

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ТЕХНИКА ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР НА СТЕРЖНЯХ,
БАЛКАХ И РАМАХ**

Методические указания к практическим
и самостоятельным работам

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	5
1.1. Единицы измерений.....	6
1.2. Системы координат	9
1.3. Модели прочностной надежности.....	11
1.4. Общие понятия о силах. Внешние силы, внутренние силы. Деформации и нагрузки	12
1.5. Опорные устройства. Расчетные схемы.....	16
1.6. Расчетные схемы, применяемые в сопротивлении материалов.....	21
1.7. Деформации и перемещения.....	22
1.8. Дифференциально-интегральная зависимость между расчетными величинами	23
2. РАВНОМЕРНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ	
2.1. Дифференциально-интегральная зависимость при одноосном растяжении-сжатии	27
2.2. Графо-аналитическое исследование сжато-растянутых брусьев	30
2.3. Порядок построения эпюр при растяжении-сжатии.....	33
2.4. Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии.....	34
3. КРУЧЕНИЕ	
3.1. Крутящий момент	35
3.2. Касательные напряжения. Угол закручивания и потенциальная энергия упругой деформации	37
3.3. Графо-аналитическое исследование скручиваемых брусьев .	38
3.4. Порядок построения эпюр при кручении	42
4. ПРЯМОЙ ИЗГИБ	
4.1. Основные определения и понятия	44
4.2. Деформации и напряжения при чистом изгибе.....	45

4.3. Нормальные напряжения при изгибе	49
4.4. Прямой поперечный изгиб. Изгибающий момент и поперечная сила. Дифференциально-интегральная зависимость между q_y , Q_y , M_z	51
4.5. Графо-аналитический метод определения поперечных сил и изгибающих моментов.....	53
4.6. Порядок построения эпюр при прямом изгибе	53
4.7. Правила построения эпюр при изгибе	56
4.8. Определение перемещений при изгибе.....	58
4.9. Упругая линия при чистом изгибе.....	61
4.10. Дифференциально-интегральная зависимость между кривизной и перемещениями сечений балки.....	63
4.11. Порядок построения эпюр при изгибе	64
5. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ	
СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ. РАМЫ	
5.1. Общие понятия.....	65
5.2. Жесткие стержневые системы	67
5.3. Плоские шарнирные стержневые системы.....	74
5.4. Плоские брусья малой кривизны	76
5.5. Пространственные стержневые системы.....	79
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	85

ВВЕДЕНИЕ

Освоение методики построения эпюр при растяжении-сжатии, методики построения эпюр крутящих моментов, углов закручивания, построения эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов при различных случаях изгиба балок и рам представляется важнейшим и необходимым условием правильного решения большого ряда задач курса «Сопротивление материалов» и последующих курсов «Строительная механика» и «Прочность конструкций». При этом необходимо четко выполнять расчетные схемы конструкций и опорных устройств, так как при определенной небрежности могут изменяться как ход решения задачи, так и конечные результаты. Поэтому предварительно рассматриваются системы координат, в которых исследуются инженерные модели, сами модели прочностной надежности, рассматривается общее понятие о силах, деформациях и нагрузках. Для того, чтобы не было разночтений в обозначениях, приводится схема поперечного сечения с указанием обозначенных осей. Затем рассматривается техника построения эпюр N_x , Q_y и M_z на балках и рамах.

В приложении дается таблица эпюр моментов и расчетные формулы определения опорных реакций при типовых закреплениях элементарных балок со стороны сжатых волокон.

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для успешного изучения курса сопротивления материалов рекомендуется руководствоваться следующими общими указаниями:

1. Курс сопротивления материалов (СМ) является инженерной дисциплиной, объединяющей теорию и методику инженерных расчетов. Сочетание теории с практикой является специфической особенностью курса СМ, поэтому в данном методическом пособии (МП) приводятся типовые решения примеров с подробными объяснениями.

Рекомендуется внимательно прорабатывать как теоретические выводы, так и решения типовых задач.

2. Для освоения теории курса СМ необходимы знания высшей математики, физики, теоретической механики, материаловедения.

3. В каждом частном случае исходные расчетные величины должны вводиться в формулы со своими знаками, обеспечивая правильный алгебраический знак для конечного результата (с учетом направления сил, моментов, напряжений и деформаций).

4. Изучение МП нужно сочетать с изучением рекомендуемой литературы, составлением конспекта лекций, включая разбор методик решения типовых примеров и задач. Решение примеров и задач сначала производится в буквенном выражении. Числовые значения вводятся только в конечные формулы. Вычисления следует проводить с помощью как калькулятора для инженерных расчетов, так и с помощью специализированных компьютерных программ.

5. Необходимо знать размерность каждой расчетной величины и полученные значения проверять по смыслу.

6. Выполнение контрольных расчетно-проектировочных заданий необходимо проводить лишь после того, как усвоена соответствующая теория и приобретены навыки в решении задач, связанных с содержанием заданий.

1.1. Единицы измерений

В старых, до 70–80-х годов, учебниках сохранилась система единиц МКГСС (метр, килограмм-сила, секунда). Международная система единиц измерений – СИ¹ (метр, Ньютон, секунда). В технической литературе и в излагаемом курсе СИ размерность расчетных величин указывается как в той, так и в другой системе единиц.

Для сопоставления размерностей одной и той же величины в указанных системах единиц руководствуются соотношением:

¹ СИ – система интернациональная по ГОСТ 9867 – 61.

Сила в 1 кГ равна 9,80665 (или округленно 9,81) Ньютонов. Например, сила в 100 кГ равняется в системе СИ $100 \cdot 9,81 = 981$ Н.

Давление в 100 кГ/см^2 в системе СИ выражается в Ньютонах на квадратный метр, т. е.

$$100 \cdot 9,81 \cdot 10^4 = 981 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2.$$

Вес единицы объема стали (удельный вес), равной $7,8 \text{ Г/см}^3 = 0,0078 \text{ кГ/см}^3$ в системе СИ выражается в Ньютонах на кубический метр, т. е.

$$0,0078 \cdot 9,81 \cdot 10^6 = 0,0765 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^3 \text{ и т. п.}$$

Размерность величин J_z, J_y, J_p, J_{zy} – длина в четвертой степени (м^4 в системе СИ и см^4 в системе МКГСС). Таблицы для определения моментов инерции в системе СИ еще не разработаны. Переход от см^4 к м^4 получается путем умножения значений, указанных в ГОСТах, на 10^{-8} .

Например, для моментов инерции по ГОСТ 8239-70 для двутавровой балки №50 (рис. 1, а, б) и по ГОСТ 8240-70 для швеллера №30 – соответственно:

$$J_z = 39290 \text{ см}^4, J_y = 1040 \text{ см}^4;$$

$$J_z = 5810 \text{ см}^4, J_y = 327 \text{ см}^4;$$

в системе МКГСС

в системе СИ

$$J_z = 39290 \text{ см}^4$$

$$39290 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

$$J_y = 1040 \text{ см}^4$$

$$1040 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

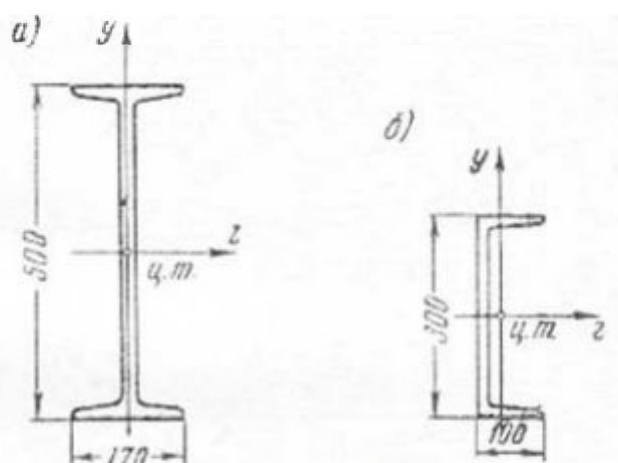


Рис. 1. Двутавр и швеллер

Рекомендуется для лучшего запоминания усвоить следующую таблицу соотношений между единицами измерения.

**Таблица перевода используемых единиц
в Международную систему (СИ)**

Величина	Единицы измерения		Соотношение между единицами измерения
	Применяемая в технике система МКГСС	По ГОСТ 9867-61 (СИ)	
Масса, т	кГ·сек ² /м	кг	1кГ·сек ² /м = 9,81 кг
Плотность, ρ	кГ·сек ² /см ⁴	кг/м ³	1 кГ·сек ² /см ⁴ = 9,81·10 ⁸ кг/м ³
Сила, F	кГ	Н (Ньютон), даН (декаН)	1 кГ = 9,81 Н; 1кГ = 0,981 даН
Момент инерции	кГ·сек ² ·м	кг·м ²	1 кГ·сек ² ·м = 9,81 кг·м ²
Момент (крутящий, изгибающий)	кГ·м	Н·м	1 кГ·м = 9,81 Н·м
Давление (напряжение)	кГ/см ²	Н/м ² = Па	1 кГ/см ² = 9,81·10 ⁴ Н/м ² = 9,81·10 ⁴ Па
Удельный вес	кГ/см ³	Н/м ³	1 кГ/см ³ = 9,81·10 ⁶ Н/м ³
Работа (энергия)	кГ·м	Дж	1 кГ·м = 9,81 Дж
Мощность	кГ·м/сек	Вт	1 кГ·м/сек = 9,81 Вт
Кол-во теплоты	кал	Дж	1 кал = 4,18 Дж

Давление, механическое напряжение, модуль упругости – **Паскаль** (Па). 1 Н/м² = 1 Па; 1 Н/мм² = 10⁶ Н/м² = 10⁶ Па = 1 МПа. Обратное, 1 Н/м² = 10⁻⁶ Н/мм². Например, $\sigma_{в д16} = 4200 \text{ кгс/см}^2 = 42 \text{ кгс/мм}^2 = 420 \text{ МПа}$. $E_{д16} = 720000 \text{ кгс/см}^2 = 7200 \text{ кГ/мм}^2 = 72000 \text{ МПа}$.

1.2. Системы координат

Изучение содержания курса сопротивления материалов составляют теория и методы прикладных инженерных расчетов, построенные на основе экспериментального изучения явлений, возникающих в твердых телах под действием внешних сил.

Чтобы изучать физические и инженерно-физические модели, необходима **система отсчета** – совокупность точек пространства и материального тела, относительно которого определено положение точек пространства. Если имеется система отсчета, то положение материальных точек, а следовательно и физических тел определяется введением **системы координат**, т. е. определенных численных величин, определяющих положение точек, протяженных физических тел и взаимодействий между ними.

Окружающее нас пространство является трехмерным и характеризуется тремя числами. Какими именно числами, зависит от системы координат, с помощью которой мы работаем.

Систем координат существует великое множество. Наиболее простыми и важными из них являются следующие:

1) на плоскости:

1а) **прямоугольная декартова** (рис. 2), в которой двумя числами (x, y) , характеризующими положение точки, являются длины x и y ;

1б) **полярная** (рис. 3), в которой двумя числами (ρ, φ) , характеризующими положение точки, являются длина ρ и угол φ ;

2) в пространстве:

2а) **прямоугольная декартова** (рис. 4), в которой тремя числами (x, y, z) , характеризующими положение точки, являются длины x, y, z .

2б) **цилиндрическая** (рис. 5), в которой тремя числами (ρ, φ, z) , характеризующими положение точки, являются длина ρ , угол φ и длина z ;

2в) **сферическая** (рис. 6), в которой тремя числами (r, φ, θ) , характеризующими положение точки, являются длина r , углы φ и θ .

² Следует отметить, что возможны две прямоугольные декартовы СК, которые не могут быть совмещены друг с другом. Одна из них – правая, другая – левая, отличающаяся взаимной ориентацией осей.

Числа, определяющие положение точки в некоторой системе координат, называются **координатами точки**. Часто для удобства координаты точки обозначаются одной и той же буквой, но с различными индексами, например x_1, x_2, x_3 . Эти числа означают в декартовой системе координат: $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, в цилиндрической: $x_1 = \rho, x_2 = \varphi, x_3 = z$, в сферической: $x_1 = r, x_2 = \varphi, x_3 = \theta$.

Формулы, связывающие координаты в одной системе с ее координатами в другой, называются **преобразованием координат**.

Преобразование от цилиндрических к декартовым прямоугольным координатам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Преобразование от сферических к декартовым:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

При решении задач в курсе «Сопротивление материалов» наиболее часто применяются декартовы СК (на плоскости и в пространстве), а также полярные СК.

Важное практическое значение имеют формулы преобразования от одной декартовой системы координат к другой, когда их начала и направления не совпадают. Однако этот случай удобнее рассмотреть, пользуясь векторными понятиями.

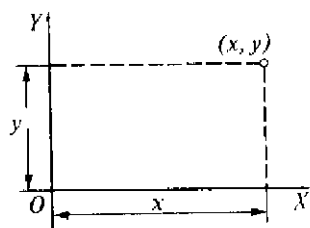


Рис. 2. Декартова СК

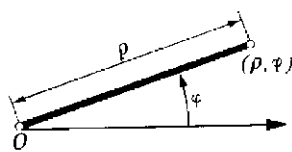


Рис. 3. Полярная СК

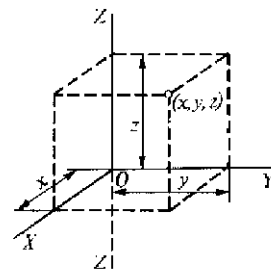


Рис. 4. Декартова СК
(в пространстве)

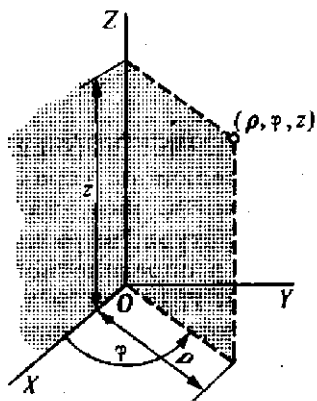


Рис. 5. Цилиндрическая СК

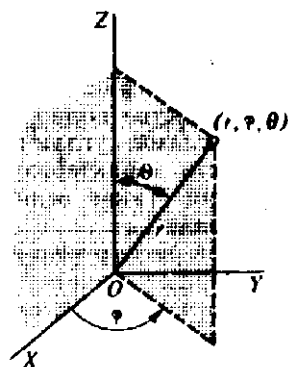


Рис. 6. Сферическая СК

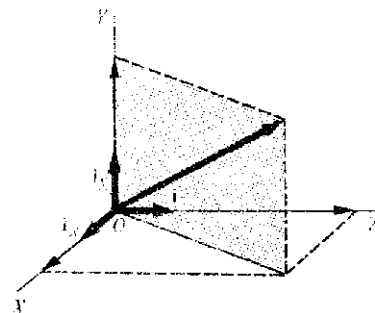


Рис. 7. Векторное пространство

При изучении авиационных конструкций и ЛА принято системы координат (СК) ориентировать следующим образом (рис. 8), с приложением точки O начала координат в центре тяжести (ц. т.) ЛА, аналогично расположение осей координат при изучении плоскости сечения стержня или бруса.

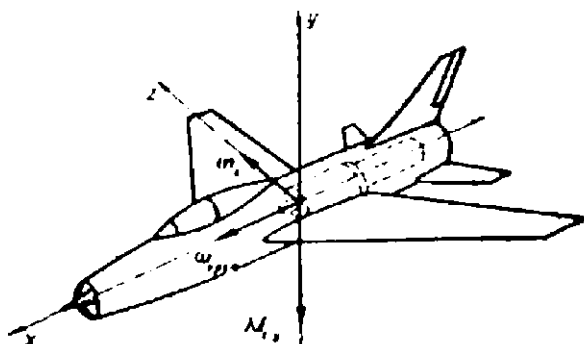


Рис. 8. Связанная СК с ЛА

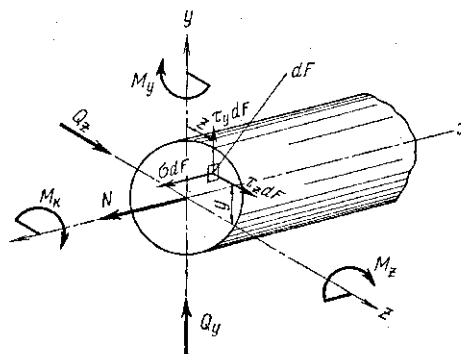


Рис. 9. Сечение бруса

1.3. Модели прочностной надежности

Моделью называется совокупность представлений, зависимостей, условий, ограничений, схем, описывающих процесс, явление.

Модели могут быть **математическими**, отражающими реальный процесс, явление с помощью установления зависимостей между параметрами в виде различного рода уравнений, ограничений.

Модель материала (рассматриваются конструкционные материалы), обычно наделяют свойствами упругости, пластичности и ползучести; существует 3 уровня: а) физические; б) инженерно-физические; в) инженерные (модель сплошной среды).

Модели формы: стержни, пластины, оболочки, пространственные тела. Модель формы является весьма существенным понятием, особенно при компьютерном автоматизированном проектировании и конструировании.

Модель нагружения: определяет внешние силы, действующие на элемент конструкции; имеет вид сосредоточенных сил, распределенных сил, объемных или массовых сил.

При построении модели нагружения внешние нагрузки схематизируются. Степень схематизации зависит от решаемой задачи при расчетах.

Модели разрушения представляют собой уравнения (условия), связывающие параметры работоспособности изделия (элемента конструкции) в момент разрушения с параметрами, обеспечивающими прочность. Модели всего четыре:

1. статического разрушения;
2. длительного статического разрушения;
3. малоциклового разрушения;
4. усталостного разрушения.

1.4. Общие понятия о силах.

Внешние силы, внутренние силы. Деформации и нагрузки

Всякая сосредоточенная сила на плоскости и в пространстве определяется следующими данными:

- 1) величиной силы (измеряемой в силовых единицах) (рис. 10);
- 2) направлением силы;
- 3) положением силы, т. е. P , α , и r .

P – величина; α – угол, образуемый силой с неподвижной осью координат;

r – величина перпендикуляра, опущенного на направление силы из начала координат. Силы, встречающиеся в расчетах, делятся на **навнешние** и **внутренние**.

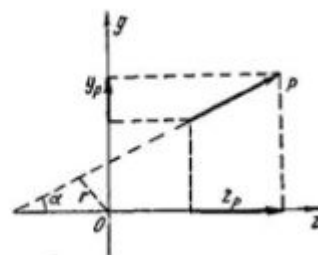


Рис. 10. Вектор силы P

Внешние – делятся на активные внешние силы и реактивные силы.

Активные (или заданные) силы – все те силы, действующие на стержень (брус, деталь), которые задаются самим назначением детали (например: собственный вес, аэродинамические силы, полезная нагрузка и т. д.). К этим же силам можно отнести всякого рода температурные воздействия, а также инерционные силы.

Реактивными внешними силами или **опорными реакциями** называются силы сопротивления опорных устройств.

Внутренними силами называются силы, которые возникают внутри бруса (тела) в результате деформаций, вызванных приложением к телу внешних сил. Поскольку источником всякой силы является материя (физическое вещество), имеющая объемное расположение, то все реально существующие силы могут быть только **объемными**, т. е. распределяться определенным образом по объему тела. Но в технических задачах условно объемные силы часто заменяют эквивалентными им по действию силами поверхностными, погонными и, наконец, сосредоточенными, в зависимости от того, как осуществляется передача объемного силового воздействия на рассматриваемое тело (деталь).

Если давление одного тела на другое передается через поверхность соприкосновения между ними, то для таких сил используется понятие об **интенсивности сплошной нагрузки** на поверхности тела, численно выражаемой величиной силы, приходящейся на единицу поверхности контакта между взаимодействующими телами. Интенсивность сплошной нагрузки на поверхности, выражаемая в H/m^2 ($кГ/см^2$), представляет собой характеристику сил.

Примерами поверхностных сил могут служить силы давления воздуха на поддерживающие поверхности самолета (обшивку); давление газов (пара) на стенки и днища цилиндров моторов и т. д.

