение сечения определяется текущей координатой  $z$ , начало отсчета удобно совмещать с началом участка (см. рисунок 5.2,а).

**Правила знаков:**

– поперечная сила  $Q_y$  в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения на ось  $Y$ , проходящую через центр тяжести поперечного сечения;

– поперечная сила  $Q_y$  в сечении положительна, если внешняя сила поворачивает отсеченную часть балки по часовой стрелке относительно сечения (рисунок 5.3,а);

– изгибающий момент  $M_x$  в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения относительно оси  $X$ , проходящей через центр тяжести этого сечения;

– изгибающий момент  $M_x$  положителен, если внешний момент изгибает балку выпуклостью вниз (рисунок 5.3,б).

Рассмотрим поочередно оба участка.

**I участок:**  $0 \leq z_1 \leq 3a$ .

Уравнение поперечной силы в произвольном сечении с координатой  $z_1$  имеет вид

$$Q_y = A_Y - qz_1;$$

$$Q_y = qa - qz_1 = q(a - z_1).$$

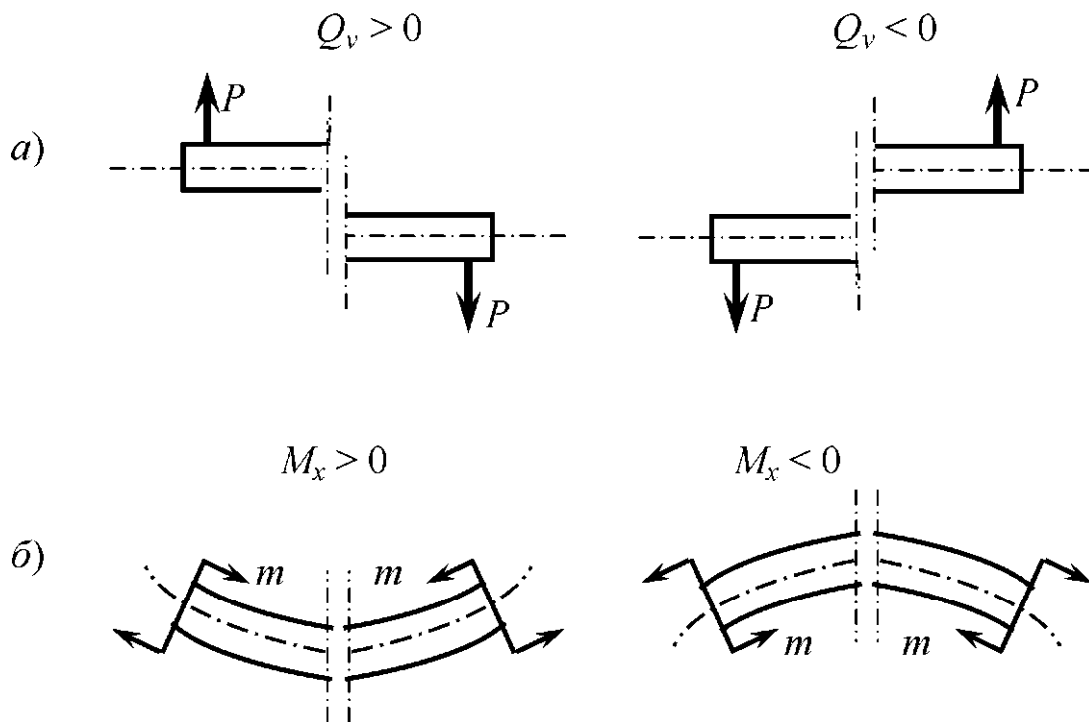


Рисунок 5.3

Выражение для  $Q_y$  является линейной функцией координаты  $z$ , т.е. для построения эпюры достаточно вычислить значения  $Q_y$  в начале ( $z_1 = 0$ ) и в конце ( $z_1 = 3a$ ) I участка балки:

- при  $z_1 = 0$   $Q_y = qa$ ;
- при  $z_1 = 3a$   $Q_y = -2qa$ .

Эпюра  $Q_y$  показана на рисунке 5.2,б.

Уравнение изгибающего момента  $M_x$  в произвольном сечении участка I имеет вид

$$M_x = m + A_y z_1 - \frac{1}{2} q z_1^2,$$

$$M_x = qa^2 + qa z_1 - \frac{1}{2} q z_1^2 = q(a^2 + a z_1 - \frac{1}{2} z_1^2).$$

Получили уравнение кривой второго порядка (параболы), выпуклость которой направлена вверх, кривая имеет экстремум в сечении с координатой  $z_1^3$ , где  $Q_y = 0$ . Значение  $z_1^3$  получим, приравняв нулю выражение для  $Q_y$  на I участке, т.е.

$$q(a - z_1^3) = 0,$$

откуда  $z_1^3 = a$ .

Построить кривую второго порядка можно по трем точкам.

Вычислим значения  $M_x$  в начале участка ( $z_1 = 0$ ), в сечении экстремума  $M_x$  ( $z_1 = a$ ) и в конце участка ( $z_1 = 3a$ ):

- при  $z_1 = 0$   $M_x = qa^2$ ;
- при  $z_1 = z_1^* = a$   $M_x = q \left( a^2 + a \cdot a - \frac{1}{2} a^2 \right) = 1,5qa^2$ ;
- при  $z_1 = 3a$   $M_x = q \left[ a^2 + a \cdot 3a - \frac{1}{2} (3a)^2 \right] = -0,5qa^2$

Эпюра  $M_x$  показана на рисунке 5.2,в.

**II участок:**  $0 \leq z_2 \leq a$ .

Рассматривая правую отсеченную часть балки, получим

$$Q_y = P = 0,5qa.$$

График этой функции – прямая, параллельная оси отсчета  $z$  (см. рисунок 5.2,б).

Изгибающий момент  $M_x$  в произвольном сечении участка II с координатой  $z_2$

$$M_x = -Pz_2 = -\frac{1}{2}qa z_2.$$

Получили уравнение наклонной прямой, которую можно построить, вычислив значения изгибающего момента в начале ( $z_2 = 0$ ) и в конце ( $z_2 = a$ ) участка:

- при  $z_2 = 0$   $M_x = 0$ ;
- при  $z_2 = a$   $M_x = -0,5qa$ .

Эпюра  $M_x$  показана на рисунке 5.2,в.

**3)** Определяем размеры поперечного сечения балки. Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (5.1)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение, которое для пластичного материала равно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа};$$

$W_x$  – момент сопротивления поперечного сечения.

По эпюре  $M_x$  (см. рисунок 5.2,в) находим опасное сечение С.

В этом сечении  $M_x = \max M_x = 1,5qa^2$ ,

$$\max M_x = 1,5 \cdot 20 \cdot 1^2 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м} = 30 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

По формуле (5.1) находим

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{30 \cdot 10^6}{160} = 1,875 \cdot 10^5 \text{ мм}^3 = 187,5 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 20 с моментом сопротивления  $W_x = 184 \text{ см}^3$ .

Проверим прочность балки по нормальным напряжениям:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} = \frac{30 \cdot 10^6}{184 \cdot 10^3} = 163 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Превышение  $\max \sigma$  над допуском составляет

$$\Delta \sigma = \frac{\max \sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{163 - 160}{160} \cdot 100 \% = 2 \%.$$

Превышение напряжения допускается не более 5 %.

4) Проверяем принятое сечение по касательным напряжениям. Используем формулу Д. И. Журавского

$$\max \tau = \frac{\max Q_y S_x}{J_x d} \leq [\tau], \quad (5.2)$$

где  $\max Q_y$  – максимальное значение поперечной силы (берется с эпюры  $Q_y$ , см. рисунок 5.2,б; сечение В);  $S_x$  – статический момент полусечения;  $J_x$  – момент инерции;  $d$  – толщина стенки двутавра.

Значения  $S_x$ ,  $J_x$  и  $d$  берутся из таблиц сортамента.

Допускаемое напряжение на срез вычисляется по соотношению

$$[\tau] = 0,6 [\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа},$$

$$\max Q_y = 2qa = 2 \cdot 20 \cdot 1 = 40 \text{ кН} = 40 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Для двутавра № 20  $h = 20 \text{ см} = 200 \text{ мм}$ ,  $d = 5,2 \text{ мм}$ ,

$$S_x = 104 \text{ см}^3 = 104 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; J_x = 1840 \text{ см}^4 = 1840 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

После подстановки данных в (5.2) получим

$$\max \tau = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^3}{1840 \cdot 10^4 \cdot 5,2} = 43,5 \text{ МПа};$$

$$\max \tau = 43,5 \text{ МПа} \ll [\tau] = 96 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

5) Построим эпюры нормальных  $\sigma$  и касательных  $\tau$  напряжений для опасных сечений  $B$  и  $C$  (см. рисунок 5.2).

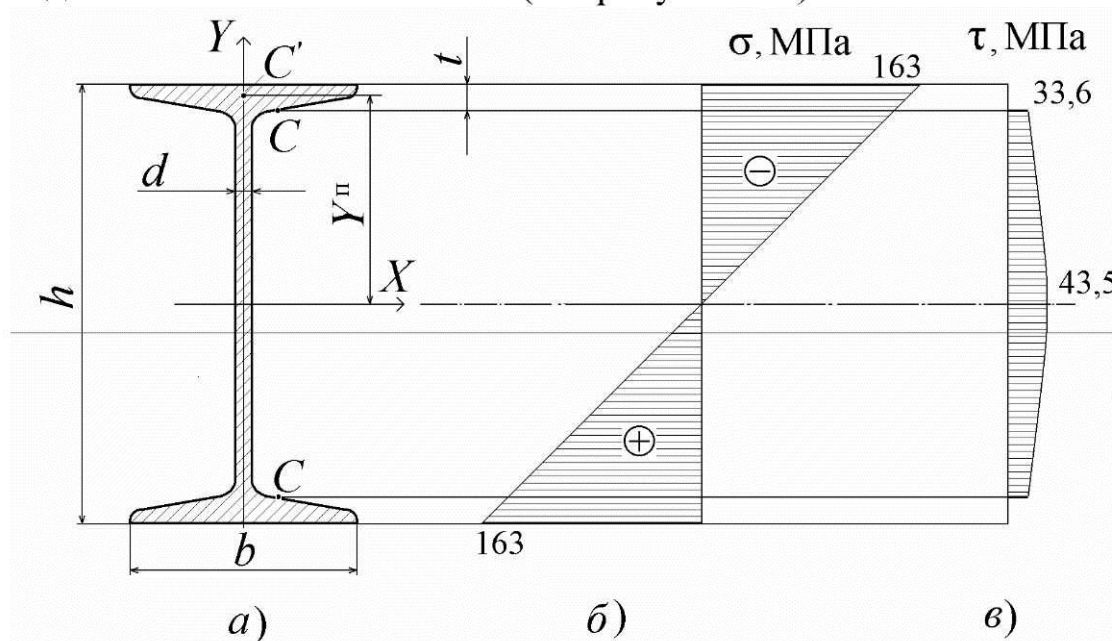


Рисунок 5.4

Нормальные напряжения в произвольной точке сечения (рисунок 5.4,а) определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y. \quad (5.3)$$

Из анализа формулы (5.3) следует, что  $\sigma$  от координаты  $y$  зависит линейно.

$$\text{При } y = y_{\max} = \pm \frac{h}{2} \quad \sigma = \frac{\max M_x}{J_x} y, \text{ т.е. } \sigma = \frac{30 \cdot 10^6}{1840 \cdot 10^4} \cdot \left( \pm \frac{200}{2} \right).$$

Так как верхние волокна (вв) двутавра испытывают сжатие,

$$\sigma_{\text{вв}} = - 163 \text{ МПа (сжатый слой полки двутавра),}$$

при этом нижние волокна (нв) испытывают растягивающие напряжения:

$$\sigma_{\text{нв}} = + 163 \text{ МПа (растянутый слой полки двутавра);}$$

при  $y = 0 \quad \sigma = 0$ .

Эпюра  $\sigma$  изображена на рис. 5.4,б.

Для построения эпюры касательных напряжений  $\tau$  определим их значения в сечении  $k-k$ , где стенка двутавра сопрягается с полками (рисунок 5.4,а).



В формулу Д. И. Журавского подставляется статический момент  $S_x^n$  площади сечения полки двутавра относительно оси  $X$ :

$$S_x^n = F^n y^n = bt \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right),$$

где  $b$ ,  $t$  и  $h$  берут из таблиц ГОСТов на прокатный сортамент;  $b = 100$  мм;  $t = 8,4$  мм.

$$\text{Таким образом, } S_x^n = 100 \cdot 8,4 \cdot \left( \frac{200}{2} - \frac{8,4}{2} \right) = 80\,472 \text{ мм}^3.$$

$$\text{Тогда } \tau = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 80472}{1840 \cdot 10^4 \cdot 5,2} = 33,6 \text{ МПа.}$$

Эпюра представлена на рисунке 5.4,в.

## Геометрические характеристики плоских фигур

### Задача 6

Чугунная балка, нагруженная как показано на рисунке 6.1, имеет поперечное сечение, вид которого выбирается в соответствии с вариантом по рисунку 6.2.

Требуется выполнить следующее:

- 1) Изобразить сечение строго в масштабе.
- 2) Определить положение центра тяжести поперечного сечения, положение главных центральных осей инерции, величину главных центральных моментов инерции  $J_x$ ,  $J_y$ . Все величины выразить через величину  $b$ . (Все поперечные сечения имеют вертикальную ось симметрии).
- 3) Подобрать размеры поперечного сечения из условий прочности по нормальным напряжениям.
- 4) Построить эпюры нормальных и касательных напряжений.
- 5) Проанализировать эпюру нормальных напряжений и выбрать рациональное (с точки зрения прочности) расположение поперечного сечения.

Исходные данные взять из таблицы 5.1, полагая:

$$m = Pa = qa^2; \quad a = 1 \text{ м} = 1000 \text{ мм}; \quad q = 10 \text{ кН/м} = 10 \text{ Н/мм.}$$

Коэффициент запаса прочности принять  $n = 2$ .

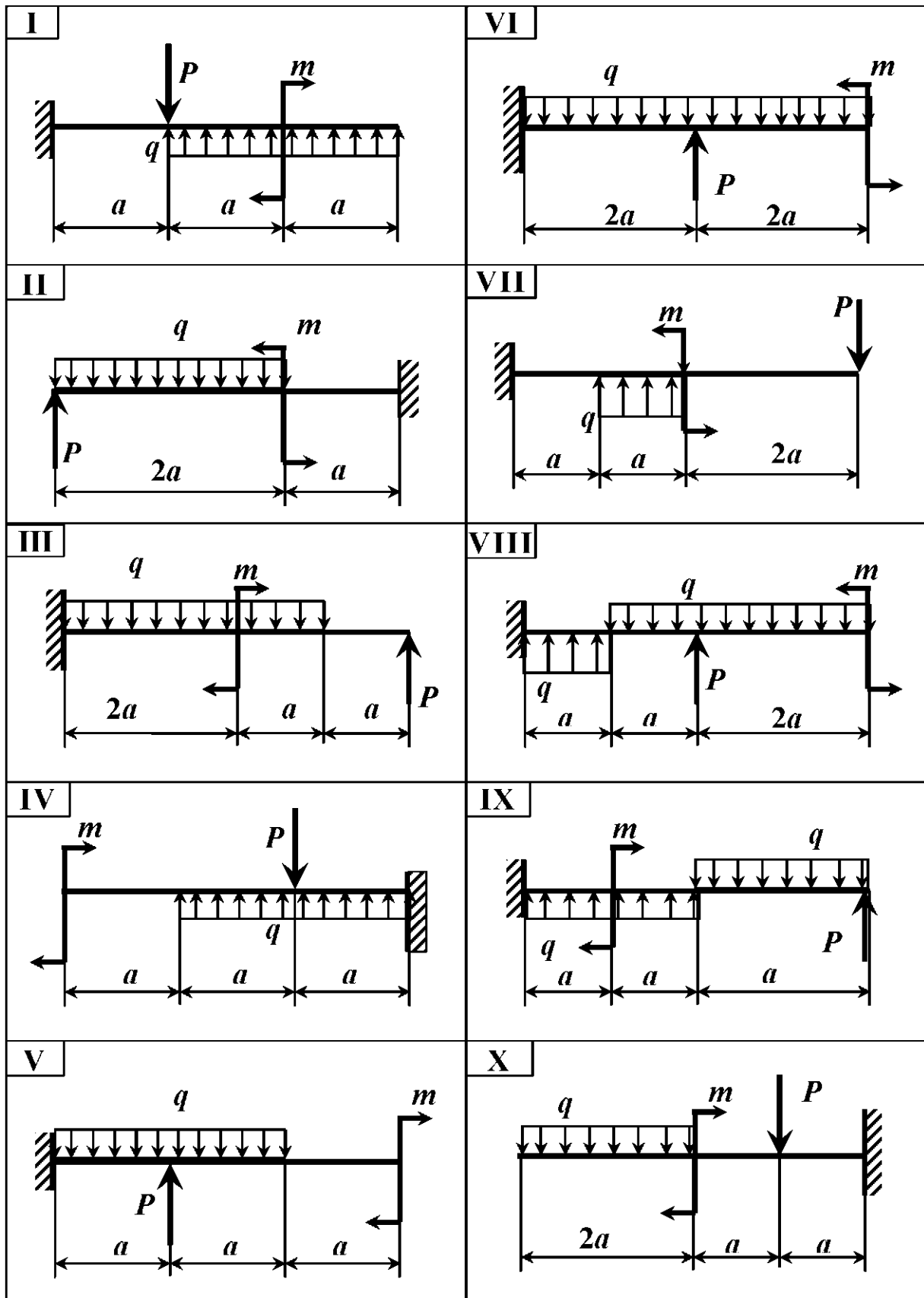


Рисунок 6.1

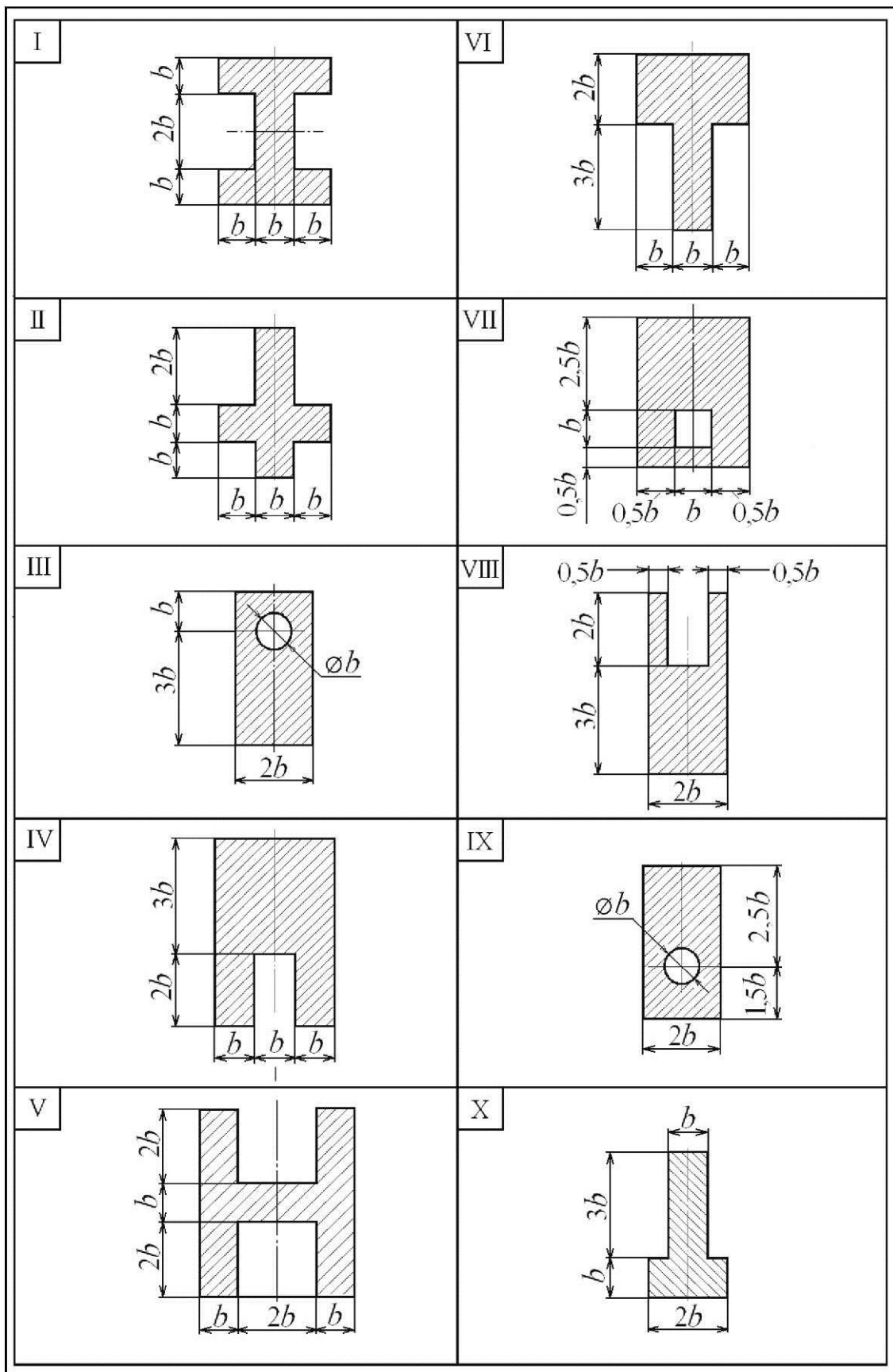


Рисунок 6.2

**Пример.** В соответствии с условиями задачи 6 произвести расчет на прочность чугунной балки (рисунок 6.3,а) при  $P = 2qa$ ;  $m = qa^2$ ;  $a = 1 \text{ м} = 1000 \text{ мм}$ ,  $q = 10 \text{ кН/м} = 10 \text{ Н/мм}$ .

Материал балки – чугун СЧ15, имеющий механические характеристики:

- предел прочности на растяжение  $\sigma_{\text{вр}} = 120 \text{ МПа}$ ;
- предел прочности на сжатие  $\sigma_{\text{вс}} = 500 \text{ МПа}$ .

Балка имеет Т-образное поперечное сечение.

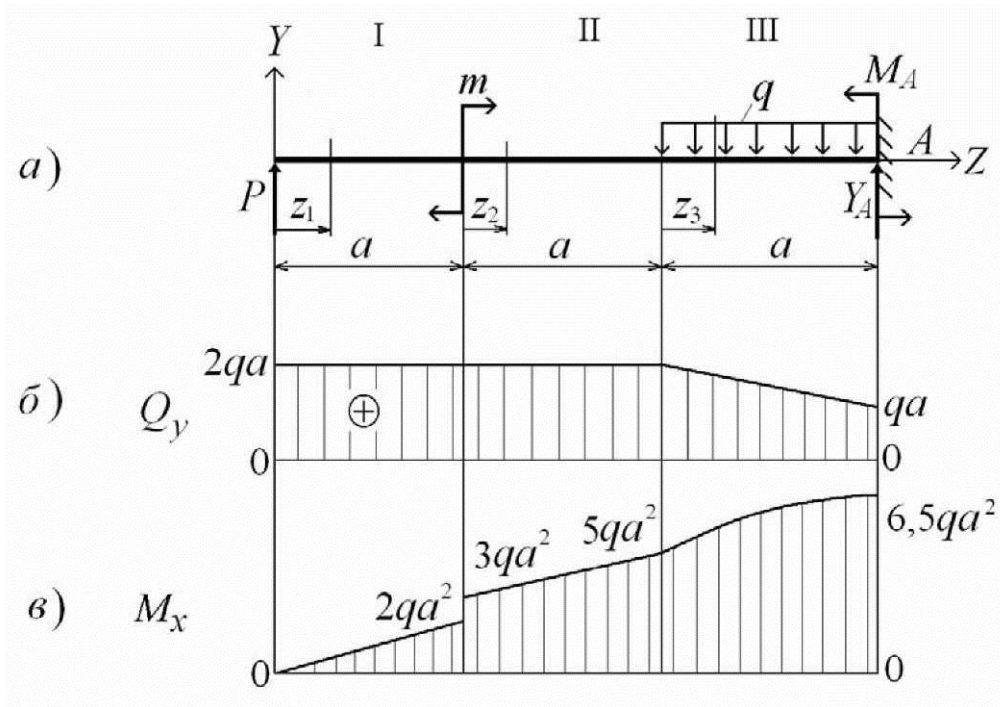


Рисунок 6.3

Решение.

1) В жестком защемлении A возникают реакция  $Y_A$  и реактивный момент  $M_A$ . Так как балка консольная, эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  можно построить, не определяя опорные реакции  $M_A$  и  $Y_A$ , если при применении метода сечений на каждом участке рассматривать левую отсеченную часть балки, на которую действуют известные внешние нагрузки:

I участок (границы участка)

при  $0 \leq z_1 \leq a$ :

$$\begin{aligned} Q_y &= P; & Q_y &= 2qa; \\ M_x &= Pz_1 & M_x &= 2qaz_1; \end{aligned}$$

при  $z_1 = 0$

$$M_x = 0;$$

при  $z_1 = a$

$$M_x = 2qa^2.$$

II участок (границы участка)

при  $0 \leq z_2 \leq a$ :

$$Q_y = P; \quad Q_y = 2qa;$$

$$M_x = P(a + z_2) + m; \quad M_x = 2qa(a + z_2) + qa^2;$$

при  $z_2 = 0$   $M_x = 3qa^2$ ;

при  $z_2 = a$   $M_x = 5qa^2$ .

