

## **ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Методические указания к выполнению расчетно-проектировочных работ  
для студентов инженерно-строительных специальностей  
очного и заочного видов обучения

Методические указания к выполнению расчетно-проектировочных работ по сопротивлению материалов для студентов инженерно-строительных специальностей очного и заочного форм обучения.

## Задача 1

(К выполнению расчетно-проектировочной работы №1  
«Расчет статически неопределимого бруса при растяжении и сжатии»)

Стальной стержень переменного сечения жестко защемлен обоими концами и нагружен двумя сосредоточенными силами.

Требуется:

1. В упругой зоне:

- а) раскрыть статическую неопределимость;
- б) построить эпюры:  
продольных сил  $N$ ,  
нормальных напряжений  $\sigma$ ,  
относительных продольных деформаций  $\epsilon$ ,  
перемещений поперечных сечений.

2. В упруго – пластической зоне

- а) определить силу  $F_T$ , при которой в системе впервые появляются напряжения, равные пределу текучести  $\sigma_T$ ;
- б) определить предельную грузоподъемность  $F_{пред}$  отвечающую состоянию предельного равновесия и допускаемую нагрузку  $F_{доп}$ , приняв запас прочности  $n=1,5$ ;
- в) определить остаточные усилия и напряжения по участкам бруса после нагружения силой  $F_{пред}$  и последующей разгрузки.

Принять: 1) Материал бруса: идеально упруго – пластический,

2)  $E=2 \times 10^5$  МПа,  $\sigma_T=320$  МПа.

3)  $a_1=a_2=a_3=a_4$ .

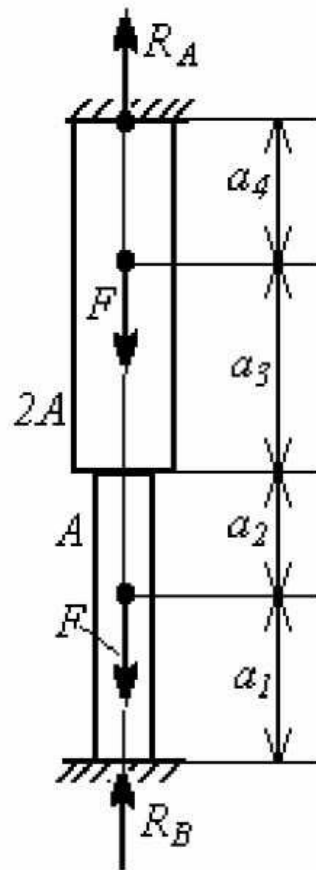


Рис.1

### I. Решение в упругой зоне

1. Уравнение равновесия:

$$\sum F_z = 0, \quad R_A + R_B - F - F = 0 \quad (1)$$

следовательно, задача статически неопределима.

2. Уравнение совместности перемещений:

Нижнюю опору В заменим его реакцией. Очевидно, что перемещение сечения В равно нулю.

Следовательно, можно написать:  $\Delta B = 0$

Решая это выражение на основании принципа независимости действия сил:

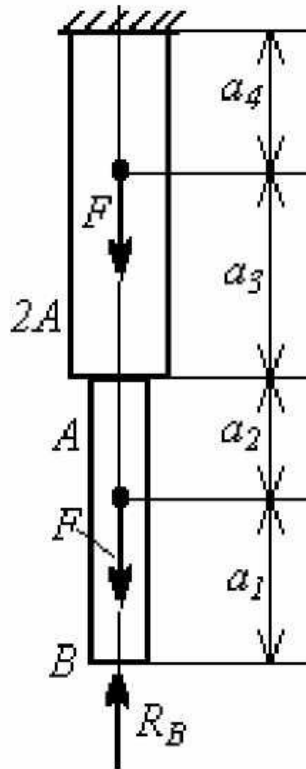


Рис. 2

$$\frac{R_B \cdot (a_1 + a_2)}{EA} - \frac{R_B \cdot (a_3 + a_4)}{E \cdot 2A} + \frac{F \cdot a_2}{EA} + \frac{F(a_3 + a_4)}{E2A} + \frac{F \cdot a_4}{E2A} = 0 \quad (2)$$

3. Решение уравнений (1) и (2) дает:

$$R_B = \frac{5}{6} F$$

Если отбросить опору А, можно записать, что  $\Delta A = 0$

$$\frac{R_A \cdot (a_4 + a_3)}{E2A} + \frac{R_A \cdot (a_2 + a_1)}{E2A} - \frac{F \cdot a_3}{E2A} - \frac{F(a_2 + a_1)}{EA} - \frac{F \cdot a_1}{EA} = 0$$

$$R_A = \frac{7}{6} F$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\sum F_Z = \frac{7}{6}F + \frac{5}{6}F - 2F = 0$$

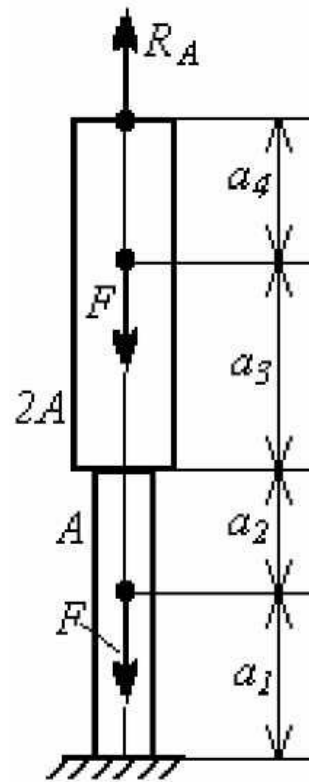
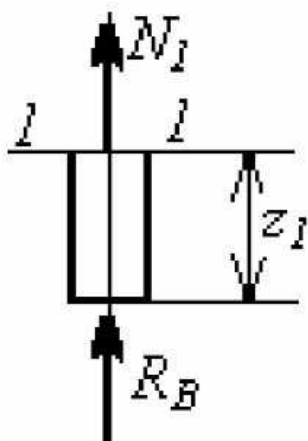


Рис.3

#### 4. Определение продольных усилий

Построение эпюры N.

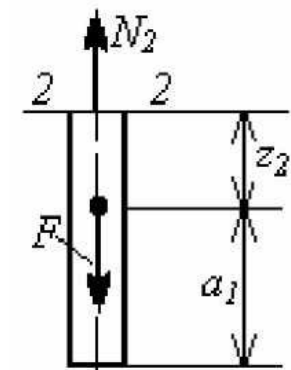
Используя метод сечений, определяем продольные усилия по участкам бруса:



$$0 \leq z_1 \leq a_1$$

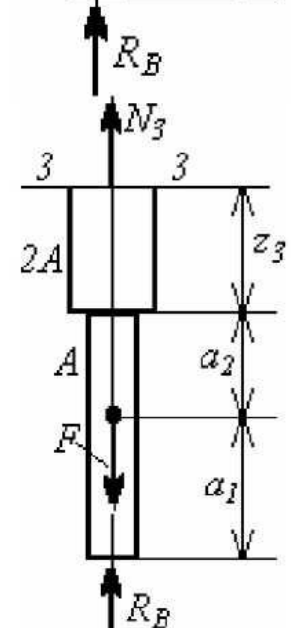
$$\sum F_Z = 0$$

$$N_1 + R_B = 0 \quad N_1 = -R_B = -\frac{5}{6}F$$



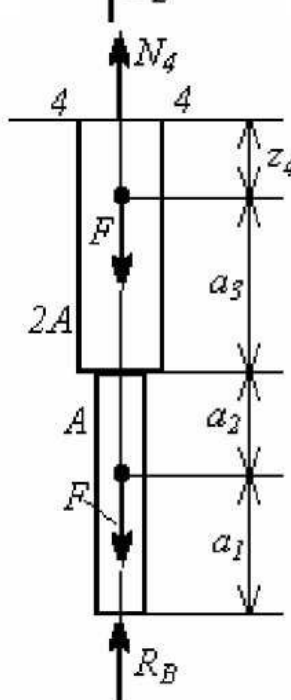
$$0 \leq Z_2 \leq a_2$$

$$N_2 - F + R_B = 0 \quad N_2 = \frac{1}{6}F$$



$$0 \leq Z_3 \leq a_3$$

$$N_3 - F + R_B = 0 \quad N_3 = \frac{1}{6}F$$



$$0 \leq Z_4 \leq a_4$$

$$N_4 - F - F + R_B = 0 \quad N_4 = \frac{7}{6}F$$

Рис. 4

По полученным результатам строим эпюру продольных сил (рис. 5). Из эпюры видно, что участок длиной  $a_1$  сжат, остальные участки растянуты.

### 5. Определение нормальных напряжений $\sigma$ .

Построение эпюры  $\sigma$ .

Напряжения по участкам равны:

$$\begin{aligned} 0 \leq Z_1 \leq a_1 & \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = -\frac{5F}{6A} \\ 0 \leq Z_2 \leq a_2 & \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{F}{6A} \\ 0 \leq Z_3 \leq a_3 & \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{F}{12A} \\ 0 \leq Z_4 \leq a_4 & \quad \sigma_4 = \frac{N_4}{2A} = \frac{2F}{12A} \end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений  $\sigma$ . Из диаграммы видно, что наиболее напряженным участком является участок длиной  $a$ , для которого  $\sigma_{\max} = -\frac{5F}{6A}$ .

Построение диаграммы перемещений.

Перемещение сечений бруса определяем по закону Гука:

$$\begin{aligned} 0 \leq Z_1 \leq a_1 & \quad \Delta Z_1 = \frac{N_1 \cdot Z_1}{EA} = -\frac{5F \cdot Z_1}{6EA} \\ & \quad Z_1 = 0 \quad \Delta Z = 0 \\ & \quad Z_1 = a_1 \quad \Delta Z_1 = -\frac{5F \cdot Z_1}{6EA} \\ 0 \leq Z_2 \leq a_2 & \quad \Delta Z_2 = -\frac{5Fa}{6EA} + \frac{N_2 \cdot Z_2}{EA} = -\frac{5Fa}{6EA} + \frac{F \cdot Z_2}{6EA} \\ & \quad Z_2 = 0 \quad \Delta Z_2 = -\frac{Fa}{6EA} \\ & \quad Z_2 = a_2 \quad \Delta Z_2 = -\frac{2Fa}{3EA} \end{aligned}$$

$$0 \leq Z_3 \leq a_3$$

$$\Delta Z_3 = -\frac{2Fa}{3EA} + \frac{N_3 \cdot Z_3}{E2A} = -\frac{2Fa}{3EA} + \frac{F \cdot Z_3}{12EA}$$

$$Z_3 = 0 \quad \Delta Z = -\frac{2Fa}{3EA}$$

$$Z_3 = a_3 \quad \Delta Z = -\frac{7Fa}{12EA}$$

$$0 \leq Z_4 \leq a_4$$

$$\Delta Z_4 = -\frac{7Fa}{12EA} + \frac{N_4 \cdot Z_4}{E2A} = -\frac{7Fa}{12EA} + \frac{7FZ}{12EA} \quad Z_4 = 0$$

$$\Delta Z = -\frac{7Fa}{12EA}$$

$$Z_4 = a_4 \quad \Delta Z = 0$$

По полученным результатам строим эпюру перемещений.

На рис. 5 показаны эпюры продольных сил  $N$ , нормальных напряжений  $\sigma$  и перемещений.

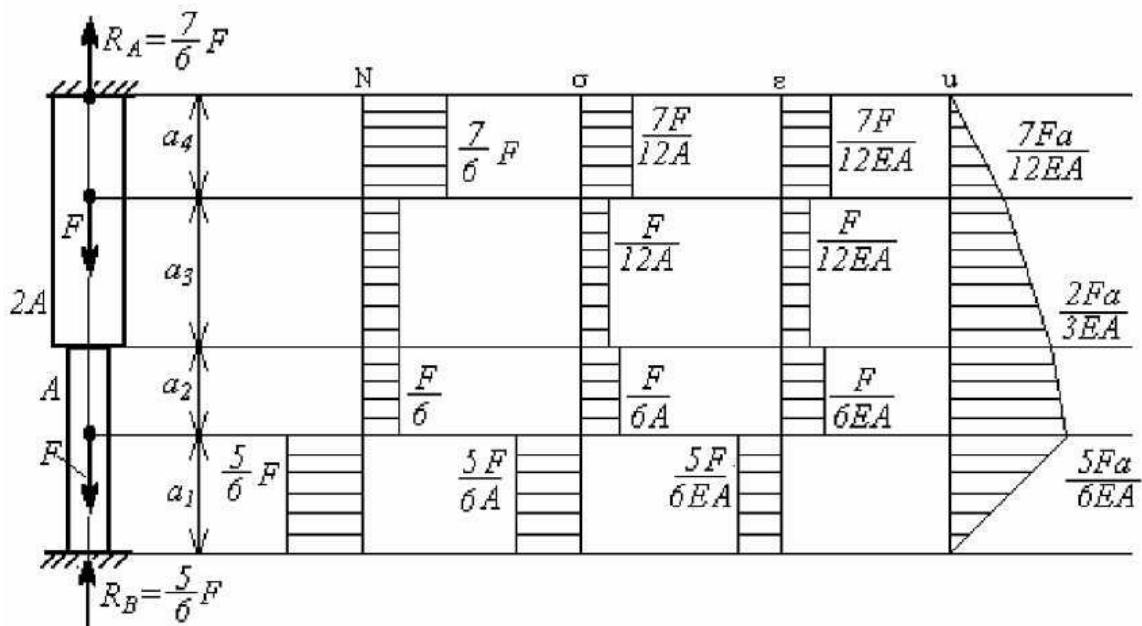


Рис. 5

Решение задачи в упруго-пластической зоне

1. Усилие  $P_T$ , при котором в брусе впервые появляются напряжения, равные пределу текучести:



$$\sigma_{\max} = \frac{5F_T}{6A} = \sigma_T$$

откуда

$$F_T = \frac{5}{6} \sigma_T \cdot A$$

2. Усилие  $P_{\text{пред}}$ , отвечающие состоянию предельного равновесия

$$\sum F_z = 0 \quad \sigma_T \cdot 2A - F_{\text{пред}} - F_{\text{пред}} + \sigma_T \cdot A = 0$$

$$F_{\text{пред}} = \frac{3}{2} \cdot \sigma_T \cdot A$$

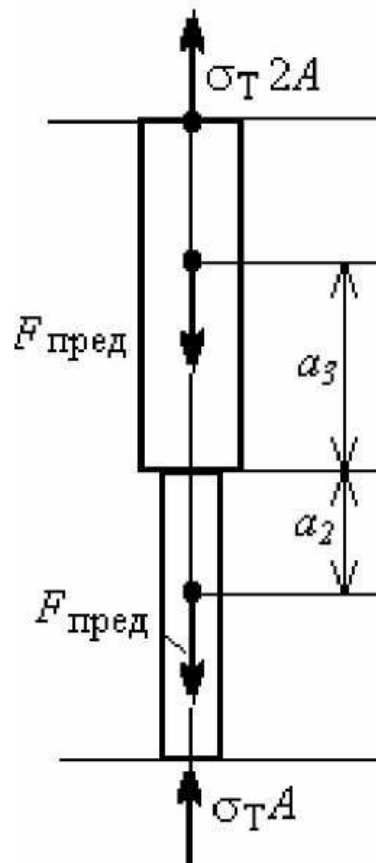


Рис. 6

3. Запас несущей способности:

$$\beta = \frac{F_{пред}}{F_T} = \frac{\frac{3}{2} \sigma_T \cdot A}{\frac{6}{5} \cdot \sigma_T \cdot A} = 1,25$$

#### 4. Остаточные усилия и напряжения:

Остаточные усилия в брус определяются после нагружения силой  $F_{пред}$  и последующей разгрузки:

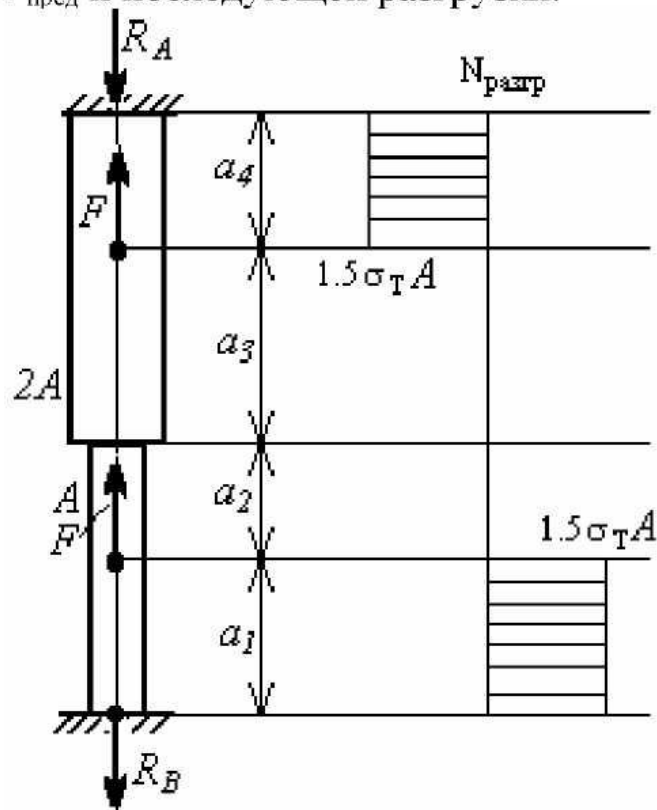


Рис. 7

Будем считать, что материал бруса – идеально упруго-пластический.

