

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
Методические указания к выполнению контрольной работы №2

## Изгиб балок

*Простым изгибом* называется такое нагружение стержня, когда все силы (в том числе и опорные реакции) направлены перпендикулярно оси стержня и лежат в одной из его главных плоскостей инерции (рис.1). Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*.

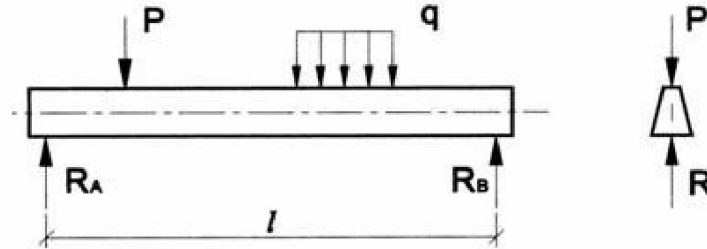


рис. 1

Для того, чтобы балка могла сопротивляться действию внешней нагрузки, она, как правило, должна быть соответствующим образом закреплена. Обычно используются три вида опорных закреплений:

1. Шарнирно подвижная опора (рис.2а)

Эта опора препятствует перемещению балки по вертикали, и разрешает горизонтальное смещение и поворот сечения. Следовательно, по вертикали на схеме рисуется абсолютно недеформируемый опорный стержень между двумя шарнирами и соответствующая опорная реакция.

2. Шарнирно неподвижная опора (рис.2б)

Эта опора препятствует линейному перемещению балки в любом направлении. На схеме показывают два опорных стержня между шарнирами, образующими жесткий треугольник. Неизвестный заранее вектор опорной реакции заменяют его составляющими по осям.

3. Жесткое защемление (заделка) (рис.2в)

Невозможны линейное перемещение сечения и поворот. На схеме показывают составляющие вектора реакции и реактивный момент. Заделку можно моделировать постановкой трех связей.

Комбинируя различные типы закреплений, можно получить ряд схем балок:

1. Балка шарнирно опертая по концам (рис.3а)

Одна опора шарнирно подвижная, другая – шарнирно неподвижная. Расстояние между центрами опор на схеме называется *пролетом*. Число реакций равно трем.

Учитывая, что для плоской системы сил можно составить три независимых уравнения равновесия системы в целом, приходим к заключению, что балка статически определимая.

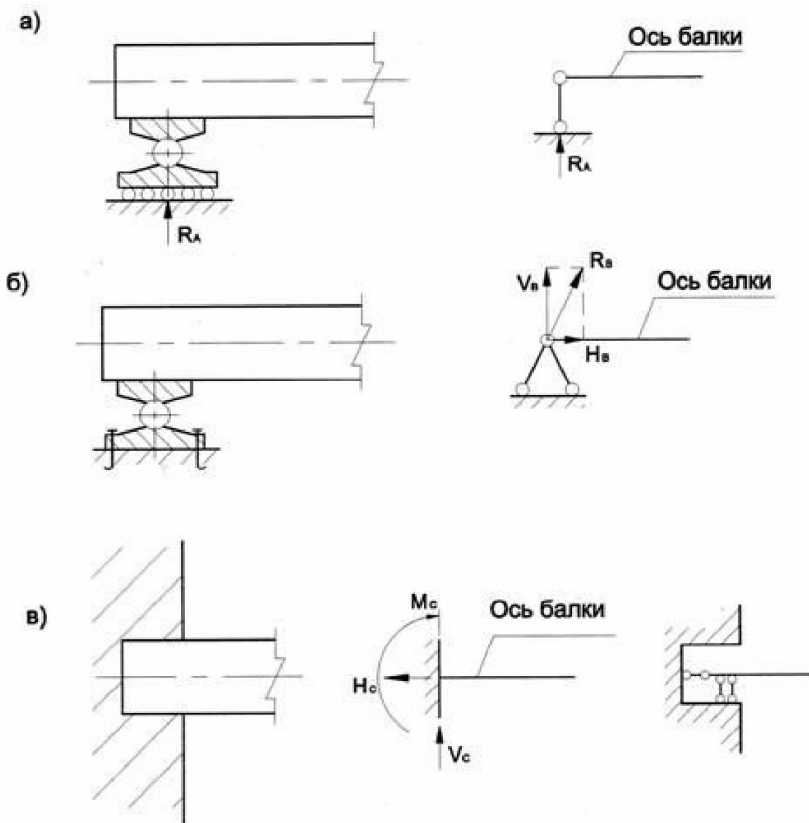


рис. 2

2. Балка шарнирно опертая с консолями ( $C_1$  и  $C_2$ ) (рис.3б)

Реакции те же. Балка статически определимая.

3. Балка жестко закрепленная одним концом (рис.3в)

В заделке три реакции. Балка статически определимая. При действии нагрузки перпендикулярной оси реакция  $H_B$  всегда равна 0.

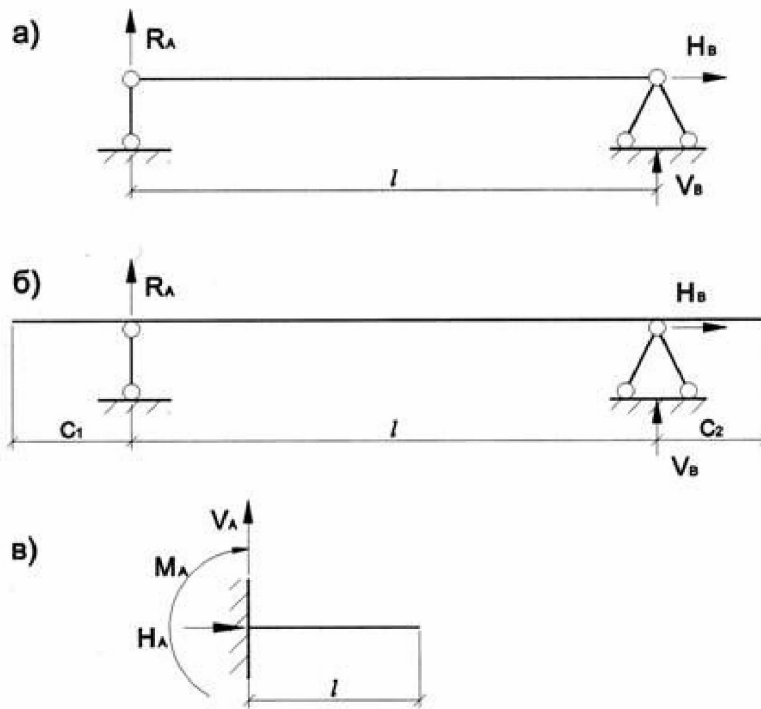


рис. 3

Внутренние силовые факторы в сечении изгибаемой балки

Рассмотрим для простоты балку с прямоугольным поперечным сечением (рис.4). Следуя методу сечений, мысленно проведем разрез и отбросим какую-либо часть балки, а другую оставим. На оставшейся части покажем действующие на нее силы и в поперечном сечении – внутренние силовые факторы, которые являются результатом приведения к центру сечения сил, действующих на отброшенную часть. Учитывая, что внешние силы и распределенные нагрузки лежат в одной плоскости и действуют перпендикулярно оси балки, в сечении получим поперечную силу  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ . Эти внутренние силовые факторы заранее неизвестны, поэтому их показывают в положительном направлении в соответствии с принятыми правилами знаков.

Поперечная сила  $Q_y$  считается положительной, если при взгляде на оставшуюся часть она стремится вращать эту часть относительно ближайшей точки на оси балки по часовой стрелке.



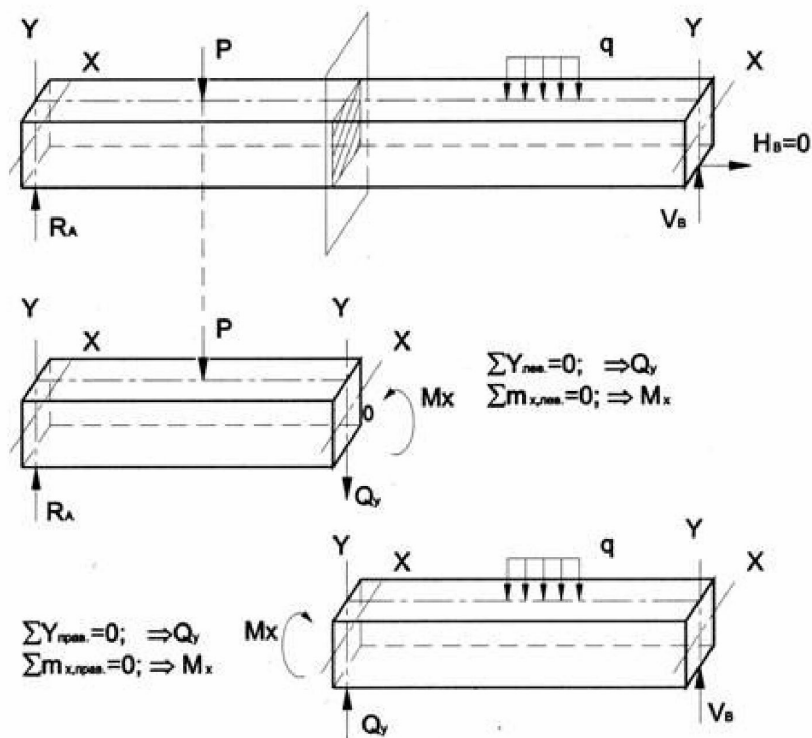


рис. 4

Изгибающий момент считается положительным, если он стремится изогнуть балку выпуклостью вниз.

На рис.4 показаны два случая оставшейся части: левая и правая.

Для определения величины  $Q_y$  и  $M_x$  составляются два уравнения равновесия для оставшейся части

$$\begin{aligned} \sum y = 0; &\rightarrow Q_y; \\ \sum m_x = 0; &\rightarrow M_x. \end{aligned}$$

Уравнение момента составляется относительно оси X, проходящей в поперечном сечении через точку на оси балки – тогда поперечная сила в уравнение не входит и величина  $M_x$  определяется независимо от  $Q_y$ . Можно доказать, что результат вычислений  $Q_y$  и  $M_x$  не зависит от того, равновесие какой оставшейся части рассматривается. Результаты вычислений  $Q_y$  и  $M_x$  показываются в виде эпюр. При этом ординаты эпюры  $Q_y$  откладываются как в обычном графике в курсе математики – плюс вверх, минус вниз, а ординаты эпюры  $M_x$  в строительных отраслях и в железнодорожных расчетах принято откладывать в сторону выпуклости балки и знак не ставить.