III участок (границы участка)

при  $0 \leq z_3 \leq a$ :

$$Q_y = P - qz_3; \quad Q_y = 2qa - qz_3;$$

при  $z_3 = 0$   $Q_y = 2qa$ ;

при  $z_3 = a$   $Q_y = qa$ .

$$M_x = P(2a + z_3) + m - \frac{1}{2} qz_3^2; \quad M_x = 2qa(2a + z_3) + qa^2 - \frac{1}{2} qz_3^2;$$

при  $z_2 = 0$   $M_x = 5qa^2$ ;

при  $z_2 = a$   $M_x = 6,5qa^2$ .

По найденным значениям строим эпюры  $Q_y$  (рисунок 6.3,б) и  $M_x$  (рисунок 6.3,в).

Из анализа эпюры  $M_x$  следует, что наиболее нагруженным является сечение  $A$  в защемлении, где изгибающий момент достигает своего максимального значения:

$$\max M_x = 6,5qa^2 = 6,5 \cdot 10 \cdot 1000^2 = 6,5 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

2) Для выполнения проектировочного расчета вычисляем геометрические характеристики заданного таврового поперечного сечения балки (рисунок 6.4).

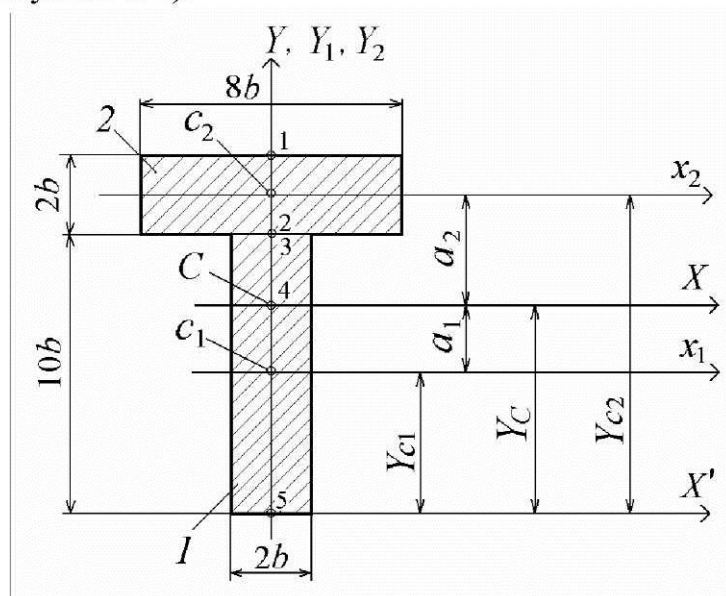


Рисунок 6.4

Так как сечение симметричное, то вертикальная ось симметрии  $Y$  является главной центральной осью.

Разобьем сечение на два прямоугольника 1 и 2 и проведем их «собственные» главные центральные оси  $x_1, Y_1$  и  $x_2, Y_2$ . Введем вспомогательную ось  $X'$ , совпадающую с нижней гранью сечения, и определим положение центра тяжести сечения по формуле

$$Y_C = \frac{\sum S_i X'_i}{\sum F_i} = \frac{F_1 Y_{c_1} + F_2 Y_{c_2}}{F_1 + F_2}, \quad (6.1)$$

где  $F_1, F_2$  – площади прямоугольников 1 и 2, а  $Y_{c_1}, Y_{c_2}$  – координаты их центров тяжести  $c_1$  и  $c_2$  относительно оси  $X'$ .

В соответствии с (6.1) получим координату центра тяжести сечения

$$Y_C = \frac{(2b \cdot 10b)5b + (8b \cdot 2b)11b}{(2b \cdot 10b) + (8b \cdot 2b)} = 7,67b.$$

Отмечаем положение центра тяжести сечения  $C$  и проводим вторую главную центральную ось сечения  $X$ .

Осевой момент инерции сечения относительно оси  $X$  равен

$$J_X = J_{1X} + J_{2X}, \quad (6.2)$$

где  $J_{1X} = J_{1x_1} + F_1 a_1^2$ ;  $J_{2X} = J_{2x_2} + F_2 a_2^2$  – моменты инерции 1-го и 2-го прямоугольников относительно оси  $X$ ;

$J_{1x_1}, J_{2x_2}$  – моменты инерции каждого прямоугольника относительно их собственных главных центральных осей  $x_1$  и  $x_2$  соответственно;

$a_1$  и  $a_2$  – расстояния между осями  $X$  и  $x_1$ , аналогично  $X$  и  $x_2$ , равные

$$a_1 = Y_C - Y_{c_1} = 7,67b - 5b = 2,67b;$$

$$a_2 = Y_{c_2} - Y_C = 11b - 7,67b = 3,33b.$$

Собственные моменты инерции каждого прямоугольника

$$J_i = \frac{b_i h_i^3}{12};$$

$$J_{1x_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{2b(10b)^3}{12} = \frac{2000b^4}{12} = 166,7b^4;$$

$$J_{2x_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{8b(2b)^3}{12} = \frac{64b^4}{12} = 5,33b^4;$$

$$J_{1X} = J_{1x_1} + F_1 a_1^2 = 166,7b^4 + (2b \cdot 10b)(2,67b)^2 =$$

$$= 166,7b^4 + 142,578b^4 = 309,3b^4.$$

$$J_{2X} = J_{2x_2} + F_2 a_2^2 = 5,33b^4 + (8b \cdot 2b)(3,3b)^2 =$$

$$= 5,33b^4 + 177,74b^4 = 183,08b^4.$$

Используя формулу (6.2), получим

$$J_X = 309,30b^4 + 183,08b^4 = 492,4b^4.$$

Определяем статические моменты  $S_i$  для характерных точек поперечного сечения.

Характерными точками в данном случае являются точки, лежащие в горизонтальных слоях (рисунок 6.5):

- точки 1 и 5, наиболее удаленные от главной центральной оси  $X$ ;
- точка 4, лежащая на уровне оси  $X$ ;
- точки 3 и 2, принадлежащие уровню, где происходит изменение ширины поперечного сечения тавра. Точка 3 принадлежит стенке тавра, а точка 2 принадлежит полке тавра.

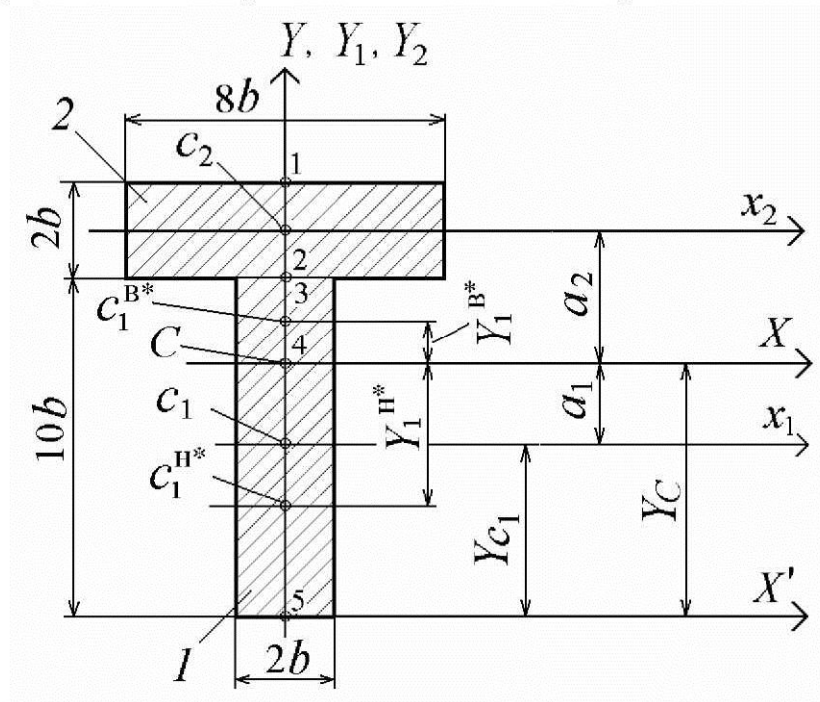


Рисунок 6.5

Для уровня с точками 1 и 5 надо учитывать статический момент всей площади поперечного сечения. Но для этого уровня он обращается в нуль, так как центр тяжести сечения совпадает с поло-

жением главной центральной оси  $X$ , поэтому вычисляем статические моменты площадей, лежащих выше и ниже оси  $X$ .

Статический момент площади  $S_X^B$  верхней части площади сечения всей фигуры, расположенной выше главной центральной оси  $X$ :

$$S_X^B = S_{2X} + S_{1X}^{B*},$$

где  $S_{2X}$  – статический момент площади сечения полки;

$S_{1X}^{B*}$  – статический момент части площади прямоугольника  $I$ , находящейся выше главной центральной оси  $X$ ;

$$S_{2X} = F_2 a_2 = (8b \cdot 2b)(3,33b) = 53,33b^3;$$

$$S_{1X}^{B*} = F_1^{B*} Y_{c_1}^{B*},$$

здесь  $F_1^{B*}$  – часть площади прямоугольника  $I$ , находящаяся выше оси  $X$ ;

$$Y_{c_1}^{B*} – \text{расстояние от оси } X \text{ до } c_1^{B*},$$

$$F_1^{B*} = 2b(10b - Y_C) = 2b(10b - 7,67b) = 4,66b^2;$$

$$Y_{c_1}^{B*} = \frac{10b - Y_C}{2} = \frac{10b - 7,67b}{2} = 1,165b;$$

$$S_{1X}^{B*} = F_1^{B*} Y_{c_1}^{B*} = 4,66b^2 \cdot 1,165b = 5,43b^3.$$

Статический момент площади фигуры, находящейся выше главной центральной оси  $X$ :

$$S_X^B = S_{2X} + S_{1X}^{B*} = 53,33b^3 + 5,43b^3 = 58,8b^3.$$

Статический момент части площади сечения, расположенной ниже оси  $X$ , равен

$$S_{1X}^{H*} = F_1^{H*} Y_1^{H*},$$

где  $F_1^{H*}$  – часть прямоугольника  $I$ , находящаяся ниже оси  $X$ ;

$Y_1^{H*}$  – расстояние от оси  $X$  до  $c_1^{H*}$ , при этом

$$F_1^{H*} = 2b \cdot Y_C = 2b \cdot 7,67b = 15,34b^2;$$

$$Y_1^{H*} = \frac{1}{2} Y_C = \frac{1}{2} 7,67b = 3,84b;$$

$$S_{1X}^{H*} = 15,34b^2 \cdot 3,84b = 58,8b^3.$$



Равенство статических моментов  $S_X^{B^*}$  и  $S_X^{H^*}$  указывает на то, что вычисления по определению центра тяжести составной фигуры были выполнены верно. Определение  $S_X^{H^*}$  является проверкой.

### 3) Выполняем проектировочный расчет.

Из рассмотрения эпюры  $M_x$  (см. рисунок 6.3,в) следует, что в наиболее нагруженном сечении  $A$  изгибающий момент  $\max M_x = 6,5 \cdot 10^7$  Н·мм; верхние волокна сжаты, а нижние – растянуты.

Таким образом, в верхних волокнах, расположенных на расстоянии  $Y_{сж} = a_2 + b = 3,33b + b = 4,33b$  от оси  $X$ , сжимающие напряжения максимальны, а в нижних волокнах, расположенных на расстоянии  $Y_p = Y_C = 7,67b$ , растягивающие напряжения достигают максимума (рисунок 6.6,а).

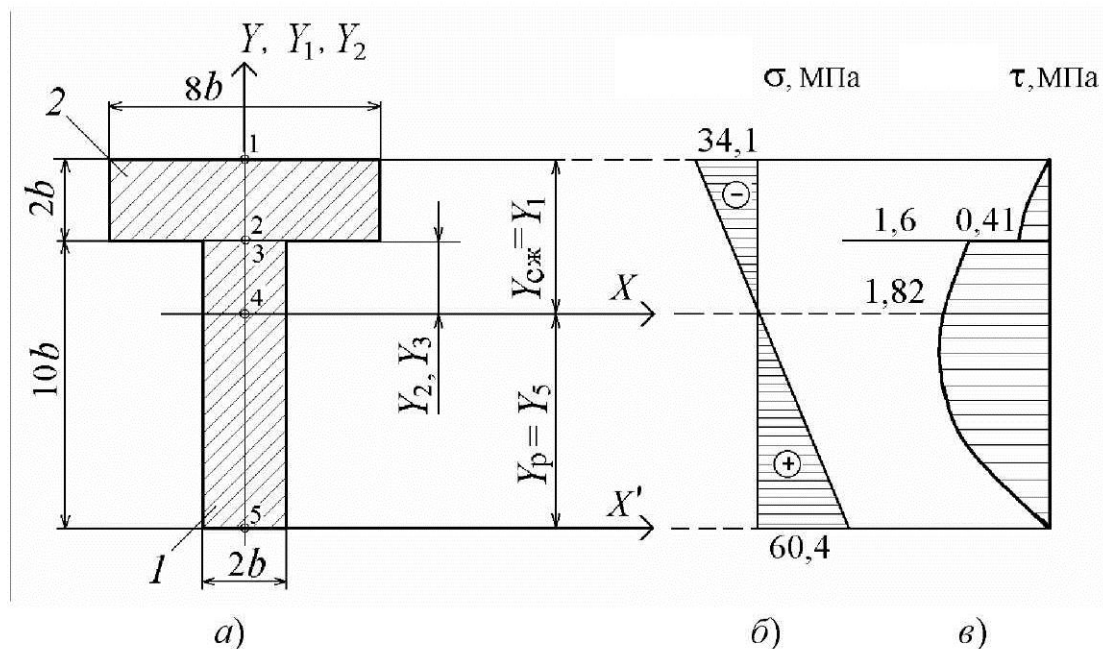


Рисунок 6.6

При расчете на прочность должно выполняться как условие прочности для сжатых волокон, т.е.  $\max \sigma_{сж} \leq [\sigma_{сж}]$ , так и условие прочности для растянутых:  $\max \sigma_p \leq [\sigma_p]$ .

Для хрупкого материала записываются два условия прочности:

$$\text{на растяжение } \max \sigma_p = \frac{|\max M_x|}{J_X} Y_p \leq [\sigma_p]; \quad (6.3)$$

$$\text{на сжатие } \max \sigma_{сж} = \frac{|\max M_x|}{J_X} Y_{сж} \leq [\sigma_{сж}], \quad (6.4)$$

где допускаемые напряжения равны

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{вр}}{n} = \frac{120}{2} = 60 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{сж}] = \frac{\sigma_{сж}}{n} = \frac{500}{2} = 250 \text{ МПа}.$$

Рассмотрим условие прочности на растяжение (6.3):

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x}{492,4b^4} \cdot 7,67b \leq [\sigma_p],$$

откуда следует, что

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{\max M_x}{492,4[\sigma_p]} \cdot 7,67} = \sqrt[3]{\frac{6,5 \cdot 10^7}{492,4 \cdot 60} \cdot 7,67} = 25,6 \text{ мм}.$$

Из условия прочности на сжатие получим

$$\frac{\max M_x}{492,4b^4} \cdot 4,33b \leq [\sigma_{сж}],$$

откуда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{\max M_x}{492,4[\sigma_{сж}]} \cdot 4,33} = \sqrt[3]{\frac{6,5 \cdot 10^7}{492,4 \cdot 250} \cdot 4,33} = 13,2 \text{ мм}.$$

Из двух полученных характерных размеров поперечного сечения  $b$  выбираем наибольший, т.е. окончательно принимаем  $b = 25,6$  мм. Геометрические характеристики сечения (см. рисунок 6.6) равны

$$J_X = 492b^4 = 492 \cdot 25,6^4 = 21,13 \cdot 10^7 \text{ мм}^4;$$

$$S_{2X} = 53,3b^3 = 53,3 \cdot 25,6^3 = 8,94 \cdot 10^5 \text{ мм}^3;$$

$$S_X^B = S_{IX}^{H*} = 58,8b^3 = 58,8 \cdot 25,6^3 = 9,865 \cdot 10^5 \text{ мм}^3;$$

$$Y_p = y_5 = y_C = 7,67 \cdot 25,6 = 196,4 \text{ мм};$$

$$Y_{сж} = (10b + 2b) - Y_p = 12b - 7,67b = 4,33 \cdot 25,6 = 110,8 \text{ мм}.$$

4) Для построения эпюры нормальных напряжений вычисляем:

– максимальные растягивающие напряжения

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x}{J_X} \cdot Y_p = \frac{6,5 \cdot 10^7}{21,13 \cdot 10^7} \cdot 196,4 = 60,4 \text{ МПа};$$

– максимальные сжимающие напряжения

$$\max \sigma_{сж} = \frac{\max M_x}{J_X} \cdot Y_{сж} = \frac{6,5 \cdot 10^7}{21,13 \cdot 10^7} \cdot 110,8 = 34,1 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рисунке 6.6,б.

Для построения эпюры касательных напряжений вычислим:

– касательные напряжения в верхних и нижних волокнах сечения (уровни, в которых находятся точки 1 и 5)

$$\tau_1 = \tau_5 = 0;$$

– касательные напряжения в месте соединения полки со стенкой (уровни, в которых находятся точки 2 и 3) вычисляются по формуле Журавского

$$\tau = \frac{\max Q_y S_X}{J_X b(y)},$$

где  $\max Q_y$  – максимальная поперечная сила (см. рисунок 6.3),

$$\max Q_y = 2qa = 2 \cdot 10 \cdot 1 = 20 \text{ кН};$$

$S_X$  – статический момент площади, лежащей выше (или ниже)

рассматриваемого уровня относительно оси  $X$ ;

$J_X$  – момент инерции всего сечения;

$b(y)$  – ширина сечения на рассматриваемом уровне.

Для уровня с точкой 2

$$\tau_2 = \frac{\max Q_y S_{2X}}{J_X \cdot 8b} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 8,94 \cdot 10^5}{21,13 \cdot 10^7 \cdot 8 \cdot 25,6} = 0,41 \text{ МПа.}$$

Для уровня с точкой 3

$$\tau_3 = \frac{\max Q_y S_{2X}}{J_X \cdot 2b} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 8,94 \cdot 10^5}{21,13 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 25,6} = 1,6 \text{ МПа.}$$

Максимальные касательные напряжения на уровне точки 4, совпадающем с главной центральной осью  $X$ :

$$\max \tau = \frac{\max Q_y S_X^B}{J_X \cdot 2b} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 9,86 \cdot 10^5}{21,13 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 25,6} = 1,82 \text{ МПа.}$$

Эпюра касательных напряжений показана на рисунке 6.6,в.

**5)** Проанализируем эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  (см. рисунок 6.6,б) при заданном расположении поперечного сечения. Из эпюры следует, что верхние сжатые волокна сечения существенно недогружены.

Известно, что хрупкий материал на сжатие работает лучше, чем на растяжение ( $[\sigma_{сж}] > [\sigma_{р}]$ ), а при заданном расположении сечения оказалось, что  $\max \sigma_{сж} < \max \sigma_{р}$ , так как сжатые волокна

расположены ближе к нейтральной оси  $Y_{сж} < Y_p$ . Таким образом, заданный вариант расположения сечения, очевидно, следует считать нерациональным. Для рационального расположения поперечного сечения необходимо обеспечить выполнение условия  $Y_{сж} > Y_p$ , при котором в наиболее удаленных от оси  $X$  волокнах будут возникать максимальные сжимающие напряжения. Для этого поперечное сечение, показанное на рисунке 6.6,а, необходимо повернуть на  $180^\circ$  (рисунок 6.7).

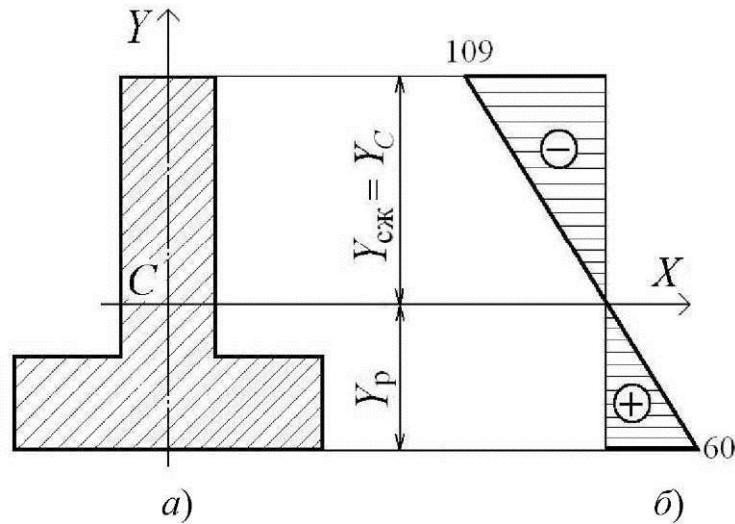


Рисунок 6.7

При этом  $Y_{сж} = 7,67b$ ;  $Y_p = 4,33b$ .

Запишем условия прочности (6.3) и (6.4) для сечения, повернутого на  $180^\circ$ :

$$\max \sigma_p = \frac{|\max M_X|}{492b^4} \cdot 4,33b \leq [\sigma_p],$$

откуда после подстановки данных следует

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{4,33 \cdot 6,5 \cdot 10^7}{492 \cdot 60}} = 21 \text{ мм.}$$

В этом случае наибольшие сжимающие напряжения равны

$$\max \sigma_{сж} = \frac{|\max M_X|}{492b^4} \cdot 7,67b = \frac{6,5 \cdot 10^7 \cdot 7,67}{492 \cdot 21^3} = 109 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 250.$$

Условие прочности выполняется.

Для перевернутого положения сечения окончательно следует принять  $b = 21$  мм.

Геометрические характеристики в этом случае будут равны

$$J_X = 9,569 \cdot 10^7 \text{ мм}^4, \quad Y_p = 91 \text{ мм}; \quad Y_{сж} = 161 \text{ мм.}$$

Максимальные сжимающие и растягивающие нормальные напряжения равны

$$\max \sigma_p = \frac{6,5 \cdot 10^7}{9,57 \cdot 10^7} \cdot 91 = 60 \text{ МПа};$$

$$\max \sigma_{сж} = \frac{6,5 \cdot 10^7}{9,57 \cdot 10^7} \cdot 161 = 109 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений для перевернутого положения поперечного сечения (см. рисунок 6.7,а) показана на рисунке 6.7,б.

Из эпюры следует, что в этом случае происходит догрузка сжатой части сечения. Кроме того, при таком расположении сечения уменьшается погонный вес балки, который определяется площадью поперечного сечения.

Если поперечное сечение расположено как на рисунке 6.6, то

$$F = 2b \cdot 10b + 2b \cdot 8b = 36b^2 = 36 \cdot 2,56^2 = 232 \text{ см}^2.$$

При рациональном расположении поперечного сечения (см. рисунок 6.7,а)

$$F_{\text{рац}} = 36 \cdot b^2 = 36 \cdot 2,1^2 = 159 \text{ см}^2.$$

Таким образом, при рациональном расположении поперечного сечения погонный вес балки уменьшается в  $F/F_{\text{рац}} = 232,0 / 159,0 = 1,46$  раза, т.е. на 46 %.

## Расчет балки на жесткость

### Задача 7

Для стальной балки определить прогибы в характерных точках и построить приближенно упругую линию (изогнутую ось балки).

Балка имеет двутавровое поперечное сечение с размерами, полученными при решении задачи 5, и нагружена в соответствии с расчетной схемой задачи 5.

Определить приближенно максимальный прогиб  $y$  и сравнить его с допуском  $[f] = 0,002l$ , где  $l$  – длина пролета (межопорного и консольного), в котором имеет место максимальный прогиб. Если условие жесткости не выполняется, подобрать размеры поперечного сечения из условия жесткости. При решении использовать метод начальных параметров.

Исходные данные принять по таблице 5.1, полагая  $q = 10 \text{ Н/мм}$ ;  $P = qa$ ;  $m = Pa = qa^2$ ;  $a = 1 \text{ м} = 1000 \text{ мм}$ .

**Пример.** В соответствии с условиями задачи 7 выполнить расчет на жесткость стальной балки, приведенной на рисунке 5.2,а.

Дано:  $a = 1 \text{ м} = 1000 \text{ мм}$ ;  $q = 20 \text{ кН/м} = 20 \text{ Н/мм}$ ;  $m = 0,5qa^2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м} = 10\cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{мм}$ ;  $P = 0,5qa = 10 \text{ кН} = 10\cdot 10^3 \text{ Н}$ .

Материал балки – сталь 15; модуль упругости  $E = 2\cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

В результате расчета данной балки на прочность (см. пример задачи 5) уже известны опорные реакции  $A_Y$  и  $B_Y$ ; номер двутавра; эпюры изгибающих моментов  $M_x$  (повторено на рисунке 7.1,а,б).

