

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
Методические указания к выполнению контрольной работы №4

В контрольной работе №4 решаются задачи, относящиеся к трем разделам курса «Сопротивление материалов».

Задача № 8 относится к разделу «Продольный изгиб стержней», задача № 9 – к разделу «Динамическое действие сил» и задача № 10 – к разделу «Переменные напряжения».

В каждом разделе установлена своя нумерация формул. Нумерация рисунков общая для всего текста.

1. Продольный изгиб стержней

Рассмотрим стержень длиной l (рис.1), сжимаемый силой P . Заданы размеры поперечного сечения, известен материал, из которого изготовлен стержень.

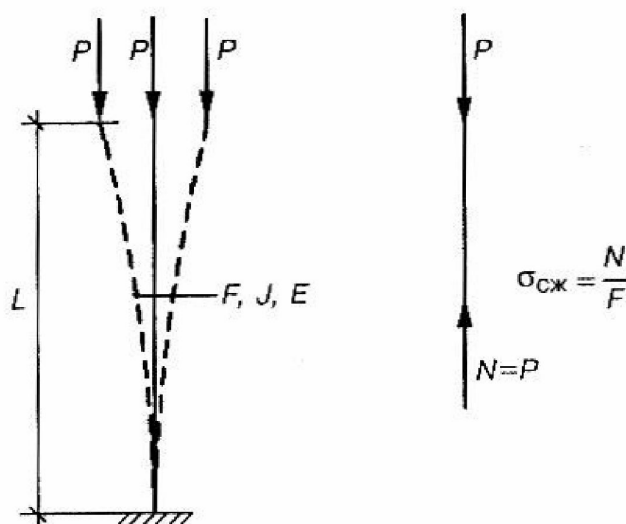


рис 1.

Теоретически, при центральном сжатии в сечении стержня должны появиться нормальные сжимающие напряжения, равномерно распределенные по площади сечения. Это будет иметь место в идеальном случае: ось стержня идеально прямая, сила приложена точно в центре тяжести сечения и направ-

лена по оси, отсутствуют воздействия, направленные поперек оси стержня.

На практике идеального нагружения достичь невозможно – всегда будут иметь место *малые возмущения*, изгибающие стержень с самого начала. Это могут быть малые отклонения оси от идеальной прямой, воздействие температуры, поперечное воздействие ветра или их сочетания, предусмотреть которые заранее невозможно.

Проектировщик должен быть убежден, что состояние сжатия от малых возмущений резко не изменится – оно будет *устойчиво* к этим возмущениям.

Оказывается, что если сжимающая сила меньше определенного значения, называемого *критическим*, то малые возмущения приводят к малым отклонениям стержня от прямой, и, если возмущения исчезают, то стержень возвращается в исходное сжатое состояние, если же возмущения не исчезают, то вызванные ими отклонения незначительны. В этом случае обеспечена *устойчивость центрального сжатия*. Но, если сжимающая сила достигнет критического значения, то действие малых возмущений становится существенно заметным – стержень получает большие отклонения оси от проектной прямой, т. е. становится сжато-изогнутым и не возвращается в исходное состояние после исчезновения возмущения. Это явление называют *потерей устойчивости центрального сжатия* или *продольным изгибом*.

Для длинных стержней такое состояние наступает при сжимающих напряжениях меньших предела пропорциональности – в упругой стадии. Оно опасно для самого стержня, так как он не был рассчитан на действие дополнительного изгибающего момента, но более всего для *конструкции*, в состав которой он входит – потеря устойчивости одного стержня может быть причиной разрушения всей конструкции, так как в этот момент стержень внезапно выключается из состава конструкции – исчезает необходимая связь.

Сказанное выше определяет важность знания величины критической силы P_{KR} .

Рассмотрим стержень, шарнирно опертый по концам под действием

сжимающей силы (рис.2) в момент потери устойчивости. Ось стержня искривляется – все точки перемещаются на величину $v(z)$.

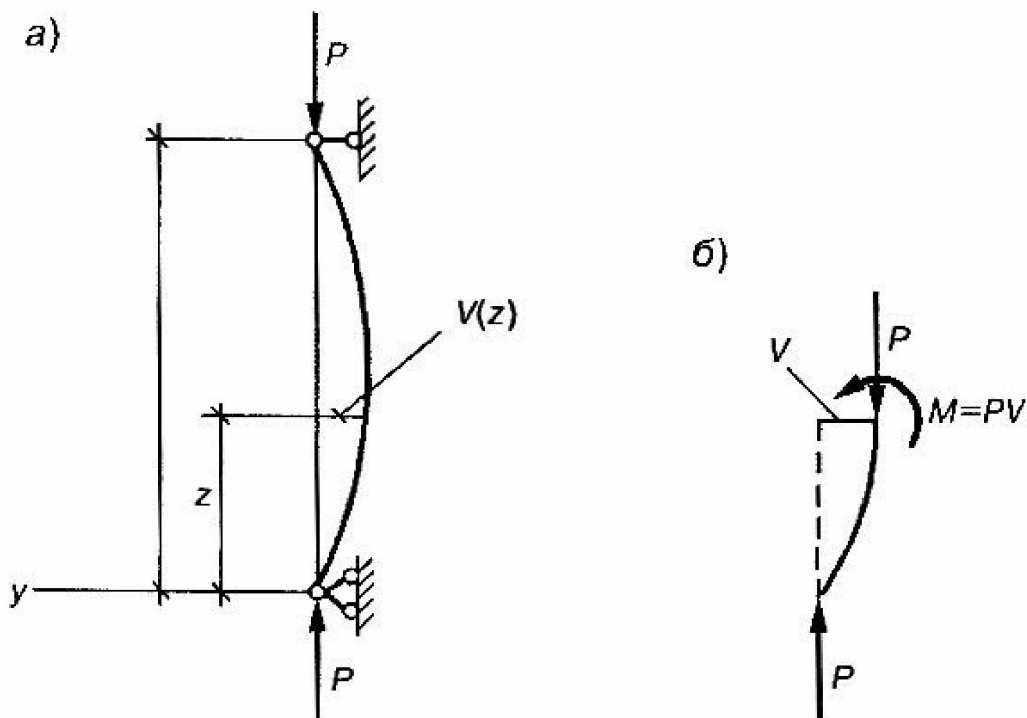


рис. 2

Используем дифференциальное уравнение изгиба балки (см.(33) [5]).

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (1)$$

Учтем, что в осях на рис.2 $v(z)$ - отрицательные значения, поэтому в (1) подставим $M_x(z) = -Pv$.

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{Pv}{EJ_x}.$$

Перенесем все члены влево и обозначим

$$K^2 = \frac{P}{EJ_x}. \quad (2)$$

Тогда получим дифференциальное уравнение потери устойчивости центрально сжатого шарнирно опертого стержня

$$v'' + K^2 v = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$v(z) = A \cos Kz + B \sin Kz, \quad (4)$$

где A и B – постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий:

$$1) \ z = 0; \ v = 0; \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ v(z) = B \sin Kz \end{cases} \quad (5)$$

$$2) \ z = l; \ v = 0; \quad 0 = B \sin Kl. \quad (6)$$

Так как $B \neq 0$ (не будет изгиба), то

$$\sin Kl = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) является трансцендентным уравнением (неизвестное входит в аргумент тригонометрической функции). Это уравнение имеет множество корней $Kl = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$.

Рассмотрим первое нетривиальное решение с минимальным $Kl = \pi$. Тогда из (2) следует

$$\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P_{кр}}{EJ_x}; \quad (9)$$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}.$$

Можно сказать, что рассматриваемый стержень теряет устойчивость по одной полуволне синусоиды, а B – амплитуда этого отклонения. Величина B зависит от конкретной причины (возмущения), вызывающей отклонения сжатого стержня от первоначально прямого положения, а так как возмущения не определенные, то и B остается неопределенной.

Для вычисления критических сил для стержней с другими закреплениями нужно рассматривать дифференциальное уравнение четвертого порядка. Но в курсе Сопротивления материалов поступают следующим образом: для каждого вида закреплений сравнивают длину между точками перегиба (с

$M=0$) упругой линии при потере устойчивости (свободную длину $l_0 = \mu l$) с полуволной синусоиды l для шарнирно опертого стержня (рис.3) и вводят в (8) соответствующую свободную длину

$$l_0 = \mu l. \quad (10)$$

Тогда,

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}. \quad (11)$$

Формула Эйлера была выведена в предположении упругих деформаций, когда (рис.4)

$$\sigma_{кр} < \sigma_{ПЦ}. \quad (12)$$

Для закрепления одинаковых в двух главных плоскостях нужно брать минимальный момент инерции J_{\min} .

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2}.$$

Здесь введено обозначение минимального радиуса инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}.$$

Обычно вводится понятие максимальной гибкости стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \quad (13)$$

Гибкость величины геометрическая. Теперь можно записать

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2}. \quad (14)$$

Таким образом, формулу Эйлера для величины критической силы можно применить, если

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} < \sigma_{ПЦ}.$$

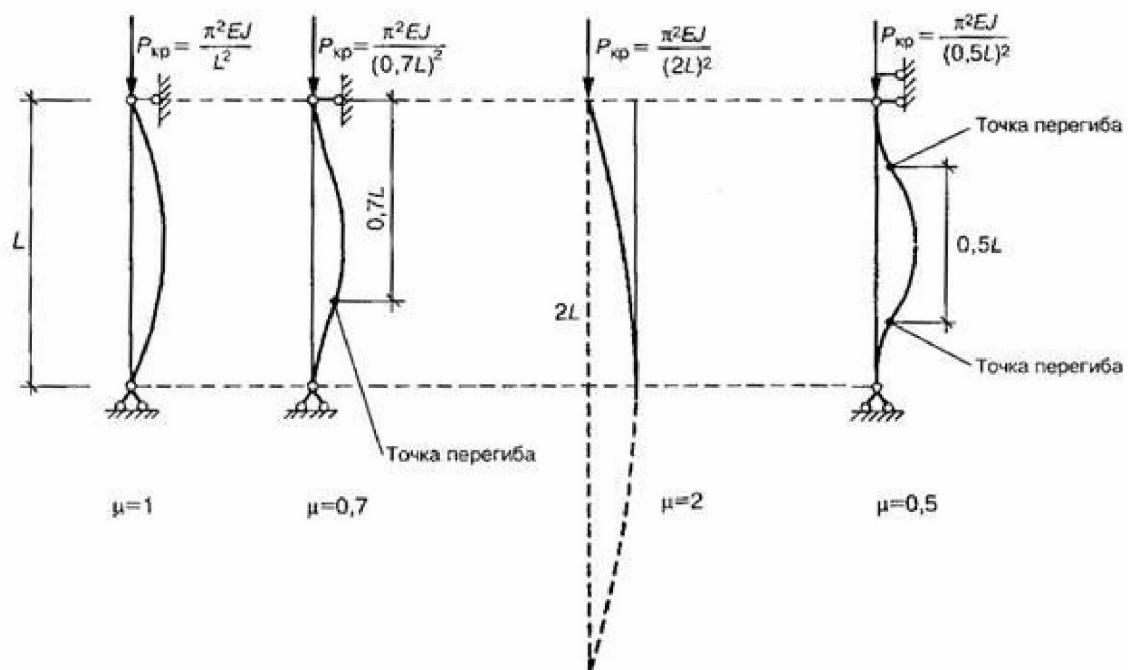


рис. 3

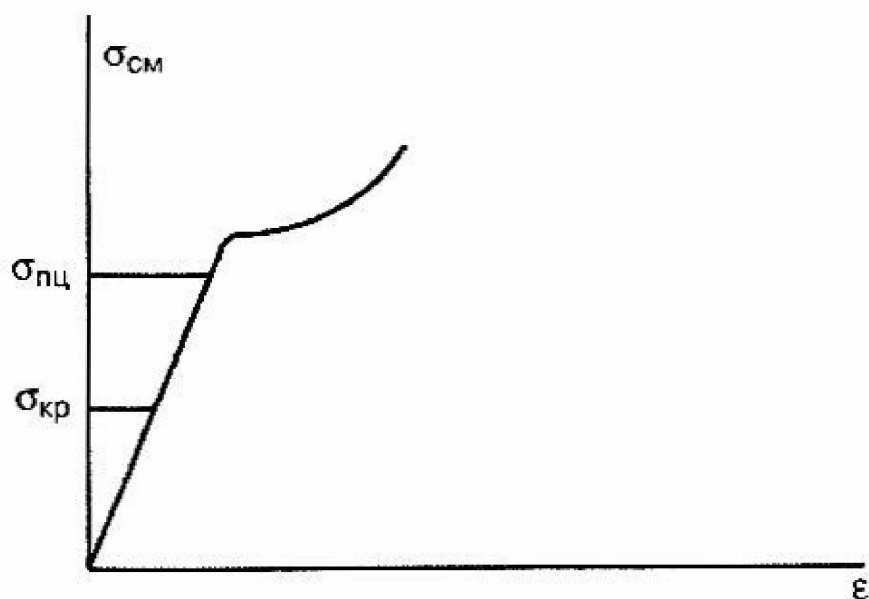


рис. 4

Отсюда можно найти условия для λ_{\max}

$$\lambda_{\max} > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (15)$$

Введем обозначение для предельной гибкости

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{ПЦ}}}. \quad (16)$$

Эта величина зависит от физических свойств материала стержня. Условие (15) перепишем в виде

$$\lambda_{\max} > \lambda_{пред}. \quad (17)$$

Окончательно, если наибольшая гибкость больше предельной для данного материала, то стержень будет терять устойчивость при напряжениях меньше предела пропорциональности $\sigma_{ПЦ}$, а если условие (17) не удовлетворяется и $\lambda_{\max} < \lambda_{пред}$, то стержень будет терять устойчивость при упруго-пластических деформациях, для которых дифференциальное уравнение (1) будет не справедливо.