От реальных объемных сил переходят в результате некоторой абстракции к силам поверхностным. Еще большей абстракцией будет переход от поверхностных сил к силам погонным, если действующие силы условно полагать распределенными по длине и тогда интенсивность погонной нагрузки, измеряемая в H/m ($кГ/см$) будет численно равна силе, приходящейся на единицу длины рассчитываемого бруса.

Пределом абстрагирования будет переход от материальных объемных сил к силам сосредоточенным. Поверхность соприкосновения между взаимодействующими телами весьма мала по сравнению с общими размерами самих тел, поэтому допускается условно считать силу взаимодействия сосредоточенной в точке касания. Местное действие сосредоточенной силы (смятие волокон) существенно не выражено.

Указанные условные разновидности сил, измеряемые соответственно в H/m^2 , H/m , H , представляют собой три степени абстракции в инженерных расчетах.

При расчете брусьев приходится встречаться со следующими видами нагрузок (рис. 11): распределенные нагрузки переменной интенсивности p , сосредоточенные силы P_1, P_2, P_3, \dots и сосредоточенные пары сил (сосредоточенные моменты) M_1, M_2, \dots (размерность последних $H \cdot m$ или $кГ \cdot см$). Материальный брус при составлении расчетной схемы заменяется обычной его осью и все действующие силы считаются приложенными к оси. Распределенные нагрузки и сосредоточенные силы могут иметь самые различные направления.

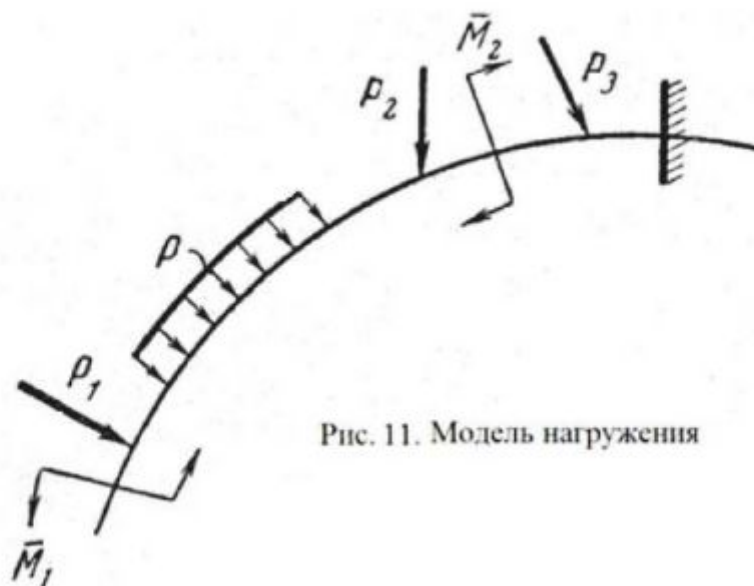


Рис. 11. Модель нагружения

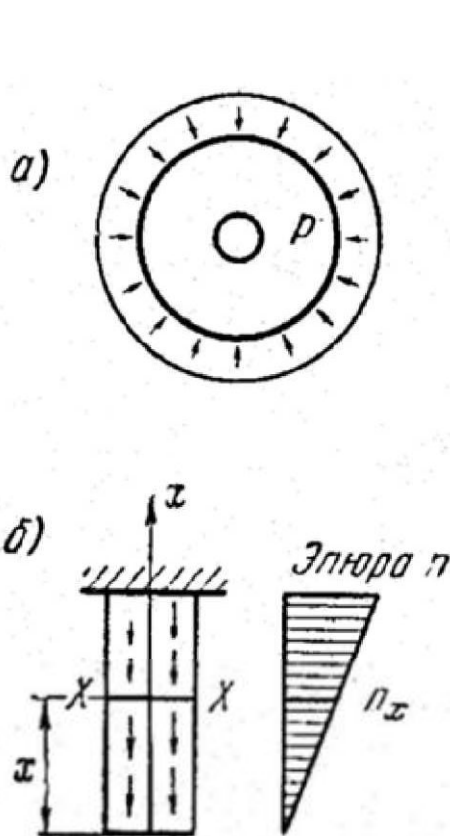


Рис. 12. Схема нагружения цилиндра (а), стержня (б)

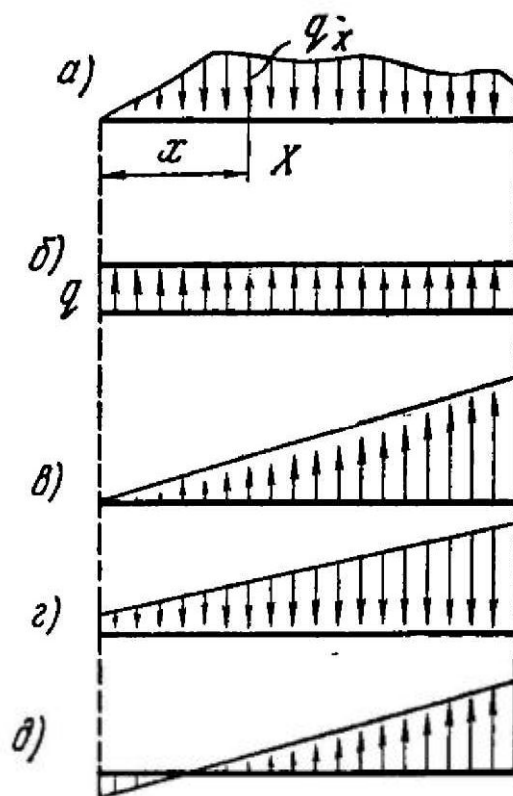


Рис. 13. Схемы нагружения балок

При расчете цилиндров придется встретиться с радиально направленной распределенной нагрузкой – интенсивностью p (рис. 12, а). При расчете растягиваемых брусьев с продольной осью x (рис. 12, б) – с продольной распределенной нагрузкой, интенсивность которой n_x будет некоторой функцией от абсциссы x сечения X . При расчете изгибаемых

брусьев, чаще всего приходится встречаться с распределенной нагрузкой, направленной перпендикулярно оси бруса (рис. 13). При этом интенсивность нагрузки в сечении X с абсциссой x будет некоторой функцией от абсциссы (если нагрузка имеет закономерный вид) $q_x = f(x)$. В частных случаях эпюра нагрузки имеет вид прямоугольника (рис. 13, б), а также треугольника (рис. 13, в), трапеции или так называемой перекрученной трапецией (рис. 13, г и д), если интенсивность неравномерно распределенной нагрузки меняется по линейному закону. Иногда встречается распределенная нагрузка, действующая под углом к оси балки; в этом случае нагрузку располагают по двум взаимно перпендикулярным осям, сводя ее в результате к двум случаям загрузки, рассмотренным ранее (рис. 12, рис. 13).

1.5. Опорные устройства. Расчетные схемы

При действии на брус самоуравновешенной системы сил брус находится в равновесии и не нуждается в устройстве каких-либо опор, поддерживающих брус.

Если же система внешних, активно действующих на брус сил, не является самоуравновешенной, равновесие бруса возможно только при устройстве опор, т. е. только при наложении связей на опорные сечения бруса. Различают следующие *три основных типа* опорных устройств в плоской системе сил:

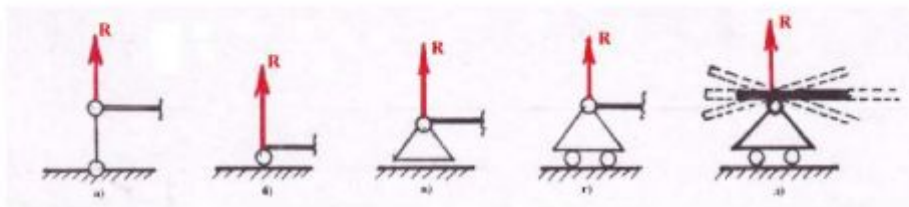


Рис. 14. Опорные устройства – цилиндрическая подвижная опора (варианты исполнения а, б, в, г, д)

Цилиндрическая подвижная опора (подвижный шарнир) допускает поворот опорного сечения балки и его перемещение параллельно

опорной плоскости. Реакция пересекается с осью опорного цилиндра и перпендикулярна опорной плоскости. Эту опору называют **катковой** или **катком**. Условные изображения опоры даны на рис. 14. Реакция опоры обозначается: R , R_A , A , A_y .

Цилиндрическая неподвижная опора (неподвижный шарнир), допускает только поворот опорного сечения балки. Реакция пересекается с осью опорного цилиндра (проходит через ось шарнира). При определении реакция разлагается на две составляющие, в частном случае может равняться нулю. Условные изображения опоры даны на рис. 15.

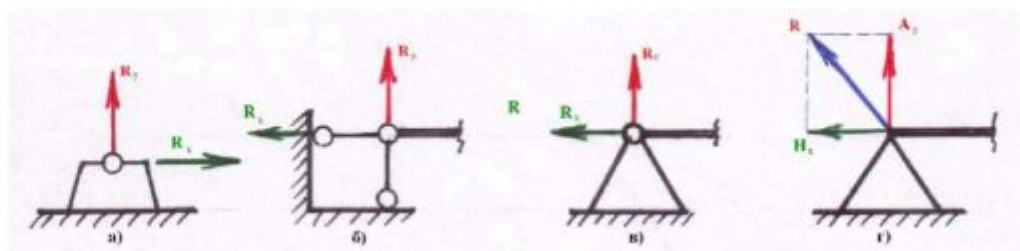


Рис. 15. Опорные устройства – цилиндрическая неподвижная опора (варианты исполнения a , b , v , $г$)

Защемленная подвижная опора (подвижная заделка) допускает перемещение опорного сечения балки параллельно опорным плоскостям реакция состоит из силы, перпендикулярной опорным плоскостям, и пары. Условные изображения опоры даны на рис. 16.

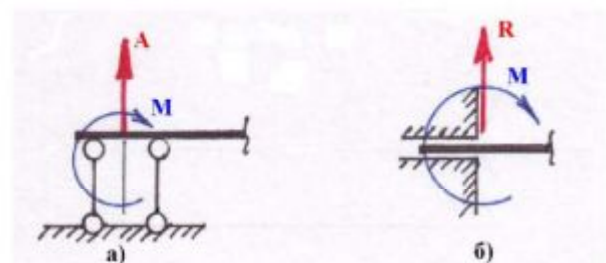


Рис. 16. Защемленная подвижная опора (варианты исполнения a , $б$)

Защемленная неподвижная опора (заделка) исключает угловое и линейное перемещения опорного сечения. Реакция состоит из произвольно направленной силы, которая разлагается на две составляющие, и пары. Условные изображения опоры даны на рис. 17.

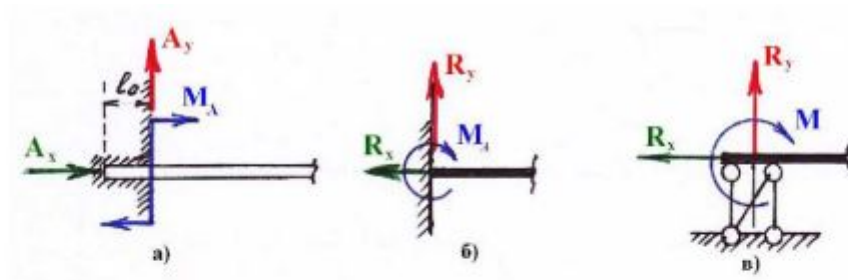


Рис. 17. Защемленная неподвижная опора (варианты исполнения *а, б, в*)

На схемах принято условно обозначать брус (стержень) одной осью, опоры обозначаются следующим образом: для неподвижной шарнирной опоры указывается условно одна связь – в направлении реакции опоры (рис. 14); для неподвижной шарнирной опоры – две связи (рис. 15); заделка обозначается косой штриховкой (рис. 16, 17). Каждый стерженец, указываемый условно на опоре, располагается в направлении реакции опоры. При наличии одного стерженька возможна только одна реакция, действующая по оси стерженька, при двух стерженьках возможна реакция в любом направлении, так как всякую силу можно разложить на две составляющие силы, действующие вдоль осей стерженьков.

Все три опоры могут располагаться на горизонтальной, вертикальной или наклонной плоскостях.

Ниже приводятся дополнительные варианты реальных опорных связей.

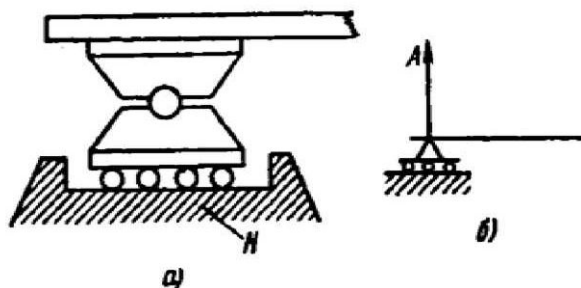


Рис. 18. Шарнирно-подвижная опора (*а* – реальная; *б* – схематизированная)

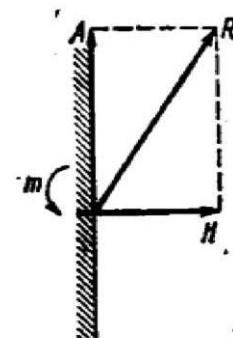


Рис. 19. Схема жесткого защемления

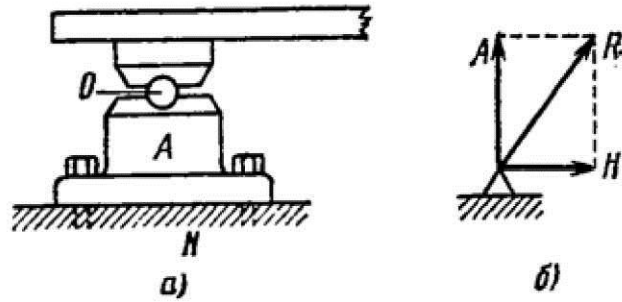


Рис. 20. Шарнирно-неподвижная опора:
 O – шарнир; A – подушка; N – опорная плоскость

Указанные схематические обозначения реактивных связей соответствуют реальным условиям работы брусьев.

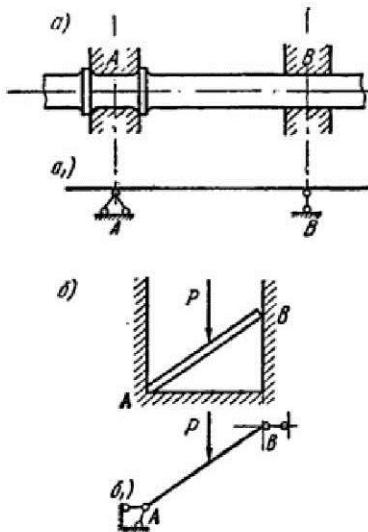


Рис. 21. Пример схематизации
 рассчитываемой системы

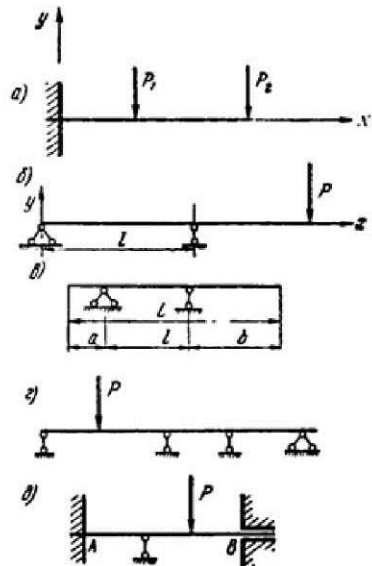


Рис. 22. Схематизация балок

Для примера на рис. 21 показан вал на двух подшипниках A и B , на схеме a_1 левый подшипник обозначен неподвижной опорой A , так как на валу имеются ограничивающие осевое перемещение заплечики. Правый подшипник B , в котором вал вращается свободно, обозначен на схеме подвижной опорой.

На рис. 21, b схематично показаны неподвижная, A и подвижная B опора, способная смещаться по гладкой опорной стене.

На рис. 22, а показана схема бруса, левый конец которого защемлен в неподвижной заделке, а правый свободен. Схема бруса на двух опорах со свешивающейся на правом конце консолью приведена на рис. 22, б. Расстояние l между опорами A и B называется *пролетом*. На рис. 22, в показан двухконсольный брус, длина L которого состоит из левой (a) и правой (b) консолей и пролета (l): $L = a + b + l$. На рис. 22, г показан многопролетный брус без консолей; на рис. 22, д – двухпролетный брус с двумя заделками по концам A и B .

При наличии двух и более опор одна из опор обычно делается неподвижной, а все остальные подвижными, не препятствующими осевому перемещению бруса при деформации. При двух защемленных концах бруса (рис. 22, д) на одном из них часто делают глухую заделку, а на другом – направляющее осевое отверстие. Такая разновидность заделки препятствует изгибу заделанного конца бруса, допуская его свободное осевое перемещение.

Решение всякой задачи начинается с определения реакций опор, так как только после этого становится известной вся система внешних сил и пар сил, действующих на брус.

При действии на брус плоской системы активных внешних сил реакции опор действуют в той же плоскости, а поэтому при заданных активных силах неизвестные реакции опор определяются по правилам теоретической механики из условия равновесия плоской системы сил. В системе трех взаимно перпендикулярных осей x , y , z условия равновесия в плоскости xy выражаются тремя уравнениями

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M_z = 0.$$

В соответствии с числом уравнений равновесия статически определимые брусья должны иметь не больше трех неизвестных реактивных факторов. При одной или при двух реакциях равновесие плоской системы невозможно, опоры таких брусьев не препятствуют перемещениям бруса в плоскости чертежа. Подобные схемы соответствуют механизмам, которые рассчитываются в движении, на основании принципа д'Аламбера.

Схемы, представленные на рис. 22 *г* и *д*, в которых число реакций больше трех, соответствуют статически неопределимым брусам.

1.6. Расчетные схемы, применяемые в сопротивлении материалов

Механический расчет деталей механизма или элементов сооружения выполняется на основе так называемой расчетной схемы. Под схемой понимается эскиз, отражающий основные особенности детали, требующиеся для расчета; при этом отбрасываются все второстепенные части и конструктивные особенности детали, не влияющие на решение поставленной задачи. Рассчитывая, например, канат *AB* на действие растягивающих усилий, условно заменяют его одной прямой линией *AB* (осью каната), на концах которой приложены внешние растягивающие усилия *P* и *P* (рис. 23, *б*). Величины растягивающих сил определяются весом *P* подвешенных грузов. Потери на трение в блоках, а также вес самого каната не учитываются.

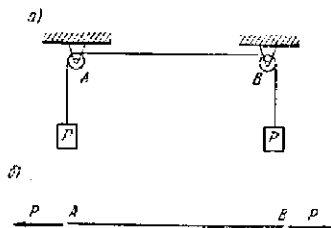


Рис. 23. Схема расчета каната

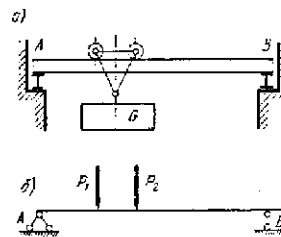


Рис. 24. Схема расчета кран-балки

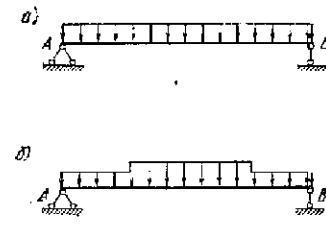


Рис. 25. Схемы расчета балок

Если рассчитывается брус *AB* (рис. 24, *а*), несущий тележку с грузом, то на схеме весь брус условно заменяют тоже одной прямой линией (рис. 24, *б*) с опорами в точках *A* и *B*. Векторами P_1 и P_2 обозначаются сосредоточенные силы, выражающие усилия, передающиеся на брус колесами тележки. Если конструкция тележки симметричная, то $P_1 = P_2 = G / 2$, где *G* – вес тележки с грузом. При несимметричной конструкции тележки величины сил P_1 и P_2 определяются по

правилам механики. Этими двумя сосредоточенными силами P_1 и P_2 выражается на схеме внешняя нагрузка на брус, если собственный вес бруса не учитывается.

Если, наоборот, рассматривается влияние на балку собственного веса, т. е. силы, действующей не в какой-либо одной точке тела, а передающейся на весь брус, то на схеме указывается нагрузка в виде сплошного прямоугольника (рис. 25, *а*). Такая схема будет правильной, если брус имеет по всей длине постоянное сечение.

