

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ  
ПРИ ПРОСТЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

Методические указания

Методические указания содержат теоретический материал и примеры расчета стержней на прочность и жесткость при простых деформациях. Приведены варианты расчетно-проектных работ.

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения, изучающих курс сопротивления материалов.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Общие положения

2. Осевое растяжение и сжатие

3. Кручение

4. Изгиб

4.1. Теоретическая часть

Список литературы

## Введение

При изучении курса “Соппротивление материалов” наибольшие трудности у студентов возникают при решении задач и выполнении расчетно-проектных заданий. Настоящие методические указания направлены на то, чтобы облегчить студентам изучение данного курса, помочь овладеть методикой решения задач и получить необходимые навыки при их решении.

В методических указаниях отражены основные положения теории расчета на прочность и жесткость при простых деформациях, приведены примеры решения задач и расчетно-проектных заданий.

Для удобства пользования методическими указаниями и лучшего усвоения материал для каждой простой деформации (осевого растяжения-сжатия, кручения, плоского изгиба) даётся в отдельности.

Предусматривается, что студенты вначале должны ознакомиться с теоретическими положениями, методическими указаниями и решением примеров по рассматриваемому разделу. Это позволит им лучше освоить необходимые основы теории, осмыслить методику решения задач данного типа и приобрести знания, достаточные для самостоятельной работы.

## 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

При проектировании различных инженерных сооружений и машин приходится определять размеры отдельных элементов этих сооружений и деталей машин. Эти задачи решаются на основании расчетов, целью которых является создание прочных, устойчивых, долговечных и экономичных сооружений. Все эти вопросы рассматриваются в комплексе дисциплин, основой которых является “Соппротивление материалов”.

При нагружении отдельного элемента сооружения внешней нагрузкой в нем возникают внутренние силы (продольные и поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты). Интенсивность внутренних сил называется напряжением (нормальное –  $\sigma$  и касательное –  $\tau$ ).

Чтобы судить о прочности элемента, необходимо провести специальные расчеты. Существует три метода таких расчетов:

- расчет по допускаемым напряжениям;
- расчет по разрушающим нагрузкам;
- расчет по предельным состояниям.

Остановимся подробно на расчете по допускаемым напряжениям.

Условие прочности по допускаемым напряжениям имеет вид:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_{\text{или}} \tau_{\max} \leq [\tau],$$

где  $\sigma_{\max}, \tau_{\max}$  – максимальные напряжения в опасном поперечном сечении стержня;  $[\sigma], [\tau]$  – допускаемые напряжения.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{опасное}}}{K} \quad [\tau] = \frac{\tau_{\text{опасное}}}{K}$$

где  $\sigma_{\text{опасное}}, \tau_{\text{опасное}}$  – предел текучести материала;  $K$  – коэффициент запаса прочности.

На основании условия прочности стержня можно решить три типа задач:

- проверить прочность стержня;
- найти необходимые размеры поперечного сечения стержня;
- установить допускаемую грузоподъемность.

Кроме расчета на прочность, отдельный элемент проверяется еще и на жесткость. Проверка стержня на жесткость состоит в определении его деформации и сравнении ее с допускаемой величиной.

## 2. ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Осевым растяжением или сжатием называется такая деформация, при которой в поперечных сечениях стержня возникают только продольные силы. Продольная сила, растягивающая стержень, считается положительной, сжимающая стержень – отрицательной. Величина продольной силы определяется при помощи метода сечений. Для выяснения характера распределения продольных сил по длине стержня строится график, называемый эпюрой продольных сил (рис. 2.1).

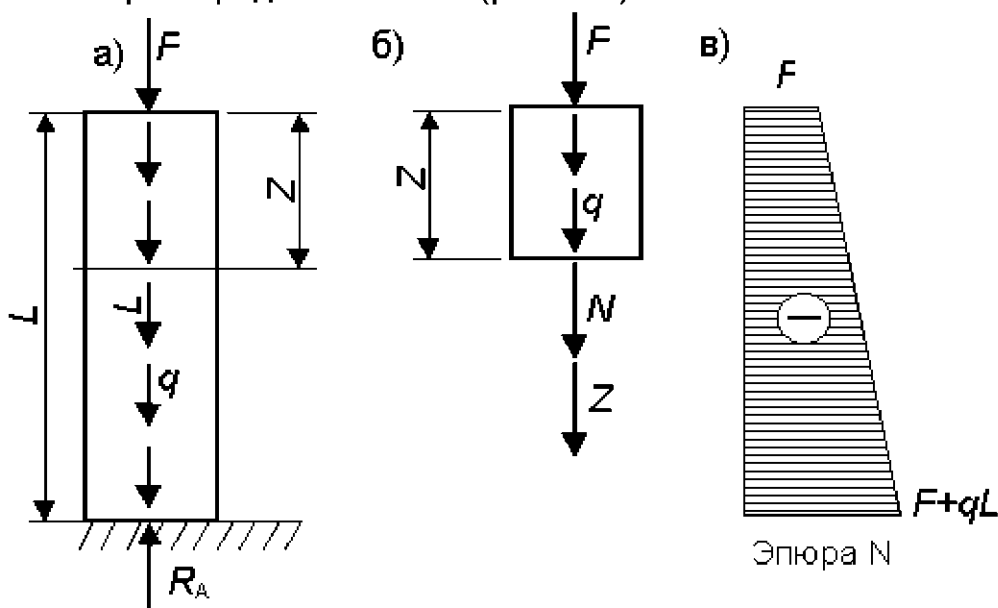


Рис. 2.1. Построение эпюры продольных сил: а) заданный стержень; б – отсечённая часть стержня; в) эпюра продольных сил

Из равновесия отсеченной части находим продольную силу N:

$$N + F + qZ = 0,$$

$$N = -(F + qZ),$$

$$0 \leq Z \leq L,$$

при  $Z = 0$   $N = -F$ ;

при  $Z = L$   $N = -(F + qL)$ .

Зная продольную силу, можно найти напряжения в поперечных сечениях стержня:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – продольная сила; A – площадь поперечного сечения.

Для суждения о прочности стержня необходимо использовать условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (1)$$

Из условия прочности можно не только проверить прочность стержня, но и найти требуемые размеры поперечного сечения стержня; для этого вначале следует вычислить требуемую площадь поперечного сечения  $A_{\text{тр}}$ :

$$A_{\text{тр}} = \frac{N}{[\sigma]},$$

а затем определить размеры поперечного сечения исходя из его конфигурации. Из условия прочности можно найти и величину допускаемой продольной силы

$$N = [\sigma]A.$$

Подставляя в эту формулу выражение продольной силы N через внешнюю нагрузку, можно определить величину этой нагрузки.

Величина деформации стержня  $\Delta L$  при растяжении или сжатии находится по формуле

$$\Delta L = \frac{NL}{EA}, \quad (2)$$

где  $L$  – длина стержня до нагружения;  $N$  – продольная сила;  $E$  – модуль упругости при растяжении, сжатии;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Условие жесткости при растяжении и сжатии

$$\Delta L \leq [\Delta L], \quad (3)$$

где  $\Delta L$  – продольная деформация стержня;  $[\Delta L]$  – допустимая деформация.

**Пример 2.1.** Найти диаметр  $d$  круглого поперечного сечения стержня, изображенного на рис. 2.2, при  $[\sigma] = 20$  МПа. Построить эпюру распределения напряжений в опасном поперечном сечении. Определить перемещение свободного конца стержня  $\Delta_k^{св}$ .

Модуль упругости  $E = 3 \cdot 10^4$  МПа =  $3 \cdot 10^3$  кН/см<sup>2</sup>.

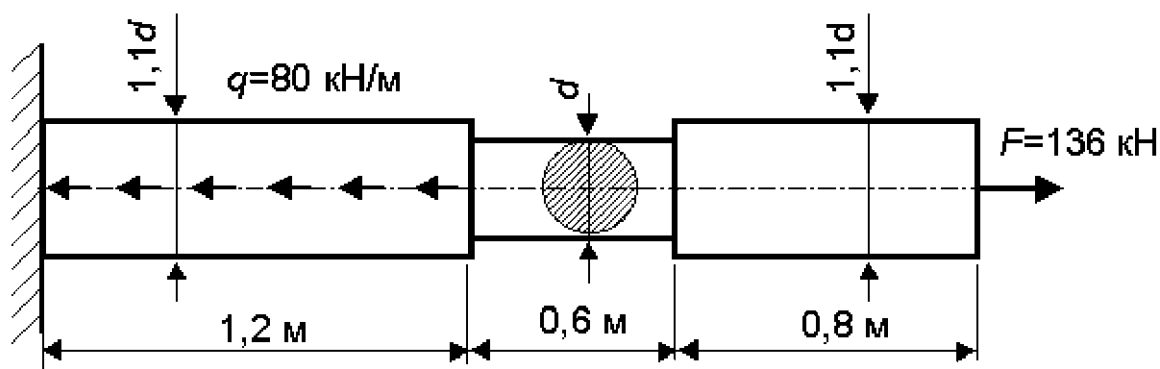


Рис. 2.2. Схема стержня

Для решения задачи необходимо знать опасное поперечное сечение стержня. Для этого строится эпюра продольных сил. Разбивка стержня на участки и эпюра продольных сил показаны на рис 2.3.

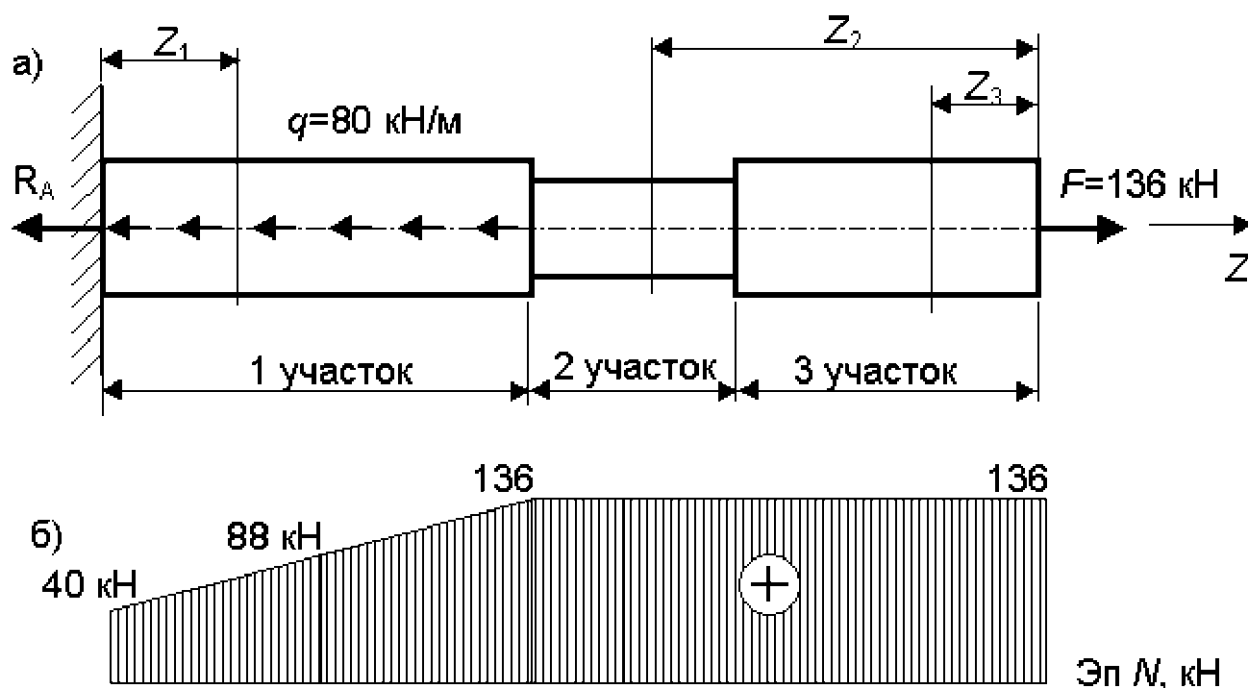
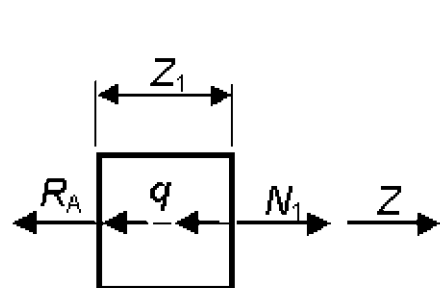


Рис. 2.3. Построение эпюры продольных сил:  
а) схема расположения участков; б) эпюра продольных сил

Находим опорную реакцию стержня  $R_A$ :



$$\sum F_z = 0 - R_A - 1,2q + F = 0,$$

откуда  $R_A = F - 1,2q = 136 - 1,2 \cdot 80 = 40 \text{ кН}$ .

