

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ
ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ**

Методические указания и задания к расчетно-графической работе
для студентов очной формы обучения строительных специальностей

Предлагаемые методические указания посвящены изучению методов определения перемещений при плоском изгибе. Для вычисления прогибов и углов поворота используются метод начальных параметров и графо-аналитический метод. Приведены примеры решения типовых статически определимых и статически неопределимых задач, входящих в состав расчетно-графической работы по курсу «Сопротивление материалов». Предназначены для студентов 2-го курса всех строительных специальностей очной формы обучения.

1. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Построить эпюры прогибов и углов поворота для заданной балки с помощью уравнений метода начальных параметров.

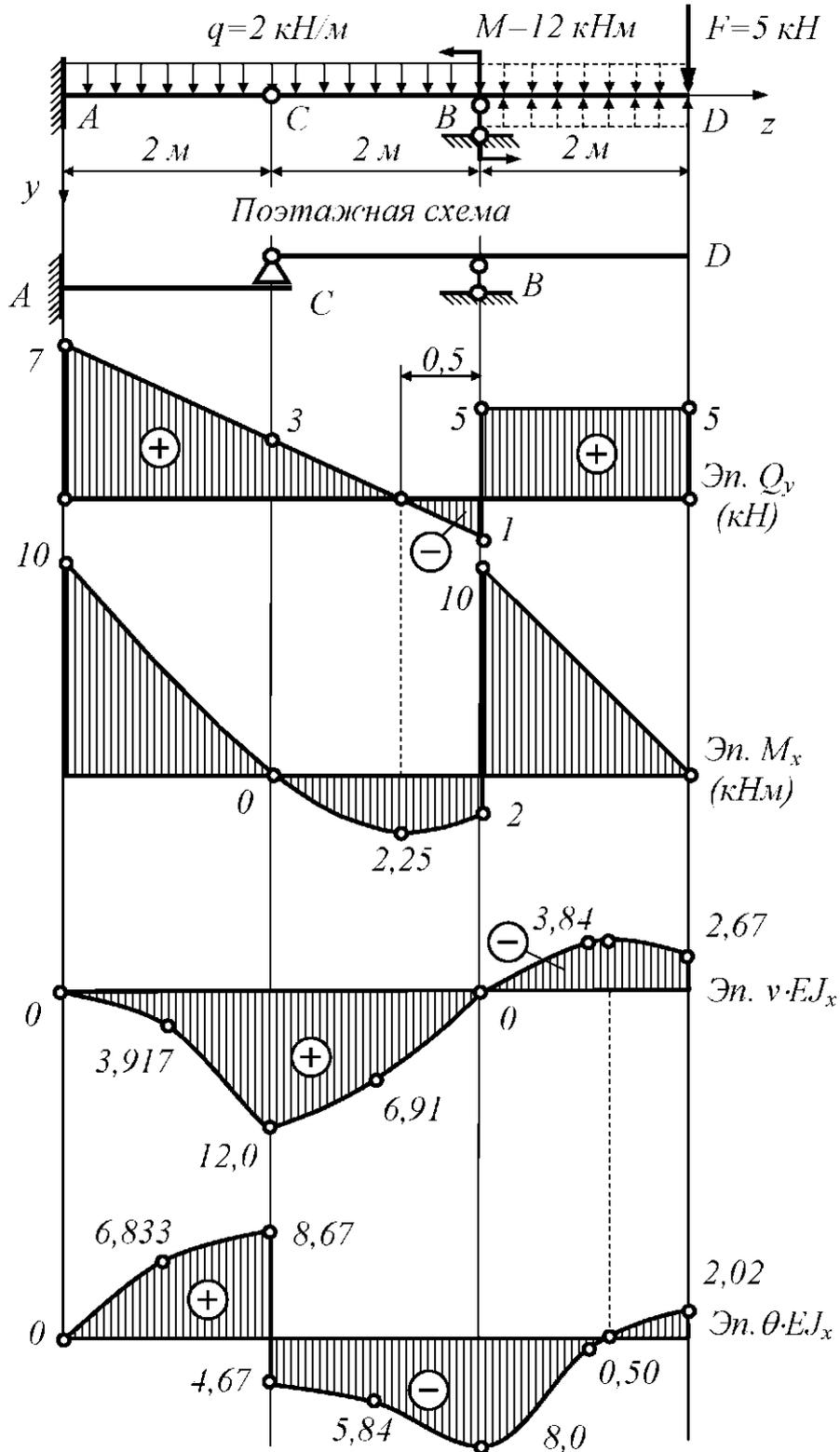
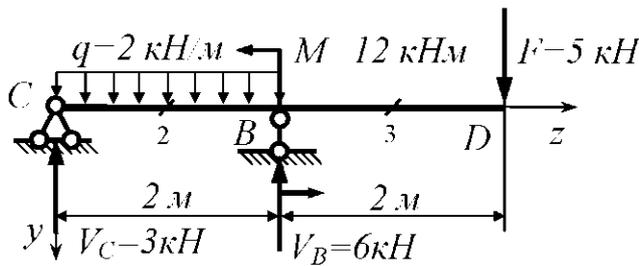


Рисунок 1.1. Использование метода начальных параметров для определения перемещений в балках с врезным шарниром

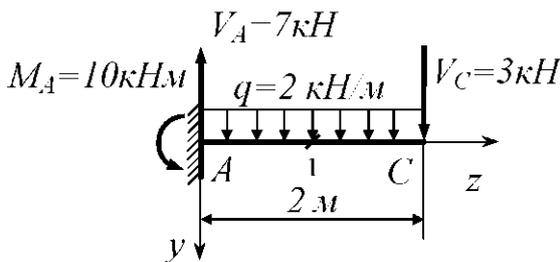


Решение задачи об определении перемещений в многопролетной балке методом начальных параметров начинаем с построения поэтажной схемы. Находим величины опорных реакций отдельных балок, начиная с верхнего этажа поэтажной схемы:

$$\sum m_c = 0; V_B = \frac{2 \cdot 2^2 / 2 - 12 + 5 \cdot 4}{2} = 6 \text{ кН};$$

$$\sum m_b = 0; V_C = \frac{2 \cdot 2^2 / 2 + 12 - 5 \cdot 2}{2} = 3 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum y = 0; 2 \cdot 2 + 5 - 6 - 3 = 0$, следовательно, опорные реакции балки верхнего этажа поэтажной схемы найдены верно. Используя полученные значения опорных реакций, строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x в балке второго этажа.



Определяем величину опорных реакций балки нижнего этажа, для чего помимо действия заданных нагрузок учитываем и ранее вычисленную опорную реакцию V_C , приложенную в противоположном направлении.

$$\sum y = 0; V_A = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \text{ кН},$$

$$\sum m_A = 0; M_A = 2 \cdot 2^2 / 2 + 3 \cdot 2 = 10 \text{ кНм}.$$

Используя полученные значения опорных реакций, строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x в балке второго этажа.

Окончательные эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x в заданной балке строятся путем состыковки в точке C ранее построенных эпюр в отдельных балках поэтажной схемы.

