

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Задания и методические указания для выполнения
расчетно-графических и контрольных работ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Содержание дисциплины и вопросы для самопроверки.....

Часть первая. Методические указания для решения задач сопротивления материалов для РГР и КР.....

1.1 Расчет стержневых статически неопределимых систем при растяжении (сжатии)

1.2 . Расчет валов и пружин на жесткость и прочность при кручении.....

1.3 . Построение эпюр внутренних силовых факторов для балок и рам.....

1.4 . Задачи на прочность и жесткость при изгибе статически определимых систем.....

1.5 .Расчет статически неопределимых систем по методу сил.....

1.6 .Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии.....

1.7 .Задачи на прочность при циклических напряжениях.....

1.8 .Расчеты элементов конструкций на устойчивость

1.9 Колебания упругих систем.....

1.10. Указания к оформлению расчетно-графических работ и курсовой работы.....

Часть вторая. Справочные материалы.....

1.1. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

Статически неопределимыми системами называются системы, для которых, пользуясь условиями статики и метода сечений, нельзя определить реакции и внутренние усилия во всех элементах. Для расчета таких систем используют уравнения равновесия и уравнения перемещений. Особенностью статически неопределимых систем, которую необходимо учитывать при конструировании машин, является возникновение напряжений не только от действия внешней нагрузки, но и в результате изменения температуры, а также из-за наличия неточностей в длинах элементов. В поперечных сечениях стержней, работающих на растяжение (сжатие), возникает один внутренний силовой фактор – продольная сила N_z . Условие прочности в этом случае имеет вид [1,2]:

$$\sigma_{\max} \frac{N_z}{F} \leq [\sigma], \quad (1.1)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

Рассмотрим пример решения типовой задачи из РГР

ПРИМЕР 1. Требуется:

1. Определить допускаемое значение силы $[P]$ из расчета на прочность стержней (рис. 1.1, а), если допускаемое напряжение $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$. Брус АВ считать абсолютно жестким.
2. Определить напряжение в стержнях, если второй стержень нагрет на $\Delta t = 20^\circ \text{C}$, при этом считать, что сила P отсутствует. Модуль упругости материала стержней $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, коэффициент линейного расширения $E = 2 \cdot 10^{-4} \text{ кН/см}^2$.
3. Вычислить напряжения в стержнях при совместном действии допускаемой силы $[P]$ и нагрева.

Решение

1. Применяя метод сечений, рассмотрим равновесие отсеченной части (рис. 1.1.б). В стержнях возникают продольные силы N_1 и N_2 ,

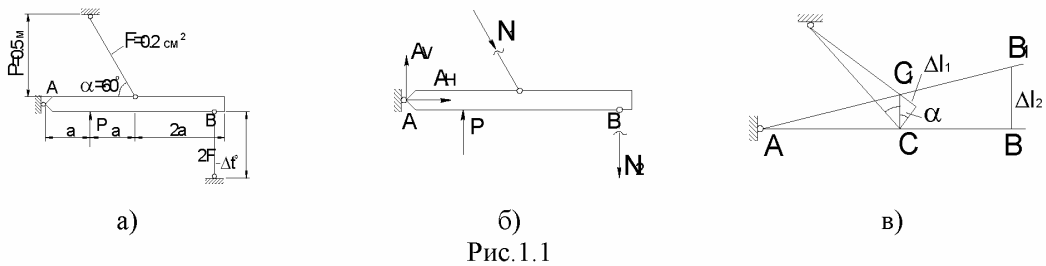


Рис. 1.1

в шарнире А – опорные реакции A_V и A_H . Усилие N_1 считаем сжимающим, а N_2 – растягивающим. Если после решения усилия получится отрицательным, то его направление следует поменять на противоположное.

Для решения задачи не надо определять реакции в шарнире А, потому что в качестве условия равновесия составим следующее уравнение:

$$\sum m_A = 0; \quad P\alpha - N_1 \sin \alpha \cdot 2a - N_2 \cdot 4a = 0,$$

Имеем следующее уравнение статики

$$N_1 \sin \alpha + 2N_2 = \frac{P}{2} \quad (1.2)$$

Из уравнения (1.2) следует, что рассматриваемая система один раз статически не определимая, поэтому необходимо составить уравнение перемещений.

После приложения нагрузки брус АВ останется прямым и займет положение АВ₁ (рис. 1.1.в). При этом перемещение шарниров В и С произойдет по дугам радиусов АВ и АС. Ввиду малости деформаций стержней Δl_i эти дуги можно заменить прямыми ВВ₁ и СС₁. точки крепления стержней с брусом АВ получают перемещения по дугам радиусов $l_i + \Delta l_i$. Эти дуги также заменяются отрезками касательных (рис. 1.1.в).

Так как стержень является наклонным, то получаем

$$CC_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha}$$

Из подобия треугольников АВВ₁ и АСС₁ имеем

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{4a}{2a} = 2; \quad \frac{\Delta l_2 \sin \alpha}{\Delta l_1} = 2; \quad \Delta l_1 = \frac{1}{2} \Delta l_2 \sin \alpha.$$

Используя закон Гука, получаем:

$$\frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{1}{2} \frac{N_2 l_2}{EF_2} \sin \alpha; \quad \frac{N_1 l}{EF \sin \alpha} = \frac{1}{2} \frac{N_2 2l}{E \cdot 2F} \sin \alpha; \quad N_1 = \frac{1}{2} N_2 \sin^2 \alpha \quad (1.3)$$

Решая систему уравнений (1.2) и (1.3), находим усилия в стержнях

$$N_1 = \frac{1}{2} \frac{P \sin^3 \alpha}{4 + \sin^3 \alpha}, \quad N_2 = \frac{P}{4 + \sin^3 \alpha}.$$

Напряжения в стержнях равны

$$\sigma_{1P} = \frac{P}{F} \frac{\sin^2 \alpha}{2(4 + \sin^3 \alpha)}, \quad \sigma_{2P} = \frac{P}{F} \frac{1}{2(4 + \sin^3 \alpha)},$$

Сравнивая полученные напряжения, приходим к выводу, что $\sigma_{2P} > \sigma_{1P}$ и $\sigma_{\max} = \sigma_{2P}$.

Условие прочности системы имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{2P} \leq [\sigma], \quad \frac{P}{F} \frac{1}{2(4 + \sin^3 \alpha)} \leq [\sigma],$$

$$P \leq 2(4 + \sin^3 \alpha) [\sigma] F = 29.8 \text{ кН}, \quad [P] = 29.8 \text{ кН}.$$

2. При нагревании второго стержня на $\Delta t = 20^\circ \text{C}$ в нем возникает сжимающее усилие (рис. 1.2.а), так как брус АВ, скрепленный с первым стержнем, будет препятствовать свободному температурному удлинению (рис. 1.2.б).



Рис.1.2

При температурном удлинении второй стержень, воздействуя на брус АВ, вызывает сжатие первого стержня. Составим уравнение равновесия

$$-N_{1t} \cdot 2a \sin \alpha + N_{2t} \cdot 4a = 0, \quad N_{1t} \sin \alpha = 2N_{2t} \quad (1.4)$$

Уравнение перемещений имеет вид:

$$\Delta l_1 = \frac{1}{2} \Delta l_2 \sin \alpha. \quad (1.5)$$

Первый стержень не нагревается, поэтому его деформация $\Delta l_1 = \frac{N_{1t} l_1}{EF_1}$. Второй стержень испытывает воздействия температуры и его деформация такова:

$$\Delta l_2 = \alpha \Delta t l_2 - \frac{N_{2t} l_2}{EF_2}$$

Подставляя эти выражения в (1.5), получим:

$$\frac{N_{1t} l_1}{EF_1 \sin \alpha} + \frac{1}{2} \frac{N_{2t} \cdot 2l_2}{E \cdot 2F} \sin \alpha = \frac{1}{2} \alpha \Delta t l_2 \sin \alpha,$$

или

$$2N_{1t} + N_{2t} \sin^2 \alpha = 2\alpha \Delta t EF \sin^2 \alpha. \quad (1.6)$$

Решая систему уравнений (1.4) и (1.6), находим усилия

$$N_{1t} = \frac{8\alpha \Delta t EF \sin \alpha}{4 + \sin^3 \alpha}, \quad N_{2t} = \frac{4\alpha \Delta t EF \sin^2 \alpha}{4 + \sin^3 \alpha}.$$

Напряжения в поперечных сечениях стержней

$$\sigma_{1t} = \frac{8\alpha\Delta t^{\circ}EF \sin\alpha}{4 + \sin^3\alpha} \approx 7.2 \text{кН} / \text{см}^2$$

$$\sigma_{2t} = \frac{2\alpha\Delta t^{\circ}EF \sin^2\alpha}{4 + \sin^3\alpha} \approx -1.56 \text{кН} / \text{см}^2$$

3. Напряжения в стержнях от действия силовой нагрузки [P]=29,8кН будут равны

$$\sigma_{1p} = \frac{29.8 \cdot 0.866^2}{0.2 \cdot 2 \cdot (4 + 0.866^3)} \approx 12 \text{кН} / \text{см}^2, \sigma_{2p} = \frac{29.8}{0.2 \cdot 2 \cdot (4 + 0.866^3)} \approx 16 \text{кН} / \text{см}^2$$

Напряжения при совместном действии силы [P] и нагрева определяются алгебраическим суммированием результатов вычисления напряжений

$$\sigma_1 = \sigma_{1p} + \sigma_{1t} = 12 + 7.2 = 19.2 \text{кН} / \text{см}^2,$$

$$\sigma_2 = \sigma_{2p} + \sigma_{2t} = 16 - 1.56 = 14.44 \text{кН} / \text{см}^2$$

Напряжение в первом стержне $\sigma_1 > [\sigma] = 16 \text{кН} / \text{см}^2$. Определим процент перегрузки.

$$k = \frac{\sigma_1 - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{19.2 - 16}{16} \cdot 100\% = 20\%$$

Перегрузка допускается не более 5%. Стержень перегружен.

1.2. РАСЧЕТ ВАЛОВ И ПРУЖИН НА ЖЕСТКОСТЬ И ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Валы и пружины, работающие на кручение, нередко являются элементами различных машин в том числе и полиграфических. Для расчета подобных конструкций необходимо определять внутренний силовой фактор – крутящий момент.

Условие прочности для элементов машин, работающих на кручение, записываются аналогично условию прочности при растяжении (сжатии)

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau] \quad (2.1)$$

Структура формулы определения абсолютной деформации при растяжении (сжатии):

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p} \quad (2.2)$$

Это дает возможность проводить решение задач при кручении аналогично решению задач для конструкций, работающих на растяжение /сжатие/.

Условие жесткости для элементов, работающих на кручение, имеет вид:

$$\theta_{\max} = \frac{\varphi_{\max}}{l} = \frac{M_{z \max}}{GJ_p} \leq [\theta] \quad (2.3)$$

ПРИМЕР 2. Определить диаметр d вала (рис 2.1. а) из условия жесткости $[\theta] = 0.4 \text{ град/м}$.

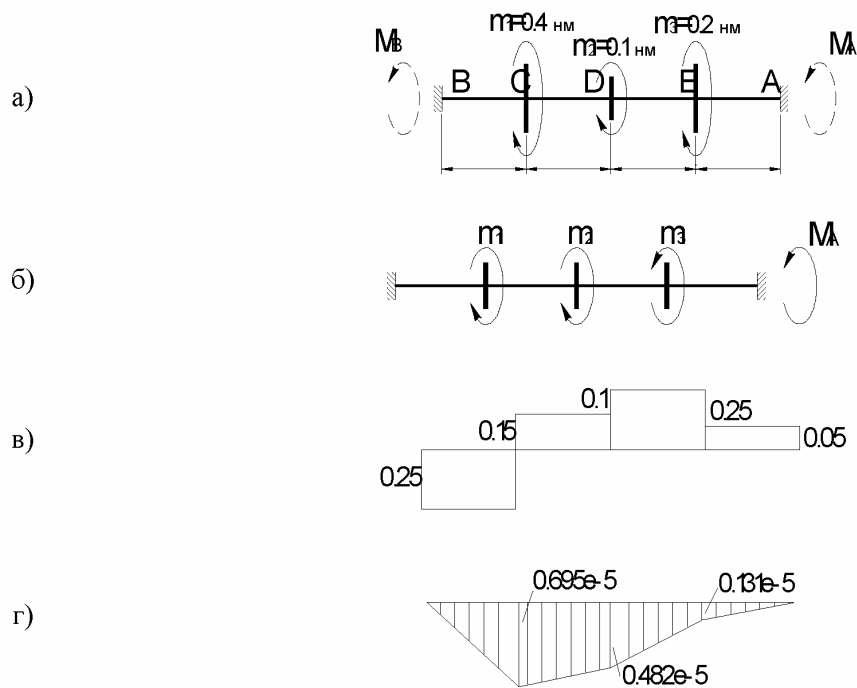


Рис.2.1

Решение

Рассматриваемая система является статически неопределимой. Для определения моментов M_A и M_B , возникающих в заделках, отбросим одну из связей (А), заменив ее действие неизвестным моментом (основная система) (рис.2.1.б). Уравнение равновесия имеет вид:

$$\sum m_z = 0; M_A + M_B - m_1 - m_2 - m_3 = 0 \quad (2.4)$$

Используем далее уравнение перемещений для заделки А.

$$\varphi_A = 0 \quad (2.5)$$

Смысл этого условия таков: угол поворота сечения А под действием внешних моментов m_1, m_2, m_3 и неизвестного момента M_A

$$\varphi_A = \varphi_A(m_1) + \varphi_A(m_2) + \varphi_A(m_3) + \varphi_A(M_A)$$

или

$$\frac{m_1 b}{GJ_p} + \frac{m_2(b+a)}{GJ_p} - \frac{m_3(b+2a)}{GJ_p} - \frac{M_A(2b+2a)}{GJ_p} = 0$$

Отсюда получаем неизвестную реакцию $M_A = \frac{0.1 \cdot 3}{6} = 0.05 \text{ Нм}$.

Из уравнения равновесия (2.4) получаем второй неизвестный момент $M_B = 0.25 \text{ Нм}$. Затем строим эпюру крутящих моментов M_z (рис. 2.1,в).

Опасным участком, для которого записывается условие жесткости, будет I участок, где $M_{z\max} = 0.25 \text{ Нм}$. Записываем условие жесткости для системы

$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GJ_p} = \frac{0.25 \cdot 10^2 \cdot 32}{0.8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 1^4} \leq 0.4 \cdot \frac{10^{-2}}{57.4},$$

из которого находим

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{2.5 \cdot 5.74}{31.4}} = 0.825 \text{ см.}$$

Округляя, принимаем $d=8.5 \text{ мм}$. Для проверки правильности решения задачи находим угол поворота сечений φ по формуле, вытекающей из формулы, обобщающей формулу (2.2):

$$\varphi = \sum_u \frac{M_{zi} l_i}{GJ_p}$$

Вычислим значения φ в сечениях вала В, С, Д, Е, А:

$$\varphi_B = 0; \varphi_C = \varphi_B - \frac{0.25 \cdot b}{GJ_p} = -0.691 \cdot 10^{-5} \text{ рад}, \varphi_D = \varphi_C + \frac{0.15 \cdot a}{GJ_p} = 0.482 \cdot 10^{-5} \text{ рад},$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \frac{0.25 \cdot a}{GJ_p} = -0.131 \cdot 10^{-5} \text{ рад}, \varphi_A = \varphi_E + \frac{0.05 \cdot b}{GJ_p} = (-0.131 + 0.133) \cdot 10^{-5} \text{ рад} \cong 0;$$

Видим, что значения M_A, M_B определены верно. Строим эпюру φ по найденным значениям

(рис. 2.1.г). Вычисленный максимальный относительный угол закручивания $\theta' = \frac{\varphi_{\max}}{b}$ на I уча-

стке не превышает допустимого

$$\theta' = \frac{\varphi_{\max}}{b} = 0.691 \cdot 10^{-4} \text{ рад/м} < [\theta] = 0.698 \cdot 10^{-4} \text{ рад/м}$$

При расчете пружин с малым углом подъема и с осевым усилием P максимальные касательные напряжения τ_{\max} и осадка пружины λ определяются по формулам [1 , 2]:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (2.6)$$

$$\lambda = \frac{8PD^3}{Gd^4} \quad (2.7)$$

ПРИМЕР 3. Определить допустимую нагрузку $[q]$ из расчета на прочность для пружин

(рис.2.2.а). Брус АВ абсолютно жесткий, допустимое напряжение $[\tau]=30 \text{ кН/м}$.

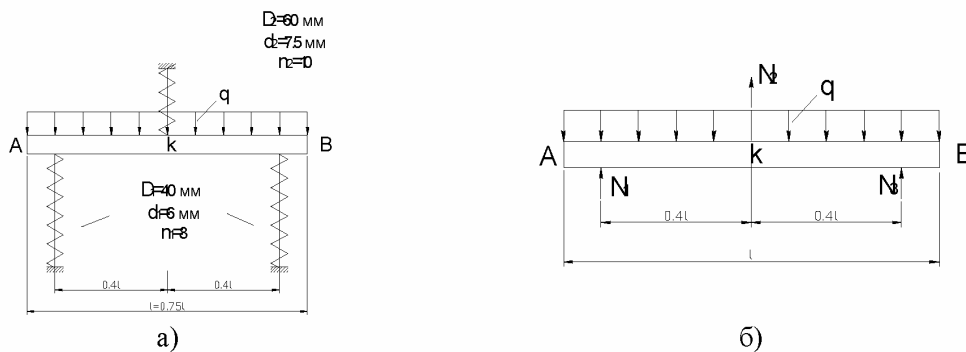


Рис2.2
Решение

Применим метод сечений к данной системе (рис.2.2,б). Обозначим усилия в пружине N_1 N_2 N_3 . Система является статически неопределимой. Расчет такой системы проводится аналогично задаче из примера раздела 1. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum m_k &= 0; N_1 \cdot 0.4l - N_3 \cdot 0.4l = 0; N_1 = N_3; \\ \sum V &= 0; N_1 + N_2 + N_3 - ql = 0; \\ 2N_1 + N_2 - ql &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнение перемещений в данном случае в силу симметрии системы записывается:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (2.9)$$

Используя формулу (2.7), получаем из уравнения (2.9)

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 = \frac{10}{8} \cdot \left(\frac{6}{7.5}\right)^4 \cdot \left(\frac{60}{40}\right)^3 = 1.75$$

Имеем

$$N_1 - 1.75N_2 = 0 \quad (2.10)$$

Решая систему уравнений (2.8),(2.9), находим усилия $N_1 = \frac{7}{18}ql$; $N_2 = \frac{4}{18}ql$. Используя фор-

мулу (2.6), получаем:

$$\frac{\tau_{\max}^{(1)}}{\tau_{\max}^{(2)}} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right) \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3 \frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{40}{60}\right) \left(\frac{7.5}{6}\right)^3 \frac{7}{4} > 1$$

Условие прочности (2.1) системы записываем тогда для первой пружины

$$\tau_{\max}^{(1)} = \frac{8N_1 D_1}{\pi d_1^3} \leq [\tau]$$

Окончательно получаем допускаемую распределенную нагрузку

$$[q] = \frac{18\pi d_1^3 [\tau]}{7/8 D_1} = 1.85 \frac{\kappa H}{м}$$

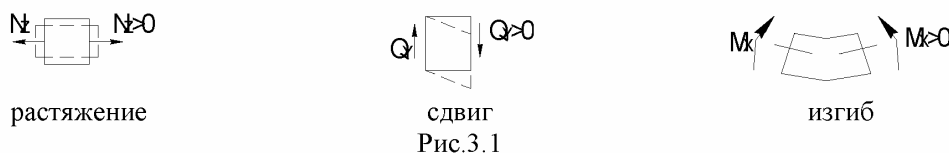
1.3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ, БАЛОК И РАМ

Для расчетов на прочность и жесткость элементов приборов и машин необходимо знать как внешние, так и внутренние силы, возникающие под действием приложенных нагрузок. Согласно методу сечений [1,2] внутренние силовые факторы, действующие в произвольном поперечном сечении, определяются следующим образом.

Продольная (поперечная) сила Nz (Qy) численно равна сумме проекций на ось $z(y)$ всех внешних сил, приложенных к отсеченной части стержня (балки).

Изгибающий момент Mx численно равнее сумме моментов относительно оси x всех внешних сил, приложенных к отсеченной части.