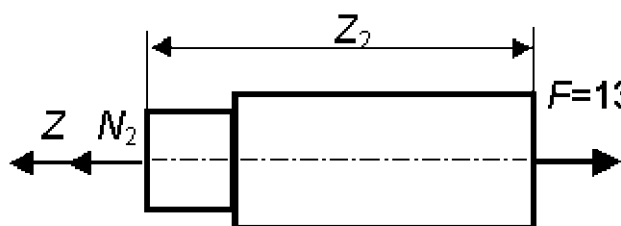
Находим продольные силы на участках стержня.

Рис. 2.4. Первый отсеченный участок

Первый участок (рис. 2.4):  $0 \leq z_1 \leq 1,2 \text{ м}$

$$\sum F_z = 0, -R_A - qz_1 + N_1 = 0,$$

откуда  $N_1 = R_A + qz_1 = 40 + 80z_1;$



при  $z_1 = 0 \quad N_1 = 40 \text{ кН}$ ,

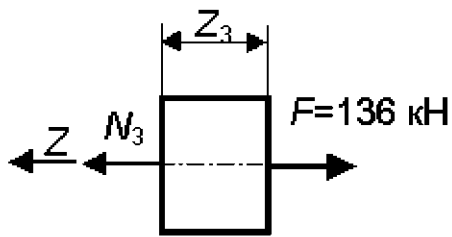
при  $z_1 = 1,2 \text{ м} \quad N_1 = 136 \text{ кН}$ .

Рис. 2.5. Второй отсеченный участок

Второй участок (рис. 2.5):  
 $0,8 \leq z_2 \leq 1,4 \text{ м}$

$$\sum F_z = 0, \quad N_2 - F = 0,$$

откуда  $N_2 = F = 136 \text{ кН}$ .



Третий участок (рис. 2.6):  $0 \leq Z_3 \leq 0,8 \text{ м}$   $\sum F_z = 0$   
 $N_3 - F = 0$ ,

откуда  $N_3 = F = 136 \text{ кН}$ .

Рис. 2.6. Третий отсеченный участок

Из эпюры продольных сил и размеров стержня видно, что опасное сечение будет на втором участке, поскольку на нем наибольшая продольная сила и наименьшая площадь поперечного сечения.

$$N_{\max} = N_2 = 136 \text{ кН}$$

Из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]$$

находим требуемую площадь поперечного сечения

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{136}{2} = 68 \text{ см}^2,$$

где

$$[\sigma] = 20 \text{ МПа} = 2 \text{ кН / см}^2.$$

Поскольку

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = 68 \text{ см}^2,$$

то

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 68}{3,14}} = 9,31 \text{ см}$$



Диаметр стержня на первом участке

$$d_1 = 1,1 d = 1,1 \cdot 9,31 = 10,24 \text{ см}$$

Диаметр стержня на третьем участке

$$d_3 = 1,1 d = 10,24 \text{ см}$$

На тех участках, где диаметры найдены не из условия прочности, требуется проверить условия прочности.

$$\sigma_{\max_1} = \frac{N_{\max}}{A_1} \leq [\sigma]$$

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10,24^2}{4} = 82,31 \text{ см}^2$$

$$\sigma_{\max_1} = \frac{136}{82,31} = 1,65 \text{ кН/см}^2 < 2 \text{ кН/см}^2$$

$$\sigma_{\max_3} = \frac{N_{\max}}{A_3} \leq [\sigma]$$

$$A_3 = 82,31 \text{ см}^2$$

$$\sigma_{\max_3} = \frac{136}{82,31} = 1,65 \text{ кН/см}^2 < 2 \text{ кН/см}^2$$

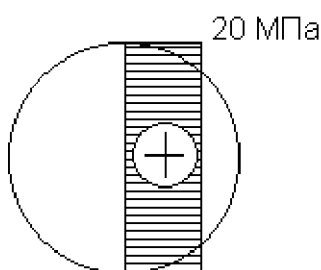


Рис. 2.7. Эпюра нормальных напряжений в опасном сечении

С учетом проверки назначаем размеры поперечных сечений с округлением до 1 мм: на среднем участке  $d = 9,3 \text{ см}$ , на левом и правом  $d_1 = d_3 = 10,2 \text{ см}$ . Эпюра напряжений в опасном сечении будет иметь вид прямоугольника с ординатами  $2 \text{ кН/см}^2$  (рис. 2.7).

Перемещение свободного конца стержня  $\Delta_k^{\text{гор}}$  найдется суммированием деформаций трех участков, каждая из которых вычисляется по формуле (2) при  $E = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 3 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$ ; на первом участке берем среднее значение продольной силы

$$N_1 = \frac{136 + 40}{2} = 88 \text{ кН},$$

$$\Delta k = \sum \frac{N_i L_i}{E A_i} = \frac{N_1 L_1}{E A_1} + \frac{N_2 L_2}{E A_2} + \frac{N_3 L_3}{E A_3} = \frac{88 \cdot 120}{E \frac{3,14 \cdot 10,2^2}{4}} + \frac{136 \cdot 60}{E \frac{3,14 \cdot 9,3^2}{4}} + \frac{136 \cdot 80}{E \frac{3,14 \cdot 10,2^2}{4}} = \frac{1}{E} (129,3 + 120,2 + 133,2) = \frac{382,7}{3 \cdot 10^3} = 0,13 \text{ см}.$$

**Пример 2.2.** Определить допускаемую величину  $F$  нагрузки, приложенной к кронштейну (рис 2.8). Стержень  $AB$  стальной круглого поперечного сечения диаметром 4 см, стержень  $BC$  чугунный квадратного поперечного сечения 4 x 4 см,  $[\sigma]_{ст} = 160 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_{чуг} = 140 \text{ МПа}$

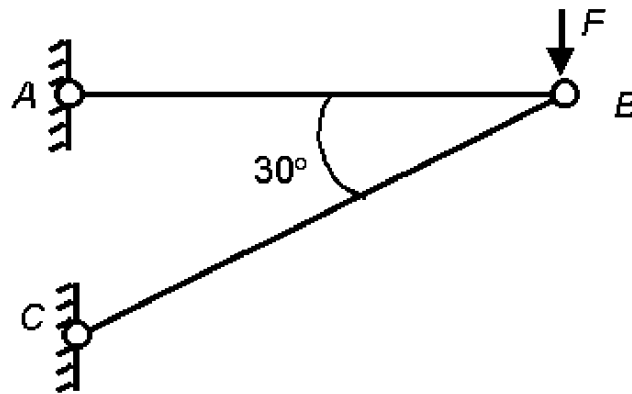


Рис 2.8. Схема стержней

Допускаемое состояние в кронштейне возникает, когда в одном из стержней усилие достигает допускаемой величины.

Предположим, что допускаемое состояние возникло в стержне  $AB$ .

$$N_{AB} = \sigma_{AB} A_{AB},$$

$$\sigma_{AB} = [\sigma]_{ст} = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2,$$

$$A_{AB} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2,$$

$$N_{AB} = 16 \cdot 12,56 = 200,96 \text{ кН}.$$

Рассмотрев равновесие узла  $B$ , находим допускаемую величину груза  $F$  (рис 2.9):

$$\sum F_x = 0, \quad -N_{AB} \cos 60^\circ + F'_{доп} \cos 30^\circ = 0,$$

$$F'_{доп} = \frac{N_{AB} \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{200,96 \cdot 0,5}{0,866} = 116,16 \text{ кН}$$

откуда

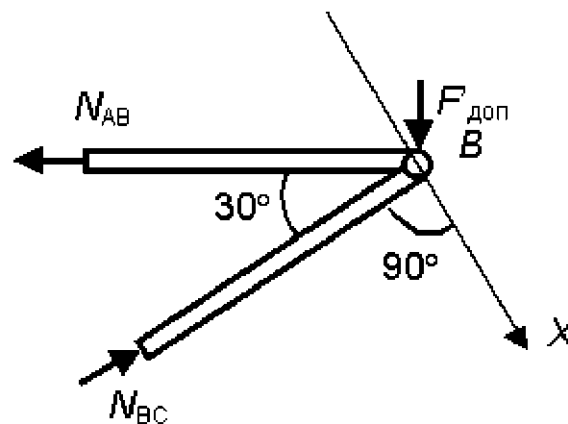


Рис 2.9. Равновесие узла  $B$

Предположим теперь, что допускаемое состояние возникло в стержне  $BC$ :

$$N_{BC} = \sigma_{BC} A_{BC},$$

$$\sigma_{BC} = [\sigma]_{чуг}^{сж} = 140 \text{ МПа} = 14 \text{ кН/см}^2,$$

$$A_{BC} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ см}^2,$$

$$N_{BC} = 14 \cdot 16 = 224 \text{ кН}$$

Из равновесия узла  $B$  находим второй вариант допускаемой силы (рис. 2.10):

$$\sum F_y = 0, \quad -N_{BC} \cos 60^\circ + F''_{доп} = 0,$$

$$F''_{доп} = N_{BC} \cos 60^\circ = 224 \cdot 0,5 = 112 \text{ кН}$$

откуда

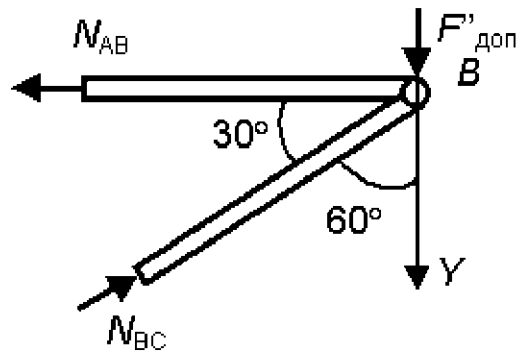


Рис. 2.10. Равновесие узла В

Окончательным значением допускаемой силы  $F$  будет наименьшее значение, найденное из двух состояний

$$F_{\text{доп}} = 112 \text{ кН} .$$

### 3. КРУЧЕНИЕ

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только крутящие моменты. Крутящий момент в поперечном сечении стержня равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на часть стержня по одну сторону от сечения. Крутящий момент можно считать положительным, если он действует по часовой стрелке при условии, что мы смотрим на него со стороны сечения. В кручении знак крутящего момента принципиального значения не имеет, важно, чтобы при расчете данного стержня оно было единым. Для нахождения опасного сечения стержня при кручении строится эпюра крутящих моментов. При кручении в поперечном сечении возникают только касательные напряжения  $\tau_k$ . Для стержней круглого поперечного сечения они отыскиваются по формуле

$$\tau_k = \frac{M_k \rho}{J_\rho} ,$$

где  $M_k$  – крутящий момент;  $\rho$  – расстояние от центра тяжести круглого сечения до точки, в которой отыскиваются напряжения;  $J_\rho$  – полярный момент инерции площади сечения.

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{k_{\text{max}}} = \frac{M_k}{W_\rho} \leq [\tau] ,$$

где  $W_\rho$  – полярный момент сопротивления;  $[\tau]$  – допускаемое напряжение.

На основании этой формулы можно проверить прочность стержня на кручение, найти необходимые размеры поперечного сечения, установить допускаемую нагрузку.

Угол закручивания при кручении находится по формуле

$$\varphi = \frac{M_K L}{G J_\rho},$$

где  $L$  – длина скручиваемого участка стержня;  $G$  – модуль упругости при сдвиге;  $G J_\rho$  – жесткость стержня при кручении.

Полный угол закручивания для стержней ступенчато-переменного сечения находится как сумма углов закручивания по участкам с постоянным

отношением  $\frac{M_K}{J_\rho}$  :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{K_i} L_i}{G J_{\rho_i}}$$

Полный угол закручивания не всегда может характеризовать жесткость стержня при кручении. Для оценки жесткости стержня в этом случае используется другая мера – относительный угол закручивания:

$$\theta = \frac{M_K}{G J_\rho},$$

измеряемый в  $\text{см}^{-1}$  или  $\text{м}^{-1}$ .