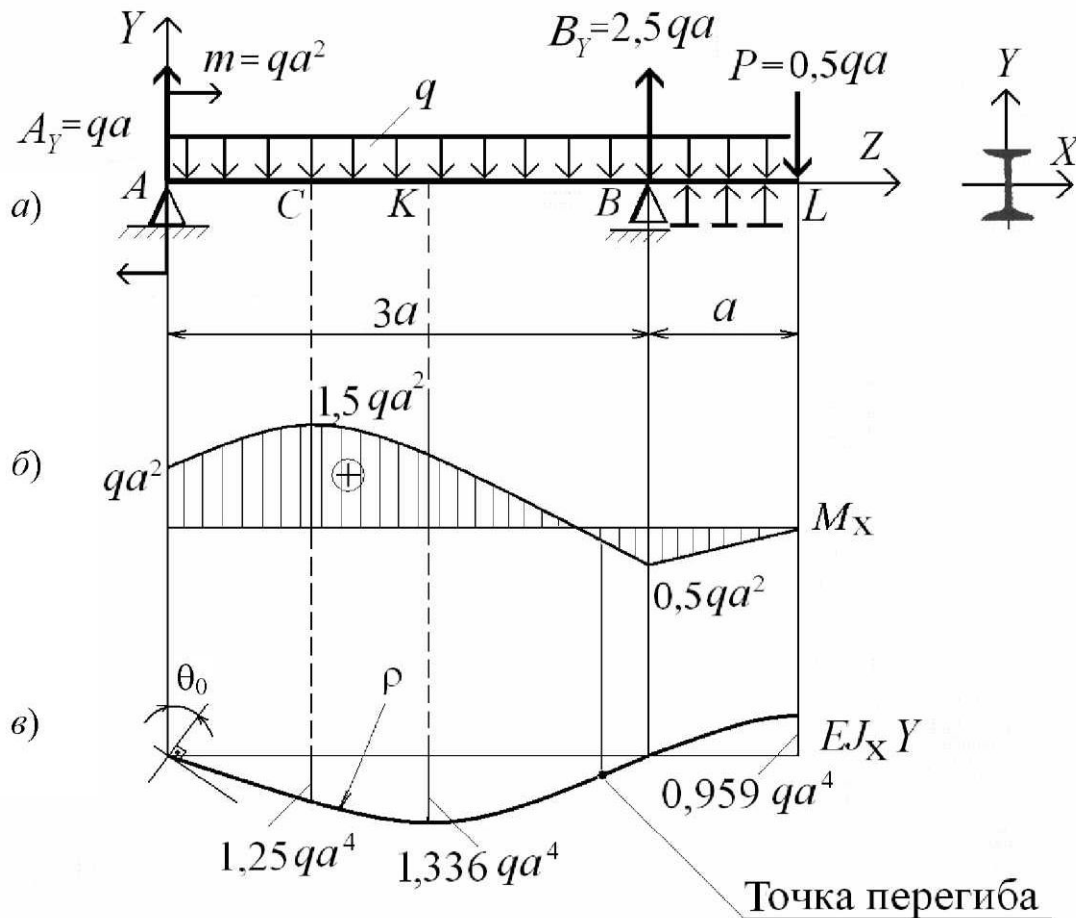


Рисунок 7.1

Решение.

1) Выбираем систему координат. Начало координат совмещаем с левым торцом  $A$ , чтобы вся балка располагалась в положительном квадранте. Так как распределенная нагрузка не доходит до конца балки, дополняем ее.

Одновременно на этом участке прикладываем компенсирующую нагрузку обратного знака.

2) Запишем уравнение упругой линии оси балки для данной схемы:

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + m \frac{z^2}{2} + A_y \frac{z^3}{6} +$$

$$+ B_y \frac{(z-3a)^3}{6} \Big|_{z>3a} - q \frac{z^4}{24} + q \frac{(z-3a)^4}{24} \Big|_{z>3a}, \quad (7.1)$$

где  $y_0$  и  $\theta_0$  – прогиб и угол поворота сечения в начале координат, которые определяются из условий на опорах и называются начальными параметрами; прерыватель  $\Big|_{z>a_i}$  указывает, что при вычислении прогиба в конкретном сечении учитываются только те слагаемые, для которых указанное неравенство ( $z > a_i$ ) выполняется.

**3)** Определяем начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$ .

При  $z = 0$   $y_A = 0$ , т.е.  $y_0 = 0$  (точка  $A$  на рисунке 7.1,а), так как в начале координат расположена шарнирно-неподвижная опора.

При  $z = 3a$   $y_B = 0$  (точка  $B$  на рисунке 7.1,а), так как в сечении  $B$  также расположена опора (шарнирно-подвижная).

Тогда из уравнения (7.1), приравняв правую часть нулю, получим

$$0 = EJ_x \theta_0 3a + m \frac{(3a)^2}{2} + A_y \frac{(3a)^3}{6} - q \frac{(3a)^4}{24},$$

или после подстановки значений нагрузок

$$0 = EJ_x \theta_0 3a + qa^2 \frac{(3a)^2}{2} + qa \frac{(3a)^3}{6} - q \frac{(3a)^4}{24},$$

откуда  $EJ_x \theta_0 = -1,875 qa^3$ .

Знак «-» показывает, что сечение  $A$  поворачивается по часовой стрелке.

После определения начальных параметров и подстановки значений  $m$ ,  $A_y$ ,  $B_y$  уравнение (7.1) принимает такой вид:

$$EJ_x y = -0 - 1,875 qa^3 z + qa^2 \frac{z^2}{2} + qa \frac{z^3}{6} +$$

$$+ 2,5 qa \frac{(z-3a)^3}{6} \Big|_{z>3a} - q \frac{z^4}{24} + q \frac{(z-3a)^4}{24} \Big|_{z>3a}. \quad (7.2)$$

4) Строим приближенно упругую линию оси балки.

Для этого находим прогибы в характерных сечениях данной балки:

- при  $z_C = a$  (сечение, где изгибающий момент максимален);
- при  $z_K = 1,5a$  (в середине пролета  $AB$ );
- при  $z_L = 4a$  (на конце консоли):

$$z_C = a, \quad EJ_x y_C = -1,875 q a^3 a + q a^2 \frac{a^2}{2} + q a \frac{a^3}{6} - q \frac{a^4}{24} = -1,25 q a^4;$$

$$z_K = 1,5a, \quad EJ_x y_K = -1,875 q a^3 \cdot 1,5a + q a^2 \frac{(1,5a)^2}{2} + q a \frac{(1,5a)^3}{6} - q \frac{(1,5a)^4}{24} = -1,336 q a^4;$$

$$z_L = 4a, \quad EJ_x y_L = -1,875 q a^3 \cdot 4a + q a^2 \frac{(4a)^2}{2} + q a \frac{(4a)^3}{6} + 2,5 q a \frac{(4a - 3a)^3}{6} - q \frac{(4a)^4}{24} + q \frac{(4a - 3a)^4}{24} = 0,959 q a^4.$$

Знак «—» указывает на то, что направление прогиба не совпадает с положительным направлением оси  $Y$ .

Форма упругой линии балки связана с эпюрой изгибающих моментов, так как кривизна  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$ .

Следовательно, на участке, где  $M_x > 0$ ,  $\frac{1}{\rho} > 0$  (выпуклость направлена вниз) и, наоборот, где  $M_x < 0$ ,  $\frac{1}{\rho} < 0$  (выпуклость направлена вверх).

В сечении, где  $M_x = 0$ , упругая линия имеет точку перегиба. Упругая линия изображена на рисунке 7.1, в.

5) Проверяем балку по условию жесткости, которое имеет вид

$$y_{\max} \leq [f].$$

Считая, что в силу упругих свойств материала балки сечение, в котором прогиб наибольший, расположено близко к середине пролета балки, принимаем  $y_{\max} = y_K$ .



Для двутавра № 20 момент инерции

$$J_x = 1840 \text{ см}^4 = 1840 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Подсчитаем численное значение  $y_K$ :

$$y_K = \frac{1,336 q a^4}{E J_x} = \frac{1,336 \cdot 20 \cdot 1000^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 1840 \cdot 10^4} = 7,26 \text{ мм}.$$

Допускаемый прогиб  $[f] = 0,002 \cdot l \text{ м} = 0,002 \cdot 3 \cdot 10^3 = 6 \text{ мм}$ .

Сравнение показывает, что  $y_K > [f]$ , т.е. условие жесткости не выполняется.

б) Подбираем сечение балки из условия жесткости, для чего выражение, определяющее  $y_{\max}$  в общем виде, приравняем к допускаемому прогибу  $[f]$ :

$$y_K = \frac{1,336 q a^4}{E J_x} \leq [f];$$

отсюда находим значение момента инерции:

$$J_x = \frac{1,336 q a^4}{E [f]} = \frac{1,336 \cdot 20 \cdot 1000^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 6} = 2,22 \cdot 10^7 \text{ мм}^4 = 2220 \text{ см}^4.$$

По значению  $J_x$  из таблиц ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 22, для которого  $J_x = 2550 \text{ см}^4$ ,  $W_x = 232 \text{ см}^2$ .

При этом значение максимального прогиба будет равно

$$y_{\max} = y_K = \frac{1,336 q a^4}{E J_x} = \frac{1,336 \cdot 20 \cdot 1000^4}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 5,2 \text{ мм}.$$

## Расчет статически неопределимой балки

### Задача 8

Для стальной статически неопределимой балки, нагруженной в соответствии с расчетной схемой (рисунок 8.1), выполнить проекторочный расчет, т.е. из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры поперечного сечения двутаврового профиля, определить прогиб сечения  $K$  или угол поворота сечения  $L$  балки.

Исходные данные для расчета принять по таблице 8.1, полагая

$$m = Pa = qa^2; \quad P = qa; \quad q = 10 \text{ кН/м}; \quad a = 1 \text{ м}.$$

Коэффициент запаса прочности  $n_r = 1,5$ ; модуль упругости первого рода  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; предел текучести  $\sigma_r = 480 \text{ МПа}$ .

Плоскость действия сил совпадает с осью наибольшей жесткости поперечного сечения балки.

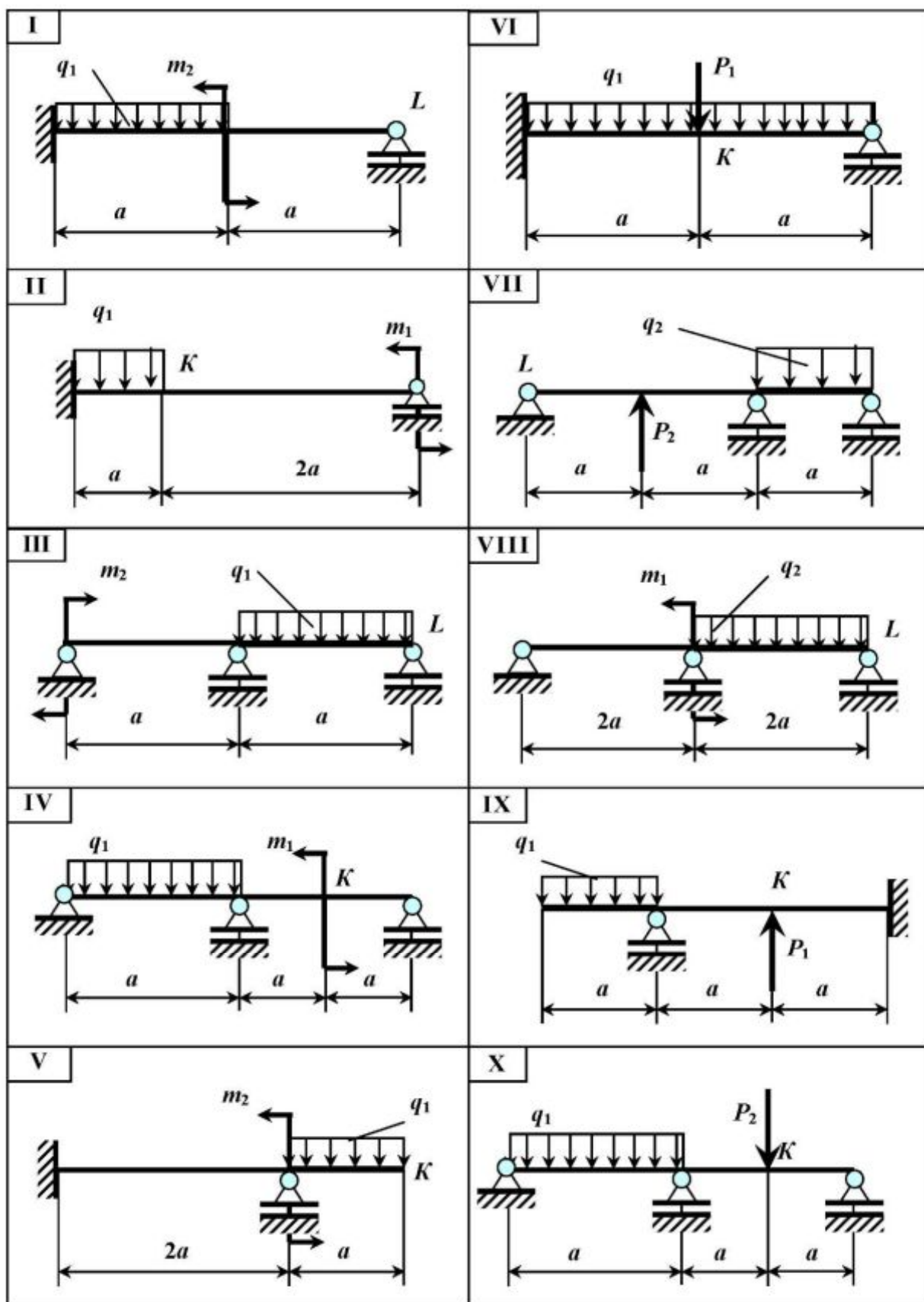


Рисунок 8.1

Таблица 8.1

Номер строки	Схема по рисунку 8.1	$m_1$	$m_2$	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$
1	I	$m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$
2	II	$2m$	$m$	$P$	$P$	$q$	$2q$
3	III	$m$	$2m$	$2P$	$2P$	$q$	$2q$
4	IV	$2m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$
5	V	$m$	$m$	$2P$	$P$	$2q$	$q$
6	VI	$m$	$m$	$P$	$P$	$2q$	$q$
7	VII	$2m$	$m$	$P$	$2P$	$2q$	$q$
8	VIII	$m$	$2m$	$P$	$P$	$q$	$q$
9	IX	$m$	$m$	$2P$	$P$	$q$	$q$
0	X	$2m$	$m$	$P$	$P$	$2q$	$q$
Буква шифра	а	б		а		г	

**Пример.** В соответствии с условиями задачи 8 выполнить расчет статически неопределимой балки, изображенной на рисунке 8.2,а. Для расчета принять значения исходных данных:

$$q = 20 \text{ кН/м}; a = 1,6 \text{ м};$$

$$P = qa; m = Pa = qa^2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sigma_T = 480 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Решение.

1) Определяем степень статической неопределимости балки  $n$ . На балку наложены  $x = 4$  связи; система плоская, следовательно, можно составить только  $N = 3$  уравнения равновесия.

Степень статической неопределимости балки  $n = x - N = 4 - 3 = 1$ , т.е. система один раз статически неопределима.

2) Образует основную систему, которая получается из исходной путем отбрасывания лишних связей с точки зрения равновесия. Причем основная система должна быть кинематически неизменяемой и статически определимой. Принимаем основную систему, которая получается путем врезания на опоре  $B$  шарнира и приложением момента  $X_1$ , заменяющего отброшенную связь между соседними пролетами (рисунок 8.2,б).

3) Построим для основной системы эпюру изгибающего момента  $M_P$  от действия внешних сил, для чего вначале определяем реакции в опорах для левой и правой частей балки (рисунок 8.2,в,д), а затем по известной методике строим эпюру  $M_P$  (рисунок 8.2,з,е).

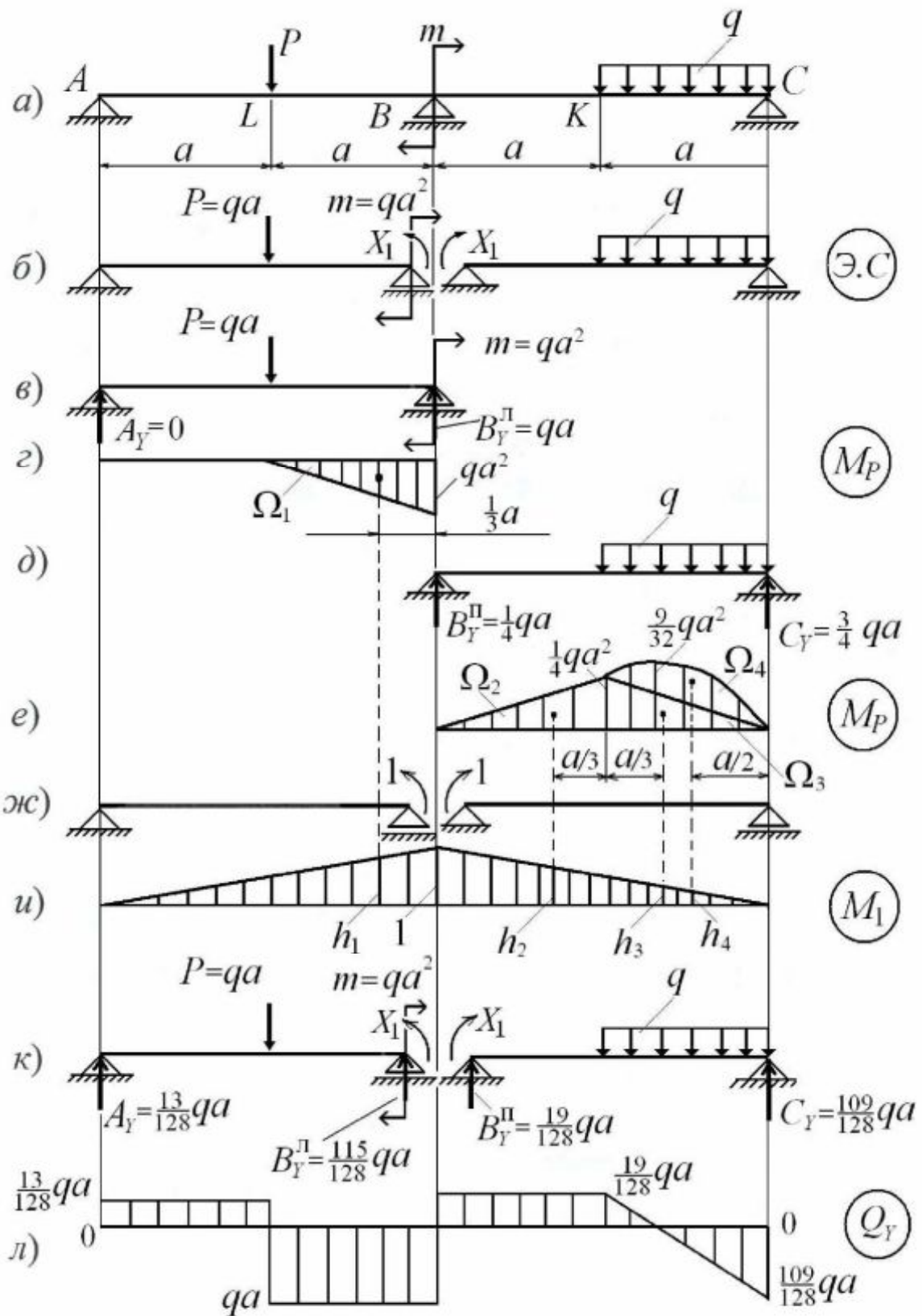


Рисунок 8.2. Начало

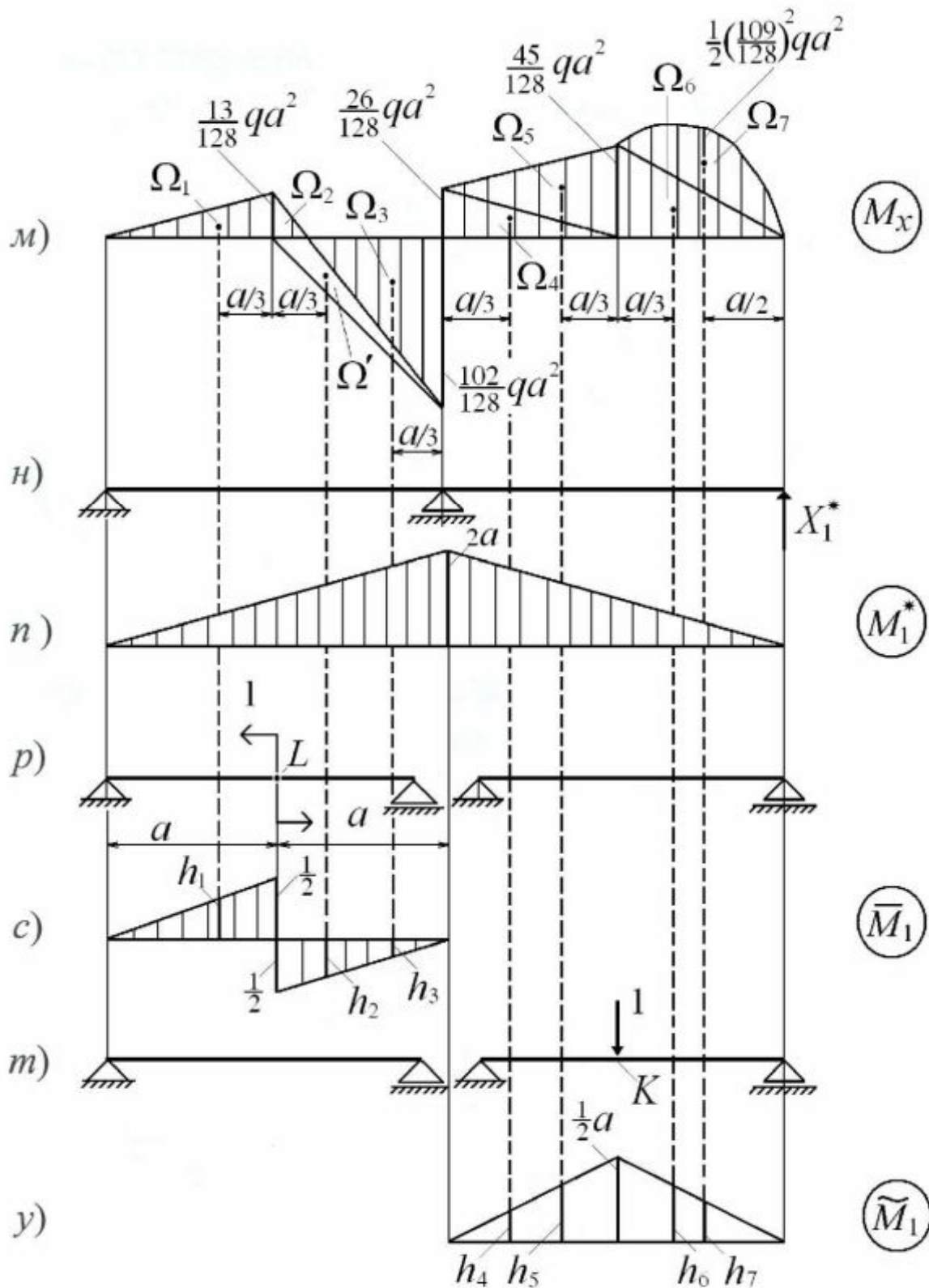


Рисунок 8.2. Продолжение

4) Построим в основной системе эпюры изгибающего момента от единичных моментов по направлению лишнего неизвестного  $x_1$  (рисунок 8.2, u).

5) Запишем систему канонических уравнений метода сил:

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_k + \delta_{iP} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8.1)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение по направлению  $i$ -го силового фактора под действием единичного фактора  $X_k = 1$ ;

$\delta_{iP}$  – перемещение по направлению  $i$ -го силового фактора под действием внешних сил;

$n$  – степень статической неопределимости.

Если система один раз статически неопределима, как это имеет место в нашей задаче, то каноническое уравнение (8.1) имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1P} = 0. \quad (8.2)$$

6) Определяем  $\delta_{1P}$  и  $\delta_{11}$ , используя способ Верещагина:

$$\delta_{nk} = \sum_{j=1}^m \frac{\Omega_j h_j}{(EJ_x)_j}, \quad (8.3)$$

где  $\Omega_j$  – площадь  $j$ -го участка эпюры моментов заданных сил (грузовая эпюра);

$h_j$  – ордината единичной эпюры  $j$ -го участка, лежащая под центром тяжести грузовой эпюры;

$(EJ_x)_j$  – жесткость на изгиб  $j$ -го участка;

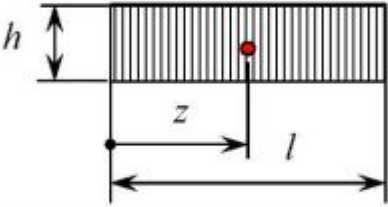
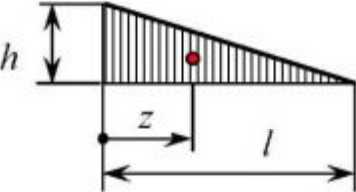
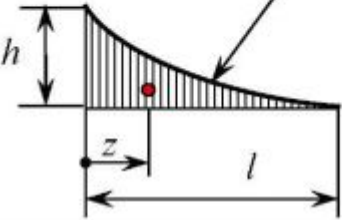
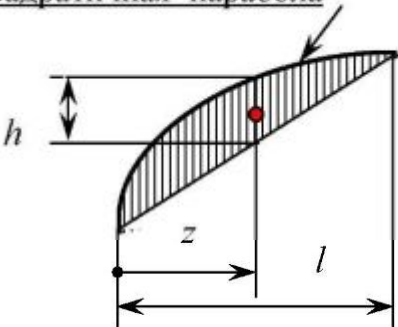
$m$  – число участков.

Если грузовая и единичная эпюры лежат по одну сторону от оси эпюры на  $j$ -м участке, то перед  $j$ -м слагаемым в данной формуле ставится знак «+», и наоборот, если по разные стороны, то ставится знак «−».

Если на данном участке ни одна из перемножаемых эпюр не является прямолинейной, но одна из них или обе ограничены ломаными прямыми линиями, то в этих случаях эпюры предварительно разбивают на такие участки, в пределах каждого из которых, по крайней мере, одна эпюра прямолинейна.