Решение этой статически неопределимой задачи дает:

$$R_A = 1,5\sigma_T A \quad R_B = 1,5\sigma_T A$$

На рис.7 показана эпюра продольных сил при разгрузке.

Для построения эпюры  $N_{ост}$  надо сложить алгебраически эпюры  $N_{пред}$  и  $N_{ост}$ .

На рис.8 показаны эпюры остаточных усилий и напряжений.

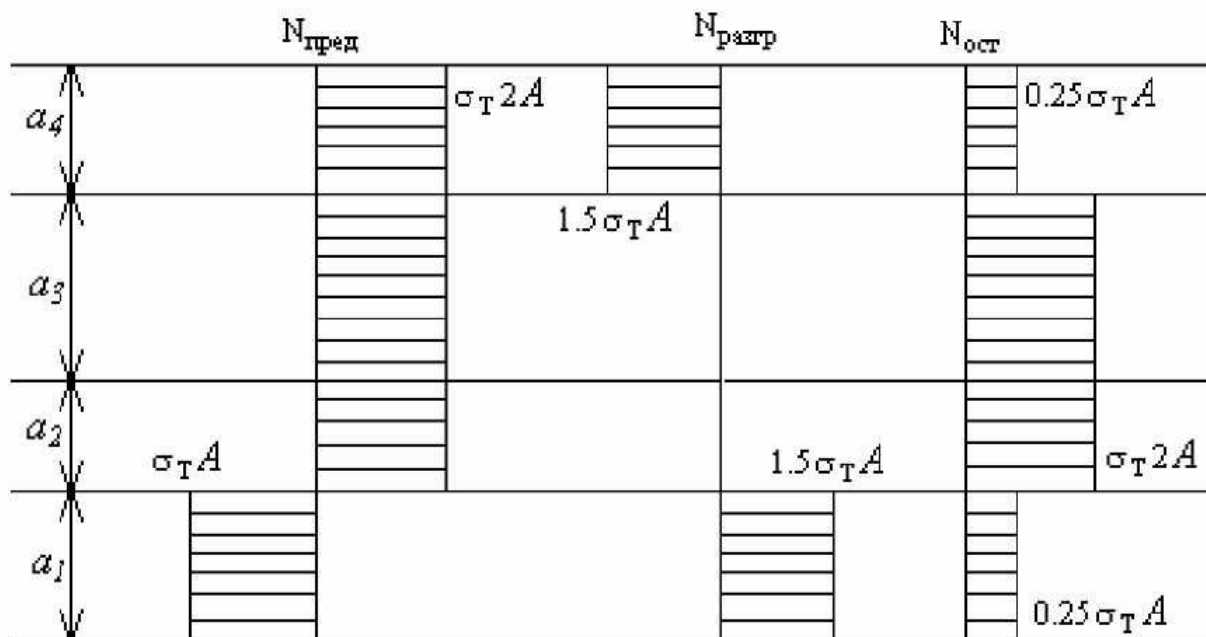


Рис. 8

## Задача 2

(К выполнению расчетно-проектировочной работы №1 «Расчет статически неопределимого бруса при растяжении и сжатии»)

Абсолютно жесткий брус закреплен с помощью нескольких стальных стержней (рис.9).

Необходимо:

1. В упругой зоне определить усилия и напряжения в стержнях;

2. В упруго-пластической зоне:

а) вычислить силу  $F_T$ , при которой в системе впервые появляются напряжения, равные пределу текучести  $\sigma_T$ ;

б) вычислить силу  $F_{\text{пред}}$ , отвечающую состоянию предельного равновесия системы;

в) вычислить запас несущей способности системы;

г) вычислить остаточные усилия после нагружения силой  $F_{\text{пред}}$  и последующей разгрузки.

Считать: а)  $E$ ,  $A$ ,  $a$ ,  $\sigma_T$ ,  $\alpha$  известными;

б) материал стержней идеально упруго-пластический (по диаграмме Прандтля).

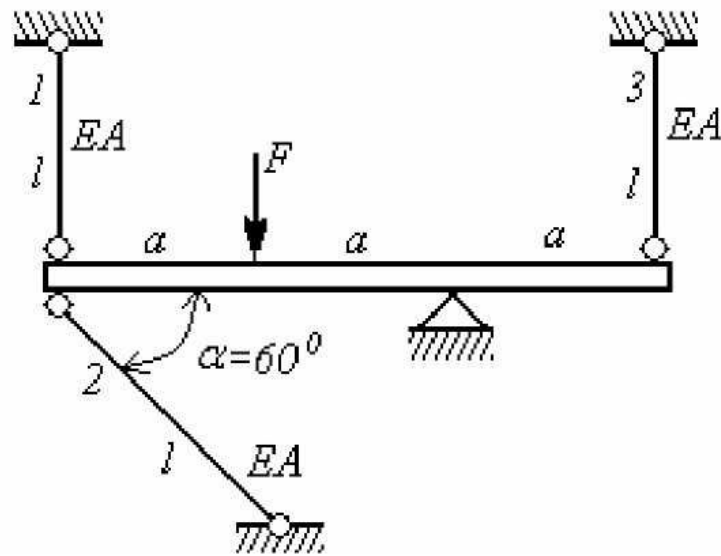


Рис.9

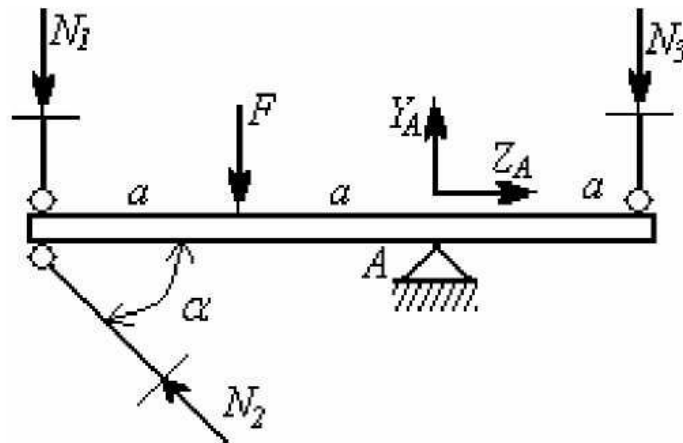


Рис.10

Решение:

1. Уравнение равновесия

$$\sum M_A = 0 \quad -N_3 \cdot a + F \cdot a - N_1 \cdot 2a - N_2 \cdot \sin \alpha \cdot 2a = 0 \quad (1)$$

$$-N_3 + F - 2N_1 - 2N_2 \cdot \sin \alpha = 0$$

Получили одно уравнение с тремя неизвестными, следовательно, задача статически неопределима.

2. Уравнение совместности деформаций

Рассмотрим деформированное состояние системы (рис. 11)

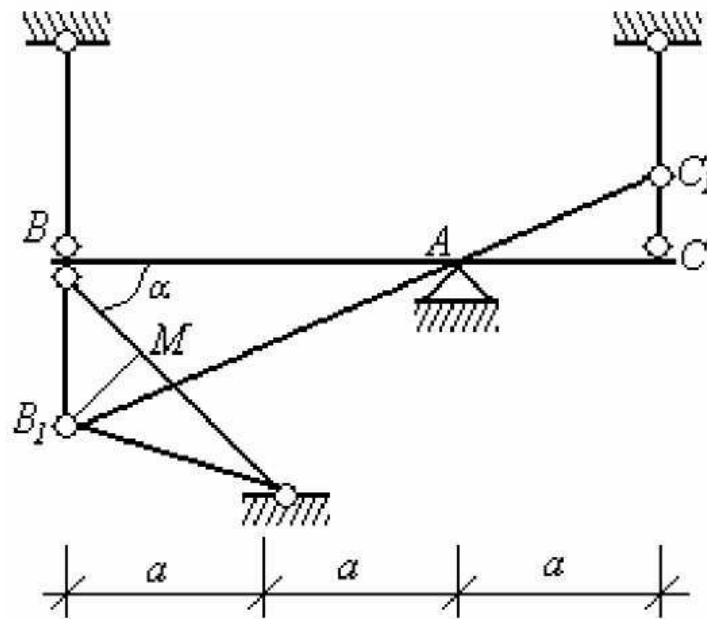


Рис. 11

Из схемы деформированного состояния видно, что

$$BB_1 = \Delta l_1 \quad BM = \Delta l_2 \quad CC_1 = \Delta l_3 \quad (2)$$

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \sin \alpha \quad \Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\Delta l_3}{\Delta l_1} = \frac{1}{2} \quad \Delta l_1 = 2 \cdot \Delta l_3 \quad (3)$$

По закону Гука выражения (2) и (3) запишутся:

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{EA} = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA} \cdot \sin \alpha \quad N_2 = N_1 \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{EA} = 2 \cdot \frac{N_3 l}{EA} \quad N_1 = 2 \cdot N_3 \quad (3)$$

3. Решение уравнений (1), (2) и (3) дает

$$N_1 = \frac{F}{3,5} \quad N_2 = \frac{1,71 \cdot F}{7} \quad N_3 = \frac{1}{7} F$$

4. Напряжение в стержнях будут равны:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A} = \frac{F}{3,5 \cdot A} \quad \sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A} = \frac{1,71F}{7 \cdot A}$$

Видно, что

$$\sigma_{\max} = \sigma(1) = \frac{F}{3,5 \cdot A}$$

2. Решение в упруго-пластической зоне:

1. Усилие  $F_T$ , при котором в системе впервые появляются напряжения, равные пределу текучести:

$$\sigma_{\max} = \sigma_T$$

$$\frac{F_T}{3,5A} = \sigma_T \quad F_T = 3,5 \cdot \sigma_T \cdot A$$

2. Усилие  $F_{\text{пред}}$ , соответствующее состоянию предельного равновесия системы

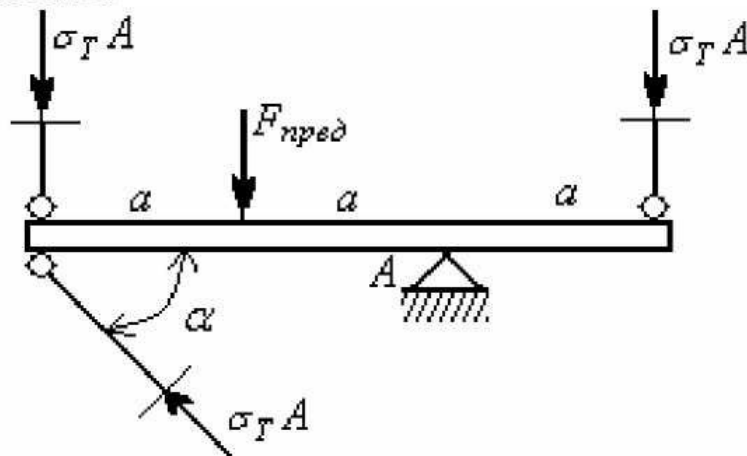


Рис. 12

$$\sum M_A = 0$$

$$-\sigma_T \cdot A \cdot a + F_{\text{пред}} \cdot a - \sigma_T \cdot A \cdot 2a - \sigma_T \cdot A \cdot \sin \cdot 2a = 0$$

$$F_{\text{пред}} = 4,71 \cdot \sigma_T \cdot A$$

3. Запас несущей способности системы:

$$\beta = \frac{F_{\text{пред}}}{F_T} = \frac{4,71 \sigma_T \cdot A}{3,5 \sigma_T A} = 1,35$$

4. Остаточные усилия в стержнях

а) схема разгрузки:

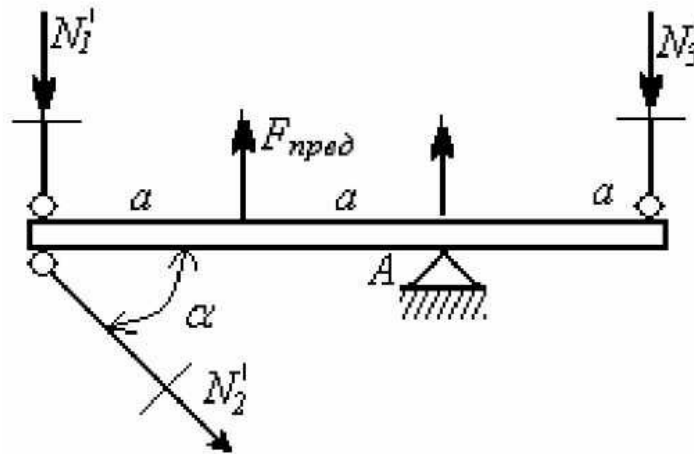


Рис. 13

Решение этой статически неопределимой системы дает:

$$N_1' = \frac{4,71}{4} \sigma_T \cdot A$$

$$N_2' = \frac{8,05}{8} \sigma_T \cdot A$$

$$N_3' = \frac{4,71}{8} \sigma_T \cdot A$$

б) остаточные усилия:

$$N_{1,остат} = \sigma_T \cdot A - \frac{4,71}{4} \sigma_T \cdot A = -0,17 \sigma_T \cdot A$$

$$N_{2,остат} = -\sigma_T \cdot A + \frac{8,05}{8} \sigma_T \cdot A = 0,006 \sigma_T \cdot A$$

$$N_{3,остат} = -\sigma_T \cdot A + \frac{4,71}{8} \sigma_T \cdot A = -0,41 \sigma_T \cdot A$$

### Задача 3

(к выполнению расчетно-проектировочной работы №2  
«Вычисление моментов инерции сложных поперечных  
сечений стержня»)

Вычислить главные центральные моменты инерции сечения, состоящего из швеллера №18 и равнобокого уголка 90×90×8

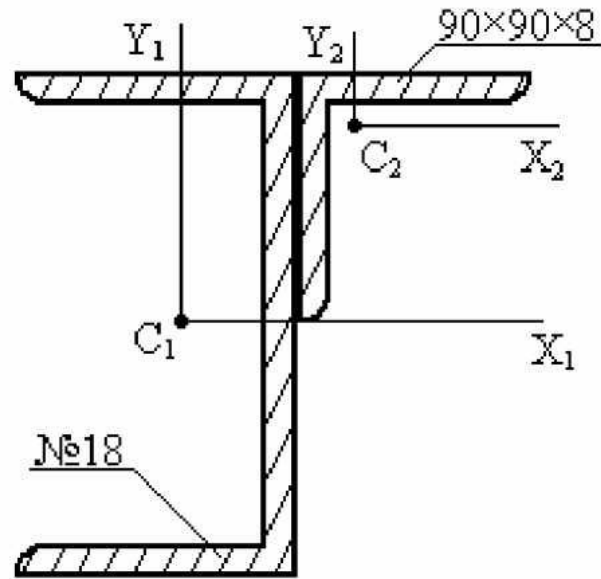
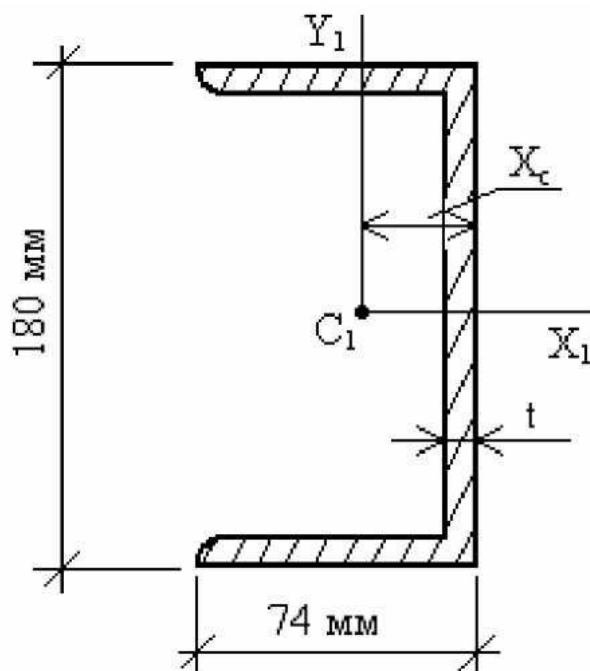


Рис. 14

Выписываем геометрические характеристики составных частей сечения:

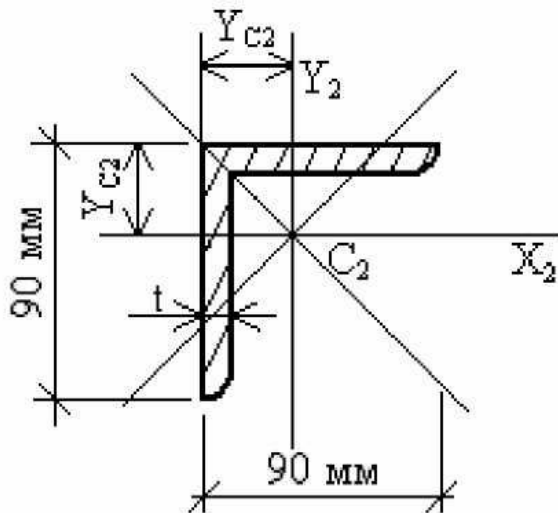


Швеллер № 18

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 22,2 \text{ см}^2 \\
 I_{X1} &= 1190 \text{ см}^4 \\
 I_{Y1} &= 105 \text{ см}^4 \\
 X_c &= 2,13 \text{ см} \\
 t &= 0,51 \text{ см}
 \end{aligned}$$



уголок 90×90×8



$$\begin{aligned}
 A_2 &= 13,9 \text{ см}^2 \\
 I_{X_2} &= I_{Y_2} = 106 \text{ см}^4 \\
 I_{\max} &= 168 \text{ см}^4 \\
 I_{\min} &= 43,8 \text{ см}^4 \\
 X_{c_2} &= Y_{c_2} = 2,13 \text{ см} \\
 t &= 0,8 \text{ см}
 \end{aligned}$$

Рис. 15

РЕШЕНИЕ:

1. Определение координаты центра тяжести сечения:

Координаты центра тяжести сечения определим относительно вспомогательных осей  $X_0$  и  $Y_0$  (см. рис. 16)

$$Y_c = \frac{S_{x0}}{A}; \quad X_c = \frac{S_{y0}}{A}, \quad \text{где}$$

$S_{x0}$ ,  $S_{y0}$  - статические моменты инерции сечения относительно осей  $X_0$  и  $Y_0$ ;

$A$  - площадь поперечного сечения.

$$Y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{22,2 \cdot 9 + 13,9 \cdot 15,49}{22,2 + 13,9} = 11,5 \text{ см}$$

$$X_c = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{22,2 \cdot 5,27 + 13,9 \cdot 9,97}{22,2 + 13,9} = 7 \text{ см}$$

Через центр тяжести сечения проводим центральные оси  $x$  и  $y$  (рис.16).