В брусках, имеющих переменное сечение, изменяющееся при переходе от одного участка длины бруса к другому, собственный вес распределяется по длине бруса не равномерно. В этом случае при расчете бруса на изгиб под действием собственного веса используется схема нагрузки в виде прямоугольных грузовых площадей с разными высотами; показанная на рис. 25, *б* схема соответствовала бы, например, брусу, сечение которого в пределах средней части больше, чем в частях, примыкающих к опорам.

Таким образом, в зависимости от поставленной задачи расчетная схема может видоизменяться. Конструктор составляет схему, соответствующую требованиям расчета, по своему усмотрению, и правильный выбор схемы имеет решающее значение; на ответственности конструктора лежит решение вопроса о том, какие условия важны для проводимого расчета и какие могут быть оставлены без внимания. Неправильная схематизация приводит к неверному расчету.

Никаких определенных рецептов в области составления расчетных схем не существует, так как и сами рассчитываемые детали, и условия их работы под действием нагрузки могут иметь множество вариантов.

1.7. Деформации и перемещения

При расчетах в сопротивлении материалов часто возникает необходимость определить деформации стержней, балок и конструктивных элементов с целью определить возможность работоспособности конструкции или элементов ее при определенных нагрузках.

Деформации рассматриваются как упругие, так и пластические (остаточные). Явления упругой деформации, вызываемые разными системами внешних сил, эквивалентными по законам механики, могут быть неодинаковыми, иными словами, *статическая эквивалентность систем внешних сил не означает эквивалентности деформаций, вызываемых этими системами.*

При всех основных деформациях теория расчетов строится на основе изучения характера и величины так называемой *элементарной однородной деформации*, получающейся в пределах элементарных объемов тела.

Элементарная деформация в пределах элементарного объема $dV = F \cdot dx$ связана с продольными, поперечными изменениями размеров, а также при определенных воздействиях и с угловыми величинами.

Вот почему наряду с эпюрами продольных сил при растяжении-сжатии необходимо рассматривать эпюру деформаций, перемещений поперечных сечений стержней и балок.

При кручении и изгибе также возникает необходимость в рассмотрении эпюр M_k , и угловых перемещений φ , эпюр перерезывающих сил (поперечных) Q_y , изгибающих моментов M_z , эпюры прогибов балки и эпюры углов поворота сечения.

1.8. Дифференциально-интегральная зависимость между расчетными величинами

В курсе сопротивления материалов широко используется дифференциально-интегральная зависимость между расчетными величинами. Понятие о производной, дифференциале, интеграле освещалось на первых курсах вузовской программы. Твердое усвоение основ дифференциально-интегральной зависимости значительно облегчит усвоение прикладной части курса. В качестве примера функций, связанных дифференциально-интегральной зависимостью, рекомендуется вспомнить известный из механики простейший случай равнопеременного движения с постоянным

ускорением a . Ускорение a выражается первой производной по времени t от скорости v , т. е.

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad (a)$$

откуда $dv = a \cdot dt$ и потому

$$v = \int dv = \int a \cdot dt + C_1. \quad (б)$$

Сопоставление формул (а) и (б) показывает, что величины a и v связаны между собой дифференциально-интегральной зависимостью – ускорение a является дифференциальной величиной по отношению к скорости v , а скорость v является интегральной величиной по отношению к ускорению a .

Подобная зависимость существует между скоростью v и величиной пройденного пути s , так как скорость

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad (в)$$

поэтому $ds = v \cdot dt$ и

$$s = \int ds = \int v \cdot dt + C_2. \quad (г)$$

Формулы (в) и (г) показывают, что скорость v является дифференциальной величиной по отношению к s , а пройденный путь s является интегральной величиной по отношению к скорости v .

Если для всех трех величин a , v и s построить последовательно расположенные графики $a = f_1(t)$, $v = f_2(t)$ и $s = f(t)$, то на таких графиках можно показать все особенности функций, связанных между собой дифференциально-интегральной зависимостью. Такая взаимосвязь широко используется в излагаемом курсе сопротивления материалов.

На рис. 26 а, б и в построены графики функций: $a = f_1(t)$, $v = f_2(t)$ и $s = f(t)$.

В теории сопротивления материалов дифференциально-интегральная зависимость связывает основные расчетные величины, исследование которых существенно облегчается построением для них графиков, называемых *э п ю р а м и*. При этом указанная взаимосвязь распространяется и на такие величины, закономерности изменения которых различны в пределах отдельных интервалов независимого переменного³.

В решениях задач по сопротивлению материалов особенно часто приходится использовать эпюры простейшей прямоугольной и треугольной формы, но встречаются также эпюры, очерченные параболой второго, третьего и т. д. порядков. Для подсчета ординат, определяемых по величинам площадей таких параболических эпюр, применяются расчетные формулы, получаемые в результате подсчета площадей методом интегрирования.

Для примера рассмотрим прямоугольник *Oabc* с основанием *l* и высотой *h* (рис. 27, *a*), в который вписана парабола *n*-го порядка. Могут быть выведены очень простые формулы для вычисления площадей параболических треугольников (сегментов) *Oab* и *Ocb*, но при непременном условии, что точка *O* – вершина параболы, *Oa* – ось параболы, а прямые *ab* и *Oc* перпендикулярны к оси. Именно в этом случае уравнение параболы *n*-го порядка может быть написано в виде одночлена $y = px^n$, где *p* – параметр параболы.

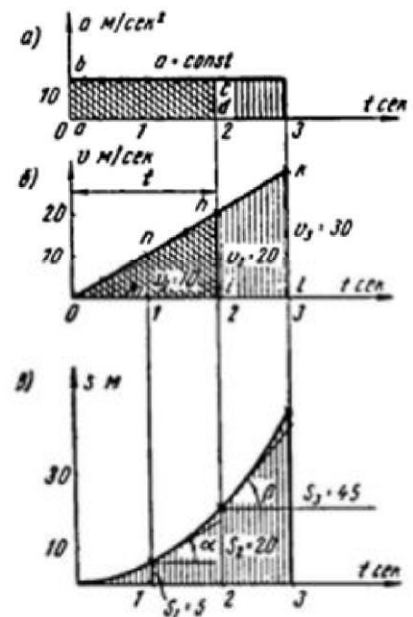


Рис. 26. Графики функций $a = f(t)$, $v = f(t)$ и $s = f(t)$

³ В математике подобные функции называются *кусочно-непрерывными*. Такие функции интегрируются. Функции должны быть непрерывными справа и обрываться в тех точках, до которых справа сказывается влияние соответствующего воздействия (места приложения воздействий, начало сплошной нагрузки...).

В этом случае при увеличении абсциссы x на dx получается элемент площади

$$dF = ydx = px^n dx$$

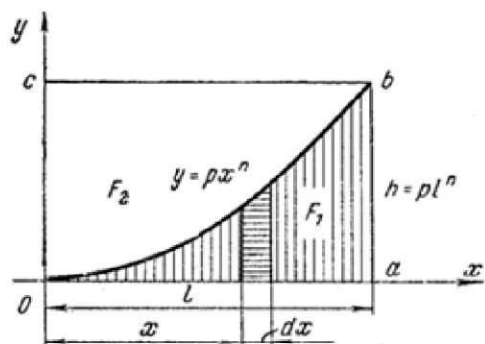


Рис. 27. График функции $y = px^n$

Учитывая, что при $x = l$ ордината $h = pl^n$, можно найти параметр параболы

$$p = \frac{h}{l^n},$$

поэтому элемент площади равен

$$dF = \frac{h}{l^n} x^n dx. \text{ Следовательно, огра-}$$

ниченная параболой часть Oab площади прямоугольника (т. е. площадь вогнутого параболического «треугольника» или сегмента) будет равна

$$F_1 = \frac{h}{l^n} \int_0^l x^n dx = \frac{h}{l^n} \cdot \frac{l^{n+1}}{n+1}, \text{ или } F_1 = \frac{lh}{n+1} \quad (1)$$

Одновременно могут определяться не только заштрихованные площади эюр $F_1 = \text{пл. } Oab$, но и площади F_2 , дополняющие их до прямоугольника, т. е. площадь «выпуклых» параболических треугольников (или параболических сегментов) $F_2 = \text{пл. } Ocb$.

Действительно, площадь F_2 будет равна (рис. 27)

$$F_2 = \text{пл. } Obc = \text{пл. } Oabc - \text{пл. } Oab = lh - \frac{lh}{n+1} = \frac{n}{n+1} lh \quad (2)$$

Полагая в формулах (1) и (2) последовательно $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, получим выражения площадей, ограниченных горизонтальной прямой (прямоугольник), наклонной прямой (треугольник), квадратной параболой, кубической параболой и т. д.

Более подробно данный материал излагается в [4] гл. 1, 1.12.

2. РАВНОМЕРНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

2.1. Дифференциально-интегральная зависимость при одноосном растяжении-сжатии

Рассматривая брус или стержень, следует помнить, что элементарный объем бруса $dV = Fdx$, где F – площадь сечения бруса.

Очевидно, в рассматриваемых брусках все бесконечно малые объемы dV находятся в одинаковых условиях одноосного растяжения (сжатия) и на гранях выделенных объемов будут действовать одинаковые продольные силы N_x .

В этом случае на гранях элементарных объемов, выделенных в различных участках бруса, будут возникать различные продольные силы N_x . Осевые нагрузки, вызывающие растяжение-сжатие, могут быть не только сосредоточенными, но и сплошными, распределенными равномерно или неравномерно по длине бруса. Примером такой нагрузки может служить собственный вес, растягивающий или сжимающий брус, закрепленный одним концом. В обоих случаях собственный вес бруса

$$G = \gamma Fl,$$

где F – площадь поперечного сечения, постоянная по всей длине бруса; γ – вес единицы объема материала.

При сплошной распределенной по оси бруса нагрузке на гранях выделенного элементарного объема будут действовать различные продольные силы N_x . Так, для растянутого собственным весом бруса каждый элементарный объем $dV = Fdx$, удаленный на расстояние x от нижнего конца бруса, растягивается нагрузкой, равной весу $G = \gamma Fx$ части, лежащей ниже сечения. Следовательно, на гранях выделенного элементарного объема продольная сила $N_x = G_x = \gamma Fx$.

При постоянной площади F сечения собственный вес бруса распределяется по всей длине l равномерно. Распределенная по длине бруса сплошная нагрузка (в данном случае, собственный вес) характеризуется

интенсивностью распределенной нагрузки, которую в дальнейшем будем обозначать через n_x . При постоянном сечении бруса

$$n_x = \frac{G}{l} = \frac{\gamma Fl}{l} = \gamma F = \text{const.}$$

Размерность интенсивности H/m ($кГ/см$).

Величины n_x и N_x , характеризующие нагрузку, связаны между собой дифференциально-интегральной зависимостью, которую в общем виде можно установить следующим образом.

Пусть брус с переменным сечением F_x нагружен в общем случае сосредоточенными силами, приложенными в разных сечениях бруса, и сплошной распределенной вдоль оси бруса нагрузкой в виде собственного веса (рис. 28). Вес элементарного объема длиной dx , взятого на расстоянии x от начала участка⁴, равен

$$dG_x = \gamma \cdot F_x dx.$$

Интенсивность собственного веса как распределенной нагрузки

$$n_x = \frac{dG_x}{dx}.$$

Заменяя dG_x , получаем

$$n_x = \gamma \cdot F_x. \quad (3)$$

Чтобы получить величину N_x , применим метод сечений, разрезав мысленно брус в произвольном сечении (на расстоянии x от начала участка). Отбрасывая верхнюю часть бруса, заменяем ее действие на оставшуюся часть внутренними силами упругости, равнодействующая которых будет N_x (рис. 28, б).

Из уравнения равновесия между внешними и внутренними силами найдем, что

$$\Sigma X = N_x - P_1 + P_2 - P_3 + \dots + P_i \dots - G_1 - G_2 - G_3 - \dots - G_i - \int n_x dx = 0$$

⁴ Участок от участка отделяется либо сечением, в котором приложена сосредоточенная сила, либо изменением закона, по которому меняется F_x .

$$N_x = \sum P_i + \sum G_i + \int n_x dx.$$

Обозначая постоянные

$$\sum P_i + \sum G_i = C_1,$$

получаем

$$N_x = \int n_x dF + C_1. \quad (4)$$

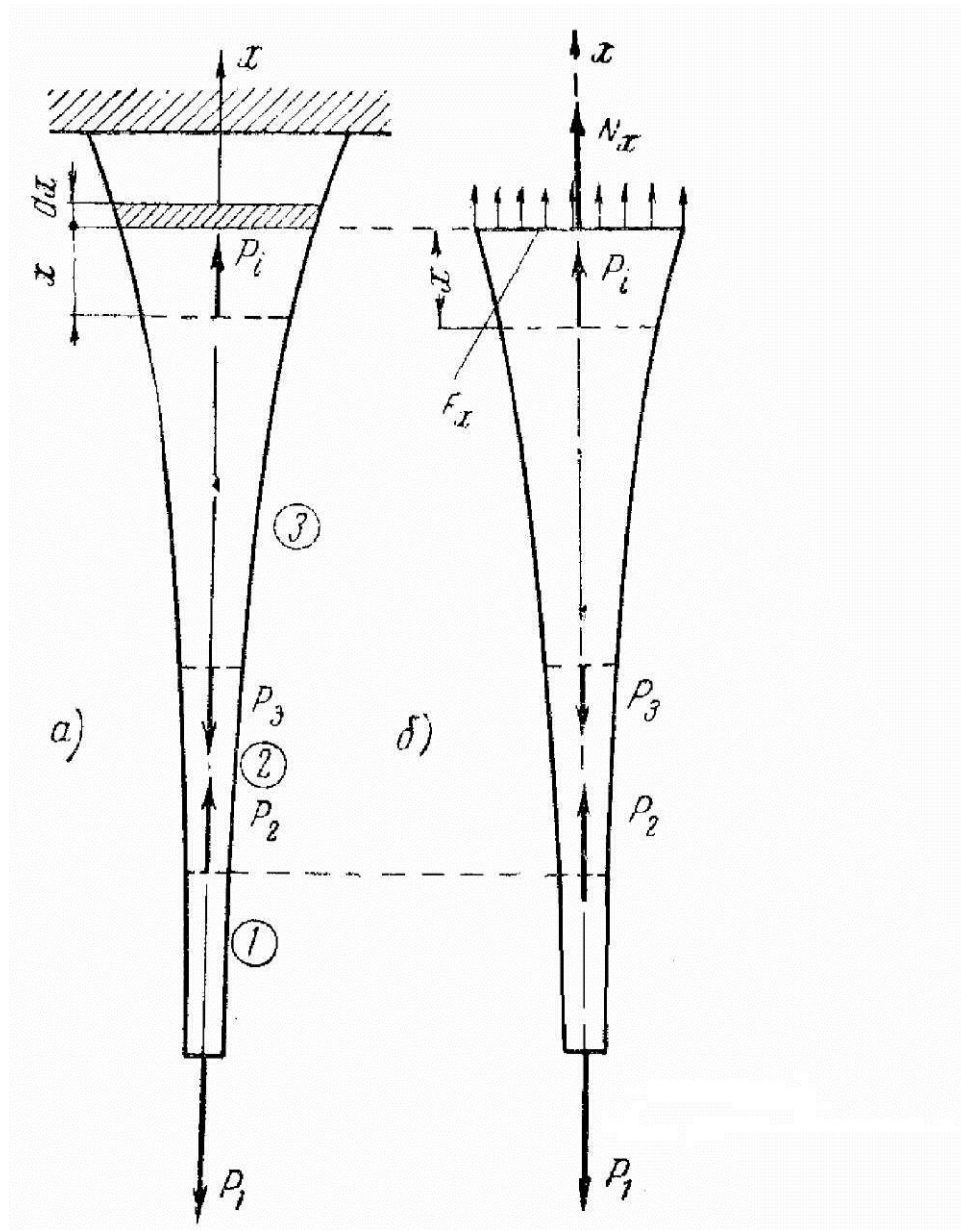


Рис. 28, а, б Брус переменного сечения

Из формул (3) и (4) следует, что N_x является интегральной величиной по отношению к n_x . Так как

$$\frac{dN_x}{dx} = n_x, \quad (5)$$

то n_x является дифференциальной величиной по отношению к N_x .

Таким образом, между n_x и N_x существует дифференциально-интегральная зависимость.

Дифференциально-интегральной зависимостью связаны между собой также величины ε_x (относительное удлинение) и Δx – перемещение произвольного сечения, взятого на расстоянии x .

Перемещение произвольного сечения, взятого на расстоянии x от начала участка (рис. 28), равно

$$\Delta x = \int \varepsilon_x dx + \Delta x_0,$$

где Δx_0 – перемещение сечения в начале отсчета.

Обозначая $\Delta x_0 = C_2$,

получаем

$$\Delta x = \int \varepsilon_x dx + C_2, \quad (4, a)$$

откуда

$$\frac{d(\Delta x)}{dx} = \varepsilon_x. \quad (6)$$

Таким образом, из формул (5) и (6) следует, что между ε_x и Δx существует дифференциально-интегральная зависимость.

2.2. Графо-аналитическое исследование сжато-растянутых брусьев

Для расчета бруса на прочность требуется найти сечение, в котором напряжение, получающееся при упругой деформации, имеет наибольшую величину. Такое сечение называется **опасным сечением**.

Второй разновидностью расчетов является расчет на жесткость, согласно которому требуется найти наибольшее перемещение сечения

бруса, получающееся при упругой деформации под действием заданной нагрузки, чтобы убедиться, что величина этого перемещения не превышает величины, задаваемой по условиям задачи в качестве допустимой.

Однако указать сразу, где находится опасное сечение и в каком сечении получается наибольшее перемещение, не всегда можно. Эта задача становится особенно сложной, если площадь поперечного сечения и осевая нагрузка по длине бруса изменяются. В таких случаях приходится подробно изучать брус в состоянии упругого равновесия, исследуя его по всей длине.

Далее рассматриваются общие приемы определения величин, требующихся для расчетов сжато-растянутых брусьев на прочность и на жесткость.

В системе трех взаимно перпендикулярных осей координат x , y , z положение каждого поперечного сечения бруса определяется абсциссой x , соответствующей этому сечению.

Установив функциональные зависимости исследуемых величин в функции абсциссы x , целесообразно дополнить аналитическое исследование построением графиков или эпюр найденных функций, что дает возможность особенно наглядно представить характер их изменений вдоль оси бруса. Следуя методике, положенной в основу изложения настоящего курса, при растяжении-сжатии, как и при всех других основных деформациях бруса, прежде всего, рассматриваются усилия, передающиеся через сечения бруса, затем деформации отдельных элементарных объемов бруса, получающиеся под действием этих усилий, и, наконец, напряжения, вызванные деформацией.

Для этой цели производится последовательное определение четырех величин:

- 1) интенсивности n_x сплошной нагрузки;
- 2) продольных сил N_x ;
- 3) относительных линейных деформаций ε_x ;
- 4) перемещений Δx сечений бруса вдоль оси x .

На приведенных ниже примерах подробно пояснена каждая из этих четырех величин, показано, как она определяется аналитически, а затем объяснены методы построения эпюр, позволяющих наглядно проследить за изменением каждой из указанных величин при переходе от одного сечения бруса к другому.

При исследовании брусьев, расположенных горизонтально, начало координат совмещают с центром тяжести крайнего левого сечения и ось x направляется слева направо, а ось y – вверх. В брусьях, расположенных вертикально, система координатных осей поворачивается на 90° против движения часовой стрелки; начало координат совпадает с центром тяжести нижнего сечения, ось x направляется снизу вверх и ось y – справа налево. Величины n_x и N_x (интенсивность сплошной нагрузки и продольная сила), а также величины ε_x и Δx (деформация и перемещение) связаны между собой дифференциально-интегральной зависимостью.

Существование такой закономерности значительно упрощает аналитическое и графо-аналитическое изучение напряженного бруса, позволяя при построении эпюр использовать ранее изложенные основные правила построения графиков степенных функций, связанных дифференциально-интегральной зависимостью.