В этом случае для критической силы применяется эмпирическая формула Ясинского-Тетмайера

$$P_{кр} = F(a - b\lambda_{\max}), \quad (18)$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала и приводимые в справочниках.

При этом
$$\sigma_{кр} = a - b\lambda_{\max}. \quad (19)$$

Таким образом, критические напряжения в любой стадии деформации зависят от гибкости

$$\sigma_{кр} = \sigma_{кр}(\lambda_{\max}): \quad (20)$$

в упругой – по формуле (14) - гипербола Эйлера, в упруго-пластической – по формуле (19) – прямая Ясинского.

При некотором значении гибкости, которое можно обозначить через λ_0 , величина критических напряжений становится равной предельному напряжению сжатия (либо пределу текучести, либо пределу прочности). Это значение гибкости будет границей применимости формулы Ясинского. Таким образом, критические напряжения вычисляются по формуле Ясинского тогда, когда гибкость стержня меньше $\lambda_{пред}$, но не ниже λ_0 .

Если рассчитываемый стержень оказался малой гибкости $\lambda < \lambda_0$, то опасность потери устойчивости меньше опасности разрушения, и такой стержень надо рассчитывать на прочность, а не на устойчивость.

Примерный вид графической зависимости критического напряжения от гибкости изображен на рис. 5.

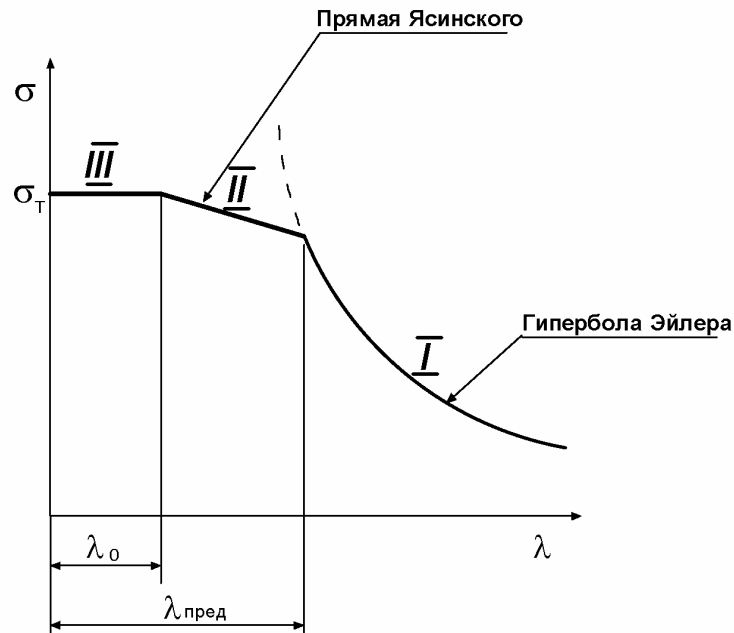


Рис. 5

Для стержней большой гибкости $\lambda \geq \lambda_{пред}$ расчет ведется по формуле Эйлера, поэтому зависимость $\sigma_{кр}$ от λ - гиперболическая (14). На графике это участок I, называемый гиперболой Эйлера.

Стержни средней гибкости $\lambda_0 \geq \lambda > \lambda_{пред}$ рассчитываются по формуле Ясинского. Для них зависимость $\sigma_{кр}$ от λ - линейная (19). Соответствующий участок II называется прямой Ясинского.

Для стержней малой гибкости нет надобности в расчете на устойчивость. Для них критическое напряжение считается постоянным и равным для пластичных материалов пределу текучести при сжатии, а для хрупких – пределу прочности при сжатии. На графике таким стержням соответствует участок III.

Вычислив гибкость стержня, и отложив ее на диаграмме, построенной для данного материала, определим, на какой участок диаграммы приходится

λ , и в зависимости от этого производим расчет по нужной формуле.

В ряде случаев для подбора расчетных формул и самого расчета на устойчивость бывает весьма эффективным использовать справочные таблицы. Одна из таких таблиц приведена ниже.

Таблица 1

Материал	α , МПа	b , МПа	λ_0	$\lambda_{пред}$
Сталь Ст.2, 15	259	0,685	62	105
Сталь Ст.3	304	1,12	61	100
Сталь Ст.5	343	1,13	57	92
Сталь 45	589	3,82	60	85
Дерево	28,8	0,19	–	75
Д 16 Т	400	3,33	30	60

Вычислив значение $\sigma_{кр}$ и умножив его на рассчитанную нами ранее площадь поперечного сечения стойки, получим величину критической силы $P_{кр}$:

$$P_{кр} = \sigma_{кр} F.$$

После этого можно, наконец, определить коэффициент запаса устойчивости

$$[n_y] = P_{кр} / P.$$

Инженерный расчет сжатых стержней на устойчивость формально можно поставить в соответствие расчету на простое сжатие, принимая в качестве допускаемого некоторую часть от критического напряжения:

$$\sigma = P / F \leq [\sigma_y],$$

где $[\sigma_y] = \sigma_{кр} / [n_y]$ - допускаемое напряжение на сжатие с учетом опасности продольного изгиба, или, иначе, *допускаемое напряжение на сжатие при расчете на устойчивость*.

Обычно $[\sigma_y]$ выражают через основное допускаемое напряжение на сжатие для данного материала:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c].$$

Здесь $\varphi \leq 1,0$ - коэффициент понижения основного допускаемого напряжения на сжатие или коэффициент продольного изгиба; $[\sigma_c]$ - основ-

ное допускаемое напряжение на сжатие, то есть установленное без учета продольного изгиба:

$$[\sigma_c] = \sigma_{пред} / [n].$$

Обычно под $\sigma_{пред}$ для пластических материалов понимают σ_T (предел текучести материала), а для хрупких – временное сопротивление $\sigma_{вр}$.

Связь между коэффициентом φ , критическим напряжением $\sigma_{кр}$, предельным напряжением $\sigma_{пред}$ и коэффициентами запаса прочности $[n]$ и устойчивости $[n_y]$ можно установить следующим образом:

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma_c] = \varphi \sigma_{пред} / [n] = \sigma_{кр} / [n_y],$$

откуда, учитывая (20)

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}(\lambda_{max})}{\sigma_{пред}} \frac{[n]}{[n_y]} = \varphi(\lambda_{max}) \quad (21)$$

Величина коэффициента φ зависит от материала стержня и его гибкости. Некоторые значения φ по СНиП приведены в *табл.9* заданий на контрольную работу и рекомендованы к использованию при решении данной задачи.

При выполнении расчетов на устойчивость по коэффициентам φ исходная зависимость имеет следующий вид:

$$\sigma_P = \frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma_c]. \quad (22)$$

Из этого условия можно сформулировать три рода задач на устойчивость центрального сжатия (продольный изгиб).

Задача 1 рода. Проверка устойчивости

Дан стержень, известны условия закрепления, величина сжимающей нагрузки.

Алгоритм решения:

1. Определяется минимальный момент инерции относительно главных осей J_{min} .

2. Вычисляется минимальный радиус инерции i_{\min} .
3. Вычисляется максимальная гибкость $\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}}$.
4. По таблице определяем $\varphi = \varphi(\lambda_{\max})$.
5. Проверяем условие (22), если оно удовлетворяется, то устойчивость обеспечена, если нет – не обеспечена с коэффициентом запаса, заложенным в табличном значении φ (см. (21)).

Задача 2 рода. *Определение максимальной сжимающей нагрузки*

$$[P] \leq \varphi F[\sigma] \quad (23)$$

Алгоритм тот же, но в п.5 используется формула (23).

Задача 3 рода. *Конструирование стержня – подбор размеров поперечного сечения.* В этом случае заранее неизвестны величины площади, моментов инерции и, следовательно, коэффициента φ .

Задача нелинейная. Ее решают методом последовательных приближений.

Алгоритм решения:

1. Задаются размерами поперечного сечения.
2. Выполняются действия с п.1 по п.5 алгоритма задачи первого рода.

Необходимо отметить, что наиболее рациональным с инженерно-экономической точки зрения будет такое сечение, для которого величина недогруза

$$\delta = [\sigma] - \sigma_P / [\sigma]$$

не будет превышать 0,05 (или, что то же самое, 5 %). Таким образом, в случае, если в n -ом приближении неравенство (22) не выполняется, следует увеличить размеры поперечного сечения, в случае же, если $\delta > 0,05$, их следует уменьшить. В обоих случаях необходимо снова вернуться к определению λ_{\max} и новому φ , для которого в очередной раз проверить справедливость ус-

ловия устойчивости стойки (22).

Пример задачи № 8. Пусть стальная стойка высотой $l = 0,4$ м сжимается силой $P = 8,50$ кН. Требуется подобрать коробчатое поперечное сечение с характерным размером a (рис. 6.2).

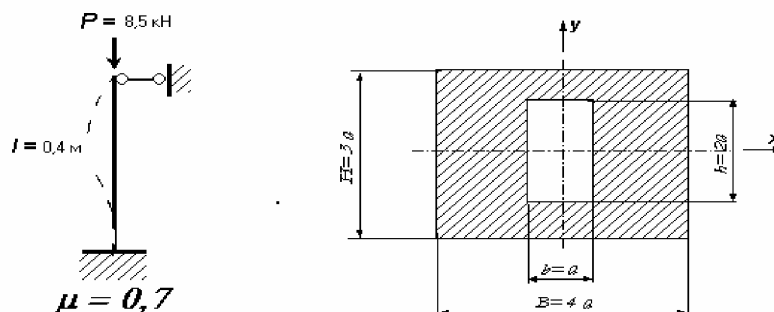


Рис. 6

1. Определим моменты инерции сечения¹ относительно координатных осей x и y . Очевидно, что

$$I_x = BH^3/12 - bh^3/12, \quad I_y = HB^3/12 - hb^3/12.$$

Подставляя в эти выражения значения B , H , b и h , получим следующие формулы:

$$I_x = 100 a^4/12, \quad I_y = 190 a^4/12.$$

Легко видеть, что $I_x < I_y$, следовательно, сечение потерявшего устойчивость стержня будут поворачиваться вокруг оси X , при этом определяющим при расчете гибкости стойки окажется

$$i_{x(\min)} = \sqrt{I_x/F}, \quad \text{где при } F = BH - bh = 10a^2$$

окончательно получим

$$i_{x(\min)} = 0,9129 a.$$

¹ В случае затруднений в определении осевых моментов инерции сечений следует обратиться к разделу *Геометрические характеристики сечений* одного из рекомендуемых учебников по сопротивлению материалов.

2. Определим гибкость первого приближения

$$\lambda_{\max} = \mu l / i_{\min} = 3,0671 / a.$$

3. При первоначальном назначении размера a следует руководствоваться опытом или интуицией. Из соображений здравого смысла зададимся величиной $a = 0,005$ м. Тогда значение гибкости первого приближения будет равно $\lambda = 61,343$. Воспользуемся *табл. 9* заданий на контрольные работы и выберем в качестве материала стойки Сталь 5. Будем иметь следующие исходные значения для проведения линейной интерполяции:

$$\text{при } \lambda = 60 \quad \varphi = 0,80$$

$$\text{при } \lambda = 70 \quad \varphi = 0,74.$$

С учетом этих данных для $\lambda = 61,343$ получим:

$$\varphi = 0,80 - \frac{0,80 - 0,74}{10} \cdot 1,343 = 0,792.$$

4. Определенное нами значение φ подставим в выражение (22) и выясним, удовлетворяется ли неравенство. Имеем:

$$\sigma = \frac{8,50}{10 \cdot 0,005^2 \cdot 0,792} = 0,0429 \cdot 10^6 \text{ кН/м}^2 = 42,9 \text{ МПа} < 160$$

что подтверждает наличие устойчивого деформирования и отсутствие потери устойчивости при заданных размерах. Однако существенная недогрузка стойки в данном случае является очевидной, т.к.

$$\delta = \frac{[\sigma] - \sigma_P}{[\sigma]} = \frac{160 - 42,9}{160} = 0,732$$

и составляет 73,2 %, что, конечно же, является экономически неоправданным и с точки зрения проектировщика недопустимым. В связи с этим сделаем второе приближение, уменьшив характерный размер a .