2. Центральные моменты инерции сечения:

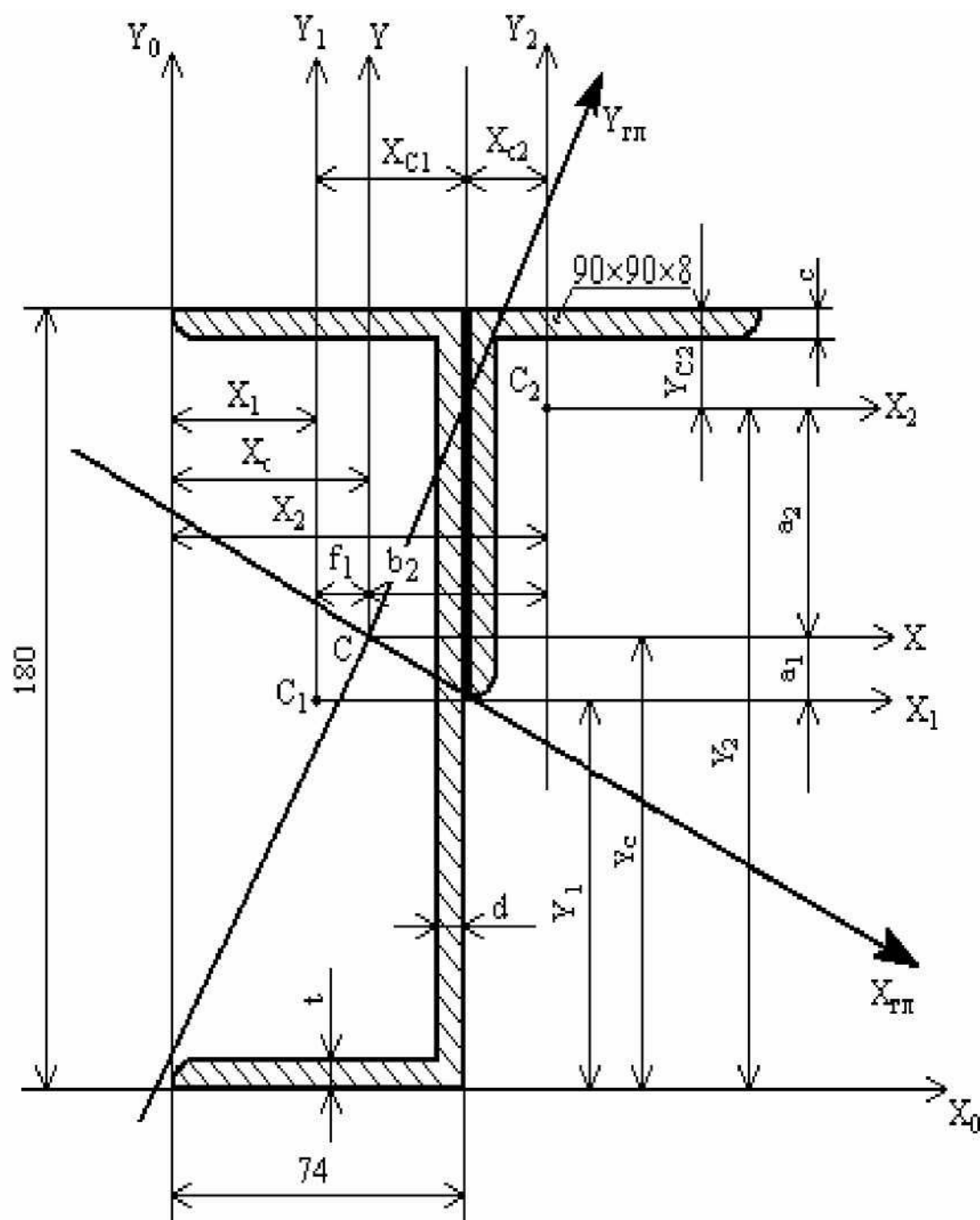


Рис. 16

$$\begin{aligned}
I_x &= (I_{x1} + a_1^2 \cdot A_1) + (I_{x2} + a_2^2 \cdot A_2), \\
I_y &= (I_{y1} + b_1^2 \cdot A_1) + (I_{y2} + b_2^2 \cdot A_2), \\
I_{xy} &= (I_{x1y1} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1) + (I_{x2y2} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2),
\end{aligned}$$

где

$$a_1 = y_c - y_1 = 11,5 - 9 = 2,5 \text{ см}$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 15,49 - 11,5 = 4 \text{ см}$$

$$b_1 = x_{c1} - x_1 = 7 - (2,4 + 2,13) = 1,73 \text{ см}$$

$$b_2 = x_2 - x_{c2} = (7,4 + 2,51) - 7 = 2,91 \text{ см}$$

в системе координат  $xu$ :

$$a_1 = -2,3 \text{ см} \quad b_1 = -1,79 \text{ см}$$

$$a_2 = 4 \text{ см} \quad b_2 = 2,91 \text{ см}$$

Для равнобокого уголка центробежный момент инерции определится:

$$I_{x2y2} = \frac{I_{\max} - I_{\min i}}{2} = \frac{168 - 43,8}{2} = 62,1 \text{ см}^4$$

Примечание: Также модули центробежных моментов инерции для уголков как для равнополочных и неравнополочных приведены в таблицах ГОСТ, (например, в учебнике Сопротивление материалов под редакцией А.В. Александрова, В.Я. Потапова, Б.Л. Державина. 2001 г.). Необходимо только правильно установить знак момента.

В численных значениях:

$$I_x = (1190 + 2,5^2 \cdot 22,2) + (106 + 4^2 \cdot 13,9) = 1656,9 \text{ см}^4$$

$$I_y = (105 + 1,73^2 \cdot 22,2) + (106 + 2,91^2 \cdot 13,9) = 404,4 \text{ см}^4$$

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= [0 + (-2,5) \cdot (-1,73) \cdot 22,2] + [62,1 + 4 \cdot 2,91 \cdot 13,9] = \\
&= 323,24 \text{ см}^4
\end{aligned}$$

3. Положение главных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{323,24}{1656,9 - 404,4} = -0,258$$

$$\alpha_0 = -13^{\circ} 45'$$

Путем поворота центральных осей  $x$  и  $y$  по часовой стрелке получаем главные центральные оси  $x_{zл}$  и  $y_{zл}$  (рис.16).

4. Главные центральные моменты инерции сечения

$$I_{zл} = I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{zл} = I_{\min}^{\max} = \frac{1656,9 + 494,4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1656,9 - 404,4}{2}\right)^2 + 323,2^2}$$

$$I_{\max} = I_{x_{zл}} = 1735,615 \text{ см}^4$$

$$I_{\min} = I_{y_{zл}} = 326,15 \text{ см}^4$$

5. Проверка правильности вычислений:

$$I_{x_{zл}, y_{zл}} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha_0 =$$

$$= \frac{1656,9 - 404,4}{2} \cdot \sin 2(-13^{\circ} 25') + 323 \cdot \cos 2(-13^{\circ} 25') = 0$$

#### Задача 4

(К выполнению расчетно-проектировочной работы №3 «Построение эпюр внутренних силовых факторов для балок и рам»)

Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки (рис. 17)

$$F = 1000 \text{ даН}, \quad M = 700 \text{ даН}, \quad q = 200 \frac{\text{даН}}{\text{м}}$$

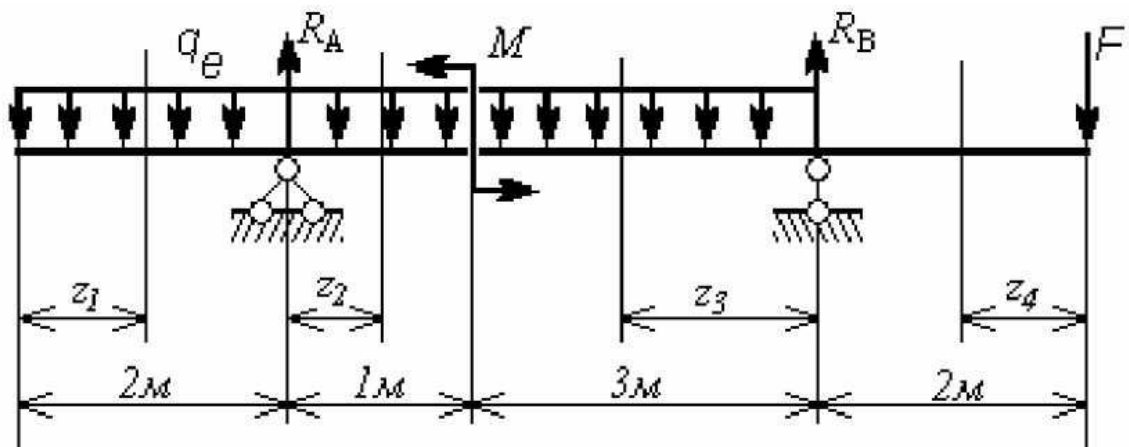


Рис. 17

Решение:

1. Определение опорных реакций

$$\sum M_A = 0 \quad -F \cdot 6 + R_B \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot 1 + M = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad -F \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot 3 + M - R_A \cdot 4 = 0$$

Вычисления дают:  $R_A = 575 \text{ daH}$ ,  $R_B = 1625 \text{ daH}$ .

Проверка:

$$\sum F = 0 \quad R_A + R_B - q \cdot 6 - F = 575 + 1625 - 200 \cdot 6 - 1000 = 0$$

2. Эпюра поперечных сил  $Q$  (рис.18).

$$0 \leq z_1 \leq 2\text{м} \quad Q_1 = -q \cdot z_1 = -200 \cdot z_1$$

$$z_1 = 0 \quad Q_1 = 0$$

$$z_1 = 2\text{м} \quad Q_1 = -400 \text{ daH}$$

$$0 \leq z_{2,3} \leq 4\text{м} \quad Q_2 = R_B - q(2 + z_2) = 575 - 200(2 + z_2)$$

$$z_{2,3} = 0 \quad Q_2 = 175 \text{ daH}$$

$$z_{2,3} = 4\text{м} \quad Q_2 = -625 \text{ daH}$$

$$0 \leq z_4 \leq 2\text{м} \quad Q_4 = F = 1000 \text{ daH}$$

3. Эпюра изгибающих моментов  $M$ .

$$0 \leq z_1 \leq 2\text{м} \quad M_1 = -q \frac{z_1^2}{2} = -200 \frac{z_1^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
& z_1 = 0 \quad M = 0 \\
& z_1 = 2\text{ м} \quad M = -400\text{ даН} \cdot \text{м} \\
0 \leq z_2 \leq 1\text{ м} & \\
& M_2 = R_A \cdot z_2 - q \frac{(2 + z_2)^2}{2} \\
& \frac{dM}{dz_2} = Q = R_A - q \cdot (2 + z_2) = 0 \\
& z_2 = \frac{175}{200} \text{ м} \\
& z_2 = 0 \quad M = -400\text{ даН} \cdot \text{м} \\
& z_2 = \frac{175}{200} \quad M = 314\text{ даН} \cdot \text{м} \\
& z_2 = 1\text{ м} \quad M = -325\text{ даН} \cdot \text{м} \\
0 \leq z_3 \leq 3\text{ м} & \\
& M_3 = -M + R_A \cdot (1 + z_3) - q \frac{(3 + z_3)^2}{2} \\
& z_3 = 0 \quad M = -1025\text{ даН} \\
& z_3 = 3\text{ м} \quad M = -2000\text{ даН} \\
0 \leq z_4 \leq 2\text{ м} & \\
& M = -F \cdot z_4 = -1000 \cdot z_4 \\
& z_4 = 0 \quad M = 0 \\
& z_4 = 2\text{ м} \quad M = -2000\text{ даН}
\end{aligned}$$

4. Эпюра продольных сил  $N$ .

$$N = 0$$

5. Эпюра поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил представлены на рис. 18.

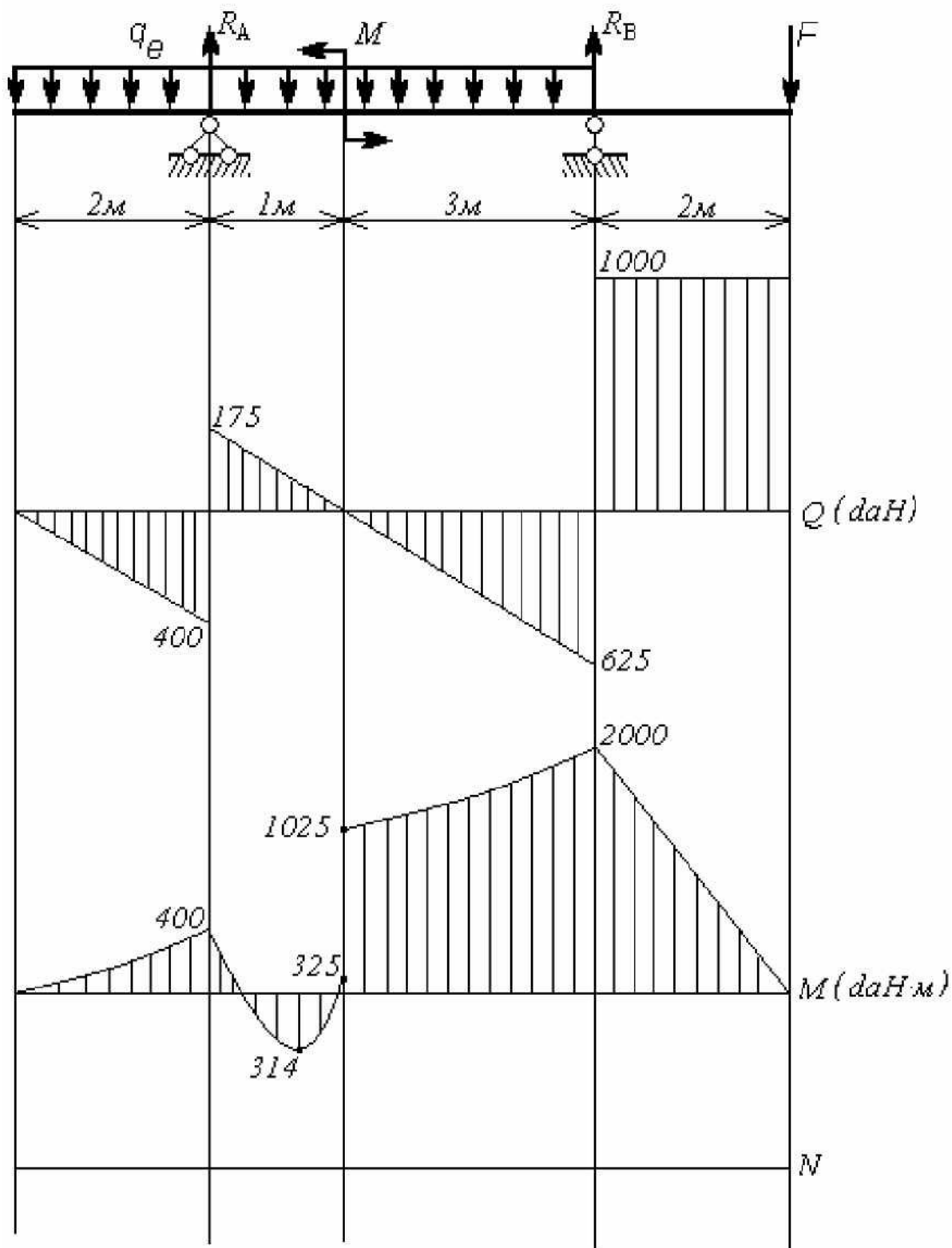


Рис.18

### Задача №5

(К выполнению расчетно-проектировочной работы №3  
«Построение эпюр внутренних силовых факторов для балок и  
рам»)

Построить эпюры поперечных сил  $Q$ , изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  для рамы, представленной на рис. 19.

$$F = 10 \text{ кН}; \quad q = 15 \text{ кН}; \quad M = 20 \text{ кН/м}, \quad a = 2 \text{ м}.$$