Навыки в построении эпюр приобретаются путем упражнений в решении задач, на основе примеров, разобранных в дальнейшем изложении. При построении эпюр нет надобности строго соблюдать масштаб для абсцисс и ординат эпюр; достаточно лишь выдерживать наглядное соотношение между отрезками, выражающими величины, имеющие одинаковую размерность.

2.3. Порядок построения эпюр при растяжении-сжатии

Таблица 2

Дифференциальная эпюра	1. Интенсивность $n = \frac{dN_x}{dx}$ сплошной осевой нагрузки	Для определения интенсивности и продольных сил
Интегральная эпюра	2. Продольные силы $N_x = \int n_x dx + C_1$	
Формула для перехода от продольной силы к деформациям и перемещениям $\varepsilon_x = \frac{N_x}{EF_x}$		
Дифференциальная эпюра	3. Линейные деформации $\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}$	Для определения деформаций, напряжений и перемещений
Интегральная эпюра	4. Перемещения сечений $\Delta x = \int \Delta dx = \int \varepsilon_x dx + C_2$	

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются, как обычно, по граничным условиям.

Соответственно указанному порядку общей последовательности определения величин, характеризующих упругое равновесие бруса, при применении графо-аналитического метода исследования строятся четыре эпюры:

$$n_x = f_1(x), N_x = f_2(x), \varepsilon_x = f_3(x) \text{ и } \Delta x = f_4(x).$$

Если на брус действуют несколько сосредоточенных сил, приложенных в разных сечениях бруса, то всю длину бруса разделяют на ряд отдельных участков (интервалов) и исследование указанных величин ведут по участкам. В этом случае участок от участка отделяется сечением, в котором приложена сосредоточенная сила. В этих сечениях происходит разрыв исследуемых функций.

Если брус имеет ступенчато-переменное сечение или непрерывно-переменное сечение, то и в этих случаях исследование n_x , N_x ведут по участкам, причем в этих условиях участок от участка отделяются

сечением, в котором происходит изменение размеров поперечного сечения⁵.

Для закрепления рассмотренного материала предлагается разобрать пример решения стержня во второй части методического пособия.

2.4. Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии

Системы, в которых неизвестные могут быть определены с помощью одних уравнений статики, называются **статически определимыми** (СОС). Чтобы система была статически определимой, число неизвестных не должно превышать числа уравнений, составляемых по правилам статики. Если число неизвестных больше возможного числа уравнений равновесия статики, система становится **статически неопределимой** (СНОС).

Для решения статически неопределимых систем необходимо в дополнение к уравнениям статики составить уравнения перемещений. Число уравнений перемещений должно соответствовать числу неизвестных системы.

Число неизвестных определяет степень статической неопределимости системы. Если система имеет одно, два и т. д. неизвестных, то ее называют один раз (или однажды), два раза (или трижды) и т. д. статически неопределимой. Число уравнений перемещений должно соответствовать степени статической неопределимости. Наиболее трудной частью решения статически неопределимых систем является составление уравнений перемещений, которые отображают большое разнообразие физических явлений, происходящих в системе. Следует отметить, что если в статически определимых системах усилия в упругих элементах могут возникать только от активных и реактивных внешних сил, то в статически неопределимых системах усилия могут возникать и от других причин, например, от изменения температуры, неточностей изготовления элементов системы. Во второй части методического пособия приводятся ряд примеров правила составления уравнений перемещений и методы решения статически неопределимых систем.

⁵ См. учеб. [4] гл. 4, § 4.12, стр.146 –150.

3. КРУЧЕНИЕ

3.1. Крутящий момент

Кручением называется деформация стержня, нагруженного парами, плоскости действия которых перпендикулярны его оси.

Моментная распределенная (погонная) нагрузка изображается виде спирали с указанием направления ее действия. Погонная моментная нагрузка задается погонной моментной интенсивностью $m = m(x)$ в каждом сечении бруса. Площадь графика, ограниченного $m = m(x)$, называется **моментной грузовой площадью** $m = m(x)$ (рис. 28, б).

Единица в СИ: $m = \frac{H \cdot м}{м}$ или $\frac{кГ \cdot см}{см}$, причем для сохранения смысла сокращения величин ($м$; $см$) производить нельзя!

Момент пары сил \bar{M} измеряется в ньютонах-метрах ($H \cdot м$) или в килограммах-сантиметрах ($кГ \cdot см$). При исследовании кручения в системе трех взаимно перпендикулярных осей координат x, y, z , как обычно, ось x совмещается с осью вала, а потому при кручении условие равновесия внешних пар сил выражается уравнением $\Sigma M_x = 0$. Аналогично условному понятию о сосредоточенной силе скручивающий момент (\bar{M}) можно условно считать сосредоточенным в одной плоскости, перпендикулярной оси вала, если он приложен в пределах длины, незначительной по сравнению со всей длиной вала. Приводные шкивы или зубчатые колеса насаженные на вал, передают скручивающий момент в пределах длины своей ступицы, закрепленной на валу. Обычно длина ступицы по сравнению с длиной вала невелика, и тогда скручивающий момент, передаваемый на вал шкивом или зубчатым колесом, принимают сосредоточенным в плоскости центрального сечения ступицы.

Так как скручивающие пары и распределенная моментная нагрузка, действующие на отсеченную часть, не дадут проекций на оси x, y, z и моментов относительно осей y и z , силы упругости в любом поперечном

сечении стержня сведутся к единственному силовому фактору – крутящему моменту M_K . Крутящий момент считается положительным, если он возникает от скручивающей пары, вращающей отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на пару со стороны сечения (рис. 29).

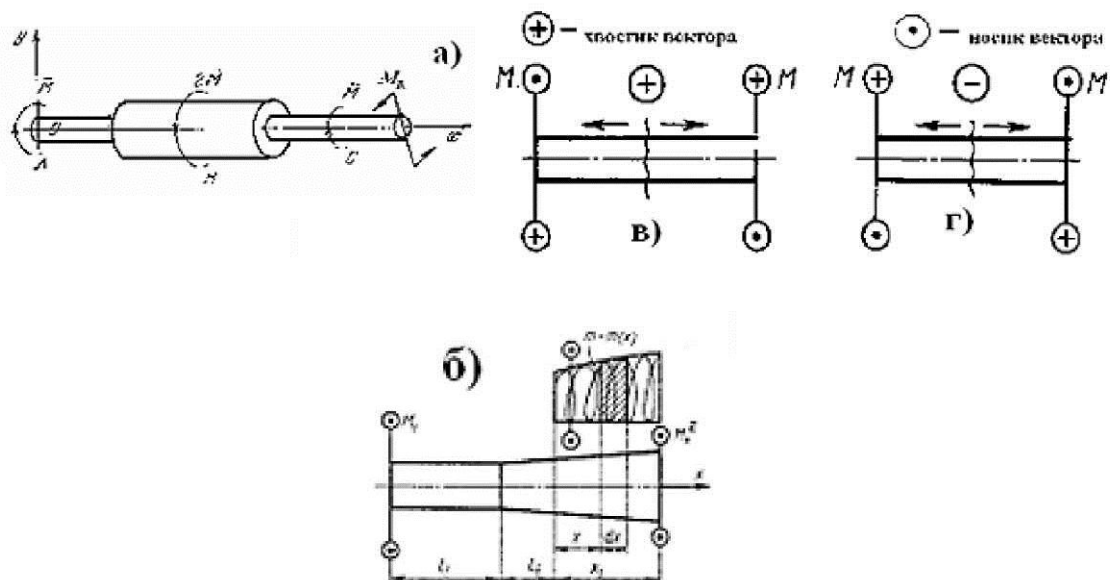


Рис. 29. Примеры обозначения кручения: а) сосредоточенные моменты на валу;
 б) сосредоточенные и распределенная нагрузка;
 в) и г) правило знаков крутящих моментов

Крутящий момент определяется методом сечений. Значение крутящего момента M_K в произвольном поперечном сечении стержня равно алгебраической сумме моментов всех внешних пар сил (сосредоточенных и распределенных по длине с интенсивностью m), действующих относительно геометрической оси стержня по одну сторону от рассматриваемого сечения. Общая формула для определения значения крутящего момента в произвольном поперечном сечении стержня, имеет следующий вид:

$$M_K = \sum M + \sum \int m dx.$$

Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенный момент, а суммирование – по всем участкам, расположенным по одну сторону от рассматриваемого сечения.

3.2. Касательные напряжения.

Угол закручивания и потенциальная энергия упругой деформации

1. При небольшой по величине упругой деформации относительные перемещения частиц материала происходят практически без заметного изменения формы и размеров цилиндрического объема (гипотеза жесткости плоских сечений при кручении, справедливая только для цилиндрических стержней). Угол поворота произвольного поперечного сечения стержня как жесткого целого, относительно сечения, принятого за неподвижное, обозначают $\varphi = \varphi(x)$ и называют **углом закручивания**.

2. Максимальное касательное напряжение в сечении любой формы при кручении всегда определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}, \quad (7)$$

где W_K – модуль или момент сопротивления сечения кручению, величина которого зависит от его формы и размеров.

3. **Погонным углом закручивания** называется производная от φ по x

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (8)$$

или

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{GJ_K},$$

где φ – угол закручивания сечения;

GJ_K – жесткость сечения стержня при кручении;

J_K – геометрическая характеристика жесткости, которая зависит от размеров и формы сечения.

Так как для круглых поперечных сечений $J_K = J_P$, J_P называется полярным моментом инерции. Полярный момент инерции для кольца

$$J_p = \iint_F \rho^2 dF = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{d_{1/2}}^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) \cong 0,1d^4 (1 - c^4),$$

$$W_K = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \cong 0,2d^3 (1 - c^4),$$

где $c = d_1/d$. Для круга при $c = 0$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \cong 0,1d^4, \quad W_K = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0,2d^3.$$

Потенциальная энергия упругой деформации, накопленной в стержне при кручении

$$U = \sum \int \frac{M_K^2 dx}{2GJ_K}$$

3.3. Графо-аналитическое исследование скручиваемых брусьев

После завершения упругой деформации, вызванной действием заданной статической нагрузки, вал приходит в состояние упругого равновесия.

Аналогично растяжению-сжатию, при решении задач на кручение определяются четыре величины:

1) интенсивность m_x загрузки вала сплошным крутящим моментом $\left(\frac{H \cdot m}{m}\right)$;

2) крутящий момент M_x ($H \cdot m$);

3) относительный угол закручивания φ_0 ($рад/м$);

4) абсолютный угол закручивания φ ($рад$) как величина углового перемещения, определяемого в каждом сечении по отношению к тому сечению вала, которое принимается за неподвижное.

Как и при растяжении-сжатии, первые две величины m_x и M_x являются характеристиками действующей нагрузки, а вторые две величины φ_0 и φ – характеристиками деформаций и перемещений, вызываемых этой нагрузкой. Взаимосвязь между перечисленными четырьмя величинами в

математическом смысле совершенно аналогична связи между величинами n_x , N_x , ε_x и Δx при растяжении-сжатии.

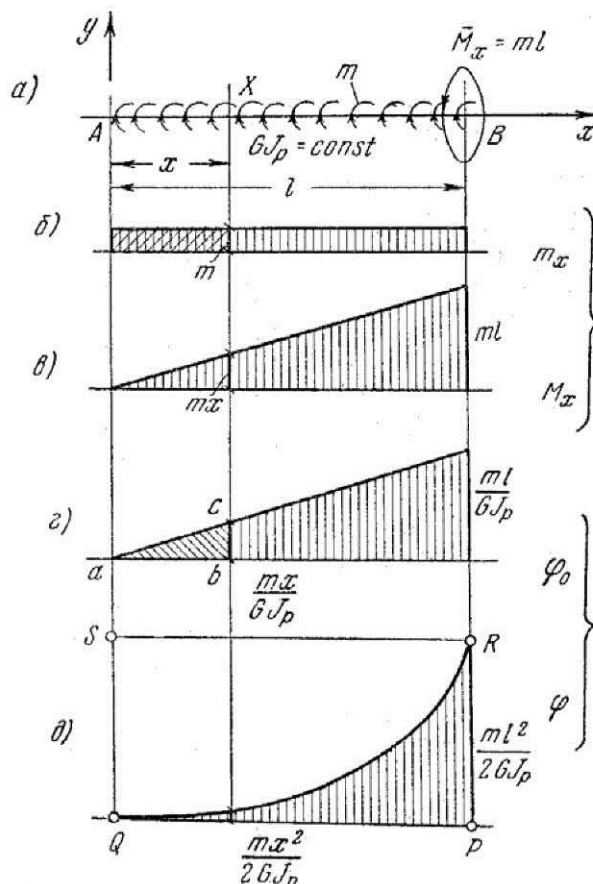


Рис. 30. Схема кручения вала постоянного сечения

Крутящий момент M_x определяется по алгебраической сумме внешних скручивающих пар сил, приложенных к валу по одну сторону рассматриваемого сечения. При упругом равновесии в каждом сечении вала сумма внешних моментов, действующих по одну сторону сечения, равна и противоположна сумме моментов, приложенных по другую сторону сечения.

Величины m_x и M_x с одной стороны, и величины φ_0 и φ с другой, связаны между собой дифференциально-интегральной зависимостью, основанной на соотношениях, аналогичных соотношениям, полученным в теории растяжения-сжатия.

Рассмотрим, например, вал AB постоянной жесткости (рис.30), нагруженный сплошным моментом интенсивностью m , равномерно распределенным по всей длине l вала, и сосредоточенным моментом $M_n = ml$.

Решение примера рассматривается во второй части методического пособия, см. пример № 9 часть II данного МП.

В пределах произвольно взятого бесконечно малого элемента вала длиной dx приращение крутящего момента

$$dM_x = m_x dx ,$$

откуда

$$m_x = \frac{dM_x}{dx} , \quad (9)$$

а крутящий момент

$$M_x = \int m_x dx + C_1 . \quad (10)$$

Согласно формулам (9), (10), интенсивность m_x сплошного крутящего момента является дифференциальной величиной по отношению к крутящему моменту M_x , а крутящий момент представляет собой интегральную величину по отношению к величине m_x .

Постоянная интегрирования C_1 определяется по граничным условиям. В рассматриваемом случае по формуле (4) при $m = \text{const}$ получается

$$M_x = mx + C_1 .$$

Так как при $x = 0$ крутящий момент $M_x = 0$, то $C_1 = 0$; следовательно, $M_x = mx$ и при $x = l$ найдем $M_{x, \max} = ml$.

В пределах бесконечно малой длины dx вала относительный угол закручивания определяется по формуле

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx} , \quad (11)$$

где $d\varphi$ – приращение угла закручивания φ при увеличении абсциссы x сечения на длину dx .

Величина $d\varphi = \varphi_0 dx$ и, следовательно, абсолютный угол закручивания

$$\varphi = \int \varphi_0 dx + C_2. \quad (12)$$

Согласно формулам (11) и (12), *относительный угол закручивания φ_0 является дифференциальной величиной по отношению к абсолютному углу закручивания φ , а величина φ является интегральной по отношению к величине φ_0 .*

Вторая постоянная интегрирования C_2 определяется по граничным условиям в зависимости от того, какое сечение вала считается неподвижным.

При заданной нагрузке для произвольно взятого сечения, удаленного на расстояние x от левого свободного конца вала, крутящий момент

$$M_x = mx, \quad \varphi_0 = \frac{mx}{GJ_p} \text{ и потому угол закручивания}$$

$$d\varphi = \varphi_0 dx = \frac{mx}{GJ_p} dx$$

$$\text{и} \quad \varphi = \frac{m}{GJ_p} \int x dx + C_2 = \frac{mx^2}{2GJ_p} + C_2.$$

Если сечение B принять неподвижным, то при $x = 2l$, $\varphi = 0$ и тогда

$$0 = \frac{m(2l)^2}{2GJ_p} + C_2,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{2ml^2}{GJ_p}.$$

Подставляя найденное значение C_2 , получим выражение для определения абсолютных углов закручивания

$$\varphi = \frac{m}{2GJ_p} x^2 - \frac{2ml^2}{GJ_p}.$$

При $x = 0$ найдем $\varphi_{\max} = -\frac{2ml^2}{GJ_p}$ (относительно правого крайнего сечения B вала, принятого за неподвижное).

Законы изменения m_x , M_x , φ_0 и φ можно изобразить в виде графиков – эпюр этих функций. При построении эпюр мысленно перемещаются от левого конца вала к правому в положительном направлении оси x , последовательно определяя для каждого сечения вала (см. рис. 30) четыре величины: m_x , M_x , φ_0 и φ .

3.4. Порядок построения эпюр при кручении

Таблица 3

Дифференциальная эпюра	1. Интенсивность $m_x = \frac{dm_x}{dx}$ загрузки вала сплошным моментом (Нм/м)	Для определения крутящего момента, передающегося на отдельные элементарные объемы вала
Интегральная эпюра	2. Крутящий момент $M_x = \int m_x dx + C_1$	
Формула для перехода от нагрузки к деформациям и перемещениям $\varphi_0 = \frac{M_x}{GJ_p}$		
Дифференциальная эпюра	3. Относительный угол закручивания φ_0	Для определения деформаций, напряжений и угловых перемещений
Интегральная эпюра	4. Абсолютный угол закручивания $\varphi = \int \varphi_0 dx + C_2 = \int \frac{M_x}{GJ_p} dx + C_2$	

Правило знаков. Условимся о следующих правилах знаков для исследуемых величин:

а) интенсивность m_x будет считаться положительной, если, смотря со стороны положительного направления оси x , она будет направлена в сторону вращения часовой стрелки;

б) крутящий момент будем считать положительным, если, смотря со стороны положительного направления оси x , будем иметь внешние моменты пар сил, расположенных слева от сечения, направленными в сторону вращения часовой стрелки;

в) знаки φ_0 и φ будут зависеть от принятых знаков для \overline{M}_x . Согласно указанному порядку общей последовательности определения величин, характеризующих упругое равновесие бруса, при применении графо-аналитического исследования бруса, работающего на скручивание, обычно строятся четыре эпюры:

$$m_x = f_1(x), \quad M_x = f_2(x), \quad \varphi_0 = f_3(x), \quad \varphi = f_4(x).$$

Как и при растяжении-сжатии, исследование указанных величин проводится по участкам, которые определяются пределами непрерывности функций.

Метод построения эпюр m_x , M_x , φ_0 и φ показан на примерах во второй части пособия.

4. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

4.1. Основные определения и понятия

Изгиб – деформированное состояние стержня или бруса, связанное с искривлением его оси в пространстве или плоскости. Изгибающий момент M_z (или M_y) возникает в поперечном сечении бруса с главными осями инерции сечения z и y при действии на брус сил, произвольно расположенных в пространстве. Если в поперечном сечении имеется только один изгибающий момент (M_z или M_y), в сечении возникает явление **чистого изгиба**; если кроме изгибающего момента (M_z или M_y), возникает еще поперечная сила (Q_y или Q_z), то такой изгиб называют **поперечным** изгибом. При действии двух изгибающих моментов возникает **косой** изгиб.

Следовательно, *при прямом изгибе плоскость действия сил (или силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей инерции сечения, а при косом изгибе не проходит.*

Брус при расчете на изгиб, независимо от формы и назначения (например, резец, вал), называется **балкой**.

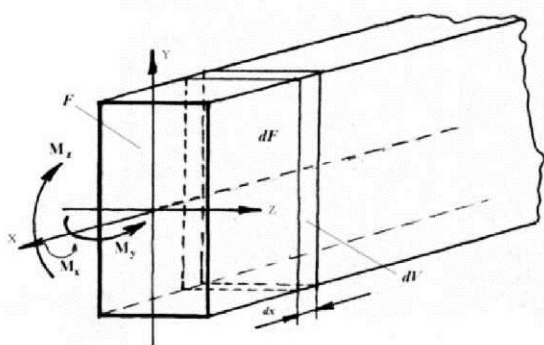


Рис. 31. Изгибные воздействия на прямую балку

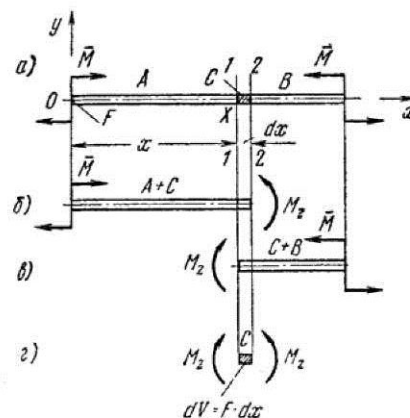


Рис. 32. Чистый изгиб балки

Рассмотрим простейший случай.