Знаки внутренних силовых факторов определяются по виду деформации, которую они вызывают.



По обе стороны элемента внутренние силовые факторы, направленные в разные стороны, но при этом имеют одинаковый знак. Этим принципиально отличается правило знаков для внутренних силовых факторов от правила знаков для внешних сил в курсе теоретической механики (рис3.1).

При построении эпюр Q_y и M_x и проверке правильности их построения необходимо использовать дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{dQ_y}{dz} = q, \quad \frac{d^2M_x}{dz^2} = q, \quad (3.1)$$

Сформулируем правила построения эпюр Q_y , M_x , N_z вытекающие из метода сечений и дифференциальных зависимостей:

1. Если на участке отсутствует распределенная нагрузка, то поперечная сила Q_y постоянна, а эпюра изгибающего момента M_x линейна.
2. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре Q_y должен быть скачок на величину этой силы, на эпюре M_x – излом.
3. Если Q_y вычисляется через внешние силы, действующие слева от сечения, то ординаты эпюры Q_y откладываются в направлении этих сил.
4. В сечении, где приложен внешний сосредоточенный момент, на эпюре M_x должен быть скачок на величину этого момента, на эпюре Q_y при этом изменений нет.
5. Ординаты эпюры M_x откладываются в сторону сжатых волокон.
6. Если на участке приложена равномерно распределенная нагрузка q , то поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M_x – по квадратной параболе. При этом парабола M_x всегда обращена выпуклостью навстречу распределенной нагрузке q .
7. Если поперечная сила обращается в ноль, то в этом сечении момент M_x достигает экстремального значения.
8. В сечении стержня, где приложена осевая внешняя сосредоточенная сила, на эпюре N_z должен быть скачок на величину этой силы.

ПРИМЕР 4. Построить эпюры M_x и Q_y для заданной балки (рис.3.2).

Решение

1. Предположим, что опорные реакции А и В направлены вверх (рис.3.2.а). Из уравнений равновесия имеем: $\sum H = 0$, $A_H = 0$;

$$\sum m_A = 0,$$

$$B_y \cdot 0,6 - 400 \cdot 0,3 \cdot 0,45 + 20 \cdot 0,3 + 24 = 0, \quad B_y = 40 \text{ н};$$

$$\sum m_B = 0,$$

$$-A_y \cdot 0,6 - 24 - 20 \cdot 0,3 + 400 \cdot 0,3 \cdot 0,15 = 0, \quad A_y = 60 \text{ н};$$

Для проверки найденных реакций используем уравнение равновесия.

$$\sum V = 0, \quad A_y + B_y - qa + P = 60 + 40 - 400 \cdot 0,3 + 20 \equiv 0$$

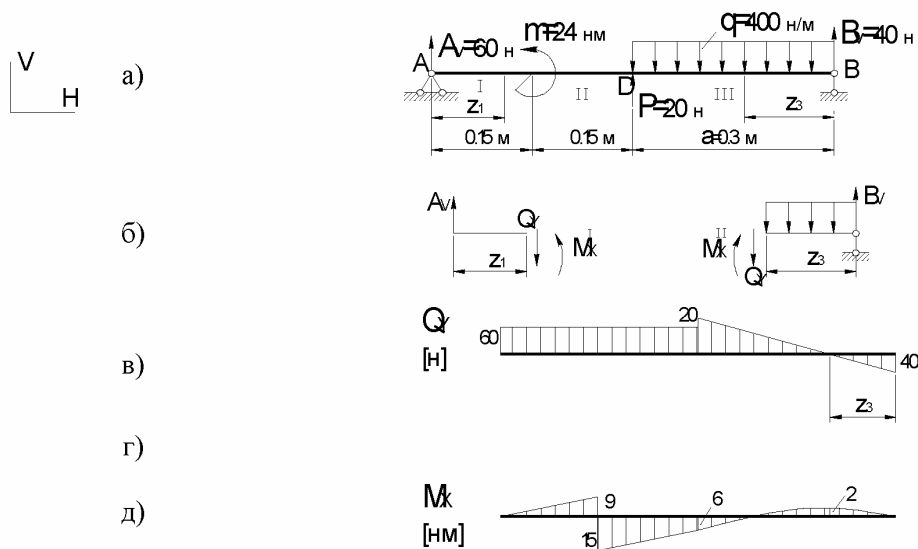


Рис.3.2

Уравнение тождественно удовлетворяется, что указывает на правильность определения опорных реакций.

2. Для построения эпюр Q_y и M_x заданную балку разобьем на участки I, II, III таким образом, чтобы в пределах каждого участка силовой фактор определялся непрерывной функцией от z . Применим метод сечений к I и III участкам (рис.3.2.б). Выражения для внутренних силовых факторов имеют вид:

$$0 \leq z_1 \leq 0,15 \text{ м},$$

$$0 \leq z_3 \leq 0,3 \text{ м},$$

$$Q_y^I = A_y = 60 \text{ н},$$

$$Q_y^{III} = -B_y + qz_3,$$

$$M_x^I = A_V \cdot z_1.$$

$$M_x^{III} = B_V \cdot z_3 - q \frac{z_3^2}{2}.$$

Построим эпюру Q_y (рис.3.2.в), используя выражения Q_y^I и Q_y^{III} . Согласно правилам 3,4 ординаты эпюры Q_y , равны A_V откладываются вверх и постоянны на I и II участках. В сечении D (рис.3.2.а), где приложена сила P, на эпюре Q_y будет скачок на величину P и в направлении этой силы. В сечении B, где $z_3=0$, получаем $Q_y^B = -B_V = -40H$. По значениям Q_y^D, Q_y^B поперечной силы в сечениях D и B строим прямую Q_y на III участке. Прямая пересекла ось на расстоянии z_0 от опоры B. Значение z_0 найдем, приравняв $Q_y^{III}(z_0)$ нулю. Тогда $z_0 = B_V / q = 40 / 400 = 0,1m$. В этом сечении на эпюре M_x достигается экстремальное значение.

Согласно правилам 1,5 эпюра M_x на I участке линейна и положительна. При $z_1 = 0$ $M_x^I = 0$; при $z_1 = 0,15m$ $M_x^I = 60 \cdot 0,15 = 9Hm$. Согласно правилу 4 на эпюре M_x в сечении C будет скачек на величину момента m (рис3.2.д). Скачек момента направлен вниз, так как при переходе с I участка на II участок внешний момент m вызывает сжатие нижних волокон (рис3.2.г). На II участке прямая M_x^{III} параллельна прямой M_x^I , так как производная Q_y на обоих участках одинакова. Значение M_x в сечении D равно $M_x^D = A_V \cdot z_D - m = 6Hm$. На III участке эпюра M_x согласно правилу 6 имеет вид квадратной параболы, которая выпуклостью направлена навстречу распределенной нагрузке q и имеет максимум в сечении $z_3 = z_0$. Найдем

$$M_x^{III}(z_0) = B_V z_0 - q \frac{z_0^2}{2} = 40 \cdot 0,1 - 400 \cdot \frac{0,01}{2} = 2Hm. \text{ Параболу строим по трем значениям момента } M_x^D, M_x^B=0, M_x^{III}(z_0). \text{ Отметим, что в сечении D на эпюре } M_x \text{ согласно правилу 3 будет излом.}$$

Проверим выполнение дифференциальных зависимостей (3.1) на построенных эпюрах Q_y, M_x . На участках I,II производная положительная функция (M_x) возрастает. В сечении D производная (Q_y) имеет скачек, а функция (M_x) имеет излом. В сечении $z_3 = z_0$ производная (Q_y) равна нулю, функция (M_x) достигает максимума на III участке.

Для плоской рамы в общем случае нагружения возникают три силовых фактора: Nz, Q_y, M_x . Условимся на стержни рамы смотреть по правилу размерных линий и рассматривать их, как балки. Правила построения эпюр для балок используются и для плоских рам. На каждом стержне (балке) ось z направлена вдоль оси стержня, ось y – перпендикулярна к оси стержня, а ось x – перпендикулярна к плоскости чертежа.

ПРИМЕР 5. Построить эпюры Nz , Qy , Mx для заданной плоской рамы (рис.3.3,а).

Решение

1. Направим вертикальные реакции A_v, B_v вверх. Горизонтальная составляющая B_H должна быть равна силе P , но противоположна ей по направлению, что следует из уравнения равновесия $\sum H = 0$, $B_H = P = 20H$. Для определения реакций A_v, B_v составим уравнения равновесия:

$$\sum m_B = 0; \quad -m + \frac{qa^2}{2} - P_a + m - A_v a = 0,$$

$$-2 + 200 \cdot \frac{0,6^2}{2} - 20 \cdot 0,6 + 2 - A_v \cdot 0,6 = 0, \quad A_v = 40H$$

$$\sum m_K = 0; \quad -A_v \frac{a}{2} - m + B_v \frac{a}{2} - B_H a + m = 0,$$

$$-40 \cdot 0,3 - 2 - 20 \cdot 0,6 + B_v \cdot 0,3 + 2 = 0, \quad B_v = 80H$$

Положительные значения реакций указывают на совпадение первоначально выбранных направлений усилий с истинным. Для проверки их численных значений рассмотрим уравнение равновесия $\sum V = 0$, которое должно удовлетворяться тождественно при найденных значениях реакций:

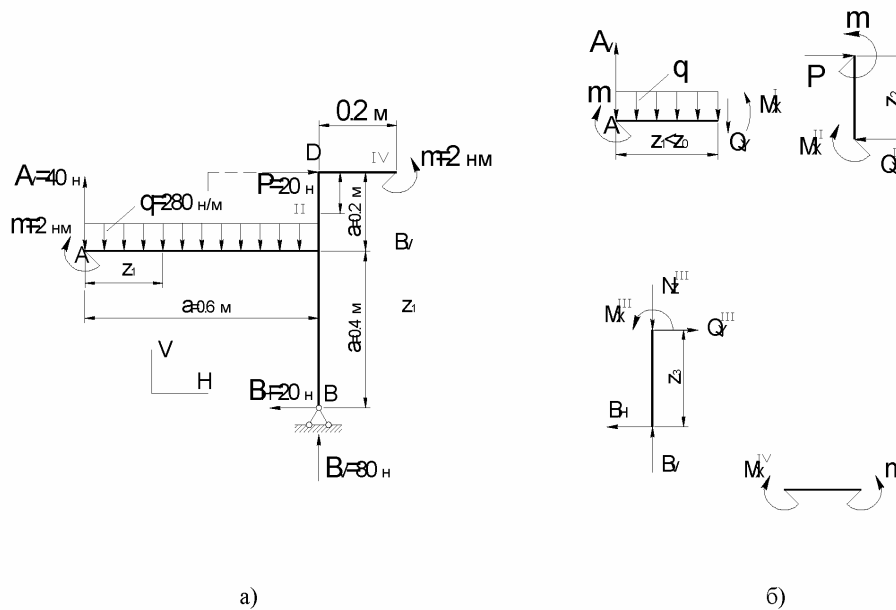
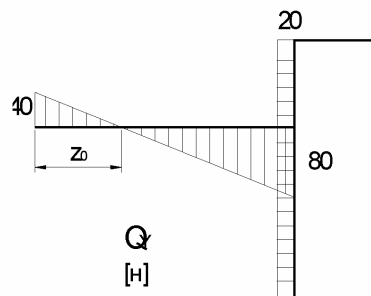


Рис.3.3



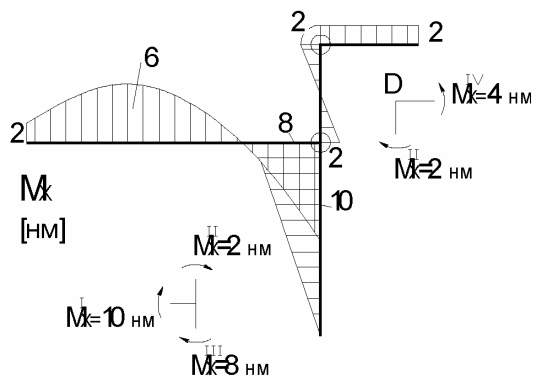


Рис.3.4

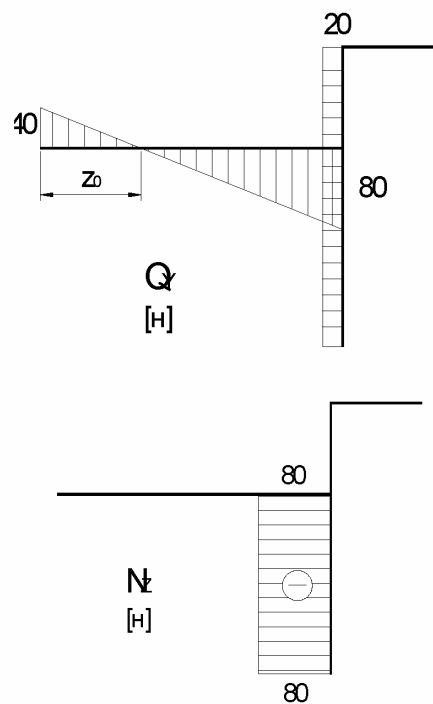


Рис.3.5

$$\sum V = 0, A_v + B_v - qa = 40 + 80 - 200 \cdot 0,6 \equiv 0$$

Таким образом, реакции найдены правильно.

2. Число участков в данном случае равно числу стержней рамы. Применяя метод сечений к I участку (рис.3.3.б), получим выражения для внутренних силовых факторов:

$$0 \leq z_1 \leq 0,6 \text{ м}; N_z^I = 0; Q_y^I = A_v - qz_1; M_x^I = m + A_v z_1 - \frac{qz_1^2}{2}.$$

Видно, что эпюра Q_y линейна, а эпюра M_x является параболой. При $z_1 = 0$ (опора А) Q_y^I, M_x^I будут $Q_y^A = A_v = 40 \text{ Н}$, $M_x^A = m = 2 \text{ Н·м}$. В сечении, где Q_y обращается в нуль, момент M_x достигает максимума:

$$Q_y^I(z_0) = 0; z_0 = A_v / q = 40 / 200 = 0,2 \text{ м}; M_x^I = 2 + 40 \cdot 0,2 - 200 \cdot \frac{0,2^2}{2} = 6 \text{ Н·м}.$$

В сечении $z_1 = 0,6 \text{ м}$ значения силовых факторов будут: $Q_y^I = -80 \text{ Н}$, $M_x^I = -10 \text{ Н·м}$. На первом участке полученные значения M_x, Q_y, N_z наносим на соответствующие эпюры (рис. 3.4, 3.5).

Применяя метод сечений на втором участке (рис.3.3.б) получим формулы для силовых факторов:

$$0 \leq z_1 \leq 0,2m, N_z^{II} = 0, Q_y^{II} = P = 20H, M_x^{II} = m - Pz_2.$$

Вычислим значения Q_y^{II}, M_x^{II} в сечениях $z_2 = 0, z_2 = 0,2m$ и по ним построим соответствующие эпюры на втором участке. Применение метода сечений на третьем и четвертом участках (рис.3.3б). Применяя метод сечений на втором участке (рис.3.3.б) дает следующие выражения для внутренних силовых факторов:

$$0 \leq z_1 \leq 0,4m; \quad N_z^{III} = -B_V = -80H; \quad Q_y^{III} = B_H = 20H, M_x^{III} = B_H z_3$$

$$0 \leq z_1 \leq 0,2m; \quad N_z^{IV} = Q_y^{IV} = 0; \quad M_x^{IV} = m = 2Hm$$

Видно, что эпюра M_x на третьем участке линейна, а на четвертом участке постоянна. Найдя соответствующие значения Q_y и M_x , в крайних сечениях третьего и четвертого участков, завершаем построение эпюр, M_x, Q_y, N_z для заданной плоской рамы (рис.3.4, 3.5).

Проверку выполнения дифференциальных зависимостей (3.1) проводим аналогично проверке в примере 4. Для плоской рамы необходима также проверка равновесия узлов. Рассмотрим равновесие узла С, в котором соединены три стержня. Вырежем участок рамы вблизи этого узла (рис.3.4) и приложим соответствующие моменты M_x для трех участков по направлению сжатых волокон. Нетрудно видеть, что узел С находится в равновесии, так как имеем $\sum m_C = 0$. Аналогично проверяем узел D (рис.3.4). В узле, где соединяются два стержня и не приложены внешний сосредоточенный момент, найденное значение для одного стержня можно перенести раствором циркуля на другой стержень.

1.4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Упругие элементы фиксирующих и измерительных устройств, валы зубчатых передач и другие элементы машин работают в условиях изгиба. Основным силовым фактором, возникающем в поперечных сечениях при изгибе, является изгибающий момент M_x (M_y). Условие прочности в этом случае имеет вид [1,2].

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (4.1)$$

где M_x – изгибающий момент в опасном сечении; W_x – осевой момент сопротивления сечения.

ПРИМЕР 6. Для балки (рис.4.1а) определить из расчета на прочность номер двутаврового сечения, размеры поперечного сечения в форме а) круга диаметром d ; б) кольца с отношением диаметров $c = \frac{d_0}{d_1} = 0.8$; в) прямоугольника с отношением сторон $k = \frac{h}{b} = 2$. Материал сталь 20, $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$. Составить таблицу отношений площадей указанных сечений к площади двутаврового сечения.

Решение

Опасным сечением балки является сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшего по абсолютной величине значения. Для этого строится эпюра Mx аналогично примеру 4 раздела 3. Из эпюры, построенной для балки (рис.4.1), видно, что $Mx_{\max} = 4.16 \text{ кНм}$. Используя условие прочности (4.1), находим осевой момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{4.16 \cdot 10^2}{16} = 26 \text{ см}^3$$

По таблице приложения для двутавра №10 $W_x = 39.6 \text{ см}^3$, $F = 12.0 \text{ см}^2$. Выбираем двутавр №10. В соответствии с требуемой из условия прочности величиной осевого момента сопротивления $W_x = 26 \text{ см}^3$ определяем размеры поперечных сечений:

а) для круга $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$

$$\frac{3.14 d^3}{32} \geq 26 \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{26 \cdot 32}{3.14}} = 6.422 \text{ см}$$

Принимаем $d = 6.43 \text{ см}$, $F = \pi d^2 / 4 = 3.14 \cdot 6.43^2 / 4 = 32.5 \text{ см}^2$.

б) для кольца $W_x = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4)$, $c = \frac{d_0}{d_1}$

$$\frac{3.14 d^3 (1 - 0.8^4)}{32} \geq 26 \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{26 \cdot 32}{3.14 \cdot (1 - 0.8^4)}} = 7.66 \text{ см}$$

Принимаем $d = 7.7 \text{ см}$, $d_0 = 0.8 \cdot 7.7 = 6.16 \text{ см}$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (1 - c^2) = \frac{3.14 \cdot 7.7^2}{4} (1 - 0.8^2) = 16.76 \text{ см}^2$$

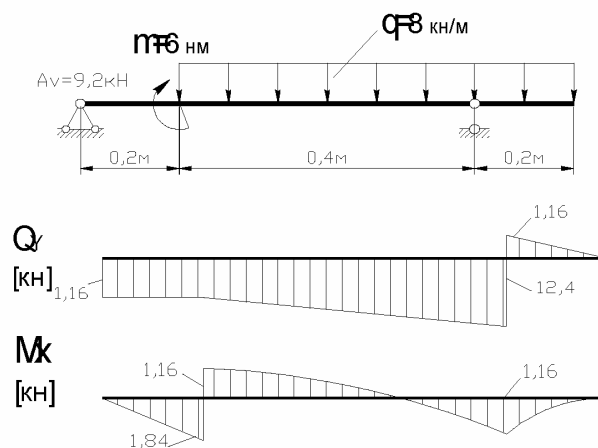


Рис.4.1

в) для прямоугольника $W_x = \frac{bh^2}{6}, k = \frac{h}{b} = 2$

$$\frac{4}{6} \cdot b^3 \geq 26, \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 26}{4}} = 3.39 \text{ см}$$

Принимаем $b = 3.4 \text{ см}; h = 2b = 6.8 \text{ см}; F = 23.12 \text{ см}^2$.

Таблица 4.1

Таблица отношений площадей

Форма сечений	Двутавр	Круг	Кольцо	Прямоугольник
Площадь сечения	12,0	32,5	16,76	23,12
Отношение площадей	1	2,7	1,4	1,93

Современные машины и механизмы содержат большое количество высокоточных механических элементов – направляющих, осей измерительных винтов и т.д. Сохранение формы и размеров большинства из них в процессе работы является важным условием обеспечения необходимой точности измерений. В этих случаях упругие элементы машин должны удовлетворять условию жестко

$$\Delta_{\max} \leq [\Delta] \quad (4.2)$$

где – допускаемое перемещение (прогиб).