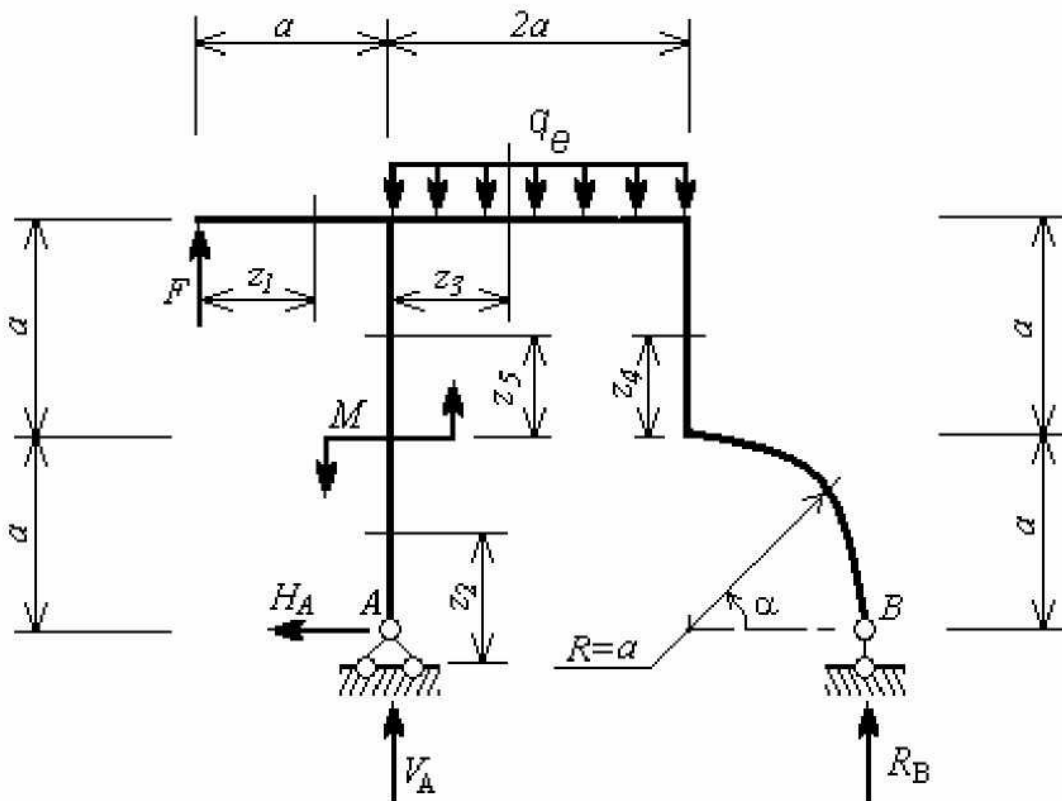


Рис.19

РЕШЕНИЕ:

1. Определение опорных реакций

$$\sum M_A = 0 \quad R_B \cdot 3a - q \cdot 2a \cdot a - F \cdot a + M = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad -F \cdot 4a - V_A \cdot 3a + M + q \cdot 2a \cdot a = 0$$

$$H_A = 0$$



Вычисления дают:  $V_A = 30\text{кН}$ ;  $R_B = 20\text{кН}$ .

Проверка:

$$\sum F_y = V_A + R_B - q \cdot 2a + F = 30 + 20 - 15 \cdot 2 \cdot 2 + 10 = 0$$

2. Эпюра поперечных сил:

$$0 \leq z_1 \leq a \quad Q_1 = F = 10\text{кН}$$

$$0 \leq z_2 \leq 2a \quad Q_2 = H_A = 0$$

$$0 \leq z_3 \leq 2a \quad Q_3 = H_A + F - q \cdot z_3 = 40 - 15 \cdot z_3$$

$$z_3 = 0 \quad Q_3 = 40\text{кН}$$

$$z_3 = 2a = 4\text{м} \quad Q_3 = -20\text{кН}$$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$Q_\alpha = -R_B \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\alpha = 0 \quad Q = 0$$

$$\alpha = 45^\circ \quad Q = -14,1\text{кН}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad Q = -R_B = -20\text{кН}$$

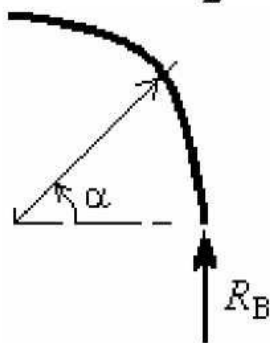


Рис. 20

$$0 \leq z_4 \leq a \quad Q_4 = 0$$

Эпюра поперечных сил  $Q$  представлена на рис. 21.

3. Эпюра изгибающих моментов:

$$0 \leq z_1 \leq 2\text{м} \quad M_1 = F \cdot z_1 = 10 \cdot z_1$$

$$z_1 = 0 \quad M_1 = 0$$

$$z_1 = 2\text{м} \quad M_1 = 20\text{кНм}$$

$$0 \leq z_2 \leq 2\text{м} \quad M_2 = H_A \cdot z_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
0 \leq z_5 \leq 2m & \quad M_5 = -M + H_A(a + z_5) = -M = -20кНм \\
0 \leq z_3 \leq 4m & \quad M_3 = V_A \cdot z_3 - M + F(2 + z_3) - q \frac{z_3^2}{2} \\
& \quad \frac{dM_3}{dz_3} = F \cdot q \cdot z_3 = 0 \quad z_3 = 2,67m \\
& \quad z_3 = 0 \quad M = 0 \\
& \quad z_3 = 4m \quad M = 40кНм \\
& \quad z_3 = 2,67m \quad M = 53,33кНм \\
0 \leq \alpha \leq 90^0 & \quad M_\alpha = R_B \cdot (R - R \cdot \cos \alpha) \\
& \quad \alpha = 0 \quad M_\alpha = 0 \\
& \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad M_\alpha = 12кНм \\
& \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad M_\alpha = 40кНм
\end{aligned}$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис.21.

4. Эпюра продольных сил  $N$  :

$$\begin{aligned}
0 \leq z_1 \leq 2m & \quad N_1 = 0 \\
0 \leq z_2 \leq 4m & \quad N_2 = -V_A = -30кН \\
0 \leq z_3 \leq 4m & \quad N_3 = 0 \\
0 \leq z_4 \leq 2m & \quad N_4 = -R_B = -20кН \\
0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} & \quad N_\alpha = -R_B \cdot \cos \alpha \\
& \quad \alpha = 0 \quad N_\alpha = -20кН \\
& \quad \alpha = 45^0 \quad N_\alpha = -14,1кН \\
& \quad \alpha = 90^0 \quad N_\alpha = 0
\end{aligned}$$

Эпюра продольных сил представлена на рис. 21.

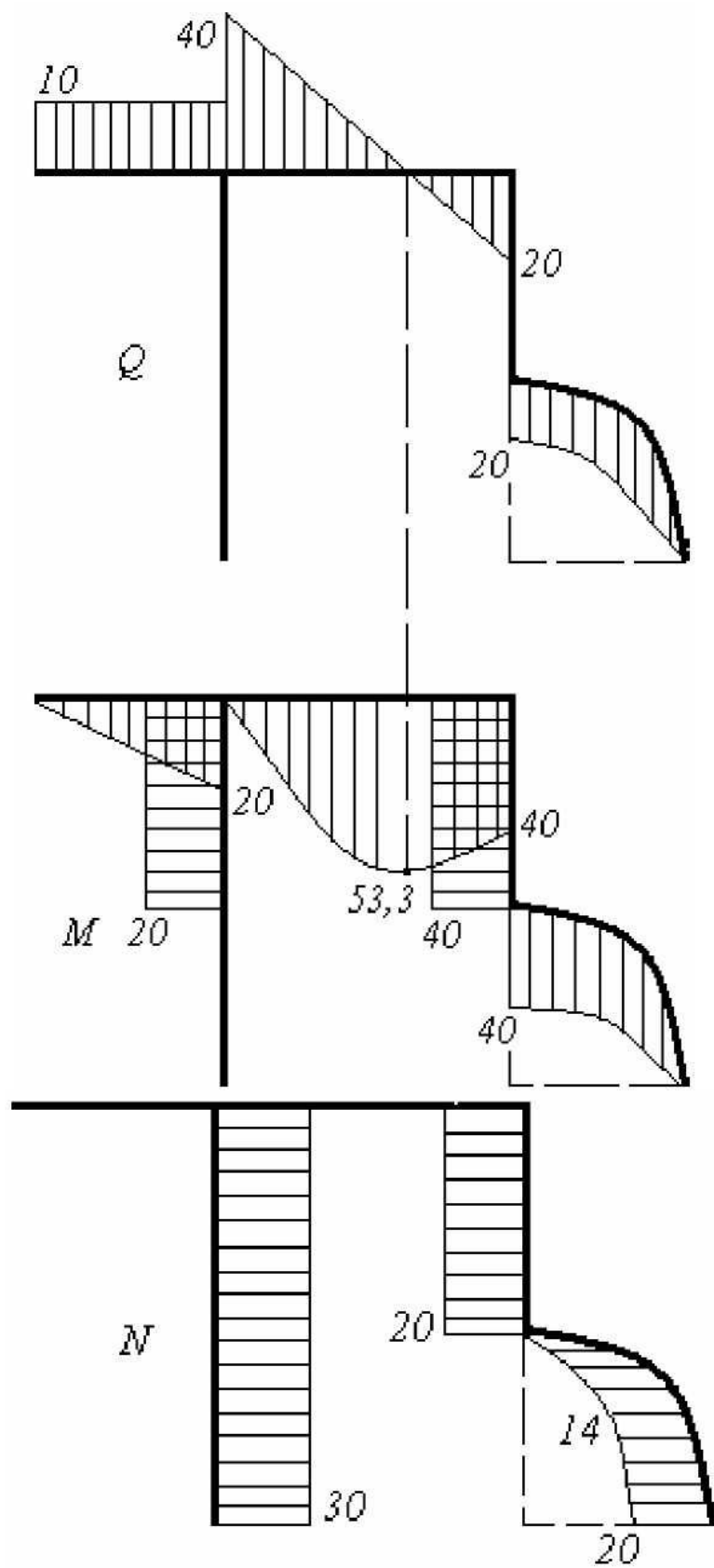


Рис. 21

### Задача № 6

(К выполнению расчетно-проектировочной работы №4  
«Балки и рамы с промежуточными шарнирами»)

Для балки с промежуточными шарнирами  $A$  и  $B$  (рис.22) при  $F = 22\text{кН}$ ;  $q = 23\text{кН/м}$ ;  $M = 23\text{Нм}$  и постоянной  $EI$  по длине балки:

1. Определить опорные реакции;
2. Построить эпюры поперечных сил  $Q$ , изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$ ;
3. Подобрать сечение балки в виде двутавра, приняв расчетные сопротивления изгибу  $R_{изг} = 210\text{МПа}$  и на срез  $R_{ср} = 100\text{МПа}$ . Произвести полную проверку прочности принятого сечения. Построить закон распределения нормальных и касательных напряжений по поперечному сечению балки.

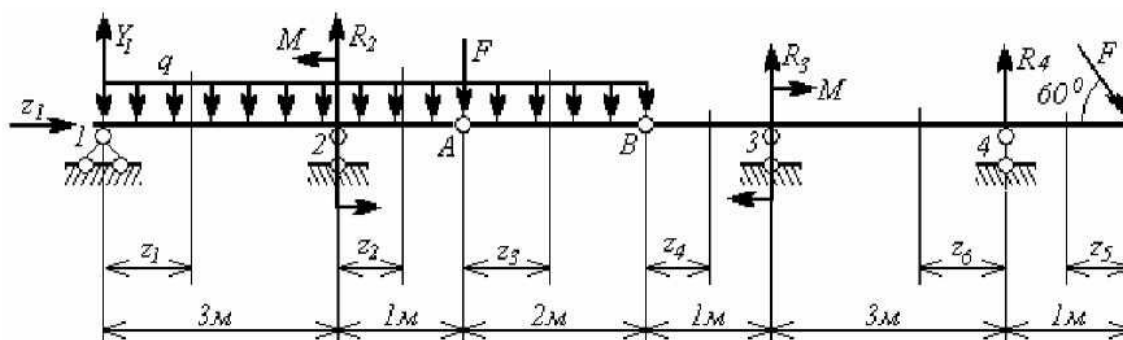


Рис. 22

**РЕШЕНИЕ:**

1. Определение опорных реакций:

А) Сумма моментов всех сил, расположенных по одну сторону от промежуточного шарнира, должна быть равна нулю.

$$\sum M_A = 0 \text{ (от сил слева)} \quad Y_1 \cdot 4 + R_2 \cdot 1 - M - q \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0 \text{ (от сил слева)} \quad Y_1 \cdot 6 + R_2 \cdot 3 - M - q \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad (2)$$

Решение уравнений (1) и (2) в численных значениях дает:

$$Y_1 = 26,66\text{кН}, \quad R_2 = 118,33\text{кН}.$$

$$\sum M_B = 0_{(\text{от сил справа})} - F \cdot \sin 60^0 \cdot 5 + R_4 + R_3 \cdot 1 = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_A = 0_{(\text{от сил справа})} - F \cdot \sin 60^0 \cdot 7 + R_4 \cdot 6 + R_3 \cdot 3 - M - q \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad (4)$$

Решение уравнений (3) и (4) в численных значениях дает:

$$R_3 = 19,23 \text{ кН}, \quad R_4 = 23,09 \text{ кН}.$$

Проверка правильности вычислений опорных реакций:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \quad Y_1 + R_2 + R_3 + R_4 - F \cdot \sin 60^0 - q \cdot 6 - F = \\ 26,66 + 118,33 + 19,23 + 23,09 - 17,32 - 150 - 20 = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, реакции определены, верно.

Горизонтальная реакция:

$$\sum F_z = 0 \quad z_1 + F \cdot \cos 60^0 = 0 \quad z_1 = F \cdot \cos 60^0 \quad z_1 = 10 \text{ кН}$$

б) Рассматриваемая балка состоит из двух основных балок и вспомогательной (подвесной) балки АВ (рис.23).

В промежуточных шарнирах изгибающие моменты равны нулю.

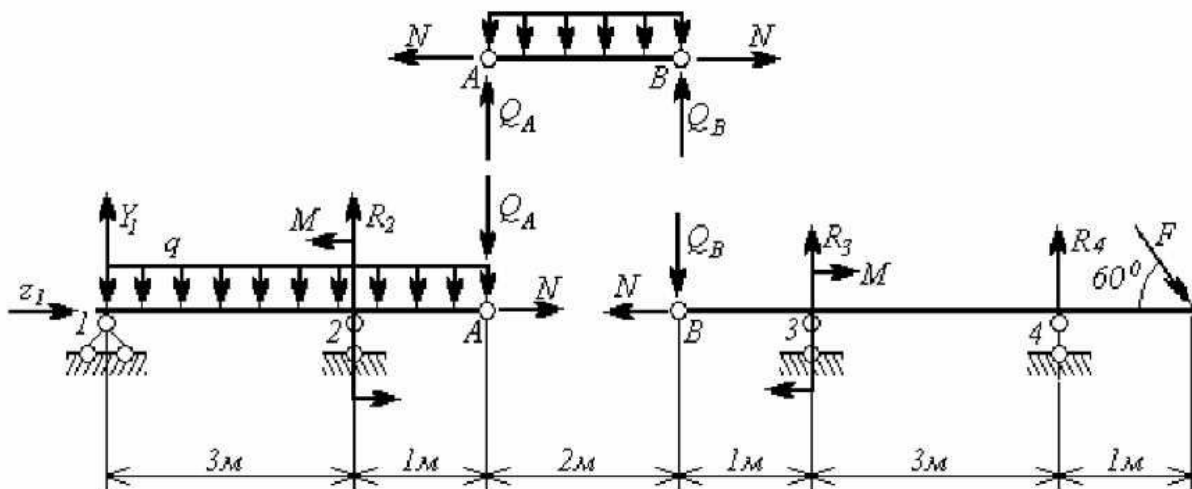
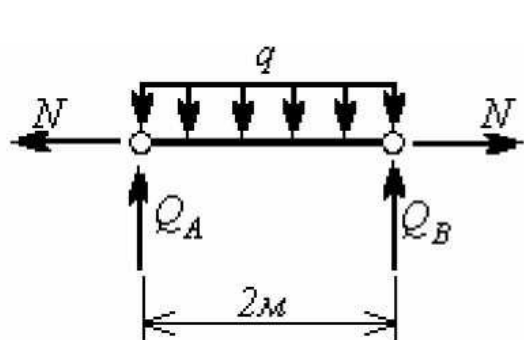


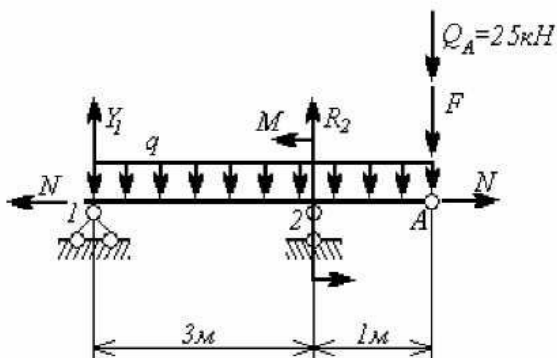
Рис. 23

Составляем уравнения равновесия сил:



$$Q_A + Q_B - q \cdot 2 = 0$$

$$Q_A = Q_B = 25 \text{ кН}$$



$$\sum M_1 = -25 \cdot 4 - F \cdot 1 +$$

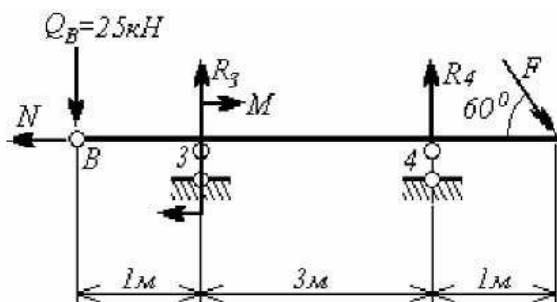
$$+ M - q \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

$$R_2 = 118,33 \text{ кН}$$

$$\sum M_2 = -25 \cdot 1 - F \cdot 1 + M -$$

$$- q \cdot 1 \cdot 0,5 - Y_1 \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

$$Y_1 = 26,66 \text{ кН}$$



$$\sum F_z = 0 \quad -N + F \cdot \cos 60^\circ$$

$$N = 10 \text{ кН}$$

$$\sum M_3 = 25 \cdot 1 - M + R_4 \cdot 3 -$$

$$- F \cdot \sin 60^\circ \cdot 4 = 0$$

$$R_4 = 23,04 \text{ кН}$$

$$\sum M_4 = -F \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 -$$

$$- M - R_3 \cdot 3 + 25 \cdot 4 = 0$$

$$R_3 = 19,23 \text{ кН}$$

Рис. 24

Как видно, значения реакций, вычисленные двумя методами, совпадает.