Между ординатами эпюр  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $q$  (функций от координаты  $z$ ) существуют дифференциальные зависимости. Рассмотрим балку, нагруженную распределенной нагрузкой, меняющейся по длине по закону  $q_z$  (рис.5а). Выделим кусок балки длиной  $dz$  у сечения на расстоянии  $z$  от начала координат (рис.5б), и рассмотрим его равновесие:

$$\sum y = 0; Q_y - Q_y - dQ_y - q \cdot dz = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q(z). \quad (1)$$

$$\sum m_0 = 0; M_x - M_x - dM_x + Q_y dz - q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} = 0;$$

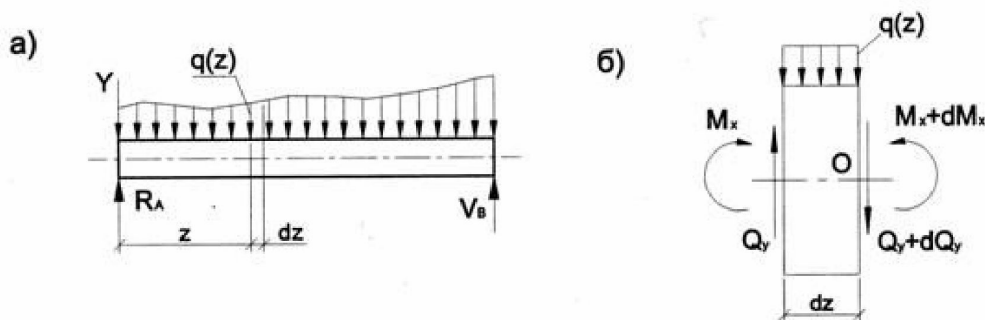


рис. 5

Отсюда, пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка малости, получим

$$\frac{dM}{dz} = Q_y. \quad (2)$$

Дифференцируя обе части равенства (2) по  $z$  и учитывая (1), будем иметь

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q(z). \quad (3)$$

#### Напряжения в сечении изгибаемой балки

Рассмотрим балку, показанную на рис. 6. На участках АС и ДВ поперечная сила постоянная, а изгибающий момент изменяется. На участке СД поперечная сила равна 0, а изгибающий момент постоянный – такой случай называется *чистым изгибом*. В общем случае в любой точке поперечного сечения возникают два вида напряжений – нормальное  $\sigma$  и касательное  $\tau$  (рис.7). Они связаны с внутренними силовыми факторами соотношениями эквивалентности:

$$Q_y = \int_F \tau dx; \quad (4)$$

$$M_x = - \int_F \sigma y dF. \quad (5)$$

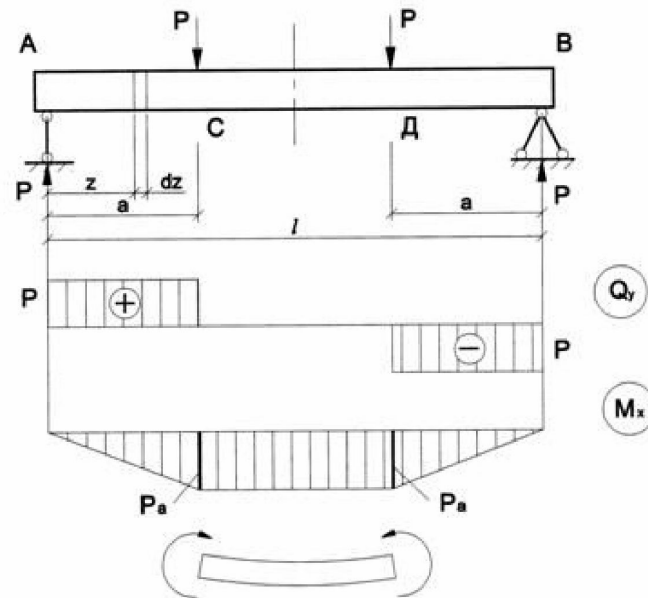


рис. 6

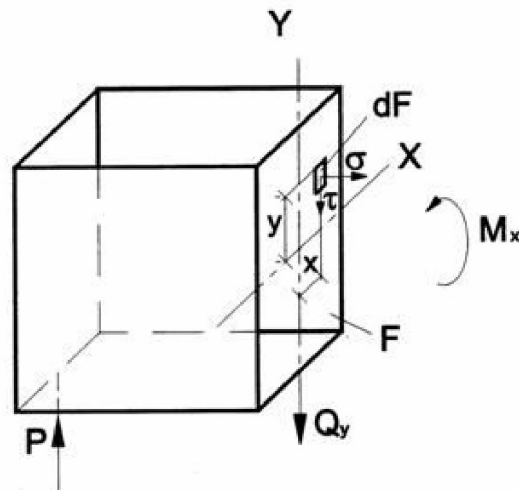


рис. 7

Значения  $Q_y$  и  $M_x$  можно определить методом сечений, рассматривая равновесие оставшейся части. Задача состоит в определении законов действительного распределения  $\sigma(x, y)$  и  $\tau(x, y)$  в поперечном сечении, удовлетворяющих уравнениям (4) и (5). Эта задача статически неопределимая. Для ее решения следует рассмотреть деформации балки при изгибе.

Нормальные напряжения при изгибе

Рассмотрим для наглядности резиновую балку с нарисованной на ее поверхности до деформации системой взаимно перпендикулярных линий (рис.8а) в условиях чистого изгиба. Линии параллельные оси станут дугами окружностей, а линии перпендику-

лярные оси станут отрезками радиусов (рис.8б). Рассматривая картину деформации можно высказать несколько гипотез:

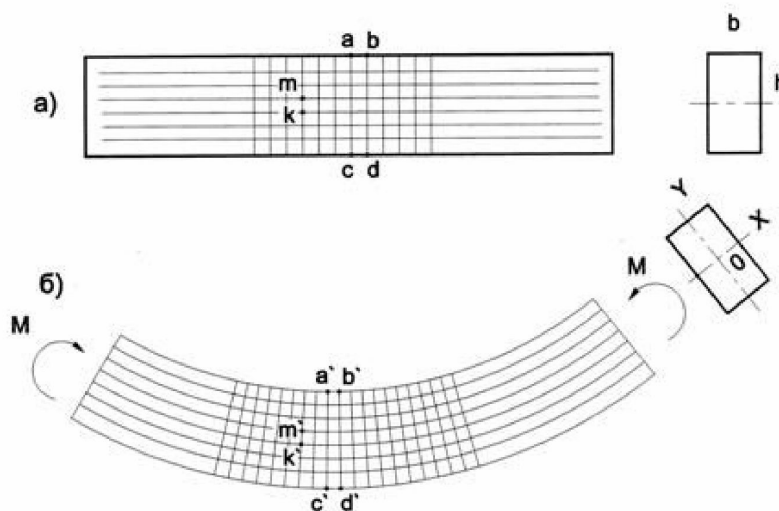


рис. 8

1. Гипотеза плоских сечений: сечения плоские до деформации (след этих сечений представляет линии перпендикулярные оси) остаются плоскими (след в виде отрезков радиусов) после деформации, но поворачиваются относительно друг друга.
2. Длина отрезка  $mk$  в направлении перпендикулярном оси до деформации и  $m'k'$  не изменяется, поэтому высказывается гипотеза о том, что продольные слои балки (иногда их называют *волокнами*) друг на друга не давят в поперечном направлении.
3. Длина отрезка  $ab$  сократилась, а отрезка  $cd$  увеличилась. Следовательно, в верхней части балки волокна сжимаются, а в нижней растягиваются. Значит, по высоте балки существует слой, который не сжимается и не растягивается – *нейтральный слой*. Поместим на этом слое начало координат в поперечном сечении. Ось  $X$  будет лежать в сечении перпендикулярно оси симметрии  $Y$ . Назовем ось  $X$  *нейтральной осью*.

Покажем бесконечно малый участок  $dz$  балки до и после деформации нарисованный в соответствии с гипотезами (рис.9). Рассмотрим отрезок 1-2. После деформации он станет дугой окружности  $1' - 2'$  радиуса  $\rho + |y|$ . Здесь  $\rho$  - радиус кривизны нейтрального слоя. Учитывая принятую гипотезу, о ненадавливании волокон друг на друга, можно считать что волокно  $1' - 2'$  работает на растяжение, и справедлив закон Гука, связывающий относительную деформацию и нормальное напряжение

$$\sigma = E\varepsilon . \tag{6}$$

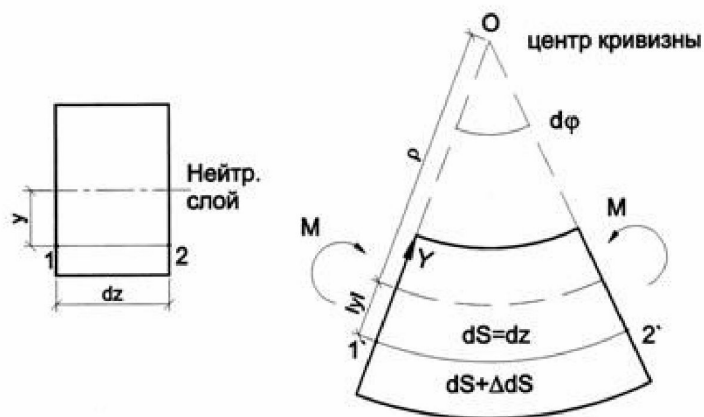


рис. 9

Найдем относительную деформацию  $\varepsilon$  волокна 1-2

$$\begin{aligned} ds + \Delta ds &= (\rho + |y|) d\varphi, \\ ds &= \rho d\varphi. \end{aligned}$$

Вычитая, получим абсолютную деформацию

$$\Delta ds = |y| d\varphi. \quad (7)$$

Теперь

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{|y| d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{|y|}{\rho}. \quad (8)$$

Учитывая, что при  $y > 0$  волокна сжимаются, вместо (8) и (6) будем иметь

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho}, \quad (9)$$

$$\sigma = -\frac{E}{\rho} y. \quad (10)$$

При изгибе нормальная сила равна нулю. С другой стороны она связана с нормальными напряжениями соотношением эквивалентности

$$N = \int_F \sigma dF = 0. \quad (11)$$

Подставим (10) в (11), тогда получим

$$-\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0. \quad (12)$$

Отсюда  $\int_F y dF = 0$ , но интеграл слева – это статический момент  $S_x$  площади

поперечного сечения балки относительно нейтральной оси X. Известно, что если  $S_x = 0$ , то ось X проходит через центр тяжести. Следовательно, при изгибе ней-

тральный слой проходит через центр тяжести. Теперь ясно, откуда откладывать  $y$  в (10).

Для определения кривизны балки  $\frac{1}{\rho}$  подставим (10) в (5)

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int y^2 dF = \frac{EJ_x}{\rho}. \quad (13)$$

Отсюда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (14)$$

Здесь введем обозначение:  $J_x = \int y^2 dF$  - момент инерции сечения относительно нейтральной оси. Величина характеризующая геометрию сечения с размерностью  $(\text{м}^4)$ .

Для прямоугольника (рис. 10а)  $J_x = \frac{bh^3}{12}$ . (15)

Для круга (рис.10б)  $J_x = \frac{\pi d^4}{64}$ . (16)

Для прокатных двутавровых профилей (рис. 10в) величина  $J_x$  дается в таблицах сортамента (см. приложение 1) в зависимости от номера, который численно равен высоте двутавра  $h$  в см.

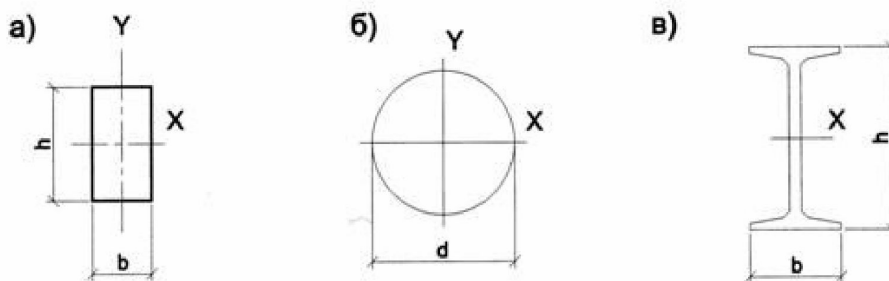


рис. 10

Подставляя (14) в (10), получим формулу нормальных напряжений при чистом изгибе

$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x} y. \quad (17)$$

В инженерных расчетах знак минус в формуле не ставят, все величины берут по модулю, а знак напряжения учитывают по характеру действия изгибающего момента –

где выпуклость, там растяжение и наоборот.