Если на данном участке эпюра имеет сложный вид, то она разбивается на элементарные фигуры: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и т.д., для которых величина площади  $\Omega_j$  и положение центра тяжести известны, и производится «перемножение» элементарных фигур (таблица 8.2).

Таблица 8.2

Геометрическая фигура (эпюра изгибающих моментов)	Площадь $\Omega$	Координата центра тяжести $z$	Примечание
	$hl$	$\frac{1}{2}l$	–
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$	–
Квадратичная парабола 	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{1}{4}l$	$h = \frac{1}{2}ql^2$
Квадратичная парабола 	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$	$h = \frac{1}{8}ql^2$
Примечание. $q$ – интенсивность распределенной внешней нагрузки на участке длиной $l$ .			

Определяем  $\delta_{1P}$  как произведение площадей эпюр  $z$  и  $e$  на ординаты, взятые с эпюры  $u$ , каждый раз под центром тяжести эпюр  $z$  и  $e$ :

$$\begin{aligned} \delta_{1P} &= \frac{1}{EJ_x} (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_3 h_3 + \Omega_4 h_4) = \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( -\frac{1}{2}qa^2 \right) \cdot \frac{5}{6}a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}qa^2 \right) \cdot \frac{2}{3}a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}qa^2 \right) \cdot \frac{1}{3}a + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}qa^2 \right) \cdot \frac{1}{4}a \right] = \\ &= -\frac{13}{48} \cdot \frac{qa^3}{EJ_x} \end{aligned}$$

Найдем  $\delta_{11}$ , перемножая эпюру  $M_1$  саму на себя, т.е. берем составляющие площади эпюры (рисунок 8.2, *u*) и умножаем на ординаты, проходящие через центр тяжести площадей той же эпюры (см. рисунок 8.2, *u*):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \right) \cdot \frac{2}{3} \right] \cdot 2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{EJ_x}.$$

Здесь учтено, что единичная эпюра  $M_1$  (см. рисунок 8.2, *u*) является симметричной, поэтому перемножение выполняется на одном участке, а результат удваивается.

7) Решая каноническое уравнение (8.2), находим

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-13qa^3}{48EJ_x} \cdot \frac{3EJ_x}{4a} = \frac{13}{64} qa^2.$$

Знак «+» указывает на то, что направление  $X_1$  первоначально выбрано правильно.

8) Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  известными приемами отдельно для левого и правого пролетов и сочленим соответствующие эпюры обоих пролетов (рисунок 8.2, *л, м*), предварительно определив реакции в опорах (рисунок 8.2, *к*). При построении эпюры  $M_x$  целесообразно использовать принцип суперпозиций

$$M_x = M_p + M_i x_i + \dots + M_n x_n, \quad (8.4)$$

где  $M_p$  – эпюра изгибающего момента от действия внешних сил (в нашем случае эпюры на рисунке 8.2, *з, е*);

$M_i$  – эпюра изгибающего момента от действия единичной силы в направлении неизвестной  $X_i$  (в нашем случае эпюра на рисунке 8.2, *u*), здесь  $X_i$  – значение  $i$ -го лишнего неизвестного.

На эпюре  $M_x$  видно, что  $M_{\max} = \frac{109}{128} qa^2 = \frac{51}{64} qa^2$ .

9) Сделаем деформационную проверку, которая заключается в определении перемещений в заданной системе; значения известны и в данном случае равны нулю.

Для этого выбираем новую основную систему с новыми лишними неизвестными  $X_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и вычисляем перемещения  $\Delta_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) в направлении каждой  $X_k^*$ -й неизвестной, например, по формуле Верещагина

$$\Delta_k^* = \sum_{j=1}^m \frac{\Omega_j h_{kj}^*}{(EJ_x)_j}, \quad (8.5)$$



где  $\Omega_j$  – площадь  $j$ -го участка эпюры результирующего изгибающего момента, полученного в результате раскрытия статической неопределимости системы (рисунок 8.2,н);

$h_{kj}$  – ордината эпюры изгибающего момента от единичной силы  $X_k^* = 1$  в новой основной системе, лежащая под центром тяжести эпюры результирующего изгибающего момента  $M_x$ .

В направлении новых лишних неизвестных перемещения должны быть равны нулю, следовательно, если  $\Delta_k^* = 0$ , то деформационная проверка подтверждает, что результирующая эпюра построена верно.

В нашем примере за новую основную систему принимаем систему, получающуюся из исходной путем отбрасывания правой опоры  $C$ .

В качестве новой лишней неизвестной принимается реакция опоры  $C$  (рисунок 8.2,н).

На рисунке 8.2,н показана эпюра изгибающего момента от единичной силы по направлению лишнего неизвестного  $X_1^*$ .

Как было уже показано, эпюра результирующего изгибающего момента  $M_x$  может быть определена по принципу суперпозиций (8.4). Поэтому при проведении деформационной проверки целесообразно производить вначале перемножение эпюры  $M_p$  на эпюру изгибающего момента от единичной силы по направлению лишнего неизвестного  $X_k^*$ , затем перемножение эпюр от единичных сил по направлению лишних неизвестных  $X_i$  на эпюру от единичной силы по направлению лишней неизвестной  $X_k^*$  и на величину лишней неизвестной  $X_i$ ; результаты перемножения сложить.

В нашем примере будем иметь

$$\Delta_1^* = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( -\frac{1}{2} qa^2 \cdot a \right) \frac{5}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 \cdot a \right) \frac{4}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 \cdot a \right) \frac{2}{3} a + \right. \\ \left. + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \right) \frac{1}{2} a + 2 \left( 1 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} 2a \right) \frac{13}{64} qa^2 \right] = \frac{qa^4}{EI_x} \left[ -\frac{5}{6} + \frac{5}{6} \right] \equiv 0.$$

10) Запишем условие прочности для проектировочного расчета:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ ,  $[\sigma] = \frac{480}{1,5} = 320$  МПа.

Из условия прочности находим

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]} = \frac{51qa^2}{64[\sigma]} = \frac{51 \cdot 20 \cdot 1,6^2 \cdot 10^6}{64 \cdot 320 \cdot 10^3} = 127 \text{ см}^3.$$

По сортаменту подбираем номер двутавра (№ 18), для которого  $W_x = 143 \text{ см}^3$ .

**11)** Определяем угол поворота сечения  $L$ . Для этого приложим в основной системе единичный внешний изгибающий момент в сечении  $L$  (рисунок 8.2,*p*) и строим эпюру изгибающего момента  $\bar{M}_1$  (рисунок 8.2,*c*) от действия этого момента. Поскольку эпюра  $\tilde{M}_1$  имеется только на левом пролете балки, разобьем эпюру результирующего момента  $M_x$  (см. рисунок 8.2,*л*) на левом пролете на элементарные фигуры и перемножим эпюры  $\tilde{M}_1$  и  $M_x$  по правилу Верещагина. При разбиении эпюры  $M_x$  на втором участке площадь незаштрихованного треугольника  $\Omega'$  прибавляется к площади  $\Omega_2^{uk}$ , причем считается, что треугольник с площадью  $\Omega_2 + \Omega'$  целиком лежит выше оси эпюры.

В результате получим

$$\begin{aligned} \theta_L &= \frac{1}{EJ_x} (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_3 h_3) = \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{128} qa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{128} qa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{51}{64} \cdot qa^2 \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{17}{256} \cdot \frac{qa^3}{EJ_x}. \end{aligned}$$

Подставив в выражение  $\theta_L$  значения  $q$ ,  $a$ ,  $E$ ,  $J_x$  (для двутавра № 18  $J_x = 1290 \text{ см}^4$ ), получим

$$\theta_L = \frac{17 \cdot 20 \cdot 1,6^3 \cdot 10^9}{256 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

**12)** Определяем прогиб сечения  $K$  балки.

Для этого в основной системе в сечении  $K$  приложим единичную силу в направлении искомого прогиба (рисунок 8.2,*т*) и построим эпюру  $\tilde{M}_1$  (рисунок 8.2,*у*).

А далее аналогично тому, как это делали при определении угла поворота сечения, разбиваем для правого пролета балки эпюру результирующего момента (см. рисунок 8.2,*м*) на элементарные фигу-

ры и перемножаем эпюры  $M_x$  и  $\tilde{M}_1$  по правилу Верещагина. В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta_K &= \frac{1}{EJ_x} (\Omega_4 h_4 + \Omega_5 h_5 + \Omega_6 h_6 + \Omega_7 h_7) = \\ &= \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{64} qa^2 \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{128} qa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{128} qa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) = \\ &= \frac{119qa^4}{128 \cdot 6 \cdot EJ_x}. \end{aligned}$$

Подставив в выражение  $\Delta_K$  числовые значения, получим

$$\Delta_K = y_K = \frac{119 \cdot 20 \cdot 1,6^4 \cdot 10^{12}}{128 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 7,87 \text{ мм.}$$

## IV Сложное сопротивление

### Задача 9

Балка прямоугольного поперечного сечения нагружена двумя одинаковыми сосредоточенными силами  $P$  в главных плоскостях.

В точке  $A$  сила действует вертикально, в точке  $B$  – горизонтально.

Требуется:

1) из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры поперечного сечения;

2) построить пространственную эпюру нормальных напряжений для опасного сечения балки;

3) определить величину и направление полного прогиба  $f$  в сечениях  $A$  и  $B$ , построить в этих сечениях схемы линейных перемещений.

Расчетную схему принять по рисунку 9.1,а. Направление сил в точках  $A$  и  $B$  – по рисунку 9.1,б (где дан вид балки справа). Исходные данные для расчета принять по таблице 9.1.

Материал балки – деревопластик, модуль упругости  $E = 1 \cdot 10^4$  МПа, допускаемые напряжения  $[\sigma] = 8$  МПа.

Таблица 9.1

Номер строки	Схема по рисунку 9.1	$P$ , кН	$l$ , м	$n = \frac{h}{b}$
1	I	8	1,1	2,2
2	II	2	1,2	2,4
3	III	3	1,3	1,6
4	IV	4	1,4	1,4
5	V	5	1,5	1,5
6	VI	6	1,6	1,6
7	VII	7	1,7	2,5
8	VIII	8	1,8	1,8
9	IX	6	1,9	1,9
0	X	10	2,0	2,0
Буква шифра	а	б	в	г

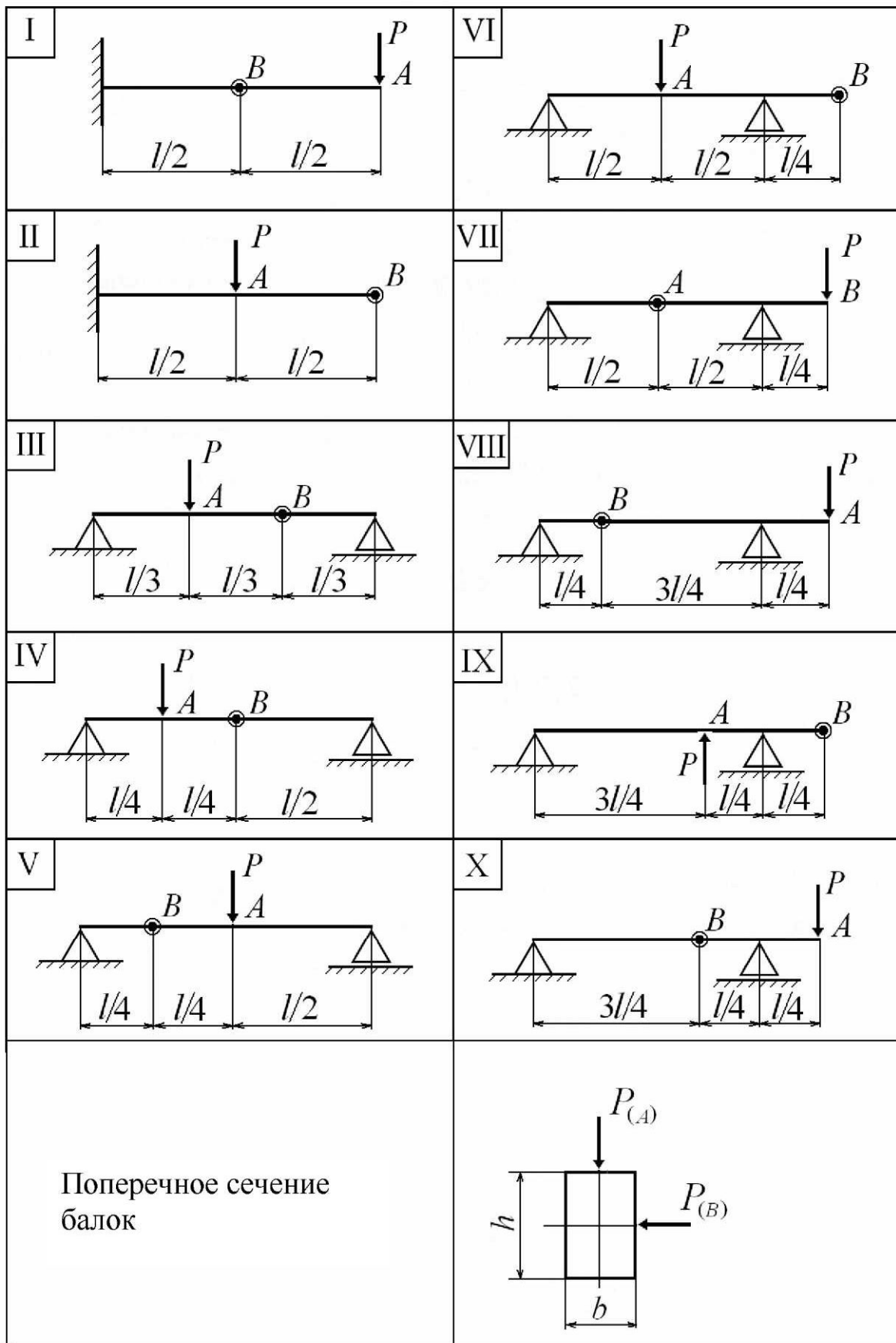


Рисунок 9.1

**Пример.** В соответствии с условиями задачи 9 выполнить расчет на пространственный изгиб балки, нагруженной, как показано на рисунке 9.2.

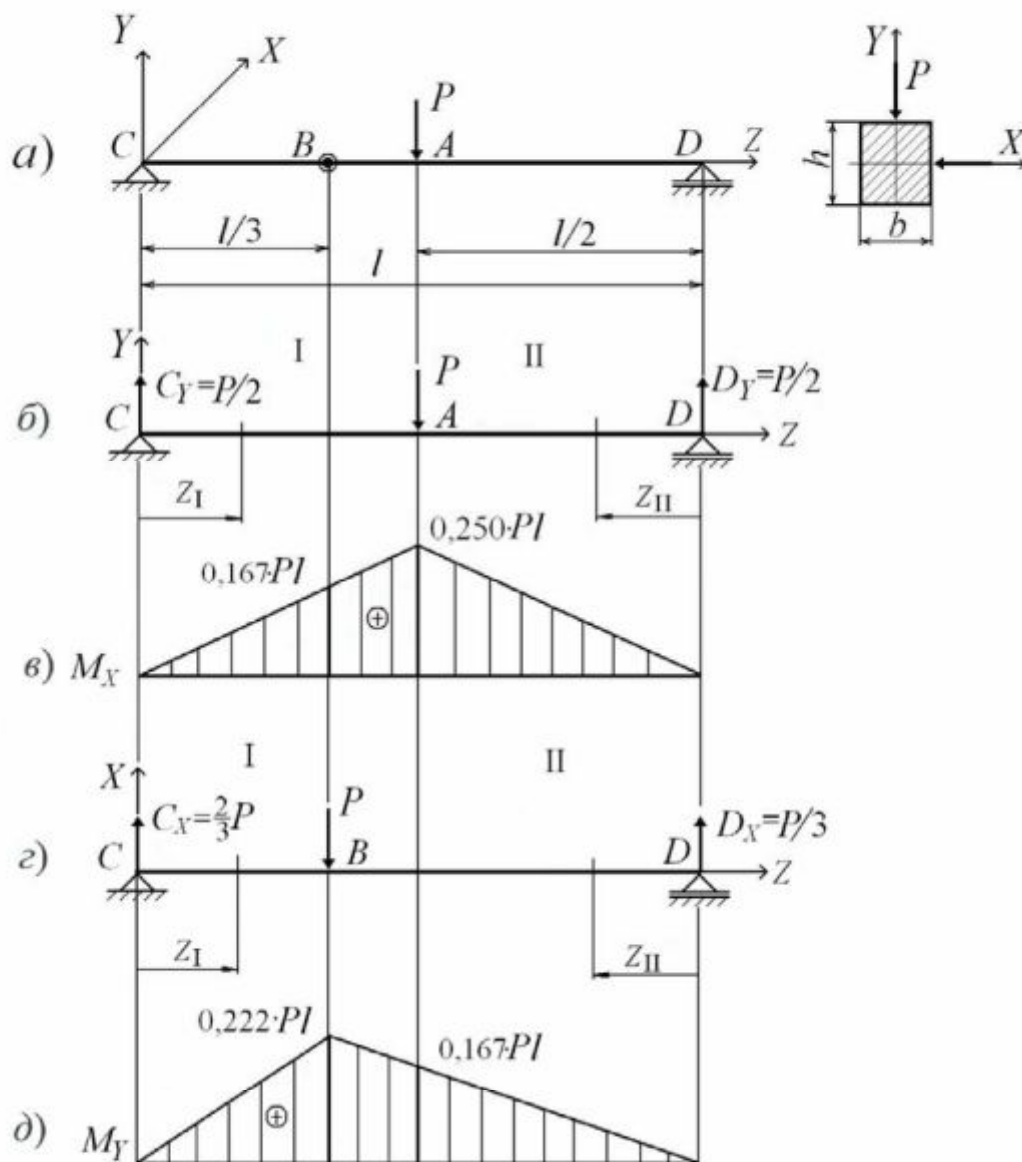


Рисунок 9.2

Исходные данные:

$$P = 10 \text{ кН}; \quad \text{отношение } n = \frac{h}{b} = 2;$$

$$l = 3 \text{ м}; \quad [\sigma] = 8 \text{ МПа}, \quad E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Определим положение опасного сечения.

Балка испытывает пространственный изгиб. При решении задачи используем принцип независимости действия сил.

Выбираем пространственную систему координат  $XYZ$  (рисунок 9.2,а). Каждая сила в отдельности вызывает плоский поперечный изгиб. Поэтому действие каждой силы рассмотрим отдельно.

Решение.

1) Строим эпюру изгибающих моментов в вертикальной плоскости  $YCZ$  (рисунок 9.2,б). Определим опорные реакции  $C_y$  и  $D_y$ . В силу симметрии действующей нагрузки и расчетной схемы опорные реакции в опорах  $C$  и  $D$  совпадают по направлению и равны

$$C_y = D_y = P/2.$$

Уравнения изгибающих моментов на первом и втором участках имеют вид

$$M_{xI} = C_y z_I; \quad 0 \leq z_I \leq 0,5l;$$

$$M_{xII} = D_y z_{II}; \quad 0 \leq z_{II} \leq 0,5l.$$

Для первого участка

$$- \text{при } z_I = 0 \quad M_{xI} = 0;$$

$$- \text{при } z_I = 0,5l \quad M_{xI} = (P/2) 0,5l = 0,25Pl.$$

Эпюра изгибающих моментов  $M_x$  симметрична и представлена на рисунке 9.2,в.

2) Строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости  $XCZ$  (рисунок 9.2,з).

Определяем опорные реакции  $C_x$  и  $D_x$ :

$$\Sigma \text{mom } C = 0; \quad -Pl/3 + D_x l = 0; \quad D_x = P/3.$$

$$\Sigma \text{mom } D = 0; \quad -C_x l + P \cdot 2l/3 = 0; \quad C_x = 2P/3.$$

$$\text{При } z_I = l/3 \quad M_{xI} = (P/2)l/3 = 0,167Pl.$$

Уравнения изгибающих моментов  $M_y$ :

$$M_{yI} = C_x z_I = 2P/3 \cdot z_I; \quad 0 \leq z_I \leq l/3;$$

$$- \text{при } z_I = 0 \quad M_{yI} = 0;$$

$$- \text{при } z_I = l/3 \quad M_{yI B} = (2P/3)(l/3) = 2Pl/9 = 0,222Pl;$$

$$M_{yII} = D_x z_{II}; \quad 0 \leq z_{II} \leq 2l/3;$$

$$- \text{при } z_{II} = 0 \quad M_{yII} = 0;$$

$$- \text{при } z_{II} = 0,5l \quad M_{yII A} = (P/3)(0,5l) = 0,167Pl;$$

$$- \text{при } z_{II} = 2l/3 \quad M_{yII B} = (P/3)(2l/3) = 0,222Pl.$$

Эпюра  $M_y$  представлена на рисунке 9.2,д.

3) Определяем размеры поперечного сечения. Опасное состояние возникает в сечении, где  $M_x$  и  $M_y$  одновременно велики, т.е. это может быть сечение  $A$  или  $B$ .

Условие прочности в случае пространственного изгиба имеет вид

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Здесь  $W_x$  и  $W_y$  – моменты сопротивления сечения относительно осей  $X$  и  $Y$  соответственно:  $W_x = \frac{bh^2}{6}$ ;  $W_y = \frac{hb^2}{6}$ .

Используя соотношение  $h/b = n$ , получим

$$W_x = \frac{b(nb)^2}{6} = \frac{n^2b^3}{6}; \quad W_y = \frac{(nb)b^2}{6} = \frac{nb^3}{6},$$

т.е.  $W_x = nW_y$ .

Подставив значение  $W_y = \frac{nb^3}{6}$ , окончательно получим

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6(M_x + nM_y)}{n^2[\sigma]}}.$$

Определим размеры поперечного сечения из условия прочности для сечения  $A$ . Изгибающие моменты  $M_{xA}$  и  $M_{yA}$  берутся с эпюры рисунка 9.2, в, д:

$$M_{xA} = 0,25Pl = 0,25 \cdot 10 \cdot 3 = 7,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{yA} = 0,167Pl = 0,167 \cdot 10 \cdot 3 = 5,01 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$b_A \geq \sqrt[3]{\frac{6(M_{xA} + nM_{yA})}{n^2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6(7,5 + 2 \cdot 5,01) \cdot 10^6}{2^2 \cdot 8}} = 148 \text{ мм} = 14,8 \text{ см};$$

$$h_A = 2b_A = 14,8 \cdot 2 = 29,6 \text{ см}.$$

Определим размеры поперечного сечения из условия прочности сечения  $B$ . Изгибающие моменты  $M_{xB}$  и  $M_{yB}$  берут с эпюры рисунка 9.2, в, д:

$$M_{xB} = 0,167Pl = 0,167 \cdot 10 \cdot 3 = 5,01 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{yB} = 0,222Pl = 0,222 \cdot 10 \cdot 3 = 6,66 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$b_B \geq \sqrt[3]{\frac{6(M_{xB} + nM_{yB})}{n^2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6(5,01 + 2 \cdot 6,66) \cdot 10^6}{2^2 \cdot 8}} = 151 \text{ мм}.$$

$$b_B = 15,1 \text{ см}; \quad h_B = 2b_B = 15,1 \cdot 2 = 30,2 \text{ см}.$$

Из двух найденных значений  $h$  и  $b$  принимаем наибольшие значения  $h_B$  и  $b_B$ , округлив их до целых величин:  $h_B = 30 \text{ см}$ ;  $b_B = 15 \text{ см}$ .



Проверим прочность балки в сечении  $B$ :

$$\max \sigma_B = \frac{M_{xB}}{W_x} + \frac{M_{yB}}{W_y} \leq [\sigma].$$

Моменты сопротивления:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{15 \cdot 30^2}{6} = 2250 \text{ см}^3, \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{30 \cdot 15^2}{6} = 1125 \text{ см}^3.$$

Величина максимальных напряжений

$$\max \sigma_B = \frac{5,01 \cdot 10^6}{2250 \cdot 10^3} + \frac{6,66 \cdot 10^6}{1125 \cdot 10^3} = 8,15 \text{ МПа} > [\sigma].$$

Процент перегрузки равен  $\Delta\sigma = \frac{\max \sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% =$

$$= \frac{8,15 - 8}{8} \cdot 100 \% \cong 2 \% < 5 \%, \text{ что допускается.}$$

4) Строим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении  $B$ , используя принцип независимости действия сил, в соответствии с которым нормальное напряжение равно

$$\sigma = \sigma(M_x) + \sigma(M_y).$$

Эпюру нормальных напряжений  $\sigma_B$  в сечении  $B$  получим наложением эпюр  $\sigma_B(M_x)$  и  $\sigma_B(M_y)$ . Чтобы построить эпюры  $\sigma_B(M_x)$  и  $\sigma_B(M_y)$ , достаточно определить напряжения в угловых точках 1, 2, 3, 4 сечения (рисунок 9.3), т.е. максимальные напряжения.