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\varphi_{\max} = \frac{M_K L}{G J_\rho} \leq [\varphi],$$

или

$$\theta_{\max} \leq [\theta].$$

Если поперечное сечение стержня имеет другую форму, то максимальные напряжения находятся по формуле

$$\tau_{k_{\max}} = \frac{M_k}{W_k},$$

а угол закручивания – по формуле

$$\varphi = \frac{M_k L}{G J_k},$$

где  $W_k$  – момент сопротивления сечения при кручении;  $J_k$  – момент инерции сечения при кручении.

**Пример 3.1.** Проверить прочность стержня круглого поперечного сечения, изображенного на рис. 3.1, при  $[\tau] = 80$  МПа. В случае невыполнения условия прочности на каком-либо из участков подобрать новый диаметр стержня. Построить эпюру касательных напряжений в опасном сечении. Найти полный угол закручивания свободного конца стержня ( $\varphi_k$ ) при  $G = 8 \times 10^4$  МПа.

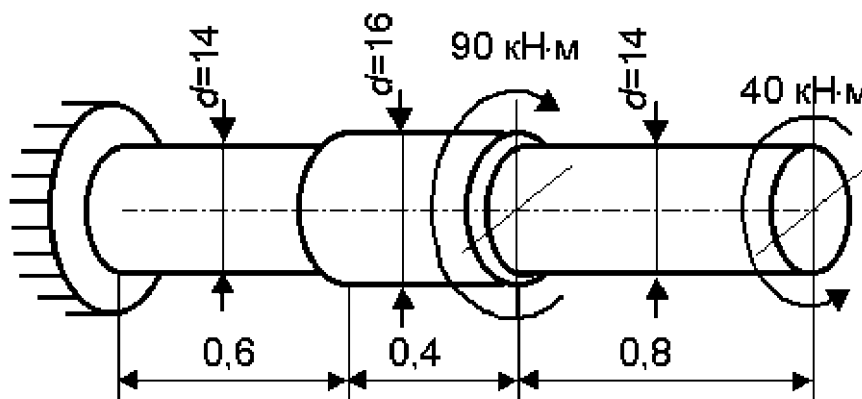


Рис. 3.1. Схема стержня

Для проверки прочности стержня необходимо найти его опасное сечение. Опасное сечение стержня устанавливается по эпюре крутящих моментов. Для построения эпюры крутящих моментов стержень разбиваем на участки, применяя метод сечений, находим крутящие моменты на каждом участке стержня (рис.3.2–3.4). Разбивка стержня на участки и эпюра крутящих моментов показана на рис. 3.5.

Рассекая стержень на каждом участке в произвольном месте, находим крутящие моменты:

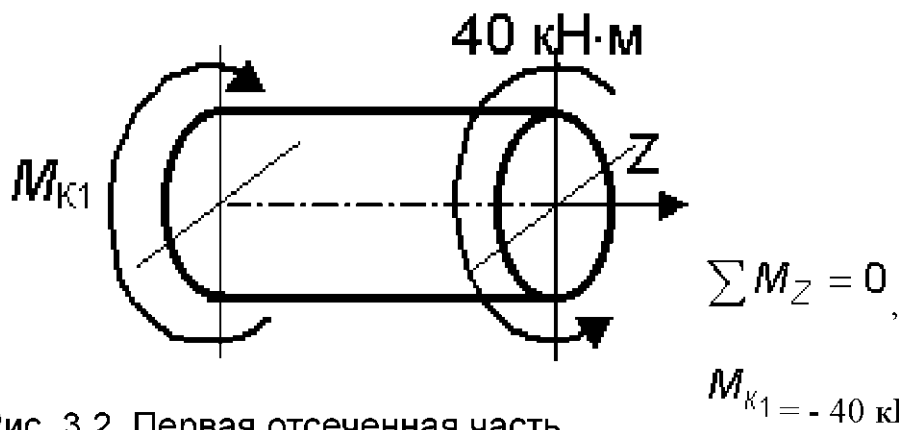


Рис. 3.2. Первая отсеченная часть

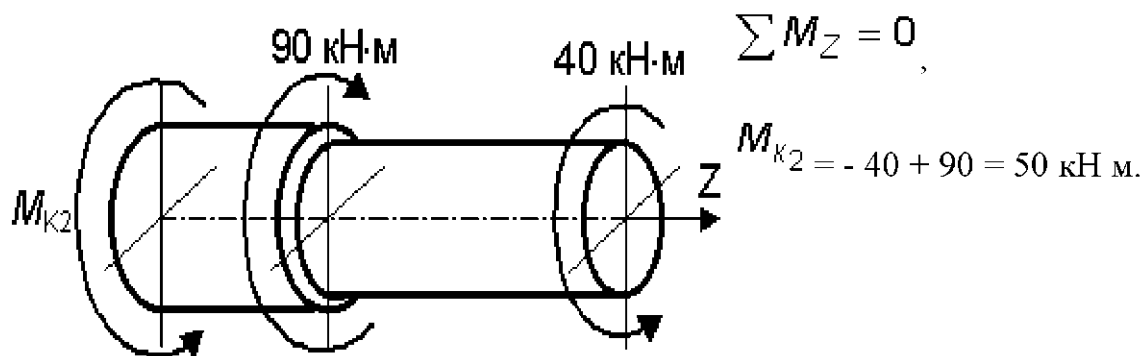


Рис. 3.3. Вторая отсеченная часть

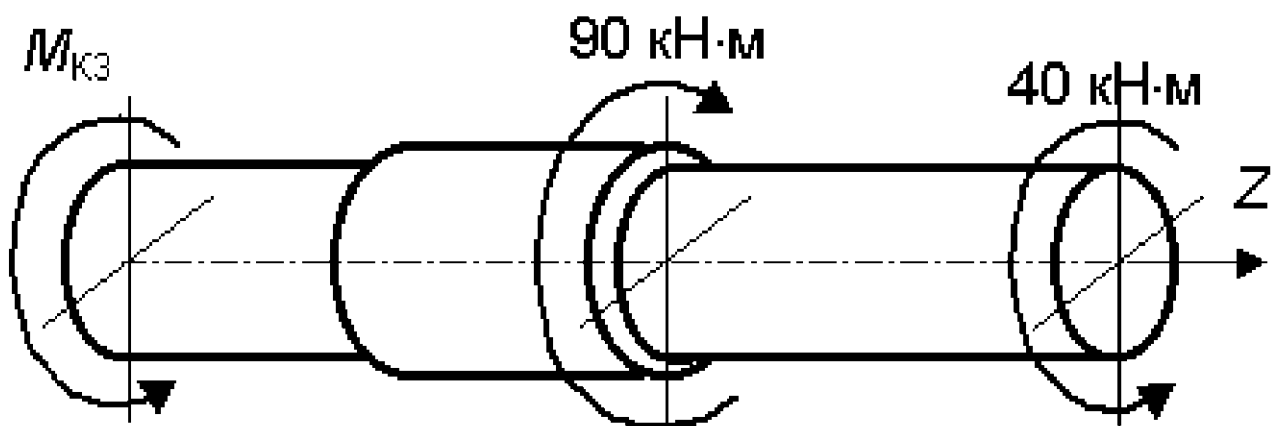


Рис. 3.4. Третья отсеченная часть

$$\sum M_Z = 0,$$

$$M_{K3} = -40 + 90 = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

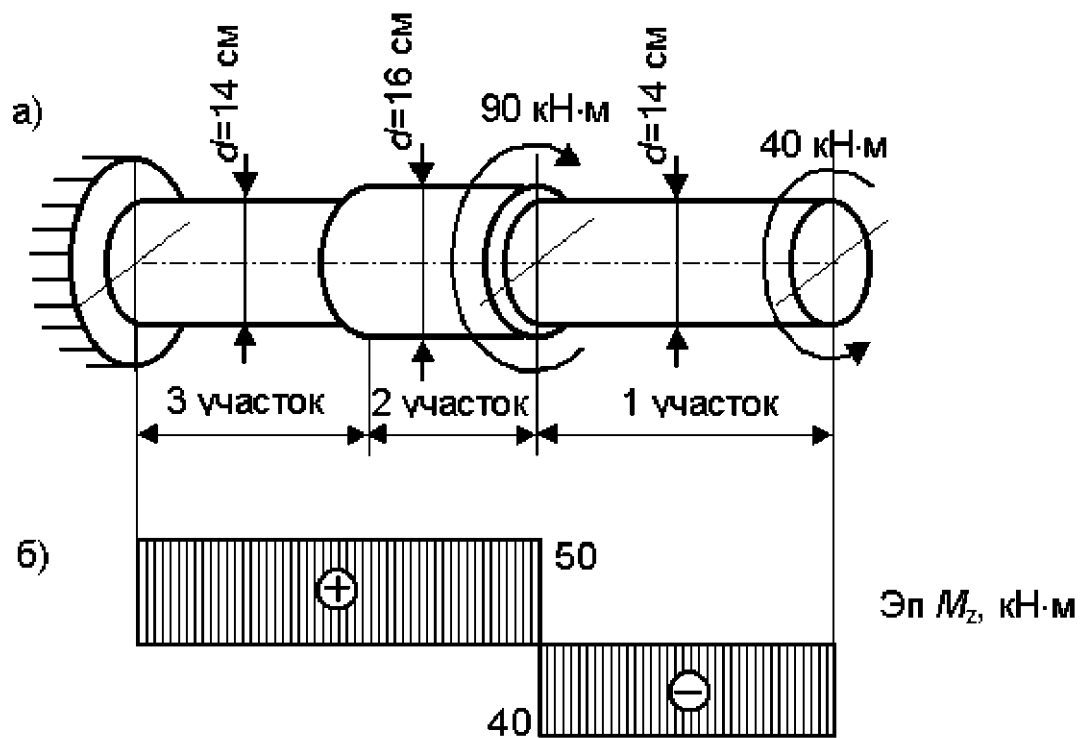


Рис. 3.5. К построению эпюры крутящих моментов: а) рассчитываемый стержень; б) эпюра крутящих моментов

Проверяем прочность стержня на каждом участке:

$$\tau_{\max_1} = \frac{M_{K_1}}{W_{\rho_1}} \leq [\tau]$$

где  $W_{\rho_1} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 14^3}{16} = 538,5 \text{ см}^3$

$$M_{K_1} = 40 \text{ кНм} = 4000 \text{ кН/см}$$

$$[\tau] = 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН/см}^2$$

$$\tau_{\max_1} = \frac{4000}{538,5} = 7,43 \text{ кН/см}^2 < 8 \text{ кН/см}^2$$

$$\tau_{\max_2} = \frac{M_{K_2}}{W_{\rho_2}} \leq [\tau]$$



где 
$$W_{\rho_2} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 16^3}{16} = 803,34 \text{ см}^3$$

$$M_{K_2} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м} = 5000 \text{ кН} \cdot \text{см}$$

$$\tau_{\max_2} = \frac{5000}{803,84} = 6,22 \text{ кН/см}^2 < 8 \text{ кН/см}^2 ;$$

$$\tau_{\max_3} = \frac{M_{K_3}}{W_{\rho_3}} \leq [\tau]$$

где 
$$W_{\rho_3} = \frac{\pi d_3^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 14^3}{16} = 538,5 \text{ см}^3$$

$$M_{K_3} = 50 \text{ кНм} = 5000 \text{ кН} \cdot \text{см}$$

$$\tau_{\max_3} = \frac{5000}{538,5} = 9,29 \text{ кН/см}^2 > 8 \text{ кН/см}^2$$

На третьем участке условие прочности стержня не выполняется. Необходимо подобрать другой диаметр стержня на третьем участке. Из условия прочности находим требуемый момент сопротивления  $W_{\rho}$  :

$$W_{\rho} = \frac{M_{K_3}}{[\tau]} = \frac{5000}{8} = 625 \text{ см}^3$$

Тогда диаметр стержня на третьем участке

$$W_{\rho_3} = \frac{\pi d_3^3}{16} = 625 \text{ см}^3$$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 625}{3,14}} = 14,71 \text{ см}$$

$$W_{\rho_3} = \frac{\pi d_3^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 14,71^3}{16} \approx 625 \text{ см}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{K3}}{W_{\rho3}} = \frac{5000}{625} = 8 \text{ кН / см}^2$$

Эпюра касательных напряжений в опасном сечении показана на рис. 3.6.