Простейшая форма изгиба, при которой искривление оси получается по всей длине балки в одной плоскости, называется **плоским изгибом**. Если изгибающий момент в поперечном сечении балки является

единственным силовым фактором, а все остальные равны нулю, то изгиб называется ч и с т ы м (наиболее простой случай), см. рис. 32.

При чистом изгибе изгибающий момент имеет во всех сечениях балки постоянную величину.

Бесконечно малый объем $dV = Fdx$, выделенный двумя сечениями 1-1 и 2-2, длиной dx (рис. 32, з), знаки изгибающих моментов определяются как на рис. 33, а и б.

Прямая до деформации ось балки под действием двух равных по величине и по знаку изгибающих моментов искривляется, образуя по длине балки плавную кривую линию, которая называется у п р у г о й л и н и е й или у п р у г о й к р и в о й. В балках большой жесткости кривизна упругой линии весьма мала.

4.2. Деформации и напряжения при чистом изгибе

Число внешних пар сил, входящих в состав уравновешенной системы, вызывающей чистый изгиб балки, не ограничено.

Рассмотрим рис. 33, схему балки, нагруженную одними изгибающими моментами.

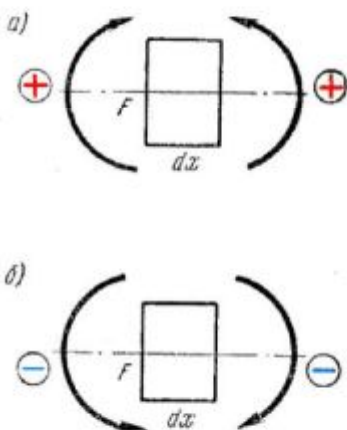


Рис. 33. Правило знаков

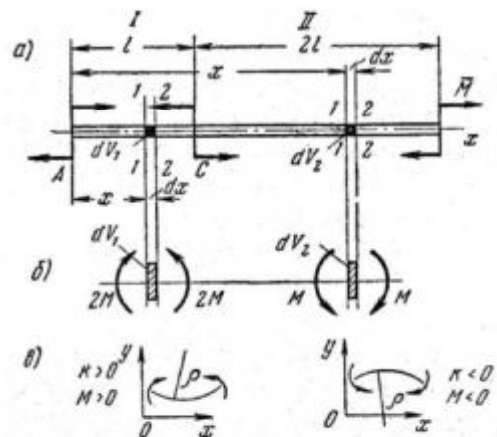


Рис. 34. Схема балки с чистым изгибом

При действии на элементарный объем балки двух равных (рис. 34, б) и противоположных изгибающих $M_2 > 0$ и $M_2 < 0$ моментов, имеющих

положительный знак, кривизне упругой линии соответствует радиус ρ , направленный в положительном направлении оси y , а потому кривизна $k = 1/\rho$ упругой линии в плоскости $x y$ принятой системы координат имеет положительный знак (рис. 34, в). При действии отрицательных изгибающих моментов получается кривизна с отрицательным знаком.

Следовательно, *знак кривизны упругой линии балки и знак изгибающего момента в принятой системе координат всегда одинаковы.*

Теория изгиба основана на *гипотезе плоских сечений*, согласно которой *плоскости поперечных сечений остаются плоскими и перпендикулярными к оси бруса после деформации* (гипотеза Я. Бернулли).

Между растянутыми и сжатыми волокнами располагаются волокна, не испытывающие ни растяжения, ни сжатия, а поэтому длины этих волокон не изменяются, хотя сами волокна искривляются. Такие волокна составляют так называемый *нейтральный слой балки*.

Из рассмотрения деформаций волокон балки (рис. 35, а, б) можно сделать вывод, что линейная деформация при изгибе определяется

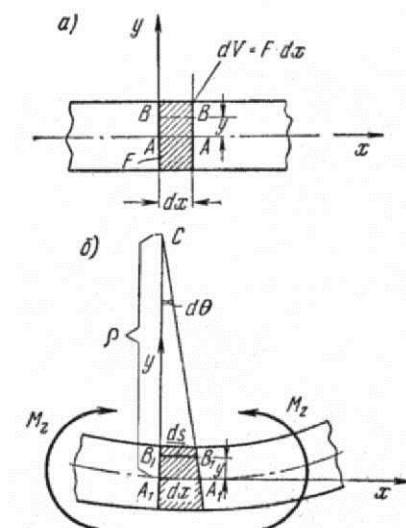


Рис. 35. Деформация волокон при изгибе

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}, \quad (13)$$

или

$$\epsilon_x = -k \cdot y, \quad (14)$$

где $k = \frac{1}{\rho}$ – кривизна упругой линии в пределах рассматриваемого объема dV балки.

Формула (14) показывает, что при изгибе в продольных слоях материала величина линейной деформации изменяется прямо пропорционально расстоянию y от оси балки. При положительных значениях y для линейной деформации получается отрицательный знак, соответствующий зоне сжатия, а при отрицательных значениях – положительный, что соответствует зоне растяжения.

При $y = 0$ линейная деформация $\epsilon = 0$, т. е. действительно в изогнутой балке существует нейтральный слой, совпадающий с поверхностью, отделяющей зону растяжения от зоны сжатия, в котором линейная деформация отсутствует.

При $y = y_{\frac{\max}{\min}}$ линейная деформация $\epsilon_x = \epsilon_{\frac{\min}{\max}}$, т. е. наибольшая линейная деформация (с учетом знаков y величин y и ϵ) получается в поверхностных продольных слоях балки, наиболее удаленных от нейтрального слоя.

Линейная деформация получается в общем случае одновременно в трёх взаимно перпендикулярных направлениях; при изгибе растяжение продольных слоев материала сопровождается сокращением слоев в поперечных направлениях, и наоборот, – сжатие продольных слоев сопровождается увеличением размеров в направлении осей y и z . Учитывая, что линейная деформация продольных слоев в направлении оси x различна, получим и разную по величине поперечную деформацию, а следовательно, изменение формы поперечного сечения при изгибе балки. Ширина сечения в растянутой зоне уменьшается, а в сжатой зоне увеличивается.

Соотношения между величинами поперечной и продольной линейных деформаций определяется коэффициентом Пуассона

$$\mu = \frac{\left| \varepsilon_{yx} \right|}{\left| \varepsilon_{xx} \right|} = \frac{\left| \varepsilon_{zx} \right|}{\left| \varepsilon_{xx} \right|}. \quad (15)$$

Для расчетов балок на прочность линейная деформация слоев материала в направлении осей y и z не имеет существенного значения.

Излагаемая теория изгиба относится к так называемым балкам большой жесткости, т. е. балкам, упругие деформации которых настолько малы, что длину балки практически можно считать одинаковой до и после деформации.

По закону Гука нормальное напряжение $\sigma_x = E\varepsilon_x$, а так как $\varepsilon_x = -ky$, то

$$\sigma_x = -Eky. \quad (16)$$

Формула (16) показывает, что при изгибе нормальные напряжения распределяются, изменяясь по высоте поперечных сечений балки по линейному закону. Напряжение σ_x считается постоянным по всей ширине поперечного сечения. Для балок, ширина сечения которых по сравнению с высотой относительно невелика, этот вывод в достаточной степени соответствует действительности.

Для поперечного сечения балки (расположенного перпендикулярно плоскости чертежа) на рис. 36 показана эпюра нормальных напряжений σ_x . В нейтральном слое нормальные напряжения отсутствуют; наибольшие напряжения, имеющие основное значение для расчетов на прочность, получается в поверхностных слоях материала, наиболее удаленного от нейтрального слоя балки.

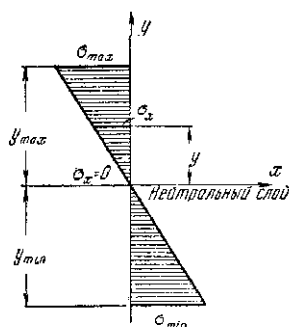


Рис. 36. Эпюра нормальных напряжений

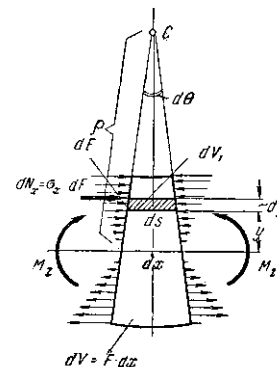


Рис. 37. Напряжения при изгибе балки

4.3. Нормальные напряжения при изгибе

Рассмотрим брус, нагруженный постоянным изгибающим моментом

$$M_z = \bar{M} = \text{const.}$$

Для установления зависимости между внешними и внутренними силами выделим элемент бруса, отсеченный от целого.

Уравнение равновесия $\Sigma M_x = 0$; $\Sigma M_y = 0$, требует, чтобы

$$dN_x \cdot z = 0; \quad dN_x = \sigma_x \cdot dF.$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Eky.$$

Подставляя эти значения в уравнение равновесия $\Sigma X = 0$, получим

$\int_F dN_x = 0$ или $\int_F \sigma_x dF = 0$, заменяя подынтегральные выражения, получим:

$$Ek \int_F y dF = 0,$$

если $E \neq 0$, $k \neq 0$, то упругое равновесие балки возможно при условии равенства статического момента площади сечения балки относительно оси z :

$$\int_F y dF = S_z,$$

если $S = 0$, то при изгибе ось z всегда проходит через центр тяжести поперечного сечения балки.

Из условия, что $\Sigma M_y = 0$, $dN_x \cdot z = 0$, подставляя в уравнение $dN_x = \sigma_x \cdot dF$, получим $Ek \int_F yz dF = 0$, а так как $Ek \neq 0$, то $\int_F yz dF = 0$, то величина $J_{yz} = \int_F yz dF = 0$, является центробежным моментом инерции сечения F относительно осей y и z .

Из условия равновесия $\Sigma M_z = 0$, имеем

$$\int_F dN_x \cdot y = \bar{M}, \quad \text{или} \quad \int_F dN_x \cdot y - \bar{M} = 0, \quad \text{но так как} \quad \bar{M} = \bar{M}_z,$$

то $M_z = \int_F Eky \cdot dF \cdot y = Ek \int_F y^2 dF$, а $J_z = \int_F y^2 dF$ – представляет собой осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси z .

$$\text{Тогда } M_z = EJ_z k, \text{ и } k = \frac{M_z}{EJ_z} \quad (17)$$

Согласной этой формуле, кривизна $k = \frac{1}{\rho}$ упругой линии балки прямо пропорциональна действующему изгибающему моменту M_z и обратно пропорциональна произведению EJ_z , называемому *жесткостью балки при изгибе*. Она представляет собой *физико-геометрическую величину*; она *зависит от физических свойств материала, характеризуемых величиной модуля упругости E , а также от геометрических размеров и формы сечения, характеризуемых осевым моментом инерции J_z .*

Жесткость балки измеряется, как и при кручении, в $H \cdot м^2$

$$\left(\frac{H}{м^2} \cdot м^4 = H \cdot м^2 \right).$$

Из формул (16) и (17) следует, что

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{J_z} y. \quad (18)$$

Полученная формула служит для определения *нормального напряжения в любой точке любого сечения*.

Если $y = |y|_{\max}$, то получим формулу для определения наибольшего напряжения

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M_z}{J_z} |y|_{\max}. \quad (19)$$

Обозначая

$$W_z = \frac{J_z}{|y|_{\max}}, \quad (20)$$

получим так называемый момент сопротивления сечения, измеряемый в $м^3$.

$$\text{Тогда } |\sigma|_{\max} = \frac{M_z}{W_z}. \quad (21)$$

При изгибе балок момент сопротивления, как и момент инерции сечения, определяется относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба, т. е. относительно нейтральной оси сечения; при изгибе в плоскости xu – относительно оси z , а при изгибе в плоскости xz – относительно оси y .

Формула (21) позволяет определять абсолютную величину наибольшего как растягивающего, так и сжимающего нормального напряжения балки, требующихся для расчета балок на прочность.

4.4. Прямой поперечный изгиб. Изгибающий момент и поперечная сила. Дифференциально-интегральная зависимость между q_y , Q_y , M_z

Поперечным изгибом называется прямой изгиб, при котором в сечении возникает не только изгибающий момент M_z , но и поперечная сила Q_y (или, соответственно, M_y и Q_z).

Пусть на балку действует уравновешенная плоская система сил, состоящая из пар сил, сосредоточенных сил (активных и реактивных) и распределенной нагрузки интенсивностью $q_y = f(x)$ (см. рис. 38).

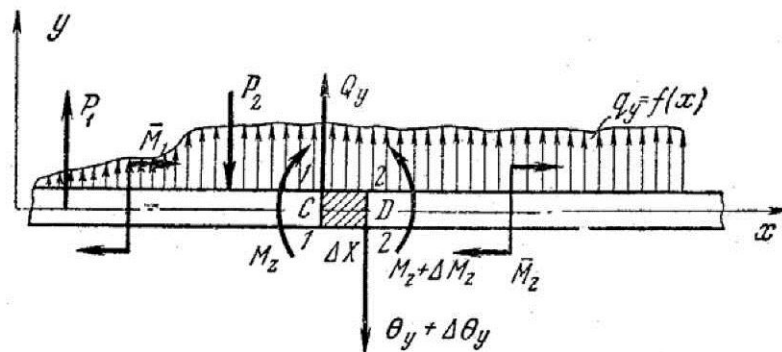


Рис. 38. Общий вид нагружения балки q_y , Q_y , M_z

Выделим двумя сечениями $1-1$ и $2-2$ из балки элемент $CD = \Delta x$, см. рис. 39.

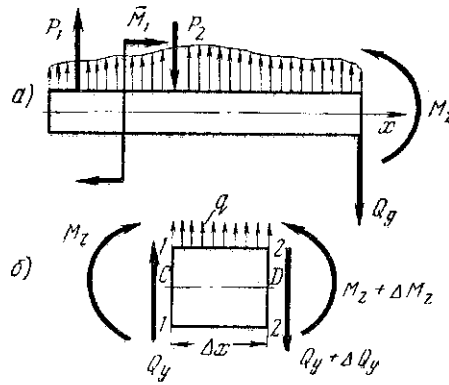


Рис. 39. Выделенный элемент балки

Чтобы выделенный элемент оставался в равновесии, к боковым его граням в сечениях 1-1 и 2-2 следует приложить изгибающие моменты M_z и $M_z + \Delta M_z$, а также поперечные силы Q_y и $Q_y + \Delta Q_y$. Из условия равновесия $\Sigma Y = 0$ получаем

$$Q_y + q_y \Delta x - (Q_y + \Delta Q_y) = 0,$$

откуда

$$\frac{\Delta Q_y}{\Delta x} = q_y.$$

По условию равновесия $\Sigma M_z = 0$ имеем

$$M_z + Q_y \Delta x + (q_y \Delta x) \frac{\Delta x}{2} - (M_z + \Delta M_z) = 0,$$

откуда

$$\frac{\Delta M_z}{\Delta x} = Q_y + q_y \frac{\Delta x}{2}.$$

Переходя к пределу, полагаем, что $\Delta x \rightarrow 0$.

Тогда

$$\frac{dQ_y}{dx} = q_y, \quad (22)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = \frac{dQ_y}{dx} = q_y. \quad (24)$$

Обратно,

$$Q_y = \int q_y dx + C_1, \quad (25)$$

$$M_x = \int Q_y dx + C_2 = \iint q_y dx^2 + C_1 x + C_2. \quad (26)$$

Таким образом, между q_y , Q_y , M_z существует интегрально-дифференциальная зависимость.

4.5. Графо-аналитический метод определения поперечных сил и изгибающих моментов

При определении величин q_y , Q_y и M_z , являющихся в пределах отдельных участков балки непрерывными функциями независимого переменного x , применяется аналитический или графо-аналитический метод с построением эпюр и с широким использованием всех свойств графиков степенных функций, связанных дифференциально-интегральной зависимостью. Постоянные интегрирования определяются величинами исследуемых функций при граничных значениях независимого переменного x , известными по условиям задачи.

4.6. Порядок построения эпюр при прямом изгибе

Таблица 4

Дифференциальная эпюра	1. Интенсивность $q_y = \frac{dQ_y}{dx}$ загрузки балки сплошными нагрузками	—
Интегральная эпюра	2. Поперечная сила $Q_y = \int q_y dx + C_1$	Для определения поперечной силы, передающейся на отдельные элементарные объемы балки
Дифференциальная эпюра	3. Поперечная сила $Q_y = \frac{dM_z}{dx}$	—
Интегральная эпюра	4. Изгибающий момент $M_z = \int Q_y dx + C_2$	Для определения изгибающего момента, передающегося на отдельные элементарные объемы балки

При построении эпюр мысленно перемещаются от левого конца балки к правому в положительном направлении оси x .

До построения эпюр необходимо определить реактивные факторы (реактивные силы и моменты), пользуясь уравнениями равновесия статики. Правило знаков для исследуемых величин примем следующие:

а) q_y , направленное вверх, в положительном направлении оси y , будем считать положительным, и наоборот;

б) Q_y , численно равную проекции на нормаль к оси бруса всех внешних сил, расположенных слева от сечения, будем считать положительной, если суммарная величина проекции будет направлена в положительную сторону оси y , и наоборот;

в) знак изгибающего момента будем устанавливать, как было указано ранее.

При решении задач и нахождении трех величин q_y , Q_y и M_z каждая последующая получается из предыдущей путем интегрирования и, наоборот, каждая предыдущая получается из последующей путем дифференцирования.

Каждая ордината эпюры Q_y или M_z , соответствующая абсциссе x , определяет, соответственно, величину поперечной силы или изгибающего момента в соответствующем сечении. На основании дифференциально-интегральной зависимости между тремя величинами q_y , Q_y и M_z подсчет величин Q_y и M_z можно производить по площадям дифференциальных эпюр; так, в сечении X балки, расположенном на расстоянии x от начала координат, величина поперечной силы определяется по общей формуле

$$Q_y = \Omega_{q_y} + \Sigma P,$$

где $\Omega_{q_y} = \int q_y dx$ – площадь эпюры интенсивности q_y в пределах абсциссы x , ΣP – сумма проекций на ось y сосредоточенных внешних сил, действующих на балку в пределах абсциссы x , т. е. слева от сечения X балки.

Подобным же образом для сечения X величина изгибающего момента определяется по общей формуле

$$M_z = \Omega_{Q_y} + \Sigma \bar{M},$$

где Ω_{Q_y} – площадь эпюры поперечных сил в пределах абсциссы;

$\Sigma \bar{M}$ – сумма моментов относительно оси z сосредоточенных пар сил, действующих слева от сечения X .

Эпюры строятся последовательно и располагаются одна под другой – интегральная эпюра ниже дифференциальной, как это указано на рис. 40.

Учитывая направление действия заданной сплошной нагрузки, указанное на грузовой схеме стрелками, на основе рассмотренного построения эпюры M_z можно сформулировать следующее практическое правило: *при сплошной нагрузке парабола, получающаяся на эпюре изгибающих моментов, всегда обращена выпуклостью навстречу направлению сплошной нагрузки.*

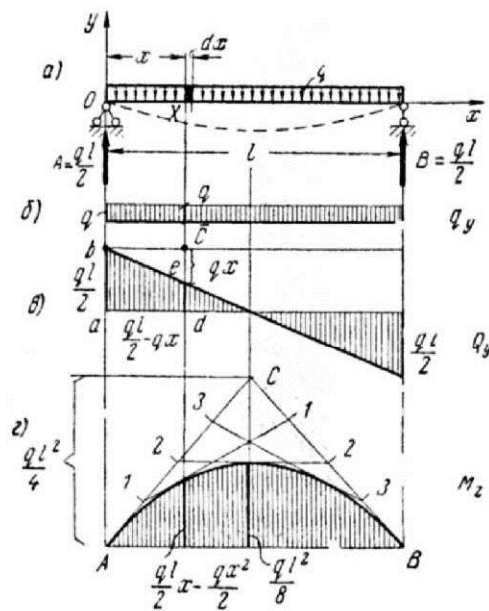


Рис. 40. Пример построения эпюр

Примеры решения задач на эту тему см. во второй части данных методических указаний.