При вычислении перемещений в многопролетной балке с помощью метода начальных параметров расчет необходимо начинать с балки, находящейся в нижнем этаже поэтажной схемы. Уравнения метода начальных параметров записываем в следующем виде:

$$EJ_x \theta_i = EJ_x \theta_0 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i (z_i - a_i)}{1} + \sum_{i=1}^n \frac{F_i (z_i - a_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i (z_i - a_i)^3}{6};$$

$$EJ_x v_i = EJ_x v_0 + EJ_x \theta_0 z_i + \sum_{i=1}^n \frac{M_i (z_i - a_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{F_i (z_i - a_i)^3}{6} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i (z_i - a_i)^4}{24}.$$

Начальные параметры балки первого этажа (прогиб и угол поворота сечения в начале координат) определяются из условий ее закрепления. В начале координат имеется защемление, которое препятствует как угловым, так и линейным перемещениям, следовательно, $EJ_x v_0 = 0$ и $EJ_x \theta_0 = 0$.

Вычисляем перемещения сечений, расположенных в серединах и на границах грузовых участков балки первого этажа:

– $z_1 = 1$ м:

$$EJ_x \theta_1 = \frac{10 \cdot (1-0)^1}{1} - \frac{7 \cdot (1-0)^2}{2} + \frac{2 \cdot (1-0)^3}{6} = 6,833; \quad \theta_1 = \frac{6,833}{EJ_x};$$

$$EJ_x v_1 = \frac{10 \cdot (1-0)^2}{2} - \frac{7 \cdot (1-0)^3}{6} + \frac{2 \cdot (1-0)^4}{24} = 3,917; \quad v_1 = \frac{3,917}{EJ_x};$$

– $z_c = 2$ м:

$$EJ_x \theta_c = \frac{10 \cdot (2-0)^1}{1} - \frac{7 \cdot (2-0)^2}{2} + \frac{2 \cdot (2-0)^3}{6} = 8,67; \quad \theta_c^{зсв} = \frac{8,67}{EJ_x};$$

$$EJ_x v_c = \frac{10 \cdot (2-0)^2}{2} - \frac{7 \cdot (2-0)^3}{6} + \frac{2 \cdot (2-0)^4}{24} = 12; \quad v_c = \frac{12}{EJ_x}.$$

При вычислении перемещений в балке второго этажа с помощью метода начальных параметров необходимо устранить разрыв в равномерно распределенной нагрузке. Для чего балку нужно догрузить нагрузкой заданной интенсивности $q = 2$ кН/м и, и чтобы не изменилось деформированное состояние балки, на том же участке необходимо приложить компенсирующую нагрузку интенсивностью $q = 2$ кН/м, направленную в противоположном направлении (см. рис. 1.1).

Следует заметить, что в точке C на эпюре прогибов v имеется излом, а на эпюре углов поворота сечения θ – разрыв. Поэтому при определении перемещений в балке верхнего этажа в качестве одного из начальных параметров (прогиба в начале координат) следует принять $EJ_x v_0 = EJ_x v_c = 12$. Второй начальный параметр $EJ_x \theta_0 = EJ_x \theta_c^{np} \neq 0$. Угол поворота сечения в начале координат необходимо определить из условия опирания балки второго этажа в точке B – при $z_B = 2$ м; $EJ_x v_B = 0$, отсюда

$$EJ_x v_B = 12 + EJ_x \theta_0 \cdot 2 - \frac{3 \cdot (2-0)^3}{6} + \frac{2 \cdot (2-0)^4}{24} = 0;$$

$$EJ_x \theta_0 \cdot 2 + 9,33 = 0; \quad EJ_x \theta_0 = -\frac{9,33}{2} = -4,67 = \theta_c^{np}.$$

Вычисляем перемещения сечений, расположенных в серединах и на границах грузовых участков балки второго этажа:

– $z_2 = 1$ м:

$$EJ_x \theta_2 = -4,67 - \frac{3 \cdot (1-0)^2}{2} + \frac{2 \cdot (1-0)^3}{6} = -5,84 \quad \theta_2 = -\frac{5,84}{EJ_x}$$

$$EJ_x v_2 = 12 - 4,67 \cdot 1 - \frac{3 \cdot (1-0)^3}{6} + \frac{2 \cdot (1-0)^4}{24} = 6,91; \quad v_2 = \frac{6,91}{EJ_x};$$

– $z_B = 2$ м:

$$EJ_x \theta_B = -4,67 - \frac{3 \cdot (2-0)^2}{2} + \frac{2 \cdot (2-0)^3}{6} = -8,00 \quad \theta_B = -\frac{8,00}{EJ_x}$$

$$EJ_x v_B = 12 - 4,67 \cdot 2 - \frac{3 \cdot (2-0)^3}{6} + \frac{2 \cdot (2-0)^4}{24} = -0,01; \quad v_B = -\frac{0,01}{EJ_x} \approx 0;$$

– $z_3 = 3$ м;

$$EJ_x \theta_3 = -4,67 - \frac{3 \cdot (3-0)^2}{2} + \frac{2 \cdot (3-0)^3}{6} + \frac{12 \cdot (3-2)^1}{1} -$$

$$- \frac{6 \cdot (3-2)^2}{2} - \frac{2 \cdot (3-2)^3}{6} = -0,50; \quad \theta_3 = -\frac{0,50}{EJ_x};$$

$$EJ_x v_3 = 12 - 4,67 \cdot 3 - \frac{3 \cdot (3-0)^3}{6} + \frac{2 \cdot (3-0)^4}{24} + \frac{12 \cdot (3-2)^2}{2} -$$

$$- \frac{6 \cdot (3-2)^3}{6} - \frac{2 \cdot (3-2)^4}{24} = -3,84; \quad v_3 = -\frac{3,84}{EJ_x};$$

– $z_D = 4$ м; $EJ_x \theta_D = -4,67 - \frac{3 \cdot (4-0)^2}{2} + \frac{2 \cdot (4-0)^3}{6} + \frac{12 \cdot (4-2)^1}{1} -$

$$- \frac{6 \cdot (4-2)^2}{2} - \frac{2 \cdot (4-2)^3}{6} = 2,00; \quad \theta_D = \frac{2,00}{EJ_x};$$

$$EJ_x v_D = 12 - 4,67 \cdot 4 - \frac{3 \cdot (4-0)^3}{6} + \frac{2 \cdot (4-0)^4}{24} + \frac{12 \cdot (4-2)^2}{2} -$$

$$- \frac{6 \cdot (4-2)^3}{6} - \frac{2 \cdot (4-2)^4}{24} = -2,68; \quad v_D = -\frac{2,68}{EJ_x}.$$

По полученным значениям строим эпюру углов поворота сечения θ и эскиз упругой линии балки v (см. рис.1.1). Сравнивая эпюры перемещений, построенные методом начальных параметров и графо-аналитическим методом можно сделать вывод об их полной идентичности. Некоторые погрешности при определении ординат рассматриваемых эпюр связаны с округлением чисел при вычислениях. Сравнивая два метода определения перемещений можно сделать вывод, что метод начальных параметров позволяет вычислять искомые величины в любой точке балки, а графо-аналитический – только на границах грузовых участков.

2. ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ

Построить эпюры прогибов и углов поворота для заданной балки с помощью уравнений метода начальных параметров (рис. 2.1).