Для определения перемещений при изгибе используют интеграл Мора

$$\Delta_{kp} = \int_0^l \frac{M_p \overline{M}_k}{EJ_x} dz. \quad (4.3)$$

Вычисление этого интеграла проводится с помощью правила Верещагина. Для этого строят две эпюры – одну эпюру от заданной нагрузки (M_p), другую (\overline{M}_k) – от единичной нагрузки, приложенной в нужном сечении в направлении искомого перемещения. В качестве единичной нагрузки при определении линейного перемещения используют единичную силу, а при определении углового перемещения – единичный момент

$$\Delta_{kp} = \frac{\Omega_p \overline{M}_k(z_c)}{EJ_x}.$$

Здесь Ω_p – площадь грузовой эпюры, $\overline{M}_k(z_c)$ – ордината единичной эпюры, расположенная под центром тяжести грузовой эпюры.

Если обе эпюры M_p и \overline{M}_k лежат с одной стороны оси, т.е. имеют одинаковые знаки, то перемещение положительное, при разных знаках моментов перемещение отрицательное. Если эпюра единичных моментов имеет ломаное очертание, то вычисление необходимо производить для каждого участка, на котором единичная эпюра описывается линейным законом, и результат сложить.

При вычислении перемещений по правилу Верещагина необходимо знать величины площадей и координаты положения центров тяжести некоторых геометрических фигур. В справочных материалах даны площади и координаты центров тяжести фигур, одна сторона которых является выпуклой или вогнутой квадратичной параболой. Указаны также некоторые приемы разбиения сложных фигур на эпюрах изгибающих моментов.

ПРИМЕР 7. Для двутавровой балки № 12 $J_x = 350 \text{ см}^4$ определить допускаемое значение момента $[m]$ из условия жесткости, если $[\Delta] = 2 \text{ мм}$ (рис. 4.2).

Решение

Строим эпюру грузовых моментов M_p и эпюру $\overline{M}_k(z)$ от единичной силы, приложенной в произвольном сечении. Тогда прогиб в этом сечении

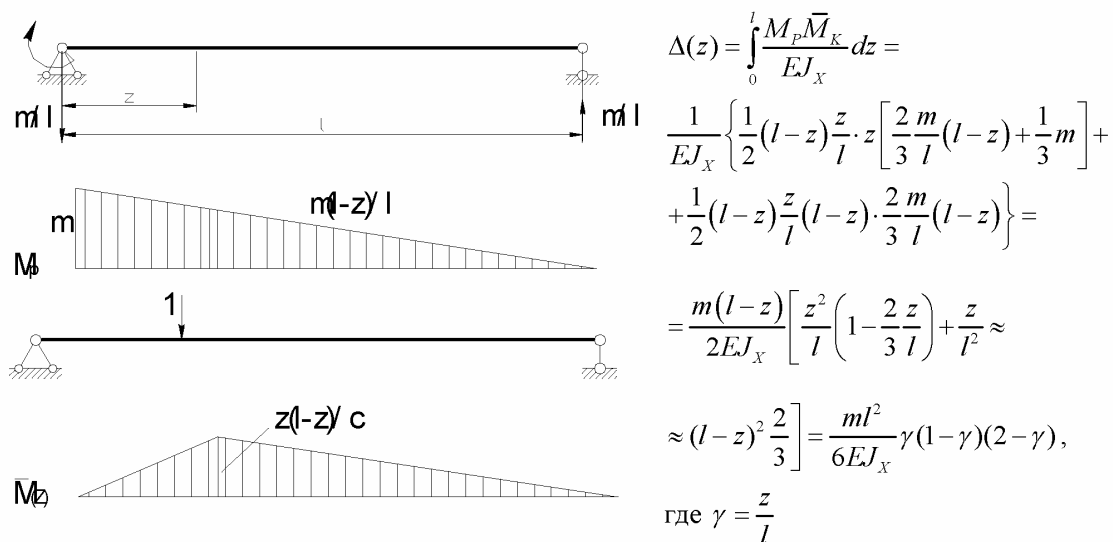


Рис.4.2

Проверим выполнение граничных условий. При $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$ $\Delta = 0$. Далее определяем величину максимального прогиба Δ_{\max} . Для этого необходимо решить задачу определения экстремума функции $\Delta(z)$. Вычисляя производную функции $\Delta(z)$ и приравняв ее нулю, получаем следующее уравнение

$$3\gamma^2 - 6\gamma + 2 = 0,$$

корни которого равны $\gamma_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}/3$. Первый корень соответствует точке, лежащей вне балки, а второй $\gamma_2 = 1 - \sqrt{3}/3 \approx 0.42$ или $z_* = 0.42l$. Условие жесткости балки при этом запишется:

$$\Delta_{\max} = 0.641 \frac{ml^2}{EJ_x} \leq [\Delta]$$

Решая это неравенство относительно m , получаем

$$m \leq \frac{[\Delta] \cdot EJ_x}{0.641 \cdot l^2} = \frac{0.2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 350}{0.641 \cdot 200^2} = 546 \text{ кНсм} = 5.46 \text{ кНм}.$$

Таким образом, допускаемый момент равен

$$[m] = 5.46 \text{ кНм}.$$

ПРИМЕР 8. Расчет перемещений сечений бруса малой кривизны. Для заданного бруса (рис. 4.3.) необходимо:

- 1) Определить полное перемещение сечения А.
- 2) Определить вертикальное и горизонтальное перемещения сечения А.
- 3) Определить угол поворота сечения В.
- 4) Провести проверку найденных перемещений.

Дано: $EJ_x = const, P_1 = \frac{1}{2}P, P_2 = P, R$.

Решение

2. Определим направление отсчета углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (рис. 4.3) для трех участков, на которые разбиваем брус.

Перемещения в сечении К определяем при помощи интеграла Мора

$$\Delta_{kP} = \sum_i R_i \int_{\varphi_i} \frac{M_p(\varphi) \overline{M_k(\varphi)}}{EJ_x} d\varphi,$$

где R_i - радиус кривизны i -ого участка; $M_p(\varphi)$ и $\overline{M_k(\varphi)}$ - выражения изгибающего момента для i -ого участка бруса от заданной нагрузки P_1, P_2 и единичной нагрузки, приложенной в сечении К.

Для каждого участка составим аналитические выражения изгибающего момента $M_p(\varphi)$ и единичных моментов $\overline{M_{AV}}(\varphi), \overline{M_{AH}}(\varphi)$ от вертикальных и горизонтальных единичных сил, приложенных в сечении А.

Рассмотрим участок I (CA): $0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}, R_1 = R, M_p^I(\varphi) = -PR \sin \varphi_1 - \frac{P}{2} R(1 - \cos \varphi_1),$

$$M_{pA} = M_p^I\left(\frac{\pi}{2}\right) = -PR - \frac{PR}{2} = -\frac{3}{2}PR.$$

Приложим в сечении А вертикальную и горизонтальную силы и покажем это на рис. 4.4, 4.5.

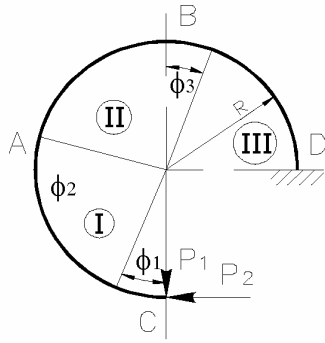


Рис. 4.3

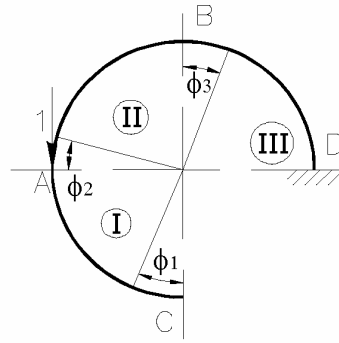


Рис. 4.4

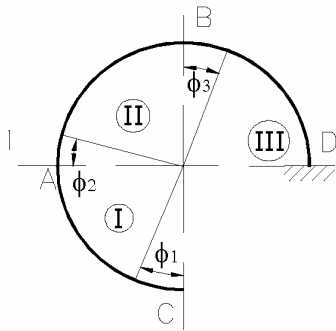


Рис. 4.5

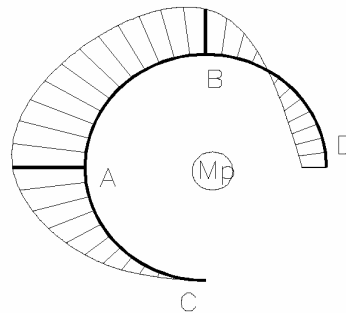


Рис. 4.6

Из метода сечений на участке I следует, что $\overline{M}_{AV}^I = 0, \overline{M}_{AH}^I = 0$.

Участок II (AB): $0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}, R_2 = R, M_p^II(\varphi) = -PR \cos \varphi_2 - \frac{P}{2} R(1 + \sin \varphi_2),$

$$\overline{M}_{AV}^{II}(\varphi_2) = 1 \cdot (R - R \cos \varphi_2) = R(1 - \cos \varphi_2),$$

$$\overline{M}_{AH}^I(\varphi_2) = -1 \cdot R \sin \varphi_2 = -R \sin \varphi_2.$$

Участок III (BD) : $0 \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2}, R_3 = R, M_p^{III}(\varphi) = PR \sin \varphi_3 - \frac{P}{2}R(1 + \cos \varphi_3),$

$$\overline{M}_{AV}^{III}(\varphi_3) = 1 \cdot R(1 + \sin \varphi_3), \overline{M}_{AH}^I(\varphi_2) = -1 \cdot R \cos \varphi_3 = -R \cos \varphi_3.$$

Построим эпюры моментов $M_p(\varphi) = M_x, \overline{M}_{AV}, \overline{M}_{AH}$ (рис.4.6,4.7,4.8)

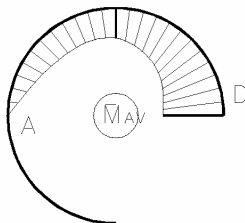


Рис. 4.7

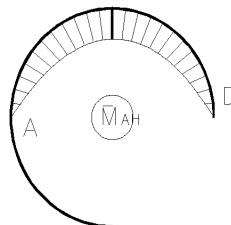


Рис. 4.8

Вычислим теперь вертикальное перемещение сечения А:

$$\delta_a = \Delta_{AV} = \sum_i R_i \int_{\varphi_i} \frac{M_p(\varphi) \overline{M}_{AV}(\varphi)}{EJ_x} d\varphi = \frac{R}{EJ_x} \left[-\frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_2 d\varphi_2 - \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi_2 - \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_2 d\varphi_2 + \right. \\ \left. + PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi_2 d\varphi_2 + \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 d\varphi_2 - \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi_3 - \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 d\varphi_3 + PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_3 d\varphi_3 - \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 \cdot \sin \varphi_3 d\varphi_3 \right]$$

Интегралы

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 1; J_2 = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 1; J_3 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \approx 0.785; J_4 = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} = 0.5;$$

$$J_5 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \approx 0.785;$$

в этом выражении вычисляем при помощи таблицы интегралов. Получаем значение:

$$\delta_s = \frac{PR^3}{EJ_x} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{PR^3}{EJ_x}$$

Знак минус говорит о том, что направление перемещения не совпадает с направлением единичной силы.

Определим теперь горизонтальное перемещение сечения А:

$$\delta_z = \Delta_{AH} = \sum_i R_i \int_{\varphi_i} \frac{M_p(\varphi) \overline{M_{AH}}(\varphi)}{EJ_x} d\varphi = \frac{R}{EJ_x} \left[\frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_2 d\varphi_2 + \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_2 d\varphi_2 + \right. \\ \left. + PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 d\varphi_2 + \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 d\varphi_3 + \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi_3 d\varphi_3 - PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 \cdot \sin \varphi_3 d\varphi_3 \right]$$

Используя найденные интегралы J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 , вычисляем горизонтальное перемещение

$$\delta_z = \frac{PR^3}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \right) = \frac{PR^3}{EJ_x} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) \approx 1.785 \frac{PR^3}{EJ_x}$$

2) Определим полное перемещение сечения А по формуле:

$$\delta_A = \sqrt{\delta_s^2 + \delta_z^2}.$$

Подставляя найденные значения вертикального и горизонтального перемещений, получаем

$$\delta_A = \frac{PR^3}{EJ_x} \sqrt{(-1)^2 + (1.785)^2} \approx 2.046 \frac{PR^3}{EJ_x}.$$

3) Определим угол поворота сечения В (рис.4.9). Для этого прикладываем в этом сечении единичный момент и записываем по участкам аналитические выражения для изгибающего момента \overline{M}_B :

$$\text{Участок I (CA)} : \overline{M}_B^I = 0; 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}, R_1 = R.$$

$$\text{Участок II (AB)} : \overline{M}_B^{II} = 0; 0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}, R_2 = R.$$

$$\text{Участок III (BD)} : \overline{M}_B^{III} = 0; 0 \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2}, R_3 = R.$$

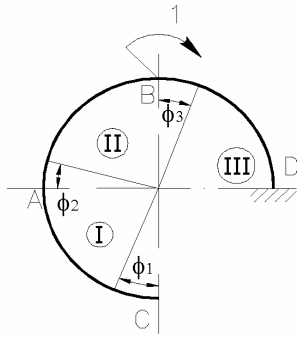


Рис.4.9

$$\theta_B = \sum_i R_i \int_{\varphi_i} \frac{M_p(\varphi) \bar{M}_B(\varphi)}{EJ_x} d\varphi = \frac{PR^2}{EJ_x} \left[- \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_3 d\varphi_3 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi_3 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 d\varphi_3 \right]$$

При помощи найденных интегралов J_1, J_2 находим величину θ_B

$$\theta_B = \frac{PR^2}{EJ_x} \left(-1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{PR^3}{EJ_x} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \approx 0.285 \frac{PR^2}{EJ_x}$$

4) Проведем проверку найденных перемещений. Для этого составим аналитические выражения для моментов $M_p, \bar{M}_{AV}, \bar{M}_{AH}, \bar{M}_B$ с противоположным направлением отсчета углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (рис. 4.10-4.12). Определим при помощи уравнений статики реакции в заделке:

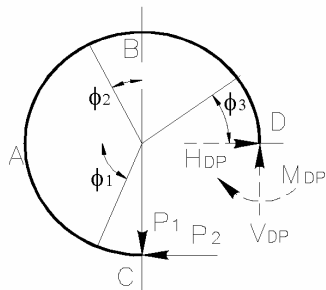


Рис. 4.10

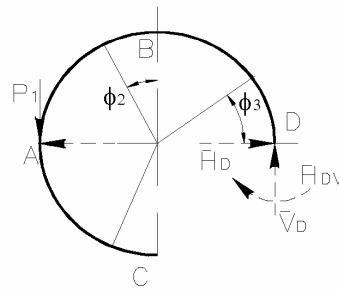


Рис. 4.11

$$\begin{aligned} \sum H = 0; H_{Dp} = P_2, \\ \text{а) } \sum V = 0; V_{Dp} - P_1 = 0; V_{Dp} = P_1, \\ \sum M_D = 0; M_{Dp} = \frac{1}{2}PR. \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{б) } \sum V = 0; \bar{V}_D = 1, \\ \sum M_D = 0; \bar{M}_D = 2R. \end{aligned}$$

$$\text{в) } \sum H = 0; \bar{H}_D = 1; \bar{M}_{DH} = 0. \quad \text{г) } \sum M_D = 0; \bar{M}_{DB} = 1.$$

Составим выражения изгибающих моментов для участков АВ и ВD

Участок (AB): $0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}, \bar{M}_{AVn} = -1R(1 + \sin \varphi_2) + 2R = R - R \sin \varphi_2,$

$$M_{pn} = -\frac{1}{2}PR - PR \sin \varphi_2 - \frac{1}{2}PR \cos \varphi_2,$$

$$\bar{M}_{AHn} = -1 \cdot R \sin \varphi_2 = -R \sin \varphi_2.$$

Участок (BD)

$$0 \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2}, \bar{M}_{AVn} = R(1 - \cos \varphi_3) - 2R = -R - R \cos \varphi_3,$$

$$M_{pn} = \frac{1}{2}PR - PR(1 - \cos \varphi_3) + \frac{1}{2}PR \sin \varphi_3 = -\frac{1}{2}PR + PR \cos \varphi_3 + \frac{1}{2}PR \sin \varphi_3,$$

$$\bar{M}_{AHn} = -R \cos \varphi_3.$$

Вычислим сначала вертикальное перемещение δ_{an}

$$\begin{aligned} \delta_{an} = \frac{R}{EJ_x} \left[-\frac{1}{2}PR^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi_2 - \frac{1}{2}PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_2 d\varphi_2 - \frac{1}{2}PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_2 d\varphi_2 + PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_2 d\varphi_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 d\varphi_2 - \frac{1}{2}PR^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi_3 - \frac{1}{2}PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 d\varphi_3 - \frac{1}{2}PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_3 d\varphi_3 + PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi_3 d\varphi_3 \right. \\ \left. + \frac{1}{2}PR^2 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 \cdot \sin \varphi_3 d\varphi_3 \right] = \frac{PR^3}{EJ_x} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{PR^3}{EJ_x} = \delta_e \end{aligned}$$

Таким образом, величина δ_e найдена верно.

Найдем горизонтальное перемещение сечения А δ_{an}

$$\delta_{zn} = \frac{PR^3}{EJ_x} \left[\int_0^{\pi/2} \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 d\varphi_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_2 d\varphi_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi_2 d\varphi_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 d\varphi_3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi_3 d\varphi_3 - \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 \cdot \sin \varphi_3 d\varphi_3 \right] = \frac{PR^3}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} + -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{PR^3}{EJ_x} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) = \delta_z,$$

т.е. величина горизонтального перемещения найдена правильно.

Определим теперь угол поворота в сечении В:

$$\theta_{Bn} = \frac{PR^2}{EJ_x} \left[+ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi_3 - \int_0^{\pi/2} \cos \varphi_3 d\varphi_3 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi_3 d\varphi_3 \right] = \frac{PR^2}{EJ_x} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \theta_B$$

Таким образом, угол поворота совпадает с найденным ранее значением, т.е. величина θ_B определена верно. В заключении построим эпюру \overline{M}_B .

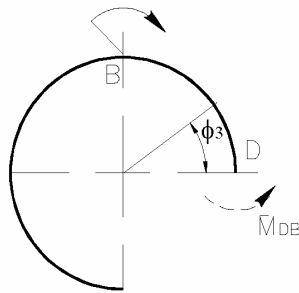


Рис. 4.12

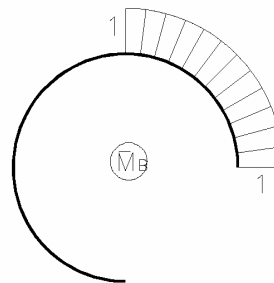


Рис. 4.13

ПРИМЕР 9. Расчет перемещений сечений плоской статически определимой рамы.

Дано: $P_1 = ql, m = \frac{1}{2} ql^2, l_1 = l, l_2 = 2l, l_3 = l, EJ_x = const$. Для рамы, показанной на рис.4.14 необходимо:

1. Построить эпюру изгибающих моментов.
2. Определить по правилу Верещагина линейные перемещения сечения А в вертикальном и горизонтальном направлениях.
3. Найти полное линейное перемещение сечения А.
4. Определить угол поворота сечения

В.

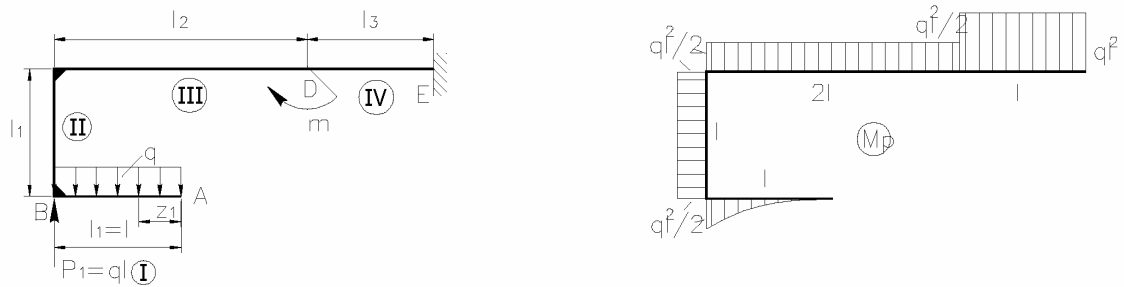


Рис.4.14

Решение

1) Строим эпюру изгибающих моментов $M_p = M_x$ по точкам на участках I, II, III, IV, используя метод сечений. Построение эпюры ведем со свободного края А, т.к. рама является консольной.