2. Построение эпюр  $Q$ ,  $M$  и  $N$

$$0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м} \quad Q_1 = Y_1 - q \cdot z_1$$

$$\begin{aligned}
& M_1 = Y_1 \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2} \\
& N_1 = -z_1 \\
0 \leq z_2 \leq 1\text{м} \quad & Q_2 = Y_1 + R_2 - q \cdot (3 + z_2) \\
& M_3 = Y_1 \cdot (3 + z_2) + R_2 \cdot z_2 - M - q \cdot \frac{(4 + z_2)^2}{2} \\
& N_2 = -z_1 \\
0 \leq z_3 \leq 2\text{м} \quad & Q_3 = Y_1 + R_2 - F - q(4 + z_3) \\
& M_3 = Y_1 \cdot (4 + z_3) - M + R_2(1 + z_3) - F \cdot z_3 - q \frac{(4 - z_3)^2}{2} \\
& N_3 = -z_1 \\
0 \leq z_4 \leq 1\text{м} \quad & Q_4 = Y_1 + R_2 - F - q \cdot 6 \\
& M_4 = Y_1(6 + z_4) - M + R_2 \cdot (3 + z_4) - q \cdot 6 \cdot (3 + z_4) \\
& N_4 = -z_1 \\
0 \leq z_5 \leq 1\text{м} \quad & Q_5 = F \cdot \sin 60^\circ \\
& M_5 = -F \cdot \sin 60^\circ \cdot z_5 \\
& N_5 = F \cdot \cos 60^\circ \\
0 \leq z_6 \leq 3\text{м} \quad & Q_6 = F \cdot \sin 60^\circ - R_4 \\
& M_6 = -F \cdot \sin 60^\circ (1 + z_6) + R_4 \cdot z_6 \\
& N_6 = F \cdot \cos 60^\circ
\end{aligned}$$

На рис. 25 показана эпюра поперечных сил  $Q$ , из которой видно, что на первом и третьем участках эпюра поперечных сил меняет знак (переходит через ноль). Определяем положение этих характерных сечений:

$$Q_1 = Y_1 - q \cdot z_1 = 0 \quad z_1 = 1,07\text{м}$$

$$Q_3 = Y_1 + R_2 - F - q(3 + z_3) = 0 \quad z_3 = 1\text{м}$$

Изгибающие моменты в этих сечениях определяются

$$M_{z_1=1,07m} = Y_1 \cdot 1,07 - q \frac{1,07^2}{2} \quad M_{z_1=1,07m} = 14,22 \text{ кНм}$$

$$M_{z_3=1m} = Y_1 \cdot 5 - M + R_2 \cdot 2 - F \cdot 1 \quad M_{z_3=1m} = 12,46 \text{ кНм}$$

На рис. 25 показаны эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$ .

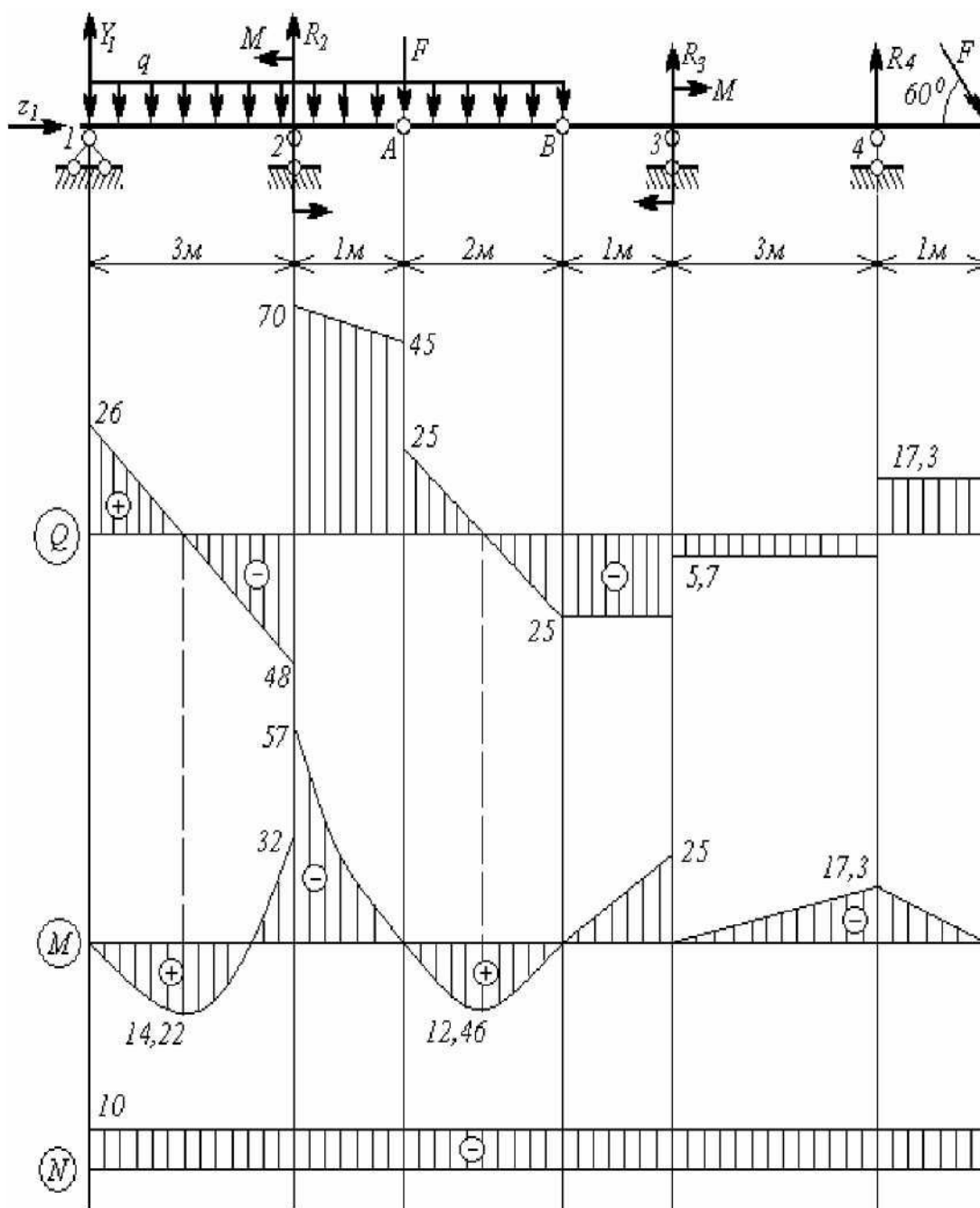


Рис. 25



3. Подбор сечения в виде двутавра:

Условие прочности по нормальным напряжениям

$$\frac{M_{\max}}{W_x} \leq R_{\text{изгиб}}$$

Откуда осевой момент сопротивления сечения балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R_{\text{изгиб}}}$$

Из эюры  $M_{\max} = 57 \text{ кНм}$ , поэтому

$$W_x \geq \frac{57 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 271,43 \text{ см}^3$$

По таблице определяем двутавр № 40, для которого:

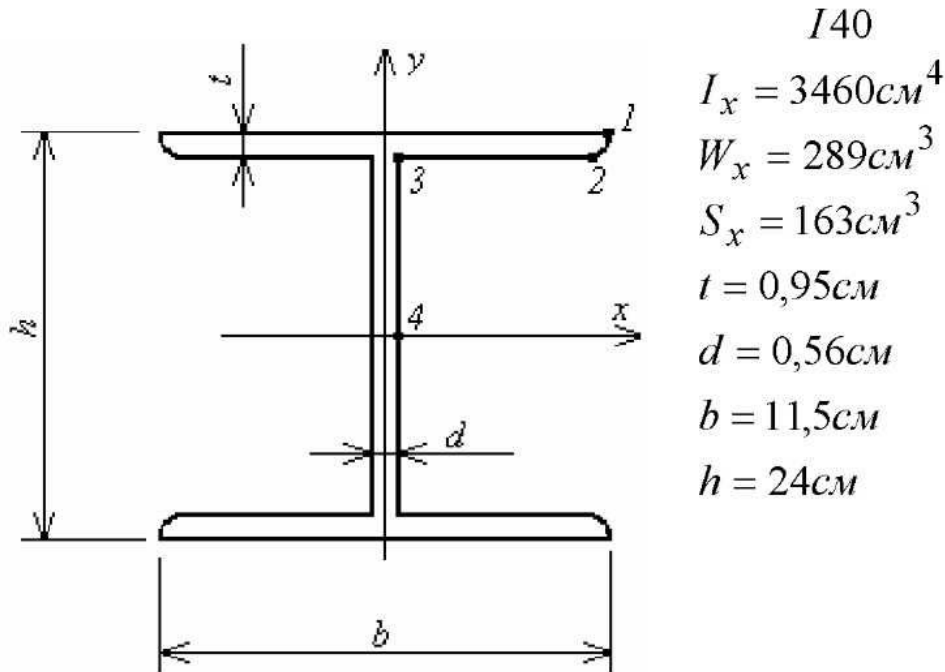


Рис. 26

Сечение подобрано из условия прочности по нормальным напряжениям, т.е. из условия прочности точки 1, максимально удаленной от нейтральной линии.

Проверяем прочность выбранного сечения по касательным напряжениям, т.е. прочность точки 4, расположенной на

нейтральной линии. В этой точке касательные напряжения максимальны.

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^*}{I_x \cdot b_y} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 163}{3460 \cdot 0,56} = 5,88 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\tau_{\max} = 58,8 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа}$$

Проверяем дополнительно прочность в точке 3, где и нормальные и касательные напряжения достигают одновременно значительных величин:

$$\sigma_{(3)} = \frac{M_{\max}}{I_x} \cdot y_{(3)} = \frac{57 \cdot 10^5}{3460} \cdot 11,05 = 182 \text{ МПа}$$

$$\tau_{(3)} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot S_x^*}{3460 \cdot 0,56}$$

где

$$S_x^* = b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$S_x^* = 125,91 \text{ см}^3$$

$$\tau_{(3)} = 45,48 \text{ МПа}$$

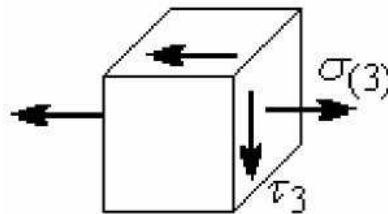


Рис. 27

Следовательно, в точке 3 имеем плоское (двухосное) напряженное состояние. Поэтому, прочность в этой точке надо проверять по главным напряжениям. Согласно теории Хуберта-Мизеса:

$$\delta_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 3 \cdot \tau_3^2} = \sqrt{(182,04)^2 + 3 \cdot (45,48)^2}$$

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_{\text{расч}} = 198,35 < 210 \text{ МПа}$$

4. Закон распределения напряжений по поперечному сечению балки:

Дополнительно надо вычислить касательное напряжение в точке 2:

$$\tau_2 = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 125,91}{3460 \cdot 11,5} = 2,22 \text{ МПа},$$

где:

$$b_y = 11,5 \text{ см}$$

Итак, напряжения равны:

$$\sigma_{(4)} = 0$$

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{\text{max}} = 197,68 \text{ МПа}$$

$$\tau_{(1)} = 0$$

$$\tau_{(2)} = 2,22 \text{ МПа}$$

$$\tau_{(3)} = 45,48 \text{ МПа}$$

$$\tau_{(4)} = \tau_{\text{max}} = 58,88 \text{ МПа}$$

По полученным значениям строим графики распределения нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки:

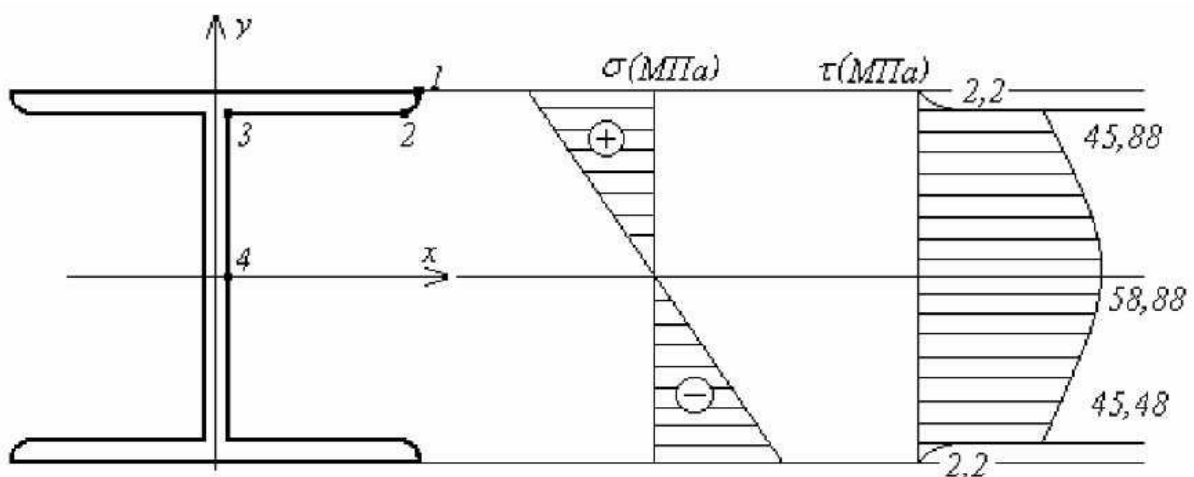


Рис. 28.

### Задача №7

(к выполнению расчетно-проектировочной работы по теме «Напряженно-деформированное состояние в точке упругого тела»)

Для пространственного стержня (рис. 29) необходимо:

1. Построить эпюры внутренних силовых факторов;
2. Выявить положение опасного сечения;
3. Для опасной точки записать условие прочности.

Примечание: а) сечение прямоугольное с размерами  $b$  и  $h$ ;

б)  $P, l, \sigma_T, R_{изг}$  считать заданными.

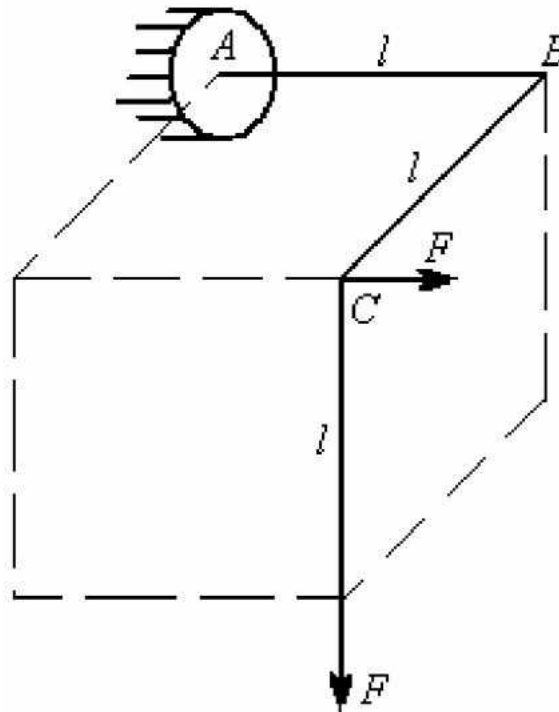


Рис.29

Решение:

1. Построенные эпюры внутренних силовых факторов показаны на рис. 30

Из эпюр внутренних силовых факторов видно, что опасным является сечение А.