Определяем величину опорных реакций заданной балки:

$$\sum m_B = 0; V_A = \frac{20 + 20 \cdot 3 - 10 + 10 \cdot 2}{4} = 15 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = 0; V_B = \frac{20 + 10 \cdot 8 - 10 - 20 \cdot 3}{4} = 5 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = 0; V_A - V_B - F_1 + F_2 = 0; 15 - 20 + 10 - 5 = 0.$$

Используя полученные значения опорных реакций, строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x в заданной балке.

Принимаем схему фиктивной балки в соответствии с условиями закрепления заданной балки. Фиктивную балку загружаем фиктивной распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону изгибающего момента M_x в заданной балке. Фиктивную распределенную нагрузку направляем от оси балки в сторону растянутых волокон заданной балки. Ординатами фиктивной распределенной нагрузки являются ординаты эпюры M_x , деленные на величину изгибной жесткости EJ_x .

Площадь фиктивной распределенной нагрузки разбиваем на элементарные геометрические фигуры – треугольники и прямоугольники. Действие каждого из элементарных участков фиктивной распределенной нагрузки заменяем равнодействующими ω_i . Величина равнодействующей ω_i равняется площади соответствующего элемента фиктивной распределенной нагрузки. Точки приложения равнодействующих находятся в центрах тяжести элементов фиктивной распределенной нагрузки. Находим величины равнодействующих ω_i и координаты точек их приложения a_i :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{20}{EJ_x} \cdot 2 = \frac{40}{EJ_x}; & a_1 &= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ м}; \\ \omega_2 &= \frac{20}{EJ_x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{30}{EJ_x}; & a_2 &= 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \text{ м}; \\ \omega_3 &= \frac{25}{EJ_x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{37,5}{EJ_x}; & a_3 &= 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \text{ м}; \\ \omega_4 &= \frac{(25-10)}{EJ_x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{22,5}{EJ_x}; & a_4 &= 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \text{ м}; \\ \omega_5 &= \frac{10}{EJ_x} \cdot 3 = \frac{30}{EJ_x}; & a_5 &= 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \text{ м}; \end{aligned}$$

$$\omega_6 = \frac{20}{EJ_x} \cdot \frac{2}{2} = \frac{20}{EJ_x}, \quad a_6 = 2 \cdot \frac{1}{3} = 0,67 \text{ м.}$$

Для определения опорных реакций фиктивной балки составляем поэтажную схему, позволяющую установить порядок взаимодействия между отдельными элементами многопролетной системы. Построение поэтажной схемы поводится в следующем порядке: через врезные шарниры мысленно проводят сечения и выявляют элементарные балки, которые могут самостоятельно нести внешнюю нагрузку, без участия остальных элементов. К таким элементам относятся консольные балки и балки на двух опорах. Указанные балки располагают в нижнем этаже поэтажной схемы, а остальные элементы помещают в следующих этажах в соответствии с порядком их примыкания. Балки, не имеющие промежуточных опор, располагаются в самом верхнем этаже поэтажной схемы. Расчет начинаем с балки, расположенной в самом верхнем этаже поэтажной схемы (балка AB).

Определяем величину опорных реакций фиктивной балки AB :

$$\sum m_B = 0; \quad V_A^{fic} = \frac{\omega_3(6-a_3) + \omega_4(3-a_4) + \omega_5(3-a_5) - \omega_2(6-a_2)}{6} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{37,5 \cdot (6-2) + 22,5 \cdot (3-1) + 30 \cdot (3-1,5) - 30 \cdot (6-1)}{6} \right] = \frac{15}{EJ_x} \text{ кНм}^2;$$

$$\sum m_A = 0; \quad V_B^{fic} = \frac{\omega_3 \cdot a_3 + \omega_4(3+a_4) + \omega_5(3+a_5) - \omega_2 a_2}{6} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{37,5 \cdot 2 + 22,5 \cdot (3+1) + 30 \cdot (3+1,5) - 30 \cdot 1}{6} \right] = \frac{45}{EJ_x} \text{ кНм}^2.$$

Находим величину опорных реакций фиктивной балки CA , расположенной в первом этаже поэтажной схемы. Опорные реакции балки AB , расположенной в верхнем этаже поэтажной схемы, прикладываем к балке CA в противоположном направлении. Тогда:

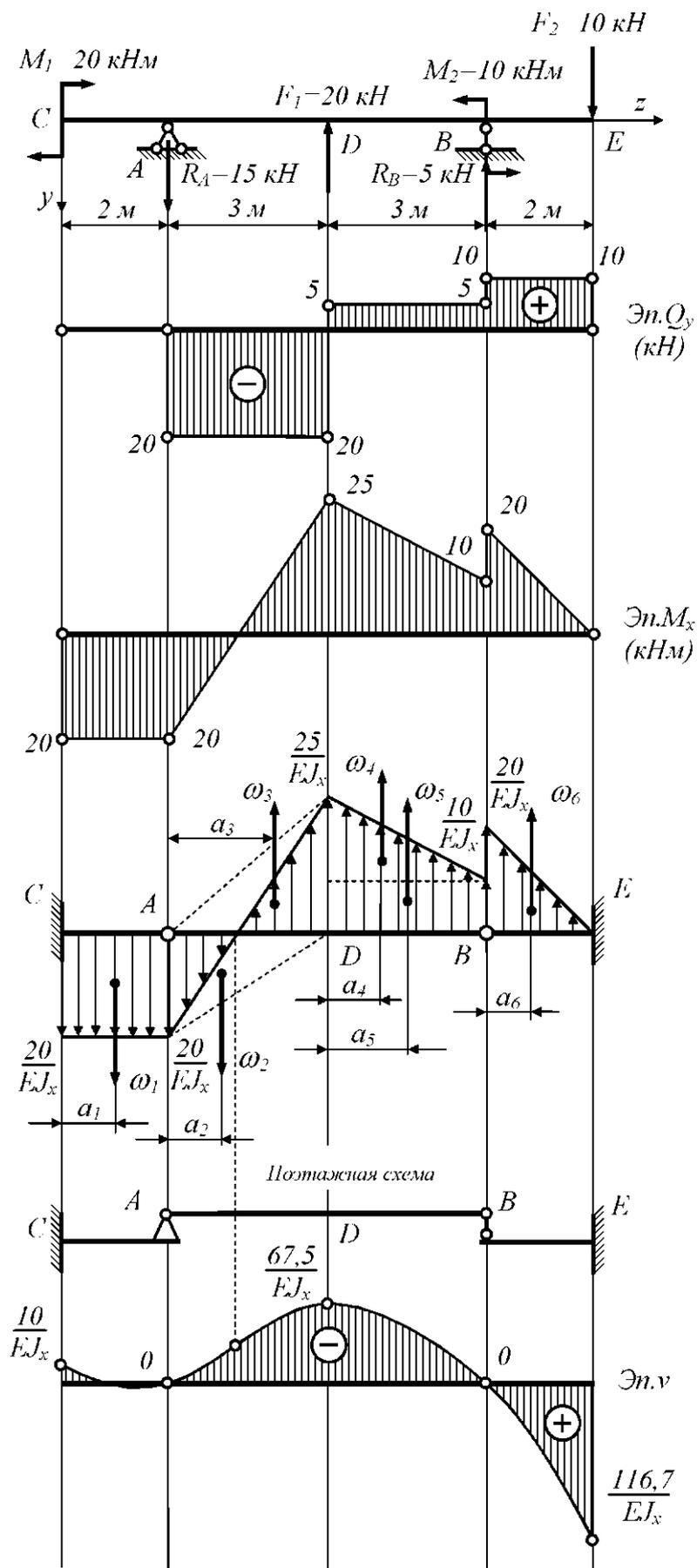
$$\sum m_C = 0; \quad M_C^{fic} = \omega_1 a_1 - V_A^{fic} 2 = \frac{1}{EJ_x} (40 \cdot 1 - 15 \cdot 2) = \frac{10}{EJ_x} \text{ кНм}^3;$$

$$\sum y = 0; \quad V_C^{fic} = \omega_1 - V_A^{fic} = \frac{1}{EJ_x} (40 - 15) = \frac{25}{EJ_x} \text{ кНм}^2.$$