На I участке: $Q_y^I = qz_1, M_x^I = M_p^I = -\frac{qz_1^2}{2}$ — парабола, $0 \leq z_1 \leq l_1 = l, M_{pA}^I = 0; M_{pB}^I = -\frac{ql^2}{2}$.

На II участке: $M_p = M_{pB}^{II} = M_{pC}^{II} = \frac{ql^2}{2} = const$.

Далее используя правило «циркуля» получаем: $M_{pC}^{II} = M_{pC}^{III}$

На III участке: $M_{pD}^{III} = P_1 \cdot 2l - \frac{3}{2}ql^2 = 2ql^2 - \frac{3}{2}ql^2 = \frac{1}{2}ql^2$;

На IV участке: $M_{pE}^{IV} = P_1 \cdot 3l - \frac{5}{2}ql^2 + \frac{1}{2}ql^2 = ql^2$.

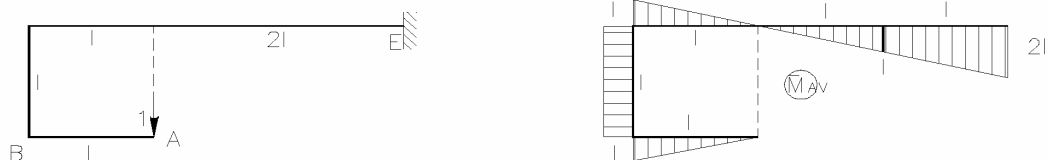


Рис. 4.15

2) Линейные и угловые перемещения сечений рамы вычисляем по формуле для произвольного сечения К при помощи правила Верещагина

$$\Delta_k = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_p \bar{M}_k}{EJ_x} dz = \sum_i \frac{\omega_i \cdot \eta_{iC}}{EJ_x}.$$

Здесь ω_i - площадь нелинейной эпюры изгибающих моментов на i -ом участке, η_{iC} - ордината линейной эпюры моментов, соответствующая центру тяжести С нелинейной эпюры.

Для определения вертикальной и горизонтальной составляющих перемещения сечения А прикладываем к сечению А соответственно вертикальную и горизонтальную единичные силы и строим эпюры единичных моментов $\bar{M}_{AV}, \bar{M}_{AH}$, используя правило «циркуля» в узлах.



Рис.4.16

При этом отметим, что внешние нагрузки P, q, m отбрасываются.

Вычислим теперь вертикальное перемещение сечения А путем «перемножения» по правилу Верещагина эпюр M_p и \bar{M}_{AV} :

$$\delta_e = \Delta_{AV} = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_p \bar{M}_{AV}}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{1}{3} ql^2 \cdot l \cdot \frac{3}{4} l + \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot l + \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{l}{2} - ql^2 \cdot \frac{1}{2} (l + 2l) \cdot l \right] = \frac{ql^4}{EJ_x} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{4} \frac{ql^4}{EJ_x} = -0.75 \frac{ql^4}{EJ_x}$$

Знак «-» говорит о том, что направление δ_e противоположно направлению вертикальной единичной силы.

Вычислим теперь горизонтальное перемещение сечения А путем «перемножения» по правилу Верещагина эпюр M_p и \bar{M}_{AH} :

$$\delta_z = \Delta_{AH} = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_p \overline{M}_{AH}}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} ql^2 \cdot 2l \cdot l + ql^2 \cdot l \cdot l \right] =$$

$$= \frac{ql^4}{EJ_x} \left(\frac{1}{4} + 1 + 1 \right) = \frac{9}{4} \frac{ql^4}{EJ_x} = 2.25 \frac{ql^4}{EJ_x}$$

Горизонтальное перемещение сечения А совпадает по направлению с горизонтальной единичной силой.

3) Определим полное перемещение сечения А по формуле:

$$\delta_A = \sqrt{\delta_s^2 + \delta_z^2} = \frac{ql^4}{EJ_x} \sqrt{(-0.75)^2 + (2.25)^2} = 2.37 \frac{ql^4}{EJ_x}$$

3. Найдем угол поворота сечения В.

Для этого «перемножим» по правилу Верещагина эпюры M_p и \overline{M}_B . Эту эпюру получаем, приложив в сечении В единичный момент.



Рис. 4.17

$$\theta_B = \sum_i \int_{l_i} \frac{M_p \overline{M}_B}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{1}{2} ql^2 \cdot l \cdot 1 + \frac{1}{2} ql^2 \cdot 2l \cdot 1 + ql^2 \cdot l \cdot 1 \right] =$$

$$= \frac{ql^3}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} + 1 + 1 \right) = \frac{5}{2} \frac{ql^3}{EJ_x} = 2.5 \frac{ql^3}{EJ_x}$$

1.5. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПО МЕТОДУ СИЛ

1.5.1. Основные понятия и уравнения метода сил

Стержневые системы, для которых уравнений статики недостаточно для определения опорных реакций и внутренних силовых факторов в стержневой системе, называются статически неопределимыми.

Избыток числа неизвестных (реакций опор и внутренних усилий) над числом независимых уравнений статики, которые могут быть составлены для данной системы, называется степенью статической неопределимости. Таким образом, степень статической неопределимости равна числу лишних неизвестных.

Статически неопределимые системы обладают преимуществом перед статически определимыми, тем, что избыточное число опорных связей обеспечивает системе большую прочность и жесткость. Статически неопределимые конструкции широко применяются в полиграфическом машиностроении. К ним, например, относятся многоопорные валы, оси, балки, стержневые рамы и другие элементы конструкций.

После того как установлена степень статической неопределимости n , заданная система мысленно освобождается от лишних связей, так что образуется статически определимая и вместе с тем геометрически неизменяемая система. Она называется основной системой. Далее действие отброшенных связей заменяется соответствующими силами и моментами. Получается, что к основной системе кроме заданной нагрузки прикладываются неизвестные силы по числу отброшенных связей. После этого формулируются условия, основанные на требовании того, что величины неизвестных сил должны быть такими, чтобы в основной системе выполнялись кинематические ограничения, в соответствии с наложенными на заданную систему лишними связями. Поскольку за неизвестные в этом методе принимаются силы, возникающие в отброшенных дополнительных связях, он называется методом сил.

Выбор основной системы (ОС) является непростым. Неудачный выбор ОС может привести к значительной трудоемкости решения, а иногда и к грубой ошибке. Нельзя руководствоваться только одним правилом образования основной системы, а именно, что число отбрасываемых связей должно быть равным степени статической неопределимости. Надо обязательно следить еще и за тем, какие связи отбрасываются. Некоторые связи отбрасывать недопустимо.

При выборе основной системы надо следить кроме всего прочего и за геометрической неизменяемостью всей системы и отдельных ее частей.

Положим, что основная система выбрана правильно. Все лишние силы и моменты приложены к ОС. Условимся эти неизвестные обозначать через $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, где n – степень статической неопределимости. Перемещения $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$, в направлении $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ равны нулю и в соответствии с принципом независимости действия сил, можно записать уравнения перемещений в виде

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

или в более компактном виде

$$\sum_{k=1}^n \delta_{jk} X_k + \Delta_{jp} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (5.2)$$

Здесь $\delta_{jk} = \int \frac{\bar{M}_j \bar{M}_k dz}{EJ}$ – единичные перемещения; \bar{M}_j, \bar{M}_k – моменты от единичных сил, приложенных в направлении неизвестных X_j, X_k – изгибающая жесткость. Обобщенные перемещения $\Delta_{jp} = \int \frac{\bar{M}_j M_p dz}{EJ}$ называются грузовыми перемещениями; \bar{M}_j – изгибающий момент, вызываемый j -й единичной силой; M_p – изгибающий момент, который вызван системой внешних сил.

Уравнения (5.1) и (5.2) представляют собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений и называются каноническими уравнениями метода сил.

1.5.2. Расчет статически неопределимых балок, работающих на изгиб, при помощи метода сил.

Для начала рассмотрим пример расчета один раз статически неопределимой балки.

ПРИМЕР 10. Балка (рис.5.1а) имеет одну шарнирно-неподвижную и две шарнирно-подвижные опоры. Даны: m – внешний момент, длина l , изгибная жесткость EJ .

Требуется:

1) Построить эпюру изгибающих моментов M_x .

2) Выполнить деформационную проверку.

Для расчетной основной системы имеем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (5.3)$$

Коэффициенты уравнения вычисляем при помощи правила Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{2}l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}l \cdot l \cdot \frac{2}{3}l \right) = \frac{l^3}{EJ_x} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{l^3}{EJ_x}$$
$$\Delta_{1P} = \delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{1}{2} \frac{m}{2} \cdot l \left(\frac{2}{3} \frac{l}{2} + \frac{1}{3}l \right) - \frac{1}{2} \frac{m}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{2} \right] = \frac{ml^2}{12EJ_x}$$

Из уравнения получаем неизвестную реакцию:

$$X_1 = \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{-ml^2}{12EJ_x}}{\frac{l^3}{EJ_x}} = -\frac{1}{12} \frac{m}{l}$$

Эпюру M_x строим по формуле по точкам:

$$M_x = M_p + \bar{M}_1 X_1 \quad (5.4)$$

$$M_{xA} = 0; M_{xB}^I = -\frac{m}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} m = -m \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) = -\frac{13}{24} m$$

$$M_{xB}^{II} = \frac{m}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} m = m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \right) = \frac{11}{24} m$$

$$M_{xC}^{II} = 0 - \frac{m}{12} = -\frac{m}{12}$$

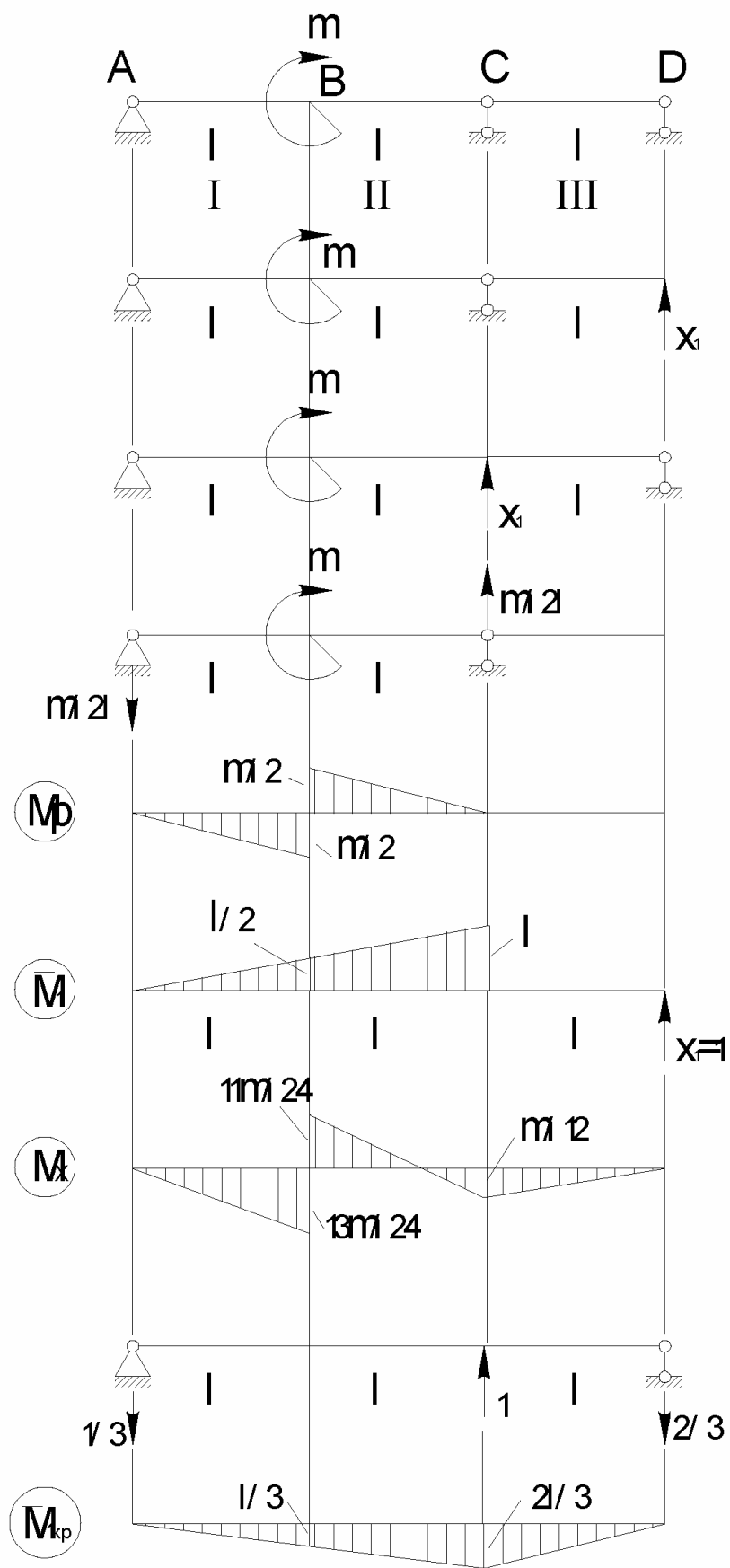


Рис.5.1

Построение всех эпюр показано на рис 5.1.

Выполним деформационную проверку, для чего эпюру Mx “перемножим” на единичную эпюру \bar{M}_{1n} для проверочной основной системы.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum \int \frac{M_{1np} M_x dz}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{24} m \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} \frac{m}{12} \cdot l \left(\frac{2}{3} l + \frac{1}{3} l \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{11}{24} m \cdot l \left(\frac{1}{3} l + \frac{2}{3} l \right) + \frac{1}{2} \frac{m}{12} \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right] = \frac{ml^2}{12EJ_x} \left(\frac{13}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} - \frac{11}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \right) = \\ &= \frac{ml^2}{12EJ_x \cdot 9} \left(\frac{13}{2} + \frac{5}{2} - 11 + 2 \right) = \frac{ml^2}{12 \cdot 9EJ_x} (9 + 2 - 11) = 0 \end{aligned}$$

Считаем что задача решена правильно, хотя для полной проверки надо было выполнить повторное решение данной задачи для проверочной основной системы.

Рассмотрим более сложный пример расчета дважды статически неопределимой балки по методу сил (рис.5.2.а).

ПРИМЕР 11. Задано: Двутавр №=22; $W_x=232\text{см}^3$; $I_x=2550\text{см}^4$

Требуется:

1. Раскрыть статическую неопределимость для заданной балки
2. Построить эпюру поперечных сил Qy и изгибающих моментов Mx
3. Выбрать новую основную систему и произвести деформационную проверку
4. По заданному поперечному сечению из условия прочности установить предельно допустимое значение параметра внешней нагрузки $[q]$.
5. Пользуясь методом начальных параметров, вычислить прогибы в нескольких сечениях балки и построить упругую линию.

Решение

1) Определим степень статической неопределимости для данной системы $n=5-3=2$.

Выбираем основную систему (О.С.) и запишем канонические уравнения метода сил для этой расчетной ОС (рис. 5.2.б)

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

1.1) Строим эпюру M_p по участкам

$$0 \leq z \leq 2l$$

$$M_p = -q \cdot z \cdot z / 2$$

$$z = 0; M_p = 0$$

$$z = 2l; M_p = -2ql^2 \quad M_C = -3ql \cdot 2l - 4ql \cdot 2l = -14ql^2$$

$$M_A = -3ql \cdot 3l - 4ql \cdot 3l = -21ql^2$$

$$M_C = -3ql \cdot 4l - 4ql \cdot 4l = -29ql^2$$

Эта грузовая эпюра показана на рис 5.2.д.

1.2) Находим коэффициенты канонических уравнений метода сил при помощи правила Верещагина:

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2 dz}{EI_x} = \frac{1^3}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = 72 \frac{1^3}{EI_x}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{\bar{M}_2^2 dz}{EI_x} = \frac{1^3}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{64}{3} \frac{1^3}{EI_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dz}{EI_x} = \frac{1^3}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \left[\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right] + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \left[\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 5 \right] + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \left[\frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right] + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \left[\frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 5 \right] + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \left[\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right] \right) = \frac{1^3}{EI_x} \left(\frac{20}{3} + \frac{21}{3} + \frac{13}{3} + \frac{24}{3} + \frac{34}{3} \right) = \frac{112}{3} \frac{1^3}{EI_x},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int \frac{\bar{M}_1 M_p dz}{EI_x} = \frac{ql^4}{EI_x} \left(-\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 \left[\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right] - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \left[\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right] - \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 2 \left[\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 1 \left[\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right] - \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 1 \left[\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right] - \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 1 \left[\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right] - \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 1 \left[\frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 6 \right] \right) = \\ &= \frac{ql^4}{EI_x} \left(-\frac{6}{3} + \frac{6}{3} - \frac{16}{3} - \frac{140}{3} - \frac{91}{3} - \frac{147}{3} - \frac{176}{3} - \frac{493}{3} \right) = -\frac{1633}{6} \frac{ql^4}{EI_x} \end{aligned}$$

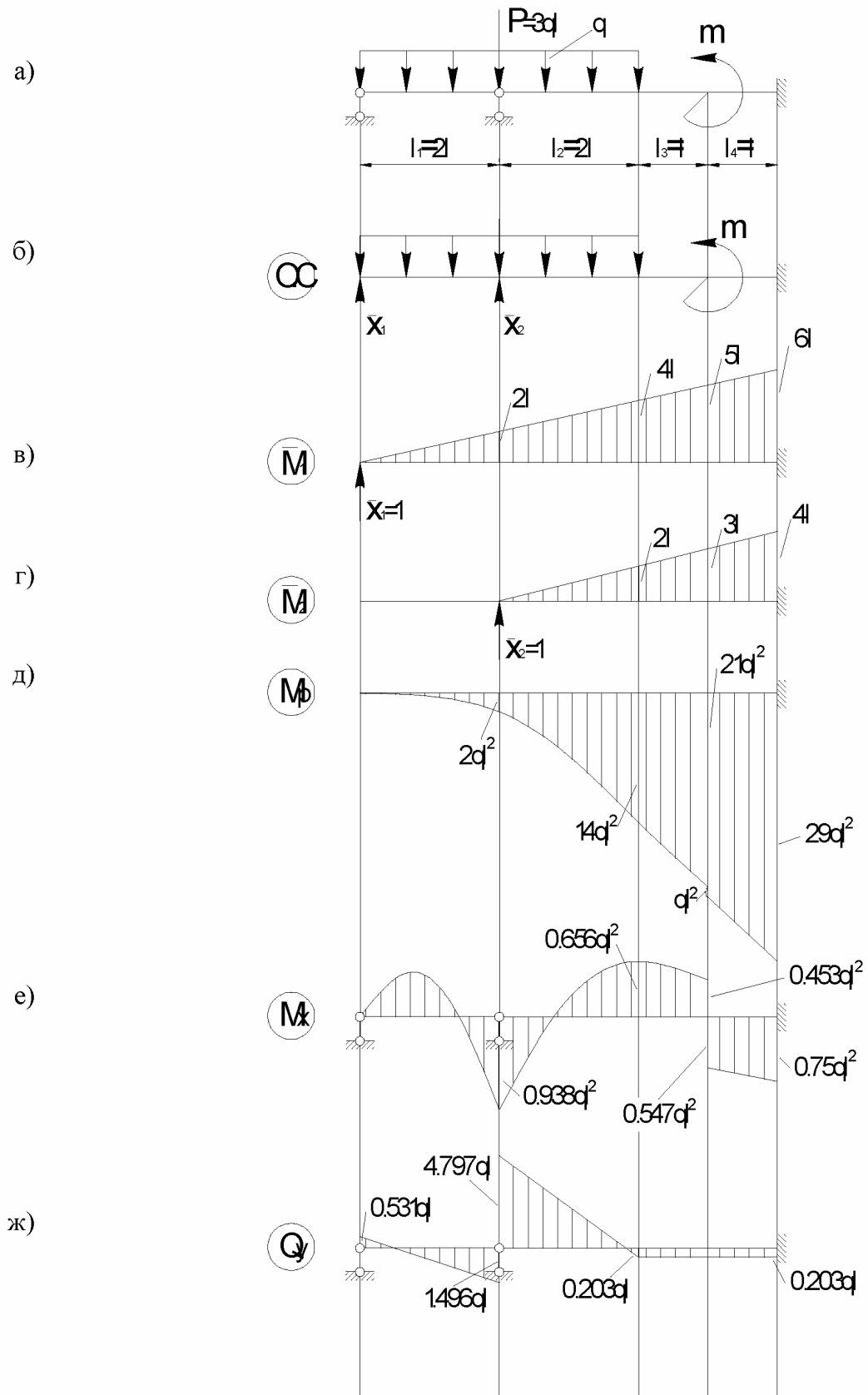


Рис. 5.2

$$\Delta_{2P} = \int \frac{\bar{M}_2 M_P dz}{EI_X} = \frac{ql^4}{EI_X} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 1 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right] - \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 1 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right] - \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 1 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right] - \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 1 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right] \right) = \frac{ql^4}{EI_X} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} - \frac{49}{3} - \frac{84}{3} - \frac{110}{3} - \frac{319}{3} \right) = -\frac{921}{6} \frac{ql^4}{EI_X}$$