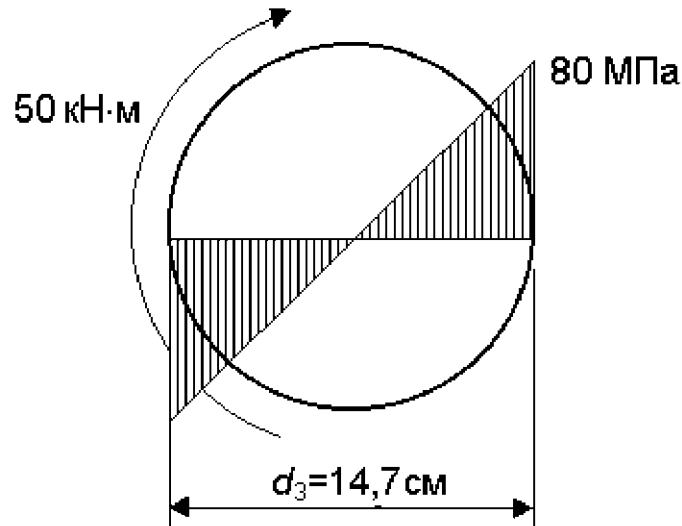


Рис. 3.6. Эпюра касательных напряжений

Угол поворота свободного конца стержня

$$\varphi_K = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{M_{K1} L_1}{G J_{\rho1}} + \frac{M_{K2} L_2}{G J_{\rho2}} + \frac{M_{K3} L_3}{G J_{\rho3}}$$

$$J_{\rho1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 14^4}{32} = 3769,6 \text{ см}^4$$

$$J_{\rho2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 16^4}{32} = 6430,7 \text{ см}^4$$

$$J_{\rho3} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 14,71^4}{32} = 4594,4 \text{ см}^4$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^3 \text{ кН / см}^2$$

$$\varphi_K = \frac{-4000 \cdot 80}{8 \cdot 10^3 \cdot 3769,6} + \frac{5000 \cdot 40}{8 \cdot 10^3 \cdot 6430,7} + \frac{5000 \cdot 60}{8 \cdot 10^3 \cdot 454,4} =$$

$$= -0,0106 + 0,0039 + 0,0081 = 0,0014 \text{ рад};$$

$$\varphi_K = \frac{0,0014 \cdot 180}{3,14} = 0,08^\circ$$

**Пример 3.2.** Определить диаметр полого стального вала (рис. 3.7) из условия прочности и жесткости, при

$$[\tau] = 80 \text{ МПа}, G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}, [\theta] = 2^\circ / \text{м}, \alpha = \frac{d}{D} = 0,8.$$

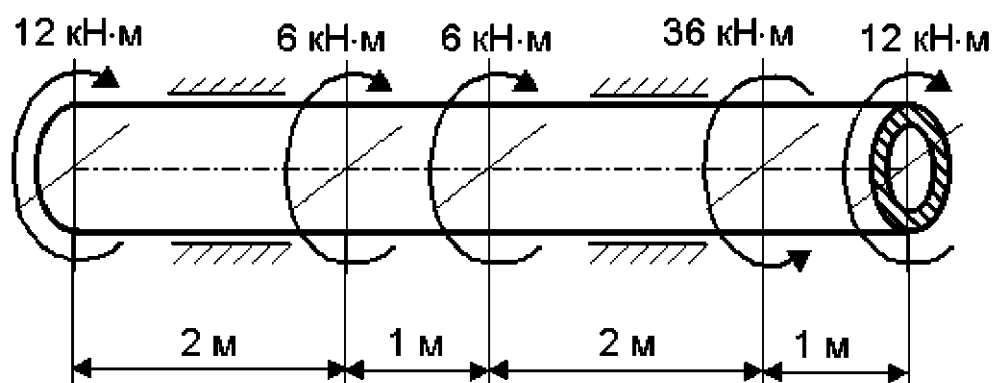
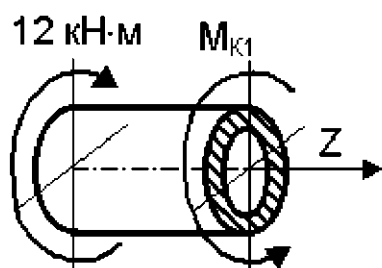


Рис 3.7. Схема вала

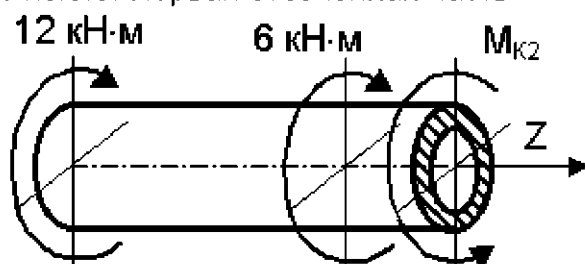
Разбивая вал на участки и применяя метод сечений, находим крутящие моменты на каждом участке вала (рис. 3.8–3.11):



$$\sum M_Z = 0,$$

$$M_{K1} = 12 \text{ кН м.}$$

Рис.3.8. Первая отсеченная часть



$$\sum M_Z = 0,$$

$$M_{K2} = 12 + 6 = 18 \text{ кН м.}$$

Рис.3.9. Вторая отсеченная часть

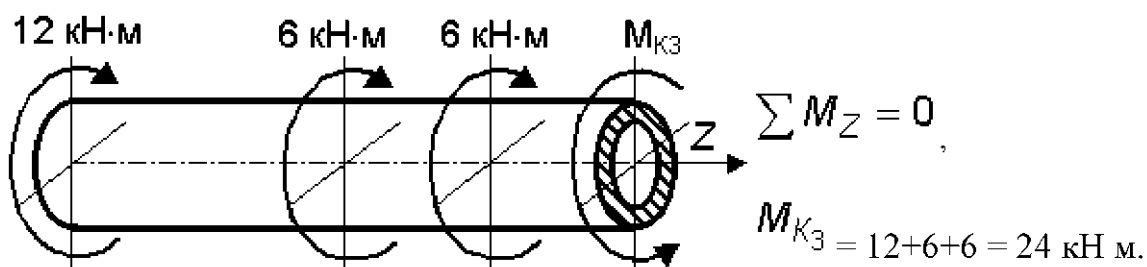


Рис.3.10. Третья отсеченная часть

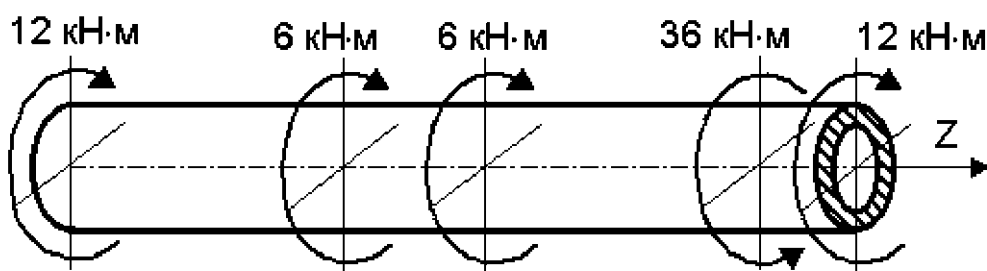


Рис.3.11. Четвёртая отсеченная часть

$$\sum M_z = 0$$

$$M_{K4} = 12 + 6 + 6 - 36 = -12 \text{ кН·м.}$$

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 3.12.

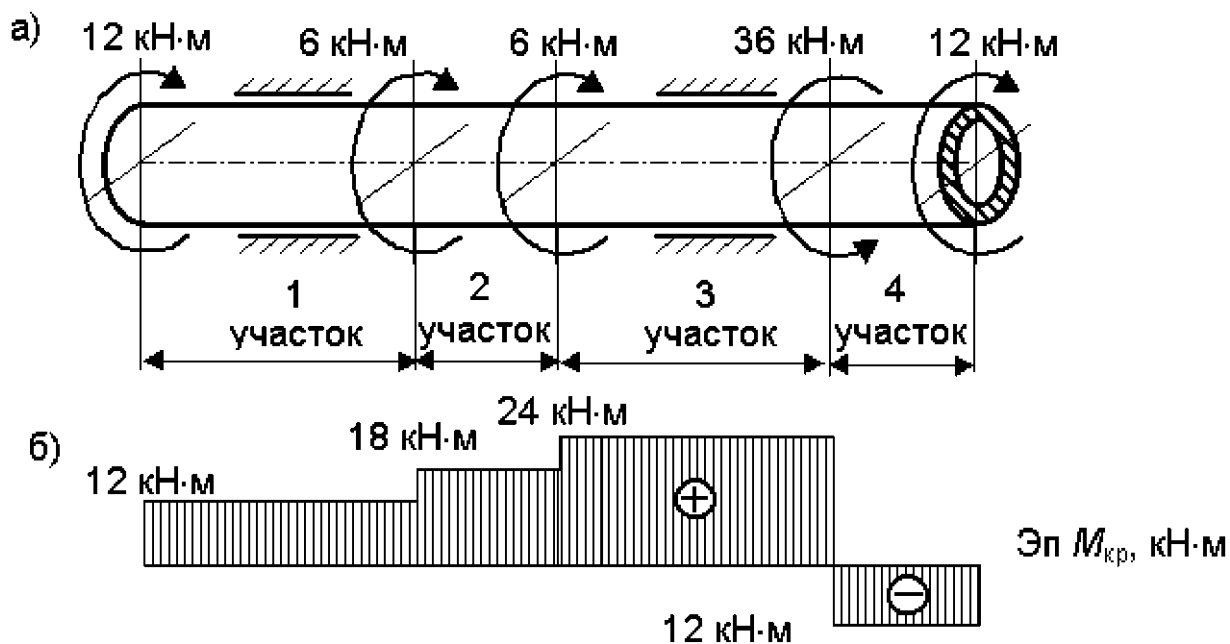


Рис. 3.12. К построению эпюры крутящих моментов: а) рассчитываемый вал б) эпюра крутящих моментов

Из эпюры крутящих моментов видно, что опасное сечение будет на третьем участке

$$M_{K_{\max}} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м} = 2400 \text{ кН} \cdot \text{см};$$

из условий прочности

$$W_{\rho} \geq \frac{M}{[\tau]} = \frac{2400}{8} = 300 \text{ см}^3;$$

для полого вала

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} (1 - \alpha^4) = 300 \text{ см}^3;$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 300}{3,14(1 - 0,8^4)}} = 13,73 \text{ см};$$

$$\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$$

из соотношения

$$d = 0,8D = 0,8 \cdot 13,7 = 10,96 \text{ см} = 11 \text{ см}.$$

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta_{\max} \leq [\theta].$$

Наибольший относительный угол закручивания будет на третьем участке. Таким образом,

$$\theta_{\max} = \theta_3 = \frac{M_{K_3}}{G J_{\rho}} = \frac{2400}{G J_{\rho}} \text{ кН} \cdot \text{см}$$

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

$$[\theta] = 2^\circ / \text{м} = \frac{2 \cdot 3,14}{180 \cdot 100} = 0,000349 \text{ рад} / \text{см}$$

$$\frac{2400}{G J_{\rho}} = \frac{2400}{8 \cdot 10^3 J_{\rho}} = 0,000349$$

$$J_{\rho} = \frac{2400}{8 \cdot 10^3 \cdot 0,000349} = 859,6 \text{ см}^4$$

$$J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} (1 - \alpha^4) = 859,6 \text{ см}^4$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{859,6 \cdot 32}{3,14(1 - 0,8^4)}} = 11,04 \text{ см}$$

Из диаметров вала, найденных по условию прочности и жесткости, выбираем больший. Таким образом, диаметр вала D следует принять 13,7 см.

## 4. ИЗГИБ

### 4.1. Теоретическая часть

Изгибом называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты. Изгибающий момент равен сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести поперечного сечения. Если изгибающий момент вызывает растяжение нижних волокон стержня, то он считается положительным. Если изгиб происходит в плоскости, совпадающей с главной осью инерции, то он называется плоским. Различают два вида плоского изгиба (в дальнейшем будем называть просто изгибом) – чистый и поперечный. При чистом изгибе возникают только изгибающие моменты, при поперечном – изгибающие моменты и поперечные силы. При чистом изгибе для произвольной точки поперечного сечения напряжение находится по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y,$$

где  $M_x$  – изгибающий момент;  $J_x$  – главный момент инерции;  $y$  – расстояние от центра тяжести сечения до точки, в которой находится напряжение.