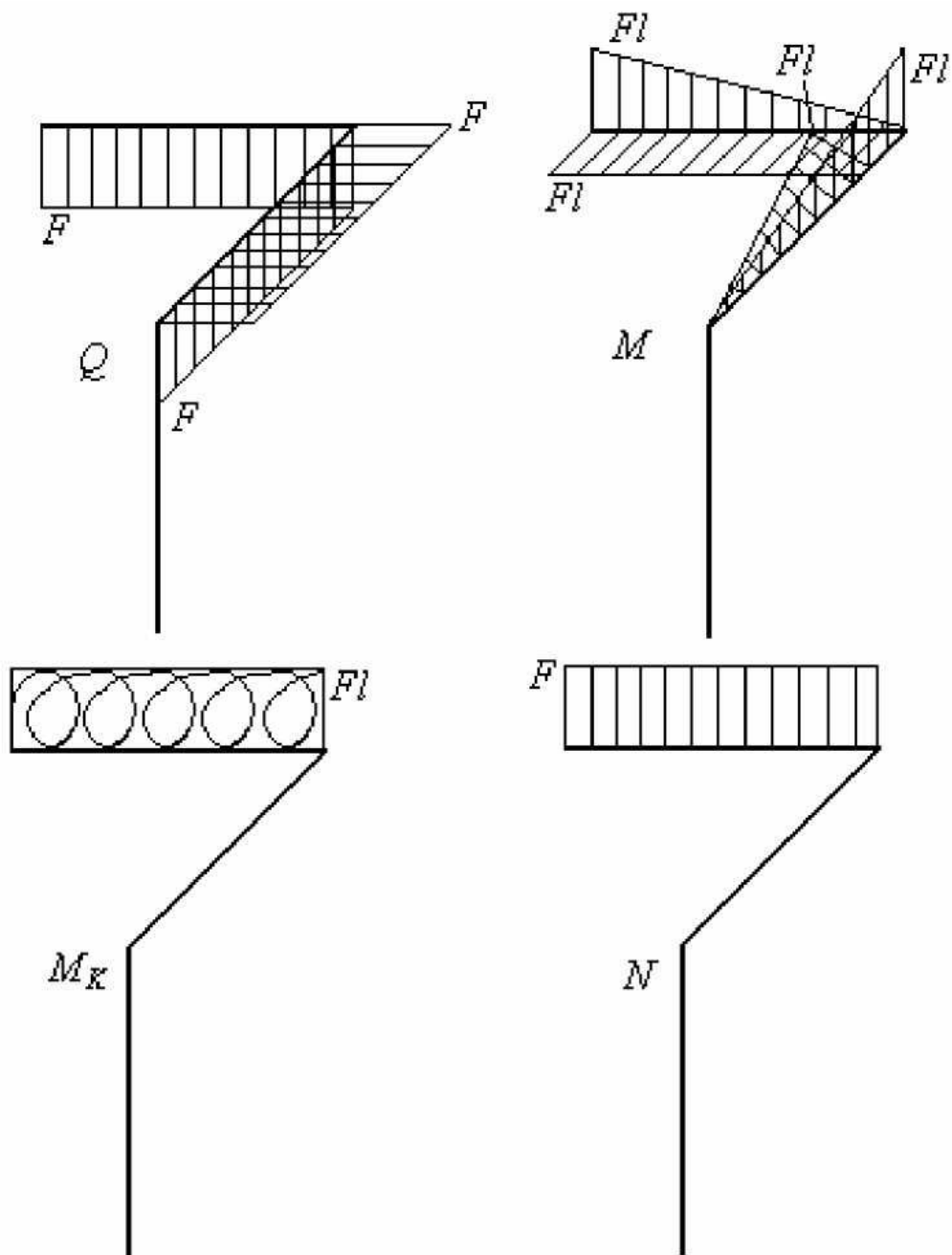


Рис. 30

Опасным сечением является сечение А.

2. Положение опасной точки в опасном сечении.

Для определения положения опасной точки (или предположительно опасной) построим эпюры  $\sigma$  и  $\tau$  в опасном сечении от действия всех внутренних силовых факторов, имеющих место в нем.

Напряженные состояния в характерных точках опасного сечения

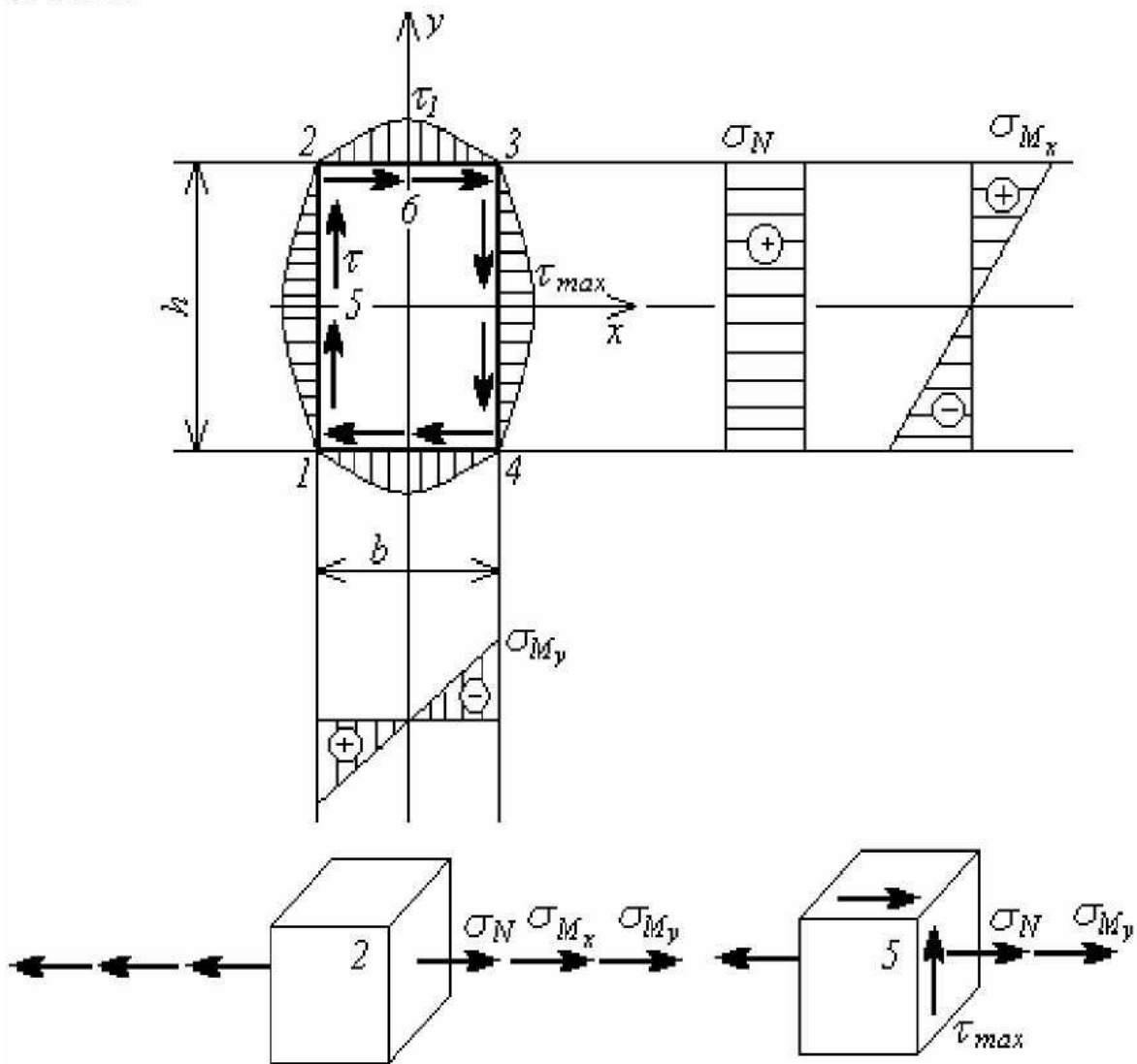


Рис. 31

Как видно из рис. 31, наиболее опасными являются точки 2 и 5.

Точка 2:

$$\sigma_{(2)} = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{F}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

$$\tau_2 = 0$$

$$\sigma_{эkv} = \sigma_{расч} = \sigma_{(2)}$$

Точка 5:

$$\sigma_{(5)} = \sigma_N + \sigma_{M_y}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{\alpha \cdot h \cdot b}$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{(5)}^2 + \tau_{\max}^2} \cdot 3$$

Из двух точек наиболее опасной будет та, для которой  $\sigma_{\text{экв}}$  будет большей.

3. Условие прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} < R_{\text{изг}}$$

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экв}}}$$

### Задача №8

(для выполнения расчетно-проектировочной работы по теме «Устойчивость сжатых стержней»)

Проверить устойчивость стержня прямоугольного сечения  $(6 \times 4) \text{ см}^2$  длиной  $l = 1 \text{ м}$  при нагрузке  $F = 80 \text{ кН}$ . Расчетное сопротивление  $R = 150 \text{ МПа}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

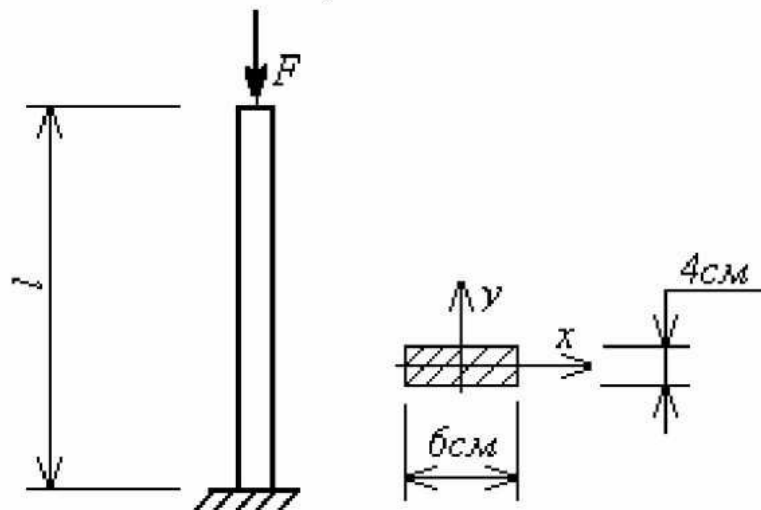


Рис. 32

Решение:

1. Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

где:  $\mu = 2$  - коэффициент, учитывающий вид крепления;

$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  - минимальный радиус инерции сечения.

$$I_{\min} = I_x = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ см}^4; \quad A = 24 \text{ см}^2; \quad i_{\min} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ см}$$

Гибкость стержня получается равным:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 100}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 171$$

Так как  $\lambda = 171 > 110$ , можно критическую силу определить по формуле Л.Эйлера.

2. Критическая сила:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 32}{(2 \cdot 100)^2} = 16 \cdot 10^4 \text{ Н}$$

$$F_{кр} = 160 \text{ кН}$$

3. Коэффициент запаса на устойчивость:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{160}{80} = 2$$

### Задача №9

(для выполнения расчетно-проектировочной работы по теме «Устойчивость сжатых стержней»)

Определить критическую и допускаемую силы для стального штока при  $l = 112 \text{ см}$ ,  $R = 200 \text{ МПа}$ .



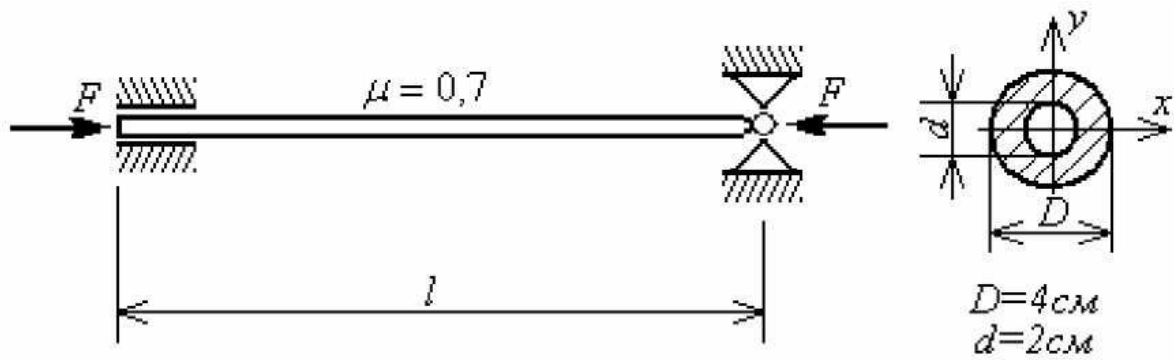


Рис. 33

Решение:

1. Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2}{4} \right)^4 \right] = 11,2 \text{ см}^4$$

$$A = 9,42 \text{ см}^4$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{11,2}{9,42}} = 1,12 \text{ см}$$

Гибкость сжатого стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 112}{1,12} = 70$$

$$\lambda = 70 < 110$$

Следовательно, критическую силу по формуле Эйлера определить нельзя.

2. Критическая сила

Критическая сила по формуле Ясинского:

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A$$

где коэффициенты по таблице (ст.5) равны:

$$a = 46400 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \quad b = 362 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$$

Критическая сила равна:

$$F_{кр} = (46400 - 362 \cdot 70) \cdot 9,42 = 199 \text{ кН}$$

3. Допускаемое сжимающее усилие:

$$F_{\text{доп}} = \varphi \cdot R \cdot A$$

где по таблице при  $\lambda = 70$ , (ст.5):  $\varphi = 0,76$ .

Допускаемое усилие:

$$F_{\text{доп}} = 0,76 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} \cdot 9,42 = 14,32 \cdot 10^4 \text{ Н}$$

$$F_{\text{доп}} = 143,2 \text{ кН}$$

Итак:

1. Действующая нагрузка:  $F = 80 \text{ кН}$

2. Критическая сила:  $F_{\text{кр}} = 199 \text{ кН}$

3. Допускаемая нагрузка:  $F_{\text{доп}} = 143,2 \text{ кН}$

### Задача № 10

(для выполнения расчетно-проектировочной работы по теме  
«Устойчивость сжатых стержней»)

Подобрать номер двутавра для стойки, нагруженной силой  $F = 400 \text{ кН}$  при  $l = 1 \text{ м}$ ,  $R = 200 \text{ МПа}$  (ст.4).

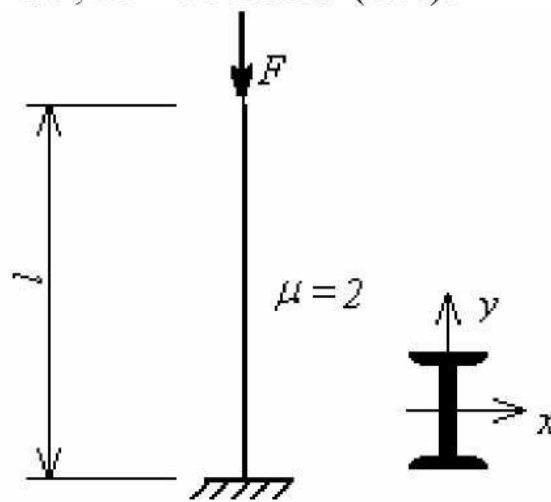


Рис. 34

Решение:

По расчетной формуле:

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot R}$$

Задачу решаем по методу последовательных приближений

1. Положим  $\varphi_1 = 0,5$ , тогда:

$$A_1 = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}} = 40 \text{ см}^2$$

При  $A_1 = 40 \text{ см}^2$  по таблице имеем двутавр № 27, для которого  $A = 40,2 \text{ см}^2$ ,  $i_{\min} = 2,54 \text{ см}$ .

Гибкость стержня будет равна:

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot 100}{2,54} = 78,7$$

По таблице при  $\lambda_1 = 78,7$ , ст.4  $\varphi'_1 = 0,75$

Как видно  $\varphi \neq \varphi'_1$

2. Положим:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$$

Тогда:

$$A_2 = \frac{400 \cdot 10^3}{0,625 \cdot 200 \cdot 10^2} = 32 \text{ см}^2$$

При  $A_2 = 32 \text{ см}^2$  по таблице имеем двутавр № 22а, для которого  $A = 32,8 \text{ см}^2$ ;  $i_{\min} = 2,5 \text{ см}$ .

Гибкость стержня:

$$\lambda_2 = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 100}{2,5} = 80$$

По таблице при  $\lambda_2 = 80$ :  $\varphi'_2 = 0,75$

Как видно:  $\varphi_2 \neq \varphi'_2$

3. положим:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,625 + 0,75}{2} = 0,688$$

$$A_3 = \frac{400 \cdot 10^3}{0,688 \cdot 200 \cdot 10^2} = 29 \text{ см}^2$$

По таблице получаем №22, для которого  $A = 30,6 \text{ см}^2$ ,  
 $i_{\min} = 2,27 \text{ см}$ , тогда гибкость стержня:

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot 100}{2,27} = 88$$

По таблице при  $\lambda = 88$  получаем:  $\varphi'_3 = 0,69$

Следовательно  $\varphi_3 = \varphi'_3$

Окончательно, принимаем двутавр № 22.

### Задача № 11

(к выполнению расчетно-проектировочной работы  
 «Расчет статически неопределимых задач методом сил»)

Для статически неопределимой системы (балка, рама), необходимо:

1. определить степень статической неопределимости<sup>4</sup>
2. Выбрать основную систему;
3. Составить эквивалентную систему;
4. Построить на основной системе эпюру изгибающих моментов от заданных внешних сил (грузовую эпюру)  $M_F$ ;
5. Построить на основной системе единичные эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ ;
6. Вычислить коэффициенты канонических уравнений;
7. Раскрыть статическую неопределимость: Вычислить значения лишних неизвестных;
8. Построить окончательную эпюру изгибающего момента;
9. Произвести деформационную проверку правильности окончательной эпюры изгибающего момента.