Определяем величину опорных реакций фиктивной балки BE , расположенной в первом этаже поэтажной схемы. Опорные реакции балки AB , расположенной в верхнем этаже поэтажной схемы, прикладываем к балке BE в противоположном направлении, получаем:

$$\sum m_E = 0; \quad M_E^{fic} = \omega_6(2-a_6) + V_B^{fic} 2 = \frac{1}{EJ_x} [20 \cdot (2-0,67) + 45 \cdot 2] = \frac{116,7}{EJ_x} \text{ кНм}^3;$$

$$\sum y = 0; \quad V_E^{fic} = \omega_6 + V_B^{fic} = \frac{1}{EJ_x} (20 + 45) = \frac{65}{EJ_x} \text{ кНм}^2.$$



3. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ С ВРЕЗНЫМ ШАРНИРОМ

Определяем величину опорных реакций заданной балки:

$$\sum m_C^{np} = 0; V_B = \frac{2 \cdot 2^2 / 2 - 12 + 5 \cdot 4}{2} = 6 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = 0; M_A = 2 \cdot 4^2 / 2 + 5 \cdot 6 - 6 \cdot 4 - 12 = 10 \text{ кНм};$$

$$\sum m_C^{лев} = 0; V_A = \frac{2 \cdot 2^2 / 2 + 10}{2} = 7 \text{ кН}.$$

Проверка:

$\sum y = 0; -V_A - V_B + F + q \cdot 2 = 0; -7 - 6 + 5 + 2 \cdot 4 = 0$, следовательно, опорные реакции найдены верно.

Используя полученные значения опорных реакций, строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x в заданной балке.

Принимаем схему фиктивной балки в соответствии с условиями закрепления заданной балки. Фиктивную балку загружаем фиктивной распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону изгибающего момента M_x в заданной балке. Фиктивную распределенную нагрузку направляем от оси балки в сторону растянутых волокон заданной балки. Ординатами фиктивной распределенной нагрузки являются ординаты эпюры M_x , деленные на величину изгибной жесткости EJ_x .

Площадь фиктивной распределенной нагрузки разбиваем на элементарные геометрические фигуры – треугольники и параболические сегменты. Действие каждого из элементарных участков фиктивной распределенной нагрузки заменяем равнодействующими ω_i . Величина равнодействующей ω_i равняется площади соответствующего элемента фиктивной распределенной нагрузки. Точки приложения равнодействующих находятся в центрах тяжести элементов фиктивной распределенной нагрузки.

Находим величины равнодействующих ω_i и координаты точек их приложения a_i :

$$\omega_1 = \frac{10}{EJ_x} \cdot \frac{2}{2} = \frac{10}{EJ_x}; \quad a_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} = 1,33 \text{ м};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{ql^3}{12} = \frac{2 \cdot 2^3}{12EJ_x} = \frac{1,33}{EJ_x}; \quad a_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ м};$$

$$\omega_3 = \frac{2}{EJ_x} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{EJ_x}; \quad a_3 = 2 \cdot \frac{1}{3} = 0,67 \text{ м};$$

$$\omega_4 = \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{ql^3}{12} = \frac{2 \cdot 2^3}{EJ_x} = \frac{1,33}{EJ_x}; \quad a_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ м};$$

$$\omega_5 = \frac{10}{EJ_x} \cdot \frac{2}{2} = \frac{10}{EJ_x}; \quad a_5 = 2 \cdot \frac{2}{3} = 1,33 \text{ м};$$

Определяем величину опорных реакций фиктивной балки:

$$\sum m_B^{лев} = 0; \quad V_C^{fic} = \frac{\omega_1(2+a_1) - \omega_2(2+a_2) - \omega_3 a_3 - \omega_4 a_4}{2} =$$

$$= \frac{10 \cdot (2+1,33) - 1,33 \cdot (2+1) - 2 \cdot 0,67 - 1,33 \cdot 1}{2EJ_x} = \frac{13,32}{EJ_x};$$

$$\sum y = 0; \quad V_D^{fic} = \omega_1 - V_C^{fic} - \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 + \omega_5 =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} (10 - 13,32 - 1,33 - 2 - 1,33 + 10) = \frac{2,02}{EJ_x}.$$

$$\sum m_D = 0;$$

$$M_D^{fic} = \omega_2(4+a_2) - \omega_1 \cdot (4+a_1) + V_C^{fic} \cdot 4 + \omega_3(2+a_3) + \omega_4(2+a_4) - \omega_5 a_5 =$$

$$= \frac{1,33 \cdot (4+1) - 10 \cdot (4+1,33) + 13,32 \cdot 4 + 2 \cdot (2+0,67) + 1,33 \cdot (2+1) - 10 \cdot 1,33}{EJ_x} =$$

$$= \frac{2,67}{EJ_x}.$$

Вычисляем внутренние силовые факторы, возникающие в характерных сечениях фиктивной балки. Рассматриваем левую отсеченную часть фиктивной балки. Составляем уравнения статического равновесия отсеченной части, прикладывая к сечению M_x^{fic} и Q_y^{fic} в положительном направлении (положительный момент должен растягивать нижние волокна, а поперечная сила – вращать по часовой стрелке). Из уравнений равновесия статики следует:

$$\text{– точка A: } \sum m = 0; \quad M_x^{fic} = 0; \quad \sum y = 0; \quad Q_y^{fic} = 0;$$

$$\text{– точка C: } \sum m = 0; \quad M_x^{fic} = \omega_1 a_1 - \omega_2 a_2 = \frac{10 \cdot 1,33 - 1,33 \cdot 1}{EJ_x} = \frac{11,97}{EJ_x};$$

$$\sum y = 0; \quad Q_{y,лев}^{fic} = \omega_1 - \omega_2 = \frac{10 - 1,33}{EJ_x} = \frac{8,67}{EJ_x};$$

$$Q_{y,прав}^{fic} = \omega_1 - \omega_2 - V_C^{fic} = \frac{10 - 1,33 - 13,32}{EJ_x} = -\frac{4,65}{EJ_x};$$

$$\text{– точка B: } \sum m = 0; \quad M_x^{fic} = \omega_1(2+a_1) - \omega_2(2+a_2) - V_C^{fic} \cdot 2 - \omega_3 a_3 - \omega_4 a_4 =$$

$$= \frac{10 \cdot 3,33 - 1,33 \cdot 3 - 13,32 \cdot 2 - 2 \cdot 0,67 - 1,33 \cdot 1}{EJ_x} = 0;$$

$$\sum y = 0; Q_{y, \text{прав}}^{fic} = \omega_1 - \omega_2 - V_C^{fic} - \omega_3 - \omega_4 = \\ = \frac{10 - 1,33 - 13,32 - 2 - 1,33}{EJ_x} = -\frac{7,98}{EJ_x}.$$