При поперечном изгибе возникают изгибающие моменты и поперечные силы. Поперечная сила равна сумме проекций всех сил по одну сторону от сечения. Поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть отсеченную часть стержня по часовой стрелке. Для балок с отношением высоты к длине балки менее 1/5 влияние поперечной силы на величину нормальных напряжений оказывается незначительным и можно применять формулу, как и для чистого изгиба

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$$

От сдвига возникают касательные напряжения, которые находятся по формуле Журавского

$$\tau = \frac{Q S_x^{omc}}{J_x b_y},$$

где  $Q$  – поперечная сила;  $S_x^{omc}$  – статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно оси  $x$ ,

$$S_x^{omc} = Y_0 A_{omc},$$

где  $A_{omc}$  – площадь отсеченной части поперечного сечения;  $Y_0$  – расстояние от центра тяжести отсеченной части поперечного сечения до оси  $x$ ;  $J_x$  – главный момент инерции.

Условия прочности при изгибе по нормальным и касательным напряжениям имеют вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma].$$

где  $W_x$  – осевой момент сопротивления;

$$\tau_{\max} = \frac{Q S_{x_{\max}}^{\text{отс}}}{J_x b_y} \leq [\tau]$$

При проверке прочности балки по главным напряжениям пользуются формулой

$$\sigma_{\max}^{(1)} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Если материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, записывается два условия прочности, отдельно по растяжению и по сжатию.

При изгибе балок возникают два вида перемещений: вертикальные (их называют прогибами) и углы поворота сечений. Горизонтальными перемещениями при изгибе балок вследствие их малости пренебрегают.

Эти перемещения могут быть найдены либо методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки, либо методом начальных параметров, либо при помощи интеграла Мора.

Наиболее универсальным методом при определении перемещений является метод Мора. На нем и остановимся подробнее.

Для балок и рам интеграл Мора имеет вид

$$\Delta_{ip} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ} dz$$

где  $\Delta_{ip}$  – перемещение по  $i$  направлению, вызванное внешней нагрузкой,  $\overline{M}_i$  – изгибающий момент от единичной силы (единичного момента);  $M_p$  – изгибающий момент от внешней нагрузки;  $EJ$  – жесткость стержня при изгибе (рис. 4.1).



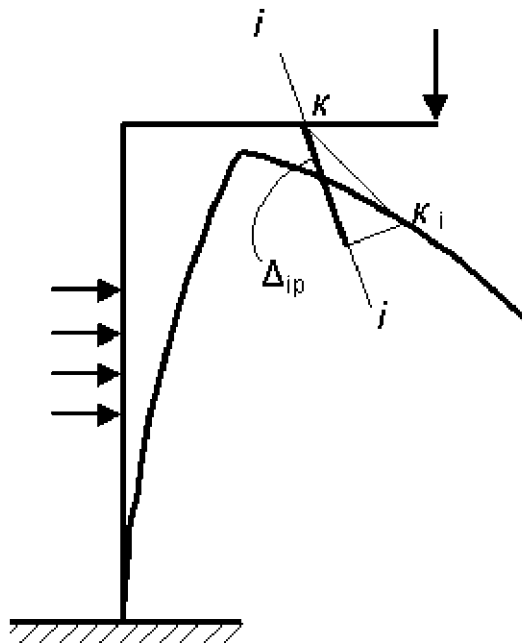


Рис 4.1. Перемещение т.  $K$  по направлению  $i$ , вызванное внешней нагрузкой

*Техника вычисления перемещений по способу Мора следующая:*

1. Находят по участкам выражения изгибающих моментов  $M_P$  от заданной нагрузки.

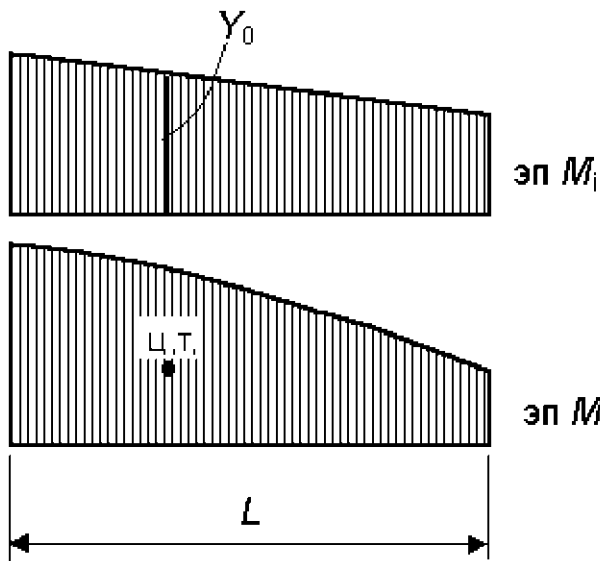
2. По направлению искомого линейного перемещения  $i$  прикладывают соответствующую ему единичную силу (по направлению углового перемещения – сосредоточенный единичный момент).

3. От единичного воздействия определяют по участкам изгибающие моменты  $\overline{M}_i$ .

4. Найденные выражения  $\overline{M}_i$  и  $M_P$  подставляют в интеграл Мора и интегрируют по участкам в пределах всего сооружения (балки или рамы).

Интегрирование по участкам балки или рамы удобнее заменить перемножением эпюр  $M_P$  и  $\overline{M}_i$  на этих участках, используя следующие формулы

**1. Формула Верещагина (рис. 4.2):**



$$\Delta_{ip} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ} dz = \frac{\omega_p Y_0}{EJ},$$

где  $\omega_p$  – площадь грузовой эпюры  $M_p$ ,  $Y_0$  – ордината у эпюры  $M_i$ , расположенная под центром тяжести грузовой эпюры.

Рис.4.2. Перемножение эпюр по формуле Верещагина

**2. Формула трапеций (рис. 4.3):**

$$\Delta_{ip} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ} dz = \frac{L}{6EJ} (2a_p a_i + 2b_p b_i + a_p b_i + b_p a_i)$$

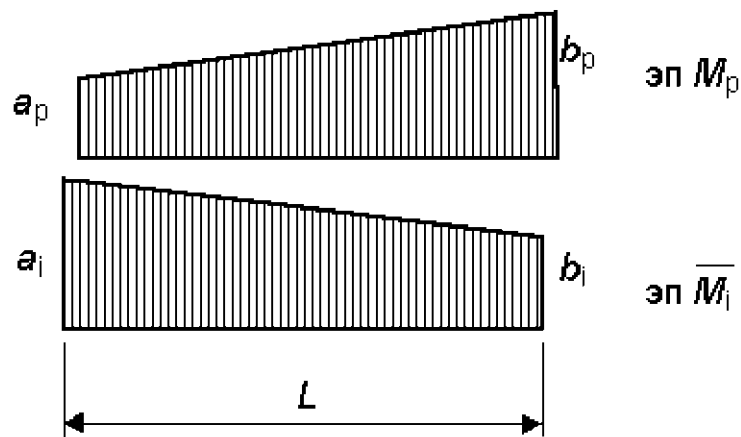


Рис.4.3.Перемножение эпюр по формуле трапеций

**3. Формула Симпсона (рис. 4.4)**

$$\Delta_{ip} = \sum \int_0^L \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ} dz = \frac{L}{6EJ} (a_p a_i + 4c_p c_i + b_p b_i)$$

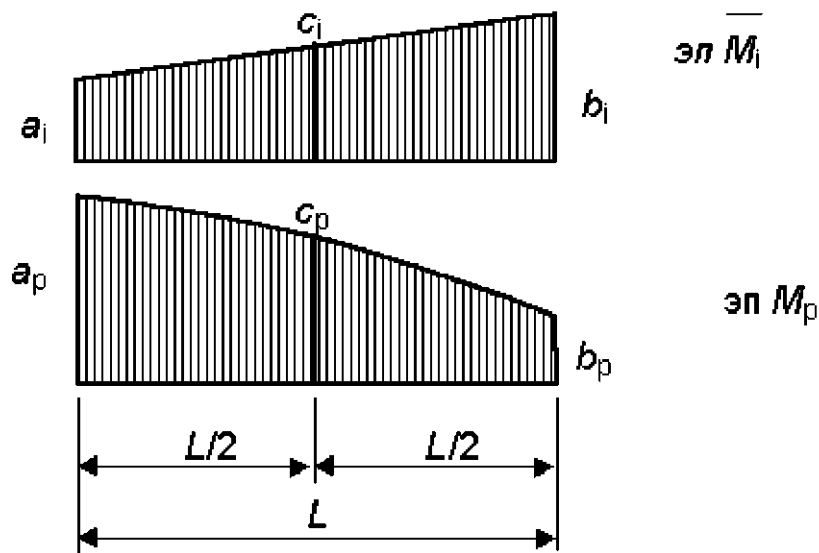


Рис.4.4.Перемножение эюр по формуле Симпсона

Перемножение прямолинейных эюр можно производить по любой из названных формул, перемножение прямолинейной эюры с криволинейной – только по формулам Симпсона или Верещагина.

Условие жесткости при изгибе

$$\Delta_{ip} \leq [\Delta]$$

Рассмотрим ряд примеров расчета на прочность и жесткость при изгибе балок.

**Пример 4.1.** Определить размеры поперечного сечения деревянной балки, изображенной на рис 4.5. Найти прогиб и угол поворота сечения в середине пролета балки,  $h/b = 2$ ,  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 6 \text{ МПа}$ ,

$$E = 1,2 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

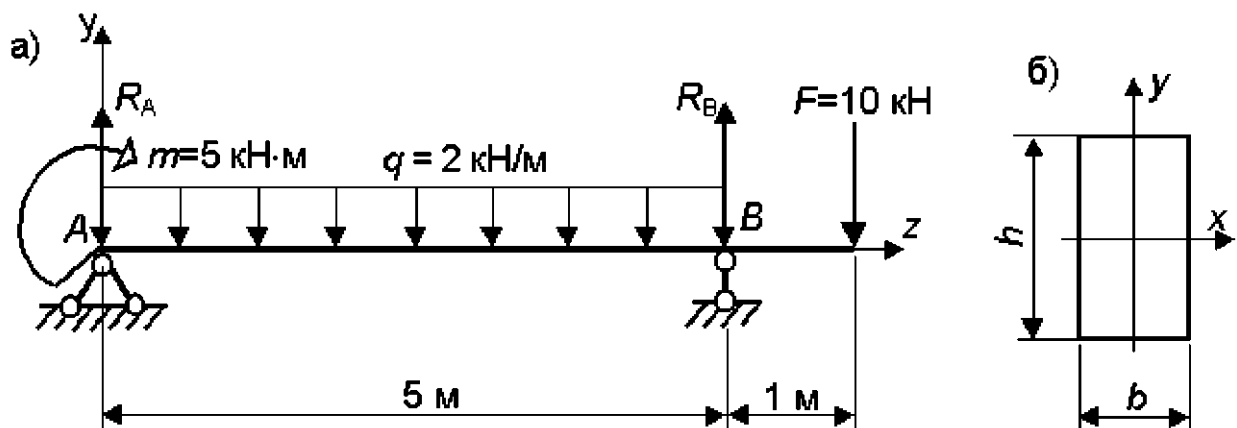


Рис. 4.5. Схема балки: а) расчётная схема; б) схема поперечного сечения

Для нахождения опасного поперечного сечения балки необходимо построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Построение эпюр начинается с определения опорных реакций:

$$\sum M_A = 0 \quad m + 2,5 \cdot 5q + 6F - 5R_B = 0,$$

$$5 + 2,5 \cdot 5 \cdot 2 + 6 \cdot 10 - 5R_B = 0,$$

$$5R_B = 90,$$

$$R_B = 18 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0 \quad 5R_A + m - 2,5 \cdot 5q + 1F = 0,$$

$$5R_A + 5 - 2,5 \cdot 5 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 0,$$

$$5R_A = 10,$$

$$R_A = 2 \text{ кН}.$$

Проверка реакций:

$$\sum F_Y = 0 \quad R_A + R_B - 5q - F = 0,$$

$$2 + 18 - 2 \cdot 5 - 10 = 20 - 20 = 0.$$

Реакции найдены правильно. Далее балку разбиваем на участки. Рассекая балку в произвольных сечениях каждого участка на две части, находим изгибающие моменты и поперечные силы на каждом участке (рис. 4.6, 4.7).