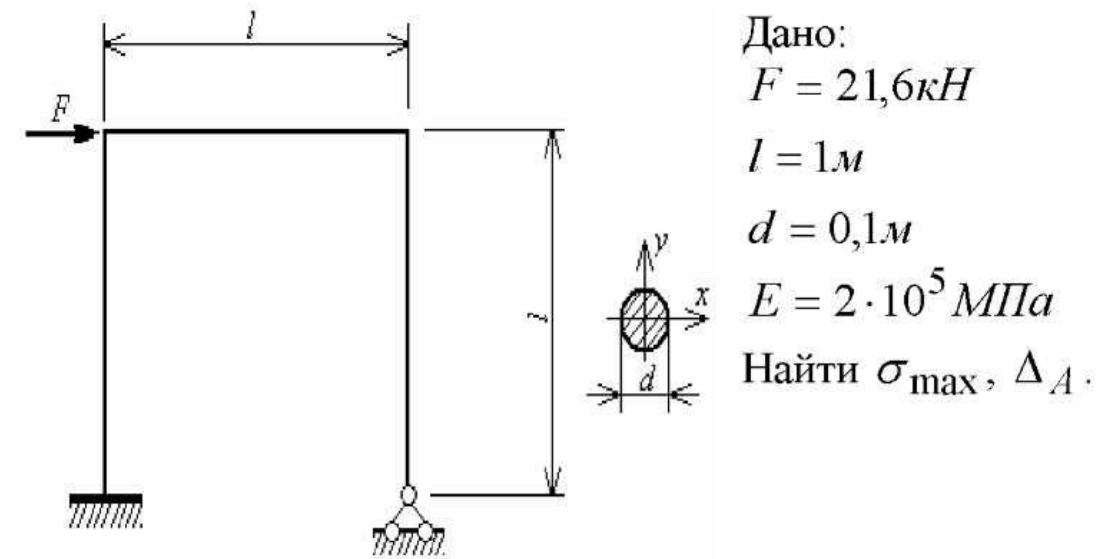


Рис.35

Решение:

1. степень статической неопределимости:  

$$K = 5 - 3 = 2$$
2. Выбор основной системы:

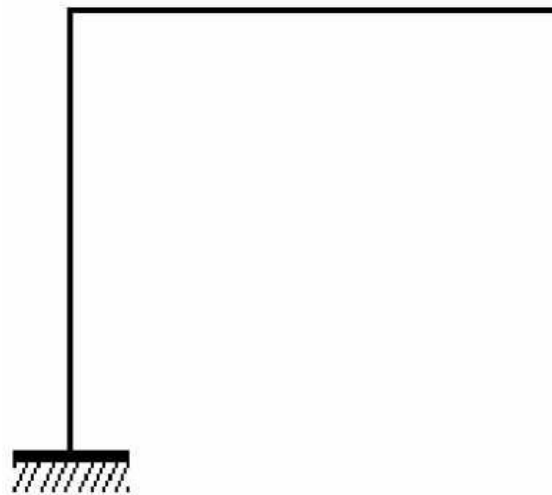
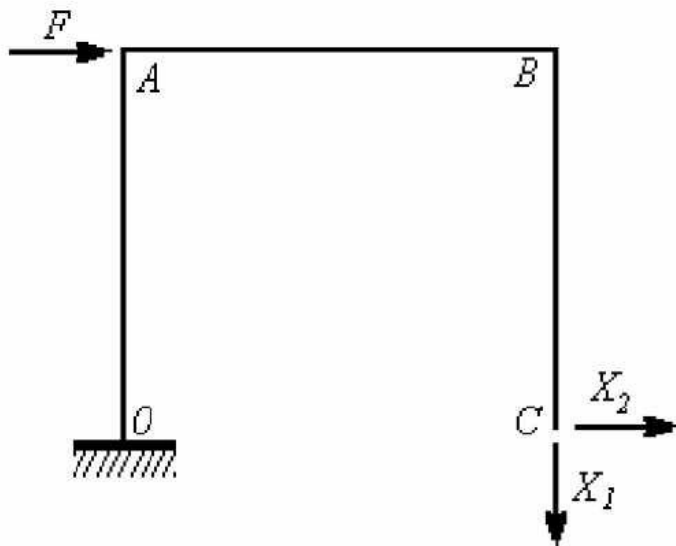


Рис. 36

3. Эквивалентная система:



$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} &= 0 \end{aligned}$$

Рис.37

4. Для определения коэффициентов канонических уравнений построим эпюры изгибающих моментов в основной системе от внешней нагрузки (эпюра  $M_F$ ) от единичных усилий  $\bar{X}_1 = 1$ ,  $\bar{X}_2 = 1$ .

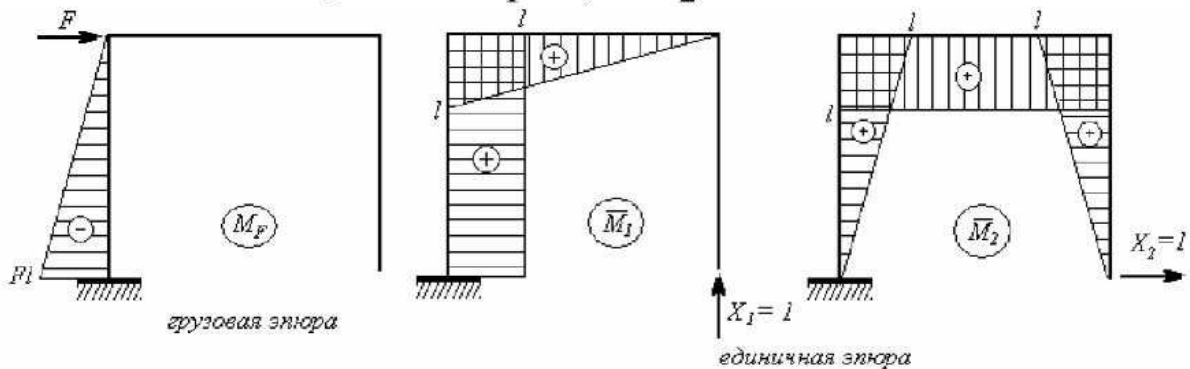


Рис. 38

5. Определяем коэффициенты  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\Delta_{1F}$ ,  $\Delta_{2F}$  канонических уравнений по правилу Верещагина.

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= -\frac{1}{EI} \cdot \frac{Fl^2}{2} \cdot l = -\frac{Fl^2}{2EI} \\ \Delta_{2F} &= -\frac{1}{EI} \cdot \frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{Fl^3}{6EI} \end{aligned}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l + l^2 \cdot l \right] = \frac{4 \cdot l^3}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l \right) \cdot 2 + l^2 \cdot l \right] = \frac{5l^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l^2}{2} \cdot l + \frac{l^2}{2} \cdot l \right] = \frac{l^3}{EI}$$

6. Подставляя значения коэффициентов в канонические уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{4l^3}{3EI} \cdot X_1 + \frac{l^3}{EI} \cdot X_2 - \frac{Fl^3}{2EI} &= 0 \\ \frac{l^3}{EI} \cdot X_1 + \frac{5l^3}{3EI} \cdot X_2 - \frac{Fl^3}{6EI} &= 0 \end{aligned}$$

или:

$$8 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 = 3F$$

$$6 \cdot X_1 + 10 \cdot X_2 = F$$

Решение системы уравнений дает:

$$X_1 = \frac{6}{11}F \quad X_2 = -\frac{5}{22}F$$

7. Окончательная эпюра изгибающих момента определится равенством:

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_F$$

Для построения эпюры изгибающих моментов  $M$  достаточно определить величины моментов в сечениях  $O, A, B, C$  путем алгебраического суммирования значений моментов на эпюрах  $M_F, \bar{M}_1, \bar{M}_2$ :

$$M_0 = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_F = l \cdot \frac{6}{11} F + 0 - F \cdot l = -\frac{5}{11} Fl$$

$$M_A = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_F = l \cdot \frac{6}{11} F + l \cdot \left(-\frac{5}{22} F\right) + 0 = \frac{7}{22} Fl$$

$$M_B = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_F = 0 + l \cdot \left(-\frac{5}{22} F\right) + 0 = -\frac{5}{22} Fl$$

$$M_C = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_F = 0$$

По полученным результатам строим окончательную эпюру изгибающих моментов:

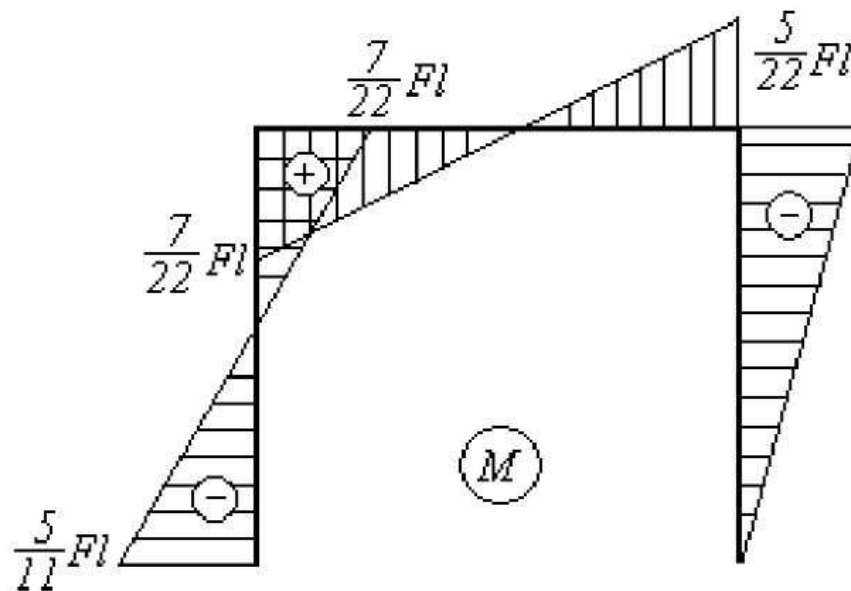


Рис.39

8. Деформационная проверка правильности построений окончательной эпюры изгибающих моментов  $M$  :

Выбор основной системы



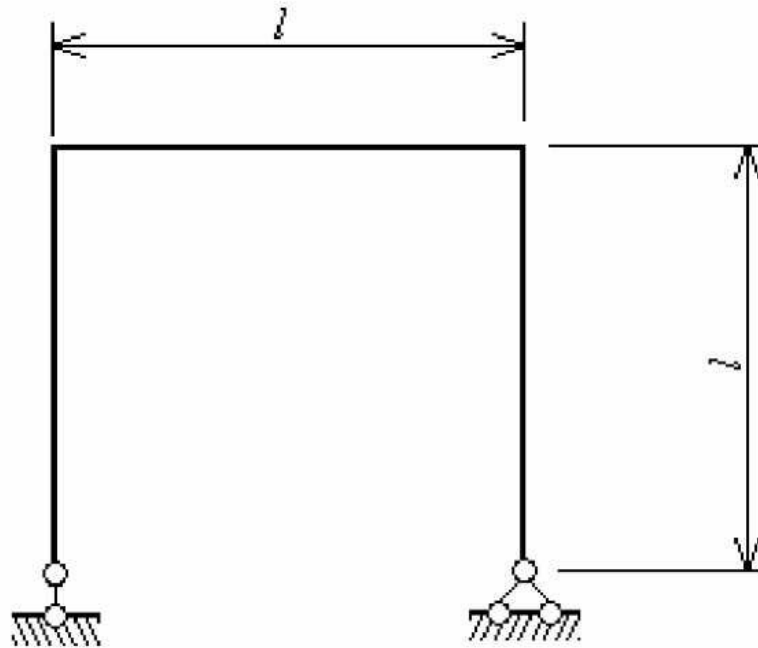


Рис. 40

Прикладываем единичный момент в точке  $O$  и строим соответствующую единичную эпюру  $\bar{M}_3$ :

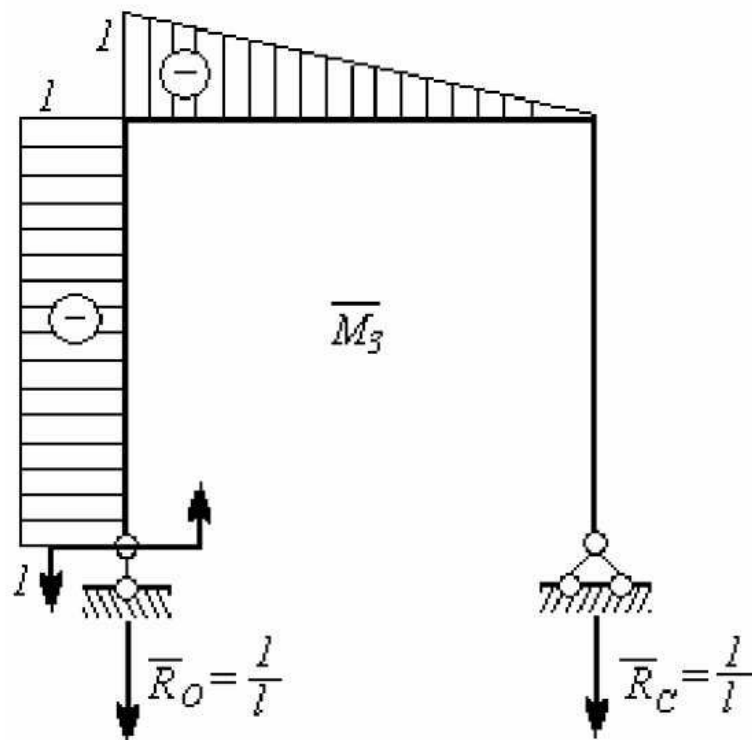


Рис. 41.

Поворот сечения на левой опоре равен нулю, т.е.  $\varphi_0 = 0$ .

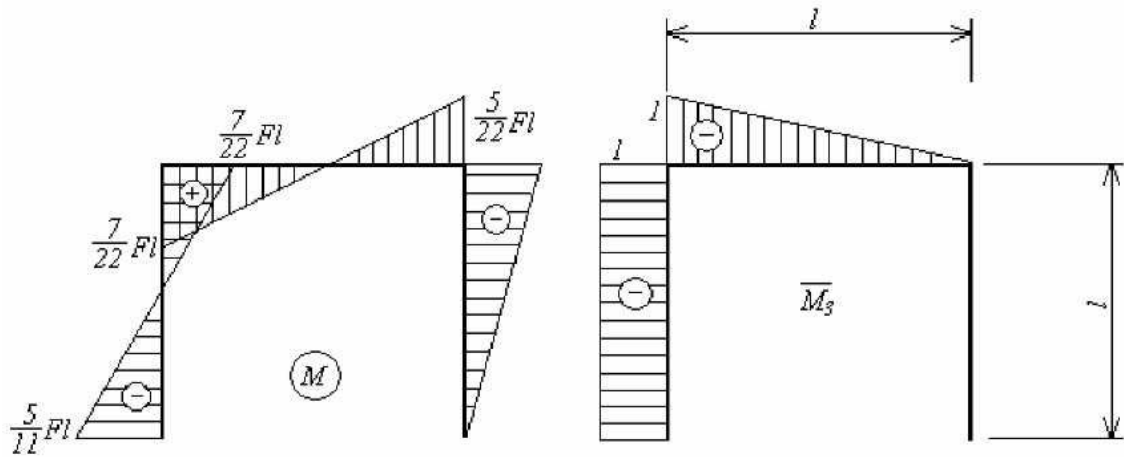


Рис. 41.

$$EI\varphi_0 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11} Fl \cdot l\right) \cdot 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{22} \cdot Fl \cdot l\right) \cdot 1 -$$

$$- \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{22} Fl \cdot l\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{22} Fl \cdot l\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

Следовательно, эпюра изгибающего момента построена правильно.

9. Вычисление максимального нормального напряжения

$$\delta_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}$$

Из эпюры изгибающего момента  $M_{\max} = \frac{5}{11} Fl$ .

Осей момент сопротивления поперечного круглого сечения:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

Тогда:

$$\sigma_{\max} = \frac{\frac{5}{11} Fl}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{5 \cdot Fl \cdot 32}{\pi d^3 \cdot 11} = \frac{5 \cdot 21,6 \cdot 1 \cdot 32}{\pi \cdot 0,1^3 \cdot 11} = 100 \text{ МПа}$$

Примечание: Нормальное напряжение складывается следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \sigma_M + \sigma_N$$

где:  $\sigma_N$  - нормальное напряжение от продольной силы.

Эпюра продольной силы имеет следующий вид:

$$N_3 = \frac{6}{11} F$$

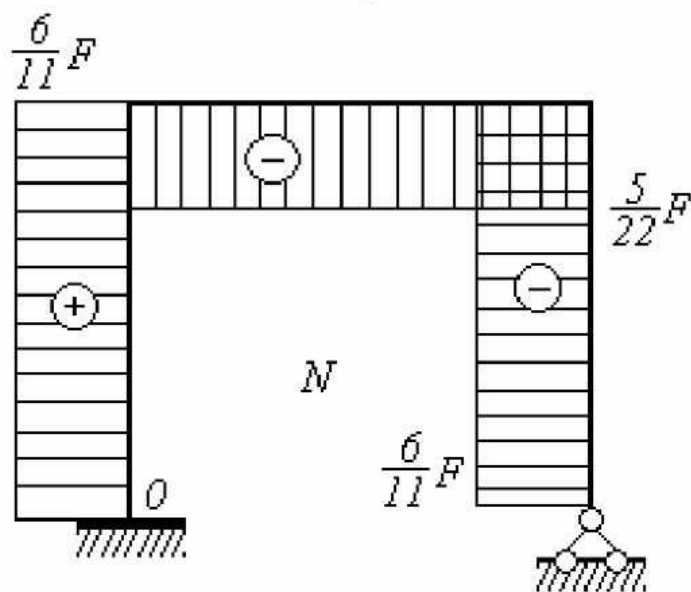


Рис. 43.