5. Зададим $a = 0,0035$ м. Тогда значение гибкости второго приближения будет равно $\lambda = 87,631$. Вновь воспользуемся *табл. 9* заданий на контрольные работы и выберем исходные значения для проведения линейной интерполяции:

$$\text{при } \lambda = 80 \quad \varphi = 0,67$$

$$\text{при } \lambda = 90 \quad \varphi = 0,59.$$

С учетом этих данных для $\lambda = 87,631$ получим:

$$\varphi = 0,67 - \frac{0,67 - 0,59}{10} \cdot 7,631 = 0,609.$$

6. Определенное нами значение φ второго приближения подставим в выражение (22) и выясним, удовлетворяется ли теперь неравенство. Имеем:

$$\sigma = \frac{8,50}{10 \cdot 0,0035^2 \cdot 0,609} = 0,1139 \cdot 10^6 \text{ кН/м}^2 = 113,9 \text{ МПа} < 160$$

что подтверждает наличие устойчивого деформирования и отсутствие потери устойчивости и при уточненных размерах. Однако недонапряжение стойки в данном случае также является чрезмерным, поскольку

$$\delta = \frac{[\sigma] - \sigma_P}{[\sigma]} = \frac{160 - 113,9}{160} = 0,288$$

и составляет 28,8 %, что также является недопустимым. Поэтому необходимо сделать еще одно приближение, уменьшив (теперь уже незначительно) характерный размер a .

7. Зададим $a = 0,0032$ м. При этом значение гибкости третьего приближения будет равно $\lambda = 95,847$. Вновь воспользуемся *табл. 9* и выберем исходные значения для проведения линейной интерполяции:

$$\text{при } \lambda = 90 \quad \varphi = 0,59$$

$$\text{при } \lambda = 100 \quad \varphi = 0,50.$$

С учетом этих данных для $\lambda = 95,847$ получим:

$$\varphi = 0,59 - \frac{0,59 - 0,50}{10} \cdot 5,847 = 0,537.$$

8. Определенное нами значение φ третьего приближения подставим в выражение (22) и выясним, удовлетворяется ли неравенство. Имеем:

$$\sigma = \frac{8,50}{10 \cdot 0,0032^2 \cdot 0,537} = 0,1566 \cdot 10^6 \text{ кН/м}^2 = 156,6 \text{ МПа} < 160$$

что подтверждает наличие устойчивого деформирования и отсутствие потери устойчивости и в данном случае. Проверяя возможное недонапряжение стой-

ки, имеем

$$\delta = \frac{[\sigma] - \sigma_P}{[\sigma]} = \frac{160 - 156,6}{160} = 0,021$$

что составляет 2,1 % и является допустимым. Поэтому выбранный нами ранее размер $a = 0,0032$ будем считать окончательным. С учетом этого размеры сечения стойки определяются следующим образом:

$$B = 12,8 \text{ мм}, \quad H = 9,6 \text{ мм}, \quad b = 3,2 \text{ мм} \quad \text{и} \quad h = 6,4 \text{ мм}.$$

9. Определим теперь, каков же реальный коэффициент запаса устойчивости для подобранного нами поперечного сечения. Напомним, что критическое напряжение $\sigma_{кр}$ при продольном сжатии стержней в общем случае не может быть определено по какой-либо одной наперед заданной формуле, поскольку его величина (как и сами формулы) является функцией гибкости стержня.

По табл. 1 для материала Сталь 5 $\lambda_{пред} = 92$. Так как гибкость стержня $\lambda = 95,847 > \lambda_{пред}$, то для вычисления $\sigma_{кр}$ следует использовать формулу Эйлера. Имеем:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{95,847^2} = 214,651 \text{ МПа}.$$

Площадь подобранного ранее сечения составляет $F = 10a^2$, а именно

$$F = 10 \cdot 0,032 = 102,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Очевидно, что критическая нагрузка в рассматриваемом примере будет равна

$$P_{кр} = 217 \cdot 10^3 \cdot 102,4 \cdot 10^{-6} = 22,2 \text{ кН}.$$

Поделив $P_{кр}$ на P , получим искомую величину коэффициента запаса устойчивости

$$[n_y] = 22,2 / 8,50 = 2,61.$$

2. Колебания балки с установленным на ней массивным электромотором

Рассмотрим шарнирно опертую балку с пролетом l с постоянным поперечным сечением с установленной на ней электромотором весом Q с неуравновешенной массой m_e и эксцентриситетом e . Число оборотов электромотора

n об/мин. Будем исследовать напряженно-деформированное состояние в двух случаях: 1) правая опора абсолютно жесткая; 2) правая опора упругая.

Сначала рассмотрим первый случай.

Считаем, что масса электромотора значительно больше всей массы балки. Это позволяет упростить задачу, и пренебречь массой балки по сравнению с массой M электромотора, которую условно считаем приложенной в точке оси балки на расстоянии a от левой опоры (рис. 7а). Для выяснения характера воздействия на балку вращающихся неуравновешенных частей рассмотрим рис.8.

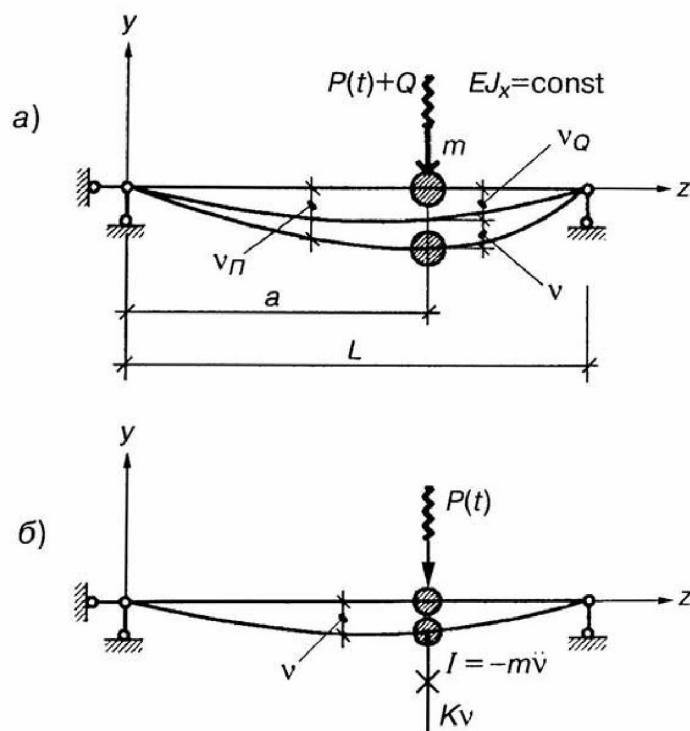


рис. 7

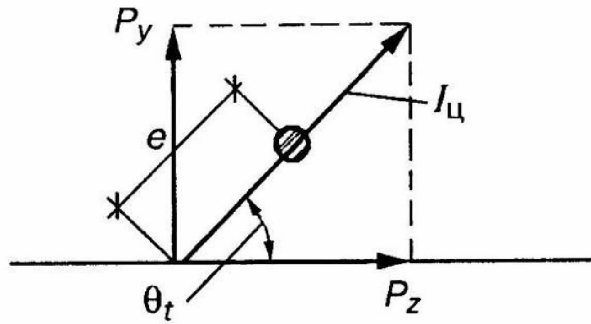


рис. 8

На балку со стороны вращающейся массы m_e действует центробежная сила

$$I_{ц} = \frac{m_e V^2}{e}, \quad (1)$$

где V – линейная скорость массы окружности радиуса e . Вычисляем угловую скорость вращения ротора по формуле

$$\theta = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с} \quad (2)$$

и линейную скорость

$$V = \theta e \quad (3)$$

вместо (1), получим

$$I_{ц} = m_e \theta^2 e. \quad (4)$$

Выразив массу m_e через вес P_e , вместо (4) получим

$$I_{ц} = \frac{P_e}{g} \theta^2 e. \quad (5)$$

Разложим эту силу на составляющие по осям Y и Z .

$$P_y = I_{ц} \cdot \sin \theta t = \frac{P_e}{g} \theta^2 e \sin \theta t; \quad (6)$$

$$P_z = I_{ц} \cdot \cos \theta t = \frac{P_e}{g} \theta^2 e \cos \theta t. \quad (7)$$

Сила $P_y(t)$ вызывает изгиб балки, а продольная сила $P_z(t)$ вызывает деформации растяжения-сжатия, которые в дальнейшем учитывать не будем.

Положение массы на плоскости YOZ будет определяться одним параметром – прогибом $v_{II}(t)$, который можно считать суммой прогибов балки при статическом действии веса неработающего мотора v_Q и прогиба балки от действия вращающейся неуравновешенной массы – $v(t)$

$$v_{II}(t) = v_Q + v(t). \quad (8)$$

Система, деформация которой во времени описывается одним параметром, называется *системой с одной степенью свободы*.

Запишем, используя принцип Даламбера, динамическое равновесие массы m , на которую в произвольный момент времени действует сила инерции, сумма сил $P_y(t) + Q$ и упругая сила отпора балки при перемещении v_{II} , равная $-Kv_{II}$, где K – коэффициент жесткости балки в точке прикрепления мотора. Эта величина численно равна силе, приложенной к балке в этой точке и вызывающей прогиб равный единице. Можно приложить силу $\bar{P}_1 = 1$ и определить от нее прогиб δ_{11} (рис. 9). Тогда

$$K = \frac{1}{\delta_{11}} \quad (9)$$

Итак

$$\begin{aligned} P_y(t) + Q + I - Kv_{II} &= 0, \\ P_y(t) + Q - \frac{Q}{g}\ddot{v}_{II} - Kv_{II} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

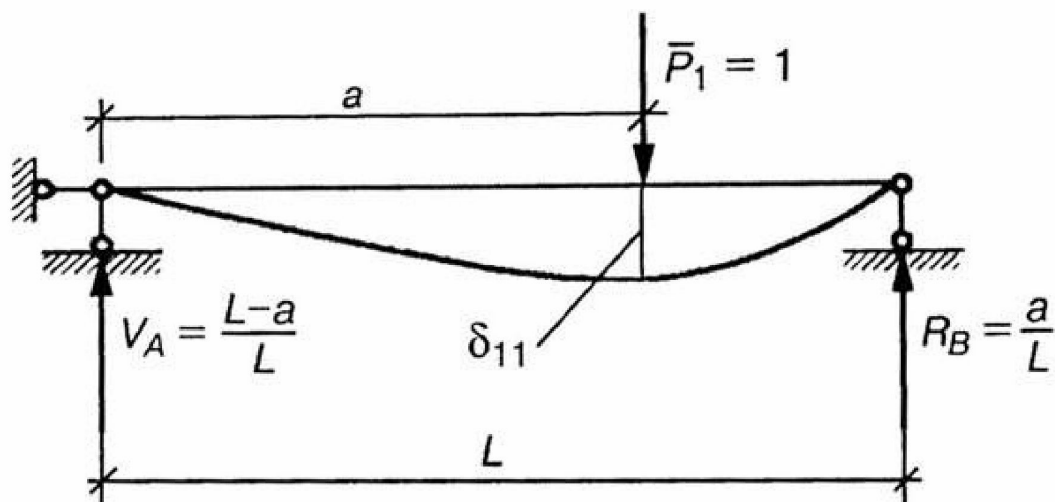


рис. 9

Продифференцировав (8) дважды по времени, и учтя, что v_Q - прогиб не зависит от времени, получим

$$\ddot{v}_{II} = \ddot{v}(t). \quad (11)$$

Теперь вместо (10), получим

$$-\frac{Q}{g} \ddot{v}(t) - K v_Q - K v(t) = -P_y(t) - Q. \quad (12)$$

Далее учтем, что по закону Гука

$$Q = K v_Q. \quad (13)$$

Поэтому вместо (11) будем рассматривать дифференциальное уравнение для динамической части прогиба v (рис.7б)

$$\frac{Q}{g} \ddot{v} + K v = P_y(t), \quad (14)$$

или

$$\ddot{v} + \frac{1}{\delta_{11} m} v = \frac{1}{m} P_y(t). \quad (15)$$

Обозначим

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m}, \quad (16)$$

тогда получим дифференциальное уравнение динамического прогиба балки как системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \frac{1}{m} P_y(t). \quad (17)$$

Это дифференциальное уравнение линейное второго порядка с известной правой частью.

В математике доказывается, что решение такого уравнения ищется в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0 \quad (18)$$

и частного решения уравнения (17).

Однородное дифференциальное уравнение (18) описывает так называемые свободные или собственные колебания упругой системы с одной степенью свободы.

Свободными колебаниями называются колебания, совершаемые под действием сил инерции и сил упругого отпора – без влияния внешних сил. Свободные колебания вызываются начальными воздействиями. Например, можно медленно отодвинуть массу от положения равновесия и затем отпустить. При этом начальные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned} t = 0; \quad v = v_0; \\ \frac{dv}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Можно поступить иначе – толкнуть массу. При этом массе сообщается начальная скорость V_0 и начальные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned} t = 0; \quad v = 0; \\ \frac{dv}{dt} = V_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Известно, что решение уравнения (18) можно рассматривать в двух формах

$$v(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (21)$$

или

$$v(t) = A_1 \sin(\omega t + \nu). \quad (22)$$

В той и другой форме участвуют две постоянные интегрирования (A и B) или (A_1 и ν), которые можно определить из начальных условий (19) или (20) или их комбинаций.