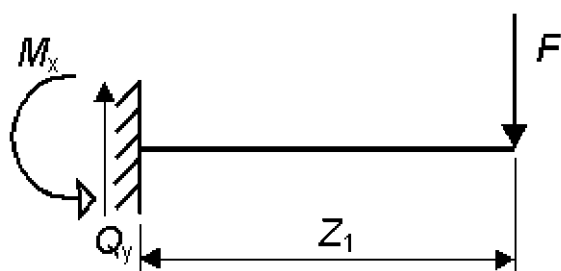


Рис. 4.6. Первый участок

$$0 \leq Z_1 \leq 1,$$

$$Q_y = F = 10 \text{ кН},$$

$$M_x = -FZ_1$$

при  $Z_1 = 0$   $M_x = -10 \cdot 0 = 0$ ,

при  $Z_1 = 1 \text{ м}$   $M_x = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

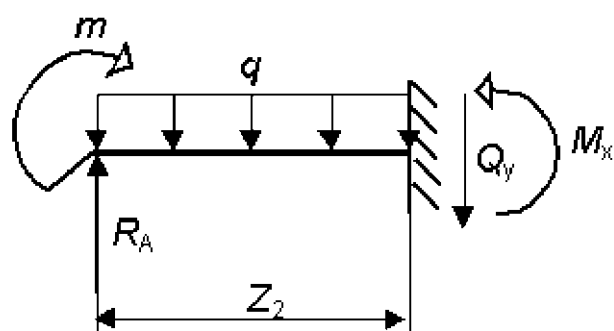


Рис. 4.7. Второй участок

$$0 \leq Z_2 \leq 5,$$

$$Q_y = R_A - qZ_2,$$

при  $Z_2 = 0$   $Q_y = R_A = 2 \text{ кН}$ ,

при  $Z_2 = 5 \text{ м}$   $Q_y = 2 - 2 \cdot 5 = -8 \text{ кН}$ ;

$$M_x = R_A Z_2 + m - q \frac{Z_2^2}{2},$$

при  $Z_2 = 0$

$$M_x = 2 \cdot 0 + 5 - 2 \frac{0^2}{2} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при  $Z_2 = 2,5 \text{ м}$

$$M_x = 2 \cdot 2,5 + 5 - 2 \frac{2,5^2}{2} = 3,75 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при  $Z_2 = 1,25 \text{ м}$

$$M_x = 2 \cdot 1,25 + 5 - 2 \frac{1,25^2}{2} = 5,94 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при  $Z_2 = 3,75 \text{ м}$

$$M_x = 2 \cdot 3,75 + 5 - 2 \frac{3,75^2}{2} = -1,56 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при  $Z_2 = 5 \text{ м}$  
$$M_x = 2 \cdot 5 + 5 - 2 \frac{5^2}{2} = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Таким образом, эпюра изгибающих моментов на втором участке криволинейна. Необходимо найти ее экстремум.

$M_x$  будет иметь экстремум при условии:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} = 0$$

$$Q_y = R_A - qZ_2 = 0$$

откуда получаем

$$Z_2 = \frac{R_A}{q} = \frac{2}{2} = 1 \text{ м}$$

Подставляя найденное значение  $Z_2 = 1 \text{ м}$  в уравнение изгибающих моментов на первом участке, получим

$$M_{x_{\text{экстр}}} = R_A + m - \frac{q \cdot 1^2}{2} = 2 + 5 - \frac{2 \cdot 1^2}{2} = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил показаны на рис.4.8.

Из эпюры  $M_x$  видно, что  $M_{\text{max}} = 10 \text{ кН м} = 1000 \text{ кН см}$ . При  $[\sigma] = 10 \text{ МПа} = 1 \text{ кН/см}^2$  получаем:

$$W_x = \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{1000}{1,0} = 1000 \text{ см}^3$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 1000 \text{ см}^3$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{1000 \cdot 6}{4}} = 11,45 \text{ см} = 12 \text{ см}$$

$$h = 2b = 12 \cdot 2 = 24 \text{ см}$$

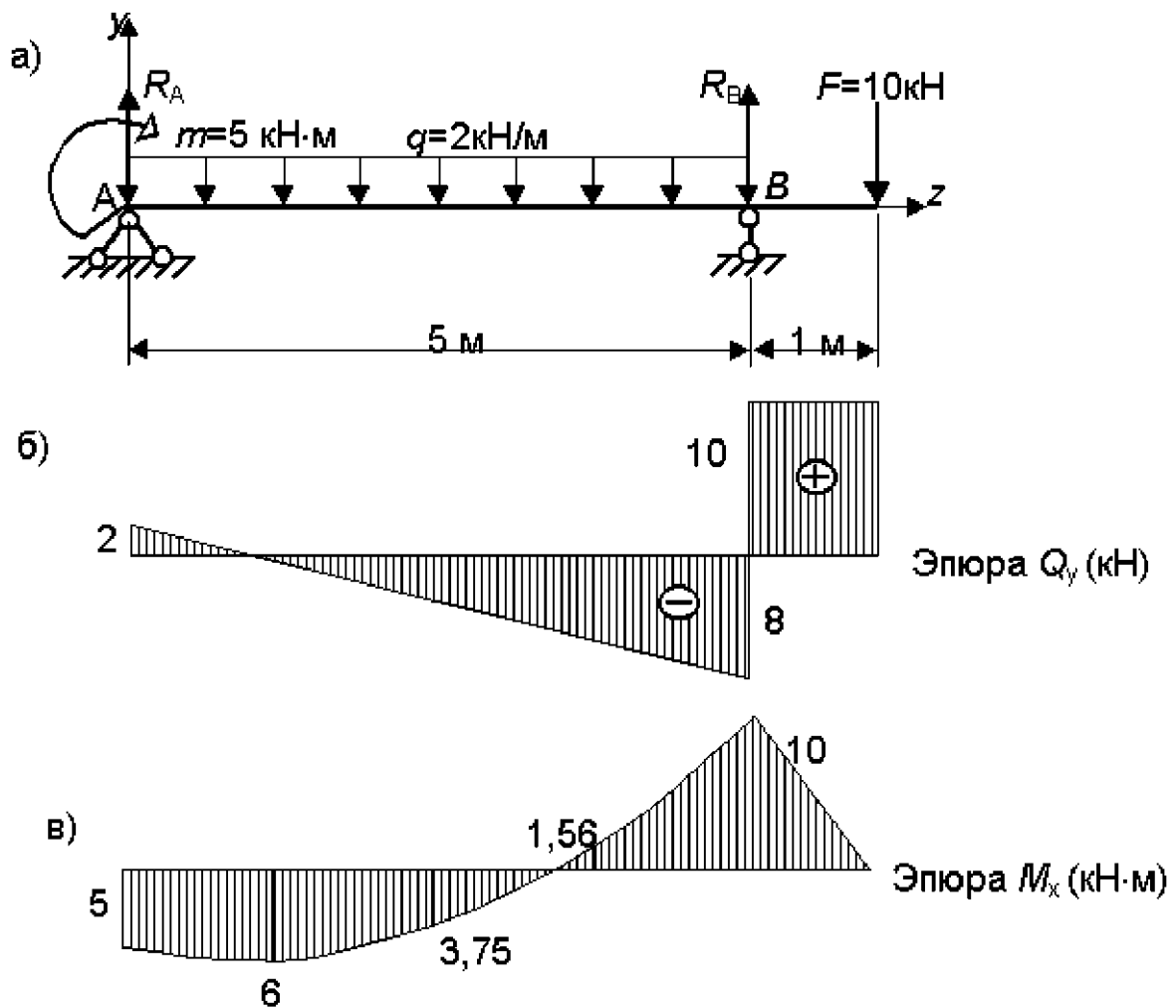


Рис 4.8. Построение эпюры изгибающих моментов и поперечных сил: а) расчётная схема; б) эпюра перерезывающих сил; в) эпюра изгибающих моментов

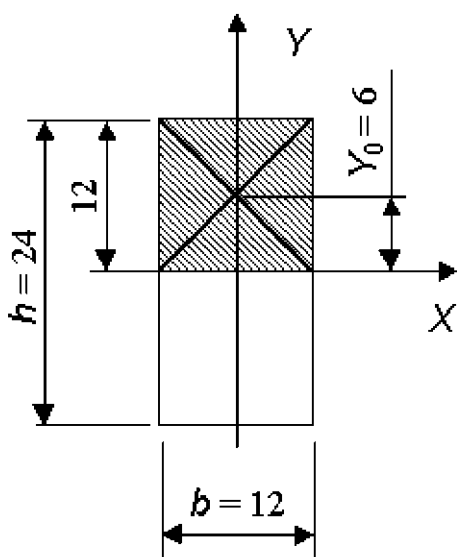


Рис. 4.9. К определению геометрических характеристик принятого сечения

Определив размеры поперечного сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям, делаем проверку прочности по касательным напряжениям (рис. 4.9).

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{x\max}^{\text{отс}}}{J_x b_y} \leq [\tau],$$

$$b = 12 \text{ см}, \quad Q_{\max} = 10 \text{ кН}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13824 \text{ см}^4$$

$$A_{omc} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ см}^2,$$

$$y_0 = 6 \text{ см},$$

$$S_x^{omc} = A_{omc} y_0 = 144 \cdot 6 = 864 \text{ см}^3,$$

$$\tau_{\max} = \frac{10 \cdot 864}{13824 \cdot 12} = 0,05 \text{ кН/см}^2 = 0,5 \text{ МПа} < 6 \text{ МПа}$$

Прочность балки по касательным напряжениям выполняется.

Для определения прогиба и угла поворота сечения посередине пролета балки воспользуемся формулой Мора. Грузовое и дополнительные состояния, а также их эпюры изгибающих моментов показаны на рис. 4.10.

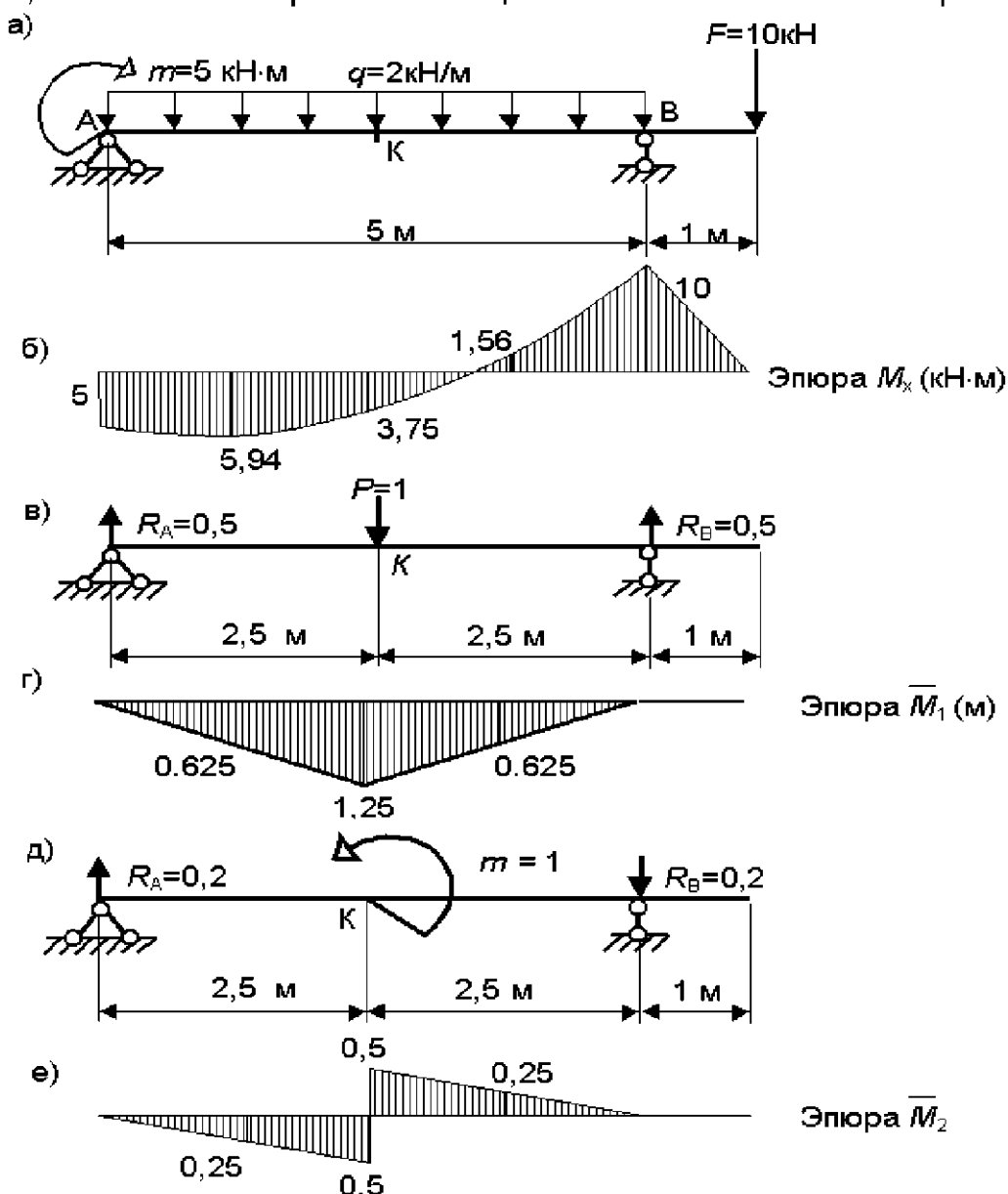


Рис. 4.10. К определению перемещений сечения К: а) расчетная схема; б) грузовая эпюра изгибающих моментов; в) единичное состояние для определения вертикального перемещения; г) единичная эпюра для определения вертикального перемещения; д) единичное состояние для определения угла поворота; е) единичная эпюра для определения угла поворота