Напряжение от продольной силы:

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{\frac{6}{11} F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{6 \cdot F \cdot 4}{11 \cdot \pi d^2}$$

$$\sigma_N = 1,5 \text{ МПа}$$

Итак:

$$\sigma_{\max} = \sigma_M + \sigma_N = 100 \text{ МПа} + 1,5 \text{ МПа}$$

Как видно, доля нормального напряжения от продольной силы весьма мала, поэтому ею можно пренебречь и окончательно принять:

$$\sigma_{\max} = 100 \text{ МПа}$$

10. Определение перемещения точки А:

$$\Delta A = \Delta A^{\text{гор}} + \Delta A^{\text{верт}}$$

Основную систему загрузим единичной силой, приложенной горизонтально в точке А:

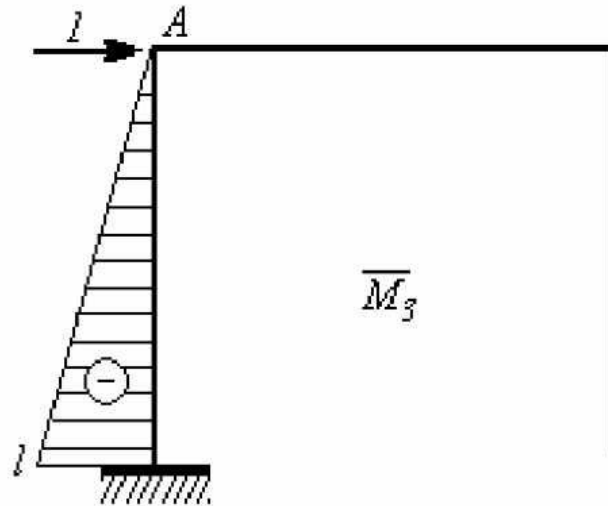


Рис.44.

Восстановим эпюры  $M$  и  $M_3$  рядом:

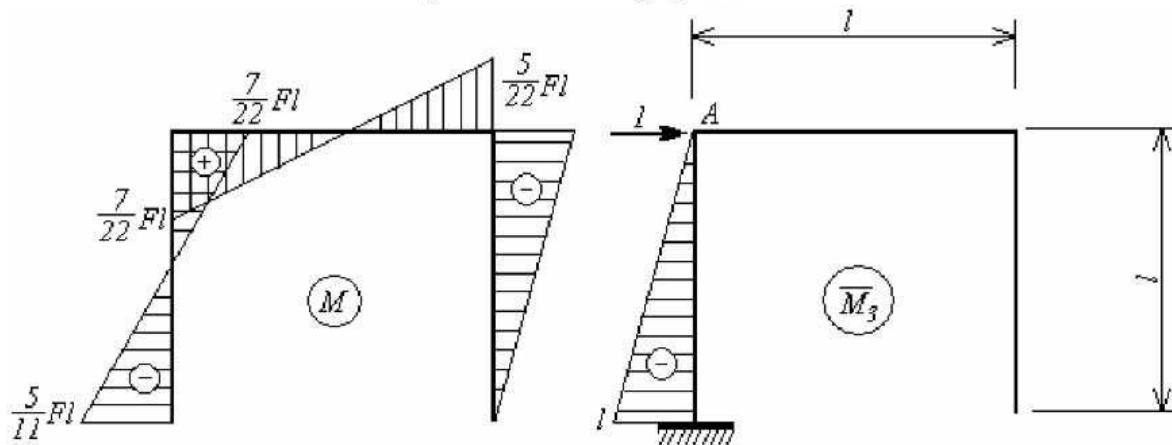


Рис.45.

Перемещение горизонтальное точки А определим, пользуясь правилом Верещагина. Видно, что перемножение эпюр будет только на стойке ОА.

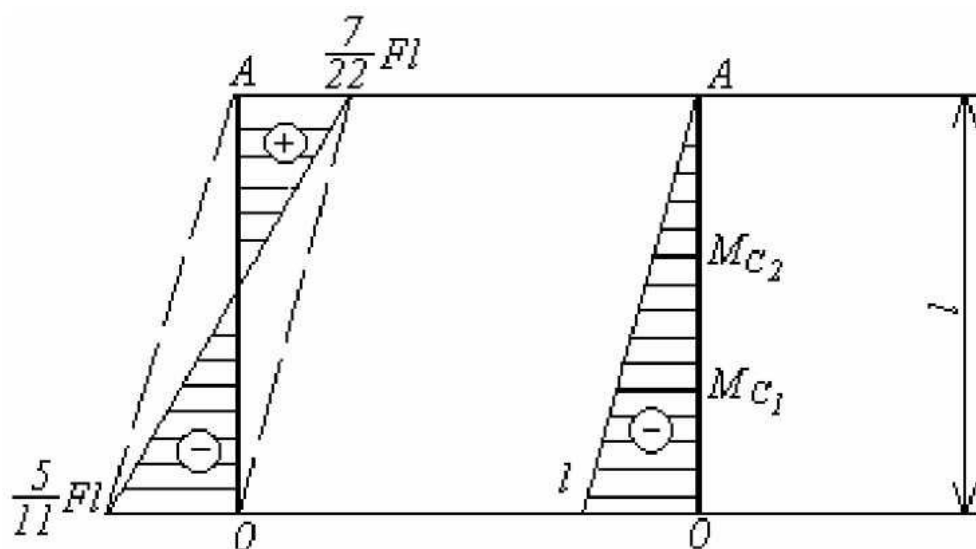


Рис. 46

Грузовую эпюру на стойке можно рассматривать как наложение двух эпюр:

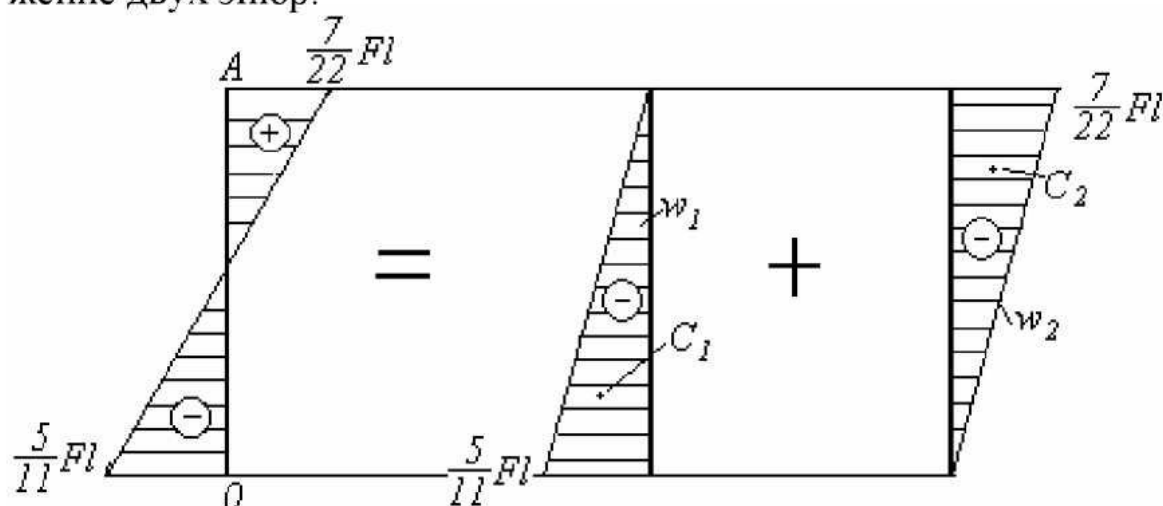


Рис. 47

Горизонтальное перемещение точки А:

$$\begin{aligned} \Delta A^{zop} &= \frac{1}{EI} \cdot [w_1 \cdot M_{C_1} - w_2 \cdot M_{C_2}] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{5Fl}{11} \cdot l \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot l \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{7Fl}{l} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot l \right) \right] \end{aligned}$$

При заданных значениях:

$$\Delta_A^{zop} = \frac{13Fl^3}{132 \cdot EI} \quad \Delta_A^{zop} = 2,16 \text{ мм.}$$

### Задача №12

(к выполнению расчетно-проектировочной работы  
«сложное сопротивление, внецентренное сжатие»)

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого показано на рис. 48, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $A$ .

Требуется:

1. Определить центр тяжести сечения;
2. Определить положение главных центральных осей, вычислить главные моменты инерции сечения и главные радиусы инерции сечения;
3. Определить положение нейтральной линии;
4. Из условий прочности стержня определить допускаемую нагрузку  $F_{\text{доп}}$ ;
5. Построить ядро сечения.

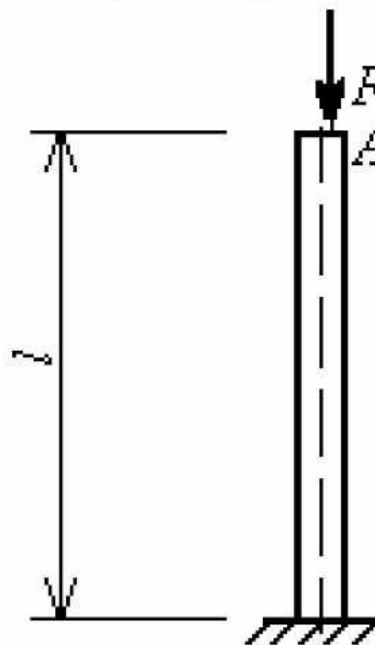


Рис. 48

1. Определим положение центра тяжести (ц.т.)  
 Центр тяжести находим на оси  $x$ , т.к. ось  $x$  ось симметрии. Поэтому координату на оси  $y$  искать не будем.  
 Проводим вспомогательные оси  $x$  и  $y$ .

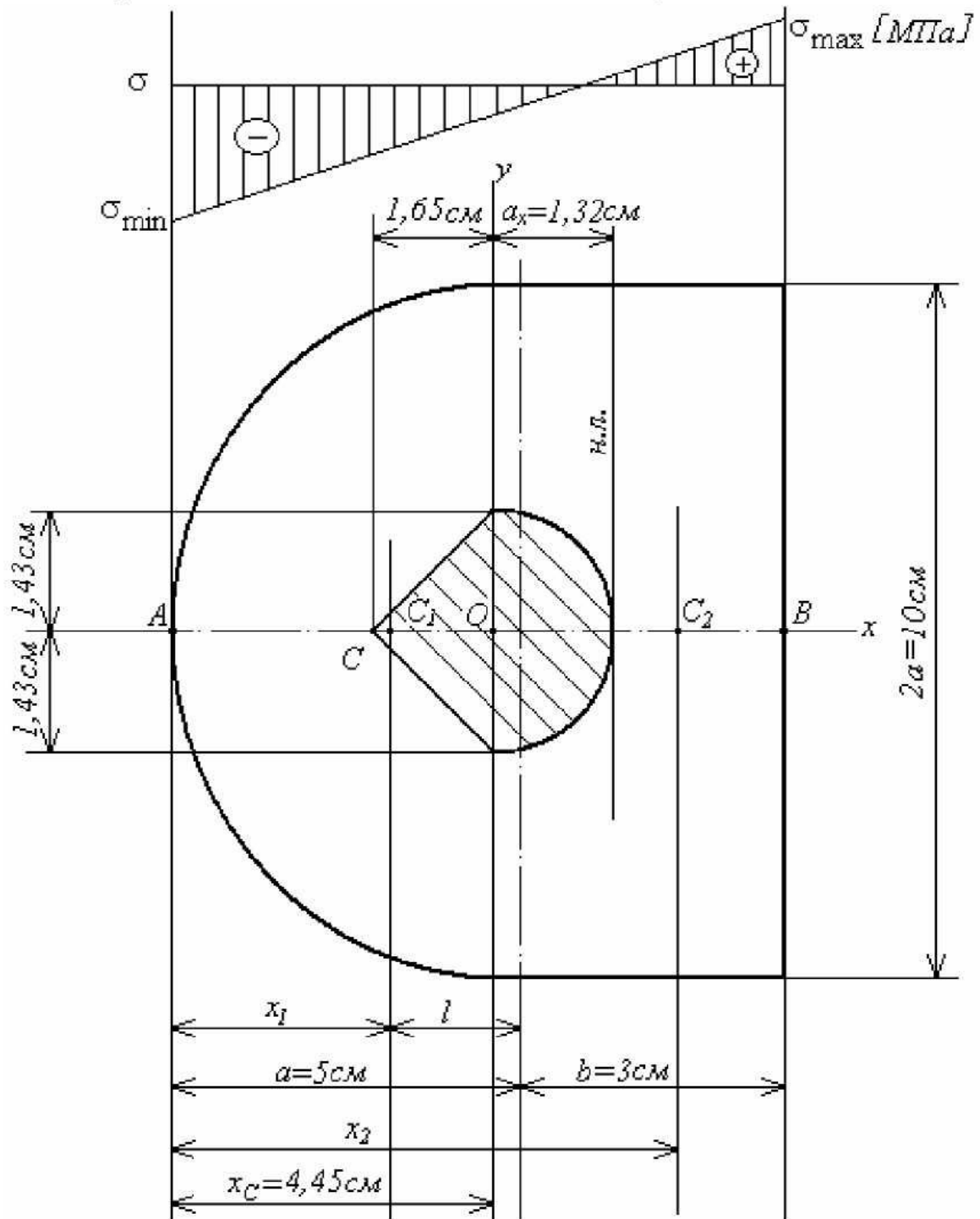


Рис.49

Находим  $x_C$ . Сначала обозначим  $x_1$  в полукруге и  $x_2$  в прямоугольнике.

$x_1$ ,  $x_2$  - центры тяжести полукруга и прямоугольника.

$$l = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 3,14} = 2,12 \text{ см};$$

$$x_1 = 5 - 2,12 = 2,88 \text{ см} \quad x_2 = 5 + 1,5 = 6,5 \text{ см};$$

$$A_1 = \frac{\pi \cdot R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 5^2}{2} = 39,27 \text{ см}^2 \quad A_2 = 3 \cdot 10 = 30 \text{ см}^2;$$

$$x_C = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{2,88 \cdot 39,27 + 6,5 \cdot 30}{39,27 + 30} = 4,45 \text{ см};$$

2. Определим положение главных центральных осей

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = \frac{\pi \cdot D^4}{64 \cdot 2} + \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{3,14 \cdot 10^4}{128} + \frac{3 \cdot 10^3}{12} = 495,4 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_y &= I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = \left[ \frac{\pi \cdot D^4}{64 \cdot 2} + (5 - x_C)^2 \cdot A_1 \right] + \\ &+ \left[ \frac{h \cdot b^3}{12} + (x_2 - x_C)^2 \cdot A_2 \right] = \\ &= \left[ \frac{3,14 \cdot 10^4}{128} + (5 - 4,45)^2 \cdot 39,27 \right] + \\ &+ \left[ \frac{10 \cdot 3^3}{12} + (6,5 - 4,45)^2 \cdot 30 \right] = 405,9 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

Определяем главные радиусы инерции сечения:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{495,4}{69,27} = 7,15 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{405,9}{69,27} = 5,86 \text{ см}^2.$$



3. Определяем положение нейтральной линии

$$x_A = -x_C = -4,45 \text{ см};$$

$$y_A = 0$$

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_A} = -\frac{5,86}{(-4,45)} = 1,32 \text{ см}$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_A} = -\frac{7,15}{0}; \quad a_y = \pm \infty.$$

4. Из условия прочности стержня определяем допускаемую нагрузку  $F_{\text{доп}}$ :

$$[\sigma_p] = 28 \text{ МПа}, \quad [\sigma_C] = 80 \text{ МПа}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} = \sigma_A &= -\frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{x_A \cdot x_A}{i_y^2} \right] = \\ &= -\frac{F}{69,27 \cdot 10^{-4}} \left[ 1 + \frac{(-4,45) \cdot (-4,45)}{5,86} \right] = \\ &= -0,0632 \cdot 10^4 \cdot F \end{aligned}$$

$$\sigma_{\min} \leq [\sigma_C] \quad 0,0632 \cdot 10^4 \cdot F \leq 80 \cdot 10^6$$

$$F_{\text{доп}} \leq \frac{80 \cdot 10^6}{0,0632 \cdot 10^4} = 126,6 \text{ кН}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= -\frac{F}{A} \cdot \left[ 1 + \frac{x_A \cdot x_B}{i_y^2} \right] = -\frac{F}{69,27 \cdot 10^{-4}} \left[ 1 + \frac{(-4,45) \cdot 3,55}{5,86} \right] = \\ &= 0,0245 \cdot 10^4 \cdot F \end{aligned}$$

$$x_B = 3 + 95 - 4,45 = 3,55 \text{ см}$$

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_p] \quad 0,0245 \cdot 10^4 \cdot F \leq 28 \cdot 10^6$$

$$F_{\text{доп}} \leq \frac{28 \cdot 10^6}{0,0245 \cdot 10^4} = 114,29 \text{ кН}$$

Принимаем допускаемую нагрузку  $F_{\text{доп}} = 114,29 \text{ кН}$ .

5. По найденным значениям  $x_p$ ,  $y_p$  строим ядро сечения.

$$x_p = -\frac{i_y^2}{3,55} = -\frac{5,86}{3,55} = -1,65 \text{ см},$$

$$y_p = -\frac{i_x^2}{(-5)} = -\frac{7,15}{(-5)} = 1,43 \text{ см}.$$

## Список литературы

1. А.В. Александров, В.Д. Попов, Б.П. Державец Сопротивление материалов. Высшая школа. – М.; 2003. – 560с.
2. В.И. Феодосьев Сопротивление материалов. Наука, – М.; 1970 – 544 с.