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y. \quad (18)$$

Напряжения  $\sigma$  зависят от расстояния точки до нейтральной оси и не зависят от координаты X (рис.11).

Наибольшие по величине нормальные напряжения возникают в точках поперечного сечения наиболее удаленных от нейтральной оси X

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}. \quad (19)$$

Обычно вводится геометрическая величина в (м<sup>3</sup>)

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}. \quad (20)$$

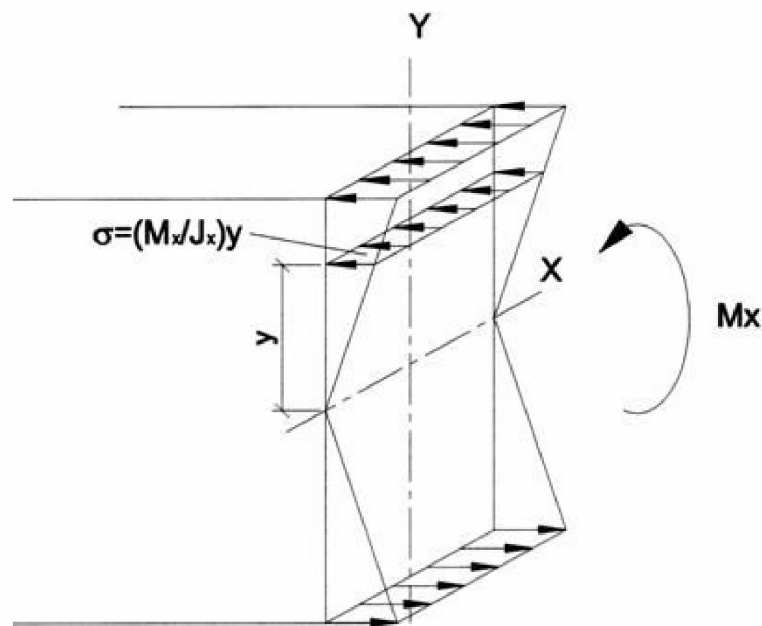


рис. 11

Тогда формулу для  $\sigma_{\max}$  можно записать в виде  $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$ .

Для прямоугольника 
$$W_x = \frac{bh^2}{6}. \quad (21)$$

Для круга 
$$W_x = \frac{\pi d^2}{32}. \quad (22)$$

Для двутавра  $W_x$  приводится в таблицах сортамента (см. приложение 1).

Учитывая, что волокна балки испытывают деформации растяжения или сжатия, можно записать условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (23)$$

где  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение для данного материала (см. раздел «Растяжение-сжатие»).

Из условия (23) формулируют три рода задач на прочность при изгибе:

1. Проверка прочности: задана балка, нагрузка, известен материал. Строится эпюра  $M_x$  - определяется  $M_{\max}$ , вычисляется  $W_x$  и по (23) проверяется условие прочности.
2. Определение максимально допустимой нагрузки по условию прочности.

$$M_x \leq W_x [\sigma] \quad (24)$$

Заданы размеры балки, характер нагрузки, материал балки.

Строится эпюра  $M_x$  - определяется  $M_{\max}$  от параметра нагрузки, вычисляется  $W_x$  и по (24) находят наибольший параметр нагрузки.

3. Конструирование балки – определение размеров ее поперечного сечения.

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} \quad (25)$$

Строится эпюра  $M_x$  - определяется  $M_{\max}$ , вычисляется правая часть (25) и подбираются размеры поперечного сечения, удовлетворяющие (25).

Для прямоугольного сечения 
$$\frac{bh^2}{6} \geq \frac{M_x}{[\sigma]}.$$

Обычно задаются отношением  $\frac{h}{b} = K.$  (26)

Тогда 
$$\frac{b^3 K^2}{6} \geq \frac{M_x}{[\sigma]};$$

отсюда 
$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6M_x}{K^2 [\sigma]}}. \quad (27)$$

Задаваясь шириной  $b$  по (26) получим  $h$ .

Для двутаврового сечения по таблице сортамента (см. приложение 1) подбирают номер двутавра с  $W_x$  большим, чем правая часть (25).

#### Касательные напряжения при изгибе

Выделим бесконечно малый кусок балки на участке AC (рис.6), где поперечная сила постоянная и рассмотрим его равновесие. Сечение балки примем в виде узкого прямоугольника (рис.12).



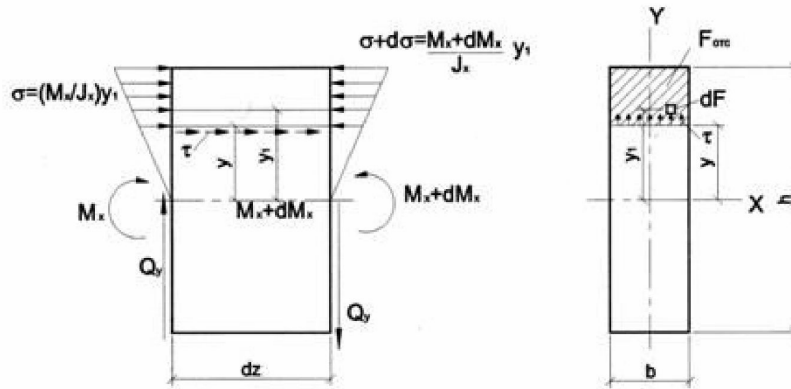


рис. 12

В сечении на расстоянии  $Z$  от опоры действует изгибающий момент  $M_x$ , а в сечении на расстоянии  $z + dz$  действует момент  $M_x + dM_x$ . Поэтому и нормальные напряжения в правом сечении больше, чем на том же уровне в левом сечении. Мысленно отсечем верхнюю часть горизонтальным сечением и рассмотрим ее равновесие. Видно, что равнодействующая нормальных напряжений справа будет больше, чем слева. Для восстановления равновесия можно предположить, что по горизонтальному сечению действуют касательные напряжения  $\tau$ , удерживающие верхнюю отсеченную часть от смещения вдоль оси  $Z$ .

Русский инженер Д.И. Журавский высказал гипотезу о равномерном распределении касательных напряжений  $\tau$  по горизонтальному сечению – она справедлива, если « $b$ » мало по сравнению с высотой сечения.

Запишем уравнение равновесия для отсеченной части:

$$\begin{aligned} \sum z^{omc} &= 0; \\ \int_{F_{omc}} \sigma dF - \int_{F_{omc}} (\sigma + d\sigma) dF + \tau b dz &= 0; \\ - \int_{F_{omc}} \frac{dM}{J_x} y_1 dF &= -\tau b dz; \\ \tau &= \frac{dM}{dz} \frac{1}{bJ_x} \int_{F_{omc}} y_1 dF = \frac{QS_x^{omc}}{J_x b}. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь использовано дифференциальное соотношение (2)  $S_x^{omc} = \int_{F_{omc}} y_1 dF$  - статический момент отсеченной части площади относительно нейтральной оси  $X$ .

Если толщина не меняется, то наибольшие касательные напряжения будут на нейтральной оси.

Для двутавра

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{x_0}}{J_x b},$$

где  $S_{x_0}$  - статический момент половины поперечного сечения относительно нейтральной оси. Его значение приводится в таблицах сортамента.

Проверка прочности по касательным напряжениям проводится в сечениях балки с максимальным  $Q_{\max}$  на уровне нейтральной оси.

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x}{J_x b} \leq [\tau], \quad (29)$$

где  $[\tau]$  - допускаемое касательное напряжение, оно, как правило, равно половине  $[\sigma]$ .

#### Перемещения при изгибе балок

Рассмотрим балку жестко защемленную одним концом под действием силы  $P$  на свободном конце (рис.13а). Координаты всех точек балки после деформации изменяются. При этом ось балки искривляется. Центр тяжести сечения « $K$ » перемещается на плоскости. Проекцию этого перемещения по оси  $Y$  обозначим  $v$  – прогиб балки, проекцию по оси  $Z$  обозначим  $u$  – осевая составляющая. При справедливости гипотез о плоских сечениях и ненадавливании волокон сечение « $K$ » повернется на угол  $\varphi$ . Таким образом (рис.13в), для того чтобы определить новое положение точки  $m$  в поперечном сечении « $K$ », отстоящей от центра сечения на расстоянии  $y$ , нужно с помощью  $u$  и  $v$  определить положение точки « $K$ », показать сечение под углом  $\varphi$  и отложить все то же расстояние  $y$ .

Следовательно, знание трех компонент  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$  для каждого сечения балки полностью определяет деформацию всей балки.

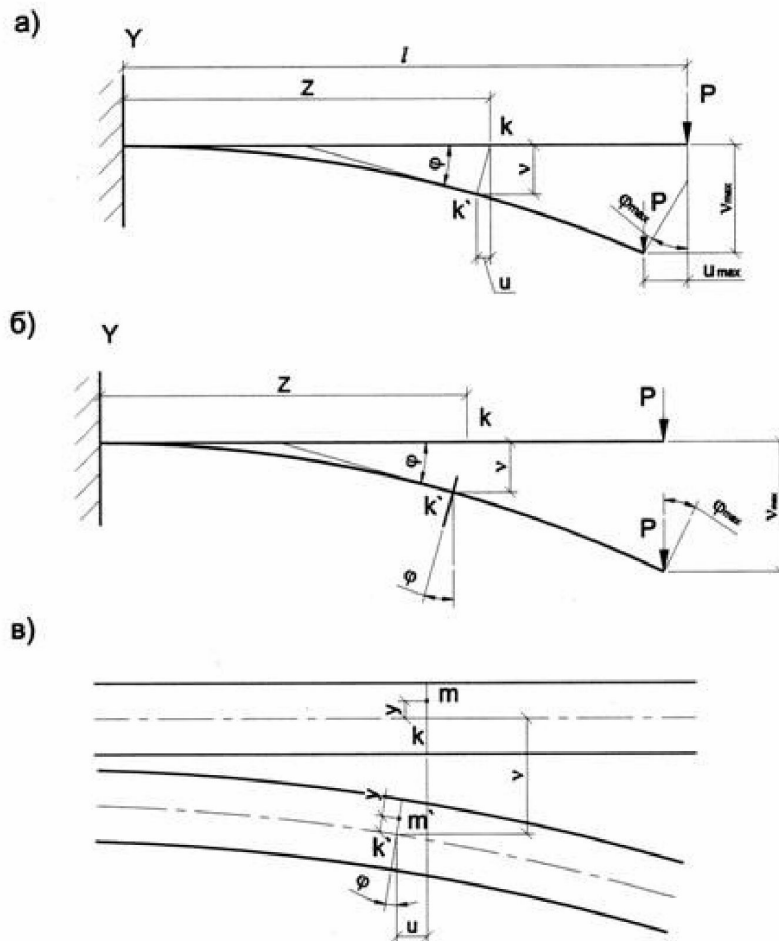


рис. 13

В обычных инженерных расчетах рассматриваются жесткие балки – деформации малы по сравнению их геометрическими размерами. Практика показывает, что осевые составляющие перемещения  $u$  на порядок меньше прогиба  $v$ . Поэтому  $u$ , по сравнению с  $v$ , пренебрегают, и рассматривают изгиб балки по расчетной схеме показанной на рис.13б, в которой центр сечения перемещается только по оси  $Y$ , а сечение поворачивается на угол  $\varphi$ . Изогнутая ось балки называется *упругой линией*. Поворот сечения соответствует углу наклона касательной к оси  $Z$ .