Прогиб балки в середине пролета

$$\begin{aligned} \Delta_K^{верт} = \Delta_{1P} &= \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_1 M_P dZ}{EJ_x} = \frac{2,5}{6EJ_x} (0 + 4 \cdot 5,94 \cdot 0,625 + 3,75 \cdot 1,25) + \\ &+ \frac{2,5}{6EJ_x} (3,75 \cdot 1,25 + 4 \cdot (-1,56) \cdot 0,625 + 0) = \frac{8,469}{EJ_x} = \frac{8,469 \cdot 10^6}{1,2 \cdot 10^3 \cdot 13824} = \\ &= 0,51 \text{ см} . \end{aligned}$$

Угол поворота сечения К в середине пролета балки

$$\begin{aligned} \varphi_K = \Delta_{2P} &= \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_2 M_P dZ}{EJ_x} = \frac{2,5}{6EJ_x} (0 + 4 \cdot 5,94 \cdot 0,25 + 3,75 \cdot 0,5) + \\ &+ \frac{2,5}{6EJ_x} (3,75 \cdot (-0,5) + 4 \cdot (-1,56) \cdot (-0,25) + 0) = \frac{1,84}{EJ_x} = \\ &= \frac{1,84 \cdot 10^4}{1,2 \cdot 10^3 \cdot 13824} = 0,0011 \text{ рад} . \end{aligned}$$

**Пример 4.2.** Определить номер двутавровой балки, изображенной на рис. 4.11, при  $[\sigma] = 160$  МПа,  $[\tau] = 110$  МПа. Построить эпюру распределения напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  в опасных сечениях. Сделать проверку прочности балки по главным напряжениям. Определить перемещения  $\Delta_K^{верт}$  и  $\varphi_K$  при модуле упругости  $E = 2 \times 10^5$  МПа.

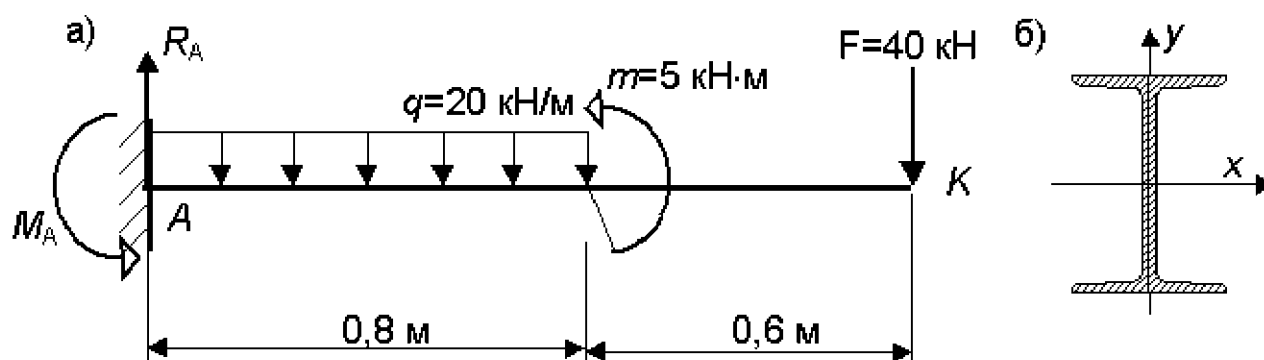


Рис 4.11. Схема балки: а) расчётная схема; б) схема поперечного сечения

Определяем опорные реакции балки

$$\sum F_y = 0 \quad R_A - 0,8q - F = 0 ,$$

$$R_A = 0,8q + F = 0,8 \cdot 20 + 40 = 56 \text{ кН}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_A + 0,8 \cdot q \cdot 0,4 - m + 1,4F = 0,$$

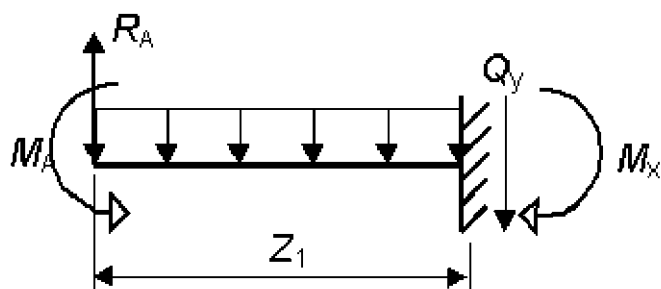
$$M_A = 0,8 \cdot q \cdot 0,4 - m + 1,4F = 0,8 \cdot 20 \cdot 0,4 - 30 + 1,4 \cdot 40 = \\ = 32,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Проверка найденных реакций:

$$\sum M_K = 0 \quad -M_A - 0,8 \cdot q \cdot 1 + 1,4R_A - m = 0$$

$$-32,4 - 0,8 \cdot 20 \cdot 1 + 1,4 \cdot 56 - 30 = -72,4 + 72,4 = 0.$$

Для нахождения опасного сечения строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил (рис. 4.12, 4.13):



$$Q_y = R_A - qZ_1 = 56 - 20Z_1,$$

$$0 \leq Z \leq 0,8 \text{ м}$$

$$\text{при } Z_1 = 0 \quad Q_y = 56 \text{ кН};$$

Рис.4.12. Первая отсеченная часть балки

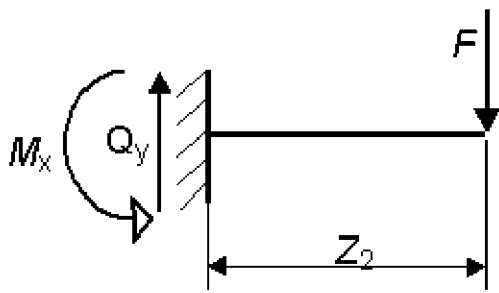
$$\text{при } Z_1 = 0,8 \text{ м} \quad Q_y = 56 - 20 \cdot 0,8 = 40 \text{ кН}$$

$$M_x = R_A Z_1 - \frac{qZ_1^2}{2} - M_A = 56Z_1 - \frac{20Z_1^2}{2} - 32,4;$$

$$\text{при } Z_1 = 0 \quad M_x = -32,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } Z_1 = 0,4 \text{ м} \quad M_x = 56 \cdot 0,4 - \frac{20}{2} 0,4^2 - 32,4 = -11,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } Z_1 = 0,8 \text{ м} \quad M_x = 56 \cdot 0,8 - \frac{20}{2} 0,8^2 - 32,4 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$



$$Q_y = F = 40 \text{ кН}$$

$$M_x = -FZ_2 = -40Z_2$$

$$0 \leq Z \leq 0,6 \text{ м}$$

Рис.4.13. Вторая отсеченная часть балки

при  $Z_1 = 0$   $M_x = 0$ ,

при  $Z_1 = 0,6 \text{ м}$   $M_x = -40 \cdot 6 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил показаны на рис. 4.14.

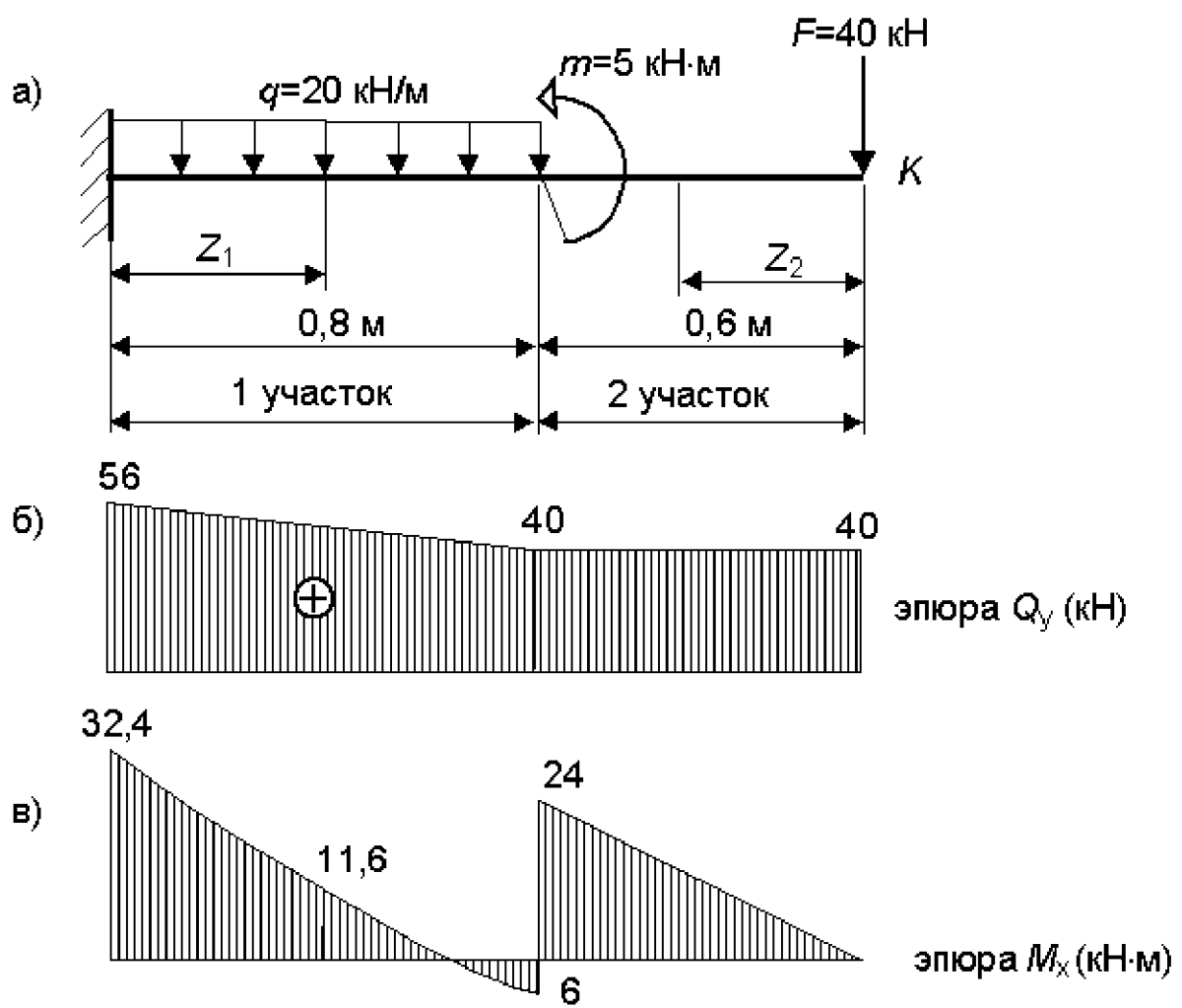


Рис 4.14. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил: а) расчётная схема; б) эпюра перерезывающих сил; в) эпюра изгибающих моментов

Из эпюры изгибающих моментов находим  $M_{\max} = 32,4$  кН м. На основании условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

вычисляем требуемый момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{32,4 \cdot 100}{16} = 202,5 \text{ см}^3$$

Из сортамента (ГОСТ 8240-89) подбираем двутавр  $N 22$  с  $W_x = 232 \text{ см}^3$ .  
Проверяем принятый двутавр по нормальным и касательным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{3240}{232} = 13,97 \text{ кН/см}^2 = 139,7 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$$

Из сортамента для двутавра  $N 22$  выписываем геометрические характеристики:  $J_x = 2550 \text{ см}^4$ ,  $S_x = 131 \text{ см}^3$ ,  $b_y = 0,54 \text{ см}$ .