4.7. Правила построения эпюр при изгибе

I. Если балка или часть ее загружена только сосредоточенными силами (сплошная нагрузка отсутствует, т. е. $q_y = 0$), то на отдельных участках балки между сосредоточенными силами поперечная сила Q_y будет постоянна $\left(\frac{dQ_y}{dx} = q_y = 0\right)$, т. е. эпюра Q_y будет иметь ступенчатый характер, а изгибающий момент будет меняться по наклонным прямым.

II. Если определенный участок балки загружен сплошной равномерной нагрузкой (нагрузка очерчена горизонтальной прямой, т. е. кривой нулевого порядка), то в пределах загруженного участка поперечная сила будет меняться по наклонной прямой (кривая первого порядка), а изгибающий момент – по закону квадратной параболы (кривая второго порядка).

III. Если определенный участок балки загружен сплошной нагрузкой, интенсивность которой меняется по закону наклонной прямой, как треугольная, трапецеидальная нагрузка (в уравнение прямой x входит в первой степени), то в пределах загруженного участка поперечная сила будет меняться по закону квадратной параболы, а изгибающий момент – по закону кубической параболы.

IV. В любом сечении балки ордината изгибающего момента M_x численно равна площади левоотсеченных частей эпюры поперечных сил плюс алгебраическая сумма сосредоточенных пар сил (если таковые имеются) в левоотсеченной части балки.

Следствие из правила IV: разность ординат в эпюре изгибающих моментов в каких-либо двух сечениях численно равна – площади эпюры поперечных сил между сечениями плюс сумма сосредоточенных пар сил (если таковые имеются) в том же интервале.

Так как первая производная от изгибающего момента есть поперечная сила, то вторая производная от изгибающего момента равна первой производной от поперечной силы или интенсивности сплошной нагрузки:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y; \quad \frac{d^2 M_z}{dx^2} = \frac{dQ_y}{dx} = q_y.$$

V. Тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к кривой изгибающего момента в любом сечении балки численно равняется ординате поперечной силы в рассматриваемом сечении; поэтому если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила положительна, то изгибающий момент (слева направо) будет возрастать, а если поперечная сила отрицательна, то изгибающий момент будет убывать, и, наконец, если в пределах участка $Q_y = 0$, то M_z будет неизменным.

VI. Тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к кривой поперечной силы, в любом сечении численно равняется интенсивности сплошной нагрузки в рассматриваемом сечении.

VII. Поперечная сила имеет максимумы или минимумы в тех сечениях балки, в которых ордината сплошной нагрузки равна нулю или скачком (уступом) переходит через нуль.

VIII. Изгибающий момент имеет максимумы или минимумы в тех сечениях балки, в которых ордината эпюры поперечных сил равна нулю или скачком (уступом) переходит через нуль.

Наибольшее по абсолютной величине значение момента может быть и в одном из крайних сечений балки.

IX. В правильно построенной эпюре поперечных сил, при отсутствии сосредоточенных пар сил (активных или реактивных), положительная и отрицательная части площади эпюры должны быть равновеликими, т. е. вся площадь эпюры Q_y должна равняться нулю.

X. При наличии на балке смешанной нагрузки, включая и сосредоточенные пары сил, или защемления (т. е. при наличии реактивного момента) будет равна нулю алгебраическая сумма всех площадей эпюры Q_y , сложенная с алгебраической суммой активных и реактивных пар сил.

XI. Ордината изгибающего момента в любом сечении балки численно равна взятым с обратными знаками правоотсеченным площадям эпюры Q_y и сосредоточенным парам сил, находящимся в правоотсеченной части балки.

XII. В простой балке, без консолей, поперечная сила на левой опоре равна левой опорной реакции с ее знаком, а на правой опоре правой опорной реакции с обратным знаком:

$$Q_A = +A; \quad Q_B = -B.$$

XIII. При действии симметричной нагрузки на симметричную балку (например, на двух опорах, без консолей или с равными консолями) эпюра поперечных сил будет антисимметричной, а эпюра изгибающих моментов – симметричной.

XIV. При действии на симметричную балку антисимметричной нагрузки эпюра поперечных сил будет симметричной, а эпюра изгибающих моментов – антисимметричной.

На рис. 41 приведен пример эпюр, построенных для балки, работающей на изгиб под действием смешанной нагрузки. Пример рекомендуется решить самостоятельно с применением изложенных правил.

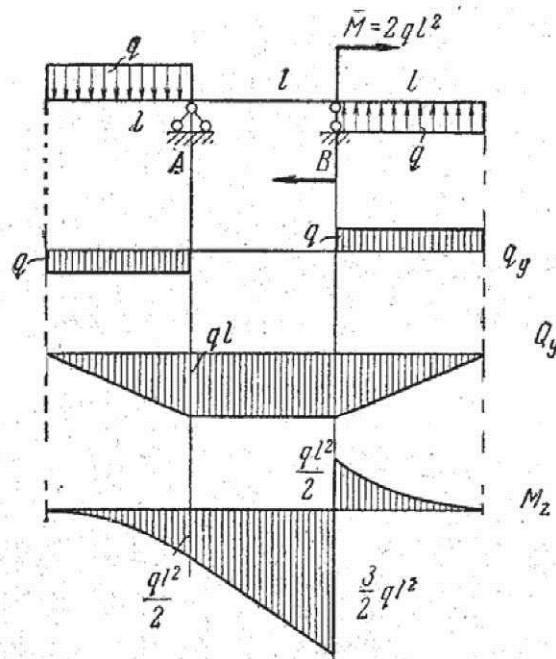


Рис. 41. Пример двухопорной балки под нагрузкой и с эпюрами q , Q , M_z

4.8. Определение перемещений при изгибе

В общем случае плоского изгиба сечение балки может иметь три степени свободы, т. е. два линейных перемещения (по осям x и y) и одно угловое (поворот относительно оси z).

В основном курсе сопротивления материалов рассматриваются только балки большой жесткости, перемещения сечений которых при упругой деформации незначительные. На этом основании малые изменения длины балок, вследствие деформации изгиба, не учитываются.

Не учитываются в связи с этим и линейные перемещения сечений в направлении оси x . Другие два перемещения – линейное в направлении оси y и угловое относительно оси z имеют в инженерных задачах большое значение и определяются по формулам, достаточно точным для практических целей. Правильность расчетных формул проверяется опытным путем в лабораторных условиях с помощью измерительных приборов.

При плоском изгибе прямая ось балки искривляется в силовой плоскости, вследствие чего центры тяжести отдельных сечений получают в направлениях, перпендикулярных оси балки, линейные перемещения, называемые **прогибами балки**.

Каждому значению независимого переменного x соответствует прогиб в направлении, параллельном оси y ; величину прогиба условимся обозначать через v . При упругой деформации, т. е. при весьма малых перемещениях, прогиб определяется ординатой упругой линии.

На рис. 42 показаны три схемы балок с обозначением перемещений, получающихся при изгибе. В обоих случаях в сечении X , удаленном на расстоянии x от начала координат, показан прогиб v . Наибольший прогиб v_{\max} называется **стрелой прогиба** и обозначается через f .

При изгибе балки, заделанной одним концом и нагруженной на свободном конце сосредоточенной парой сил (рис. 42, а), а также в балке на двух опорах при действии сосредоточенной силы в середине пролета (рис. 42, б) стрела прогиба f получается в том же сечении, в котором приложена заданная сила.

Однако такое совпадение получается лишь в частных случаях. Если сосредоточенную силу P сместить относительно середины пролета (рис. 42, в), то стрела прогиба лишь незначительно сместится относительно середины пролета и не будет в том сечении, в котором приложена заданная сила. Указать заранее сечение, в котором будет

$v_{\max} = f$, не представляется возможным. Приходится сначала находить сечение, в котором прогиб балки получается наибольшим, а потом определять величину прогиба. Эту задачу необходимо уметь решать в более сложных случаях изгиба – при произвольном расположении опор и при действии смешанной нагрузки.

На основании гипотезы плоских сечений принимается, что при искривлении оси балки плоскости поперечных сечений остаются плоскими и перпендикулярными упругой линии; вращаясь при изгибе относительно оси z , плоскость поперечных сечений получает наклон относительно своего начального положения. Углы наклона обозначаются буквой Θ .

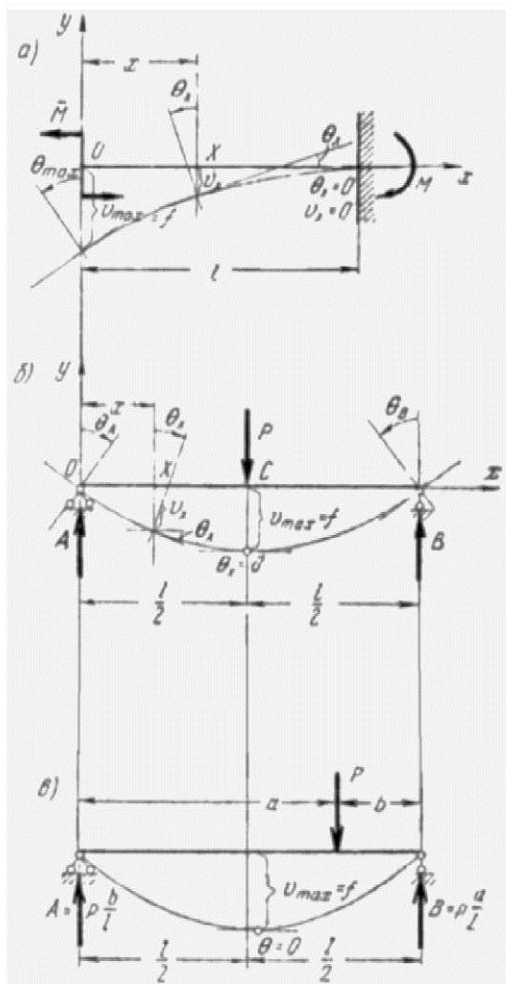


Рис. 42. Схемы балок с разными прогибами

В каждом сечении балки угол наклона плоскости сечения и угол наклона касательной к упругой линии с осью x равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 42, б).

На основе заданной схемы балки всегда можно указать некоторые, наиболее характерные сечения, в которых перемещения заранее известны, что и приходится использовать при решении задач.

Например, из рис. 42, а видно, что при $x = l$ перемещения $v = 0$ и $\Theta = 0$, так как в заделке прогиб балки невозможен и плоскость поперечного сечения остается неподвижной.

В балке на двух опорах (рис. 42, б) прогиб $v = 0$ при $x = 0$ и при $x = l$ (т. е. в опорных сечениях балки). На опоре A и в пределах левой половины балки угол наклона имеет отрицательный знак, а на опоре B и в пределах правой

половины балки – положительный. При $x = \frac{l}{2}$, т. е. в том сечении C , в котором получается стрела прогиба, угол наклона $\Theta = 0$.

Таким образом, изгиб в целом характеризуется одновременно как величинами углов наклона Θ плоскостей поперечных сечений, так и величинами прогибов v ; чем больше деформация при изгибе, тем больше углы наклона и тем больше прогибы.

Для решения инженерных задач требуется на основе расчетных формул определять углы наклона сечений, выражаемые в радианах, а также прогибы балки, выражаемые в линейных мерах.

4.9. Упругая линия при чистом изгибе

В теории чистого изгиба установлено, что кривизна упругой линии

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}.$$

При постоянной жесткости EJ_z и при постоянном изгибающем моменте (т. е. в случаях чистого изгиба) кривизна упругой линии балки постоянна, а поэтому постоянным будет и радиус кривизны. Следовательно, при чистом изгибе упругая линия балки постоянной жесткости имеет форму дуги окружности. Поэтому чистый изгиб иногда называют **круговым изгибом**.

Необходимо отметить, что дуга окружности получается в случае чистого изгиба только при использовании точного математического выражения для кривизны

$$k = \pm \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (27)$$

При обычных упрощающих допущениях упругая линия при чистом изгибе получится в виде параболы второго порядка, близкой по очертанию к дуге окружности.

При переменной величине изгибающего момента (т. е. во всех тех случаях, в которых изгиб сопровождается сдвигом) в балках постоянной жесткости упругая линия не может быть дугой круга. Как показано в дальнейшем, при $M_z \neq \text{const}$, упругая линия получается в виде параболы того или иного порядка, в зависимости от характера действующей нагрузки.

Однако в частных случаях кривизна упругой линии балки может быть постоянной и при переменном изгибающем моменте M_z , но уже не при постоянной, а при переменной жесткости балки. В этом случае изгибающий момент и жесткость балки должны выражаться одинаковыми функциями независимого переменного x .

На рис. 43 в пределах пролета AB балки изгибающий момент $M_z = \text{const}$ и поперечная сила $Q_y = 0$, а потому при постоянной жесткости балки в промежутке между опорами A и B упругая линия имеет форму дуги окружности. В пределах же консольных частей балки $M_z \neq \text{const}$ и $Q_y \neq 0$, поэтому здесь упругая линия не может быть дугой круга.

Как ранее было установлено, в балках, имеющих до деформации прямую ось, знаки кривизны и изгибающего момента в принятой системе

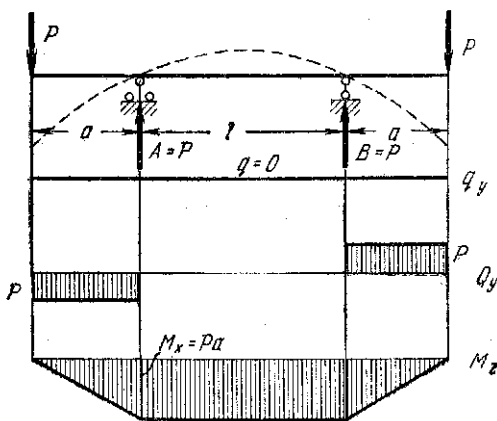


Рис. 43. Круговой изгиб двухопорной балки

координат всегда одинаковы, поэтому по форме эпюры M_z можно сразу указать знак кривизны упругой линии балки: положительным ординатам эпюры M_z соответствует в плоскости xu положительная кривизна упругой линии, отрицательным ординатам — отрицательная. Ординаты изгибающих моментов и центр кривизны упругой линии получаются всегда по одну сторону оси балки (для каждого участка балки).

4.10. Дифференциально-интегральная зависимость между кривизной и перемещениями сечений балки

На рис. 44 показан фрагмент упругой линии балки. При изгибе балки в пределах dx получится бесконечно малая дуга, кривизна которой на основании соотношения $k = \frac{d\theta}{dx}$ определяет первую производную от угла наклона, выраженного в функции того же независимого переменного x .

Так как $d\theta = k dx$, то угол наклона

$$\Theta = \int k \cdot dx + C_3. \quad (28)$$

Следовательно, кривизна k упругой линии является дифференциальной величиной относительно угла наклона Θ , а угол наклона – интегральной величиной относительно кривизны.

В треугольнике abc

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{bc}{ab} \approx \frac{dv}{dx}.$$

При малых упругих деформациях можно считать $\operatorname{tg}\Theta \approx \Theta$, а потому

$$\Theta = \frac{dv}{dx}. \quad (29)$$

Отсюда следует, что

$$v = \int \Theta dx + C_4. \quad (30)$$

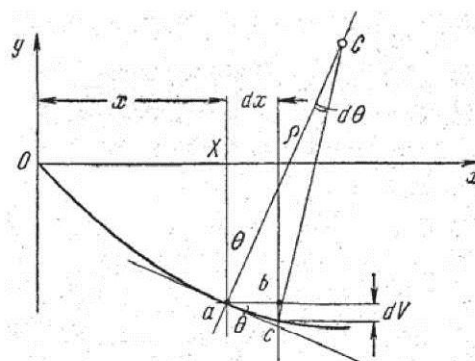


Рис. 44. Фрагмент упругой линии балки

Основываясь на формулах (29) и (30), приходим к выводу, что угол наклона Θ является дифференциальной величиной по отношению к прогибу v , а прогиб – интегральной величиной по отношению к углу наклона Θ .

Подставляя выражение для угла Θ из формулы (28) в формулу (30), получаем

$$v_x = \int dx \int k \cdot dx + C_3 x + C_4. \quad (25)$$

Таким образом, при $v = f(x)$ угол наклона $\Theta = \frac{dv}{dx} = f'(x)$ и кривизна балки $k = \frac{d^2v}{dx^2} = f''(x)$. Такое выражение для кривизны балки является приближенным и применимым для жестких балок, так точное выражение дает формула (27).

Дифференциально-интегральная зависимость между величинами k , Θ и v позволяет определять кривизну и перемещения при изгибе по эюграм, используя свойства графиков степенных функций, связанных между собой дифференциально-интегральной зависимостью.

4.11. Порядок построения эюграм при изгибе

Таблица 5

Дифференциальная эюра	1. Интенсивность q_y , сплошной распределенной нагрузки	Для расчета балок на прочность
1-я интегральная эюра	2. Поперечная сила $Q_y = \int q_y dx + C_1$, где $Q_y = \frac{dM_z}{dx}$	
2-я интегральная эюра	3. Изгибающий момент $M_z = \int Q_y dx + C_2$	
Формула для перехода от нагрузки к деформациям и перемещениям $k = M_z / EJ_z$		
Дифференциальная эюра	4. Кривизна упругой линии $k = d\theta/dx$	Для расчета балок на жесткость
1-я интегральная эюра	5. Угол наклона $\theta = \int k dx + C_3$, где $\theta = dv/dx$	
2-я интегральная эюра	6. Прогиб $v = \int \theta \cdot dx + C_4 =$ $= \int dx \int k \cdot dx + C_3 x + C_4$	

5. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ. РАМЫ

5.1. Общие понятия

В сопротивлении материалов основной объект изучения – брус, или стержень. Брусья или стержни (прямые или кривые), соединенные в общую конструкцию составляют **стержневую систему** (рис. 45).

Стержневая система, у которых оси всех элементов и нагрузка лежат в одной плоскости, называется **плоской стержневой системой**.

Соединения стержней в узловых точках называются **узлами**. Конструктивно узлы могут быть **жесткими**, или **шарнирными**, такие конструкции существенно различаются распределением и характером нагрузки, передающейся на отдельные элементы системы.

Все стержневые системы можно разделить на три группы:

1) **ферменные** конструкции, или **фермы**, при расчете которых можно полагать соединения в узлах шарнирными;

2) **рамные** конструкции, или **рамы** с жестким соединением стержней в узлах;

3) **смешанные (ферменно-рамные)** конструкции, в которых одни стержни соединены в узлах жестко, а другие – шарнирно.

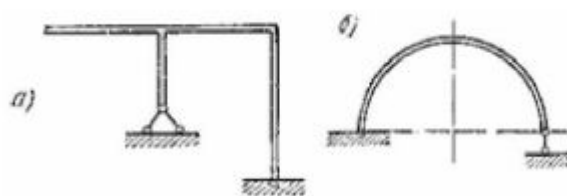


Рис. 45. Стержневые системы

Соединение двух или нескольких стержней называется **жестким**, если узлы, образуемые в узловой точке осями соединяемых стержней, остаются неизменными и после упругой деформации стержневой системы.



Рис. 46. Жесткое шарнирное соединение стержней

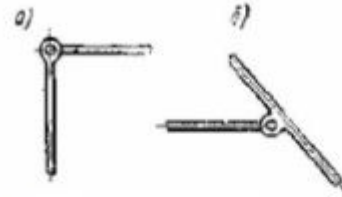


Рис. 47. Шарнирный способ соединения стержней: а - соединение полного шарнира; б - соединение присоединенного шарнира

На рис. 46 приведены примеры жесткого соединения прямых стержней. Под действием заданной нагрузки стержни системы могут растягиваться, сжиматься или изгибаться, но в непосредственной близости от узла угол, образуемый осями стержней, не изменяется при упругой деформации стержней.