Упругая линия представляет собой график функции  $v = v(z)$ , а угол наклона касательной равен первой производной от функции  $v(z)$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = v'(z). \quad (30)$$

Таким образом, для определения деформаций при изгибе достаточно знать аналитическое выражение для ординат упругой линии  $v = v(z)$ .

### Дифференциальное уравнение упругой линии балки

В процессе вывода формулы нормальных напряжений при изгибе была получена формула (14) для кривизны балки. По существу эта запись закона Гука: при изгибе внутренней силовой фактор – изгибающий момент, а деформация – кривизна упругой линии. Деформация прямо пропорциональна силовому фактору и обратно пропорциональна жесткости поперечного сечения  $EJ_x$ .

В курсе высшей математики приводится выражение кривизны линии  $v = v(z)$

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (31)$$

Если ось Y направить вверх, то знаки изгибающего момента и знак кривизны совпадают, поэтому, подставляя (31) в (14) мы должны поставить знак плюс.

$$\frac{\frac{d^2v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x(z)}{EJ_x}. \quad (32)$$

Это точное дифференцированное уравнение упругой линии. Неизвестной является функция  $v = v(z)$ . Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с известной правой частью. Решение (32) в общем случае получить затруднительно, но для жестких балок прогиб мал по сравнению с пролетом, а угол наклона касательной  $\frac{dv}{dz} \ll 1$ , поэтому в знаменателе квадратом этой величины по сравнению с единицей можно пренебречь. Теперь, дифференциальное уравнение превращается в линейное второго порядка с известной правой частью

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EJ_x}. \quad (33)$$

### Интегрирование дифференциального уравнения упругой линии

Будем последовательно интегрировать (33):

$$\frac{dv}{dz} = \int \frac{M(z)dz}{EJ_x} + C_1; \quad (34)$$

$$v = \int \left[ \int \frac{M(z)dz}{EJ_x} + C_1 \right] dz + C_2 = \int \left[ \int \frac{M(z)dz}{EJ_x} + C_1 \right] dz + C_1 z + C_2.$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находят из условий закрепления балки (рис.14).

В дальнейшем будем рассматривать балки постоянного сечения  $EJ_x = const.$

Тогда вместо (33) можно записать

$$EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} = M_x(z) \quad (35)$$

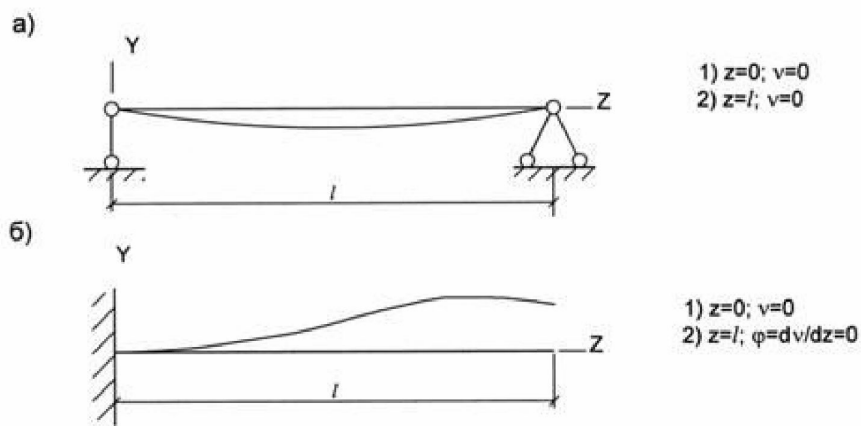


рис. 14

Выберем начало координат на левом конце балки (рис.15) и обозначим прогиб в начале координат  $v_0$ , а угол поворота  $\varphi_0$ . Тогда постоянные  $C_1$  и  $C_2$  будут иметь физический смысл. Запишем в соответствии с (34), учитывая (35):



рис. 15

$$EJ\varphi = \int_0^z M(z)dz + C_1; \quad (36)$$

$$EJv = \int_0^z \int_0^z M(z)dz dz + C_1z + C_2.$$

При подстановке  $z = 0$  получим  $C_1 = EJ\varphi_0$  и  $C_2 = EJv_0$ . Теперь соотношения (36) можно записать в форме метода начальных параметров

$$EJ\varphi = EJ\varphi_0 + \int_0^z M(z)dz; \quad (37)$$

$$EJv = EJv_0 + EJ\varphi_0z + \int_0^z \int_0^z M(z)dz dz.$$

В этом случае  $\varphi_0$  и  $v_0$  называют *начальными параметрами*.

Для стандартных нагрузок двукратное интегрирование соответствующих функций изгибающих моментов заранее выполнено и получены готовые формулы (рис.16).

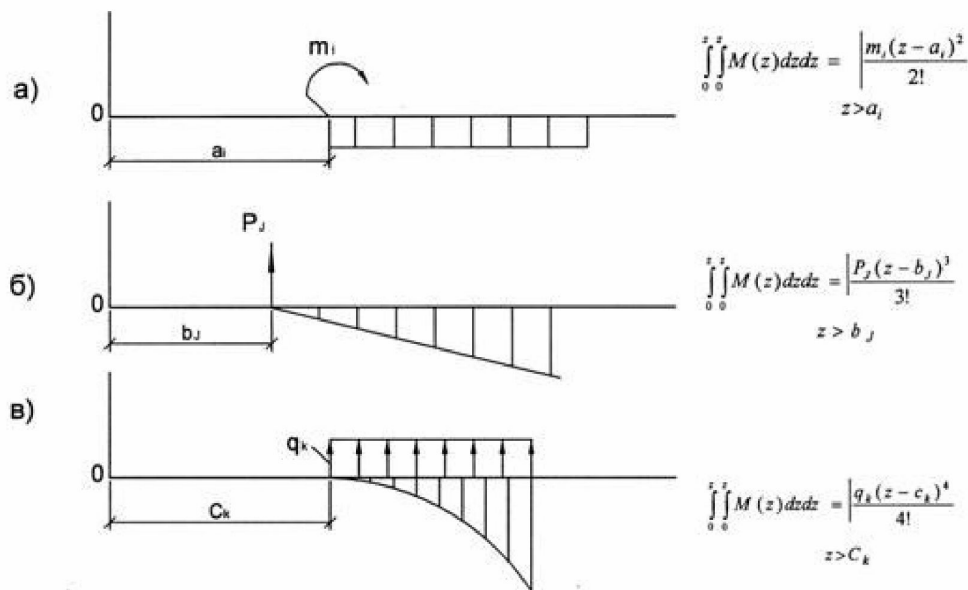


рис. 16

Используя принцип независимости действия сил, запишем вместо (37)

$$EJv = EJv_0 + EJ\varphi_0z + \sum_i \left| \frac{m_i(z-a_i)^2}{2!} \right| + \sum_j \left| \frac{P_j(z-b_j)^3}{3!} \right| + \sum_k \left| \frac{q_k(z-c_k)^4}{4!} \right|. \quad (38)$$

Значок  $\left. \begin{array}{l} | \\ z > d_i \end{array} \right\}$  перед функцией называется *прерывателем Бубнова*, и означает,

что при  $z \leq d_i$  - это слагаемое равно 0, а при  $z > d_i$  эту функцию нужно вычислять

$$\left. \begin{array}{l} | \\ z > d_i \end{array} \right\} f(z, d_i) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \leq d_i \\ f(z, d_i), & \text{при } z > d_i \end{cases} \quad (39)$$

Уравнение (38) называется *универсальным уравнением упругой линии балки*.

Рассмотрим пример применения этого уравнения (рис.17).

Определяем опорные реакции. В виду симметрии  $V_A = R_B = \frac{P}{2}$ . На балку дей-

ствуют только сосредоточенные силы. Поэтому в уравнение упругой линии войдут сла-  
гаемые типа, показанного на рис.166.

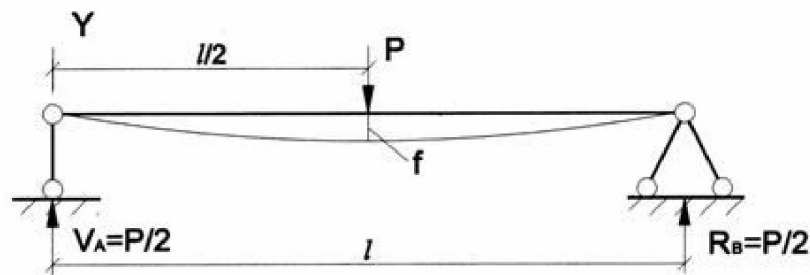


рис. 17

$$EJv = EJv_0 + EJ\varphi_0 z + \frac{P}{2} \frac{z^3}{3!} - \left. \begin{array}{l} | \\ z > d_i \end{array} \right\} \frac{P \left( z - \frac{l}{2} \right)^3}{3!}.$$

Определяем  $\varphi_0$  и  $v_0$  из условий закрепления:

1.  $z = 0; v = 0; \rightarrow v_0 = 0;$
2.  $z = l; v = 0;$

$$0 = EJ\varphi_0 l + \frac{Pl^3}{12} - \frac{P \left( \frac{l}{2} \right)^3}{6};$$

$$EJ\varphi_0 l = \frac{Pl^3}{48} - \frac{Pl^3}{12} = -\frac{Pl^3}{16}; \quad EJ\varphi_0 = -\frac{Pl^2}{16};$$

$$EJv(z) = -\frac{Pl^2}{16} z + \frac{Pz^3}{12} - \left. \begin{array}{l} | \\ z > d_i \end{array} \right\} \frac{P \left( z - \frac{l}{2} \right)^3}{6}. \quad (40)$$

Определим прогиб в середине балки

$$z = \frac{l}{2}; \quad EJf = -\frac{Pl^3}{32} + \frac{Pl^3}{96} = -\frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Для упругих деформаций характерно, что прогибы и углы поворота сечений балки прямо пропорциональны величине внешней нагрузки.

Метод начальных параметров позволяет получить аналитические выражения прогибов  $v(z)$  и углов поворота сечений  $\varphi(z) = v'(z)$  на любом участке балки. Например (40) содержит по существу две разные функции  $v(z)$  на двух участках  $0 \leq z \leq \frac{l}{2}$  и  $\frac{l}{2} \leq z \leq l$ , записанные в одну строку с помощью прерывателя Бубнова.

$$\text{При } 0 \leq z \leq \frac{l}{2}, \quad EJv(z) = -\frac{Pl^2}{16}z + \frac{Pz^3}{12}.$$

$$\text{При } \frac{l}{2} \leq z \leq l, \quad EJv(z) = -\frac{Pl^2}{16}z + \frac{Pz^3}{12} - \frac{P\left(z - \frac{l}{2}\right)^3}{6}.$$

Во многих случаях нужно иметь способ нахождения компонентов перемещений конкретного сечения балки. Для обоснования такого способа применим принцип возможных перемещений.

#### Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений состоит в следующем: если некоторая механическая система под действием заданных сил находится в равновесии, то работа сил, приложенных к этой системе, на любых бесконечно малых возможных перемещениях равна нулю. Этот принцип является необходимым и достаточным условием равновесия любой механической системы. Он следует из общего уравнения механики Даламбера-Лагранжа.

Покажем применение этого принципа для вычисления опорной реакции в шарнирно подвижной опоре (рис.18а). Для этого превратим балку в механизм, отбросив связь, воспринимающую эту реакцию и заменив ее действие неизвестной силой  $R_A$  (рис.18б). Возможным перемещением будет бесконечно малый поворот  $\delta\alpha$  балки как абсолютно твердого тела относительно центра шарнирно неподвижной опоры В. Возможные перемещения должны соответствовать наложенным на систему связям.