Наибольшее касательное напряжение составит

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{x\max}}{J_x b_y} = \frac{56 \cdot 131}{2550 \cdot 0,54} = 5,33 \text{ кН/см}^2 = 53,3 \text{ МПа} < 110 \text{ МПа}$$

Таким образом, прочность балки по нормальным и касательным напряжениям выполняется. Проверку прочности балки по главным напряжениям проводим в поперечном сечении на левом торце балки (так как там  $M = M_{\max}$ ,  $Q = Q_{\max}$ ), для чего строим эпюры  $\sigma$  и  $\tau$  (рис.4.15.).

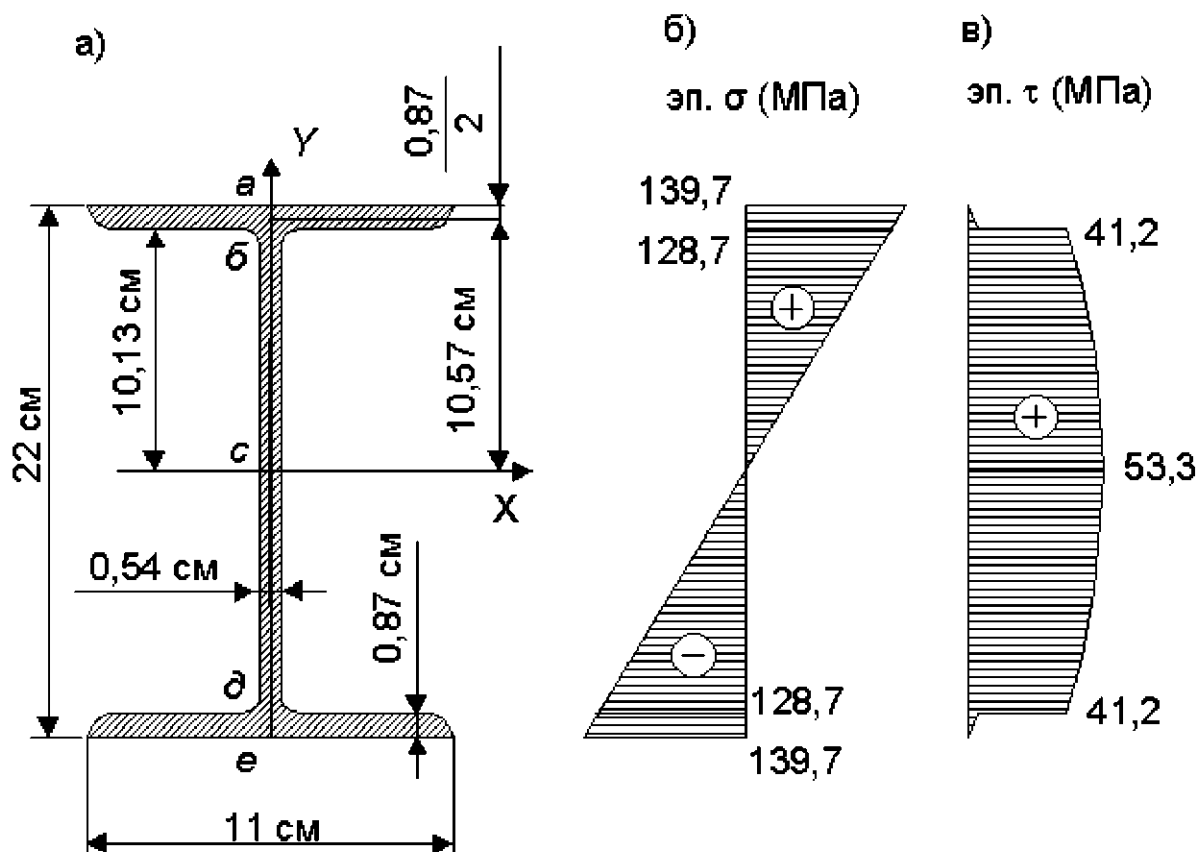


Рис. 4.15. Эпюры напряжений в опасном поперечном сечении: а) схема поперечного сечения; б) эпюра нормальных напряжений; в – эпюра касательных напряжений

Точка а:

$$\sigma_a = 139,7 \text{ МПа}, \tau_a = 0$$

Точка б:

$$\sigma_b = \frac{M_x}{J_x} y_b = \frac{3240 \cdot 10,13}{2550} = 12,87 \text{ кН/см}^2 = 128,7 \text{ МПа}$$

$$Q_y = 56 \text{ кН}$$

$$S_x^{omc} = A^{omc} y_0 = (11 \cdot 0,87) \cdot 10,57 = 101,2 \text{ см}^3$$

Так как в т. б происходит резкое изменение ширины поперечного сечения, вычисляем два значения касательных напряжений. Чуть выше т. б ширина поперечного сечения равна 11 см, чуть ниже – 0,54 см.

$$\tau_{б'} = \frac{56 \cdot 101,2}{2250 \cdot 11} = 0,20 \text{ кН/см}^2 = 2 \text{ МПа}$$

$$\tau_{б''} = \frac{56 \cdot 101,2}{2250 \cdot 0,54} = 4,12 \text{ кН/см}^2 = 41,2 \text{ МПа}$$

Точка с:

$$\tau_c = \tau_{\max} = 5,33 \text{ кН/см}^2 = 53,3 \text{ МПа}, \sigma_c = 0$$

Проверка прочности по главным напряжениям делается только для балок, поперечные сечения которых имеют тонкую стенку, резко изменяющуюся вблизи крайних волокон. Проверку прочности производят в точках перехода от малой ширины к большой. Балки из пластичного материала проверяют по третьей гипотезе прочности по формуле

$$\sigma_{\text{эIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Наиболее опасной точкой в неблагоприятном сечении является точка б.

$$\begin{aligned} \sigma_{1(б)} - \sigma_{3(б)} &= \sqrt{\sigma_{(б)}^2 + 4\tau_{(б)}^2} = \sqrt{128,7^2 + 4 \cdot 41,2^2} = \\ &= 140,8 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа} . \end{aligned}$$

Таким образом, прочность балки по главным напряжениям выполняется.

Для определения прогиба и угла поворота сечения К в балке нужно иметь грузовую и две вспомогательные эпюры (рис.4.16.).

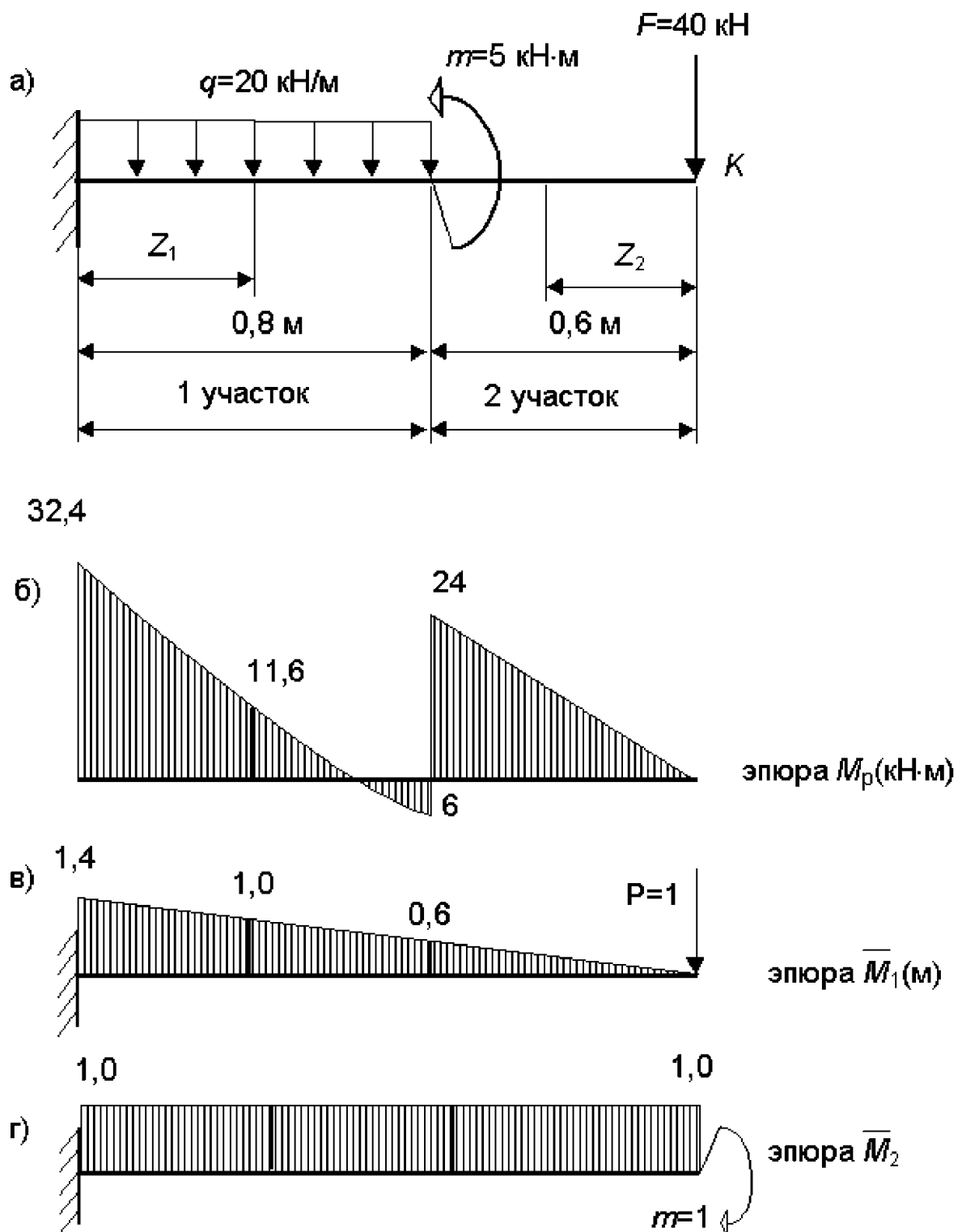


Рис. 4.16. К определению перемещений сечения: а) расчётная схема; б) грузовая эпюра изгибающих моментов; в) единичная эпюра для определения вертикального перемещения; г) единичная эпюра для определения угла поворота

Перемещения определяем, перемножая эпюры по формуле Мора

$$\Delta_K^{верт} = \Delta_{1P} = \sum_0^L \int \frac{\bar{M}_1 M_P dZ}{EJ_x} = \frac{0,8}{6EJ_x} (32,4 \cdot 1,4 + 4 \cdot 11,6 \cdot 1 - 6 \cdot 0,6) +$$

$$+ \frac{0,6}{6EJ_x} (2 \cdot 24 \cdot 0,6) = \frac{14,635}{EJ_x} = \frac{14,635 \times 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 2550} = 0,29 \text{ см (вниз)};$$

$$\varphi_K = \Delta_{2P} = \sum_0^L \int \frac{\bar{M}_2 M_P dZ}{EJ_x} = \frac{0,8}{6EJ_x} (32,4 \cdot 1 + 4 \cdot 11,6 \cdot 1 - 6 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{0,6}{6EJ_x} (2 \cdot 24 \cdot 1 + 24 \cdot 1) = \frac{16,907}{EJ_x} = \frac{16,907 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 2550} = 0,0033 \text{ рад}$$

(по ходу часовой стрелки).

Таким образом, из расчёта видно, что свободный конец переместился вниз на 0,29 см и повернулся на угол 0,0033 рад по часовой стрелке.



## Список литературы

1. Сопротивление материалов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Н.И. Монахов и др.; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Высш.шк., 1975. – 480 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высш.шк., 1969. – 734 с.
3. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролубов, С.А. Енгальчев, Н.Д. Сержевский и др. – М.: Высш.шк., 1967. – 482 с.
4. Ицкович Г.М., Винокуров А.И., Митик А.С. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. – М.: Высш.шк., 1970. – 542 с.