Рассматриваем правую отсеченную часть фиктивной балки. Из уравнений равновесия статики получаем:

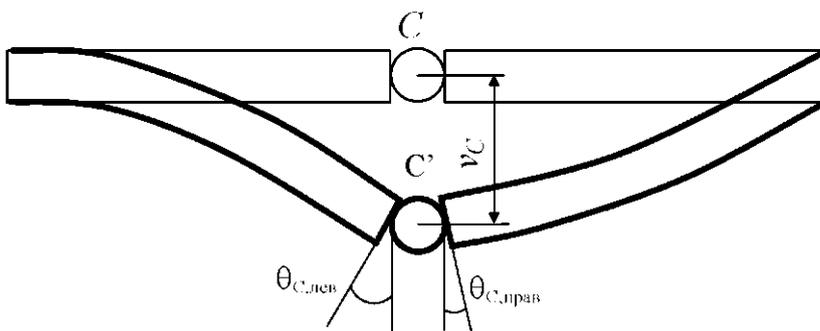
$$\text{— точка } D: \sum m = 0; M_x^{fic} = M_D^{fic} = -\frac{2,67}{EJ_x};$$

$$\sum y = 0; Q_y^{fic} = V_D^{fic} = \frac{2,02}{EJ_x}.$$

По полученным данным строим эпюры M_x^{fic} и Q_y^{fic} в фиктивной балке. Положительные ординаты эпюры M_x^{fic} откладываем в сторону нижних растянутых волокон, а положительные ординаты эпюры Q_y^{fic} — выше нулевой линии. В соответствии с используемым графоаналитическим методом определения перемещений при изгибе фиктивный изгибающий момент M_x^{fic} равен прогибу балки v , а фиктивная поперечная сила Q_y^{fic} соответствует углу поворота сечения θ .

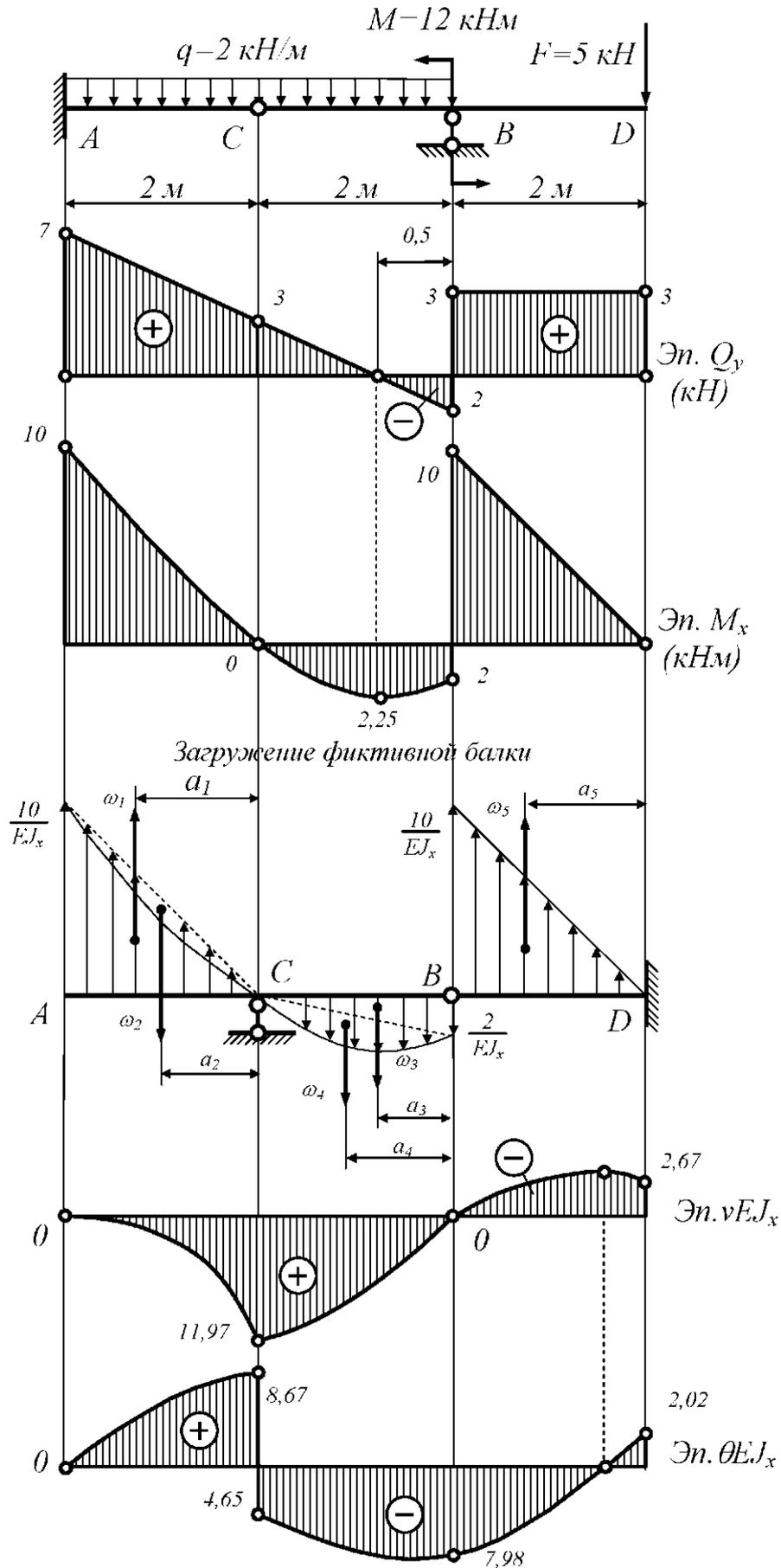
Для того, чтобы получить численные значения прогиба v в метрах и угла поворота сечения θ в радианах, необходимо задаться материалом, из которого изготовлена балка (определить значение модуля упругости E) и знать размеры поперечного сечения (вычислить величину осевого момента инерции J_x).

В точке C на эпюре прогибов v имеется излом, а на эпюре углов поворота сечения θ — разрыв. Это явление объясняется тем, что в указанной точке заданной балки установлен врезной шарнир, нарушающий сплошность



материала балки. Поэтому эскиз упругой линии балки, обычно являющийся плавной кривой линией, получает излом в указанном сечении. Кроме того, установка врезного шарнира позволяет торцевым сечениям левой и правой части балки свободно поворачиваться относительно друг друга. Поэтому углов поворота сечения балки, обычно являющейся плавной кривой линией, имеет разрыв.

Позтому эскиз упругой линии балки, обычно являющийся плавной кривой линией, получает излом в указанном сечении. Кроме того, установка врезного шарнира позволяет торцевым сечениям левой и правой части балки свободно поворачиваться относительно друг друга. Поэтому углов поворота сечения балки, обычно являющейся плавной кривой линией, имеет разрыв.