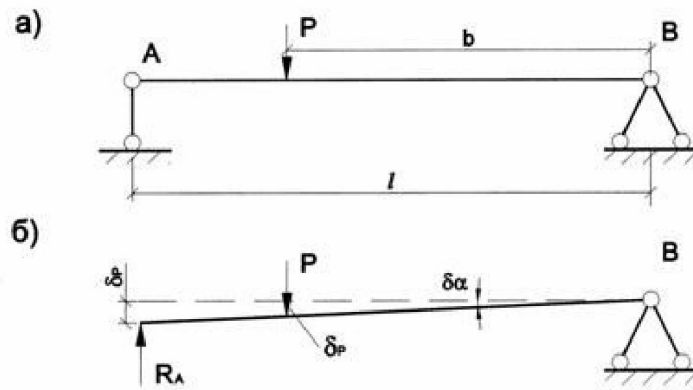


рис. 18

При этом точки приложения сил  $R_A$  и  $P$  получают бесконечно малые перемещения по направлению этих сил (соответственно  $\delta_R$  и  $\delta_P$ ). Следовательно,  $R_A$  и  $P$  совершают работу на этих перемещениях. Такую работу в дальнейшем будем называть *возможной*. Сумму работ этих сил приравняем нулю.

$$R_A \delta_R - P \delta_P = 0. \quad (41)$$

Перемещения  $\delta_R$  и  $\delta_P$  зависят от  $\delta\alpha$ :

$$\delta_R = l \delta\alpha; \quad (42)$$

$$\delta_P = b \delta\alpha. \quad (43)$$

Подставив (42) и (43) в (41), получим

$$R_A l \delta\alpha - P b \delta\alpha = 0.$$

$$\text{Отсюда, } R_A = \frac{Pb}{l}. \quad (44)$$

Получили тот же результат, который дает нам уравнение равновесия  $\sum m_B = 0$ .

Доказано, что, применяя принцип возможных перемещений к упругим системам, вместо бесконечно малых возможных перемещений можно рассматривать малые, но конечные перемещения, которые возникают от конкретной нагрузки. Кроме того, возможные перемещения можно отсчитать не от деформированного состояния, а от начального, ненагруженного.

Часто за возможные перемещения для конкретной системы сил можно принять перемещения, вызванные другой системой нагрузок.

В дальнейшем обозначения компонент перемещений сечений будем снабжать двумя индексами – первый означает номер точки на оси балки сечения, которого перемещение определяется; второй означает номер системы сил, вызывающей это перемещение ( $v_{ij}$  – прогиб точки  $i$  от системы сил с номером  $j$ ,  $\varphi_{ij}$  – тоже угол поворота сече-

ния).

Для системы сил с номером 1 (рис.19а) перемещения от системы сил с номером 2 (рис.19б) можно считать возможными и наоборот, для сил в состоянии 2 возможными будут перемещения от сил в состоянии 1.

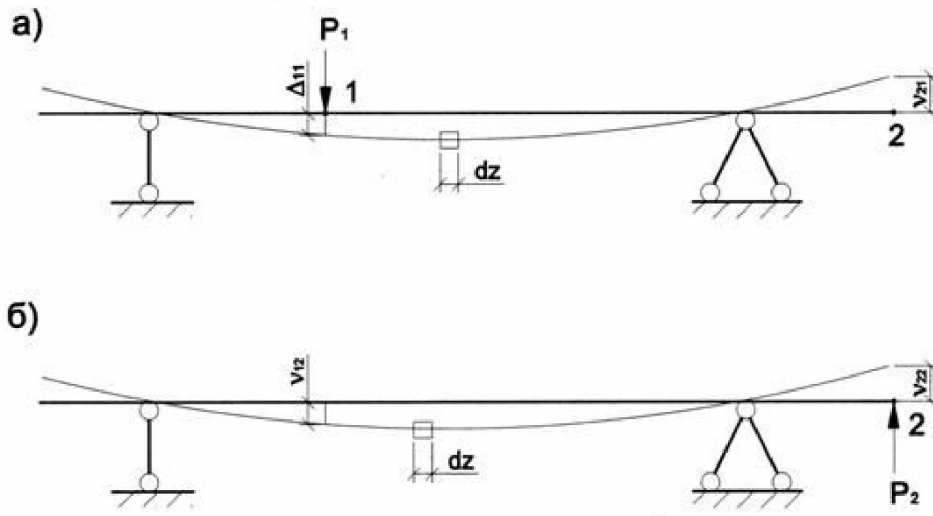


рис. 19

Можно подсчитать возможные работы этих внешних сил.

$$A_{12} = P_1 v_{12}; \quad (45)$$

$$A_{21} = P_2 v_{21}. \quad (46)$$

Возможная работа внутренних сил

Выделим двумя сечениями бесконечно малые участки балки в двух состояниях: в действительном 1 (рис.19а) и в состоянии 2, вызывающем возможные перемещения (рис.19б). В каждом из этих состояний в сечениях балки действуют внутренние силовые факторы М и Q. В дальнейшем не будем учитывать влияние поперечных сил Q, так как оно обычно мало по сравнению с влиянием М.



рис. 20

Покажем действие моментов отдельно для двух состояний (рис.20). Изгибающий момент в действительном состоянии является внутренним силовым фактором для балки, но для выделенного бесконечного малого элемента он является внешним моментом. Поэтому мы можем подсчитать элементарную возможную работу этого фактора, используя формулу типа (45), как работу внешних сил на возможных перемещениях, вызванных силами во втором состоянии (рис.19б).

Таким образом,

$$dA_{12} = \frac{M_1 M_2 dS}{EJ}. \quad (47)$$

Для вычисления элементарной работы  $dW_{12}$  внутренних сил в выделенном элементе воспользуемся принципом возможных перемещений

$$dA_{12} + dW_{12} = 0. \quad (48)$$

Отсюда следует важный вывод

$$dW_{12} = -dA_{12}, \quad (49)$$

что возможная работа внутренних сил (сил упругости) равна возможной работе внешних сил, но с обратным знаком.

Подставляя (47) в (49) получим

$$dW_{12} = -\frac{M_1 M_2 dS}{EJ}. \quad (50)$$

Просуммировав возможную работу внутренних сил по всей балке, будем иметь

$$W_{12} = -\sum \int \frac{M_1 M_2 dS}{EJ}, \quad (51)$$

где интегрирование проводится по всем участкам балки с постоянным законом для ординат эпюры изгибающих моментов.

Если действительное состояние имеет индекс  $i$ , а возможное состояние  $j$ , то

$$W_{ij} = -\sum \int \frac{M_i M_j dS}{EJ}. \quad (52)$$

Формула (52) показывает, что за действительное состояние можно принять любое из двух – тогда другое состояние будет считаться возможным для первого.

Формула Мора для определения перемещений при изгибе балок

Применяя принцип возможных перемещений для всей балки, запишем

$$A_{ij} + W_{ij} = 0. \quad (53)$$

Отсюда получим формулу для возможной работы внешних сил

$$A_{ij} = -W_{ij} = \sum \int \frac{M_i M_j dS}{EJ}. \quad (54)$$

Рассмотрим балку, показанную на рис.21а. Внешней нагрузкой является равномерно распределенная нагрузка  $q$ . Под действием этой нагрузки ось балки примет криволинейное очертание. Определим прогиб точки 1 в середине пролета  $v_{1q}$ . Для этого рассмотрим ту же балку (рис.21б), но по направлению  $v_{1q}$  приложим единичную силы  $\bar{P}_1 = 1$ .

Примем за действительное состояние 1 (рис.21б), для которого перемещения балки в состоянии  $q$  (рис.21а) будут возможными.

На основании принципа возможных перемещений, запишем сумму работ сил в состоянии 1 на возможных перемещениях состояния  $q$ .

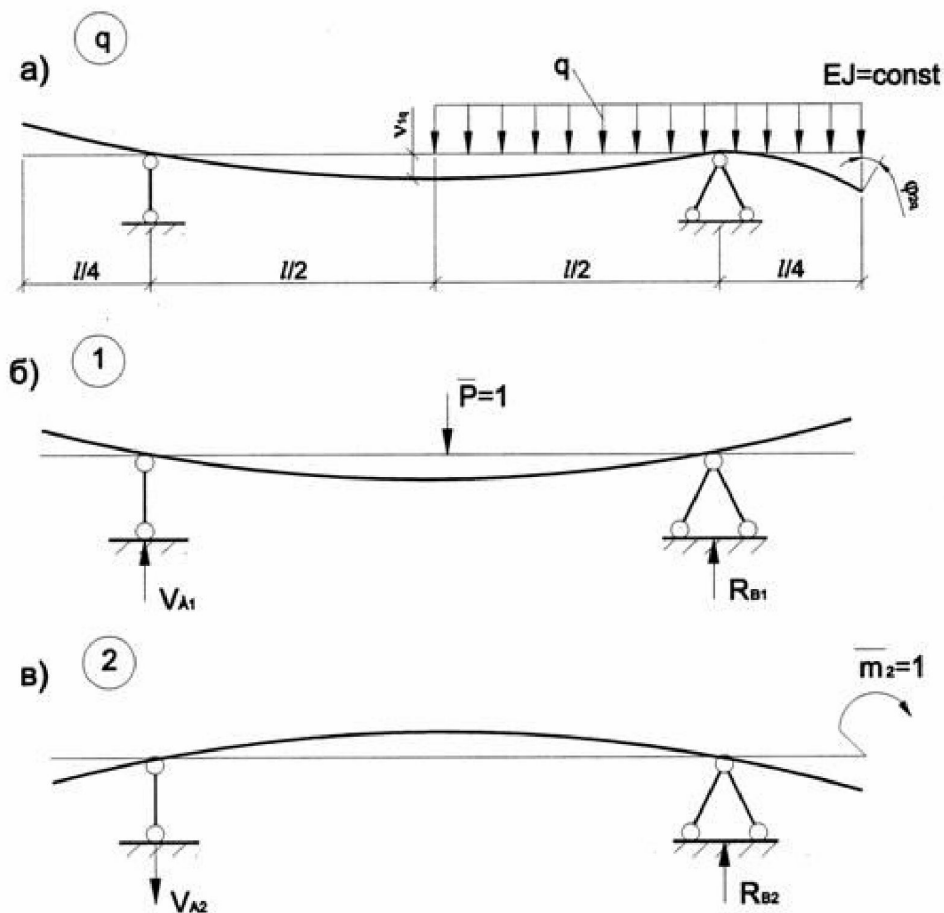


рис. 21

$$A_{1q} + W_{1q} = 0.$$

В этом состоянии работу совершает сила  $\bar{P}_1$

$$A_{1q} = \bar{P}_1 \cdot v_{1q}.$$

Используя формулу (54), получим

$$\bar{P}_1 v_{1q} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_q dS}{EJ},$$

или учитывая  $\bar{P}_1 = 1$ :

$$v_{1q} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_q dS}{EJ}. \quad (55)$$

Определим угол поворота сечения 2 на правой консоли  $\varphi_{2q}$ . Для этого рассмотрим ту же балку, но по направлению искомого угла поворота приложим сосредоточенный момент  $\bar{m}_2 = 1$  (рис.21в). Примем за действительное состояние 2 (рис.21в), для которого перемещения балки в состоянии  $q$  (рис.21а) будут возможными.