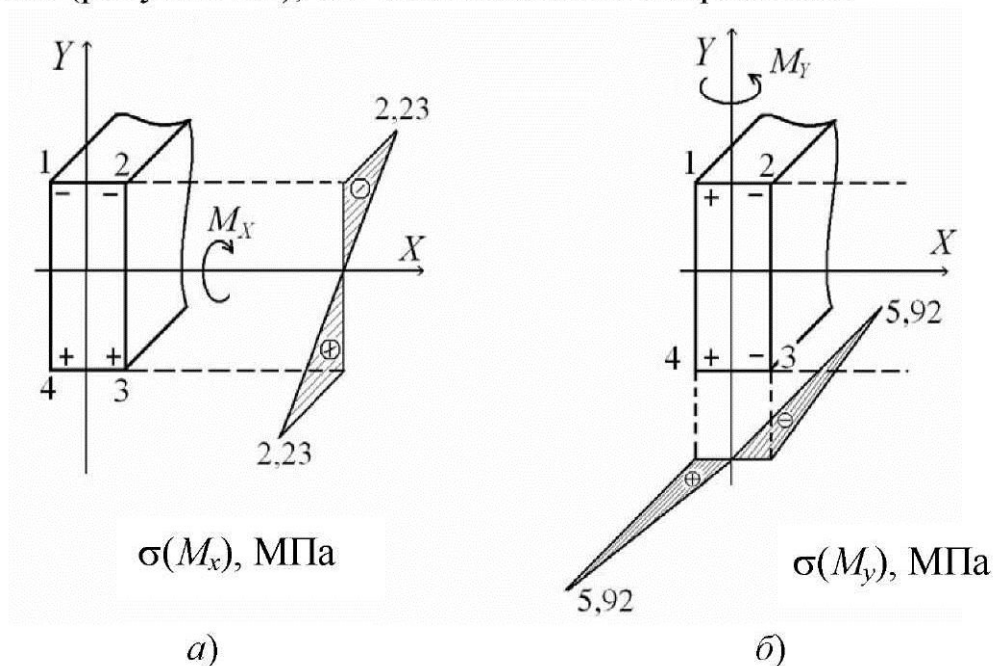


Рисунок 9.3

Определим нормальные напряжения:

$$\sigma(M_x)_{1,2} = -\frac{M_x}{W_x} = -\frac{5,01 \cdot 10^6}{2250 \cdot 10^3} = 2,23 \text{ МПа},$$

$$\sigma(M_x)_{3,4} = +\frac{M_x}{W_x} = +2,23 \text{ МПа};$$

$$\sigma(M_y)_{2,3} = -\frac{M_y}{W_y} = -\frac{6,66 \cdot 10^6}{1125 \cdot 10^3} = -5,92 \text{ МПа},$$

$$\sigma(M_y)_{1,4} = +\frac{M_y}{W_y} = +5,92 \text{ МПа}.$$

Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_B(M_x)$  и  $\sigma_B(M_y)$  представлены на рисунке 9.3, а, б; пространственная эпюра – на рисунке 9.4.

Суммарные нормальные напряжения  $\sigma$  в точках 1, 2, 3 и 4:

$$\sigma_1 = -2,23 + 5,92 = +3,69 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = -2,23 - 5,92 = -8,15 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = +2,23 - 5,92 = -3,69 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = +2,23 + 5,92 = +8,15 \text{ МПа}.$$

5) Определяем положение нейтральной оси в опасном сечении по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_{yB}}{M_{xB}} \cdot \frac{J_x}{J_y}.$$

Здесь  $J_x$  и  $J_y$  – моменты инерции сечения относительно собственных осей  $X$  и  $Y$  соответственно:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12};$$

$$\frac{J_x}{J_y} = \frac{bh^3 \cdot 12}{12 \cdot hb^3} = \frac{h^2}{b^2} = \frac{(nb)^2}{b^2} = n^2,$$

где  $n$  – заданное по условию соотношение сторон.

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_{yB}}{M_{xB}} \cdot n^2 = \frac{0,222Pl}{0,167Pl} \cdot 2^2 = -5,317; \quad \alpha = -79^\circ.$$

Знак «−» показывает, что нейтральная ось и силовая линия проходят через разные квадранты сечения (рисунок 9.4).

Угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $X$ .

Нейтральная ось отделяет зону сжатых волокон от зоны растянутых.

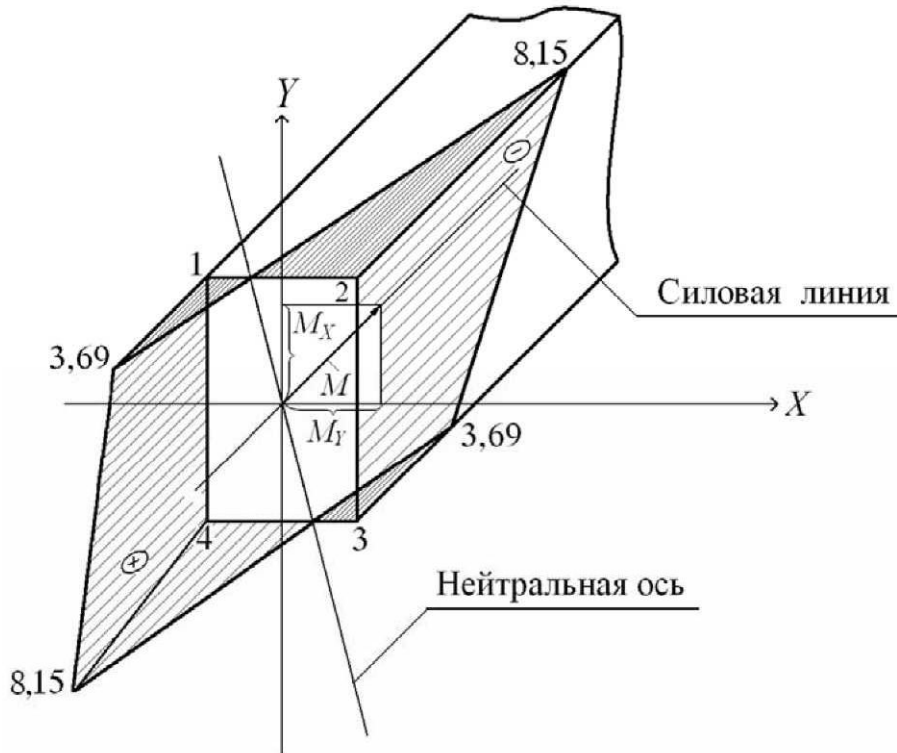


Рисунок 9.4

б) Определяем полные линейные перемещения в сечениях  $A$  и  $B$  (т.е. прогибы  $f_A$  и  $f_B$ ):

$$f_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}; \quad f_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2},$$

где  $x_A, y_A$  и  $x_B, y_B$  – составляющие прогиба в поперечных сечениях  $A$  и  $B$  в направлениях осей координат  $X$  и  $Y$  соответственно.

Для нахождения составляющих прогибов используем метод начальных параметров.

В данной задаче необходимо составить два уравнения прогибов в плоскостях  $XCZ$  и  $YCZ$  для нахождения составляющих прогибов  $f_A$  и  $f_B$ .

Так как балка в плоскостях  $XCZ$  и  $YCZ$  нагружена по-разному, начальные параметры  $EJ_x \theta_0$  и  $EJ_y \theta_0$  в каждой плоскости имеют свое значение: в плоскости  $XCZ$  поперечное сечение в начале координат поворачивается относительно оси  $Y$  на угол  $\theta_{0y}$ , в плоскости  $YCZ$  – относительно оси  $X$  на угол  $\theta_{0x}$ . Предварительно вычислим осевые моменты инерции площади поперечного сечения  $J_x$  и  $J_y$ :

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{15 \cdot 30^3}{12} = 33\,750 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{30 \cdot 15^3}{12} = 8438 \text{ см}^4.$$

Уравнение прогибов для схемы балки на рисунке 9.2,б имеет вид

$$EJ_x y = EJ_x \theta_{0x} z + C_y \frac{z^3}{6} - \frac{P(z-0,5l)^3}{6} \Big|_{z > 0,5l}.$$

Определяем  $EJ_x \theta_{0x}$  из условия на опоре  $D$ :

при  $z = l$  прогиб  $y_D = 0$ .

Тогда

$$0 = EJ_x \theta_{0x} l + 0,5 P \frac{l^3}{6} - \frac{P(l-0,5l)^3}{6}; \quad EJ_x \theta_{0x} = -\frac{Pl^2}{16}.$$

Подставив это выражение в уравнение прогибов, определим перемещение центров тяжести сечений:

$y_B$  при  $z = l/3$

$$EJ_x y_B = -\frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{1}{3} l + \frac{0,5P}{6} \left(\frac{1}{3}l\right)^3 = \frac{23 \cdot Pl^3}{12 \cdot 108} \cong \frac{Pl^3}{56},$$

$$y_B = -\frac{Pl^3}{56 \cdot EJ_x} = -\frac{10 \cdot 3^3 \cdot 10^{12}}{56 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 33\,750 \cdot 10^4} = -1,43 \text{ мм};$$

$y_A$  при  $z = l/2$

$$EJ_x y_A = -\frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{1}{2} l + \frac{0,5P}{6} \left(\frac{1}{2}l\right)^3 = -\frac{Pl^3}{48},$$

$$y_A = -\frac{Pl^3}{48 EJ_x} = \frac{10 \cdot 3^3 \cdot 10^{12}}{48 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 33\,750 \cdot 10^4} = -1,67 \text{ мм}.$$

Уравнение прогибов для схемы балки на рис. 9.2,г имеет вид

$$0 = EJ_y \theta_{0y} z + C_x \frac{z^3}{6} - \frac{P(z-l/3)^3}{6} \Big|_{z > l/3}.$$

Определяем  $\theta_{0y}$  из граничного условия на опоре  $D$ :

при  $z = l$  прогиб  $x_D = 0$ .

Тогда получим

$$0 = EJ_y \theta_{0y} l + \frac{2}{3} P \frac{l^3}{6} - \frac{P(l-l/3)^3}{6}; \quad EJ_y \theta_{0y} = -\frac{5Pl^2}{81}.$$

Подставим это выражение в уравнение прогибов и определим перемещения сечений:

$x_B$  при  $z = l/3$

$$EJ_y x_B = -\frac{5Pl^2}{81} \cdot \frac{1}{3}l + \frac{2P}{3 \cdot 6} \left(\frac{1}{3}l\right)^3 = -\frac{4Pl^3}{243},$$

$$x_B = -\frac{4Pl^3}{243 \cdot EJ_y} = -\frac{4 \cdot 10 \cdot 3^3 \cdot 10^9 \cdot 10^3}{243 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 8438 \cdot 10^4} = -5,27 \text{ мм};$$

$x_A$  при  $z = l/2$

$$EJ_y x_A = -\frac{5Pl^2}{81} \frac{1}{2}l + \frac{2P}{3 \cdot 6} \left(\frac{1}{2}l\right)^3 - \frac{P}{6} \left(\frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l\right)^3 = -\frac{23Pl^3}{1296},$$

$$x_A = -\frac{23Pl^3}{1296 EJ_y} = -\frac{23 \cdot 10 \cdot 3^3 \cdot 10^9 \cdot 10^3}{1296 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 8438 \cdot 10^4} = -5,65 \text{ мм}.$$

Полный прогиб в сечении  $A$

$$f_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{(-5,65)^2 + (-1,67)^2} = 5,89 \text{ мм}.$$

Полный прогиб в сечении  $B$

$$f_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \sqrt{(-5,27)^2 + (-1,43)^2} = 5,46 \text{ мм}.$$

Определим направление полного прогиба в рассматриваемых сечениях.

Изображаем поперечное сечение балки и в масштабе откладываем на осях  $X$  и  $Y$  составляющие прогибов  $x_A, y_A$  и  $x_B, y_B$ , а затем их векторно суммируем (рисунки 9.5 и 9.6).

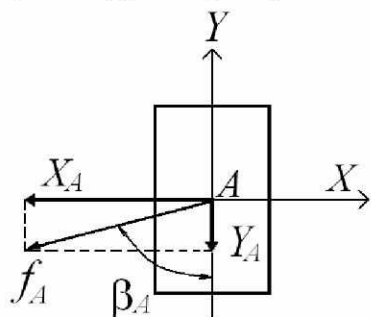


Рисунок 9.5

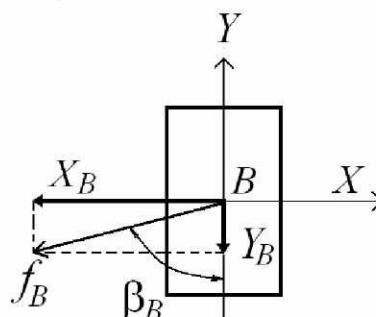


Рисунок 9.6

Направление прогиба определяется соответственно углами  $\beta_A$  и  $\beta_B$ :

$$\operatorname{tg} \beta_A = \frac{x_A}{y_A} = \frac{5,65}{1,67} = 3,407; \quad \beta_A = 73,5^\circ ;$$

$$\operatorname{tg} \beta_B = \frac{x_B}{y_B} = \frac{5,27}{1,43} = 3,685; \quad \beta_B = 74,5^\circ.$$

Углы  $\beta_A$  и  $\beta_B$  имеют разную величину. Это говорит о том, что изогнутая ось балки является пространственной кривой.

### Задача 10

На вал насажены два шкива, через которые перекинута ремни (рисунок 10.1). Ветви ремней параллельны друг другу и наклонены к горизонту под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . От первого шкива ремень идет к электродвигателю; в этом ремне усилие в сбегающей ветви вдвое больше, чем в набегающей. От второго шкива ремень идет к станку; в этом ремне усилие в набегающей ветви вдвое больше, чем в сбегающей. Станок имеет мощность  $N$  (кВт); частоту вращения вала  $n$  (об/мин). Материал вала – сталь 20 с пределом текучести  $\sigma_T = 240$  МПа; нормативный коэффициент запаса прочности  $n = 1,5$ .

Используя четвертую теорию прочности, определить необходимый диаметр вала.

Данные для расчета выбрать из таблицы 10.1, схему – по рисунку 10.1. Принять:  $D = 0,1$  м;  $a = 0,1$  м. Весом шкивов пренебречь.

Таблица 10.1

Номер строки	Схема по рисунку 10.1	$a_i$			$D_i$		$\alpha_1$ , град	$\alpha_2$ , град	$N$ , кВт	$n$ , об/мин
		$a_1$	$a_2$	$a_3$	$D_1$	$D_2$				
1	I	$2a$	$3a$	$a$	$4D$	$6D$	0	30	20	100
2	II	$a$	$2a$	$a$	$3D$	$4D$	90	60	40	200
3	III	$2a$	$a$	$a$	$3D$	$5D$	45	0	30	120
4	IV	$3a$	$a$	$a$	$2D$	$4D$	90	45	20	80
5	V	$a$	$3a$	$a$	$2,4D$	$5D$	0	45	25	160
6	VI	$a$	$a$	$2a$	$3,2D$	$6,4D$	60	0	35	100
7	VII	$a$	$a$	$3a$	$3D$	$4,5D$	30	90	40	120
8	VIII	$2a$	$a$	$2a$	$4D$	$5D$	90	30	25	140
Буква шифра	а	в	г	д	в	г	д	д	г	в

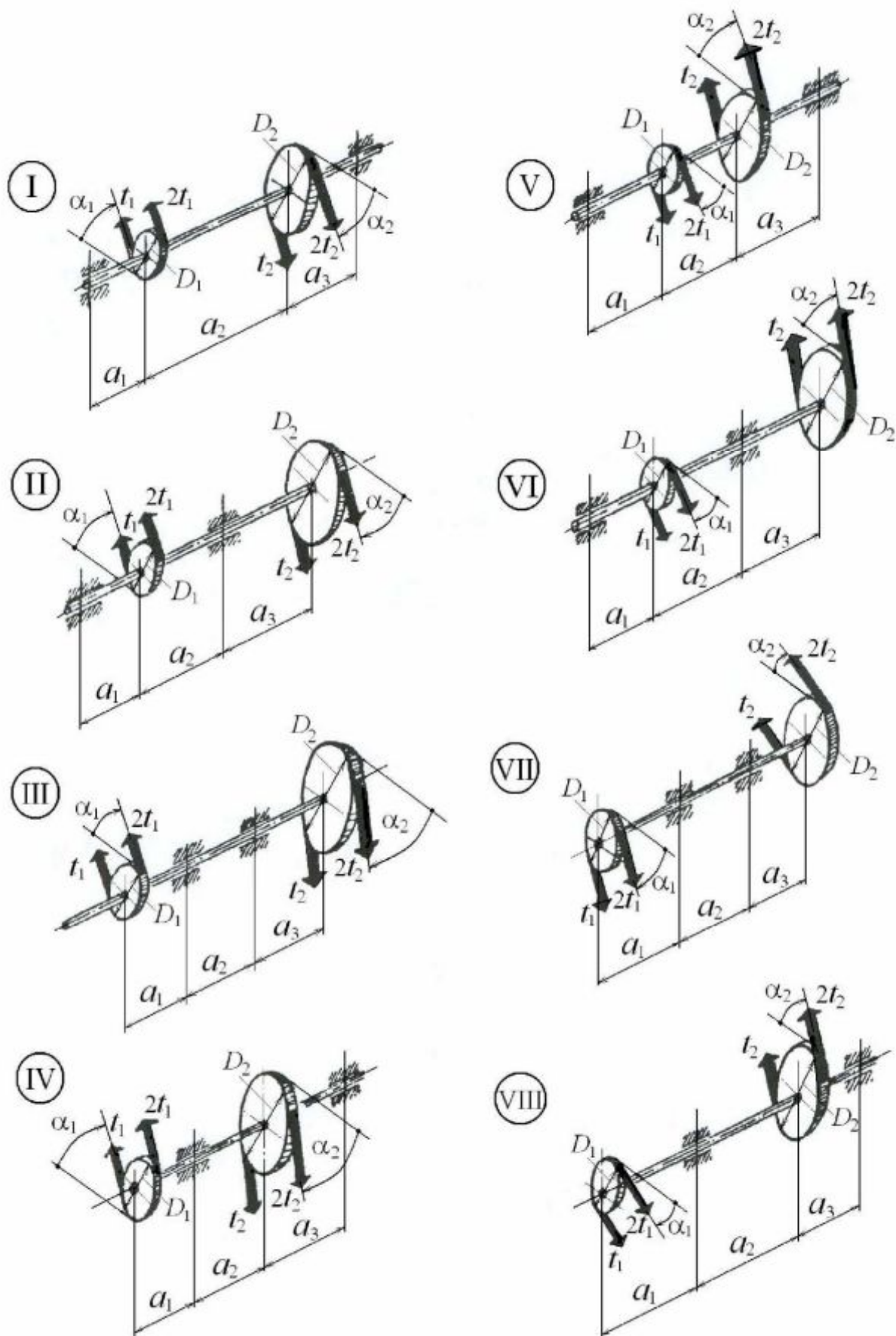


Рисунок 10.1

**Пример.** Выполнить проектировочный расчет трансмиссионного вала (рисунок 10.2,а).

Дано:  $a_1 = a_2 = a = 0,1$  м,  $a_3 = 2a = 0,2$  м;

$D_1 = 2D = 0,2$  м;  $D_2 = 3D = 0,3$  м;

$\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$ ;

$N = 20$  кВт;  $n = 100$  об/мин.

Решение.

В местах посадки шкивов возникают равнодействующие усилия от натяжений ремней и скручивающие пары от разности натяжений сбегающей и набегающей ветвей ремней. Следовательно, вал работает на изгиб и кручение (рисунок 10.2,б).

1) Определяем внешний скручивающий момент:

$$m = 9,736 \frac{N}{n} = 9,736 \frac{20}{100} = 1,947 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2) Строим эпюру крутящих моментов. Из условия равновесия заключаем, что  $m_1 = m_2 = m = 1,947$  кН·м (рисунок 10.2,в). Крутящий момент на участке  $BK$   $M_k = m = 1,947$  кН·м.

3) Определяем усилия натяжения ремней  $t_1$  и  $t_2$ :

$$m_1 = m = \frac{1}{2} t_1 D_1, \text{ отсюда } t_1 = \frac{2m}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,947}{0,2} = 19,47 \text{ кН};$$

$$m_2 = m = \frac{1}{2} t_2 D_2, \text{ отсюда } t_2 = \frac{2m}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,947}{0,3} = 12,98 \text{ кН}.$$

4) Определяем равнодействующие усилия натяжения ремней, действующих на вал в местах посадки шкивов:

$$P_1 = 3t_1 = 3 \cdot 19,47 = 58,41 \text{ кН}; \quad P_2 = 3t_2 = 3 \cdot 12,98 = 38,94 \text{ кН}.$$

По условиям задачи усилие  $P_1$  направлено горизонтально ( $\alpha_1 = 0$ ), а  $P_2$  – под углом  $\alpha_2 = 30^\circ$ .

Для удобства построения эпюр изгибающих моментов разложим силу  $P_2$  на вертикальную  $P_{2y}$  и горизонтальную  $P_{2x}$  составляющие:

$$P_{2y} = P_2 \sin 30^\circ = 38,94 \cdot 0,5 = 19,47 \text{ кН}.$$

$$P_{2x} = P_2 \cos 30^\circ = 38,94 \cdot 0,8667 = 33,75 \text{ кН}.$$

Составим расчетные схемы в горизонтальной плоскости (рисунок 10.2,з) и в вертикальной (рисунок 10.2,д).



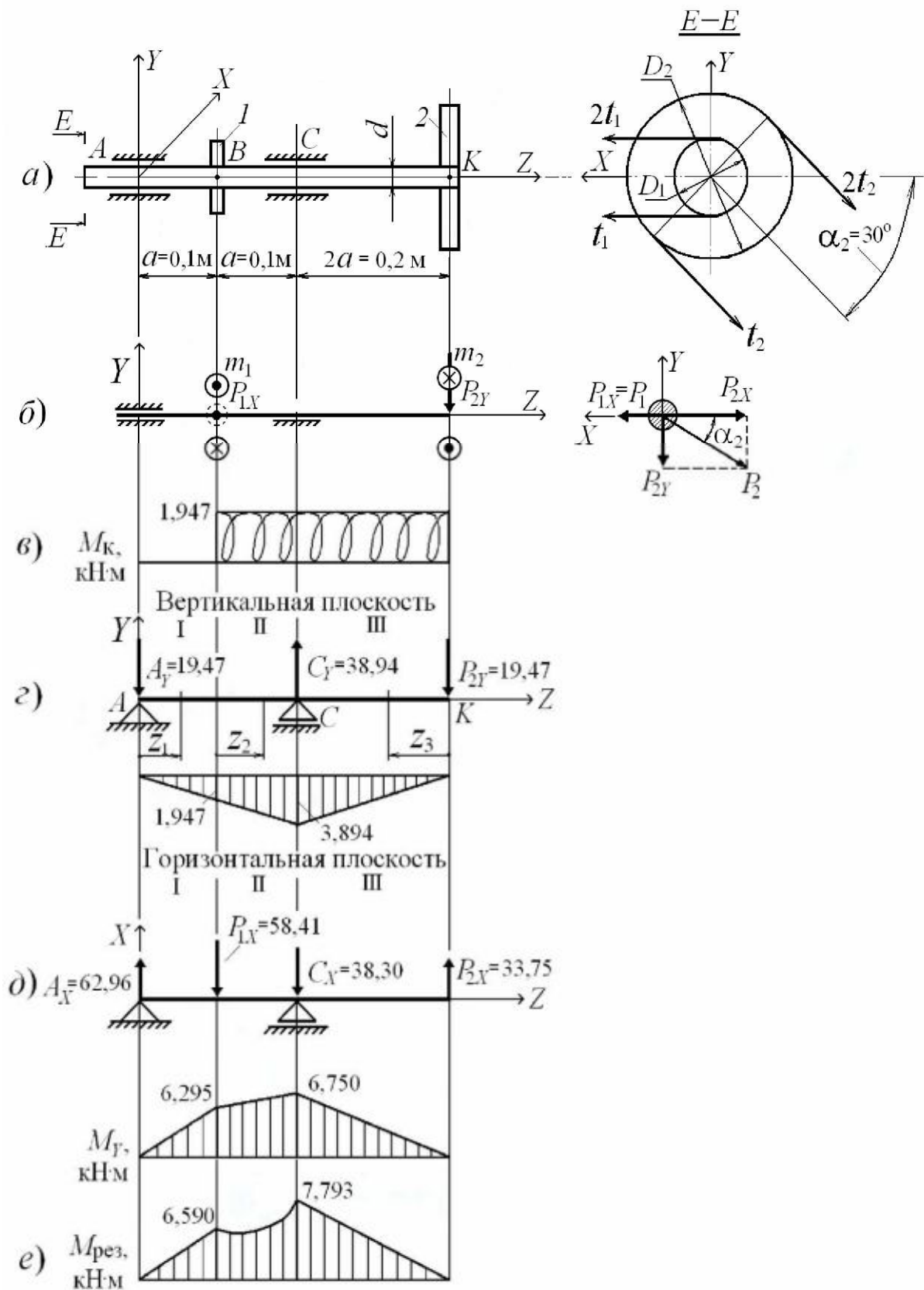


Рисунок 10.2

5) Строим эпюру изгибающих моментов  $M_x$  в вертикальной плоскости  $YAZ$  (см. рисунок 10.2,з).