Таким образом, собственные колебания (22) совершаются по закону синусоиды с амплитудой A_1 и круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}}. \quad (23)$$

Известно, что функции в выражении (21) имеют общий период 2π . Периодом T колебаний называется *отрезок времени (цикл)* через который система приходит в то же состояние, что и в начале отрезка (рис.10)

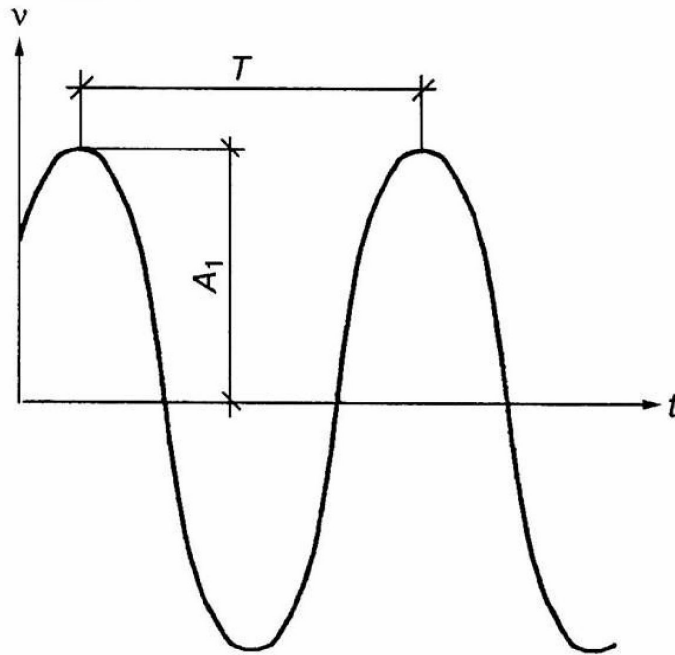


рис. 10

$$A_1 \sin(\omega t + \nu) = A_1 \sin[\omega(t + T) + \nu]$$

Отсюда,

$$\omega T = 2\pi, \quad (24)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (25)$$

Таким образом, круговая частота собственных колебаний есть число циклов колебаний за 2π секунд.

Коэффициент A_1 характеризует размер колебаний и носит название амплитуды колебания, ν - начальная фаза колебаний.

Найдем частное решение (17), учтя, что функция $P_y(t)$ имеет вид (6).

Обозначим амплитуду возмущающей силы

$$P_0 = \frac{P_e}{g} \theta^2 e. \quad (26)$$

Ищем частные решения уравнения

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \frac{P_0}{m} \sin \theta t \quad (27)$$

в виде

$$v_y = D \sin \theta t. \quad (28)$$

Найдем производные по времени

$$\dot{v}_y = D \theta \cos \theta t. \quad (29)$$

$$\ddot{v}_y = -D \theta^2 \sin \theta t. \quad (30)$$

и подставим (28), (29), (30) в (27)

$$-D \theta^2 \sin \theta t + \omega^2 D \sin \theta t = \frac{P_0}{m} \sin \theta t,$$

откуда

$$D = \frac{\frac{P_0}{m}}{\omega^2 - \theta^2}. \quad (31)$$

Преобразуем

$$D = \frac{\frac{P_0}{m \omega^2}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}},$$

Учитывая (16), получим

$$D = \frac{P_0 \delta_{11}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = v_{cm}(P_0) \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}, \quad (32)$$

где $v_{cm}(P_0)$ - величина прогиба балки от силы P_0 , приложенной статическим образом.

Итак, частное решение (27) имеет вид

$$v_{\text{ч}} = v_{cm}(P_0) \frac{\sin \theta t}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \quad (33)$$

Таким образом, выражение динамического прогиба баки как системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления будет

$$v = A_1 \sin(\omega t + \nu) + \frac{v_{cm}(P_0)}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t. \quad (34)$$

В предыдущих рассуждениях мы не учли силы сопротивления, которые всегда возникают при колебаниях механических систем. Экспериментально доказано, что они вызывают затухание во времени собственных колебаний. Если все время действует вынуждающая сила, то изменение динамического прогиба при большом t описывается вторым слагаемым в (34), которое назовем *вынужденным колебанием*

$$v_b = \frac{v_{cm}(P_0)}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t. \quad (35)$$

Максимальный динамический прогиб будет при

$$\frac{\sin \theta t}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \right|. \quad (36)$$

Обозначив

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right|} \quad (37)$$

как коэффициент нарастания колебаний, получим

$$v_b^{\max} = v_{cm}(P_0) \cdot \beta. \quad (38)$$

Полный максимальный прогиб (8) (с учетом постоянно действующего веса электромотора) будет

$$\begin{aligned} v_{\max} &= v_Q + v_b^{\max} = \\ &= Q\delta_{11} + \delta_{11}P_0\beta = Q\delta_{11} + \delta_{11}\frac{P_e}{g}\theta^2 e\beta = \\ &= Q\delta_{11}\left(1 + \frac{P_e}{Q}\frac{\theta^2}{g}e\beta\right) = v_Q \cdot K_g, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$K_g = 1 + \frac{P_e}{Q}\frac{\theta^2}{g}e\beta - \quad (40)$$

коэффициент динамичности. Он показывает во сколько раз полный максимальный прогиб больше прогиба балки от неработающего мотора.

В случае приближения частоты изменения вынуждающей силы к частоте собственных колебаний коэффициент нарастания колебаний стремится к бесконечности (если учесть силы сопротивления колебаниям, то он стремится к большой, но конечной величине). Такое явление называется *резонансом*. Нужно подбирать θ и ω так, чтобы не допустить резонанса в проектируемой системе.

Итак, полный прогиб во времени (8) будет иметь вид

$$v = v_Q + v_b = v_Q + \frac{v_{cm}(P_0)}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t = v_Q \left(1 + \frac{P_0}{Q} \frac{\sin \theta t}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}\right). \quad (41)$$

Определим максимальные напряжения при изгибе балки в точках наиболее удаленных от нейтральной оси в процессе колебаний

$$\sigma(t) = \sigma_Q + \sigma^{\text{дин}}(t), \quad (42)$$

где
$$\sigma_Q = \frac{M_Q}{W} = \frac{Q(l-a)a}{lW_x} = \frac{Q\alpha_M}{W_x}. \quad (43)$$

максимальное напряжение от неработающего мотора,

$$\alpha_M = \frac{(l-a)a}{l} - \text{изгибающий момент от единичной силы,}$$

$$\sigma^{\text{дин}}(t) = \left(-m\ddot{v}_b + P_y(t) \right) \frac{\alpha_M}{W_x}. \quad (44)$$

По (30) и (31)

$$\ddot{v}_b = -\frac{v_{cm}(P_e)\theta^2}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t. \quad (45)$$

Подставив (45) и (6) в (44), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{дин}}(t) &= \left(\frac{v_{cm}(P_0)m\theta^2}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t + P_0 \sin \theta t \right) \frac{\alpha_M}{W_x} = \\ &= \frac{P_0\alpha_M}{W_x} \left(1 + \frac{\delta_{11}m\theta^2}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \right) \sin \theta t = \frac{P_0\alpha_M}{W_x} \left(\frac{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \right) \sin \theta t = \\ &= \frac{P_0\alpha_M}{W_x} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t = \sigma_{\max}(P_0) \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t, \end{aligned} \quad (46)$$

где $\sigma_{\max}(P_0) = \frac{P_0\alpha_M}{W_x}$ - максимальное нормальное напряжение в наиболее

удаленной точке сечения от амплитудного значения силы P_0 , приложенной статическим образом.

Итак (42) примет вид

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \frac{Q\alpha_M}{W_x} + \frac{P_0\alpha_M}{W_x} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t = \frac{Q\alpha_M}{W_x} \left(1 + \frac{P_0}{Q} \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 \sin \theta t \right) = \\ &= \sigma_Q \left(1 + \frac{P_0}{Q} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t \right).\end{aligned}\quad (48)$$

Максимальная величина достигается в момент наблюдения (36)

$$\sigma_{\max} = \sigma_Q K_g, \quad (49)$$

где $K_g = 1 + \frac{P_0}{Q} \beta = 1 + \frac{P_e \theta^2}{Qg} e \beta$ - такой же коэффициент динамичности, который учитывается для прогиба (40).

Таким образом, для того чтобы определить максимальные по величине факторы, возникающие при колебаниях, нужно статические факторы умножить на коэффициент динамичности (см. формулы (39) и (49)).

Теперь рассмотрим второй случай опирания правого конца балки – упругое опирание, показанное в задаче № 9 – балка подвешена к растянутому стержню.

При этом изменится коэффициент жесткости K в месте прикрепления мотора. Теперь величина δ_{11} будет складываться из двух слагаемых: одно за счет прогиба балки на жестких опорах (как в первом случае) и перемещения балки как жесткого диска в том же сечении за счет опускания правого конца балки из-за деформации Δl_S растянутого стержня (рис.11)

Таким образом,

$$\sigma_{11} = \delta_{11}^u + \frac{\Delta l_S a}{l}. \quad (50)$$

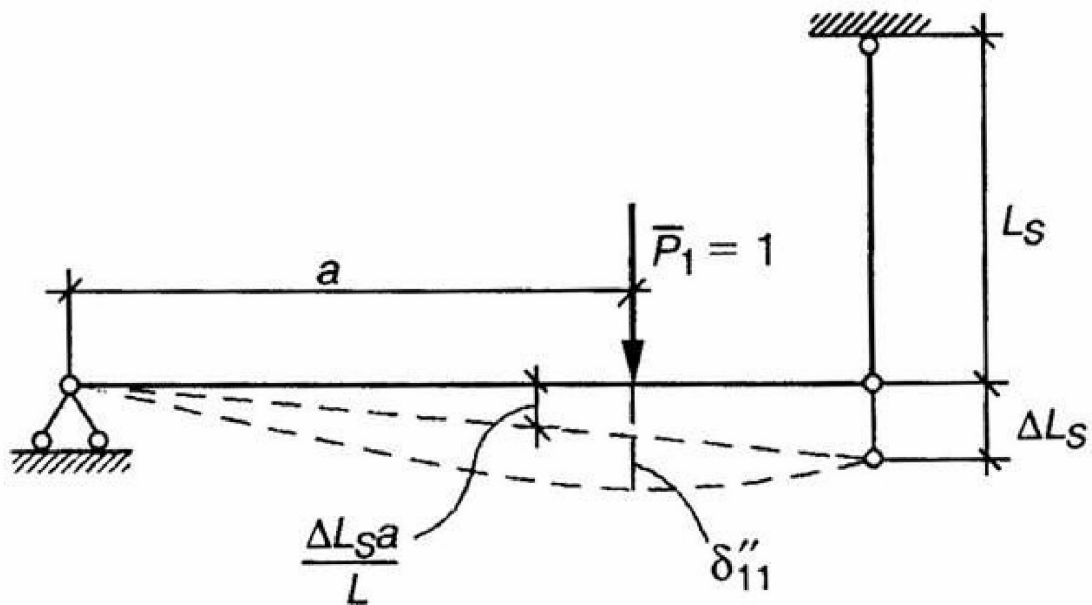


рис. 11

Введение упругой связи приводит к изменению собственной частоты системы с одной степенью свободы, изменению коэффициента нарастания колебаний β и коэффициента динамичности. При сравнении двух случаев опирания все будет зависеть от того, в каком случае ближе будут частоты θ и ω , то есть ближе резонанс. Подрессоривание в случае колебаний не обязательно улучшает напряженно-деформированное состояние балки.