На основании принципа возможных перемещений

$$A_{2q} + W_{2q} = 0.$$

В состоянии 2 на перемещениях в состоянии  $q$  совершает работу только сосредоточенный момент  $\bar{m}_2 = 1$ :

$$A_{2q} = \bar{m}_2 \varphi_{2q}.$$

Используя формулу (54), получим

$$\bar{m}_2 \varphi_{2q} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_q dS}{EJ},$$

или учитывая  $\bar{m}_2 = 1$ ,

$$\varphi_{2q} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_q dS}{EJ}. \quad (56)$$

Формулы (55) и (56) называются *формулами Мора*. В них  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  - это ординаты эпюр моментов от единичных силовых факторов, приложенных в воображаемых состояниях 1 и 2 по направлению искомым перемещений  $v_{1q}$  и  $\varphi_{2q}$ .

Таким образом, по формулам Мора можно вычислить величину конкретного перемещения конкретного сечения балки.

Для этого нужно сделать следующее:

1. Построить эпюру  $M_q$  в балке от заданной внешней нагрузки.
2. Рассмотреть балку в воображаемом состоянии, в котором по направлению искомого перемещения приложен единичный силовой фактор (если определяется прогиб, то прикладываются единичная сила, если определяется угол поворота сечения, то прикладывается сосредоточенный момент) и построить эпюру  $\bar{M}_i$ . Черта сверху показывает, что момент определяется от единичной силы или единичного момента.

3. Перемножить соответствующие функции моментов на каждом участке, вычислить интегралы и результаты просуммировать по всем участкам балки.

Вычисление интеграла Мора. Правило Верещагина

Процедуру перемножения функций моментов в двух состояниях и последующего интегрирования произведения в пределах одного участка можно значительно упростить, если воспользоваться так называемым правилом Верещагина. На рис. 22 показаны фрагменты эпюр моментов в двух состояниях: действительном, в котором действует заданная нагрузка, и единичном (воображаемом). В действительном состоянии эпюра моментов может иметь криволинейное очертание, а в единичном – всегда прямолинейное.

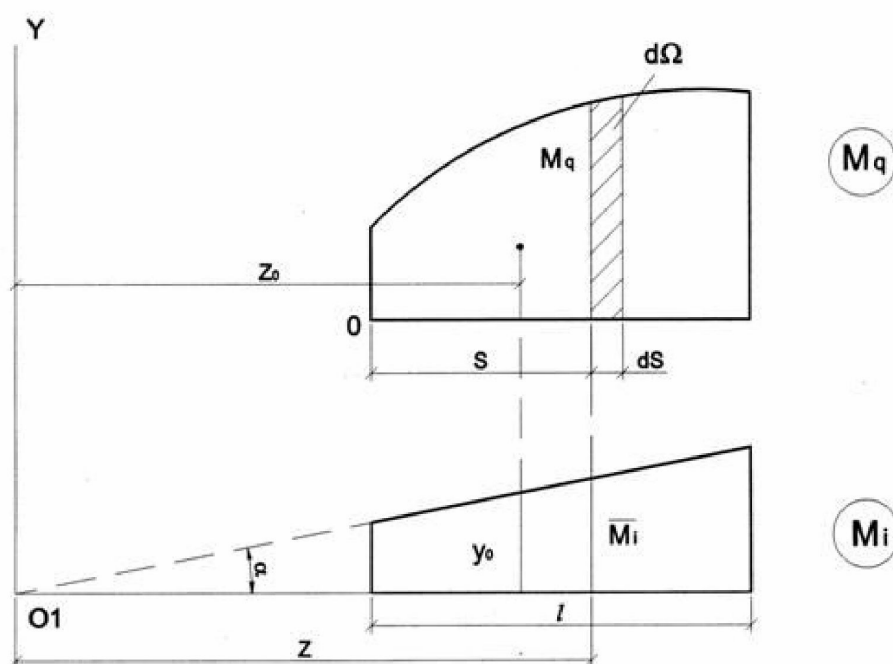


рис. 22

Воспользуемся последним обстоятельством и продолжим прямую эпюры  $\bar{M}_i$  до пересечения с осью – отметим точку  $O_1$ . Обозначим расстояние от точки  $O_1$  до текущей ординаты  $\bar{M}_i$  через  $Z$ . Тогда  $\bar{M}_i = z \operatorname{tg} \alpha$ . Приступим к вычислению определенного интеграла, считая поперечное сечение стержня в пределах одного участка постоянным.

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_i M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_q dS = \frac{1}{EJ} \int_{\Omega} z \operatorname{tg} \alpha d\Omega = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EJ} \int_{\Omega} z d\Omega.$$

Здесь введено обозначение  $d\Omega = M_q dS$  - элементарная площадь эпюры. Последний интеграл по площади называется *статическим моментом площади эпюры*  $M_q$  относительно оси  $Y$ . Он численно равен произведению площади эпюры на расстояние от оси  $Y$  до центра тяжести этой площади. Таким образом, обозначив  $z_0$  - координату центра тяжести эпюры  $M_q$  относительно оси  $Y$ , а  $\Omega$  - площадь эпюры  $M_q$ , получим

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_i M_q dS}{EJ} = \frac{\text{tg} \alpha}{EJ} z_0 \Omega = \frac{y_0 \Omega}{EJ},$$

где  $y_0 = \text{tg} \alpha z_0$  - ордината эпюры  $\bar{M}_i$  - под центром тяжести эпюры  $\bar{M}_q$ .

Окончательно правило Верещагина формулируется следующим образом: для того, чтобы вычислить интеграл от произведения двух эпюр, нужно площадь криволинейной эпюры умножить на ординату прямолинейной под центром тяжести криволинейной и результат разделить на  $EJ$ .

Если обе эпюры прямолинейные, то площадь и центр тяжести можно вычислять у любой из них, а ординату - у другой.

Обычно криволинейность эпюры вызвана действием равномерно распределенной нагрузки. При этом всегда такую эпюру можно рассматривать как сумму прямолинейной эпюры, возникающей от концевых моментов, и параболического сегмента, имеющего вид эпюры моментов в однопролетной шарнирно опертой балке от равномерно распределенной нагрузки (рис.23).

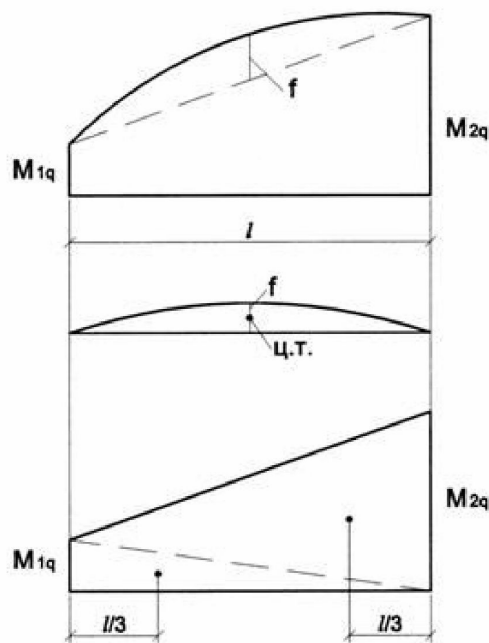


рис. 23

Отклонение криволинейной эпюры в середине участка от линии соединяющей крайние ординаты  $M_{1q}$  и  $M_{2q}$ , называют *стрелкой* и обозначают  $f$ . От действия равномерно распределенной нагрузки  $q$  всегда

$$f = \frac{ql^2}{8}, \quad (57)$$

а площадь – *параболического сегмента*

$$\Omega = \frac{2}{3} fl, \quad (58)$$

с центром тяжести посередине участка.

Прямолинейную часть эпюры можно, в свою очередь, рассматривать как сумму двух треугольных эпюр с центрами тяжести в соответствующей трети участка.

### Расчет статически неопределимых балок

Статически неопределимыми балками называются балки, у которых число опорных реакций больше числа уравнений равновесия.

В задаче № 5 речь идет об один раз статически неопределимых балках. Примеры таких балок показаны на рис.24. Число опорных реакций на единицу больше числа уравнений равновесия. В схеме (рис.24в) кроме трех уравнений равновесия  $\sum m_A = 0$ ;  $\sum y = 0$ ;  $\sum z = 0$ .

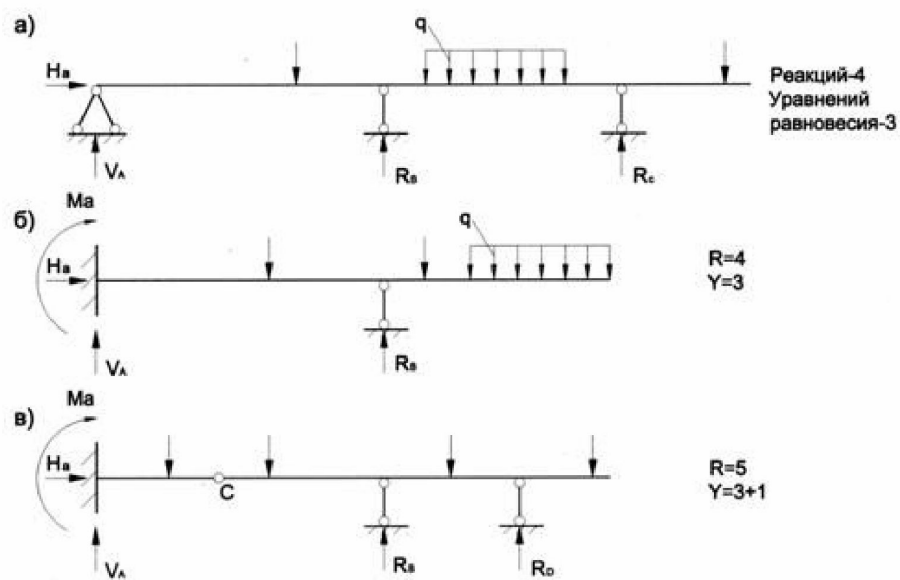


рис. 24



Можно составить четвертое -  $\sum m_c^{лев} = 0$  или  $\sum m_c^{прав} = 0$ .

Расчет один раз статически неопределимых балок проводится в следующей последовательности:

1. Отбрасывается одна опорная связь и ее действие заменяется неизвестной реакцией  $X_1$ . При этом полученная схема балки должна быть геометрически неизменяемой и статически определимой. Эту схему балки в дальнейшем будем называть *основной системой*.
2. Для основной системы ставится условие, что реакция  $X_1$  должна быть такой, что основная система должна деформироваться также как и заданная.

По направлению  $X_1$  в основной системе отсутствует опорная связь, и может происходить перемещение по этому направлению. В заданной системе по этому направлению находится опорная связь и перемещение по направлению  $X_1$  равно нулю. Следовательно, для определения  $X_1$  нужно составить уравнение деформации, выражающее условие, что и в основной системе перемещение по направлению  $X_1$  должно быть равно нулю. В соответствии с принципом независимости действия сил

$$\bar{v}_{11} \cdot X_1 + v_{1p} = 0, \quad (59)$$

здесь  $\bar{v}_{11}$  - перемещение по направлению  $X_1$  в основной системе от силы  $\bar{X} = 1$ ;  
 $v_{1p}$  - перемещение в основной системе по направлению  $X_1$  от нагрузки.

Каждое из этих перемещений находится по формуле Мора

$$\bar{v}_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dS}{EJ}; \quad (60)$$

$$v_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p dS}{EJ}. \quad (61)$$

Для этого строятся две эпюры: -  $M_p$  от внешней нагрузки в основной системе, и  $\bar{M}_1$  - эпюра от  $\bar{X}_1 = 1$  в основной системе.

После определения  $X_1$  строятся эпюры  $M$  и  $Q$  в основной системе как в статически определимой балке.