Шарнирный способ соединения стержней показан на рис. 47. На рис. 47, а – шарнирное соединение концов стержней с помощью так называемого **полного шарнира**. На рис. 47, б – приведена схема соединения с помощью **присоединенного шарнира**.

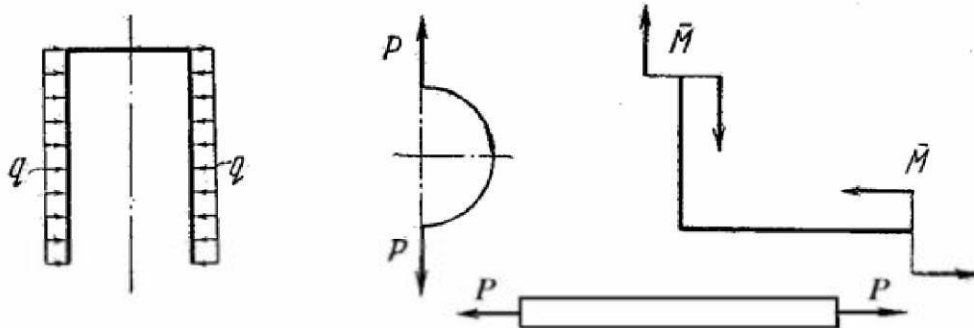


Рис. 48. Самоуравновешенная система

В шарнирных соединениях угол, образуемый осями стержней, под влиянием упругой деформации всей конструкции изменяется.

В первую очередь, рассматриваются плоские жесткие системы прямых стержней с нагрузкой, действующей в плоскости системы.

При самоуравновешенной нагрузке жесткая стержневая система может быть *безопорной*, т. к. и при отсутствии опор система остается в равновесии (рис. 48).

Если нагрузка не является самоуравновешенной, то система может находиться в равновесии только при наличии опор, как в обыкновенных балках. Ранее в данных методических указаниях были рассмотрены возможные опоры, опорные элементы и реактивные величины (см. п. 1.4).

Находясь под действием заданной нагрузки в состоянии упругого равновесия, всякая стержневая система должна, прежде всего, удовлетворять требованиям прочности.

Стержневая система считается *прочной*, если наибольшее напряжение, получающееся в стержнях системы при упругой деформации, обеспечивает желаемый запас прочности относительно того предельного напряжения, которое может выдерживать материал, применяемый для изготовления стержневой системы.

В некоторых конструкциях к требованиям прочности могут присоединяться добавочные требования жесткости. Для расчетов на жесткость требуется определение линейных и угловых перемещений, возникающих при упругой деформации системы.

Кроме расчетов на прочность и жесткость, часто необходим расчет на устойчивость.

5.2. Жесткие стержневые системы

Для расчета рамной системы на прочность по допускаемым напряжениям решающее значение имеют наибольшие напряжения, для определения которых необходимо знать во всех сечениях величины N_x , Q_y , и M_z . Ниже излагаются методы построения эпюр нормальных и поперечных сил и изгибающих моментов, передающихся через отдельные сечения стержней.

По наибольшим ординатам эпюр находятся опасные сечения, в которых возникают наибольшие напряжения.

В каждом стержне системы элементарный объем $dV = F \cdot dx$ получается при изменении абсциссы x на величину dx (рис. 49).

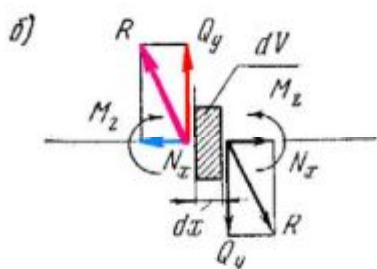
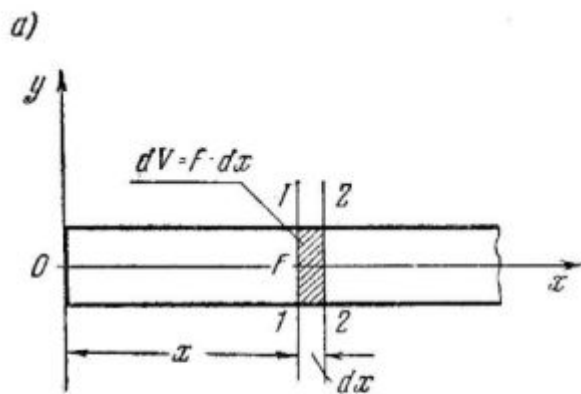


Рис. 49. Определение усилий в стержнях

стержня будут возникать продольная сила N_x , поперечная сила Q_y и изгибающий момент (рис. 49, б). После завершения упругой деформации стержневой системы, т. е. при установившемся упругом равновесии,

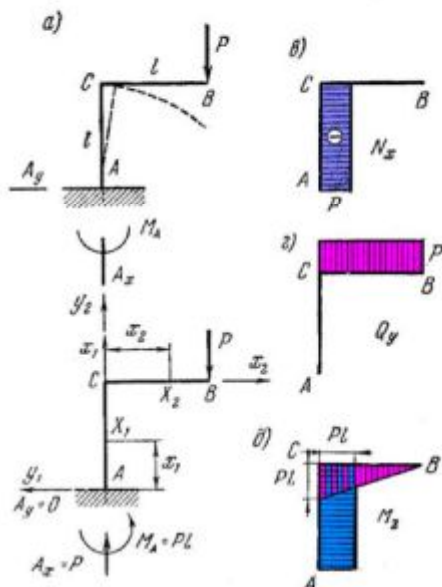


Рис. 50. Расчет стержневой системы

Если все внешние силы и пары сил, действующие на рассматриваемую стержневую систему по одну сторону взятого объема dV , привести по правилам механики к центру тяжести торцевой грани этого объема, то при совпадении силовой плоскости с плоскостью системы получатся, как и в простой балке, пара сил с моментом $M = M_z$ и сила R . Если силу R разложить на две составляющие, направленные, соответственно, перпендикулярно плоскости и в плоскости, то в общем случае в рассматриваемом сечении

величины N_x , Q_y , и M_z , передающиеся через поперечное сечение с одной стороны, уравновешиваются равными и противоположно направленными величинами, передающимися через то же сечение с другой стороны системы. Построение эпюр N_x , Q_y , M_z рассмотрим на примерах.

Пример 1. Рассмотрим простейшую Г-образную стержневую систему из двух прямых стержней AB и BC , жестко соединенных в узле C под прямым углом и нагруженной силой P в точке B .

Из условий равновесия следует, что вертикальная реакция в заделке $A = P$. Обозначив на схеме эту реакцию

(рис. 50, б), видим что стержневая система находится под действием пары сил с моментом $M = Pl$. Эта пара должна уравниваться равной и противоположно направленной парой сил с моментом $M_A = Pl$.

Горизонтальная реакция в заделке, очевидно, отсутствует, так как никаких горизонтальных активных сил не имеется.

Какая бы ни была нагрузка, действующая на раму, реактивные величины могут быть определены, применяя три уравнения равновесия, чаще всего в следующем виде:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma M = 0.$$

Для плоской системы на рис. 50, имеем

$$\Sigma Y = A_y = 0; \quad \Sigma X = A_x - P = 0;$$

$$\Sigma M_A = Pl - M_A = 0.$$

Из полученных уравнений следует, что $A_y = 0; A_x = P; \Sigma M_A = Pl$.

В рассматриваемом случае все три реактивные величины в заделке определяются из уравнений статики, а потому подобные стержневые системы называются *статически определенными* (СОС). Число опорных реакций в плоских системах может быть и большим трех; тогда система становится статически неопределимой (СНОС). Несколько позже рассмотрим решение таких СНОС.

Для определения трех величин N_x , Q_y , и M_z , передающихся на отдельные элементарные объемы стержней, вся система подвергается исследованию по определенным правилам.

Начнем с вертикального стержня AC . Ось x_1 совместим с осью стержня. Начало координат для вертикально расположенных стержней положим в нижнем крайнем сечении стержня, чтобы ось абсцисс x_1 была направлена снизу вверх (обычная система осей x, y поворачивается при этом в плоскости чертежа на 90° против часовой стрелки). Согласно этим правилам, для стержня AC начало координат будет совпадать с точкой A , ось x_1 будет направлена от точки A к точке C и ось y_1 справа налево.

В произвольно выбранном сечении X_1 стержня AC на расстоянии x_1 от начала координат найдем

$$N_x = -P = \text{const}, Q_y = 0 \text{ и } M_z = -Pl = \text{const}.$$

На рис. 49, в, г и д построены эпюры. Величина сжимающей продольной силы выражена ординатой, отложенной от оси AC в правую сторону, т. е. в отрицательном направлении оси y_1 .

В пределах длины AC поперечная сила $Q_y = 0$.

Ординаты изгибающих моментов условимся откладывать всегда со стороны сжатых волокон бруса; для стержня AC получим постоянную ординату справа от оси стержня.

Рассматривая стержни последовательно, переходим затем к горизонтальному стержню CB . При этом для стержня CB система осей координат (x_2, y_2) располагается согласно рис. 49, б. Начало координат совмещается с точкой C .

Для произвольного значения абсциссы x_2 в пределах длины стержня CB находим

$$N_x = 0, Q_y = P = \text{const}, M_z = -Pl + Px_2 = -P(l - x_2).$$

На основании рассмотренного простого примера можно рекомендовать следующие правила и порядок построения эпюр для плоских стержневых систем.

1. Исследование всякой стержневой системы, находящейся под действием заданной нагрузки в условиях упругого равновесия, начинается обычно с определения реакций опор (в частном случае реакции опор могут равняться нулю)⁶. Только после нахождения реакций опор становится известной вся система внешних сил, вызывающих деформацию рассматриваемой стержневой системы.

2. После определения реакций опор строятся последовательно эпюры продольных сил N_x , поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z в пределах длины каждого стержня системы.

⁶ Если конструкция (балка, рама) имеет зашпеленный конец, то, идя от свободных концов к зашпеленному, можно эпюры строить и без предварительного определения реактивных воздействий.

При этом опоры стержневой системы мысленно отбрасываются и к образовавшимся свободным опорным концам стержней прикладываются внешние силы или пары сил, найденные в опорных сечениях.

При вычислении значений N_x , Q_y и M_z каждый стержень рассматривается отдельно в своей системе осей координат x , y и z .

Ось x совмещается всегда с осью стержня и направляется в горизонтальных стержнях слева направо, а вертикальных – снизу вверх. Например, в стержневой системе, показанной на рис. 51,

для стержня AC ось x_1 , направлена от точки A к точке C ;

для стержня EF ось x_2 , направлена от точки E к точке F ;

для стержня DB ось x_3 , направлена от точки D к точке B .

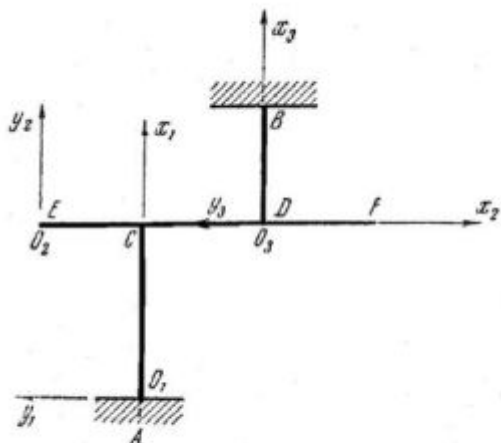


Рис. 51. Пример привязки систем координат

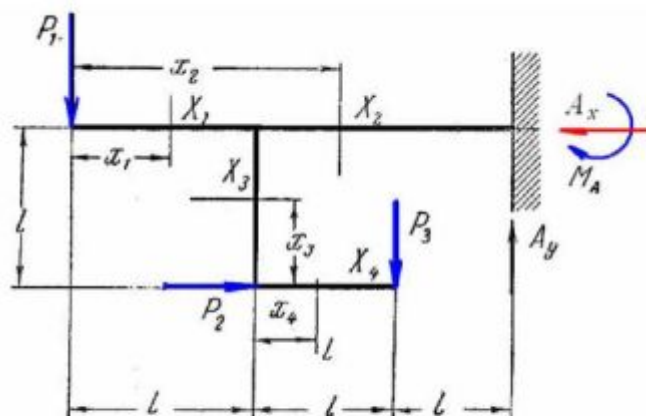


Рис. 52. Пример нагружения стержневой системы

При этом начало координат совпадает: для стержня AC с точкой A , EF с точкой E и DB с точкой D .

Соответственно направлению осей x_1 , x_2 , x_3 , на рис. 51 показано расположение осей y_1 , y_2 , y_3 . Оси z направлены перпендикулярно силовой плоскости.

3. При определении текущих значений N_x , Q_y и M_z в каком-либо сечении учитываются соответственно все пары и пары сил, передающиеся через это сечение со стороны начала координат рассматриваемого стержня; при этом учитываются как нагрузки, приложенные непосредственно в

пределах исследуемого стержня, так и передающиеся на рассматриваемый стержень через узлы системы, показанной на рис. 51:

а) в сечении X_1

$$N_x = 0; Q_y = -P_1; M_z = -P_1 x_1;$$

б) в сечении X_2

$$N_x = -P_2; Q_y = -P_1 - P_3; M_z = -P_1 x_2 - P_2 l + P_3 (2l - x_2);$$

в) в сечении X_3

$$N_x = P_3; Q_y = -P_2; M_z = -P_2 x_3 + P_3 l;$$

г) в сечении X_4

$$N_x = -P_2 + A = 0; Q_y = -P_1 + A_y = P_3;$$

$$M_z = -P_1(l + x_4) - A_y(2l - x_4) - A_x l + M_A = -P_3(l - x_4).$$

При определении N_x , Q_y , и M_z в каком-либо сечении делаем разрез в этом сечении и рассматриваем или все нагрузки одной части, или все нагрузки другой части с учетом знаков. Так, например, при определении внутренних силовых факторов в сечении X_4 проще рассматривать правую часть консоли с одной силой P_3 , которая вызывает в этом сечении поперечную силу и изгибающий момент

$$N_x = 0; Q_y = -P \quad M_z = -P_3(l - x_4).$$

4. При построении эпюр изгибающих моментов рекомендуется не обращать внимание на расположение осей координат, а мысленно перемещаться по каждому стержню в отдельности, следуя от свободных концов к узлам и откладывая ординаты эпюры моментов на сжатой стороне стержня. При соблюдении этого правила ординаты эпюры изгибающих моментов получаются соответствующими по знаку тем осям построения, в которых построена эпюра поперечных сил.

Пример 2. На рис. 53 приведено построение эпюр изгибающих моментов для жесткой стержневой системы.

С увеличением плеча создаваемые сосредоточенными силами изгибающие моменты нарастают по линейному закону; соответственно этому на рис. 53 получаются эпюры треугольной формы, построенные в

пределах длин BD и DC . При постоянном изгибающем моменте в пределах длины AD эпюра имеет форму прямоугольника.

Весьма характерным является жесткий узел D , в котором сходятся три стержня. В трех сечениях, непосредственно примыкающих к узлу D (рис. 53, $в$), по условиям равновесия сумма моментов должна равняться нулю. Действительно, вырезав узел (рис. 53, $в$), имеем

$$+Pl + 3Pl - 4Pl = 0.$$

На том же основании во всяком жестком узле, соединяющем концы двух стержней, изгибающие моменты, передающиеся на узел через сечения, непосредственно примыкающие к узлу, всегда равны и противоположны⁷. Примером может служить узел C на рис. 50.

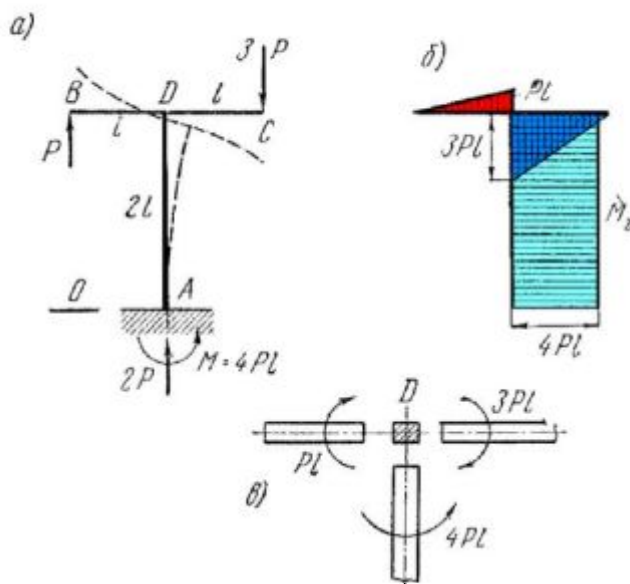


Рис. 53. Пример построения эпюры M_z

После построения эпюр изгибающих моментов проверку по сумме моментов следует проводить для каждого узла системы.

При соблюдении изложенных правил построения эпюр знаки ординат в осях координат x и y для каждого стержня соответствуют дифференциально-интегральной зависимости между величинами Q_y и M_z . Из рис. 50, $г$ и $д$ видно, что положительной ординате эпюры Q_y

⁷ За исключением случаев приложения в узлах сосредоточенных моментов.

соответствует положительный угол наклона на эпюре M_z (для стержня CB); при $Q_y = 0$, $M_z = \text{const}$ (для стержня AC) и т. д.

Остальные примеры построения эпюр N_x , Q_y , и M_z рассмотрим во второй части пособия.

5.3. Плоские шарнирные стержневые системы

Жесткие плоские системы могут иметь в одной или нескольких точках шарнирные соединения; в таких случаях при деформации одна часть системы может перемещаться относительно другой части, вращаясь на оси шарнира. При этом всякая сила (как бы она ни была направлена), действующая в плоскости системы, передается через шарнир с одной части системы на другую; и з г и б а ю щ и й м о м е н т ч е р е з ш а р - н и р н е п е р е д а е т с я.

Например, усилие P (рис. 54, а), действующее по оси горизонтального стержня CB , передается через шарнир C на вертикальную стойку AC как поперечная сила (для стойки AC), вызывающая изгиб оси AC . Если сила P будет приложена к стержню CB как сосредоточенная вертикальная нагрузка (рис 54, б), то она должна быть разложена по закону рычага на составляющие в точках C и B , причем первая из них вызовет сжатие стойки CA .

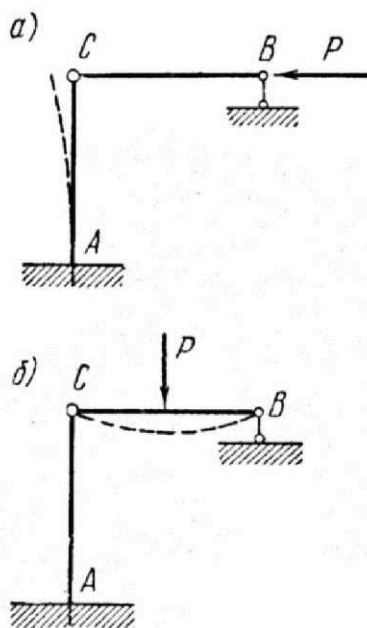


Рис. 54. Пример шарнирной системы

Поэтому, определяя относительно шарнирной точки сумму моментов сил и пар сил, действующих на систему по одну сторону шарнира (справа или слева, сверху или снизу), всегда получим нуль.

Следовательно, при нахождении реакций опор для плоской шарнирной стержневой системы можно использовать добавочное уравнение моментов относительно шарнирной точки, суммирующее в данном случае моменты всех сил и пар сил (активных и реактивных), приложенных по одну или другую сторону шарнира.

При наличии шарнира можно иметь добавочное уравнение, которое следует использовать в дополнение к трем уравнениям статики. Поэтому плоские системы с одним или двумя шарнирами должны обладать четырьмя или соответственно пятью реактивными факторами для того, чтобы получить статически определимую конструкцию (рис. 55 и 56).