Пример задачи № 9. Электромотор весом $Q = 80$ кН установлен на стальной балке (рис.12) из двух двутавров №20 ГОСТ 8239-72 ($J_x = 1,84 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$; $W_x = 1,84 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$), один конец которой закреплен на шарнирно неподвижной опоре, а другой на металлическом стержне длиной $L_S = 1,6$ м круглого поперечного сечения диаметром $d = 12 \cdot 10^{-3}$ м. Длина балки $L = 2$ м. Частота вращения ротора мотора $n = 600$ об/мин., вес неуравновешенных частей $P = 1,6$ кН, их эксцентриситет $t = 0,02$ м. Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

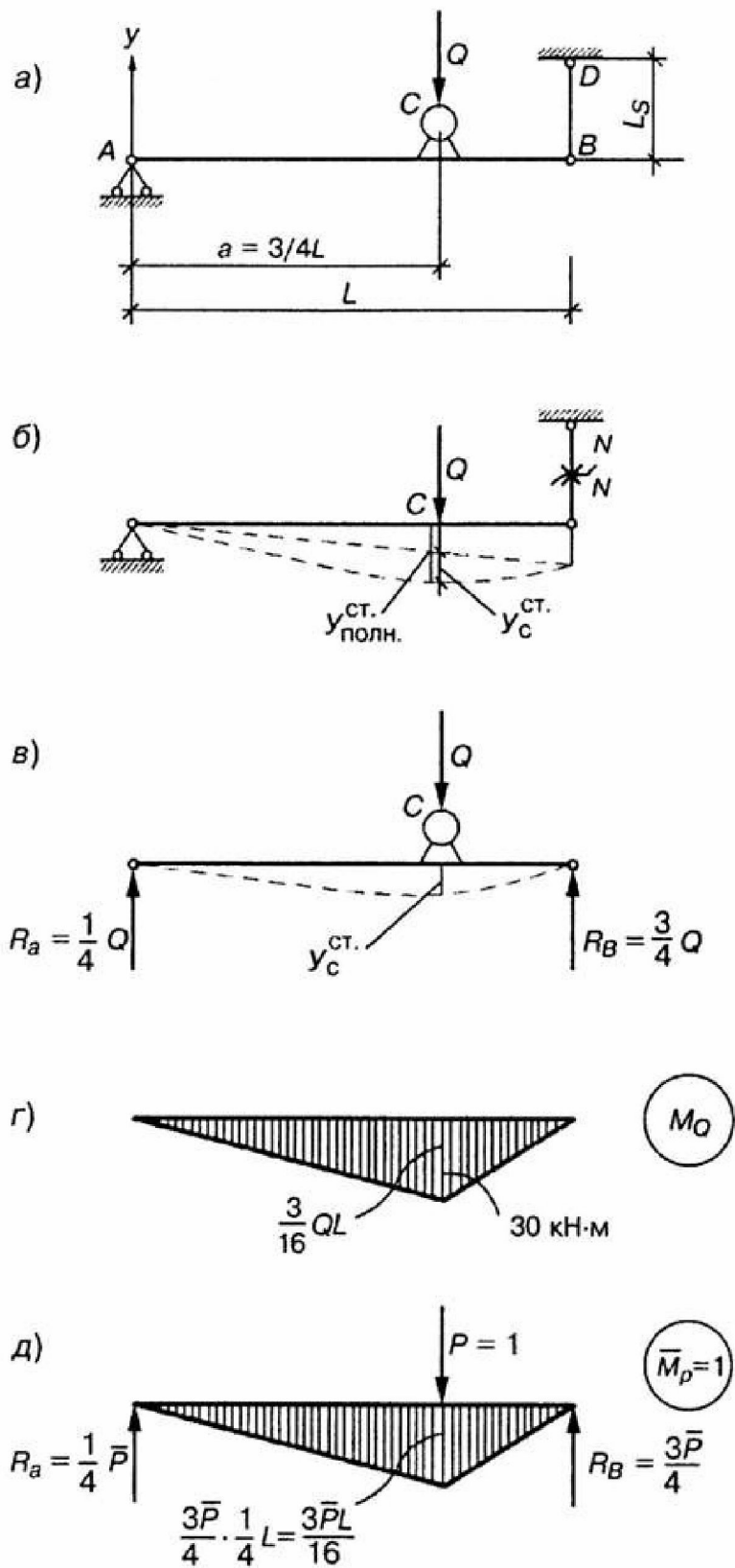


рис. 12

Пренебрегая массой балки и внутренним трением, требуется определить:

1. Статическое удлинение опорного стержня.
2. Статическое перемещение и статическое напряжение в сечении балки, где находится электромотор.
3. Частоту собственных и вынужденных колебаний системы.
4. Коэффициент нарастания колебаний в случае жесткого опирания балки и упругого.
5. Наибольшие динамические прогибы и динамическое напряжение в опасном сечении.
6. Проверить прочность сечения балки из 2-х двутавров (ГОСТ 8239-72) при допуске напряжении $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Определение статического удлинения опорного стержня, статического прогиба и статического напряжения в сечении «С» балки

Из уравнений равновесия статики (рис.12в) $\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$ найдем опорные реакции в балке АВ.

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0; \quad & -R_B L + Q \frac{3}{4} L = 0; \\ R_B &= \frac{3}{4} Q = 60 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0; \quad & R_A L - Q \frac{1}{4} L = 0; \\ R_A &= \frac{1}{4} Q = 20 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Найдем вертикальное перемещение опоры В за счет удлинения подвески при растяжении (рис.12б). Конец балки В переместится на величину

$$Y_B = \frac{N_B L_S}{EF} = \frac{60 \cdot 1,6}{2 \cdot 10^8 \cdot 113,04 \cdot 10^{-6}} = 4,246 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Площадь подвески

$$F = \pi R^2 = 3,14(6 \cdot 10^{-3})^2 = 113,04 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Определим статический прогиб в точке «С» балки АВ при условии, что опора В является жесткой.

Используя правило Верещагина (рис.12г,д), найдем перемещение в сечении «С» $a = \frac{3}{4}L$

$$a = \frac{3}{4}L$$

$$\begin{aligned} Y_c^{cm} &= \sum \int \frac{\bar{M}_{\bar{P}=1} M_Q dS}{EJ} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} QL \frac{3}{4} L \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{L}{EJ} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} QL \frac{1}{4} L \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{L}{EJ} = \\ &= \frac{9QL^3}{1024EJ} + \frac{3QL^3}{1024EJ} = \frac{12QL^3}{1024EJ} = \frac{12 \cdot 80 \cdot 2^3}{1024 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,00102 \text{ м} = 10,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

Статическое напряжение в сечении «С» балки

$$\begin{aligned} \sigma_{cm}^c &= \pm \frac{M_c}{2W_x} = \frac{\frac{3}{16} QL}{2 \cdot 1,84 \cdot 10^{-4}} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 2}{16 \cdot 2 \cdot 1,84 \cdot 10^{-4}} = \\ &= \pm \frac{30}{2(1,84 \cdot 10^4)} = \pm 8,1522 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 = \pm 81,5 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Вычислим величину полного перемещения «С» балки при учете удлинения правой подвески по формуле

$$Y_{полн(с)} = Y_c^{cm} + \frac{Y_B^{cm}}{L} a = 10,2 \cdot 10^{-4} + \frac{4,246 \cdot 10^{-3} \cdot 3}{4} = 42 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Определение частоты собственных и вынужденных колебаний системы, коэффициента нарастания колебаний, наибольшего динамического прогиба и динамического напряжения в опасном сечении «С»

Находим частоту собственных колебаний:

при жестком опирании

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{Q\sigma_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{Y_c^{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{10,2 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,00102}} = 98,07 \text{ 1/с};$$

при упругом опирании

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{Y_c^{полн}}} = \sqrt{\frac{9,81}{42 \cdot 10^{-4}}} = 23,35 \text{ 1/с}.$$

Вертикальная составляющая центробежной силы вызывает поперечные колебания балки в вертикальной плоскости с частотой возмущающей силы

$$\theta = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 62,8 \text{ 1/с}.$$

Находим коэффициент нарастания колебаний

при жестком опирании

$$\beta_1 = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \right| = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{62,8}{98,07}\right)^2} \right| = \left| \frac{1}{1 - 0,4} \right| = 1,695;$$

при упругом опирании

$$\beta_2 = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{62,8}{23,35}\right)^2} \right| = 0,16.$$

Амплитудное значение инерционной силы

$$P_0 = \frac{P}{q} \theta^2 e = \frac{1,6}{9,81} (62,8)^2 \cdot 0,02 = 12,865 \text{ кН}.$$

Коэффициент динамичности:

при жестком опирании

$$K_D = 1 + \frac{P_0}{Q} \beta_1 = 1 + \frac{12,865}{80} 1,695 = 1,27;$$

при упругом опирании

$$K'_D = 1 + \frac{P_0}{Q} \beta_2 = 1 + \frac{12,865}{80} 0,16 = 1,026.$$

Вычислим динамические напряжения при жестком и упругом опирании

$$\begin{aligned}\sigma_{дин} &= \sigma_{ст} K_D = \pm \frac{M_x}{W_x} K_D = \pm 8,1522 \cdot 10^4 \cdot 1,27 = \\ &= 10,353 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 = 103,53 \text{ МПа} \leq [\sigma]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{дин} &= \sigma_{ст} K'_D = \pm 8,1522 \cdot 10^4 \cdot 1,026 = \\ &= 8,364 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 = 83,6 \text{ МПа} \leq [\sigma]\end{aligned}$$

Максимальный динамический прогиб:

при жестком опирании опоры В

$$\begin{aligned}Y_{дин} &= Y_{ст} K_D = 10,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,27 = \\ &= 12,954 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,29 \text{ мм}\end{aligned}$$

при упругом опирании

$$\begin{aligned}Y_{дин} &= Y_{ст} K'_D = 42 \cdot 10^{-4} \cdot 1,026 = \\ &= 43 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 4,3 \text{ мм}\end{aligned}$$

При упругом опирании динамические напряжения снижаются на

$$\frac{103,59 - 83,6}{103,53} \cdot 100\% = \frac{19,93}{103,53} \cdot 100\% = 19,2\%$$

Следует учесть, что при разгоне ротора от нуля до расчетной частоты в системе с упругим опиранием будет пройден резонанс, а с жестким – система не дойдет до резонанса. Поэтому в нашем случае упругое опирание более опасно. Для того, чтобы избежать резонанса в случае упругого опирания частота вращения ротора электромотора должна быть уменьшена

$$\frac{30 \cdot 23,35}{3,14} = 223 \text{ об/мин.}$$

Напишем закон изменения во времени прогиба балки в месте, где находится электромотор при условии установившихся колебаний (41) при жестком опирании

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= v_{Q1} \left(1 + \frac{P_0}{Q} \frac{\sin \theta t}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)^2} \right) = 10,2 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{12,865 \sin 62,8t}{80 \cdot 1 - 0,41} \right) = \\
&= 10,2 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{12,865}{80 \cdot 0,59} \sin 62,8t \right) = 10,2 \cdot 10^{-4} (1 + 0,272 \sin 62,8t) = \\
&= 1,02 \cdot 10^{-3} (1 + 0,272 \sin 62,8t) \text{ м}
\end{aligned}$$

при упругом опирании

$$\begin{aligned}
v_2(t) &= v_{Q2} \left(1 + \frac{P_0}{Q} \frac{\sin \theta t}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega_2}\right)^2} \right) = 42 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{12,865 \sin 62,8t}{80 \cdot 1 - 7,623} \right) = \\
&= 42 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{12,865}{80 \cdot 6,23} \sin 62,8t \right) = 42 \cdot 10^{-4} (1 + 0,258 \sin 62,8t) = \\
&= 4,2 \cdot 10^{-3} (1 + 0,258 \sin 62,8t) \text{ м}
\end{aligned}$$

Период вынужденных колебаний $T = \frac{2\pi}{\theta} = 0,1 \text{ сек.}$

Вычисления проводим в табличной форме

$t, \text{ с}$	$\sin 62,8t$	$0,272 \sin \theta t$	$v_1, \text{ мм}$	$-0,0258 \sin \theta t$	$v_2, \text{ мм}$
0	0	0	1,02	0	4,2
0,025	1	0,272	1,297	-0,0258	4,091
0,05	0	0	1,02	0	4,2
0,075	-1	-0,272	0,742	0,0258	4,308
0,1	0	0	1,02	0	4,2

Графики функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$ показаны на рис.13.

Напишем закон изменения во времени максимального напряжения при изгибе балки в сечении С формула(48)

при жестком опирании

$$\sigma_1(t) = 81,5(1 + 0,272 \sin 62,8t) \text{ МПа}$$

при упругом опирании

$$\sigma_2(t) = 81,5(1 + 0,0258 \sin 62,8t) \text{ МПа}$$

Вычисления проводим в табличной форме

$t, \text{ с}$	$\sin 62,8t$	$0,272 \sin 62,8t$	$v_1, \text{ мм}$	$-0,0258 \sin 62,8t$	$v_2, \text{ мм}$
0	0	0	81,5	0	81,5
0,025	1	0,272	103,6	-0,0258	79,4
0,05	0	0	81,5	0	81,5
0,075	-1	-0,272	59,3	0,0258	83,6
0,1	0	0	81,5	0 </tr	

Графики функций $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ показаны на рис.14.