### ЗАДАЧА № 3

Целью настоящей задачи является овладение навыками построения эпюр внутренних силовых факторов при изгибе балок и их расчет на прочность (подбор необходимого поперечного сечения). При этом необходимо усвоить сущность метода сечений, правило знаков для внутренних силовых факторов, порядок построения эпюр и методику вычерчивания приблизительного вида изогнутой оси изгибаемых элементов, а также суть расчета на прочность при изгибе.

Задачу будем решать в следующей последовательности:

1. Из уравнений равновесия (статики) найдем опорные реакции и проверим правильность их вычисления.
2. Установим количество характерных участков системы, в пределах каждого, из которых закон изменения изгибающего момента и поперечной силы неизменен. При этом границами участков будем считать точки, в которых происходит изменение характера приложения внешней нагрузки (появление сосредоточенных сил или моментов, начало или конец приложения распределенной нагрузки), а также изменение геометрических характеристик сечения балки или направления её оси.
3. Используя метод сечений, составим аналитические выражения для внутренних силовых факторов на каждом из участков в зависимости от текущей координаты вдоль оси балки.
4. Определим числовые значения внутренних силовых факторов в характерных сечениях на каждом из участков. Как правило, такими сечениями являются начало и конец участка, а также точка на оси балки, в которой изгибающий момент принимает экстремальное значение. (Эта точка требуется лишь в случаях, когда эпюра поперечной силы на рассматриваемом участке пересекает ось абсцисс, то есть  $Q$  принимает нулевое значение).
5. Строим эпюры внутренних силовых факторов, располагая их под расчетной схемой балки. При этом положительные значения ординат поперечных сил откладываем вверх, а отрицательные – вниз, в то время как эпюры изгибающих моментов строятся на растянутых волокнах. Знаки проставляются только на эпюрах поперечных сил.
6. Производим проверку правильности построения эпюр на основании дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом и поперечной силой.
7. Изображаем примерный вид изогнутой оси балки.
8. Определяем опасное сечение, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент.
9. Из условия прочности при изгибе определяем наименьшее предельное значение момента сопротивления сечения.
10. Принимая во внимание конструктивные особенности и тип сечения, определяем характерные размеры ( $b$  и  $h$  в случае прямоугольного поперечного сечения или номер двутавра – в случае применения сортового проката).

### **Схема I. Консольная балка**

1. При расчете консольной балки рекомендуется начинать ее обход со свободного конца и двигаться в сторону заделки. В этом случае опорные реакции на данном этапе расчета можно не определять, а их величины впоследствии взять с эпюр внут-

ренных силовых факторов.

2. Поскольку в рассматриваемых нами задачах изгибная жесткость всех участков балки предполагается одинаковой, а ее ось – прямолинейной, то о начале каждого нового участка можно будет судить по изменениям характера внешней нагрузки. Так, двигаясь справа налево (в сторону заделки), мы видим силу  $P$ , что говорит о начале второго участка, и, далее, распределенную нагрузку  $q$ , которая продолжается до конца балки и заделки, тем самым определяя протяженность третьего, последнего участка (рис. 25а).

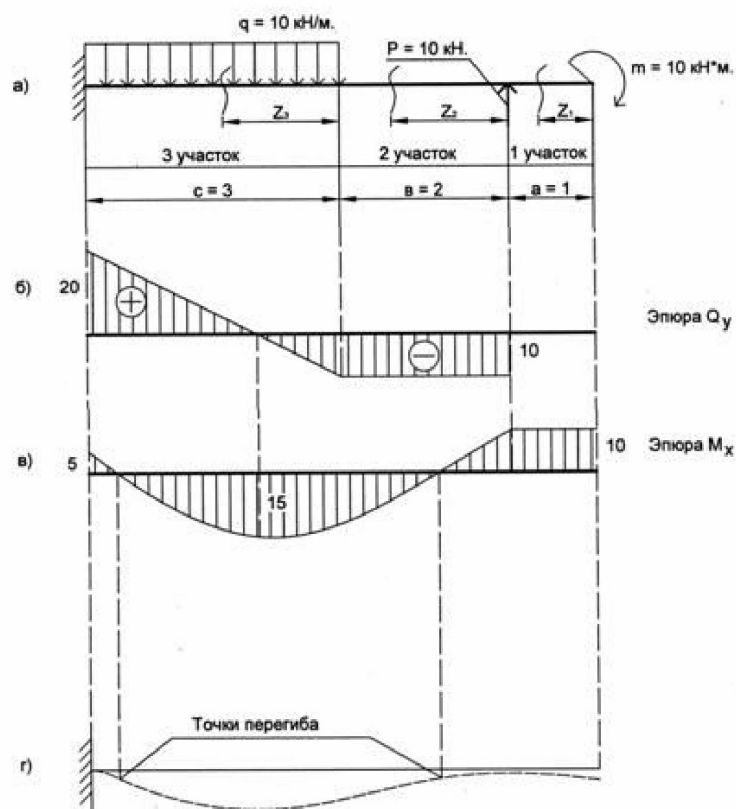


рис. 25

3. На протяжении каждого из указанных участков законы изменения изгибающего момента  $M_x$  и поперечной силы  $Q_y$  будут неизменными и полученные нами уравнения будут справедливы для любой точки в их пределах. Таким образом, следует трижды рассечь балку (рис.25а) и в каждом случае выписать выражения для поперечной силы и изгибающего момента (рис.26).

Проводя последовательно сечения на первом, втором и третьем участках, рассмотрим равновесие правой отсеченной части, приложив к ней все действующие справа от сечения заданные нагрузки, и внутренние силовые факторы  $M_x$  и  $Q_y$  в положительном направлении.

тельном направлении.

Имеем:

Для первого участка ( $0 \leq z_1 \leq a$ ):

$$\sum y^{прав} = 0; Q_y = 0 \quad (\text{силы отсутствуют})$$

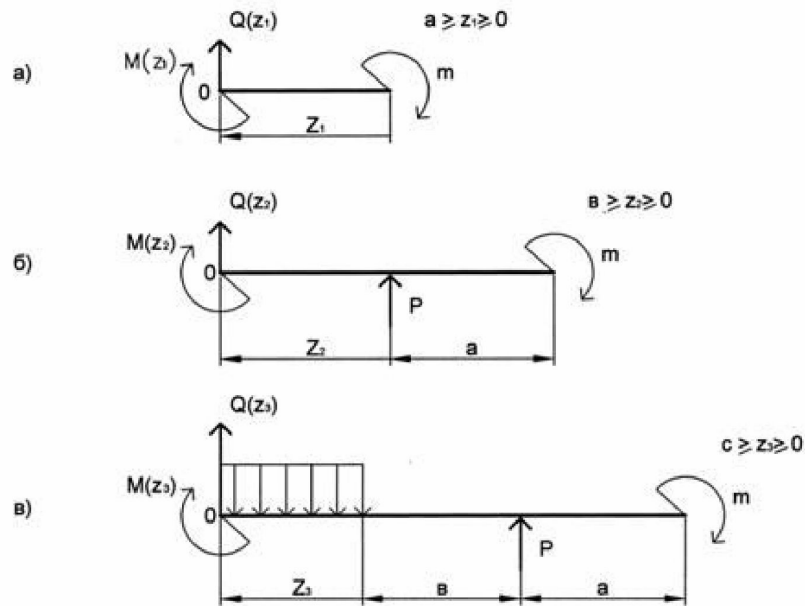


рис. 26

$$\sum m_0^{прав} = 0; M_x = -m$$

Для второго участка ( $0 \leq z_2 \leq b$ ):

$$\sum y^{прав} = 0; Q_y = -P$$

$$\sum m_0^{прав} = 0; M_x = -m + P z_2$$

Для третьего участка ( $0 \leq z_3 \leq c$ ):

$$\sum y^{прав} = 0; Q_y = -P + q z_3$$

$$\sum m_0^{прав} = 0; M_x = -m + P(b + z_3) - q z_3^2 / 2$$

Определим теперь значения  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях (рассмотрим пока только точки начала и конца участков).

Первый участок:

$$Q_y = 0$$

$$M_x = -m$$

Очевидно, что величины  $Q_y$  и  $M_x$  от координаты  $z$  не зависят.

Второй участок:

$$\begin{aligned} \text{При } z = 0 \quad Q_y &= -P & M_x &= -m \\ \text{При } z = b \quad Q_y &= -P & M_x &= -m + Pb \end{aligned}$$

Здесь  $Q_y$  – константа ( не зависит от координаты  $z$  в пределах второго участка), а  $M_x$  – наклонная прямая ( параметр  $z$  входит в уравнение в первой степени ).

Третий участок:

$$\begin{aligned} \text{При } z = 0 \quad Q_y &= -P & M_x &= -m + Pb \\ \text{При } z = c \quad Q_y &= -P + qc & M_x &= -m + P(b + c) - qc^2/2 \end{aligned}$$

На этом участке сила  $Q_y$  изменяется по линейному закону (её эпюра представляет собой наклонную линию), а момент  $M_x$  – по закону квадратной параболы (параметр  $z$  входит в уравнение во второй степени ).

Для построения параболической кривой двух точек может оказаться недостаточно. Однако, при решении рассматриваемой задачи нас будут интересовать только максимальные ( по абсолютной величине ) значения момента в пределах каждого из участков, поэтому, если эпюра  $M_x$  на рассматриваемом участке не имеет экстремума, то наибольшим будет одно из граничных значений функции  $M_x$ , если же такой экстремум существует, то его определением мы займемся ниже.

4. Для наглядности предположим, что входящие в уравнения величины имеют следующие числовые значения:

$$a = 1 \text{ м}, \quad b = 2 \text{ м}, \quad c = 3 \text{ м}, \quad P = 10 \text{ кН}, \quad m = 10 \text{ кНм}, \quad q = 10 \text{ кН/м} .$$

Подставляя их в ранее полученные аналитические выражения, будем иметь следующие результаты:

Таблица 3.1

№ участка	$z$ , м	$Q_y$ , кН	$M_x$ , кНм
1 участок	$z = 0$	$Q_y = 0$	$M_x = -10$
	$z = 1$	$Q_y = 0$	$M_x = -10$
2 участок	$z = 0$	$Q_y = -10$	$M_x = -10$
	$z = 2$	$Q_y = -10$	$M_x = +10$
3 участок	$z = 0$	$Q_y = -10$	$M_x = +10$
	$z = 3$	$Q_y = +20$	$M_x = -5$

Анализируя характер изменения поперечной силы на третьем участке, можно заметить, что её эпюра начинается в отрицательной области значений  $Q_y$ , а заканчивается в положительной и, следовательно, пересекает ось абсцисс. Определим координату  $z^*$  этой точки, приравняв  $Q_y$  нулю. Имеем:

$$Q_y = -P + qz = 0, \text{ откуда } P = qz \text{ и, окончательно, } z^* = P/q = 1 \text{ м}.$$

Поскольку изгибающий момент и поперечная сила связаны дифференциальной зависимостью  $dM_x/dz = Q_y$ , а в рассматриваемой нами точке  $Q_y = 0$ , то изгибающий момент  $M_x$  принимает здесь экстремальное значение. Определим его, подставив  $z^* = 1$  в уравнение момента на третьем участке:

$$M_x = -m + P(b + z^*) - qz^{*2}/2 = 15 \text{ кНм}.$$

и получим третью (промежуточную) точку для построения эпюры  $M_x$  .