1.3) Подставляем полученные коэффициенты в каноническое уравнение метода сил.

$$\begin{cases} 72X_1 + \frac{112}{3}X_2 = \frac{1633}{6}ql \\ \frac{112}{3}X_1 + \frac{64}{3}X_2 = \frac{921}{6}ql \end{cases}$$

получаем неизвестные реакции

$$\begin{cases} X_1 = 0,531ql \\ X_2 = 6,266ql \end{cases}$$

2) Строим эпюры Qy и Mx по точкам

$$Q_y(0) = 0,531ql$$

$$Q_y(2l) = 0,531ql - 2ql = -1,469ql$$

$$Q_y(4l) = 0,531ql - 4ql - 3ql + 6,266ql = 0,203ql$$

$$M_B = ql^2(0,531 \cdot 2 - 2) = -0,938ql^2$$

$$M_C = ql^2(0,531 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 6,266 \cdot 2) = 0,656ql^2$$

$$M_A = ql^2(0,531 \cdot 5 - 3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 + 6,266 \cdot 3) = 0,453ql^2$$

$$M_E = ql^2(0,531 \cdot 6 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 6,266 \cdot 4 - 1) = 0,656ql^2$$

Все построенные эпюры представлены на рис. 5.2 (в, ж)

3) Выбираем новую проверочную основную систему (О.С.п.) рис. 5.3. а. Строим единичные эпюры M_{1n} и M_{2n} (рис. 5.3 б,в) и проводим деформационную проверку.

$$\begin{aligned} \Delta_{1n} &= \int \frac{M_x M_{1n} dz}{EI_X} = \frac{ql^4}{EI_X} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{8} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,938 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{8} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{2} \cdot 0,656 \cdot 2 \left[\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \right] - \right. \\ &- \frac{1}{2} \cdot 0,938 \cdot 2 \left[\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{2} \cdot 0,656 \cdot 1 \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2 \right] + \frac{1}{2} \cdot 0,453 \cdot 1 \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2 \right] - \frac{1}{2} \cdot 0,547 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \\ &- \left. \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{ql^4}{EI_X} (0,6667 - 1,2507 + 1 + 0,8747 - 1,5633 + 0,2733 + 0,151 - 0,0912 - 0,0625) = \\ &= 0,002 \frac{ql^4}{EI_X} \approx 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2n} &= \int \frac{M_x M_{2n} dz}{EI_X} = \frac{ql^4}{EI_X} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,656 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,938 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,656 \cdot 1 \left[\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 0,453 \cdot 1 \left[\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right] - \frac{1}{2} \cdot 0,547 \cdot 1 \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 3 \right] - \left. \frac{1}{2} \cdot 0,075 \cdot 1 \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \right) = \frac{ql^3}{EI_X} (0,1667 + 0,2187 - \\ &- 0,1563 + 0,1913 + 0,151 - 0,2279) = 0,0003 \frac{ql^3}{EI_X} \approx 0 \end{aligned}$$

Относительные погрешности здесь не превышают 2%, что позволяет сказать, что деформационная проверка сошлась и задача решена правильно.

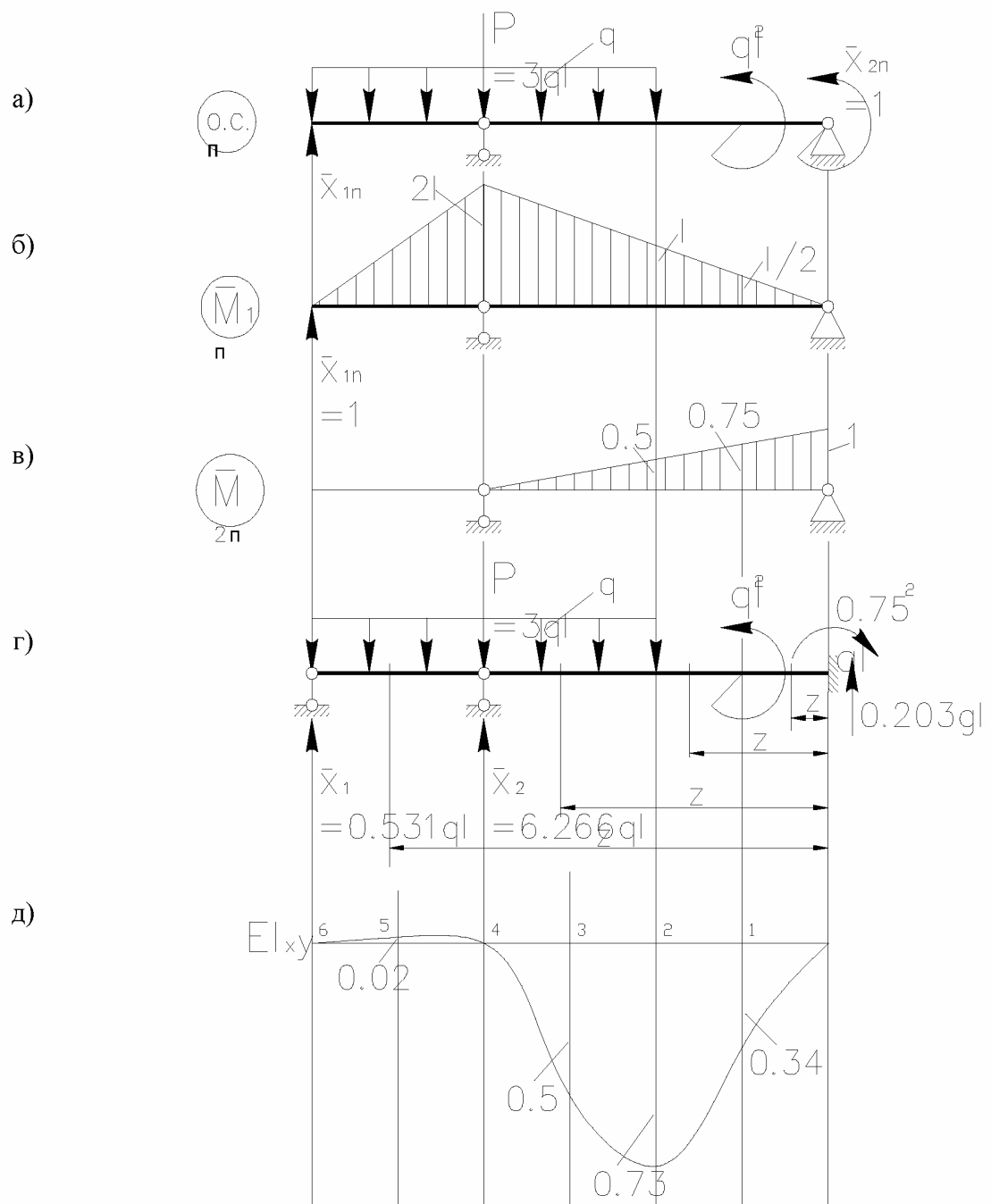


Рис.5.3

4) Находим из условия прочности допускаемое значение распределенной нагрузки $[q]$

Условие прочности имеет следующий вид: $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{300}{1,5} = 200 \text{ МПа} = 200 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

$$[q] = \frac{[\sigma] \cdot W_x}{0,938 \cdot l^2} = \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 232 \cdot 10^{-6}}{0,938 \cdot 0,49} = 100,87 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

5) Используя формулы метода начальных параметров для основной системы (рис. 5.3г) с помощью которой была раскрыта статическая неопределимость, строим упругую линию:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 - \frac{0,75ql^2 \cdot z^2}{2} + \frac{0,203ql \cdot z^3}{6} \Big|_I + \frac{ql^2(z-1)^2}{2} \Big|_{II} - \frac{q(z-21)^4}{24} \Big|_{III} + \frac{6,266ql(z-41)^3}{6} - \frac{3ql(z-41)^3}{6} - \frac{3ql(z-41)^3}{6} \Big|_{IV}$$

Поскольку в заделке $EI_x y_0 = 0$ и $EI_x \theta_0 = 0$, то окончательная формула для упругой линии записывается

$$EI_x y = -0,375ql^2 \cdot z^2 + 0,034ql \cdot z^3 \Big|_I + 0,5ql^2(z-1)^2 \Big|_{II} - 0,042(z-21)^4 \Big|_{III} + 0,544ql(z-41)^3 \Big|_{IV}$$

Здесь принимаем $q = [q] = 100,87 \text{ кН/м}$. Для построения графика упругой линии составляем таблицу 1.

Таблица 1.

	I		II	III		IV	
$z, (1)$	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{EI_x}{ql^4} y$	0	- 0,34	- 0,73	- 0,5	0	0,02	0

График упругой линии для заданной статически неопределимой балки показан на рис. 5.3.д.

Расчет статически неопределимой балки можно упростить, если за лишние неизвестные принять значения изгибающих моментов над опорами (метод “врезанных шарниров”). Тогда основная система представляет собой ряд однопролетных балок [1].

1.5.3. Расчет статически неопределимых плоских рам.

Расчет статически неопределимых плоских рам является более сложной задачей, чем задача расчета статически неопределимых балок. Выбор основной системы при раскрытии статической неопределимости рам надо проводить более тщательно, чем для статически неопределимых балок.

Кроме того, в качестве неизвестных могут выступать и внутренние силовые факторы для рам. Например, плоская рама в виде замкнутого прямоугольного контура (рис.5.4.а) трижды статически неопределима, так как минимум неизвестных выступают внутренние силовые факторы в произвольном сечении одного из стержней: $X_1=Nz$, $X_2=Qy$, $X_3=Mx$ (рис5.4.а)

Основным методом расчета статически неопределимых плоских рам является метод сил, канонические уравнения для которого мы уже ранее рассматривали

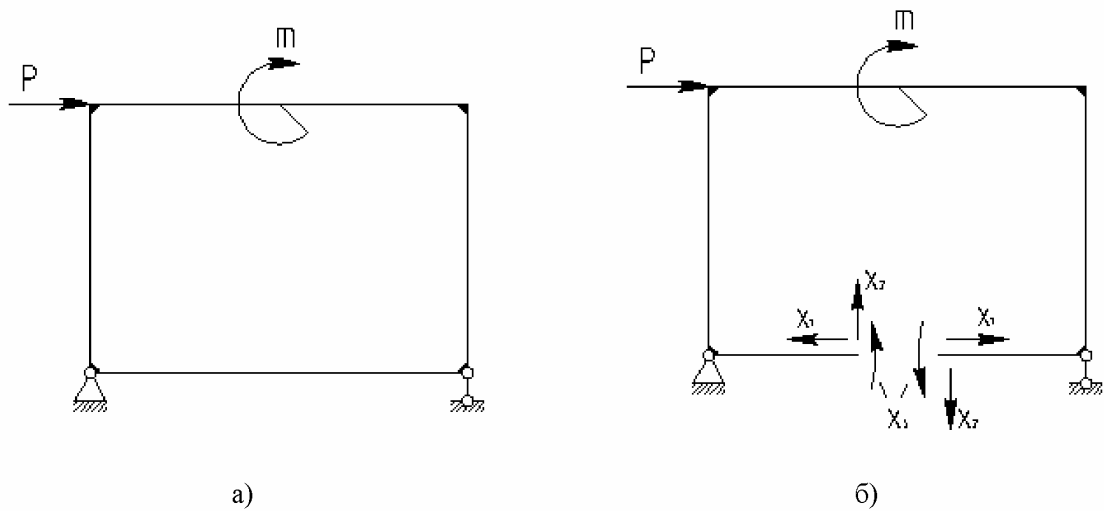


Рис.5.4

На рис. 5.5,а в качестве примера представлена дважды статически неопределимая система $n=2$ (рама), где m, P – заданные внешние нагрузки (момент и сила). В качестве основной системы

может быть принята рама, изображенная на рис.5.5, б. Система канонических уравнений (5.1) в данном случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned}$$

где δ_{jk} -единичные перемещения, Δ_{jp} -грузовые перемещения, формулы для которых были представлены ранее, X_k – неизвестные силы или моменты. Геометрический смысл коэффициентов этой системы уравнений становится ясным из рис. 5.6 а,б,в.

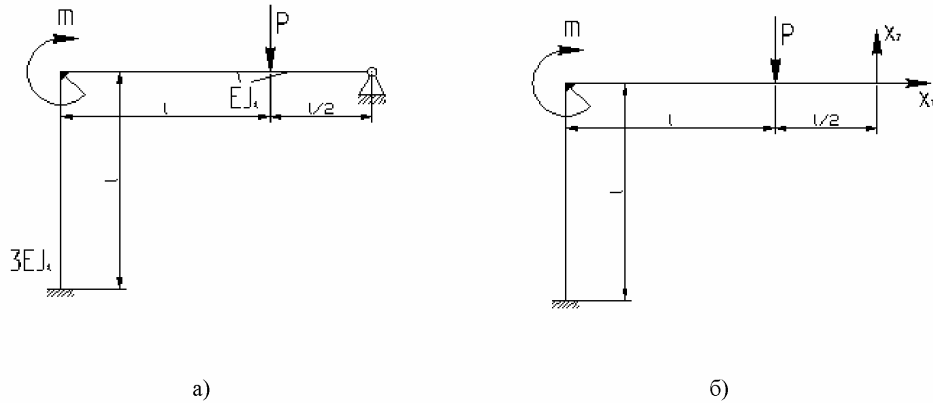


Рис.5.5

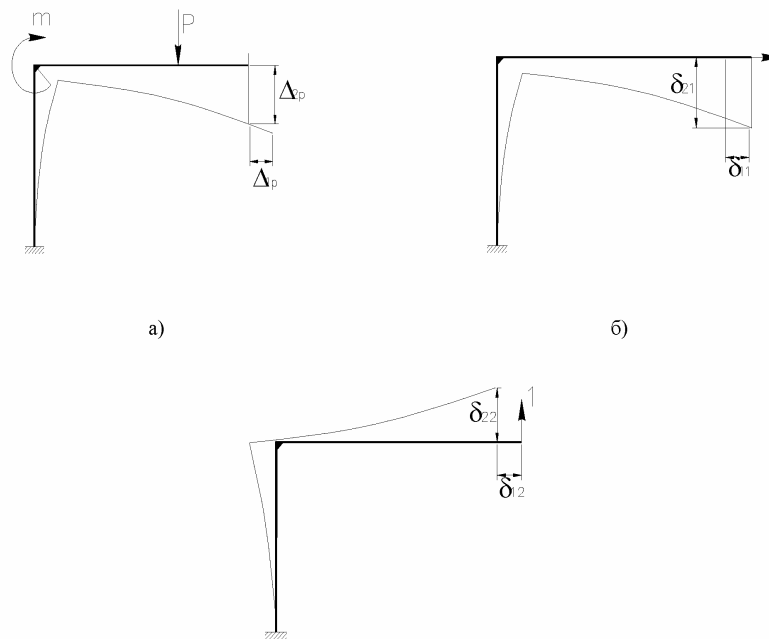


Рис.5.6

Рассмотрим пример расчета статически неопределимой плоской рамы (рис.5.7) для заданных внешних нагрузок m, P, q .

ПРИМЕР 12.

1. Раскрыть статическую неопределимость для заданной рамы и построить эпюры продольных сил Nz , поперечных сил Qy , и изгибающих моментов Mx .
2. выбрать новую основную систему и произвести деформационную проверку.
3. найти полное линейное перемещение сечения А.

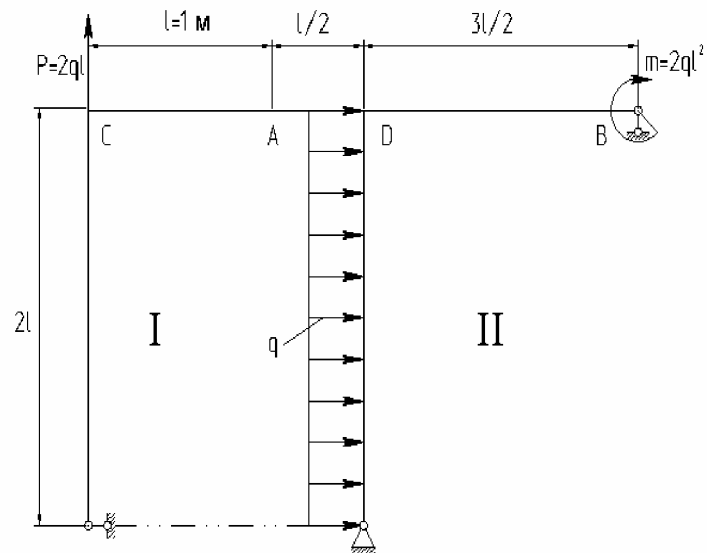


Рис.5.7

Решение:

Определение неизвестных усилий в статически неопределимой раме можно разбить на следующие этапы:

1. Определение систем статической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Построение единичных и грузовых эпюр.
4. Вычисление коэффициентов канонических уравнений метода сил и решение этих уравнений.
5. Построение эпюр внутренних силовых факторов M_x , Q_y , N_z и статическая проверка.
6. Деформационная проверка.

1. Определим степень статической неопределимости системы

$N=4-3=1$. Таким образом имеем один раз статически неопределимую раму.

2. В качестве основной расчетной системы выбираем раму, представленную на рисунке 5.8.

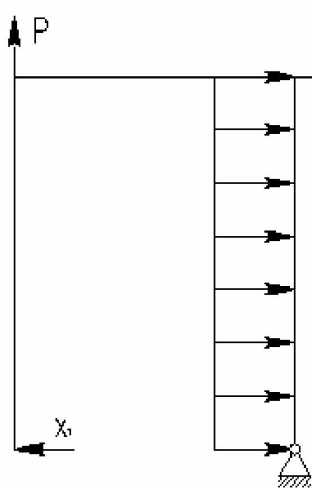


Рис.5.8

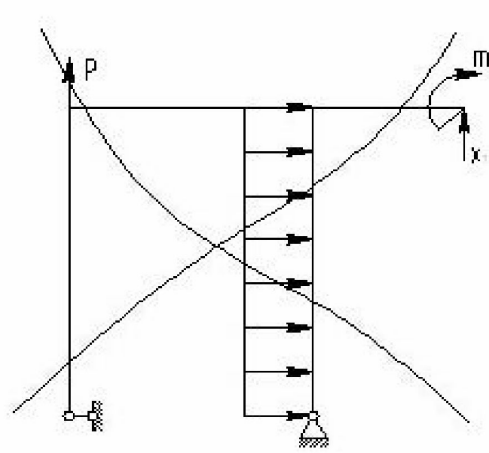


Рис.5.9

Примечание $A\bar{X} = \bar{B}$: не следует выбирать данную систему в качестве основной системы для данной рамы.