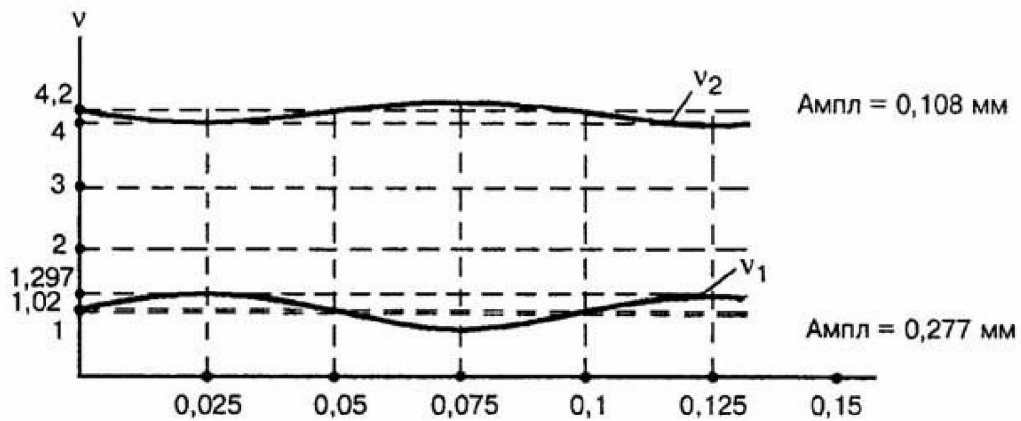


рис. 13

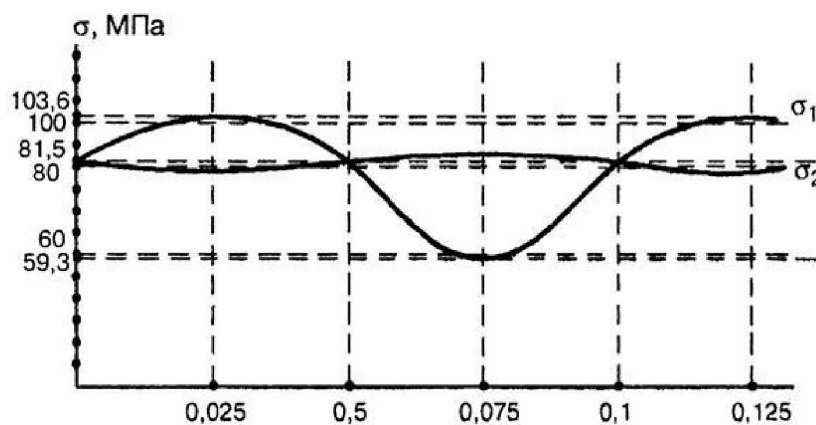


рис. 14

3. Расчет винтовых пружин с малым шагом витков

Винтовая пружина представляет собой тонкий стержень, чаще всего круглого сечения, ось которого является винтовой линией. Винтовые пружины применяются в вагонных рессорах и различных деталях машин и механизмов. Для пружин с малым шагом витков (рис.15а) соблюдается условие

$$\frac{h}{D_{cp}} \ll 1. \quad (1)$$

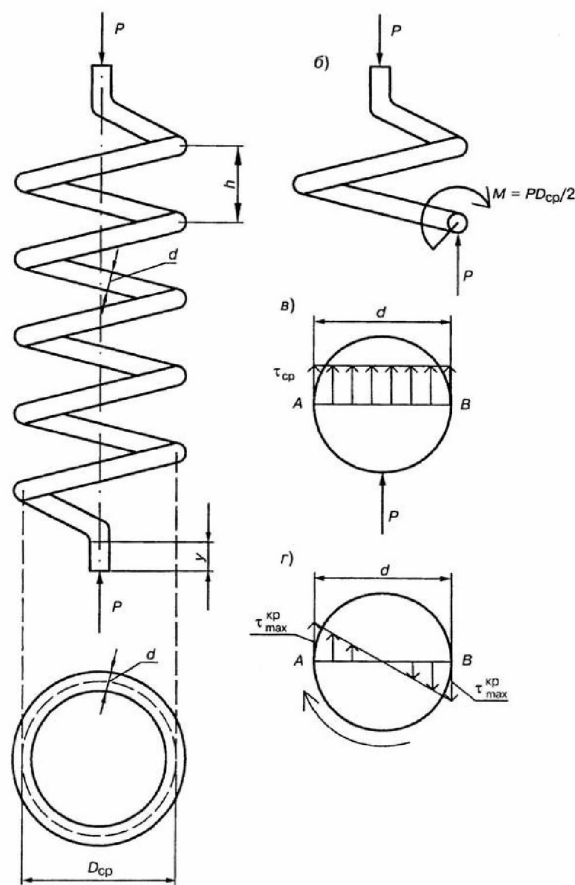


рис. 15

Здесь D_{cp} - средний диаметр пружины, т.е. диаметр цилиндра, на котором лежит винтовая ось пружины. Таким образом, в этом случае, можно приближенно считать, что плоскость витка горизонтальна. Несмотря на сравни-

тельную сложность формы оси, нетрудно вывести формулы для приближенного расчета пружин с малым шагом. При действии сил, направленных по оси пружины и растягивающих или сжимающих ее, стержень пружины в основном испытывает кручение.

Проведем в каком-либо месте разрез стержня пружины вертикальной плоскостью, проходящей через ось пружины (рис.15б) и отбросим нижнюю часть. При условии (1) сечение приближенно можно считать не эллипсом, а кругом.

Действие отброшенной части на верхнюю сводится к силе P , направленной вверх по оси пружины. При параллельном переносе силы P в центр сечения стержня (рис.15б) присоединится крутящая пара $M_z = P \frac{D_{cp}}{2}$. Таким образом, в сечении пружины возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила $Q=P$ и крутящий момент $M_z = P \frac{D_{cp}}{2}$. Оба эти фактора вызывают в сечении касательные напряжения. Наибольшие напряжения от кручения (у контура сечения) будут равны (рис.15г)

$$\tau_{\max}^{kp} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{8PD_{cp}}{\pi d^3}, \quad (2)$$

где d – диаметр стержня пружины.

Напряжения от поперечной силы имеют наибольшую величину τ_{cp} вдоль горизонтального диаметра АВ сечения, где они направлены вертикально. По формуле Журавского (рис.15в)

$$\tau_{cp} = \frac{QS_x^{omc}}{J_x b} = \frac{4Q}{3F} = \frac{16P}{3\pi d^2}. \quad (3)$$

Внутренняя точка А диаметра является опасной точкой сечения, так как здесь напряжения τ_{\max}^{kp} и τ_{cp} совпадают по направлению и складываются.

Расчетное напряжение будет

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^{кр} + \tau_{cp} = \frac{8PD_{cp}}{\pi d^3} \left(1 + \frac{2d}{3D_{cp}} \right). \quad (4)$$

При малом отношении $\frac{d}{D}$ можно вторым членом в скобках пренебречь по сравнению с единицей, т.е. рассчитывать пружину на одно кручение.

Если же отношение $\frac{d}{D}$ не мало (например, в вагонных рессорах и других тяжелых пружинах), то влияние поперечной силы на напряжения значительно и должно учитываться. Кроме того, в этом случае существенно сказывается влияние кривизны стержня пружины, вследствие которой напряжение от кручения у внутренней точки А сечения оказывается больше, чем у наружной точки В. Ввиду этого в правую часть формулы (4) вместо выражения, стоящего в скобках, лучше ввести коэффициент K , учитывающий одновременно влияние поперечной силы и кривизны стержня:

$$\tau_{\max} = K \frac{8PD_{cp}}{\pi d^3}. \quad (5)$$

Этот коэффициент можно вычислять по формуле

$$K = \frac{4C_{II} + 1}{4C_{II} - 4}, \quad (6)$$

где $C_{II} = \frac{D}{d}$ - геометрический параметр пружины.

На практике нужно уметь вычислять удлинение или осадку пружины от растягивающих или сжимающих ее сил. Влияние поперечной силы на удлинение невелико, поэтому обычно принимается в расчет влияние кручения витков.

На рис.16 показан бесконечно малый элемент проволоки пружины dS , находящейся в условиях кручения. Правое сечение поворачивается на угол

$$d\varphi = \frac{M_{кр}dS}{GJ_P},$$

а все точки на оси перемещаются на величину

$$dy = d\varphi R = d\varphi \frac{D_{cp}}{2}. \quad (7)$$

Суммируя эти перемещения за счет закручивания длины проволоки, получим полное сокращение расстояния между торцами пружины

$$y = \int_0^L \frac{M_{кр} D_{cp}}{2GJ_P} = \frac{M_{кр} D_{cp}}{2GJ_P} \pi D_{cp} n = \frac{PD_{cp}^3 \pi n 32}{4 \cdot G \pi d^4} = \frac{8PD_{cp}^3 n}{Gd^4}. \quad (8)$$

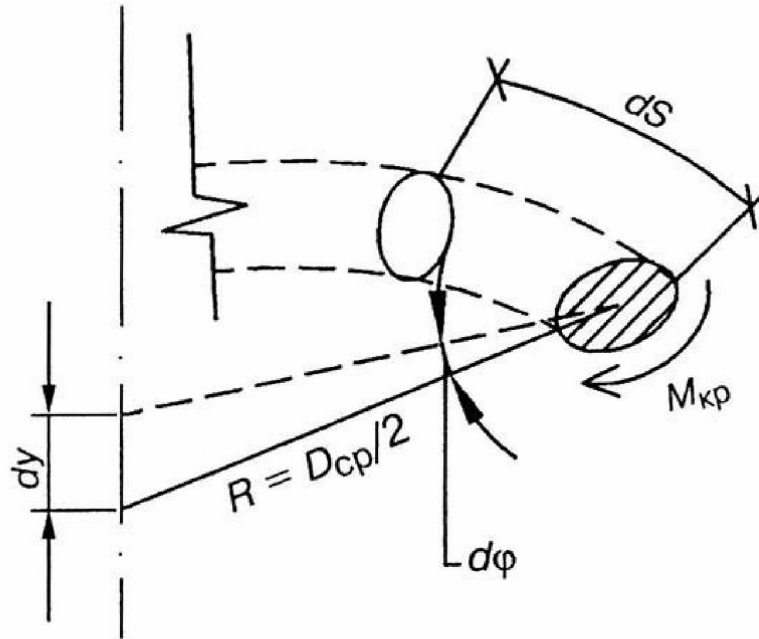


рис. 16

Условие прочности пружины

$$\tau_{\max} = K \frac{8PD_{cp}}{\pi d^3} \leq [\tau] \quad (9)$$

Так как пружины должны давать достаточно большие упругие удлинения, то они изготавливаются из закаленной стали с очень высоким пределом пропорциональности. Допускаемое касательное напряжение $[\tau]$ колеблется при статической нагрузке от 350 МПа до 500 МПа, а для особо прочных специальных сталей – и выше. При переменной нагрузке допускаемое напряжение

значительно снижается (на 30-65 %).

Клапанная пружина находится под действием сжимающих сил, меняющихся по величине (рис.17) от P_{\min} (предварительное поджатие) до P_{\max} (в конце рабочего хода).

Касательное напряжение в опасной точке А также меняется по формуле (5) от τ_{\min} до τ_{\max} .

Прочность пружины при этом понижается в результате возникновения микротрещин и их постепенного развития.

Явление понижения прочности материалов при циклических напряжениях называется *усталостью материала*. Способность материала сопротивляться усталостному разрушению называется *выносливостью*.

Расчет на выносливость сводится к вычислению запаса усталостной прочности n и сравнению его с нормативным $[n]$. Должно выполняться условие $n \geq [n]$.

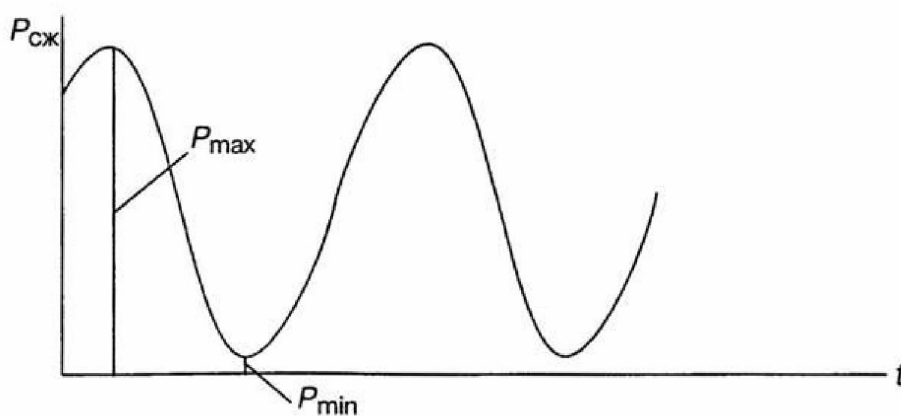


рис. 17

На рис. 18 показана зависимость циклического напряжения от времени и обозначены основные характеристики цикла:

σ_{\min} - минимальное напряжение цикла;

σ_{\max} - максимальное напряжение;

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \text{ - среднее напряжение;}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \text{ - амплитудное напряжение.}$$

Для каждого цикла можно подсчитать коэффициент асимметрии цикла

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

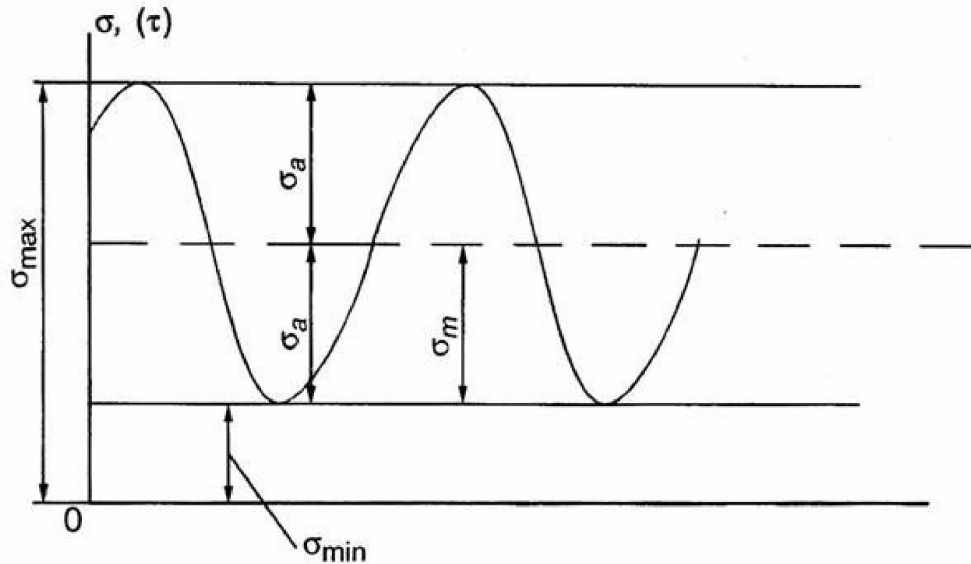


рис. 18

В частных случаях нагружение может быть симметричным пульсирующим и статическим (стационарным) (рис. 19).