Опорные реакции:

$$\Sigma \text{ мом } A = 0; C_Y 2a - P_{2y} \cdot 4a = 0,$$

$$C_Y = 2 P_{2y} = 2 \cdot 19,47 = 38,94 \text{ кН};$$

$$\Sigma \text{ мом } C = 0; A_Y 2a - P_{2y} \cdot 2a = 0,$$

$$A_Y = P_{2y} = 19,47 \text{ кН}.$$

Уравнения изгибающих моментов:

$$M_{x_I} = -A_Y z_I = -19,47 z_I; \quad 0 \leq z_I \leq 0,1 \text{ м},$$

$$\text{при } z_I = 0 \quad M_{x_I} = 0;$$

$$\text{при } z_I = 0,1 \text{ м} \quad M_{x_I} = -1,947 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$M_{x_{II}} = -A_Y(0,1 + z_{II}) = -19,47(0,1 + z_{II}); \quad 0 \leq z_{II} \leq 0,1 \text{ м},$$

$$\text{при } z_{II} = 0 \quad M_{x_{II}} = -1,947 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } z_{II} = 0,1 \text{ м} \quad M_{x_{II}} = -3,894 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$M_{x_{III}} = -P_2 z_{III} = -19,47 z_{III}; \quad 0 \leq z_{III} \leq 0,2 \text{ м},$$

$$\text{при } z_{III} = 0 \quad M_{x_{III}} = 0;$$

$$\text{при } z_{III} = 0,2 \text{ м} \quad M_{x_{III}} = -3,894 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

6) Строим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  в горизонтальной плоскости  $XAZ$  (рисунок 10.2,д):

$$\Sigma \text{ мом } A = 0; P_{1x} a - C_x 2a + P_{2x} 4a = 0,$$

$$C_x = 0,5(4 P_{2x} - P_1),$$

$$C_x = 0,5(4 \cdot 33,75 - 58,41) = 38,30 \text{ кН};$$

$$\Sigma \text{ мом } C = 0; A_x 2a + P_{1x} a + P_{2x} 2a = 0,$$

$$A_x = 0,5(P_{1x} + 2 \cdot P_{2x});$$

$$A_x = 0,5(58,41 + 33,75 \cdot 2) = 62,96 \text{ кН}.$$

Методика построения эпюры  $M_y$  аналогична приведенной в п. 5.

7) Строим эпюру результирующего изгибающего момента  $M_{рез}$  (рисунок 10.2,е), складывая геометрически эпюры  $M_x$  и  $M_y$ :

$$M_{рез} = \sqrt{M_y^2 + M_x^2}.$$

В характерных точках  $B$  и  $C$  они равны соответственно

$$M_{рез(B)} = \sqrt{1,947^2 + 6,296^2} = 6,590 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{рез(C)} = \sqrt{3,894^2 + 6,75^2} = 7,793 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Следовательно, опасным сечением будет сечение  $C$ , для которого

$$M_{рез(C)} = 7,793 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ и } M_{к(C)} = 1,947 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

8) Определяем по четвертой теории прочности эквивалентный момент  $M_{эIV}$  в опасном сечении  $C$ :

$$M_{эIV} = \sqrt{M_{рез(C)}^2 + 0,75 \cdot M_{к(C)}^2},$$

$$M_{эIV} = \sqrt{7,793^2 + 0,75 \cdot 1,947^2} = 7,973 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

9) Определяем необходимый диаметр  $d$  вала. Допускаемое напряжение  $[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n_m} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}$ .

$$\text{Условие прочности } \max \sigma = \frac{M_{эIV}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ где } W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

$$\text{Тогда } d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{эIV}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7,973 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 160}} = 79,4 \text{ мм}.$$

Принимаем  $d = 80 \text{ мм}$ .

**Задача 11** (общий случай сложного сопротивления).

Стальной коленчатый стержень постоянного круглого поперечного сечения нагружен внешними силами  $P_i$  и парами  $m$ .

Выполнить проектировочный расчет, если дано:

длины участков стержня  $a_i$ ; пределы текучести на растяжение и сжатие  $\sigma_{тр} = \sigma_{сж} = 420 \text{ МПа}$ ; коэффициент запаса прочности  $n_T = 1,5$ . Использовать третью теорию прочности.

Расчетную схему выбрать по рисунку 11.1, данные для расчета – по таблице 11.1.

Принять  $P = 0,1 \text{ кН}$ ;  $a = 0,4 \text{ м}$ .

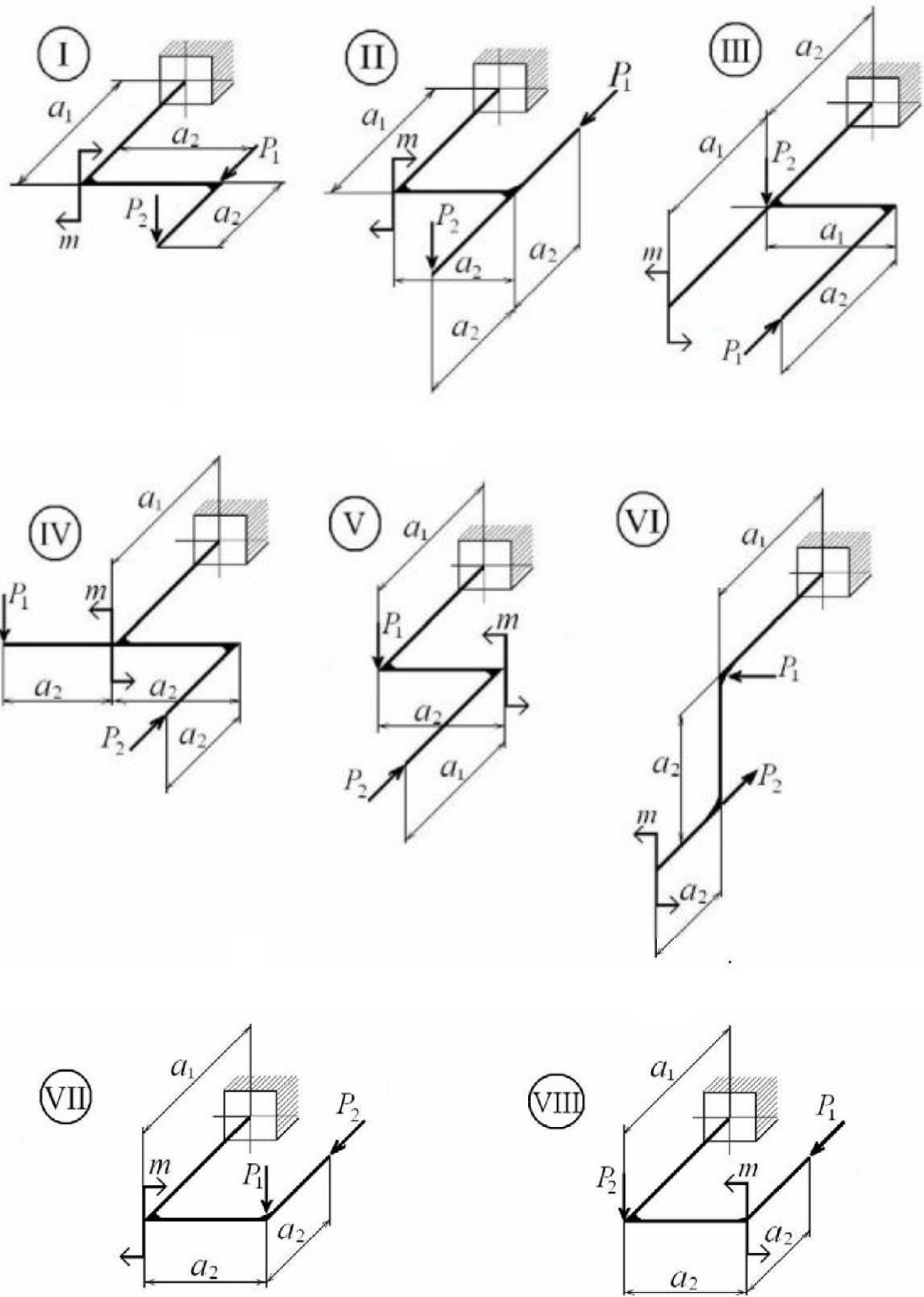


Рисунок 11.1

Таблица 11.1

Номер строки	Схема по рисунку 11.1	Нагрузки			$a_i$	
		$m$	$P_1$	$P_2$	$a_1$	$a_2$
1	I	$Pa$	$P$	$2P$	$a$	$2a$
2	II	$2Pa$	$2P$	$P$	$a$	$a$
3	III	$1,5Pa$	$1,5P$	$P$	$2a$	$a$
4	IV	$Pa$	$P$	$2P$	$a$	$2a$
5	V	$Pa$	$P$	$P$	$2a$	$a$
6	VI	$2Pa$	$2P$	$2P$	$a$	$a$
7	VII	$Pa$	$3P$	$P$	$a$	$a$
8	VIII	$Pa$	$P$	$1,5P$	$2a$	$2a$
Буква шифра	а	в	д	г	в	б

**Пример.** Произвести проектировочный расчет коленчатого стержня постоянного круглого сечения (рисунок 11.2,а), если дано:

$$P_1 = P; P_2 = 2P; m = Pa; a_1 = 2a; a_2 = a.$$

Принять:  $P = 0,1$  кН;  $a = 0,4$  м;  $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 420$  МПа; коэффициент запаса прочности  $n_r = 1,5$ .

Участки стержня соединены жестко под прямыми углами. Ось  $Z$  совмещается с центральной продольной осью участка и направлена в сторону свободного конца стержня. Оси  $Y$  и  $X$  лежат в плоскости поперечного сечения (ось  $X$  направлена вправо, ось  $Y$  направлена вверх). При переходе к последующему участку производят поворот системы координат, принятой на предыдущем участке, относительно оси, которая перпендикулярна к плоскости, образуемой этими смежными участками. Поворот осуществляется так, чтобы ось  $Z$  совпала с продольной осью участка стержня.

Решение начинается с выбора направления опорных реакций и определения внутренних усилий: нормальной силы  $N$ , крутящего момента  $M_k = M_z$ , изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ .

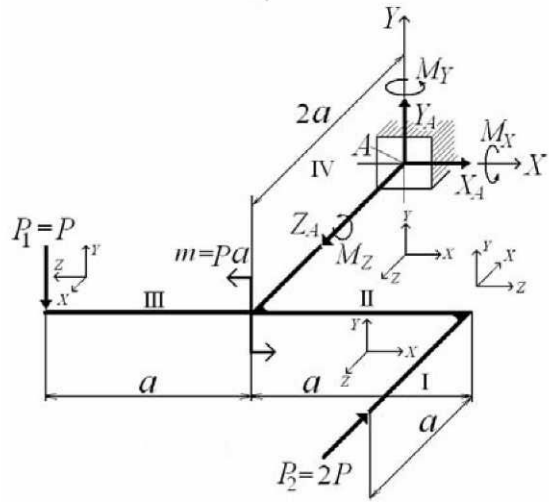
Решение.

1) Строим эпюру нормальных сил  $N$  (рисунок 11.2,б):

$$N_I = -P_2 = -2P; N_{II} = 0; N_{III} = 0; N_{IV} = -P_2 = -2P.$$

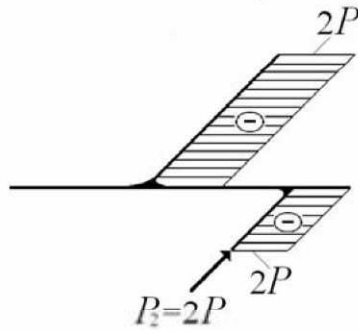
2) Строим эпюру крутящих моментов  $M_k = M_z$  (рисунок 11.2,в):

$$M_{кI} = 0; M_{кII} = 0; M_{кIII} = 0; M_{кIV} = m + P_1 a = Pa + Pa = 2Pa.$$



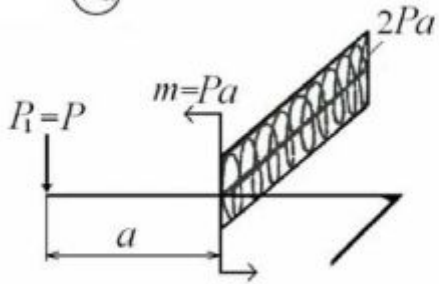
a)

(N)



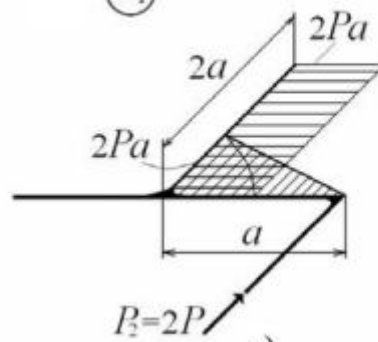
б)

(M<sub>K</sub>)



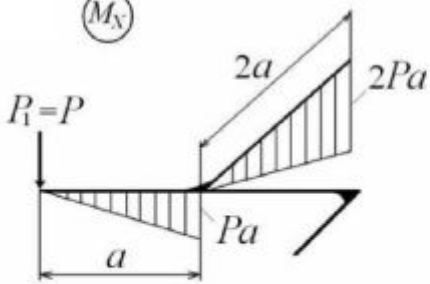
в)

(M<sub>Y</sub>)



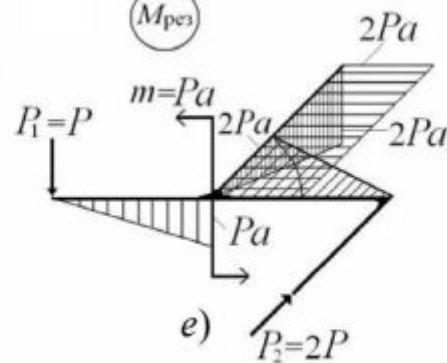
з)

(M<sub>X</sub>)



д)

(M<sub>прз</sub>)



е)

Рисунок 11.2

3) Строим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  (создается в данном случае силой  $P_2$ , изгиб происходит в горизонтальной плоскости). Эпюру строим на сжатом волокне (рисунок 11.2,з):

$$M_{y_I} = 0; M_{y_{II}} = P_2 z_{II} = 2Pz_{II}, 0 \leq z_{II} \leq a;$$

$$M_{y_{III}} = 0; M_{y_{IV}} = P_2 a = 2Pa.$$

4) Строим эпюру изгибающих моментов  $M_x$  (создается силой  $P$ , изгиб происходит в вертикальной плоскости) (рисунок 11.2,д):

$$M_{x_I} = 0; M_{x_{II}} = 0; M_{x_{III}} = P_1 z_I = Pz_I, 0 \leq z_I \leq a;$$

$$z_I = 0; M_{x_{III}} = 0; z_I = a; M_{x_{III}} = Pa;$$

$$M_{x_{IV}} = P_1 z_{IV}, 0 \leq z_{IV} \leq 2a; z_{IV} = 0; M_{x_{IV}} = 0; z_{IV} = 2a; M_{x_{IV}} = 2Pa.$$

5) Строим эпюру результирующего изгибающего момента (рисунок 11.2,е), для чего подсчитываем его величину в характерных сечениях участков I, II, III и IV (см. рисунок 11.2,а) по формуле

$$M_{резI-I} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Значения  $M_x$  и  $M_y$  берем с эпюр рисунка 11.2,з,д:

$$M_{рез1-1} = 0;$$

$$M_{рез2-2} = \sqrt{(2Pa)^2} = 2Pa;$$

$$M_{рез3-3} = \sqrt{(Pa)^2} = Pa;$$

$$M_{рез4-4} = \sqrt{(2Pa)^2 + (2Pa)^2} = 2\sqrt{2}Pa = 2,83Pa.$$

6) Определяем опасное сечение, где крутящий момент  $M_k$ , суммарный изгибающий момент  $M_{рез}$  и нормальная сила  $N$  одновременно велики.

Анализ эпюр по рисунку 11.2,б,в,е показывает, что опасным является сечение в заделке, где

$$N = -2P, M_k = -2Pa, M_{рез} = 2\sqrt{2}Pa = 2,83Pa.$$

7) Сравниваем величины нормальных напряжений  $\sigma^N$  от нормальной силы  $N$  и от изгиба  $\sigma^M$ :

$$\sigma^N = -\frac{N}{F} = -\frac{2P \cdot 4}{\pi d^2} = -\frac{8P}{\pi d^2},$$

$$\sigma_{\max}^M = \pm \frac{M_{рез}}{W_x},$$

где  $W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1d^3$  – осевой момент сопротивления площади поперечного сечения стержня.

$$\text{Тогда } \sigma_{\max}^M = \pm \frac{2,83Pa \cdot 32}{\pi d^3} = \pm \frac{90,5Pa}{\pi d^3},$$

$$\frac{\sigma_{\max}^M}{\sigma^N} = \pm \frac{90,5Pa \cdot \pi d^2}{\pi d^3 \cdot 8P} = 11,28 \frac{a}{d}.$$

Так как  $a \gg d$ , в данном случае влиянием нормальной силы  $N$  на прочность можно пренебречь и вести расчет для случая изгиба с кручением.

8) Определяем диаметр стержня по третьей теории прочности (теории наибольших касательных напряжений):

$$\max \sigma_{\text{эIII}} \frac{M_{\text{эIII}}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Здесь  $M_{\text{эIII}}$  – эквивалентный момент в опасном сечении, который по третьей теории прочности равен

$$M_{\text{эIII}} = \sqrt{M_{\text{рсз}}^2 + M_{\text{к}}^2} = \sqrt{(2,83Pa)^2 + (2Pa)^2} = 3,46Pa;$$

$[\sigma]$  – допускаемое напряжение, равное

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n_{\text{т}}} = \frac{420}{1,5} = 280 \text{ МПа.}$$

Тогда

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{э}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3,46Pa}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3,46 \cdot 0,1 \cdot 0,4 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 280}} = 17 \text{ мм.}$$

Округляем диаметр до ближайшего значения из рядов нормальных линейных размеров и принимаем  $d = 18$  мм.

Если положение опасного сечения неочевидно, вычисляют  $M_{\text{э}}$  в характерных сечениях. Опасным считается сечение, в котором  $M_{\text{э}}$  принимает наибольшее значение.



## V Устойчивость сжатых стержней

### Задача 12

Определить допускаемое значение силы  $[P_y]$  из расчета на устойчивость стержня.

Коэффициенты запаса устойчивости:

для стали  $n_y = 2,5$  и для чугуна  $n_y = 4$ .

Опорные закрепления в обеих главных плоскостях одинаковы.

Основные параметры даны в таблице 12.1, расчетные схемы и поперечные сечения стержней приведены на рисунке 12.1.

Таблица 12.1

Номер строки	Схема по рисунку 12.1	$l$ , м	$a_1$ , мм	$a_2$ , мм	$a_3$ , мм	Материал	$E \cdot 10^{-5}$ , МПа	$\sigma_{\text{тп}}$ , МПа	Константы Ясинского		
									$a$ , МПа	$b$ , МПа	$c$ , МПа
1	I	1,8	15	35	70	Сталь	2,2	200	310	1,14	0
2	II	1,9	20	45	60		2,1	210	320	1,20	0
3	III	2,2	20	50	70		1,9	230	340	1,30	0
4	IV	2,5	30	60	85		2,1	190	300	1,05	0
5	V	2,7	30	50	80		2,0	250	350	1,30	0
6	VI	3,0	25	55	90	Чугун	1,0	200	780	12,0	0,050
7	VII	1,7	15	50	85		1,1	200	770	12,5	0,051
8	VIII	2,8	25	65	75		1,0	190	700	12,0	0,050
9	IX	2,4	20	45	75		0,9	180	700	11,5	0,050
0	X	2,1	15	40	60		1,0	180	700	11,6	0,051
Буква шифра	а	г	д			в					

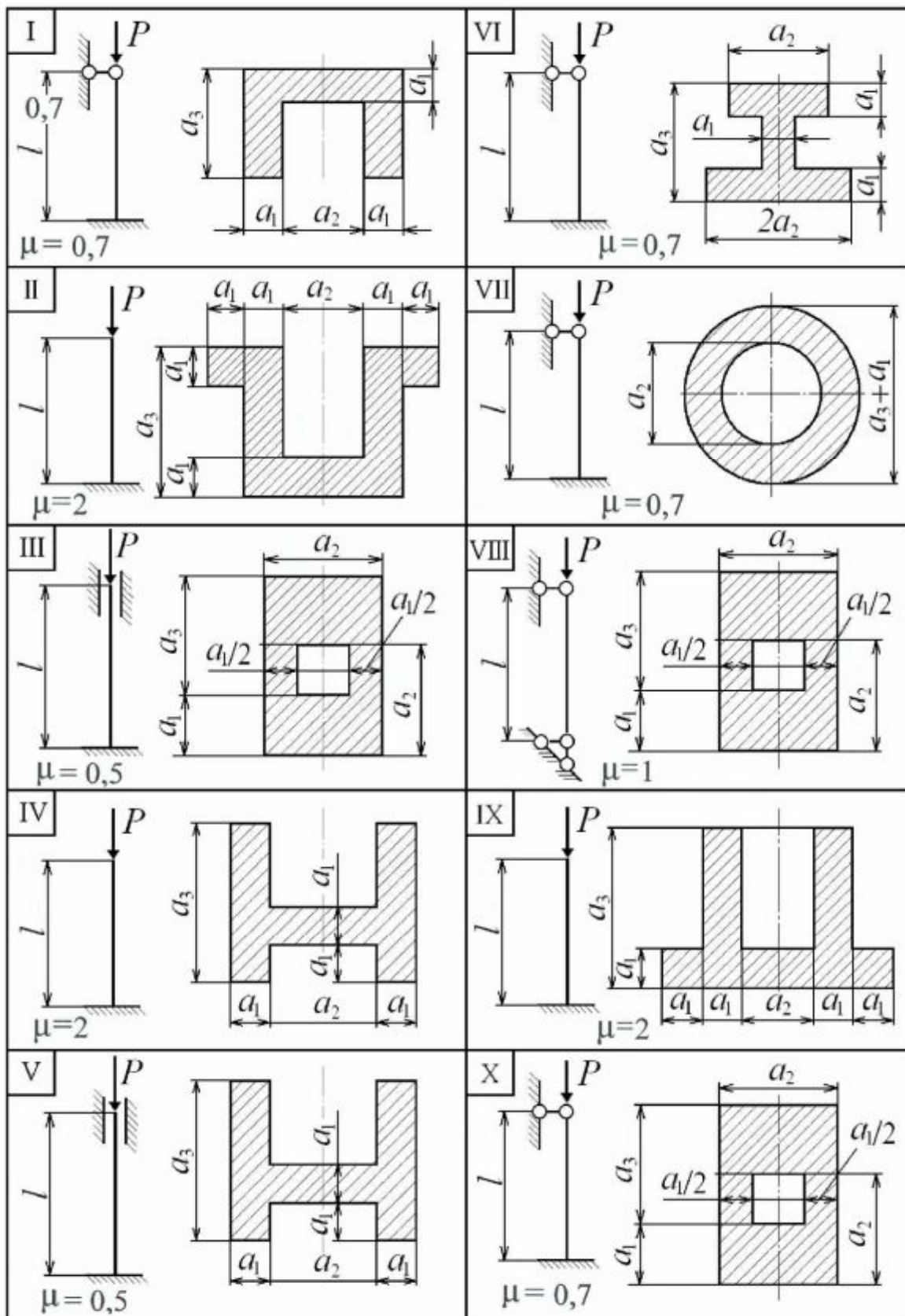


Рисунок 12.1

Примечание. **Формула Ясинского**  $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$  применяется, если гибкость стержня  $\lambda$  удовлетворяет условиям:

– для стали:  $40 \leq \lambda < \lambda_{пред}$ ;

– для чугуна:  $20 \leq \lambda < \lambda_{пред}$ ,

где  $\lambda_{пред}$  – предельная гибкость.

При  $\lambda > \lambda_{пред}$  применяется формула Эйлера.

**Пример.** В соответствии с условиями задачи 12 определить допустимое значение силы  $[P_y]$  из расчета на устойчивость стального стержня, показанного на рисунке 12.2, если известно:

$l = 1,2$  м;  $a_1 = 20$  мм,  $a_2 = 40$  мм,  $a_3 = 65$  мм,

$E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_{шт} = 200$  МПа;

константы Ясинского  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа,  $c = 0$ .

Решение.

1) Определяем положение центра тяжести поперечного сечения.

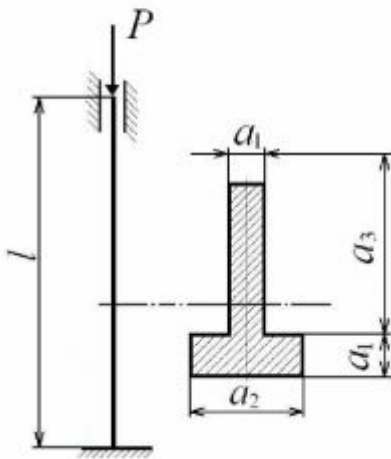


Рисунок 12.2

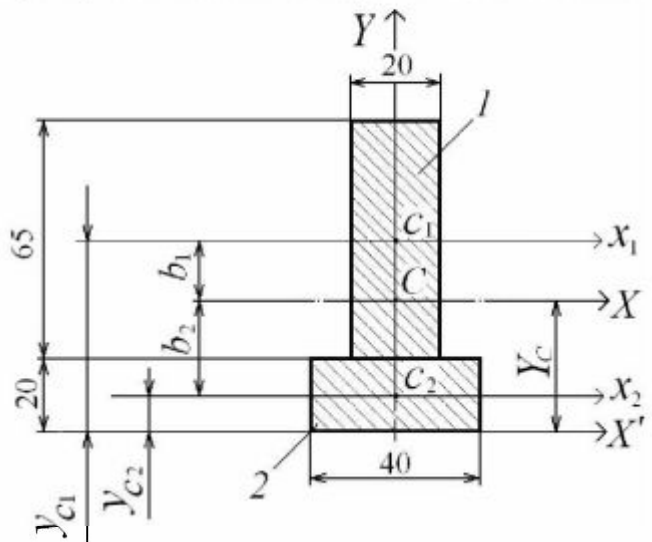


Рисунок 12.3

Для этого выбираем вспомогательную систему координат  $YX'$  (рисунок 12.3), где ось  $Y$ , будучи осью симметрии, является главной центральной осью.