4. МЕТОД СРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

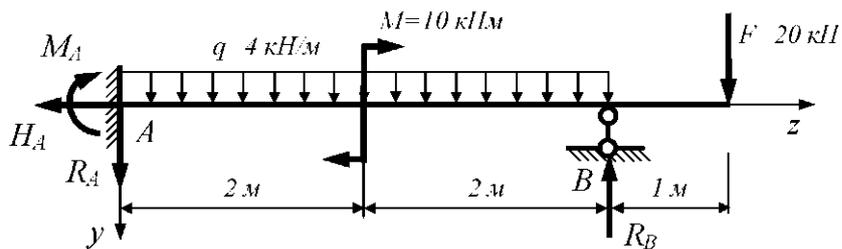


Рисунок 4.1. Статически неопределимая балка

Для заданной статически неопределимой балки (рис. 1) требуется:

1. Раскрыть статическую неопределимость системы, используя уравнения метода начальных параметров;
2. Построить эпюры внутренних силовых факторов M_x и Q_y ;
3. Используя уравнение метода начальных параметров для определения прогибов, построить эскиз упругой линии балки и согласовать его с эпюрой изгибающих моментов M_x ;
4. С помощью уравнения метода начальных параметров построить эпюру углов поворота поперечных сечений балки и согласовать ее с эпюрой вертикальных перемещений;
5. Подобрать двутавровое поперечное сечение балки из условия прочности и выполнить проверку жесткости балки.

Вертикальные и угловые перемещения определять на границах и середине грузовых участков. Все перемещения определять с точностью до величины изгибной жесткости балки EJ_x .

При загрузении заданной балки внешней нагрузкой в ее опорных устройствах возникают четыре опорные реакции M_A , R_A , H_A и R_B , величина которых неизвестна. Для данной плоской задачи можно составить только три независимых уравнения статики. Таким образом, мы имеем три уравнения статики для определения четырех неизвестных опорных реакций. Число неизвестных на единицу превышает число возможных уравнений статики, следовательно, задача однажды статически неопределима.

При решении статически неопределимых задач для определения опорных реакций необходимо использовать не только уравнения статики, но и некоторые дополнительные уравнения. В качестве этих дополнительных уравнений будем использовать метод сравнения перемещений. Суть данного метода сводится к следующему:

- заданную статически неопределимую балку необходимо превратить в статически определимую систему путем отбрасывания одной «лишней» связи;

- определить перемещение в направлении отброшенной связи от действия внешней нагрузки приложенной к полученной статически определимой балке;
- вычислить перемещение в направлении отброшенной связи от действия реактивного усилия, возникающего в статически неопределимой системе, принимая его за некоторую неизвестную величину R ;
- в заданной системе присутствуют все наложенные на нее связи, тогда суммарное перемещение в статически определимой балке от действия внешней нагрузки и реактивного усилия по направлению отброшенной «лишней» связи должно равняться нулю;
- из полученного уравнения с одним неизвестным находим реактивное усилие в отброшенной связи R ;
- используя полученное значение R , находим остальные реактивные усилия заданной балки с помощью уравнений статики.

Для раскрытия статической неопределимости в данной задаче воспользуемся уравнением метода начальных параметров, записанного для определения прогибов. Мысленно устраним одну «лишнюю» опорную связь, например, отбросив шарнирно подвижную опору в точке B (рис. 2).

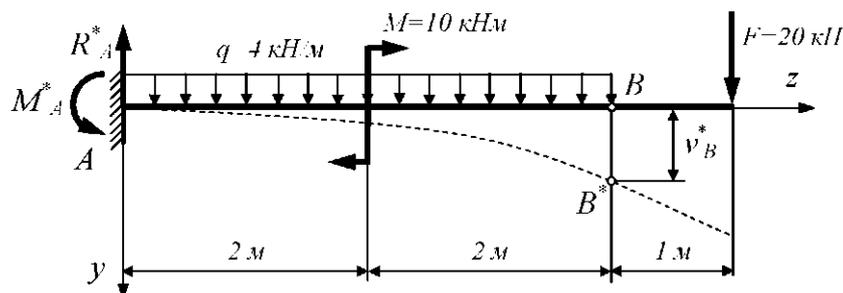


Рисунок 4.2. Деформации статически определимой балки от действия внешних нагрузок

Рассмотрим деформацию полученной консольной балки под действием внешних нагрузок. Первоначально прямолинейная ось балки искривляется, вследствие чего точка B перемещается по вертикали на величину v_B^* . Определяем опорные реакции балки в защемлении A (рис. 2) при отсутствии шарнирной опоры в точке B :

$$\sum y = 0; \quad q \cdot 4 + F - R_A = 0; \quad R_A = q \cdot 4 + F = 4 \cdot 4 + 20 = 36 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = 0; \quad M + q \cdot 4^2 / 2 + F \cdot 5 - M_A = 0;$$

$$M_A = M + q \cdot 4^2 / 2 + F \cdot 5 = 10 + 4 \cdot 4^2 / 2 + 20 \cdot 5 = 142 \text{ кНм}.$$

Запишем выражение метода начальных параметров для определения вертикальных перемещений точки B . Начальные параметры для рассматри-

ваемой задачи $v_{(0)}$ и $\theta_{(0)}$ заведомо известны и равны нулю, т.к. в начале выбранной системы координат балка закреплена. Тогда получаем

$$z_B = 4 \text{ м}; \quad EJ_x v_B^* = -\frac{R_A^* \cdot 4^3}{6} + \frac{M_A^* \cdot 4^2}{2} + \frac{q \cdot 4^4}{24} - \frac{M \cdot (4-2)^2}{2}.$$

$$EJ_x v_B^* = -\frac{36 \cdot 4^3}{6} + \frac{142 \cdot 4^2}{2} + \frac{4 \cdot 4^4}{24} - \frac{10 \cdot (4-2)^2}{2} = 774,67 \text{ кНм}^3.$$

Далее рассматриваем деформацию консольной балки с отброшенной опорой в точке B от действия реактивного усилия R_B . Сила R_B должна быть приложена в направлении отброшенной связи (рис. 3). Под действием опорной реакции R_B точка B , принадлежащая оси балки, перемещается по вертикали на величину v_B^{**} .

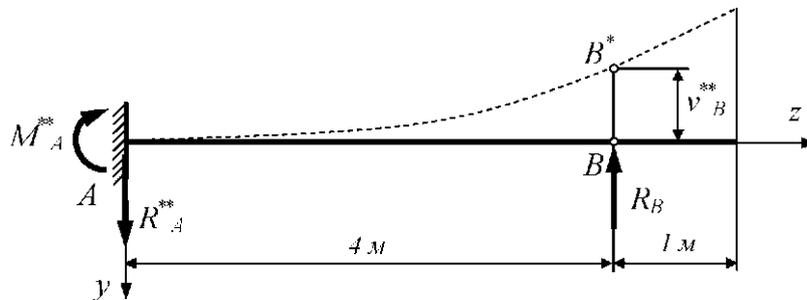


Рисунок 4.3. Деформации статически определимой балки от действия опорной реакции R_B .