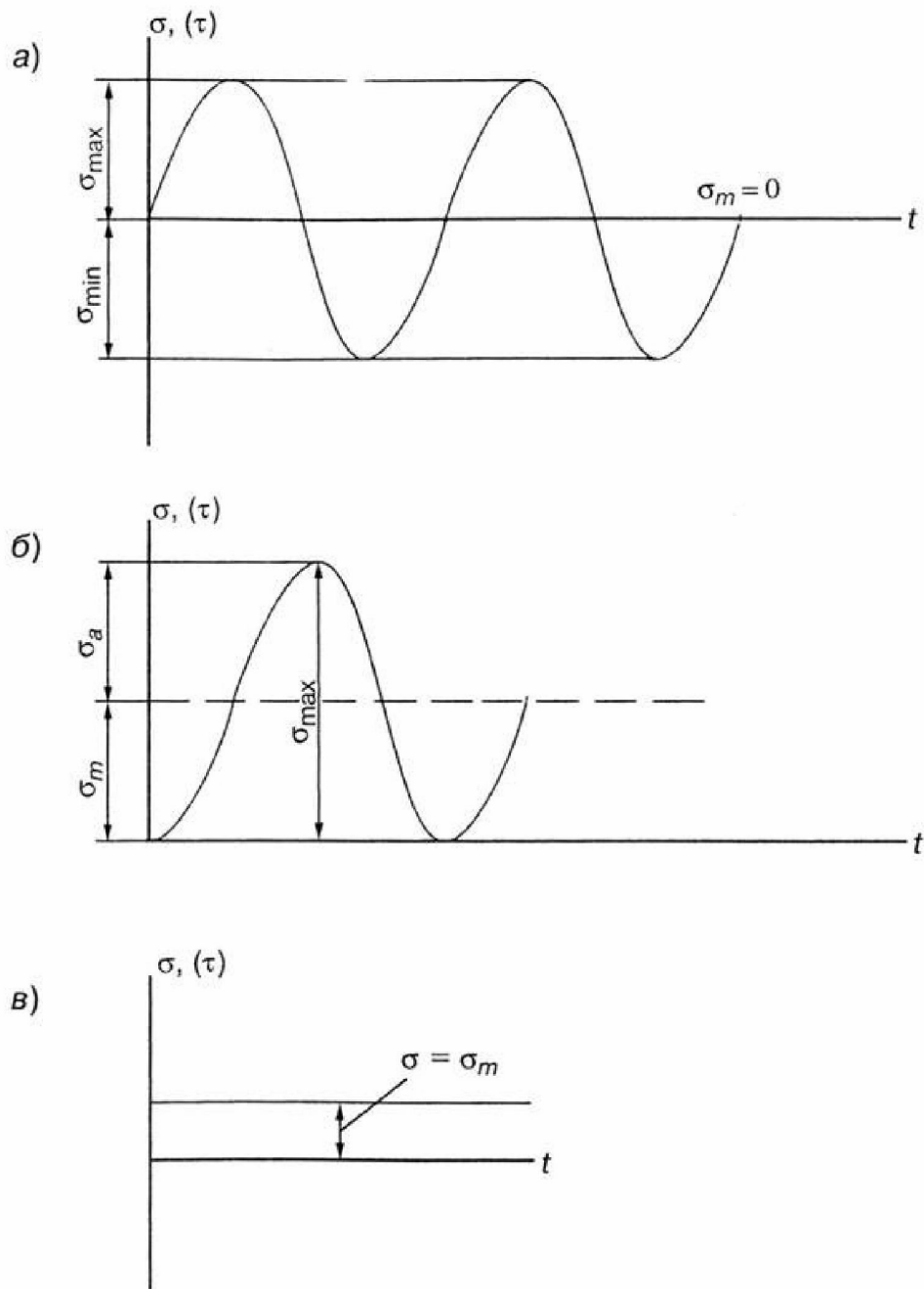


рис. 19

Основные характеристики этих циклов следующие:

для симметричного цикла $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_{\max}; \quad r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1;$$

для пульсирующего цикла $\sigma_{\min} = 0$

$$\sigma_m = \sigma_a = 0,5\sigma_{\max}; \quad \rho = 0;$$

для статического (стационарного) $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma$

$$\sigma_m = \sigma; \quad \sigma_a = 0; \quad r = 1.$$

Максимальное напряжение цикла, при котором стандартный образец выдерживает бесконечное число циклов нагружений не разрушаясь, называется *пределом выносливости материала*. Для симметричного цикла предел выносливости при чистом изгибе обозначается σ_{-1} , а при чистом кручении - τ_{-1} .

Предел выносливости устанавливается по экспериментальной кривой усталости (рис. 20) – нагружения при чистом изгибе образца с вращением.

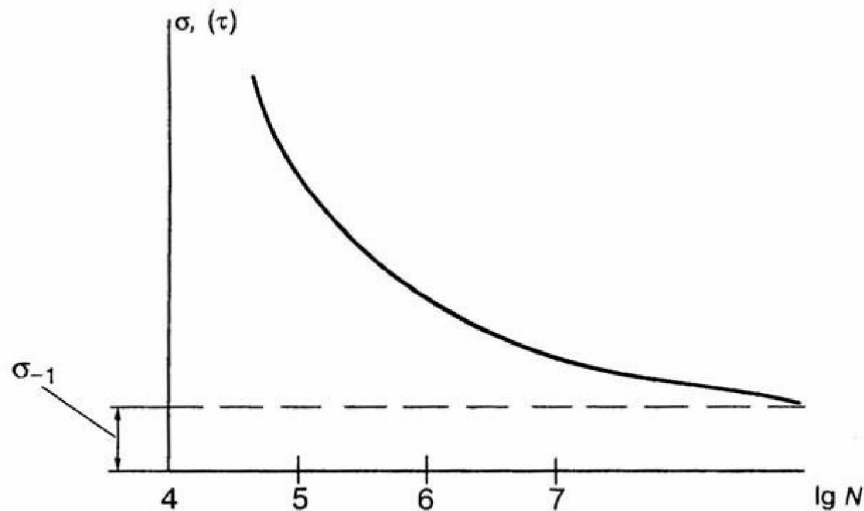


рис. 20

Для углеродистой стали циклов нагружения $N = 10^7$ и напряжение σ_{-1} при $N = 10^7$ принимают за предел выносливости.

На предел выносливости влияют следующие факторы:

- концентрация напряжений в связи с наличием отверстий выточек, над-резов, уступов и т.д.,
- размеры детали (масштабный фактор),
- качество поверхности детали,

- асимметрия цикла напряжений.

Эти факторы снижают предел выносливости. Их влияние учитывают соответствующими коэффициентами, определяемыми экспериментально:

k_σ, k_τ - коэффициенты концентрации напряжений при растяжении и кручении;

$\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\tau$ - коэффициенты масштабного фактора (размеры детали);

β - коэффициент качества поверхности.

Факторы влияния на предел выносливости (концентрация напряжений, размеры детали, состояние поверхности) устанавливают экспериментально.

Коэффициент концентрации напряжений определяют как

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}; \quad k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}},$$

где $\sigma_{-1}, (\tau_{-1})$ - предел выносливости серии образцов при симметричном цикле без концентрации напряжений (соответственно при изгибе и кручении);

$\sigma_{-1K}, (\tau_{-1K})$ - то же с концентратором.

Масштабный фактор влияния определяют отношением

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}; \quad \varepsilon_\tau = \frac{(\tau_{-1})_d}{(\tau_{-1})_{d_0}},$$

где в числителе – пределы выносливости детали, а в знаменателе – опытного образца малого размера.

Обычно принимают $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau$. Влияние качества обработки поверхности учитывают коэффициентом $\beta = \frac{\sigma_{-1П}}{\sigma_{-1}}$,

где $\sigma_{-1П}, \sigma_{-1}$ - пределы выносливости данной детали и полированного образца.

Названные факторы (коэффициенты) проводятся в соответствующих

справочниках. Их общее влияние можно выразить комплексным коэффициентом

$$k_{\sigma D} = \frac{k_{\sigma}}{\beta \varepsilon_{\sigma}}; \quad k_{\tau D} = \frac{k_{\tau}}{\beta \varepsilon_{\tau}}. \quad (10)$$

При выбранных коэффициентах влияния запас прочности по усталостному разрушению определяется как

$$(n_R)_{\sigma} = n_R = \frac{\sigma_{-1}}{\psi_{\sigma} \sigma_m + k_{\sigma D} \sigma_a}; \quad (n_R)_{\tau} = n_R = \frac{\tau_{-1}}{\psi_{\tau} \tau_m + k_{\tau D} \tau_a}. \quad (11)$$

Здесь

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}; \quad \psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}, \quad (12)$$

где $\sigma_0(\tau_0)$ - предел выносливости при пульсирующем цикле ($r = 0$).

Запас статической прочности

$$n_{\sigma} = n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_m + \sigma_a}, \quad (13)$$

$$n_{\tau} = n_T = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_T}{\tau_m + \tau_a},$$

где τ_T, σ_T - пределы текучести при кручении и растяжении (изгибе) соответственно.

Следует обратить внимание, что при действии только нормальных напряжений (например, изгиб) или только касательных (например, кручение) коэффициенты берут с соответствующими индексами. Если имеют место те и другие, то коэффициент запаса прочности на выносливость при циклическом нагружении (например, изгиб и кручение вала) определяется формулой

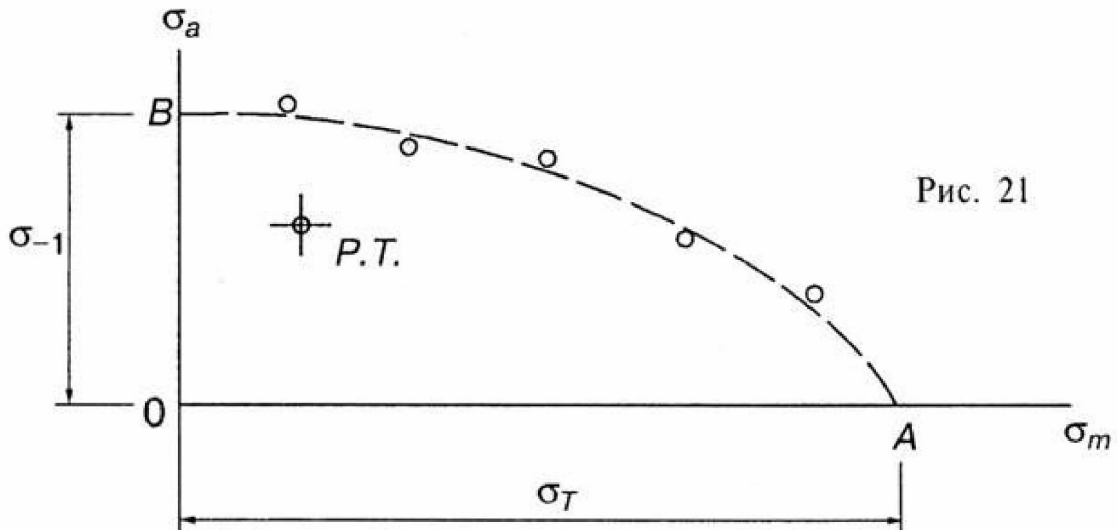
$$n = \frac{n_{R\sigma} n_{R\tau}}{\sqrt{n_{R\sigma}^2 + n_{R\tau}^2}}. \quad (14)$$

При статическом нагружении

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}, \quad (15)$$

что следует из рассмотрения плоского напряженного состояния.

Запас прочности по выносливости можно определить с помощью диаграммы усталостной прочности в координатах $\sigma_a - \sigma_m$ ($\tau_a - \tau_m$). Если экспериментально определять пределы выносливости для различных видов циклов и откладывать графически соответствующие точки с координатами (σ_m, σ_a) , то (рис.21) можно построить предельную линию (AB) – диаграмму усталостной прочности при несимметричных циклах. Если при заданном цикле определено σ_m, σ_a (τ_m, τ_a)- рабочая точка и на графике она лежит ниже предельной кривой, то деталь работает неограниченно долго.



Для практического использования диаграмму схематизируют до ломанной прямой, координаты которой указаны на рис. 22. Диаграмма изображена в координатах касательных напряжений (кручение).