Для определения вертикальной координаты центра тяжести разбиваем сечение на два прямоугольника (1 и 2) и определяем  $Y_C$  по формуле

$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i Y_{c_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{1300 \cdot 52,5 + 800 \cdot 10}{1300 + 800} = 36,3 \text{ мм,}$$

где  $F_i$ ,  $Y_{c_i}$  – площадь и координата центра тяжести  $i$ -й части сечения в принятой системе координат;  $n$  – число элементарных частей, на которые разбивается сечение (в данном случае  $n = 2$ ).

При этом  $F_1 = 1300 \text{ мм}^2$ ;  $F_2 = 800 \text{ мм}^2$ ;  $Y_{c_1} = 52,5 \text{ мм}$  ;  
 $Y_{c_2} = 10 \text{ мм}$ .

Вторая главная центральная ось проходит через центр тяжести  $S$  всего сечения (см. рисунок 12.3).

2) Определяем моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$J_X = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + b_i^2 F_i),$$

где  $J_{x_i}$  – момент инерции  $i$ -й части относительно своей центральной оси;  $b_i$  – расстояние между центральной осью  $i$ -й части и главной центральной осью всего сечения.

Применительно к рассматриваемому сечению (см. рисунок 12.3) получим

$$J_X = (J_{x_1} + b_1^2 F_1) + (J_{x_2} + b_2^2 F_2),$$

где  $J_{x_i} = \frac{b_i h_i^3}{12}$  ;  $J_{x_1} = \frac{20 \cdot 65^3}{12}$  ;  $J_{x_2} = \frac{40 \cdot 20^3}{12}$  .

$$J_X = \left( \frac{20 \cdot 65^3}{12} + 16,2^2 \cdot 1300 \right) + \left( \frac{40 \cdot 20^3}{12} + 26,3^2 \cdot 800 \right) = 138 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Так как ось  $Y$  является главной центральной для всего сечения и для каждой его части, второй осевой момент инерции вычисляется как

$$J_Y = \sum_{i=1}^n J_{y_i} = J_{y_1} + J_{y_2} = \frac{65 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

где  $J_{y_i} = \frac{h_i b_i^3}{12}$  ;  $J_{y_1} = \frac{65 \cdot 20^3}{12}$  ;  $J_{y_2} = \frac{20 \cdot 40^3}{12}$  .

Так как  $J_X > J_Y$ , а условия закрепления концов одинаковы во всех плоскостях, потеря устойчивости происходит в плоскости минимальной жесткости, т.е. в плоскости чертежа (см. рисунок 12.2) относительно оси  $Y$ , имеем  $J_{\min} = J_Y = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$ .

3) Определяем гибкость стержня по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (12.1)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведенной длины, величина которого зависит от характера закрепления концов стержня, в рассматриваемом случае  $\mu = 0,5$ ;

$i_{\min}$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения, вычисляемый по формуле

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}.$$

Здесь  $i_{\min} = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^4}{2100}} = 8,45$ ;  $F$  – площадь сечения,  $F = 800 + 1300 = 2100 \text{ мм}^2$ .

Следовательно, в соответствии с (12.1) гибкость равна

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1200}{8,45} = 71,0.$$

4) Предельная гибкость для стального стержня равна

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

5) Определяем величину критической силы.

Так как  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , формула Эйлера неприменима. Расчет критических напряжений производим по формуле Ясинского:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (12.2)$$

где  $a, b, c$  – коэффициенты, величины которых зависят от марки материала стержня (для стали  $a = 310 \text{ МПа}$ ,  $b = 1,14 \text{ МПа}$ ,  $c = 0$ ),

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 310 - 1,14 \cdot 71 = 229 \text{ МПа}.$$

Критическая сила равна

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot F = 229 \cdot 2100 = 481 \cdot 10^3 \text{ Н} = 481 \text{ кН}.$$

6) Допускаемое значение сжимающей силы из расчета на устойчивость равно

$$[P_y] = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{481}{2,5} = 192 \text{ кН}.$$

## VI Динамическое действие нагрузок

### Задача 13

На упругую систему (рисунок 13.1) с высоты  $H$  падает груз  $Q$ . Подобрать размеры поперечного сечения конструкции, изготовленной из малоуглеродистой стали, если:

$$\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = 320 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

коэффициент запаса прочности  $n = 2$ ; массу упругой системы не учитывать.

Данные, необходимые для решения задачи, выбрать из таблицы 13.1.

Для прямоугольных поперечных сечений балок принять  $\frac{h}{b} = 2$ .

Таблица 13.1

Номер строки	Схема по рисунку 13.1	$Q$ , Н	$H$ , м	$a$ , м
1	I	200	0,5	1,0
2	II	400	0,4	1,2
3	III	600	0,2	1,5
4	IV	800	0,4	1,0
5	V	1000	0,1	0,8
6	VI	500	0,3	1,2
7	VII	750	0,3	0,8
8	VIII	800	0,2	1,5
9	IX	900	0,2	1,0
10	X	100	0,5	1,0
Буква шифра	а	г	д	г

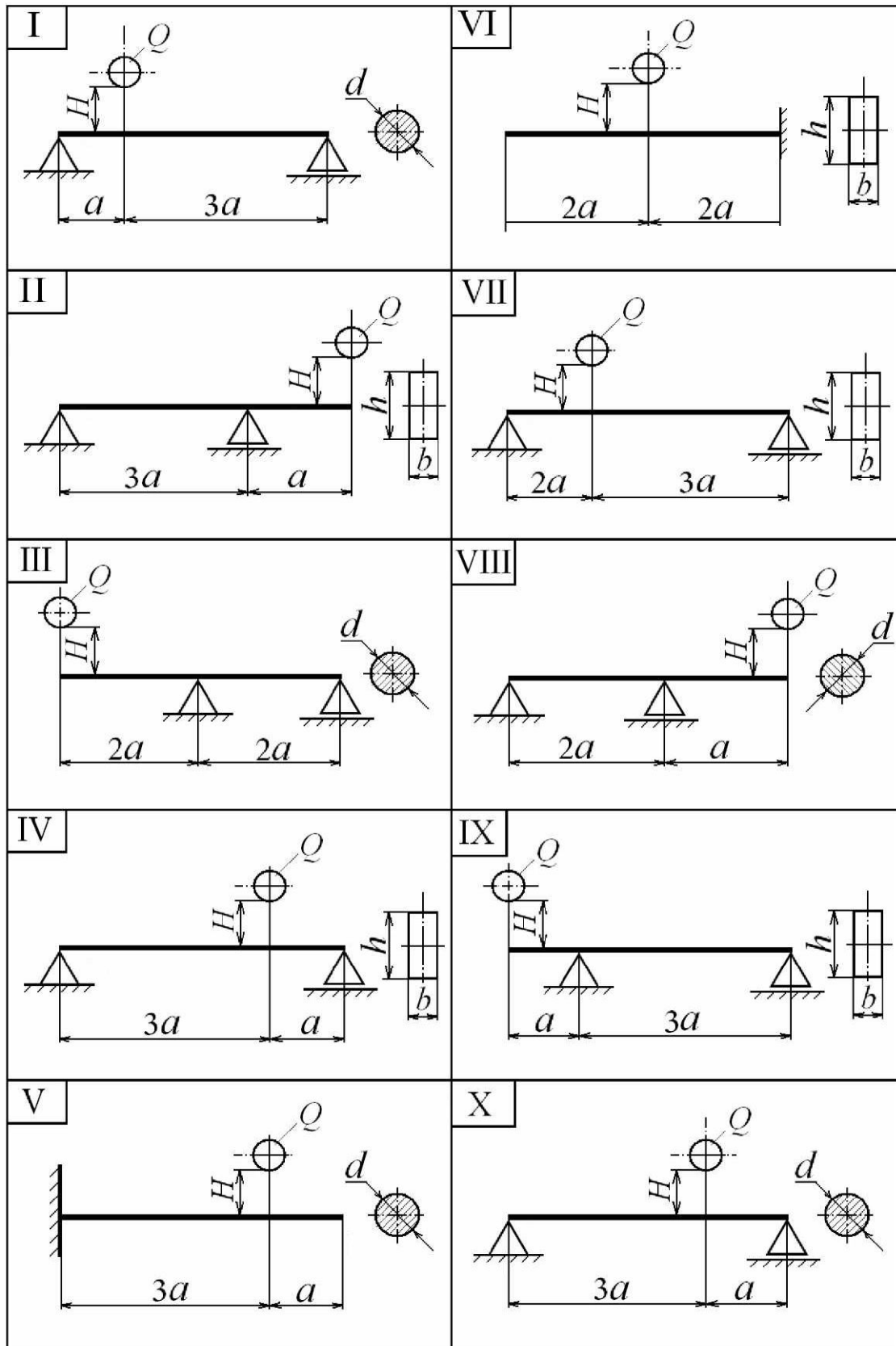


Рисунок 13.1

**Пример.** В соответствии с условиями задачи 13 подобрать размеры круглого поперечного сечения балки, показанного на рисунке 13.2,а, при  $Q = 200 \text{ Н}$ ,  $a = 2 \text{ м}$ ,  $H = 0,2 \text{ м}$ .

Решение.

1) Приложим к системе статическую силу, равную весу падающего груза  $Q$  (рисунок 13.2,б), и строим эпюру изгибающего момента  $M_x$  (рисунок 13.2,в).

2) По направлению движения падающего груза прикладываем к системе единичную силу (рисунок 13.2,г) и строим эпюру изгибающего момента  $M_1$  от действия единичной силы (рисунок 13.2,д).

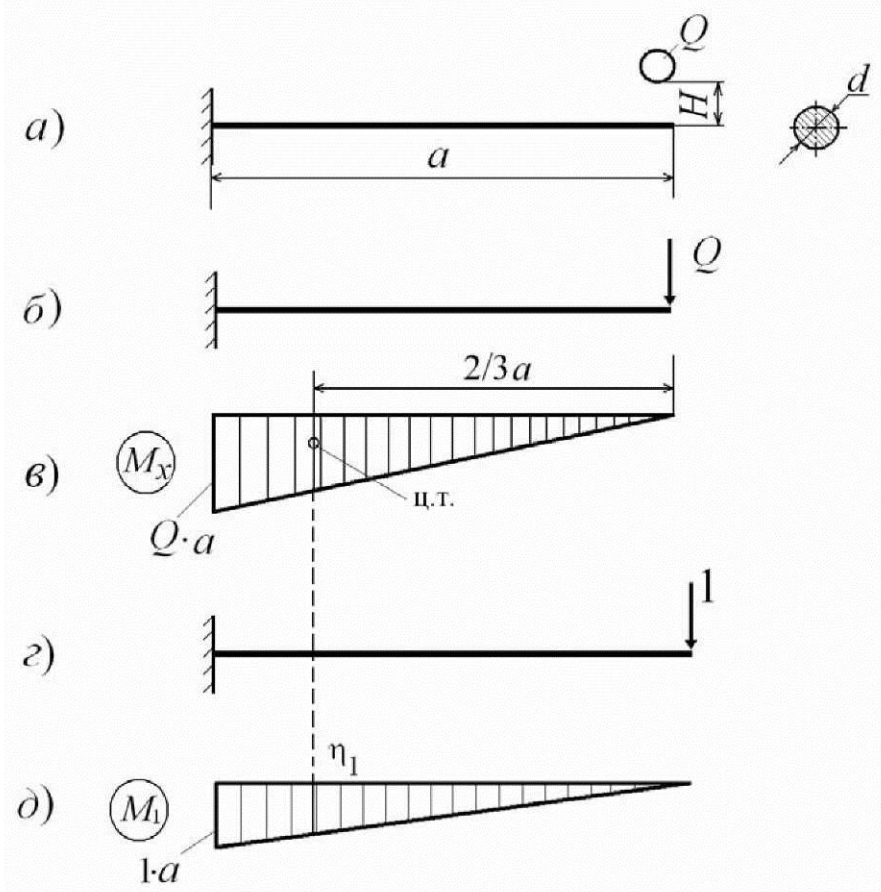


Рисунок 13.2

3) По правилу Верещагина определяем перемещение  $\Delta_{ст}$  по направлению движения падающего груза при его статическом приложении:

$$\Delta_{ст} = \frac{\Omega \eta_1}{E J_x} = \frac{1}{E J_x} \left( \frac{1}{2} Q a a \frac{2}{3} a \right) = \frac{Q a^3}{3 E J_x}. \quad (13.1)$$

Подставляя в (13.1) момент инерции поперечного сечения  $J_x = \frac{\pi d^4}{64}$ , получим  $\Delta_{ст} = \frac{64 Q a^3}{3 \pi E d^4}$ .



4) Определяем коэффициент динамичности по приближенной формуле

$$k_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{ст}}}. \quad (13.2)$$

Подставив значение (13.1) в (13.2), получим

$$k_d = \frac{d^2}{4a} \sqrt{\frac{3\pi E H}{2Qa}}.$$

5) Обращаясь к эпюре  $M_x$  (рисунок 13.2,в), находим опасное сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшего значения  $\max M_x = Qa$ , и определяем максимальную величину статических напряжений:

$$\max \sigma_{ст} = \frac{\max M_x}{W_x} = \frac{Qa}{0,1 \cdot d^3}.$$

6) Определяем величину динамических напряжений в опасном сечении:

$$\max \sigma_{дин} = k_d (\max \sigma_{ст}) = \frac{d^2}{4a} \sqrt{\frac{3\pi E H}{2Qa}} \cdot \frac{Qa}{0,1d^3} = \frac{1}{0,4d} \sqrt{\frac{3\pi Q E H}{2a}}. \quad (13.3)$$

7) Запишем условие прочности, которое с учетом (13.3) принимает вид

$$\max \sigma_{дин} = \frac{1}{0,4d} \sqrt{\frac{3\pi Q E H}{2a}} \leq [\sigma]. \quad (13.4)$$

Находим  $[\sigma]$ :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{320}{2} = 160 \text{ МПа.}$$

Определим требуемый диаметр  $d$ :

$$d \geq \frac{1}{0,4[\sigma]} \sqrt{\frac{3\pi Q E H}{2a}} = \frac{1}{0,4 \cdot 160} \sqrt{\frac{3\pi \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 2 \cdot 10^3}} = 67,8 \text{ мм.}$$

Округляя полученное значение  $d$  до большего из рядов нормальных линейных размеров, окончательно принимаем  $d = 71$  мм.

## Список рекомендуемой литературы

- 1 Государственный образовательный стандарт (по направлению и специальности обучения).
- 2 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1979. – 540 с.
- 3 Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Высш. шк., 1976. – 608 с.
- 4 Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1974. – 704 с.
- 5 Гонтарь, И. Н. Сопротивление материалов : учеб. пособие для выполнения курсовых работ / И. Н. Гонтарь, Н. И. Волчихина. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. – 264 с.
- 6 Оформление учебно-конструкторской документации : метод. указания для выполнения работ по курсовому и дипломному проектированию / сост.: И. Н. Гонтарь, Н. Е. Денисова, В. А. Шорин, Н. И. Волчихина. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 88 с.
- 7 Гонтарь, И. Н. Сопротивление материалов : учеб. пособие к выполнению тестовых задач / И. Н. Гонтарь, Н. И. Волчихина. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2011. – 104 с.

## Приложение А

### Структура пояснительной записки курсовой работы

Курсовая работа включает следующие элементы:

- Титульный лист.
- Реферат.
- Содержание.
- Введение.
- Основной раздел, который содержит расчеты и схемы всех задач в соответствии с заданием и выводы.
- Список использованной литературы.

## Приложение В Образец рефератов

### РЕФЕРАТ

*В курсовой работе выполнен расчет на прочность и жесткость элементов конструкций, работающих на растяжение и сжатие, кручение и поперечный изгиб. Для каждого вида нагружения построены эпюры внутренних силовых факторов и перемещений. По итогам расчетов сделаны выводы о прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций.*

*Работа содержит страниц – 27, рисунков – 11, таблиц – 3, источников литературы – 4.*

					ПГУ 3. 190201. ЦТУ102 ПЗ		
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	Расчет на прочность, жесткость и устойчи- вость элементов конструкций		
Разраб.		Иванов И.И.					
Провер.		Петров П.П.					
Реценз.							
Н. Контр.							
Утверд.					Лит.	Лист	Листов
						2	27

Приложение Г  
Образец содержания

**Содержание**

Введение ..... 4  
Центральное растяжение и сжатие ..... 5  
Задача 2 ..... 9  
Кручение ..... 12  
Задача 4 ..... 14  
Расчет балки на прочность ..... 15  
Задача 5 ..... 17  
Задача 6 ..... 21  
Список использованной литературы ..... 27

Образец

						Лис
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		3

## Приложение Д

### Образец введения

#### **Введение**

*Все твердые тела в той или иной мере обладают свойствами прочности и жесткости, т.е. способны в определенных пределах воспринимать воздействия внешних сил без разрушения и существенного изменения геометрических размеров.*

*Сопротивление материалов – наука о прочности и жесткости элементов инженерных конструкций. Методами сопротивления материалов ведутся практические расчеты и определяются необходимые, надежные размеры деталей машин и различных строительных сооружений. Основные положения сопротивления материалов опираются на законы общей механики и, в первую очередь, на законы статики.*

*Задача сопротивления материалов заключается не только в том, чтобы выявить внутренние особенности изучаемых объектов, но также, чтобы в дальнейшем можно было дать полученным закономерностям правильное толкование при оценке работоспособности и практической пригодности конструкции.*

						Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		5

## Приложение Е

### Образец основного раздела

#### ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

##### Задача № 2

Стержень постоянного поперечного сечения (рисунок 1,а) зашкелен обоими концами и нагружен продольными силами.

Раскрыть статическую неопределенность, построить эпюру нормальных усилий  $N$  и эпюру линейных перемещений  $\Delta$ .

Расчетную схему принять по рисунку 1, а данные для расчета по таблице 1.

Таблица 1

Схема по рисунку	l <sub>1</sub>	l <sub>2</sub>	l <sub>3</sub>	l <sub>4</sub>
III	0,6 l	1,8 l	0,6 l	0,8 l
a	б	в	г	д

##### Решение

1 Для полученной системы составим уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на ось  $Z$ )

$$\sum X = R_A - P + P + P - R_B = 0. \quad (1)$$

Имеем одно уравнение равновесия и два неизвестных ( $R_A$  и  $R_B$ ), т.е. система один раз статически неопределима.

2 Выбираем основную систему.

Она получается из заданной путем освобождения от лишней связи. Принимаем за лишнюю связь зашкеление в опоре B. Нагружаем основную систему заданными силами и накладываем условие эквивалентности ее заданной системе: перемещение сечения B в заданной и основной системах должно быть одинаковым, т.е.

$$\Delta_B = 0.$$

В сечении B приложим активную силу  $X$ , величина которой должна быть такой, чтобы условие эквивалентности выполнялось (рисунок 1,б).

									Лист
									6
Изм	Лист	№ докум.	Подпись	Дата					

## Приложение Е (продолжение)

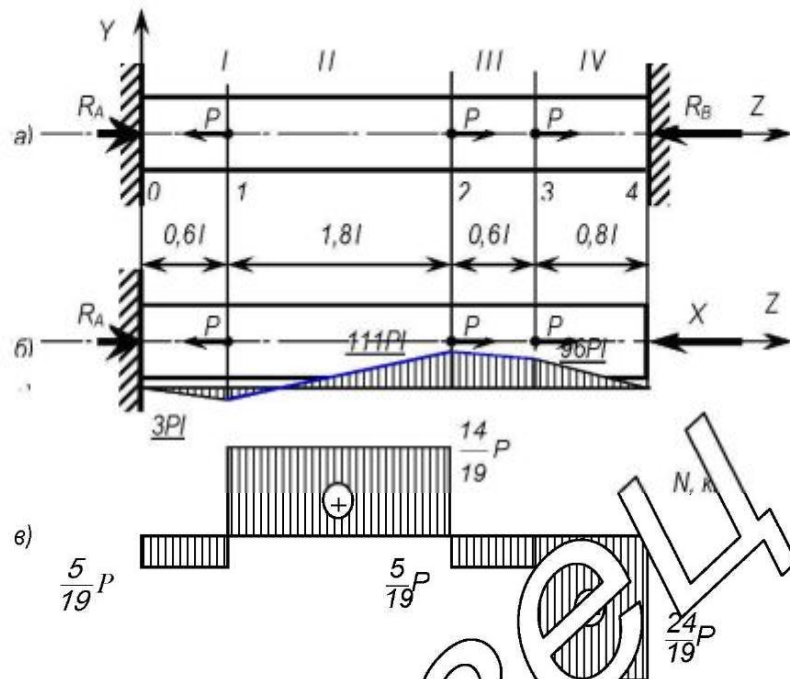


Рисунок 1

### 3 Раскрываем условие эквивалентности.

Перемещение  $\Delta_B$  сечения В выразим через приложенные нагрузки, применяя принцип независимости действия сил (нагрузки, вызывающие сжатие, считаем отрицательными):

$$\Delta_B = \Delta_B(P_1) + \Delta_B(X),$$

где  $\Delta_B(P_1)$  – перемещение сечения В от каждой из приложенных известных сил  $P_1$ ;

$\Delta_B(X)$  – перемещение сечения В от неизвестной силы X.

В результате получаем уравнение совместности деформаций в виде

$$-\frac{P \cdot 0,6 \cdot l}{EF} + \frac{P \cdot 2,4 \cdot l}{EF} + \frac{P \cdot 3,0 \cdot l}{EF} - \frac{X \cdot 3,8 \cdot l}{EF} = 0,$$

из решения которого следует, что  $X = \frac{24}{19}P$ ; следовательно, и опорная реакция  $R_B = \frac{24}{19}P$ .

Итак,  $R_B = \frac{24}{19}P$ .

Из уравнения равновесия видно:

$$R_A = R_B - P = \frac{24}{19}P - P = \frac{5}{19}P.$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	Лист
					8



## Приложение Е (продолжение)

Так как усилие  $R_A$  отрицательно, то его направление противоположно принятому на рисунке 1,б.

4 Построим эпюру нормальных усилий  $N$ .

Разбиваем брус на участки: I, II, III, IV (рисунок 1,а).

$$\text{На I участке} \quad N_1 = -R_A = -\frac{5}{19}P.$$

$$\text{На II участке} \quad N_2 = -R_A + P = -\frac{5}{19}P + P = \frac{14}{19}P.$$

$$\text{На III участке} \quad N_3 = -R_A + P - P = -\frac{5}{19}P + P - P = -\frac{5}{19}P.$$

$$\text{На IV участке} \quad N_4 = -R_A + P - P - P = -\frac{5}{19}P + P - P - P = -\frac{24}{19}P.$$

По полученным результатам строим эпюру нормальных усилий  $N$  (рисунок 1,в).

5 Построим эпюру перемещений сечений стержня.

Для этого вычислим абсолютные перемещения сечений, обозначенных цифрами 0, 1, 2, 3, 4 (рисунок 1,а).

Перемещение сечения 0:

$$\Delta_0 = 0.$$

Перемещение сечения 1:

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \frac{N_1 \cdot l_1}{EF} = 0 - \frac{5P \cdot 0,6 \cdot l}{19 \cdot EF} = -\frac{3 \cdot Pl}{19 \cdot EF}.$$

Перемещение сечения 2:

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \frac{N_2 \cdot l_2}{EF} = -\frac{3Pl}{19 \cdot EF} + \frac{14 \cdot P \cdot 1,8 \cdot l}{19 \cdot EF} = \frac{111 \cdot Pl}{95 \cdot EF}.$$

Перемещение сечения 3:

$$\Delta_3 = \Delta_2 + \frac{N_3 \cdot l_3}{EF} = \frac{111 \cdot Pl}{95 \cdot EF} - \frac{5P \cdot 0,6 \cdot l}{19 \cdot EF} = \frac{96 \cdot Pl}{95 \cdot EF}.$$

Перемещение сечения 4:

$$\Delta_4 = \Delta_3 + \frac{N_4 \cdot l_4}{EF} = \frac{96 \cdot Pl}{95 \cdot EF} - \frac{24P \cdot 0,8 \cdot l}{19 \cdot EF} = \frac{96 \cdot Pl}{95 \cdot EF} - \frac{96 \cdot Pl}{95 \cdot EF} = 0.$$

По полученным значениям строим эпюру перемещений  $\Delta$  (рисунок 1,г).

						Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		9

## Приложение Ж

### Образец списка использованной литературы

#### Список использованной литературы

1 Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1979. – 540 с.

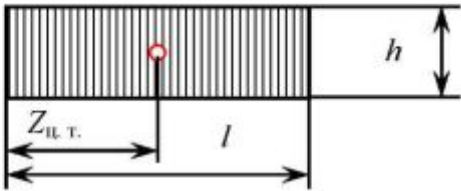
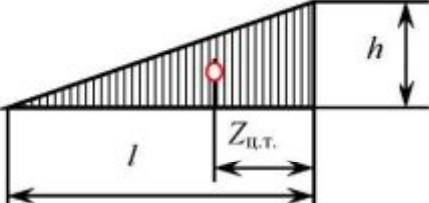
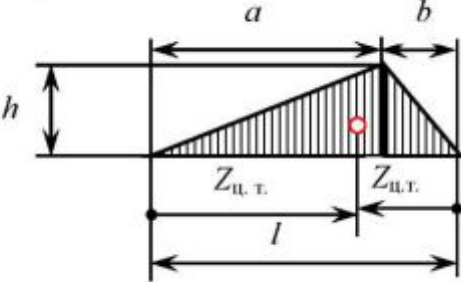
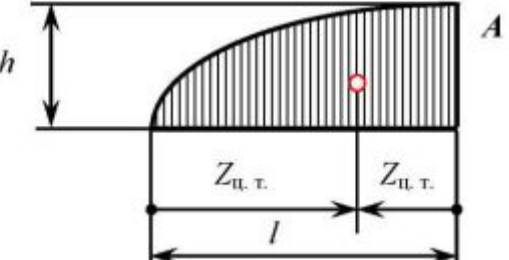
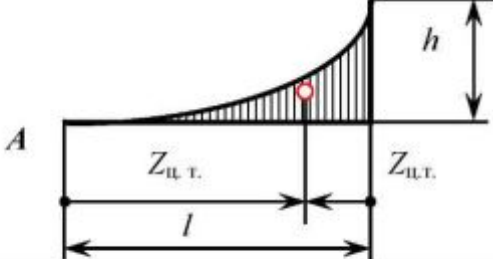
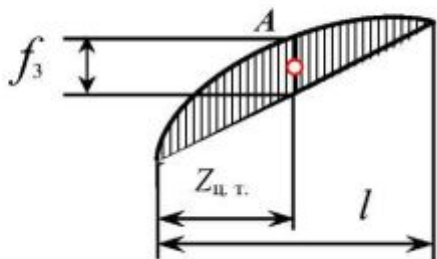
2 Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Высш. шк., 1976. – 609 с.