3. Построение эпюр M_1 и M_p . Прикладываем в направлении X_1 единичную силу и строим единичную эпюру (рис 5.10)

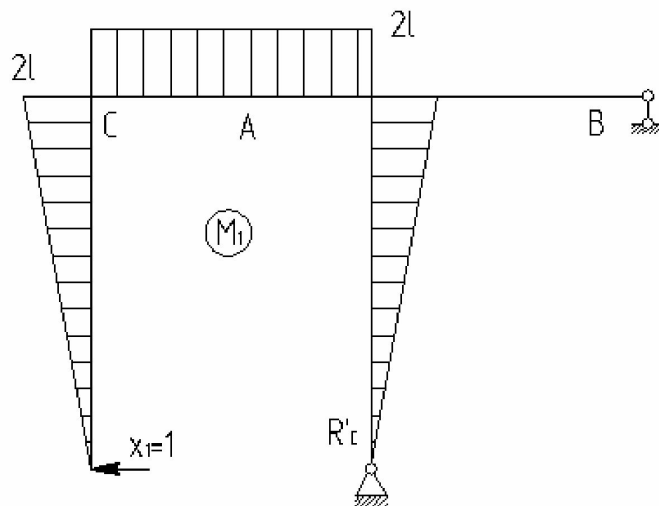


Рис.5.10

При этом определяем единичные \bar{R}_B, \bar{R}_E в опорах рамы из уравнений статики:

$$1) \sum M_E,$$

$$R_B \cdot 1,5l - 1 \cdot 0 = 0,$$

$$R_B = 0$$

$$2) \sum F_y = 0$$

$$R_B + R'_E = 0, R'_E = 0,$$

$$3) \sum M_B = 0$$

$$R'_E \cdot 2l - 1.2l = 0$$

$$R'_E = \bar{R}'_E = 1$$

Переходим к построению грузовой эпюры M_p (рис. 5.11) покажем оси X, Y для рамы при нагрузке q, P, m и отброшенной неизвестной силе X_I .

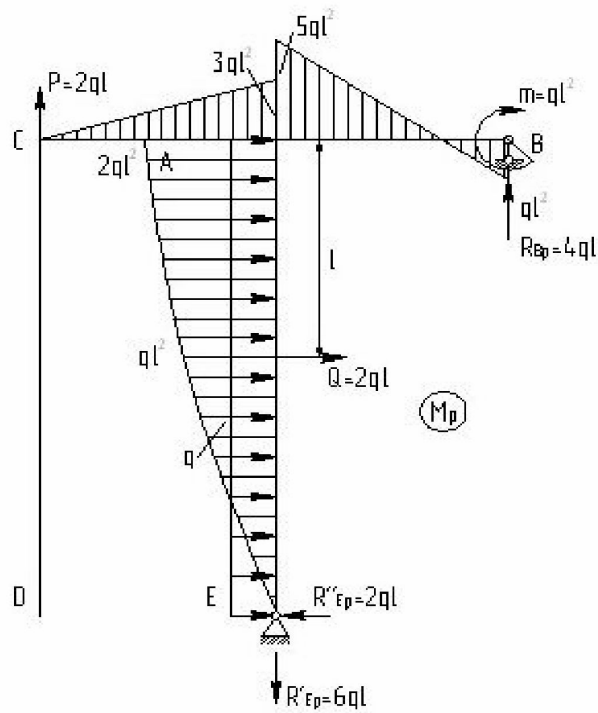


Рис.5.11

Реакции в опорах при этом определяем из уравнений статики:

$$1) \sum M_E = 0$$

$$R_{BP} \cdot 1.5l - P \cdot 1.5l - m - Ql = 0$$

$$R_{BP} \cdot 1.5l - 2ql \cdot 1.5l - ql^2 - 2ql^2 = 0$$

$$R_{BP} = \frac{6ql^2}{1,5l} = 4ql$$

$$2) \sum F_y = 0$$

$$R_{EP}^i = P + R_B = 2ql + 4ql = 6ql$$

$$3) \sum F_x = 0$$

$$Q - R_{EP}^r = 0; R_{EP}^r = Q = 2ql$$

Выполняем далее проверку равновесия узла D (рис 5.12).

$$\sum M_D = 5ql^2 - 3ql^2 - 2ql \equiv 0.$$

4. Вычисляем коэффициенты канонического уравнения

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

путем “перемножения” эпюр M_1 и M_2 по правилу Верещагина. Они равны следующим значениям:

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \right) 2 + 2l \cdot 1,5l \cdot 2l = \frac{16}{3} l^3 = \frac{34l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\bar{M}_1 M_X}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,324ql^2 \right) + \frac{1}{EI} (2l \cdot 1,5l \cdot 1,176ql^2) = \frac{11}{6} \frac{ql^4}{EI}$$

Далее из канонического уравнения

$$\frac{34l^3}{3EI} \cdot X_1 + \frac{11ql^4}{6EI} = 0$$

находим неизвестную силу X_1

$$X_1 = -\frac{11 \cdot 3}{6 \cdot 34} ql = -\frac{11}{68} ql = 0,162ql$$

5. Построение эпюр Mx , Nz , Qy : Эпюру Mx строим, используя формулу $Mx = Mp + M_1 X_1$.

Эпюра Mx показана на рисунке (5.12).

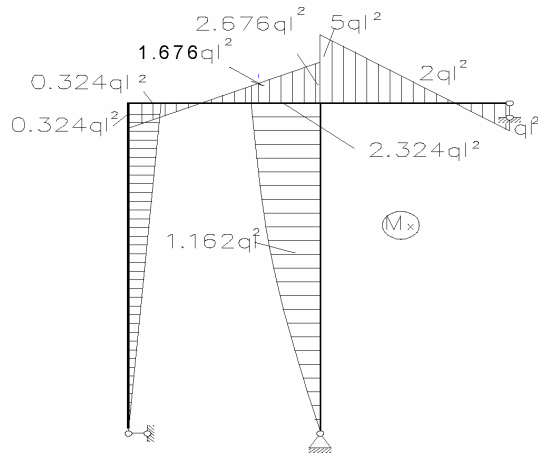


Рис. 5.12

Здесь же выполняем статическую проверку узла D (рис. 5.13)

Имеем равновесие узла D:

$$1) \sum_{i \text{ о } \vec{n}} M_D = 5,0ql - 2,676ql^2 - 2,324ql^2 \equiv 0$$

$$2) \sum_{i \text{ о } \vec{n}} F_{ky} = 2ql + 4ql - 6ql \equiv 0$$

$$3) \sum_{i \text{ о } \vec{n}} F_{kx} = 0,162ql - 0,162ql \equiv 0$$

Покажем все известные нагрузки q, m, P и найденную силу X_1 на схеме рамы (рис. 5.13) и определим реакции в опорах.

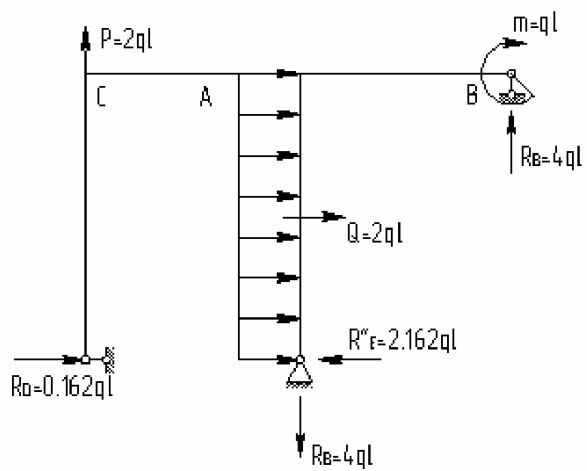


Рис.5.13

После того как реакции во всех опорах найдены, строим эпюры N_z (рис5.14) и Q_y (рис5.15).

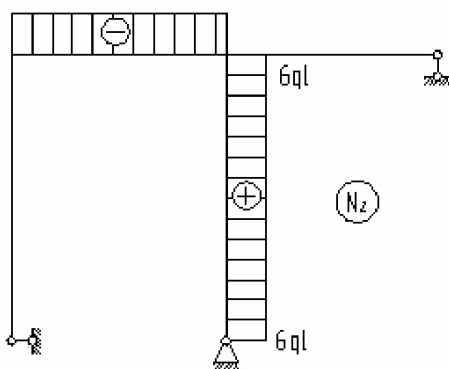


Рис.5.14

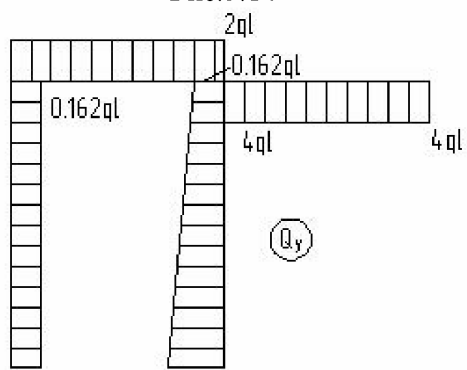


Рис.5.15

4. Для проверочной основной системы (рис.5.16) строим эпюру M_{1n} для приложенной единичной силы.

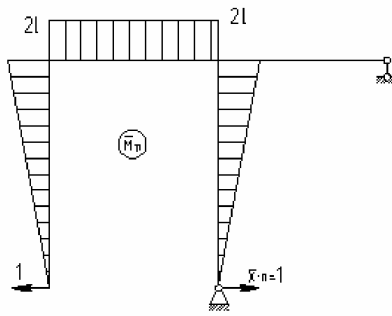


Рис.5.16

Деформационная проверка этой проверочной ОС имеет вид:

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\bar{M}_{1n} M_x}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,324ql^2 \right) + \frac{1}{EI} (2l \cdot 1,5l \cdot 1,176ql^2) - \frac{2l}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot l \cdot 1,162ql^2 + 2l \cdot 2,324ql^2) = (-0,432 + 3,528 - 3,099) \frac{ql^2}{EJ_x} = (3,528 - 3,529) \frac{ql^2}{EJ_x} \approx 0 = -0,001 \frac{q}{E}$$

7) Перейдем к определению перемещения сечения А.

При определении полного перемещения т. А перекладываем единичные вертикальную и горизонтальную силы в т. А к основной системе. Тогда для вертикального перемещения строим эпюру $M_{об}$ (рис.5.17)

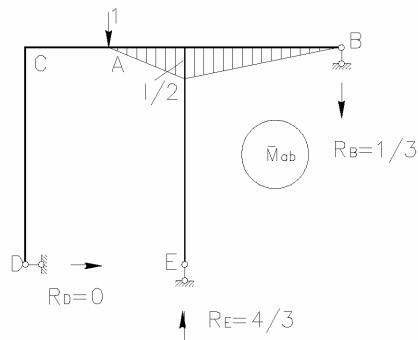


Рис.5.17

Реакции при этом определяются из уравнения равновесия:

$$1) \sum M_E = 0; \bar{R}_B \cdot 1.5l - 1 \cdot 0.5l = 0; \bar{R}_B = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}$$

$$2) \sum F_x = 0; \bar{R}_E' = 0$$

$$3) \sum F_y = 0; \bar{R}_B - \bar{R}_E' + 1 = 0; \bar{R}_E' = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Тогда имеем вертикальное перемещение т. А по формуле:

$$\Delta_A^B = \int \frac{M_x \bar{M}_{AB}}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{1}{2} \cdot 2.676ql^2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1.676ql^2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5ql^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4ql^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{2} \right] = -1.043 \frac{ql^4}{EJ_x}$$

Для определения горизонтального перемещения т. А строим эпюру $\bar{M}_{A\bar{A}}$ (рис. 5.18)

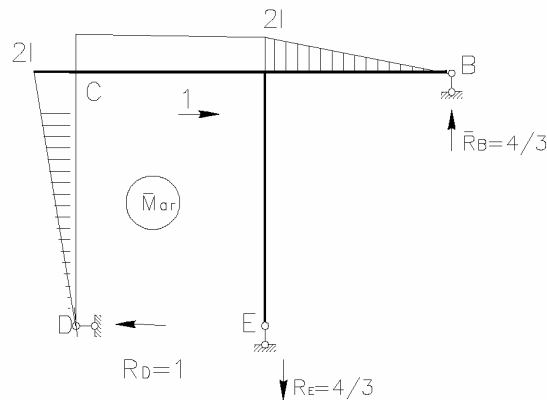


Рис.5.18

Реакции в опорах также определяем из уравнений равновесия:

$$1) \sum F_x = 0; 1 - \bar{R}_E' = 0$$

$$2) \sum M_E = 0; 1 \cdot 2l - \bar{R}_B \cdot 1.5l = 0; \bar{R}_B = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 1.5} = \frac{4}{3}$$

$$3) \sum M_B = 0; \bar{R}_E' \cdot 2l - \bar{R}_B \cdot 1.5l = 0; \bar{R}_E' = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 1.5} = \frac{4}{3}$$

Тогда горизонтальное перемещение равно следующей величине:

$$\Delta_A^F = \int \frac{M_x \overline{M_{AF}}}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{1}{2} \cdot 0.324ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l + \frac{1}{2} \cdot (2.676 - 0.324)ql^2 \cdot \frac{3}{2}l \cdot 2l + \frac{1}{2} \cdot 5ql^2 \cdot \frac{3}{2}l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l - \frac{1}{2} \cdot ql^2 \cdot \frac{3}{2}l \cdot \frac{1}{3} \cdot 2l \right] = 7.596 \frac{ql^4}{EJ_x}$$

Полное перемещение сечения A определяется по формуле:

$$\Delta_A = \sqrt{(\Delta_A^B)^2 + (\Delta_A^F)^2} = \sqrt{(-1.043)^2 + (7.596)^2} \frac{ql^4}{EJ_x} \approx 7.67 \frac{ql^4}{EJ_x}$$

1.6. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Расчеты на прочность конструкций зависят от вида напряженного состояния. Для одноосного (линейного) напряженного состояния условие прочности имеет вид (1.1). В случае плоского или объемного напряженных состояний необходимо записывать подобное условие для некоторого эквивалентного напряжения

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma] \quad (6.1)$$

Напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ определяется при помощи критериев прочности

Таблица 6.1

Название критерия	Эквивалентное напряжение	
	Упрощенное плоское напряженное состояние	Объемное напряженное состояние

1. Критерий текучести Сен-Венана	$\sigma_{эКв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\sigma_{эКв} = \sigma_1 - \sigma_3$
5. Критерий текучести Мизеса	$\sigma_{эКв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$	$\sigma_{эКв} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$
6. Критерий хрупкого разрушения Мора	$\sigma_{эКв} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$	$\sigma_{эКв} = \sigma_1 - m\sigma_3,$ $m = \left[\frac{\sigma_p}{\sigma_c} \right] < 1$

ПРИМЕР 13. Определить из расчета на прочность диаметр d сечения пространственной рамы (рис. 6.1), применив критерий Мизеса. Имеем $[\sigma] = 22 \text{ кН/см}^2, E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2,$
 $G = 0.8 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2.$

Решение

Так как рама консольная, то эпюры внутренних силовых факторов строим без определения опорных реакций. Как и ранее, направим ось z на первом стержне по его оси, а оси x, y – как показано на рис. 6.1,б. Перенос системы координат на второй стержень, где ось должна совпадать с осью стержня, осуществляется поворотом системы координат вокруг оси y . Используя метод сечений и принятые ранее правила построения эпюр, строим эпюры изгибающих моментов M_x, M_y (рис. 6.2,а,б) и крутящих моментов M_z (рис. 6.3). Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил, определим опасное сечение для данной системы. Наиболее нагруженными являются сечения I-I и II-II (рис. 6.2, а,б). Определим, какое из них является наиболее опасным. Приведенный момент $M_{прив.}$ по критерию Мизеса определяется по формуле

$$M_{прив} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0.75M_z^2}$$

В сечении I-I $M^I_{прив} = \sqrt{20^2 + 20^2 + 0.75 \cdot 12^2} > M^{II}_{прив} = \sqrt{12^2 + 20^2 + 0.75 \cdot 20^2}$. Видно, что сечение I-I является опасным и для него проводится расчет на прочность в опасной точке

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{прив}}{W_x} = \frac{32 \cdot \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0.75M_z^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

Положение опасной точки определяется способом, рассмотренным в примере раздела 7. Диаметр сечения d рамы будет равен

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{прив}}{\pi[\sigma]}} = 2.45 \text{ см} = 24.5 \text{ мм}.$$

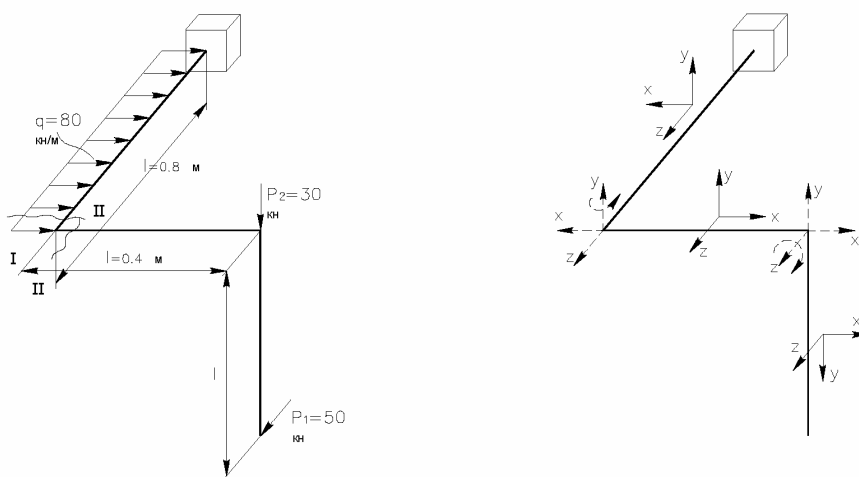
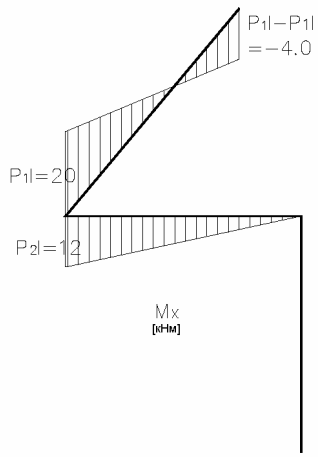
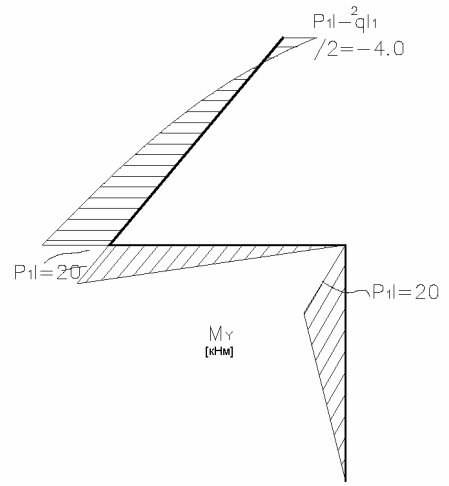


Рис. 6.1



а)



б)

Рис. 6.2

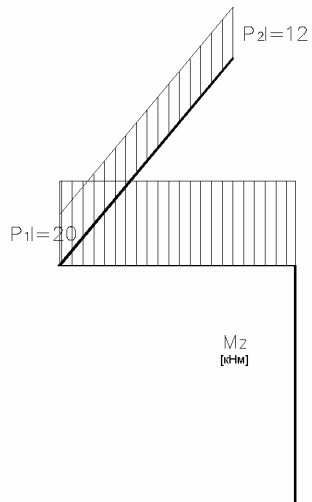


Рис. 6.3

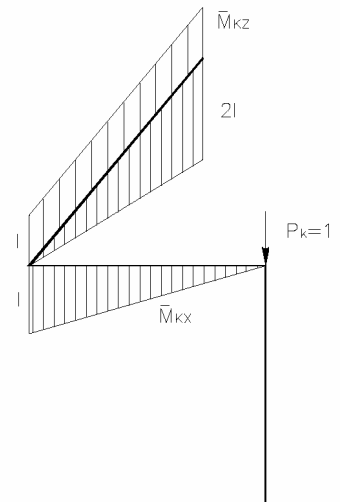


Рис. 6.4

Округляя, принимаем $d = 25$ мм. Для определения вертикального перемещения точки K прикладываем в этой точке единичную силу и строим эпюры единичных моментов $\overline{M}_{kx}, \overline{M}_{kz}$ (рис.6.4). Вертикальное перемещение точки Δ_{kv} вычисляется по формуле:

$$\Delta_{kv} = \sum_i \left[\int_0^l \frac{\overline{M}_{xp} \overline{M}_{kx}}{EJ_x} dz + \int_0^l \frac{\overline{M}_{zp} \overline{M}_{kz}}{GJ_p} dz \right] = \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{1}{2} P_1 l \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot 2l + \frac{1}{2} (P_1 l - P_2 2l) \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l + \frac{1}{2} P_2 l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right] + \frac{1}{GJ_p} \cdot P_2 l \cdot l \cdot 2l \approx \frac{32}{3} \frac{l^3}{E\pi d^4} (4P_1 + P_2).$$

Учитываем, что $G = 0.4E, J_p = 2J_x, J_x = \frac{\pi d^4}{64}$.