Здесь уравнение линии АВ

$$k_{\tau D} \tau_a + \psi_\tau \tau_m = \tau_{-1};$$

уравнение линии ВС

$$\tau_a + \tau_m = \tau_{\max} = \tau_T.$$

Изменение напряжений в расчетной точке пружины фиксируется на диаграмме рабочей точкой М. Отношение отрезка от начала координат до предельной линии (ON) к длине отрезка OM от начала координат до рабочей точки М есть запас прочности по выносливости, т.е.

$$n_R = \frac{ON}{OM}. \quad (16)$$

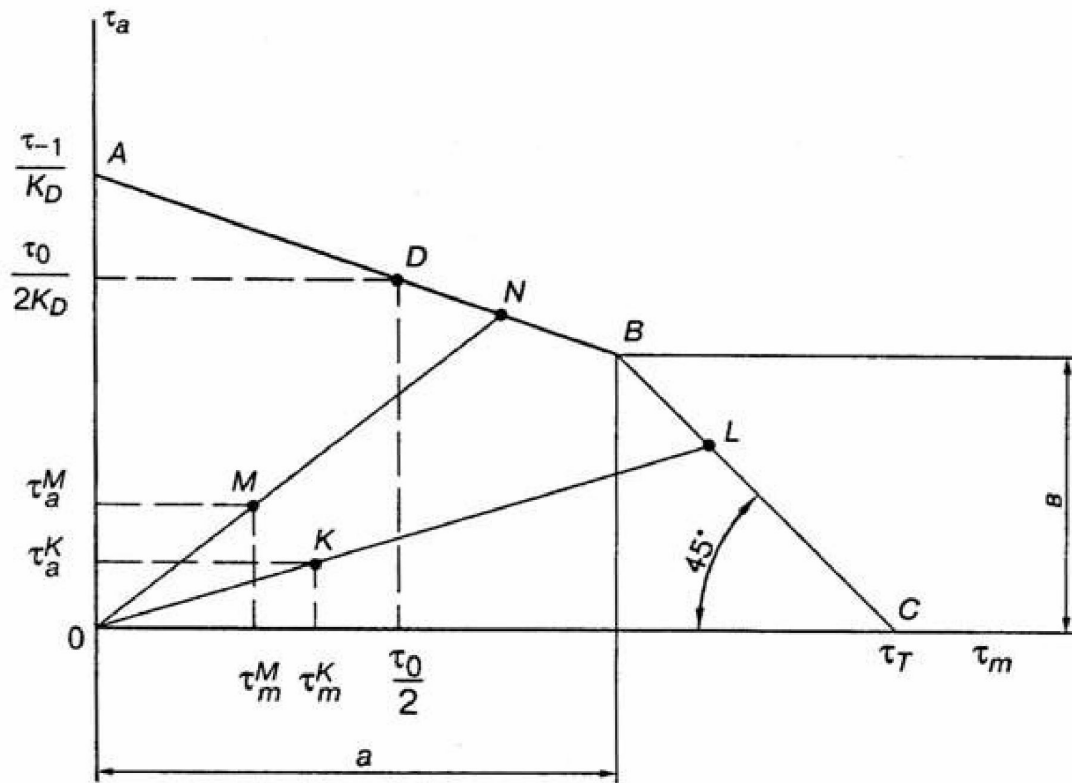


рис. 22

В точке N имеем

$$(\tau_a)_N = \frac{1}{k_{\tau D}} (\tau_{-1} - \psi_{\tau} (\tau_m)_N),$$

т.к.

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_m} \right)_N = \left(\frac{\tau_a}{\tau_m} \right)_M; \quad n_R = \frac{(\tau_m)_N}{(\tau_m)_M},$$

то из этих соотношений следует

$$n_R = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau D} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}, \quad (17)$$

что соответствует (11).

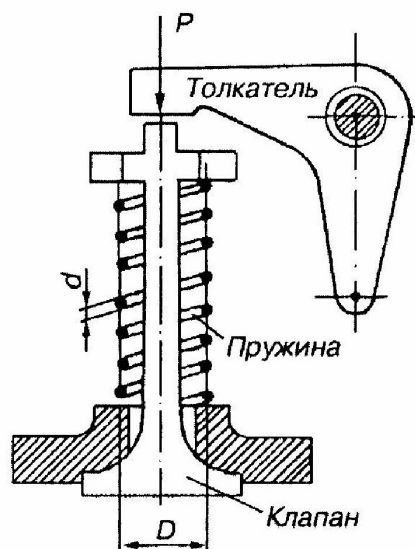
Если предельно состояние зависит не от выносливости (усталости), а от текучести материала (линия BC), то запас прочности определяется пределом текучести

$$n_T = \frac{OL}{OK}, \quad (18)$$

что соответствует (13).

При расчете необходимо сравнить попарно запасы прочности (11), (13) или (14), (15) аналитического расчета и графического (16), (18). Принимается меньший из них.

Пример задачи № 10



Для цилиндрической клапанной пружины (рис.23) двигателя внутреннего сгорания определить коэффициент запаса прочности аналитически (по формуле С.В. Серенсена и Р.С. Кинасошвили) и проверить его графически по диаграмме предельных амплитуд, построенной строго в масштабе. Средний

диаметр пружины $D = 40$ мм, диаметр проволоки пружины $d = 4$ мм. Сила, сжимающая пружину в момент открытия клапана $P_{\max} = 240$ Н, в момент закрытия клапана $P_{\min} = 96$ Н. Материал проволоки пружины – хромованадиевая сталь с механическими характеристиками: предел текучести $\tau_T = 900$ МПа, предел выносливости при симметричном цикле $\tau_{-1} = 480$ МПа, предел выносливости при отнулевом (пульсирующем) цикле $\tau_0 = 720$ МПа. Для проволоки пружины эффективный коэффициент концентрации напряжений $k_\tau = 1,05$, коэффициент влияния качества обработки поверхности $\beta = 0,84$, коэффициент влияния абсолютных размеров поперечного сечения $\varepsilon_\tau = 0,96$.

Решение

1. Определение максимального (τ_{\max}) и минимального (τ_{\min}) напряжений в проволоке пружины и вычисление коэффициента асимметрии цикла R

Для вычисления напряжений используем формулу

$$\tau = k \frac{8PD}{\pi d^3},$$

где k – коэффициент, учитывающий влияние поперечной силы и неравномерность распределения напряжений от ее воздействия, а также влияние деформации изгиба вследствие кривизны витков пружины.

Этот коэффициент можно определить по приближенной формуле

$$k = \frac{4C_{II} + 1}{4C_{II} - 4},$$

где $C_{II} = \frac{D}{d}$ - характеристика геометрических параметров пружины.

В данном примере

$$C_{II} = \frac{D}{d} = \frac{40}{4} = 10,$$

тогда

$$k = \frac{4 \cdot 10 + 1}{4 \cdot 10 - 4} = 1,14.$$

Определим величины напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= k \frac{8P_{\max}D}{\pi d^3} = \\ &= 1,14 \frac{8 \cdot 240 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot 0,4^3 \cdot 10^{-6}} = 4,354 \cdot 10^8 \text{ Па} = 435,4 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\min} &= k \frac{8P_{\min}D}{\pi d^3} = \\ &= 1,14 \frac{8 \cdot 96 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot 0,4^3 \cdot 10^{-6}} = 1,742 \cdot 10^8 \text{ Па} = 174,2 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Коэффициент асимметрии цикла

$$R = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{174,2}{435,4} = 0,4.$$

2. Нахождение среднего (τ_m) и амплитудного (τ_a) напряжений цикла

Найдем величину среднего и амплитудного напряжений цикла зави-

симости от τ_{\max} и τ_{\min} :

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{435,4 + 174,2}{2} = 304,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{435,4 - 174,2}{2} = 130,6 \text{ МПа}.$$

3. Определение коэффициента запаса прочности

Деталь (пружина) может перейти в предельное состояние по усталости и по пределу текучести.

Коэффициенты запаса прочности по усталости и по пределу текучести определяются по формулам:

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_a + \psi \tau_m};$$

$$n_{T\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a + \tau_m},$$

где τ_{-1} - предел выносливости при симметричном цикле;

τ_T - предел текучести;

$K_{\tau D} = \frac{k\tau}{\beta \varepsilon_{\tau}}$ - коэффициент, учитывающий концентрацию напряжений,

влияние качества обработки поверхности и абсолютных размеров поперечного сечения;

ψ - угловой коэффициент:

$$\psi = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = \frac{2 \cdot 480 - 720}{720} = 0,333;$$

$$K_{\tau D} = \frac{1,05}{0,84 \cdot 0,96} = 1,302.$$

Коэффициент запаса прочности по усталости

$$n_{\tau} = \frac{480}{1,302 \cdot 130,6 + 0,333 \cdot 304,8} = 1,77.$$

Коэффициент запаса по пределу текучести

$$n_{T\tau} = \frac{900}{130,6 + 304,8} = 2,07.$$

Так как $1,77 < 2,07$, то коэффициент запаса прочности для пружины (по усталости) $n = 1,77$.

Для анализа примем силу, сжимающую пружину в момент закрытия клапана, $P_{\min} = 180$ Н. Тогда

$$\tau_{\min} = 1,14 \frac{8 \cdot 180 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot 0,4^3 \cdot 10^{-6}} = 3,266 \cdot 10^8 \text{ Па} = 326,6 \text{ МПа};$$

среднее напряжение

$$\tau_m = \frac{435,4 + 326,6}{2} = 381,0 \text{ МПа};$$

амплитудное напряжение

$$\tau_a = \frac{435,4 - 326,6}{2} = 54,4 \text{ МПа};$$

коэффициент запаса прочности по усталости

$$n_\tau = \frac{480}{1,302 \cdot 54,4 + 0,333 \cdot 381,0} = 2,43;$$

коэффициент запаса по пределу текучести

$$n_{T\tau} = \frac{900}{54,4 + 381,0} = 2,07.$$

Так как $2,07 < 2,43$, то в этом случае коэффициент запаса прочности (по пределу текучести) $n = 2,07$.

4. Построение схематизированной диаграммы предельных амплитуд

Для проверки полученных в п. 3 коэффициентов запаса прочности для пружины построим диаграмму предельных амплитуд по методике, предложенной С.В. Серенсенем и Р.С. Кинасошвили (рис. 24).

Порядок построения необходимо описать при выполнении контрольной работы.

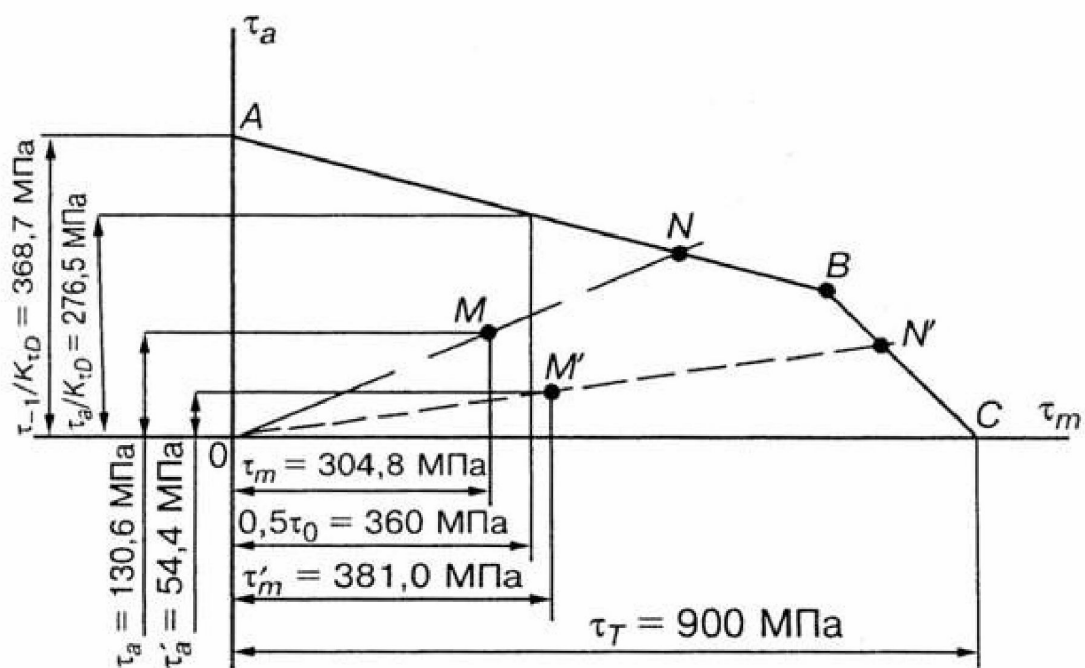


рис. 24

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
2. Сидоров В.Н. Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости. – М.: Изд. Центр генштаба Вооруженных сил РФ, 2002. – 352 с.
3. Дарков А.В., Шатино Г.С. Сопротивление материалов: учеб. Для студентов заочных вузов и вфакультетов. – 5-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1989.- 654 с.
4. Смирнов А.Ф. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1975. – 390 с.
5. Сопротивление материалов. Методические указания к выполнению контрольной работы № 4 для студентов III курса спец. Т, В, СМ, ЭПС (21/1/15).