Определяем опорные реакции балки в закреплении A (рис. 3) при отсутствии шарнирной опоры в точке B :

$$\sum y = 0; \quad -R_B + R_A^{**} = 0; \quad R_A^{**} = R_B;$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_B \cdot 4 - M_A^{**} = 0; \quad M_A^{**} = R_B \cdot 4.$$

Запишем выражение метода начальных параметров для определения вертикальных перемещений точки B от действия опорной реакции

$$z_B = 4 \text{ м}; \quad EJ_x v_B^{**} = \frac{R_A^{**} \cdot 4^3}{6} - \frac{M_A^{**} \cdot 4^2}{2}.$$

$$EJ_x v_B^{**} = \frac{R_B \cdot 4^3}{6} - \frac{R_B \cdot 4 \cdot 4^2}{2} = -\frac{1}{3} \cdot R_B \cdot 4^3 = -21,33 R_B.$$

В заданной балке, при наличии всех связей, вертикальное перемещение точки B равно нулю, следовательно

$$EJ_x v_B^* + EJ_x v_B^{**} = 0; \quad 774,67 - 21,33 R_B = 0,$$

$$R_B = \frac{774,66}{21,33} = 36,313 \text{ кН.}$$

В результате вычислений опорная реакция R_B имеет знак «плюс». Это говорит о том, что действительное направление опорной реакции совпадает с тем направлением реактивного усилия, что показано на рис. 3.

Определяем величину опорных реакций заданной балки с учетом найденного значения R_B (рис. 4). Воспользовавшись уравнениями статики, получаем

$$\sum y = 0; \quad q \cdot 4 + F - R_B + R_A = 0;$$

$$R_A = R_B - q \cdot 4 - F = 36,318 - 4 \cdot 4 - 20 = 0,318 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = 0; \quad M + q \cdot 4^2 / 2 + F \cdot 5 + M_A - R_B \cdot 4 = 0;$$

$$M_A = R_B \cdot 4 - M - q \cdot 4^2 / 2 - F \cdot 5 = 36,313 \cdot 4 - 10 - 4 \cdot 4^2 / 2 - 20 \cdot 5 = 3,25 \text{ кНм.}$$

Исходя из найденных значений опорных реакций, строим эпюры внутренних силовых факторов в заданной балке (рис. 4).

Строим эпюры вертикальных и угловых перемещений для заданной балки. При построении указанных эпюр будем использовать уравнения метода начальных параметров. Следует помнить, что при использовании метода начальных параметров, должны быть устранены разрывы распределенных нагрузок по длине балки. Для устранения этих разрывов необходимо догрузить балку до конца догружающей нагрузкой $q_{догр}$. Чтобы деформированное состояние балки не изменилось, следует приложить на этом же участке компенсирующую нагрузку $q_{ком}$ той же интенсивности так, как показано на рис. 4. Тогда уравнения метода начальных параметров принимают следующий вид:

$$EJ_x \theta_{(i)} = \frac{R_A z_{(i)}^2}{2} \Big|_0^5 - \frac{M_A z_{(i)}^1}{1} \Big|_0^5 + \frac{q z_{(i)}^3}{6} \Big|_0^5 - \frac{M(z_{(i)} - 2)^2}{1} \Big|_2^5 - \frac{R_B (z_{(i)} - 4)^2}{2} \Big|_4^5 - \frac{q(z_{(i)} - 4)^3}{6} \Big|_4^5.$$

$$EJ_x v_{(i)} = \frac{R_A z_{(i)}^3}{6} \Big|_0^5 - \frac{M_A z_{(i)}^2}{2} \Big|_0^5 + \frac{q z_{(i)}^4}{24} \Big|_0^5 - \frac{M(z_{(i)} - 2)^3}{2} \Big|_2^5 - \frac{R_B (z_{(i)} - 4)^3}{6} \Big|_4^5 - \frac{q(z_{(i)} - 4)^4}{24} \Big|_4^5.$$

В начале выбранной системы координат балка закреплена. Следовательно, начальные параметры $v_{(0)}$ и $\theta_{(0)}$ заведомо известны и равны нулю. Используя указанные значения начальных параметров, определяем ординаты эпюры прогибов в расчетных точках:

– точка 1: $z_{(1)} = 1 \text{ м};$

$$EJ_x \theta_{(1)} = \frac{0,313 \cdot 1^2}{2} - \frac{3,25 \cdot 1}{1} + \frac{4 \cdot 1^3}{6} = -2,739 \text{ кНм}^2;$$

$$EJ_x v_{(1)} = \frac{0,313 \cdot 1^3}{6} - \frac{3,25 \cdot 1^2}{2} + \frac{4 \cdot 1^4}{24} = -1,406 \text{ кНм}^3;$$

– точка 2: $z_{(2)} = 2 \text{ м};$

$$EJ_x \theta_{(2)} = \frac{0,313 \cdot 2^2}{2} - \frac{3,25 \cdot 2}{1} + \frac{4 \cdot 2^3}{6} = -0,543 \text{ кНм}^2;$$

$$EJ_x v_{(2)} = \frac{0,313 \cdot 2^3}{6} - \frac{3,25 \cdot 2^2}{2} + \frac{4 \cdot 2^4}{24} = -3,416 \text{ кНм}^3;$$

– точка 3: $z_{(3)} = 3 \text{ м};$

$$EJ_x \theta_{(3)} = \frac{0,313 \cdot 3^2}{2} - \frac{3,25 \cdot 3}{1} + \frac{4 \cdot 3^3}{6} - \frac{10 \cdot (3-2)}{1} = -0,344 \text{ кНм}^2;$$

$$EJ_x v_{(3)} = \frac{0,313 \cdot 3^3}{6} - \frac{3,25 \cdot 3^2}{2} + \frac{4 \cdot 3^4}{24} - \frac{10 \cdot (3-2)^2}{2} = -4,719 \text{ кНм}^3;$$

– точка 4: $z_{(4)} = 4 \text{ м};$

$$EJ_x \theta_{(4)} = \frac{0,313 \cdot 4^2}{2} - \frac{3,25 \cdot 4}{1} + \frac{4 \cdot 4^3}{6} - \frac{10 \cdot (4-2)}{1} = 12,167 \text{ кНм}^2;$$

$$EJ_x v_{(4)} = \frac{0,313 \cdot 4^3}{6} - \frac{3,25 \cdot 4^2}{2} + \frac{4 \cdot 4^4}{24} - \frac{10 \cdot (4-2)^2}{2} = 0,0053 \approx 0 \text{ кНм}^3;$$

– точка 5: $z_{(5)} = 4,5 \text{ м};$

$$EJ_x \theta_{(5)} = \frac{0,313 \cdot 4,5^2}{2} - \frac{3,25 \cdot 4,5}{1} + \frac{4 \cdot 4,5^3}{6} - \frac{10 \cdot (4,5-2)}{1} - \frac{36,313 \cdot (4,5-4)^2}{2} - \frac{4 \cdot (4,5-4)^3}{6} = 19,667 \text{ кНм}^2;$$

$$EJ_x v_{(5)} = \frac{0,313 \cdot 4,5^3}{6} - \frac{3,25 \cdot 4,5^2}{2} + \frac{4 \cdot 4,5^4}{24} - \frac{10 \cdot (4,5-2)^2}{2} - \frac{36,313 \cdot (4,5-4)^3}{3} - \frac{4 \cdot (4,5-4)^4}{24} = 8,167 \text{ кНм}^3;$$