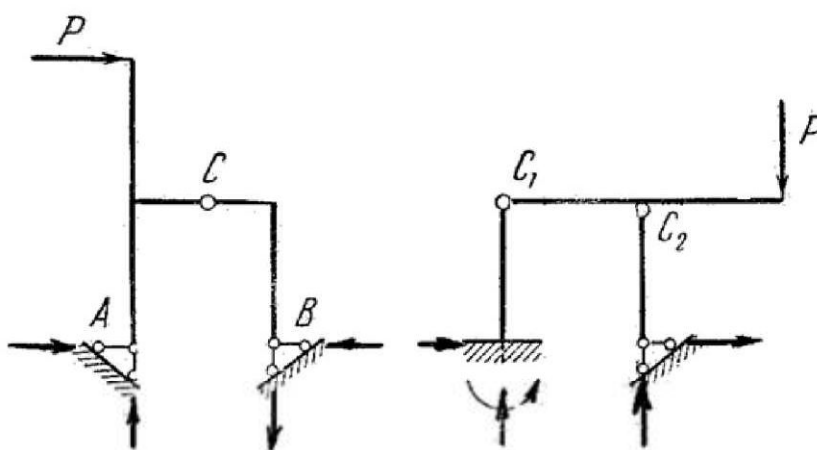


Рис. 55.

Рис. 56.

Плоские шарнирные системы с четырьмя и с пятью реактивными факторами

В общем случае система может иметь несколько шарниров; тогда каждый добавочный шарнир позволит ввести и добавочную опорную реакцию, причем система останется статически определимой и геометрически неизменяемой (т. е. не превратится в механизм).

Примеры расчета рассматриваются в части 2 методического пособия.

5.4. Плоские брусья малой кривизны

Брусья с криволинейной осью могут встречаться в виде отдельных деталей или как составные части стержневой системы. Рассмотрим наиболее употребительные в машиностроении плоские кривые брусья, в которых оси симметрии сечений лежат в силовой плоскости. Кроме того, примем, что для всех рассматриваемых кривых брусьев отношение $\frac{R}{h} \geq 5$, где R – радиус кривизны оси бруса, а h – поперечный размер сечения. При соблюдении указанного соотношения размеров брусья считаются брусьями малой кривизны; они рассчитываются на изгиб приближенно по формулам прямого бруса, так как влияние малой кривизны сказывается весьма незначительно.

Как обычно, при исследовании напряженного плоского кривого бруса необходимо в первую очередь выяснить величину и направления внешних сил и пар сил, передающихся на отдельные элементарные объемы dV бруса. Наглядная картина изменения этих величин по всей длине бруса представлена эпюрами, ординаты которых строятся на оси кривого бруса и откладываются по направлению нормалей к оси бруса. По наибольшим ординатам эпюр можно найти опасные сечения бруса и произвести расчет на прочность.

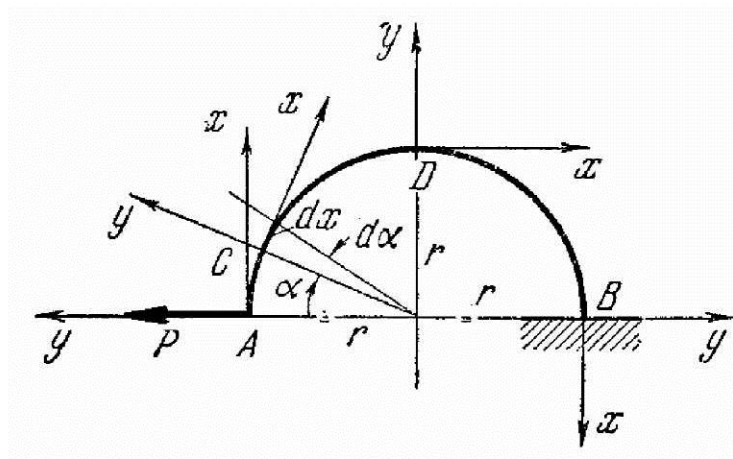


Рис. 57. Криволинейный брус

Простейшим примером кривого бруса постоянных поперечных размеров служит плоский брус с осью в виде полуокружности (рис. 57), защемленный одним концом; предположим, что на свободном конце бруса в плоскости кривизны, в направлении радиуса окружности, действует горизонтальная сосредоточенная сила P .

При рассмотрении сил и пар сил, передающихся на элементарные объемы dV бруса, ось x совмещается с осью бруса в рассматриваемом сечении, а так как в кривом брусe положение оси непрерывно меняется, то и расположение осей координат x , y и z меняется при переходе от одного сечения к другому. Начало координат совмещается при этом с центром тяжести рассматриваемого сечения, ось y повернута относительно оси x на 90° в сторону, противоположную движению часовой стрелки, ось z расположена перпендикулярно плоскости кривого бруса.

Положение каждого поперечного сечения бруса определяется углом α , определяемым по отношению к сечению, принятому за начальное (сечение A на рис. 57). Оси x , y на рис. 57 указаны в соответствии с установленным правилом.

Элементарный объем $dV = Fdx = Frd\alpha$ получается при изменении угла α на величину $d\alpha$.

Силы и моменты сил, передающиеся через площадь рассматриваемого поперечного сечения кривого бруса, определяются, как обычно, по правилам механики, путем приведения к центру тяжести сечения внешних сил и пар сил, действующих на брус по одну сторону сечения.

Построение эпюр N_x , Q_y , и M_z в плоских кривых брусках рассмотрим на ряде примеров.

Пример 3. На рис. 58 дана схема кривого бруса, защемленного правым концом, для которого требуется построить эпюры N_x , Q_y , и M_z .

Решение. По условиям равновесия, в заделке получается только горизонтальная реакция P , направленная слева на право. Для приведения внешней силы P к центру тяжести произвольно взятого поперечного сечения C (т. е. при текущем значении угла α), мысленно добавляют в

центре тяжести сечения две сосредоточенные прямо противоположные силы, параллельные направлению заданной силы P и равные ей по величине. Тогда образуется пара сил с изгибающим моментом

$$M_z = Ph = P \cdot r \cdot \sin \alpha ;$$

составляющие силы P ($N_x = P \sin \alpha$ и $Q_y = P \cos \alpha$) представляют собой значения продольной и поперечной сил для сечения C бруса.

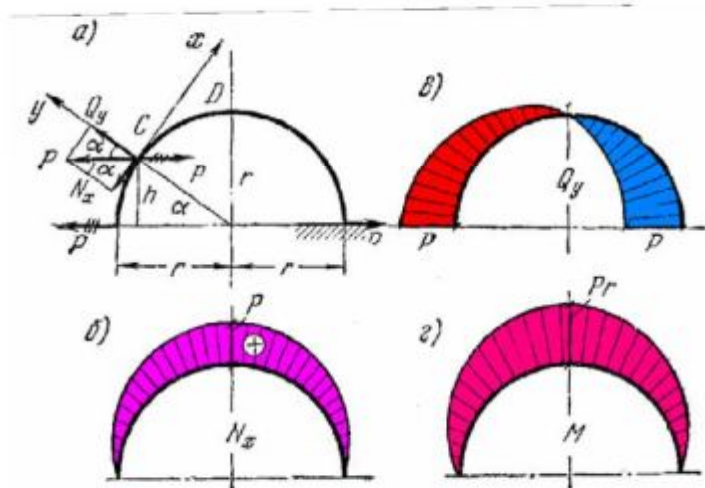


Рис. 58. Эпюры кривого бруса с зашечленным концом

Чтобы пояснить явления, вызываемые в бруске действием внешних сил, растягивающие силы, как обычно, условно характеризуются знаком «плюс», а сжимающие силы – знаком «минус». Для каждого текущего сечения бруса продольная сила совпадает с направлением оси x и ордината эпюры N_x откладывается в положительном направлении оси y в случаях растяжения и в отрицательном направлении оси y при сжатии. Ординаты эпюры Q_y откладываются по оси y в сторону действия поперечной силы

Согласно рис. 58, на основе полученных для N_x , Q_y , и M_z выражений, найдем:

$$\text{при } \alpha = 0 \quad N_x = 0, \quad Q_y = P, \quad M_z = 0;$$

$$\text{при } \alpha = 90^\circ \quad N_x = P, \quad Q_y = 0, \quad M_z = Pr;$$

$$\text{при } \alpha = 180^\circ \quad N_x = 0, \quad Q_y = -P, \quad M_z = 0.$$

На рис. 58, *в* и *г* по этим частным значениям N_x , Q_y , и M_z построены эпюры в пределах дуги полуокружности.

Наибольшие значения N_x и M_z получаются в центральном сечении бруса, где создается наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot r}{W_z}.$$

Наибольшее значение напряжения получается на внутренней стороне сечения, обращенной к центру кривизны бруса (где растяжение создается от совместного действия продольной силы N_x и изгибающего момента M_z).

5.5. Пространственные стержневые системы

Если силовая плоскость не совпадает с плоскостью стержневой системы, то задача приобретает пространственный характер, причем на отдельные элементарные объемы стержней передаются, как правило, шесть факторов (три силы и три момента), определяемые из шести условий равновесия пространственной системы

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0, \Sigma M_z = 0.$$

Рассмотрим простейшие системы, составляемые из прямых стержней, оси которых образуют в узлах прямые углы. Для упрощения определяем только изгибающие и крутящие моменты, имеющие основное значение в расчетах.

На рис. 59, *а* показана пространственная система из трех стержней AB , BC и CD , жестко соединенных в узлах B и C . В точке D расположена заделка. В сечении A стержня AB действует сосредоточенная сила P , направленная сверху вниз, вызывающая, очевидно, в опорной точке D равную и противоположно направленную реакцию P . Горизонтальные реакции в заделке равны нулю, так как горизонтальные силы отсутствуют.

Для пояснения относительного расположения стержней в пространственных системах условимся на схемах тонкими линиями указывать плоскости, расположенные перпендикулярно осям стержней.

Заданная сила P совместно с реакцией в заделке образует пару сил, действующую в диагональной плоскости $ACDG$. Момент такой пары можно разложить геометрически на два составляющих момента (в двух взаимно перпендикулярных плоскостях), действующих относительно заделки, соответственно на плечах $\overline{AB} = 2l$ и $\overline{BC} = l$. Эти два момента уравниваются в заделке равными и противоположно направленными реактивными моментами.

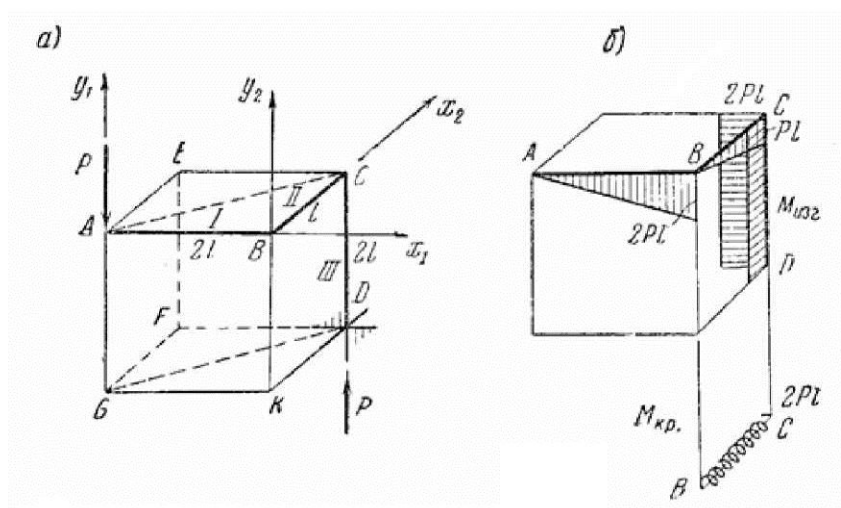


Рис. 59. Пространственная стержневая система

При построении эпюр каждый стержень системы исследуется отдельно; удобнее начинать со стержня, к которому приложена заданная нагрузка, затем переходить ко второму стержню, непосредственно примыкающему к первому, и т. д., вплоть до последнего стержня, имеющего заделку. При этом во всяком стержне, рассматриваемом отдельно, конец, обращенный в сторону нагрузки, следует условно считать свободным, начальным концом; другой конец стержня, обращенный в сторону заделки, можно условно считать защемленным.

В пределах каждого стержня ось x левовинтовой системы координат совмещается с осью стержня. Направление оси x соответствует последовательному переходу от одного стержня к другому, если мыс-

ленно следовать по стержням системы. Например, согласно рис. 59, *a*, по стержню *AB* следует перемещаться от точки *A* к точке *B*, в направлении оси x_1 , затем по стержню *BC* от точки *B* к точке *C* в направлении оси x_2 и далее к точке *D*.

Действующие на систему внешние силы и пары сил приводятся к началу каждого, отдельно рассматриваемого стержня по правилам механики в виде главного вектора и главного момента. При этом, как и в простых балках, учитывается сумма сил и сумма моментов пар сил, передающихся на начальное сечение стержня. Моменты пар сил, действующих в плоскостях, проходящих через ось бруса и главные оси инерции поперечного сечения, дадут величины изгибающих моментов, каждый из которых вызывает явление прямого изгиба.

Эпюры изгибающих моментов, как обычно, строятся на сжатой стороне стержней. Эпюры крутящих моментов строятся отдельно, с учетом величины и направления момента, передающегося на рассматриваемый стержень.

Пример 4. Для пространственной стержневой системы, представленной на рис. 59, построить эпюры изгибающих и крутящих моментов.

Решение. Эпюра изгибающих моментов в пределах длины стержня *AB* не требует пояснений: в сечении *A* изгибающий момент равен нулю, а в сечении *B*, $M_z = 2Pl$.

Переходя ко второму стержню (*BC*), начальный конец считаем в точке *B* и, как указано, ось x_2 направляем по оси стержня от точки *B* к условной заделке *C*, совмещая начало координат с точкой *B*.

Если к начальному сечению *B* стержня *BC* привести заданную силу *P*, то получим скручивающий момент $M_x = 2Pl$ и силу *P*. Скручивающий момент M_x остается постоянным в пределах всей длины *BC* второго стержня. Сила *P*, действующая на начальный конец *B*, вызовет изгиб стержня *BC*, Изгибающий момент нарастает от точки *B* к заделке по линейному закону, достигая в заделке наибольшего значения

$M_{z, \max} = 2Pl$ (рис. 59, б). Эпюра крутящих моментов построена на рис. 59, б отдельно и обозначена винтовой линией внизу рисунка.

Чтобы не повторять приведения нагрузки к началу каждого стержня системы (что при большом числе стержней становится довольно громоздким), можно при построении эпюр изгибающих и крутящих моментов использовать метод проекций. Применение этого метода поясним на том же примере.

На рис. 59, а линия действия силы P совпадает с ребром AG пересечения двух вертикальных плоскостей $ABKG$ и $AEFG$.

В каждом сечении стержня величина момента тем больше, чем больше расстояния от этого сечения до каждой из указанных плоскостей. Эти расстояния наиболее просто определять по правилам начертательной геометрии, используя две проекции системы на плоскости $ABKG$ и $AEFG$. Заданная система проектируется на каждую плоскость в отдельности и на каждой проекции строятся эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки, как для плоской системы.

На рис. 60, а показана проекция заданной системы на фронтальную плоскость $ABKG$ (см. рис. 60, а).

В этом случае стержень BC проектируется в точку. Линия действия силы P проходит через точку A , поэтому в плоскости проекций получается нарастание изгибающего момента от точки A к точке B по линейному закону. В пределах стержня III изгибающий момент остается постоянным, так как ось стержня III параллельна линии действия силы P .

На рис. 60, б заданная система спроектирована на профильную плоскость $BCDK$ (см. рис. 60); при этом стержень AB проектируется в точку B . Линия действия силы P проходит через точку B и в плоскости проекций изгибающий момент нарастает от точки B к точке C по линейному закону.

В пределах стержня III изгибающий момент остается постоянным, так как его ось параллельна линии действия силы P .

Эпюры изгибающих моментов, построенные в плоскостях проекций, переносятся затем на схему заданной системы (см. рис. 60, *а*, *б*) соответственно нумерации стержней *I*, *II*, *III*.

По определению, скручивающий момент действует в плоскости, перпендикулярной оси бруса. Поэтому всякий стержень, расположенный перпендикулярно одной из указанных плоскостей, работает на кручение. Исключение составляют только стержни, оси которых пересекают линию действия заданной силы. В рассматриваемом случае стержень *BC* расположен перпендикулярно фронтальной плоскости *ABKG* и потому работает на кручение под действием скручивающего момента $M_x = 2Pl$, величина которого остается постоянной по всей длине $2l$ (см. рис. 60, *б*).

Стержень *AB* расположен перпендикулярно второй плоскости *BCDK*, но на кручение он не работает, так как линия действия силы *P* пересекает ось стержня *AB*.

Таким образом, в пространственных стержневых системах всякая сосредоточенная сила рассматривается как действующая одновременно в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по ребру, совпадающему с линией действия силы.

Если сосредоточенная сила *P* пересекает ось какого-либо стержня (например, ось стержня *AB* на рис. 60, *а*), то такая сила может вызвать только изгиб этого стержня, но не кручение. Равным образом сила *P* не создает скручивающего момента в стержнях, расположенных параллельно линии действия силы.

Предлагается самостоятельно построить эпюры крутящих и изгибающих моментов в стержневой системе на рис. 61. Длина стержней в данной схеме равна $AB = CB = GH = HB = l$.

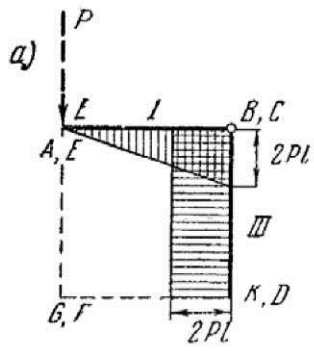


Рис. 60. Проекция эпюр

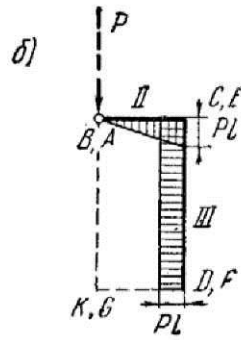
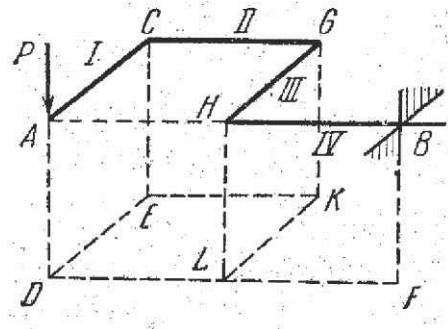


Рис. 61. Пространственная стержневая система



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беликов, Г. В. Основы расчетов прочностной надежности специальных элементов конструкций автомобилей и тракторов : учебное пособие / Г. В. Беликов. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – 98 с.
2. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М., 1976. – 856 с.
3. Биргер, И. А. Сопротивление материалов : учебное пособие / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М. : Наука, 1986. – 560 с.
4. Глушков, Г. С. Курс сопротивления материалов / Г. С. Глушков, В. А. Синдеев. – М. : Изд. «Высшая школа», 1965. – 768 с.
5. Дарков, А. В. Сопротивление материалов : учебник для технических вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1989. – 624 с. : ил.
6. Долинский, Ф. В. Краткий курс сопротивления материалов: учебное пособие для машиностроительных вузов / Ф. В. Долинский, М. Н. Михайлов. – М. : Высшая школа, 1988. – 432 с. : ил.
7. Кинасошвили, Р. С. Сопротивление материалов : краткий учебник / Р. С. Кинасошвили. – М. : Наука, 1975. – 384 с. : ил.
8. Санкин, Ю. Н. Сопротивление материалов: курс лекций / Ю. Н. Санкин. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 188 с.
9. Санкин, Ю. Н. Расчетно-проектировочные задания по сопротивлению материалов : методическое пособие / Ю. Н. Санкин. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 51 с.
10. Тимко, И. А. Сопротивление материалов : учебник / И. А. Тимко. – Харьков : изд. ХГУ, 1970. – 350 с. : ил.
11. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Физматгиз, 1963. – 539 с.
12. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов : учебное пособие для технических вузов / И. Н. Миролубов, С. А. Енгальчев, Н. Д. Сергиевский и др. – М. : Высшая школа, 1985. – 399 с. : ил.