1.7. ЗАДАЧИ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ

В полиграфическом машиностроении очень часто приходится решать задачи, связанные с прочностью деталей при напряжениях, переменных во времени (циклических напряжениях). Разрушение при напряжениях, переменных во времени, называется усталостным. На усталость материала существенно влияют: концентрация напряжений, масштабный фактор и состояние поверхности детали. Расчет на усталость является поверочным: задавшись размерами сечения или приближенно оценив их, определяют фактический коэффициент запаса прочности n_r . Условие прочности в этом случае имеет вид:

для симметричного цикла

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \cdot \varepsilon_M} \sigma_a} \geq [n_r] \quad (7.1)$$

для асимметричного цикла

$$n_r = \frac{\sigma_{-1}}{\phi_\sigma \sigma_m + \frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \cdot \varepsilon_M} \sigma_a} [n_r] \quad (7.2)$$

В этих формулах σ_{-1} - предел усталости; σ_m, σ_a - среднее и амплитудное напряжения цикла; k_{-1} - эффективный коэффициент концентрации напряжений; ε_M - масштабный коэффициент; ε_n - коэффициент состояния поверхности; $[n_r]$ - нормативный коэффициент запаса прочности. Коэффициент ϕ_σ определяется следующим соотношением:

$$\phi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad (7.3)$$

где σ_0 - предел усталости материала при пульсирующем цикле.

Если опасное состояние связано с появлением текучести, то определение коэффициента запаса проводится по пределу текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_m + \sigma_a} \quad (7.4)$$

Расчет деталей на усталостную прочность при чистом сдвиге (кручении) осуществляется по формулам, аналогичным (7.1) – (7.4), в которых необходимо заменить $\sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_m, \sigma_a, \phi_\sigma$ соответственно $\tau_{-1}, \tau_0, \tau_m, \tau_a, \phi_\tau$. В практике расчета при сложном напряженном состоянии используется эмпирическая формула Гафа-Полларда

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} \quad (7.5)$$

где n_r - искомый коэффициент запаса усталостной прочности; n_σ - коэффициент запаса усталостной прочности по нормальным напряжениям; n_τ - коэффициент запаса усталостной прочности по касательным напряжениям.

ПРИМЕР 14. Проведем статический расчет вала (рис.7.1,а) на прочность по критерию текучести Сен-Венана с тем, чтобы оценить величину его диаметра.

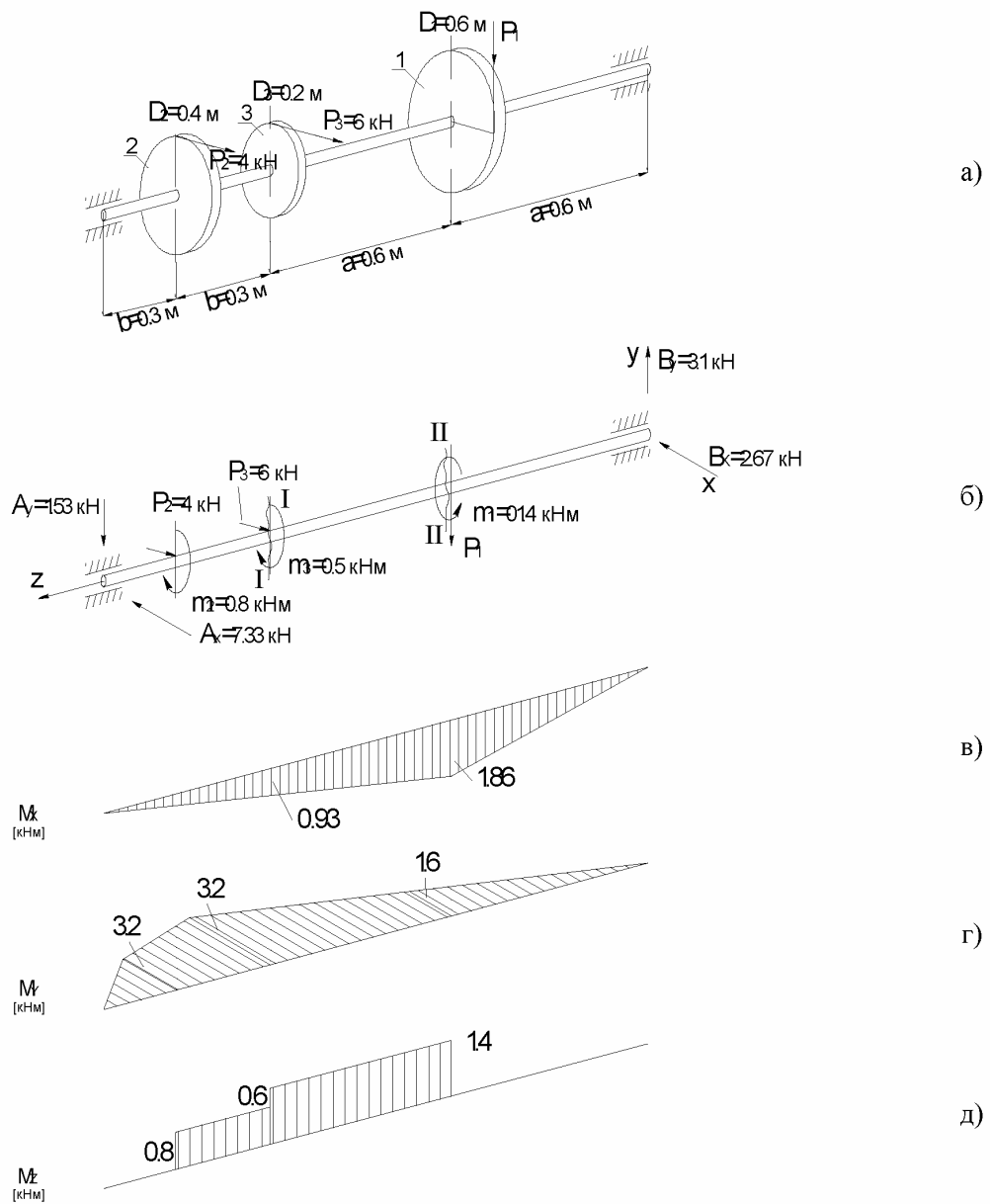


Рис. 7.1

Определим сначала силу P , из следующего уравнения равновесия:

$$\sum m_z = 0; P_3 \frac{D_3}{2} + P_2 \frac{D_2}{2} - P_1 \frac{D_1}{2} = 0;$$

$$P_1 = \frac{P_3 D_3 + P_2 D_2}{D_1} = \frac{6 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.4}{0.6} \approx 4.67 \text{ кН}$$

Находим реакции опор A_y, B_y, A_x, B_x отдельно для сил, параллельных осям y и x , при помощи уравнений равновесия. Величины реакций и их направления указаны на расчетной схеме вала (рис. 7.1,б). Вал подвергается одновременному действию изгиба и кручения. Пренебрегая влиянием поперечных сил, расчет на прочность производим для опасного сечения, исходя из наличия в поперечных сечениях вала трех внутренних силовых факторов M_x, M_y, M_z . Строим эпюры этих моментов (рис.7.1,в,г,д). Опасным сечением является сечение I-I, так как для него суммарный изгибающий момент $M_{изг}^I = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} > M_{изг}^{II}$ будет наибольшим.

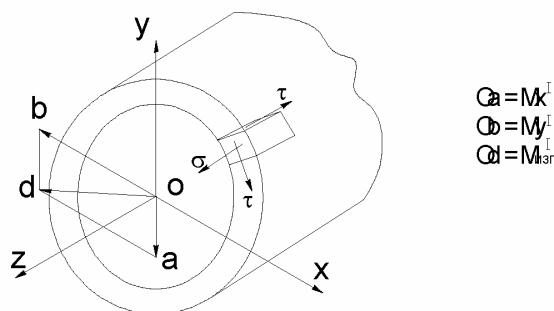


Рис.7.2

Опасные точки C, D в опасном сечении определяются построением, показанным на рис.7.2. Отрезки Oa, Ob , равные величинам моментов M_x^I, M_y^I в выбранном масштабе откладываются в сторону сжатых волокон. Суммарный момент $M_{изг}^I$ определяется отрезком Od . В опасных точках имеет место упрощенное плоское напряженное состояние, поэтому условие прочности для критерия прочности Сен-Венана имеет вид:

$$\sigma_{эке} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (7.6)$$

Нормальное и касательное напряжения в опасной точке C определяются следующим образом:

$$\sigma_c = \frac{M_{изг}^I}{W_{изг}}; \tau_c = \frac{M_z^I}{W_p} \quad (7.7)$$

Здесь

$$W_{изг} = W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}; W_p = 2W_{изг} = \frac{\pi d^3}{16} \quad (7.8)$$

С учетом соотношений (7.7), (7.8) условие (7.6) принимает вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^c = \frac{M_{\text{прив}}^I}{W_{\text{изг}}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_{\text{изг}}} = \frac{32 \cdot M_{\text{прив}}^I}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

Вычисляем приведенный момент $M_{\text{прив}}^I = \sqrt{0.93^2 + 3.2^2 + 1.4^2} = 3.62 \text{ кНм}$. Диаметр вала равен

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{прив}}^I}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3.62 \cdot 10^2}{3.14 \cdot 12}} = 6.75 \text{ см} = 67.5 \text{ мм}$$

Округляя, принимаем $d = 68 \text{ мм}$.

В зоне посадки зубчатых колес в поперечных сечениях возникают нормальные напряжения. Вследствие вращения вала они будут меняться по симметричному циклу. Определим отдельно условные запасы прочности по σ и τ

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_a = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{изг}}} = \frac{32 \sqrt{0.93^2 + 3.2^2} \cdot 10^2}{3.14 \cdot 6.8^3} = 10.8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$$

По кривой 2 (см. рис.2 приложения 2.1) находим масштабный коэффициент ε_m для $d = 68 \text{ мм}$.

Получаем $\varepsilon_m = 0.67$. Так как вал шлифованный, то $\varepsilon_n = 1$. По формуле (7.1) находим коэффициент запаса прочности

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \cdot \varepsilon_M} \sigma_a} = \frac{30}{\frac{1.4}{1 \cdot 0.67} 10.8} = 1.33$$

Далее

$$\tau_a = 0; \tau_m = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16 \cdot 1.4 \cdot 10^2}{3.14 \cdot 6.8^3} = 2.27 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

$$n_\tau = \frac{\tau_T}{\tau_m} = \frac{19}{2.27}$$

Поскольку напряженное состояние вала является двухосным, для определения коэффициента усталостной прочности используем формулу (7.5)

$$n_r = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1.33 \cdot 8.37}{\sqrt{1.33^2 + 8.37^2}} \approx 1.31 .$$

1.8 . РАСЧЕТЫ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

В практике бывают случаи, когда внешняя нагрузка превышает некоторое критическое значение, что приводит к потере устойчивости исходной формы равновесия и связано с неограниченным ростом деформаций и напряжений. Разрушение происходит внезапно, когда прочность конструкции еще далеко не исчерпана.

Чтобы конструкция находилась в устойчивом равновесном состоянии, необходимо выполнение условия устойчивости

$$P \leq [P_y] \quad (8.1)$$

где $[P_y] = P_{кр} / [n_y]$; $P_{кр}$ - критическое значение нагрузки; $[n_y]$ - заданный коэффициент запаса устойчивости.

Критическая сила $P_{кр}$ для пластичных материалов определяется следующим образом:

$$P_{кр} = \begin{cases} P_{кр}^э = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(vl)^2} = \frac{\pi^2 EF}{\lambda_{\max}^2}, \text{ если } \lambda_{\max} \geq \lambda_{пред}, \\ P_{кр}^{Яс} = (a - b \lambda_{\max}) F, \text{ если } \lambda_{\max} < \lambda_{пред} \end{cases}$$

Гибкость λ определяется таким образом: $\lambda_{\max} = vl / i_{\min}$, $i_{\min}^2 = J_{\min} / F$, $\lambda_{пред} = \pi \sqrt{E / \sigma_{нц}}$, v - коэффициент приведенной длины, который зависит от вида закрепления.

ПРИМЕР 15. Определить допускаемое значение силы $[P_y]$ из расчета на устойчивость стержня при заданном коэффициенте запаса устойчивости $[n_y] = 2$. Длина стержня $l = 1.2$ м, материал Ст. 30. Закрепление и размеры b, h, d сечения стержня показаны на рис. 8.1 при $b = c = 2 \text{ см}$, $h = 3c = 6 \text{ см}$, $d = c/2 = 1 \text{ см}$.

Решение

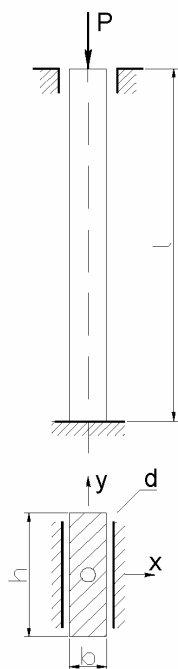


Рис. 8.1

Рассмотрим сначала определение моментов J_x, J_y и радиусов i_x, i_y инерции данной фигуры, которая имеет две оси симметрии x, y , которые и являются главными осями инерции. Главные моменты инерции J_x, J_y определяются по формулам

$$J_x = J_x^{np} - J_x^{sp} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{bh^3}{12} \cdot \left(1 - 0.59 \frac{d^4}{bh^3}\right) = \frac{2 \cdot 6^3}{12} \cdot \left(1 - 0.59 \frac{1}{2 \cdot 6^3}\right) \approx \frac{2 \cdot 6^3}{12} \approx \frac{bh^3}{12};$$

$$J_y = J_y^{np} - J_y^{sp} = \frac{hb^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{hb^3}{12} \cdot \left(1 - 0.59 \frac{d^4}{bh^3}\right) = \frac{6 \cdot 2^3}{12} \cdot \left(1 - 0.59 \frac{1}{6 \cdot 2^3}\right) \approx 0.99 \frac{6 \cdot 2^3}{12} \approx 0.99 \frac{hb^3}{12}$$

Тогда радиусы инерции определяются так:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}, i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}, F = bh - \frac{\pi d^2}{4} = bh \left(1 - 0.785 \frac{d^2}{bh}\right) = bh(1 - 0.065) = 0.935bh,$$

$$i_x = \sqrt{\frac{bh^3}{12 \cdot 0.935 \cdot bh}} = \frac{h}{\sqrt{0.935 \cdot 12}} = 1.75 \text{ см}, i_y = \sqrt{\frac{hb^3}{12 \cdot 0.935 \cdot bh}} = \frac{b}{\sqrt{0.935 \cdot 12}} = 0.58 \text{ см}.$$

Коэффициенты приведенной длины $\nu_x = 2, \nu_y = \frac{1}{2} = 0.5$.

Гибкость стержня в двух плоскостях находятся (относительно осей x, y соответственно):

$$\lambda_x = \frac{2 \cdot 120}{1.75} \approx 137, \lambda_y = \frac{0.5 \cdot 120}{0.58} \approx 103.$$

Имеем

$$\lambda_{\max} = \lambda_x = 137 > \lambda_{\text{пред}} = 3.14 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{26}} = 87$$

Тогда критическая сила определяется по формуле Эйлера

$$P_{kp} = P_{kp}^0 = \frac{\pi^2 EJ_x}{(\nu l)^2} = \frac{3.14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 6^3}{12 \cdot (2 \cdot 120)^2} = 124 \text{ кН}$$

Допускаемое значение нагрузки равно $[P]_y = 124/2 = 62 \text{ кН}$.

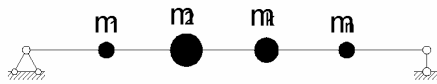
Указание. Если заданная фигура сечения имеет одну ось симметрии, то необходимо определить положение центра тяжести и применить формулу параллельного переноса

$$J_u = J_{u_0} + a^2 F.$$

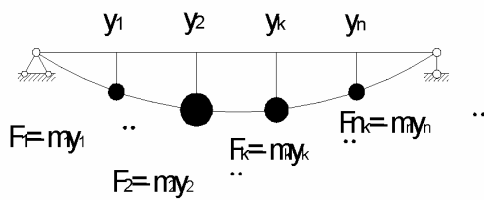
1.9. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

1.9.1. Собственные колебания. Определение собственных частот и форм колебаний

Элементы различных машин, приборов и аппаратуры при динамических воздействиях испытывают упругие колебания. В качестве примера расчетной схемы упругих элементов рассмотрим балку (рис. 9.1), несущую произвольное конечное число сосредоточенных масс m_k ($k=1, 2, \dots, n$).



б)



а)

в)

Рис . 9.1

Для упругой системы (рис. 9.1, а) перемещения j -й точки пропорциональны силам

$$y_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} F_k, j = 1, 2, \dots, n \quad (9.1)$$

где $F_k = -m_k \ddot{y}_k$, а δ_{jk} - единичные перемещения, определяемые интегралом Мора

$$\delta_{jk} = \int_0^l \frac{\overline{M}_j \overline{M}_k}{EJ_x} dz$$

где $\overline{M}_j, \overline{M}_k$ - функции единичных моментов от единичных сил, приложенных в точках i и j соответственно; EJ_x - жесткость стержня на изгиб; l - длина стержня.

Уравнения движения упругой системы (рис.9.1) примут следующий вид

$$\sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} \ddot{y}_k + y_j = 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (9.2)$$

Входящие сюда коэффициенты m_k имеют обобщенный смысл : в тех задачах , где одно из перемещений y_k является углом поворота , под m_k следует понимать не массу , а момент инерции k -ого груза относительно оси , проходящей через его центр масс .

Полученные уравнения могут описывать не только изгибные, но также продольные и крутильные колебания, если для единичных коэффициентов δ_{jk} использовать следующие формулы

$$\delta_{jk} = \int_0^l \frac{\overline{N}_j \overline{N}_k}{EF} dz$$

для продольных колебаниях стержней с сосредоточенными массами (рис.9.1,б)

$$\delta_{jk} = \int_0^l \frac{\overline{M}_{zj} \overline{M}_{zk}}{GJ_p} dz$$

при крутильных колебаниях стержней с дисками (рис.9.1, в)

где $\overline{N}_j, \overline{N}_k, \overline{M}_{zj}, \overline{M}_{zk}$ - функции единичных продольных сил и крутящих моментов; EF, GJ_p - жесткости стержней на растяжение и кручение соответственно.

Считая , что балка совершает гармонические колебания , решение системы (9.2) будем искать в виде

$$y_j(t) = Y_j \cos(\omega t + \varphi) \quad (9.3)$$

Здесь Y_j - амплитуда ; ω - круговая частота ; φ - сдвиг фаз . Подставляя (9.3) в (9.2) , получаем систему уравнений относительно амплитуд

$$\sum_{k=1}^n (-m_k \delta_{jk} \omega^2 \ddot{Y}_k) + Y_j = 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (9.4)$$

Для системы, имеющей две степени свободы, уравнения (9.4) запишутся

$$\begin{aligned} Y_1(1 - m_1 \delta_{11} \omega^2) + Y_2(-m_2 \delta_{12} \omega^2) &= 0 \\ Y_1(-m_1 \delta_{21} \omega^2) + Y_2(1 - m_2 \delta_{22} \omega^2) &= 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

Для того, чтобы система (9.5) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя. Из этого условия получаем частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - m_1 \delta_{11} \omega^2 & -m_2 \delta_{12} \omega^2 \\ -m_1 \delta_{21} \omega^2 & 1 - m_2 \delta_{22} \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.6)$$

Раскрывая определитель (9.6), получаем следующее уравнение относительно частоты

$$1 - (m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) \omega^2 + m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21}) \omega^4 = 0 \quad (9.7)$$

Корни этого уравнения называются собственными частотами и нумеруются в порядке возрастания ($\omega_1 < \omega_2$). Система с двумя степенями свободы имеет две собственные частоты

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{\frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22}}{2}\right)^2 + m_1 m_2 \delta_{12}^2}} \quad (9.8)$$

Каждой собственной частоте соответствует своя собственная форма колебаний. Для ее определения воспользуемся одним из уравнений (9.5), подставив одну из частот ω_i

$$\frac{Y_{1i}}{Y_{2i}} = \frac{m_2 \delta_{12} \omega_i^2}{1 - m_1 \delta_{11} \omega_i^2} \quad (9.9)$$

Индекс i соответствует порядковому номеру собственной формы. Собственные формы колебаний должны удовлетворять условию ортогональности

$$m_1 Y_{11} Y_{12} + m_2 Y_{21} Y_{22} = 0 \quad (9.10)$$

Собственные формы колебаний, начиная со второй, имеют узловые точки, число которых всегда на единицу меньше порядкового номера формы.