– точка 6: $z_{(6)} = 5 \text{ м};$

$$EJ_x \theta_{(6)} = \frac{0,313 \cdot 5^2}{2} - \frac{3,25 \cdot 5}{1} + \frac{4 \cdot 5^3}{6} - \frac{10 \cdot (5-2)}{1} - \frac{36,313 \cdot (5-4)^2}{2} - \frac{4 \cdot (5-4)^3}{6} = 22,173 \text{ кНм}^2;$$

$$EJ_x v_{(6)} = \frac{0,313 \cdot 5^3}{6} - \frac{3,25 \cdot 5^2}{2} + \frac{4 \cdot 5^4}{24} - \frac{10 \cdot (5-2)^2}{2} - \frac{36,313 \cdot (5-4)^3}{3} - \frac{4 \cdot (5-4)^4}{24} = 18,833 \text{ кНм}^3.$$

По полученным значениям строим эпюру прогибов и эпюру углов поворота поперечных сечений балки. Построения выполняем с точностью до величины EJ_x . Эпюра прогибов должна быть согласована с эпюрой изгибающих моментов M_x . На тех участках, где момент растягивает верхние волокна, выпуклость эпюры прогибов направлена вверх, а на участках, где момент растягивает нижние волокна, выпуклость эпюры прогибов направлена вниз. Нулевые точки на эпюре моментов соответствуют точкам перегиба на эпюре прогибов. Эпюра углов поворота должна быть согласована с эпюрой прогибов. Точки локальных экстремумов на эпюре прогибов соответствуют нулевым точкам на эпюре углов поворота.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq R = 160 \text{ МПа.}$$

Вычисляем требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_{nec} = \frac{M_{x,max}}{R} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр №18 с $W_x = 143 \text{ см}^3$, $J_x = 1290 \text{ см}^4$.

Проверяем условие жесткости. Максимальный прогиб балки равен:

$$v_{max} = \frac{18,833}{EJ_x} = \frac{18,833 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 7,3 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Для стальных конструкций величина допускаемого прогиба определяется из следующего условия: $[f/l] = 1/200$. Здесь l – расстояние между опорами или вылет консоли балки. Максимальный прогиб балки возникает на консольном участке вылетом $l = 1 \text{ м}$, следовательно, величина допускаемого прогиба равна $[f] = l/200 = 1/200 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Условие жесткости балки $v_{max} = 7,3 \text{ мм} > [f] = 5 \text{ мм}$ не выполняется. Необходимо увеличить размеры поперечного сечения. Назначаем новые размеры двутаврового сечения, для чего максимальный прогиб балки в точке 8 приравняем величине допускаемого прогиба

$$v_{max} = \frac{18,833}{EJ_x} = \frac{18,833 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot J_x} \leq [f] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

тогда, требуемый момент инерции поперечного сечения равен

$$J_{x,nec} \geq \frac{18,833 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 1833,3 \cdot 10^{-8} = 1833,3 \text{ см}^4.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр №20 с $J_x = 1840 \text{ см}^4$. Условия прочности по максимальным нормальным и касательным напряжениям для нового сечения будут заведомо выполняться.

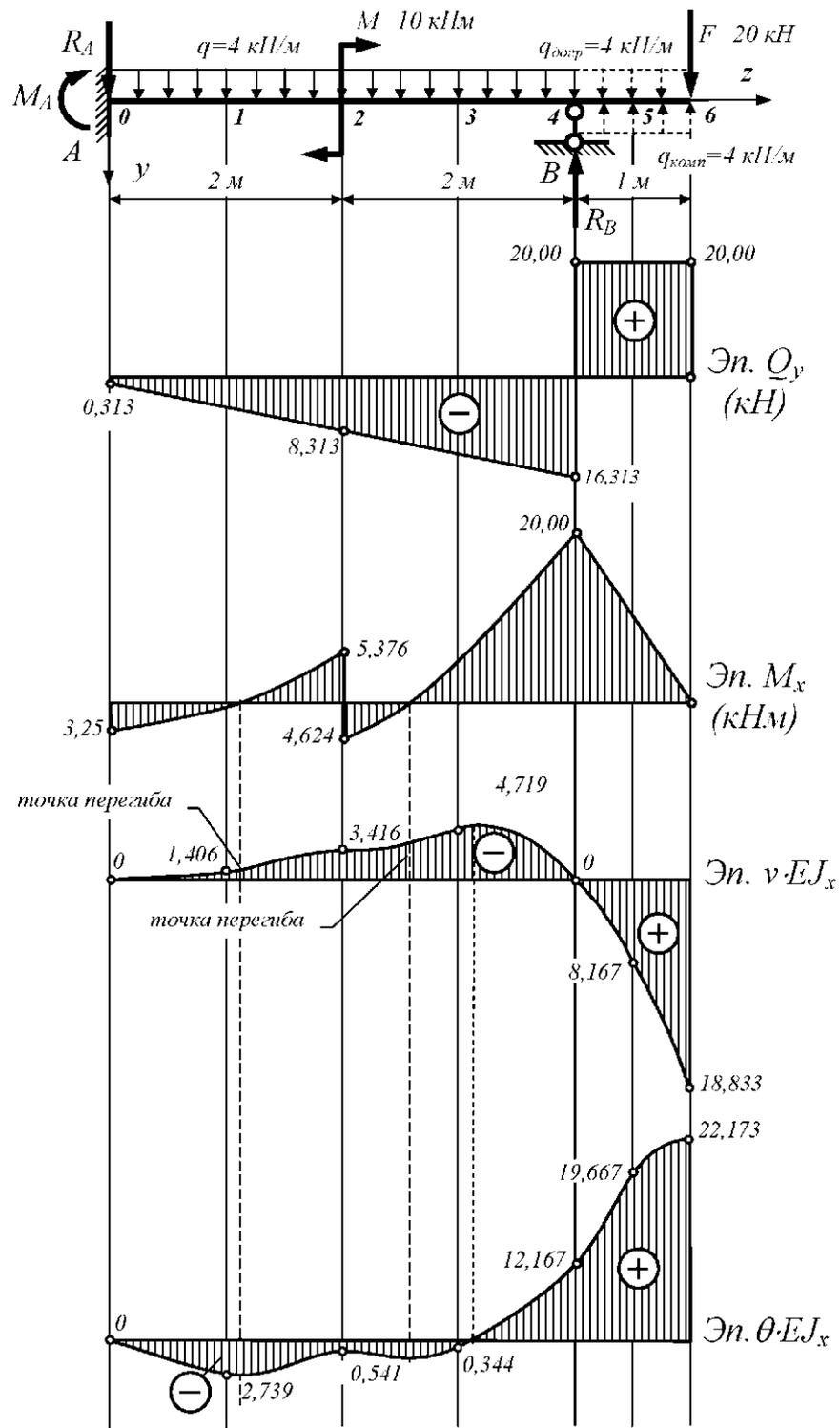


Рис. 4. Эпюры внутренних силовых факторов и перемещений в заданной статически неопределимой балке.