3 Гонтарь, И. Н. Сопротивление материалов : учебное пособие для выполнения курсовых работ / И. Н. Гонтарь, И. И. Волчихина. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. – 264 с.

4 Оформление учебно-конструкторской документации : метод. указания для выполнения работ по курсовому и дипломному проектированию / сост. : И. Н. Гонтарь и др. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 88 с.

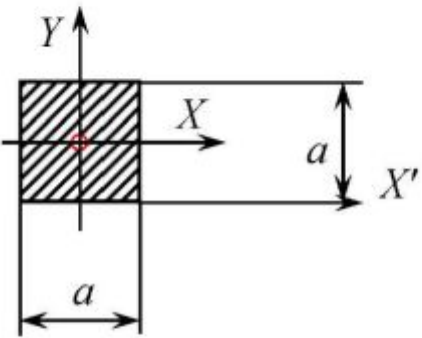
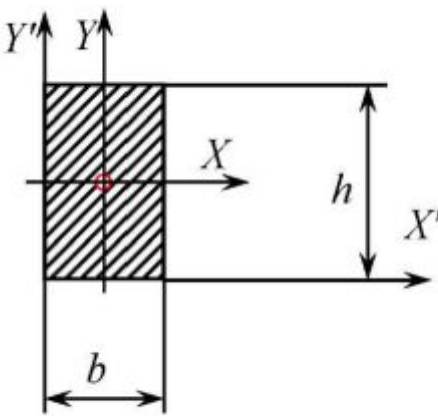
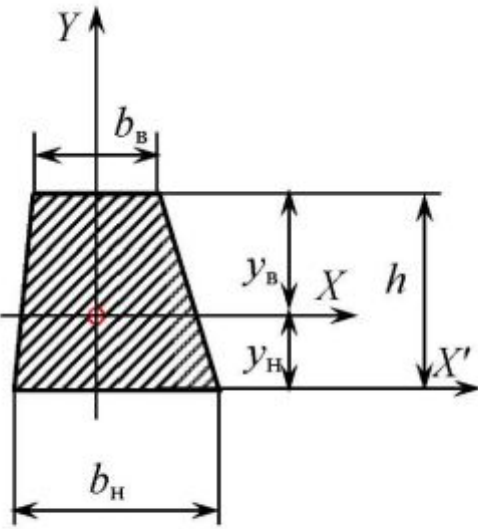
## Приложение И

### Геометрические параметры элементарных фигур

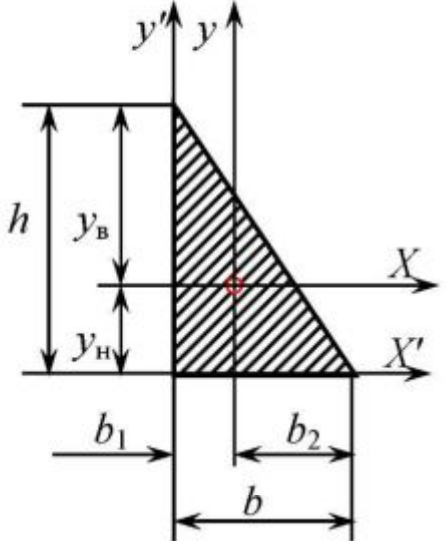
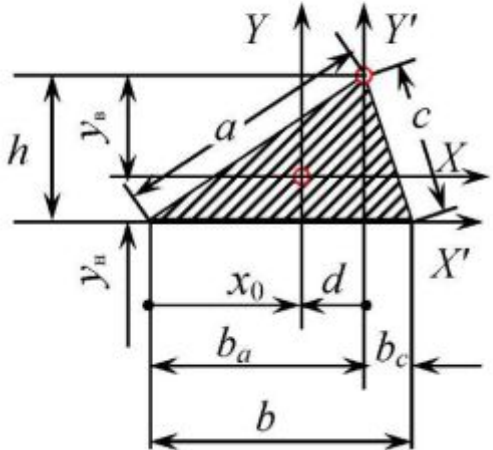
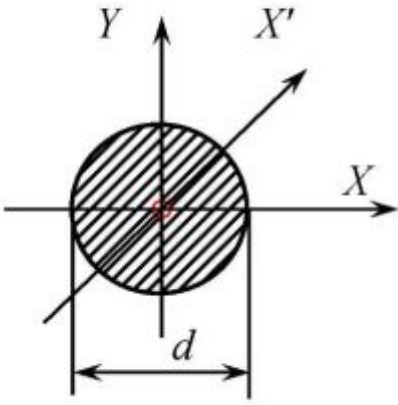
Форма элементарной фигуры	Координата центра тяжести площади	Величина площади
	$Z_{ц.т.} = \frac{1}{2}l$	$\Omega = lh$
	$Z_{ц.т.} = \frac{1}{3}l$	$\Omega = \frac{1}{2}lh$
	<p>Слева направо</p> $Z_{ц.т.} = \frac{1}{3}(2l - a)$ <p>Справа налево</p> $Z_{ц.т.} = \frac{1}{3}(l + b)$	$\Omega = \frac{1}{2}lh$
	<p>Слева направо</p> $Z_{ц.т.} = \frac{5}{8}l$ <p>Справа налево</p> $Z_{ц.т.} = \frac{3}{8}l$	<p>Квадратная парабола</p> $\Omega = \frac{2}{3}lh$ <p>Вершина в точке A</p>
	<p>Слева направо</p> $Z_{ц.т.} = \frac{3}{4}l$ <p>Справа налево</p> $Z_{ц.т.} = \frac{1}{4}l$	<p>Квадратная парабола</p> $\Omega = \frac{1}{3}lh$ <p>Вершина в точке A</p>
	$Z_{ц.т.} = \frac{1}{2}l$	<p>Квадратная парабола</p> $\Omega = \frac{2}{3}f_3l$ <p>Вершина в точке A</p>

## Приложение К

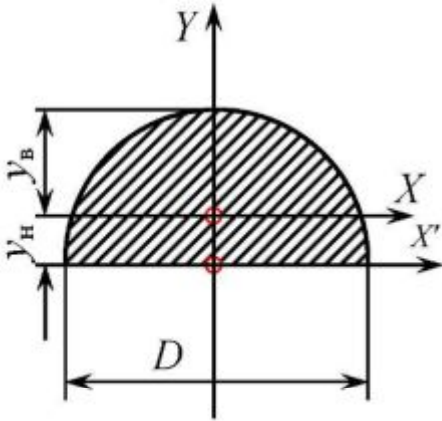
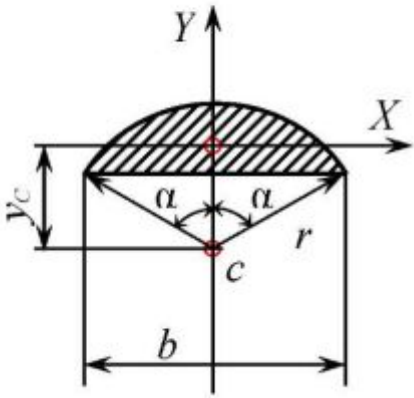
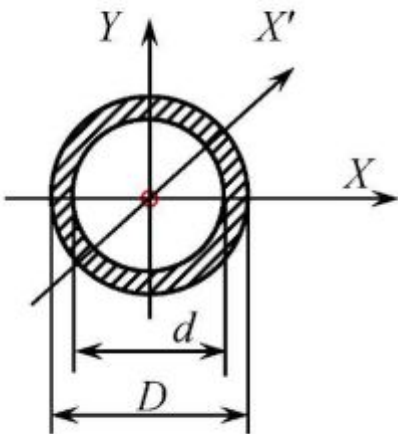
### Геометрические характеристики плоских сечений брусьев

Вид сечения (фигуры)	Наименование фигуры и расчетные формулы характеристик
	<p><b>Квадрат</b></p> $F = a^2;$ $J_X = J_Y = \frac{a^4}{12}; \quad J_{X'} = \frac{a^4}{3};$ $W_X = \frac{a^3}{6}.$
	<p><b>Прямоугольник</b></p> $F = bh;$ $J_X = \frac{bh^3}{12}; \quad J_Y = \frac{hb^3}{12};$ $W_X = \frac{bh^2}{6}; \quad W_Y = \frac{hb^2}{6}$ $J_{X'} = \frac{bh^3}{3}; \quad J_{Y'} = \frac{hb^3}{3}.$
	<p><b>Трапеция</b></p> $F = \frac{(b_{\text{н}} + b_{\text{в}})h}{2};$ $y_{\text{н}} = \frac{(b_{\text{н}} + 2b_{\text{в}})h}{3(b_{\text{н}} + b_{\text{в}})}; \quad y_{\text{в}} = \frac{(2b_{\text{н}} + b_{\text{в}})h}{3(b_{\text{н}} + b_{\text{в}})};$ $J_X = \frac{(b_{\text{н}}^2 + 4b_{\text{н}}b_{\text{в}} + b_{\text{в}}^2)h^3}{36(b_{\text{н}} + b_{\text{в}})};$ $J_{X'} = \frac{(b_{\text{н}} + 3b_{\text{в}})h^3}{12};$ $W_{X_{\text{в}}} = \frac{J_X}{y_{\text{в}}} \quad (\text{для верхних волокон}).$

## Приложение К (продолжение)

	<p><b>Прямоугольный треугольник</b></p> $F = \frac{bh}{2}; \quad y_B = \frac{2}{3}h; \quad y_H = \frac{1}{3}h;$ $J_X = \frac{bh^3}{36}; \quad J_Y = \frac{hb^3}{36};$ $J_{XY} = -\frac{h^2b^2}{72};$ $W_{X_H} = \frac{bh^2}{12}; \quad W_{X_B} = \frac{bh^2}{24};$ $J_{X'} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{Y'} = \frac{hb^3}{12}.$
	<p><b>Треугольник</b></p> $F = \frac{b \cdot h}{2}; \quad y_H = \frac{1}{3}h; \quad y_B = \frac{2}{3}h;$ $d = \frac{b_a - b_c}{3}; \quad x_0 = \frac{1}{3}(2 \cdot b - b_c);$ $J_X = \frac{bh^3}{36}; \quad W_{X_B} = \frac{bh^2}{24};$ $J_Y = \frac{bh(b^2 - b_a \cdot b_c)}{36}; \quad J_{X'} = \frac{bh^3}{12}.$
	<p><b>Круг</b></p> $F = \frac{\rho d^2}{4} \approx 0,785 d^2;$ $J_X = J_Y = J_{X'} = \frac{\rho d^4}{64} \approx 0,05 d^4;$ $J_P = 2J_X = \frac{\rho d^4}{32};$ $W_X = W_Y = W_{X'} = \frac{\rho d^3}{32} \approx 0,1 d^3;$ $W_P = \frac{\rho d^3}{16}.$

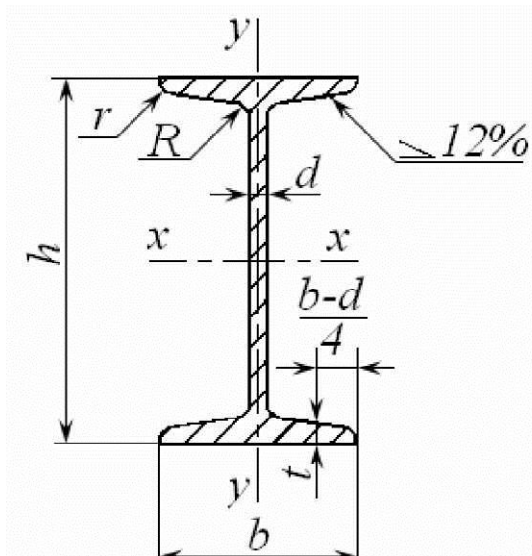
## Приложение К (продолжение)

	<p><b>Полукруг</b></p> $F = \frac{p \cdot D^2}{8}; \quad D = 2r;$ $y_H = \frac{4r}{3p};$ $J_X = \frac{p \cdot r^4}{8} \left( 1 - \frac{64}{9\pi^2} \right); \quad J_{X'} = \frac{p \cdot r^4}{8};$ $J_Y = \frac{p \cdot r^4}{8}.$
	<p><b>Круговой сегмент</b></p> $F = \frac{r^2 \cdot \varphi}{2}; \quad b = 2r \sin \alpha; \quad \varphi = 2\alpha - \sin 2\alpha;$ $y_C = \frac{4r \cdot \sin^3 \alpha}{3\varphi};$ $J_X = \frac{r^4 \cdot \varphi}{8} \left( 1 + \frac{4 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{\varphi} \right);$ $J_Y = \frac{r^4 \cdot \varphi}{8} \left( 1 - \frac{4 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{3\varphi} \right).$
	<p><b>Кольцо</b></p> $F = \frac{p \cdot D^2 (1 - \alpha^2)}{4}; \quad \alpha = \frac{d}{D};$ $J_X = J_Y = J_{X'} = \frac{p \cdot D^4}{64} (1 - \alpha^4);$ $J_P = \frac{p \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4);$ $W_X = W_Y = W_{X'} = \frac{p D^3}{32} (1 - \alpha^4);$ $W_P = \frac{p D^3}{16} (1 - \alpha^4).$



## Приложение Л

### Стандартные профили прокатной стали



#### Двутавры стальные горячекатаные

Обозначения:

$h$  – высота балки;

$b$  – ширина полки;

$d$  – толщина стенки;

$t$  – средняя толщина полки;

$J$  – момент инерции;

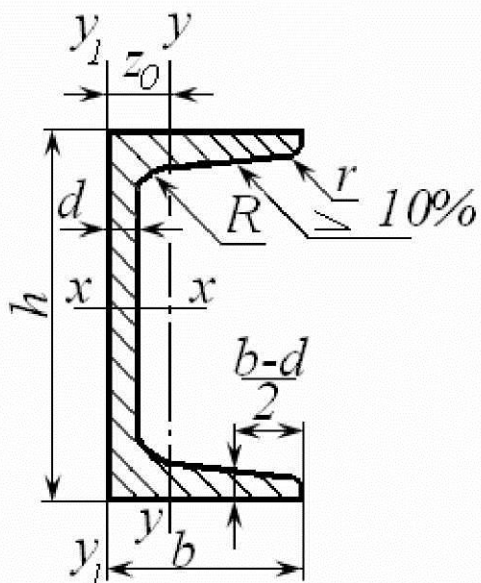
$W$  – момент сопротивления;

$S$  – статический момент полусечения;

$i$  – радиус инерции

№ профиля	Размеры, мм				Площадь, см <sup>2</sup>	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
10	100	56	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,50
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55	13,70
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70	15,90
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88	18,40
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12	19,90
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07	21,00
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32	22,70
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27	24,00
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50	25,80
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37	27,30
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63	29,40
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54	31,50
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80	33,90
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69	36,50
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95	39,20
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79	42,20
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89	48,60
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03	57,00
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09	66,50
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23	78,50
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39	92,60
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54	108,0

## Приложение Л (продолжение)



### Швеллеры стальные горячекатаные с уклоном внутренних граней полок

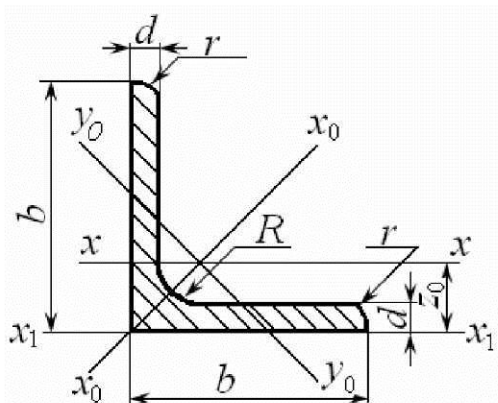
Обозначения:

- $h$  – высота балки;
- $b$  – ширина полки;
- $d$  – толщина стенки;
- $t$  – средняя толщина полки;
- $J$  – момент инерции;
- $W$  – момент сопротивления;
- $S$  – статический момент полусечения;
- $i$  – радиус инерции;
- $z_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок

№ швеллера	Размеры, мм						Площадь, см <sup>2</sup>	Масса 1м, кг	$J_{x_3}$ , см <sup>4</sup>	$W_{x_3}$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_{x_3}$ , см <sup>3</sup>	$I_{y_3}$ , см <sup>4</sup>	$W_{y_3}$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см
	$H$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$										
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,1	70,2	5,60	40,80	45,4	11,0	1,70	1,67
14а	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,00	13,30	545,0	77,8	5,66	45,10	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,3	13,8	1,87	1,80
16а	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,0	17,0	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,0	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,0	20,5	2,20	2,07
20а	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,20	19,80	1670,0	167,0	8,15	95,90	139,0	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21
22а	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,80	22,60	2330,0	212,0	8,99	121,0	187,0	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,6	2,60	2,42
24 а	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,90	25,80	3180,0	265,0	9,84	151,0	254,0	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,0	262,0	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,0	513,0	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75



## Приложение Л (продолжение)



### Уголки стальные горячекатаные равнополочные

Обозначения:

$b$  – ширина полки;

$d$  – толщина стенки;

$J$  – момент инерции;

$J_{xy}$  – центробежный момент инерции;

$W$  – момент сопротивления;

$i$  – радиус инерции;

$z_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок

№ профиля	Размеры, мм				Площадь, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Масса 1 м, кг
	$b$	$d$	$R$	$r$		$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$		
						$J_{x_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0}$ , см	$J_{y_0}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0}$ , см	$J_{xy}$ , см <sup>4</sup>	$z_0$ , см			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4			1,46	0,50	0,53	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4			1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	4,0	4,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4			2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	3,39	0,94	1,91
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	1,65
		4			2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	2,16
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5			3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	46	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,0	1,26	2,73
		5			4,20	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5			5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5			6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6			7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72

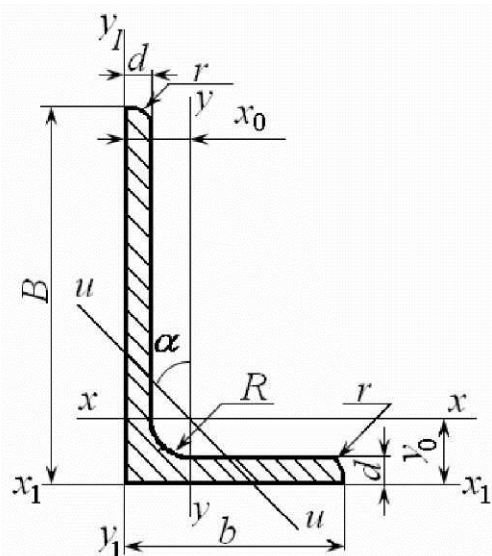
## Приложение Л (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	70	4,5	8	2,7	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5			6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6			8,15	37,6	2,15	53,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7			9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8			10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	9	3,0	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6			8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7			10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8			11,50	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9			12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8	80	5,5	9	3,0	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6			9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7			10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8			12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10	3,3	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7			12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8			13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9			15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20
10	100	6,5	12	4,0	12,8	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,9	214,0	2,68	10,10
		7			13,8	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8			15,6	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10			19,2	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12			22,8	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14			26,3	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16			29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	12	4,0	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8			17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8,9	14	4,6	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		10			22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		12			24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		14			28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		16			33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
					37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	14	4,6	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10			27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12			32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5

## Приложение Л (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	160	10	16	5,3	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11			34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12			37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14			43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16			49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18			54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20			60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	16	5,3	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12			42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	18	6,0	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13			50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14			54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16			62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20			76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25			94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30			111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	21	7,0	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16			68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	24	8	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18			87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20			97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22			106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25			119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28			133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30			142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

## Приложение Л (продолжение)



### Уголки стальные горячекатаные неравнополочные

Обозначения:

$B$  – ширина большей полки;

$b$  – ширина меньшей полки;

$d$  – толщина полки;

$J$  – момент инерции;

$J_{xy}$  – центробежный момент инерции;

$W$  – момент сопротивления;

$i$  – радиус инерции;

$x_0, y_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полки

Номер профиля	Размеры, мм			Площадь, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей										Угол на- клона оси, tg α	Масса 1 м, кг
	B	b	d		x – x		y – y		x <sub>1</sub> – x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> – y <sub>1</sub>		u – u			
					J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	J <sub>y<sub>1</sub></sub> min, см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	J <sub>u</sub> min, см <sup>4</sup>	i <sub>u</sub> min, см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392	0,91
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382	1,17
			4	1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374	1,52
4/2,5	40	25	3	1,89	3,061	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385	1,48
			4	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381	1,94
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382	1,68
			4	2,80	5,68	1,42	1,69	0,78	12,10	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	2,42	6,17	1,60	1,99	0,91	12,40	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403	1,90
			4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	16,60	1,85	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401	2,49
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,40	1,78	3,70	1,02	23,20	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406	2,81
			5	4,41	13,80	1,77	4,48	1,01	29,20	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404	3,46
6,3/4,0	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397	3,17
			5	4,98	19,90	2,00	6,26	1,12	41,40	2,08	10,80	0,95	3,72	0,86	0,396	3,91
			6	5,90	23,30	1,99	7,28	1,11	49,90	2,12	13,10	0,99	4,36	0,86	0,393	4,63
			8	7,68	29,60	1,96	9,15	1,09	66,90	2,20	17,90	1,07	5,58	0,85	0,386	6,03
7/4,5	70	45	5	5,59	27,80	2,23	9,05	1,27	56,70	2,28	15,20	1,05	5,34	0,98	0,406	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,80	2,39	12,50	1,43	69,70	2,39	20,80	1,17	7,24	1,09	0,436	4,79
			6	7,25	40,90	2,38	14,60	1,42	83,90	2,44	25,20	1,21	8,48	1,08	0,435	5,69
			8	9,47	52,40	2,35	18,50	1,40	112,0	2,52	34,20	1,29	10,90	1,07	0,430	7,43
8/5	80	50	5	6,36	41,60	2,56	12,70	1,41	84,60	2,60	20,80	1,13	7,58	1,09	0,387	4,99
			6	7,55	49,00	2,55	14,80	1,40	102,0	2,65	25,20	1,17	8,88	1,08	0,386	5,92
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384	6,17
			6,0	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384	6,70
			8,0	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380	8,77

## Приложение Л (продолжение)

Номер профиля	Размеры, мм			Площадь, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей										Угол на- клона оси tg α	Масса 1 м. кг
	B	b	d		x-x		y-y		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> -y <sub>1</sub>		u-u			
					J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	J <sub>y<sub>1</sub></sub> min, см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	J <sub>u</sub> min, см <sup>4</sup>	i <sub>u</sub> min, см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10/6,3	100	63	6,0	9,59	98,3	3,20	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393	7,53
			7,0	11,10	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392	8,70
			8,0	12,60	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391	9,87
			10,0	15,51	154	3,15	47,1	1,55	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387	12,10
11/7	110	70	6,5	11,40	142	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402	8,98
			8,0	13,90	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,2	1,64	32,3	1,52	0,400	10,9
12,5/8	125	80	7,0	14,10	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119,0	1,80	43,4	1,76	0,407	11,0
			8,0	16,00	256	4,00	83,0	2,28	518	4,05	137,0	1,84	48,8	1,75	0,406	12,5
			10,0	19,70	312	3,98	100,0	2,26	649	4,14	173,0	1,92	59,3	1,74	0,404	15,5
			12,0	23,40	365	3,95	117,0	2,24	781	4,22	210,0	2,00	69,5	1,72	0,400	18,30
14/9	140	90	8,0	18,00	364	4,49	120,0	2,58	727	4,49	194,0	2,03	70,3	1,98	0,411	14,10
			10,0	22,20	444	4,47	146,0	2,56	911	4,58	245,0	2,12	85,5	1,96	0,409	17,5
16/10	160	100	9,0	22,90	606	5,15	186,0	2,85	1221	5,19	300,0	2,23	110,0	2,20	0,391	18,0
			10,0	25,30	667	5,13	204,0	2,84	1359	5,23	335,0	2,28	121,0	2,19	0,390	19,8
			12,0	30,00	784	5,11	239,0	2,82	1634	5,32	405,0	2,36	142,0	2,18	0,388	23,6
			14,0	34,70	897	5,08	272,0	2,80	1910	5,40	477,0	2,43	162,0	2,16	0,385	27,3
18/11	180	110	10,0	28,30	952	5,80	276,0	3,12	1933	5,88	444,0	2,44	165,0	2,42	0,375	22,2
			12,0	33,70	1123	5,77	324,0	3,10	2324	5,97	537,0	2,52	194,0	2,40	0,374	26,4
20/12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,392	27,4
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388	39,1
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410	37,9
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408	49,9
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407	55,8
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405	61,7