1.9.2 Вынужденные колебания упругих систем

Рассмотрим вынужденные колебания упругой системы под действием внешних возбуждающих сил $P_k(t) = P_{0k} \cos \Omega t$, приложенных к сосредоточенным массам. В этом случае уравнения движения примут вид :

$$\sum_{k=1}^n m_k \delta_{jk} \ddot{y}_k + y_j = \sum_{k=1}^n P_{0k} \delta_{jk} \cos \Omega t, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9.11)$$

Частное решение системы (9.11) будем искать в виде

$$y_j(t) = Y_j \cos \Omega t \quad (9.12)$$

После подстановки (9.12) в (9.11) получаем систему уравнений относительно амплитуд

$$\sum_{k=1}^n (-m_k \delta_{jk} \omega^2 \ddot{Y}_k) + Y_j = \sum_{k=1}^n P_{0k} \delta_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9.13)$$

Для системы с двумя степенями свободы уравнения (9.13) запишутся

$$\begin{aligned} Y_1(1 - m_1 \delta_{11} \omega^2) + Y_2(-m_2 \delta_{12} \omega^2) &= P_{01} \delta_{11} + P_{02} \delta_{12} \\ Y_1(-m_1 \delta_{21} \omega^2) + Y_2(1 - m_2 \delta_{22} \omega^2) &= P_{01} \delta_{21} + P_{02} \delta_{22} \end{aligned} \quad (9.14)$$

Решая эту систему уравнений, находим амплитуды вынужденных колебаний Y_j .

Амплитудные значения сил, действующих на массы, связаны с найденными амплитудами перемещений следующими соотношениями:

$$F_{0k} = P_{0k} + m_k \Omega^2 Y_k \quad (9.15)$$

Если заменить силы, действующие на массы, их амплитудными значениями, то нетрудно построить эпюры динамических моментов

1.9.3 Динамический расчет статически определимых систем

ПРИМЕР 16. 1. Определить собственные частоты и формы колебаний упругой балки с двумя сосредоточенными массами (рис. 9.2). 2. Определить амплитуды вынужденных колебаний под действием силы $P(t) = P_0 \cos \Omega t$, приложенной в точке А. Построить эпюры динамических изгибающих моментов при $\Omega = (1/2m\delta_{22})^{1/2}$

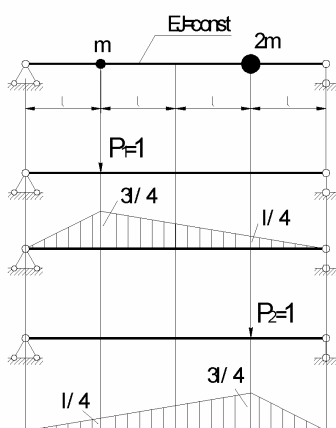


Рис.9.2

Решение

В случае плоских колебаний рассматриваемая упругая система имеет две степени свободы. Единичные перемещения δ_{jk} определяется по правилу Верещагина, перемножая соответствующие эпюры единичных изгибающих моментов (рис.9.2,б)

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \sum_{i=1}^2 \int_0^l \frac{\bar{M}_i dz}{EJ} = \frac{3}{4} \frac{l^3}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^2 \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} dz = \frac{7}{12} \frac{l^3}{EJ}$$

Используя формулу (9.7), находим собственные частоты

$$\omega_1^2 = 0,492 \frac{EJ}{ml^3}, \quad \omega_2^2 = 4,566 \frac{EJ}{ml^3}$$

Определяем далее собственные формы колебаний, подставляя ω_i и δ_{jk} в выражение (9.8). В результате для собственной формы

$$\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{2m \cdot \frac{7}{12} \frac{l^3}{EJ} \cdot 0,492 \frac{EJ}{ml^3}}{1 - m \cdot \frac{3}{4} \frac{l^3}{EJ} \cdot 0,492 \frac{EJ}{ml^3}} \approx 0,91$$

или $Y_{11} = 0,91$, $Y_{22} = 1$, а для второй $Y_{11} = -2,198$, $Y_{22} = 1$.

Используя (9.10), убедимся, что полученные собственные формы обладают свойством ортогональности:

$$m \cdot 0.91 \cdot (-2.198) + 2m \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Для определения амплитуд колебаний воспользуемся решением системы (9.14) при $P_{01} = P_0, P_{02} = 0$.

Тогда

$$Y_1 = P_0 \frac{\delta_{11} - 2m(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)\Omega^2}{\Delta(\Omega)},$$

$$Y_2 = P_0 \frac{\delta_{12}}{\Delta(\Omega)}.$$

(9.16)

Здесь $\Delta(\Omega)$ - определитель системы (9.14), описываемый выражением (9.7), если в последнем принять $\omega = \Omega$. Нетрудно видеть, что при

$$m = \frac{\delta_{11}}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)\Omega^2}$$

(9.17)

числитель в выражении для Y_1 обращается в нуль. На этом основан принцип динамического гасителя колебаний. При заданной частоте Ω амплитуды перемещений и сил, действующих на массы определяются следующими выражениями:

$$Y_1 = 0.64 \frac{P_0 l^3}{EJ_x}, F_{01} = P_0 + m\Omega^2 Y_1 = 1.427 P_0,$$

$$Y_2 = 0.83 \frac{P_0 l^3}{EJ_x}, F_{02} = 2m\Omega^2 Y_2 = 1.107 P_0$$

Эпюра динамических моментов представлена на рис.9.3

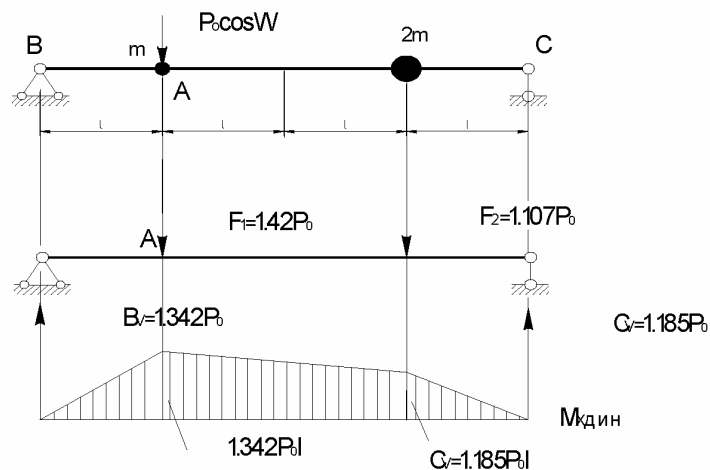


Рис . 9.3

Геометрические характеристики двутавровых сечений ГОСТ 8239-72

Номер двутавра	h, мм	F, см ²	I _x , см ⁴	W _x , см ³
10	100	12,0	198	39,7
12	120	14,7	350	58,4
14	140	17,4	572	81,7
16	160	20,2	873	109,0
18	180	23,4	1290	143,0
18a	180	25,4	1430	159,0
20	200	26,8	1840	184,0
20a	200	28,9	2030	203,0
22	220	30,6	2550	232,0
22a	220	32,8	2790	254,0
24	240	34,8	3460	289,0
24a	240	37,5	3800	317,0
27	270	40,2	5010	371,0
27a	270	43,2	5500	407,0
30	300	46,5	7080	472,0
30a	300	49,9	7780	518,0
33	330	53,8	9840	597,0
36	360	61,9	13380	743,0
40	400	72,6	19062	953,0
45	450	84,7	27696	1231,0
50	500	100,0	39727	1589,0
55	550	118,0	55962	2035,0
60	600	138,0	76806	2560,0

Таблица 2.2

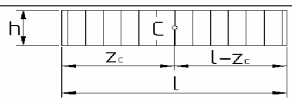
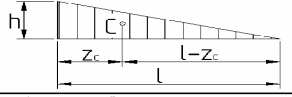
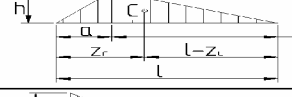


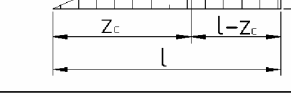
Механические характеристики углеродистых конструкционных сталей

Марка стали	$\sigma_{пч}$, кН/см ²	$\sigma_{т}$, кН/см ²	$\tau_{т}$, кН/см ²	σ_{-1} , кН/см ²	τ_{-1} , кН/см ²	ψ_{σ}	ψ_{τ}	μ	G, кН/см ²	E, кН/см ²	
10	34	21	14	16-22	8-12	0	0	0.24- 0.28	(0.8- 0.81) 10 ⁴	1.910 ⁴	
20	42	25	16	17-22	10-13					2.0210 ⁴	
25	46	28	16	19-25	10-13						
30	50	30	17	20-27	11-14						
35	54	32	19	22-30	13-18						
40	58	34	19	23-32	14-19	0.05	0			2.13510 ⁴	
45	61	36	22	25-34	15-20					2.04 10 ⁴	
50	64	38	22	27-35	16-21					2.2 10 ⁴	
55	66	39	22	27-35	16-21						
60	69	41	22	31-38	18-22					2.08 10 ⁴	
40х	100	80	22	35-38	22.5	0.1	0.05	0.25- 0.3	0.808 10 ⁴	2.18510 ⁴	
45х	105	85	22	31-41	22.5	0.2	0.1			0.802 10 ⁴	2.11 10 ⁴
30хн	95	75	22	31-41	23	0.1	0.05			0.802 10 ⁴	2.13 10 ⁴
35хн	100	85	22	47-51	23	0.2	0.1			0.802 10 ⁴	2.13 10 ⁴
40хн	100	80	39	40	24	0.2	0.1			0.802 10 ⁴	2.04 10 ⁴
50хн	110	90	39	55	24	0.2	0.1			0.802 10 ⁴	2.04 10 ⁴

Интегралы в расчетах деформаций бруса малой кривизны

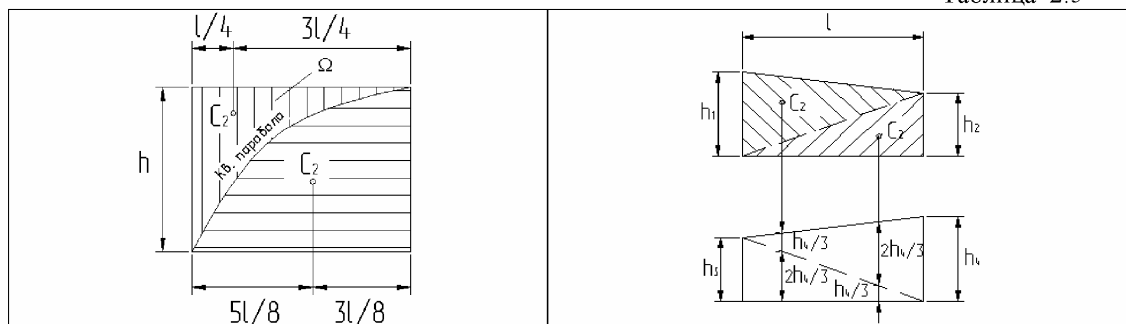
Интеграл	Неопределенный интеграл	Определенный интеграл в пределах		
		0..... $\pi/4$	0..... $\pi/2$	0..... π
$\int \sin \varphi d\varphi$	$-\cos \varphi + C$	0.293	1	2
$\int \cos \varphi d\varphi$	$\sin \varphi + C$	0.707	1	0
$\int \sin^2 \varphi d\varphi$	$-\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2} + C$	0.143	$\pi/4$	$\pi/2$
$\int \cos^2 \varphi d\varphi$	$\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2} + C$	0.643	$\pi/4$	$\pi/2$
$\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{\sin^2 \varphi}{2} + C$	0.25	0.5	0
$\int \sin 2\varphi d\varphi$	$-\frac{\cos 2\varphi}{2} + C$	0.5	1	0
$\int \cos 2\varphi d\varphi$	$\frac{\sin 2\varphi}{2} + C$	0.5	0	0

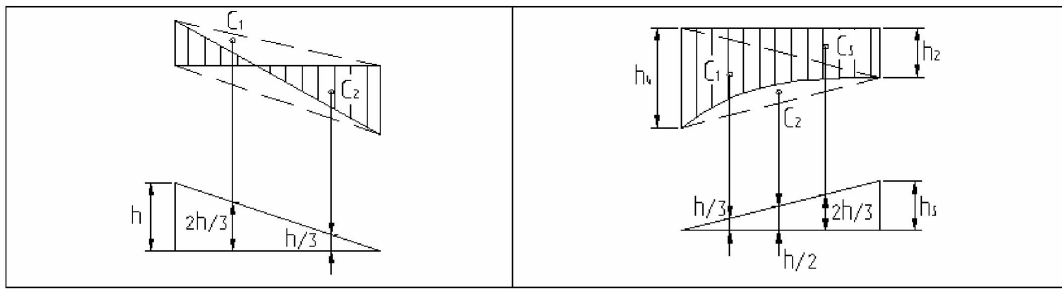
Таблица 2.4
Использование справочных данных по разбиению и перемножению эпюр изгибающих моментов.

Вид эпюры	Площадь эпюры	Расстояние до центра тяжести	
		z_c	$l-z_c$
	hl	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$	$\frac{2}{3}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{a+l}{3}$	$\frac{b+l}{3}$
	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{1}{4}l$	$\frac{3}{4}l$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$	$\frac{3}{8}l$

Разбиение эпюр при их “перемножении”

Таблица 2.5





Формулы для вычисления интеграла Мора $\left(\int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ_x} dz \right)$

Таблица 2.6

\bar{M}_i	\bar{M}_k				
		hh_2l	$\frac{hh_3l}{2}$	$\frac{c_1lh}{2}$	$\frac{h(h_4+h_5)l}{2}$
		$\frac{hh_2l}{2}$	$\frac{hh_3l}{3}$	$\frac{h(l+b)c_1}{6}$	$\frac{hl}{6}(2h_4+h_5)$
		$\frac{hh_2l}{2}$	$\frac{hh_3l}{6}$	$\frac{h(a_1+l)c_1}{6}$	$\frac{hl}{6}(h_4+2h_5)$
		$\frac{h_2(h+h_1)l}{2}$	$\frac{h_3l}{6}(2h+h_1)$	$\frac{c_1h}{6}[h(l+b)+h_1(l+a_1)]$	$\frac{1}{6}[h(2h_4+h_5)+h_1(2h_5+h_4)]$
		$\frac{ch_2l}{2}$	$\frac{ch_3(l+b)}{6}$	$\frac{cc_1}{6} \left[2 - \frac{(b_1-b)^2}{b_1a} \right]$	$\frac{c}{6}[h_4(l+b)+h_5(l+a)]$
		$\frac{ch_2l}{2}$	$\frac{ch_3(l+b)}{6}$	$\frac{cc_1l}{6} \left[2 - \frac{(a_1-a)^2}{a_1b} \right]$	$\frac{c}{6}[h_4(l+b)+h_5(l+a)]$
		$\frac{2flh_2}{3}$	$\frac{flh_3}{3}$	$c_1f_1(l^2+a_1b)$	$\frac{fl}{3}[h_4+h_5]$
		$\frac{f_1lh_2}{3}$	$\frac{f_1lh_3}{4}$	$\frac{c_1f_1}{12} \left[l+b+\frac{b^2}{l} \right]$	$\frac{f_1l}{12}[3h_4+h_5]$

Зависимость коэффициента состояния поверхности углеродистых сталей от предела прочности.

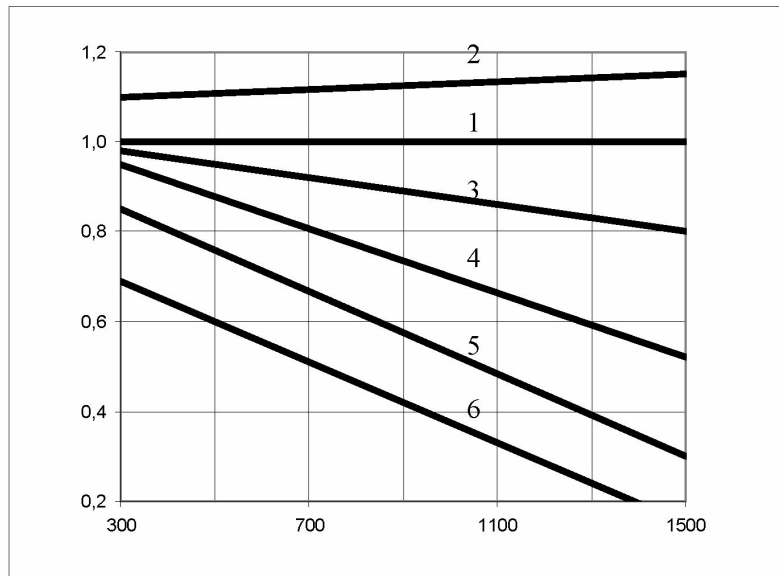


Рис. 2.1

Цифры у кривых указывают состояние поверхности:

- 1 — Шлифованная поверхность
- 2 — Полированная поверхность
- 3 — Поверхность, обработанная резцом
- 4 — Поверхность с мелкой насечкой
- 5 — Поверхность, не обработанная после прокатки
- 6 — Поверхность, корродированная в пресной воде.

Масштабный коэффициент для случаев изгиба и кручения:

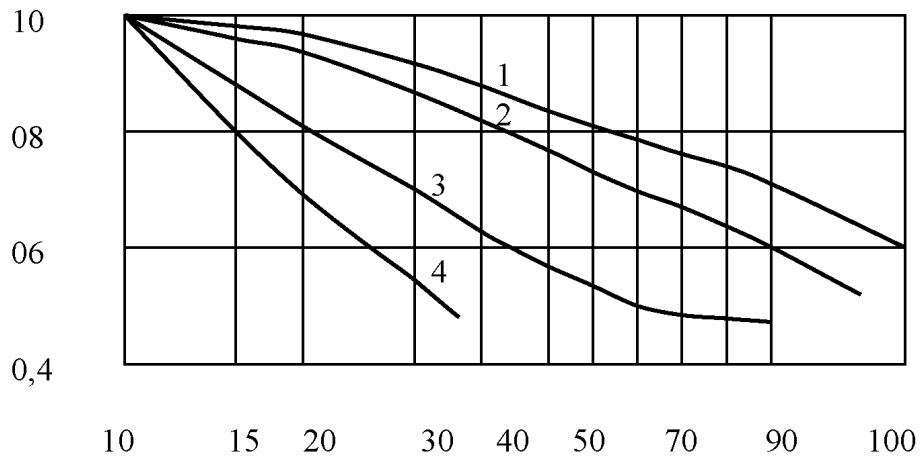


Рис. 2.2

1 — углеродистая сталь при отсутствии концентрации напряжений.

2 — легированная сталь при отсутствии концентрации напряжений,
а также.

углеродистая сталь при умеренной концентрации напряжений.

3 — легированная сталь при наличии концентрации напряжений.

4 — сталь при высокой степени концентрации напряжений.

Аналогии в сопротивлении материалов

Параметры	Виды деформации		
	Растяжение	Кручение	Изгиб
Внутренние силовые факторы	N_z	M_z	M_x
Напряжение	$\sigma = \frac{N_z}{F}$	$\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho$	$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$
Геометрические характеристики	F	J_p, W_p	J_x, W_x
Жесткость	EF	GJ_p	$EJ_x (EJ_y)$
Перемещения	$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z \cdot 1}{EF} dz$	$\varphi = \int_0^l \frac{M_z \cdot 1}{GJ_p} dz$	$\Delta_{kp} = \int_0^l \frac{M_p \cdot \overline{M}_k}{EJ_x} dz$
Деформация	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$	$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz} = \rho\theta$	$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$
Закон Гука	$\sigma = E\varepsilon$	$\tau = G\gamma$	$\sigma = E\varepsilon$
Условие прочности	$\sigma = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma]$	$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau]$	$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$
Условие жесткости	$\Delta l \leq [\Delta l]$	$\theta = \frac{M_z}{GJ_p} \leq [\theta]$	$\Delta_{\max} \leq [\Delta]$
Потенциальная энергия	$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N_z^2}{EF} dz$	$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2}{GJ_p} dz$	$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EJ_x} dz$