5. Построим теперь эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Для этого отложим перпендикулярно к оси абсцисс ( для каждой эпюры это линии, параллельные оси балки ) в удобном для пользования масштабе вычисленные значения  $Q_y$  и  $M_x$  для граничных и промежуточных сечений участков и соединим концы полученных ординат линиями, соответствующими законам изменения  $Q_y$  и  $M_x$ . При этом положительные ординаты эпюры  $Q_y$  будем откладывать вверх, а отрицательные – вниз от оси абсцисс; ординаты же эпюры  $M_x$  будем откладывать со стороны растянутых волокон. При вычерчивании параболических участков эпюр изгибающих моментов форма линии эпюры должна соответствовать “правилу паруса”, что применительно к эпюрам, построенным на растянутых волокнах легко интерпретировать графически (см. рис. 27)



Рис. 27

то есть выпуклость линии эпюры соответствует направлению действия распределенной нагрузки. Знание этого правила особенно полезно при вычерчивании участков эпюр изгибающих моментов по двум точкам.

После завершения построений на эпюре  $Q_y$  нужно проставить знаки, на эпюре же  $M_x$  их обычно не ставят ( см. рис. 25б и 25в).

Полезно отметить, что из построенных нами эпюр  $M_x$  и  $Q_y$  теперь можно легко определить численные значения внутренних силовых факторов в заделке (опорную реакцию и момент), не определенные нами в начале решения задачи. Так, из рис. 25б находим  $R = +20$  кН ( $\uparrow$ ), а из рис. 25в – изгибающий момент  $M_{оп} = -5$  кНм (против часовой стрелке).

6. Проверим теперь правильность построения эпюр  $M_x$  и  $Q_y$  и их соответствие друг другу. Из зависимости  $dM_x/dz = Q_y$  становится очевидным, что порядок линии, описывающей закон изменения изгибающего момента всегда на единицу выше, чем порядок линии, описывающей эпюру поперечных сил. Следовательно, на участках балки между эпюрами внутренних силовых факторов должны существовать следующие зависимости:

<b>Изгибающий момент</b>	<i>Квадратная парабола</i>	<i>Наклонная прямая</i>	<i>Константа</i>
<b>Поперечная сила</b>	<i>Наклонная прямая</i>	<i>Константа</i>	<i>Отсутствует</i>

В местах приложения сосредоточенных нагрузок (сил и моментов) на эпюрах соответствующих им внутренних силовых факторов должны иметь место скачки, равные им по величине. Так, приложенная внешняя сила  $P$  будет вызывать скачок на эпюре  $Q_y$ , а наличие сосредоточенного момента  $m$  будет говорить о скачке на эпюре  $M_x$ .

Нелишне еще раз убедиться и в наличие экстремумов на эпюре моментов, а также в соответствии их положений нулевым ординатам на эпюре  $Q_y$ .

Как видим, в нашем случае все указанные свойства в эпюрах присутствуют.

7. Построим теперь изображение примерного вида изогнутой оси балки. Поскольку наши построения носят приближенный характер, то основой для проведения такой линии будут являться следующие положения:

а) Кривизна балки на участках должна соответствовать расположению эпюр изгибающих моментов. Так, если для какого-либо участка эпюра  $M_x$  построена на нижних волокнах (в данном случае они растянуты), то кривизна балки должна иметь вид, приведенный на рис. 28а. Если же эпюра моментов расположена на верхних волокнах (теперь они растянуты), то участок балки примет форму, представленную на рис. 28б.



Рис. 28а



Рис.28б

Как видим, на левом рисунке растянуты (удлиняются) нижние волокна, а на правом – верхние.

б) В точке заделки вне зависимости от величины изгибающего момента поворот сечения отсутствует, следовательно, линия изогнутой оси балки должна выходить под прямым углом (в данном случае, к вертикали).

с) Участки с разными знаками кривизны упругой линии должны сопрягаться плавной линией (без изломов), а сечение, в котором кривизна меняет знак и которое называется *точкой перегиба*, должно быть показано на чертеже.

Построенная с учетом вышесказанного упругая линия консольной балки изображена на рис.25г.

8. Подбор размеров поперечного сечения осуществляем по методу допускаемых напряжений, из которого следует, что в рассмотрение следует принимать лишь то сечение балки, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент. Однако при этом нужно иметь в виду, что данный прием можно использовать только в случае, когда изгибная жесткость балки  $EJ_x$  на всем ее протяжении одинакова, то есть вся балка изготовлена из одного материала и имеет неизменные по

своей длине характеристики поперечного сечения. В нашем примере опасным является сечение, в котором  $M_{\max} = 15$  кНм.

9. Прямоугольное сечение деревянной балки подбираем из условия прочности при допуске напряжении  $[\sigma] = 12,4$  МПа и заданном соотношении сторон  $h / b$ :

$$\sigma = M_{\max} / W_x \leq [\sigma],$$

откуда следует, что требуемый момент сопротивления сечения балки при изгибе должен быть больше или равен:

$$W_x^{тp} = \frac{15}{12,4 \cdot 10^3} = 1,2096 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

10. Момент сопротивления прямоугольного сечения относительно нейтральной оси X (см. рис 29а) будет иметь вид:

$$W_x = bh^2 / 6.$$

Для конкретизации расчета предположим, что  $h / b = 1,5$ .

Имеем:

$$W_x = \frac{9}{24} b^3,$$

и, окончательно,

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{W_x^{тp} \cdot 24}{9}} = \sqrt[3]{\frac{1,2096 \cdot 10^{-3} \cdot 24}{9}} = 10^{-1} \sqrt[3]{3,225} = 0,1477 \text{ м}.$$

При назначении реальных размеров поперечного сечения следует округлить результаты расчетов в большую сторону. Полученные таким образом числовые значения  $b = 0,15$  м и  $h = 1,5 \cdot 0,15 = 0,225$  м указаны на рис. 29б.



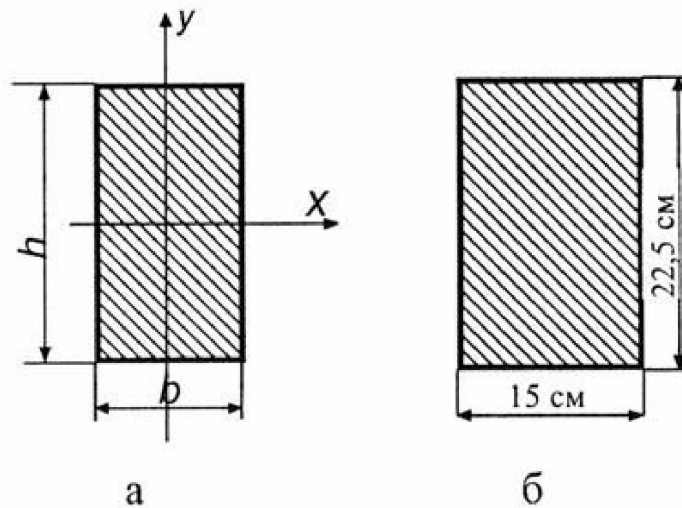


Рис.29

### Схема II. Балка на двух опорах

1. Для определения опорных реакций воспользуемся уравнениями статики. В общем случае для плоской системы нагрузок таких уравнений будет три:

$$\sum m_A = 0, \quad \sum m_B = 0, \quad \sum z = 0.$$

$$\sum m_A = 0; R_B(c + b) + m + Pd - q(b + a) \left( c + \frac{b + a}{2} \right) = 0;$$

$$\sum m_B = 0; V_A(c + b) - P(d + c + b) - m - q \frac{b^2}{2} + q \frac{a^2}{2} = 0;$$

$$\sum z = 0; H_A = 0.$$

Записывая, а затем, решая их, получим

$$V_A = 65 \text{ кН}, \quad R_B = 105 \text{ кН}.$$

Горизонтальная составляющая реакции в опоре А равна нулю, поскольку все внешние нагрузки действуют вдоль вертикали. Направление реакций  $V_A$  и  $R_B$  указано на рис. 30а.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> После определения реакций полезно сделать проверку правильности их вычисления подстановкой результатов в уравнение  $\sum y = 0$ .

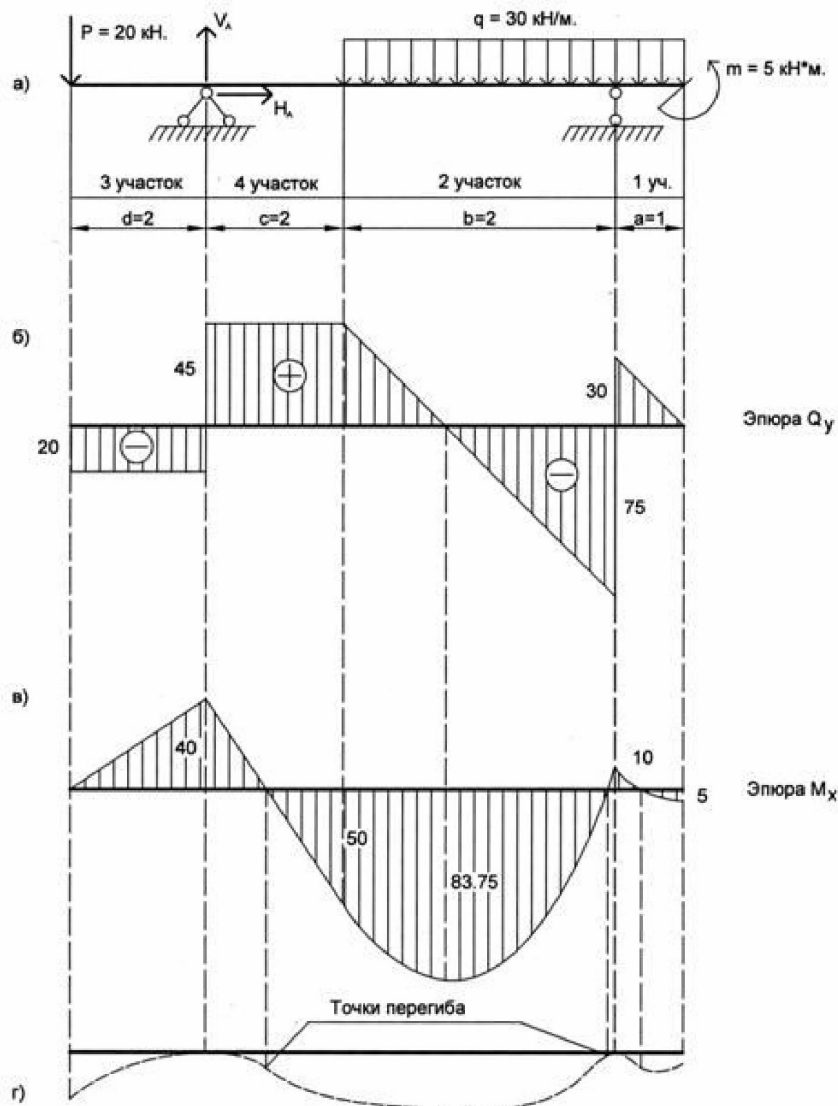


рис. 30

2. Как и ранее предполагается, что на всем своем протяжении балка имеет одинаковую изгибную жесткость  $EJ_x$ , что выражается в неизменности геометрических размеров сечения по длине балки, а также в постоянстве механических свойств (вся балка изготовлена из одного материала). При этих ограничениях для возникновения каждого нового участка достаточно изменения характера внешней нагрузки (в нашем случае это появление сосредоточенной силы, момента, начало или окончание действия равномерно распределенной нагрузки). Рассуждая, таким образом, устанавливаем, что число участков для нашей расчетной схемы будет равно четырем (рис. 30а).

3. Проводя последовательно сечения на первом и втором участках, будем рассматривать равновесие правой отсеченной части. При движении слева направо (участки 3 и 4) будем рассматривать равновесие левой отсеченной части (рис. 31).

Обход балки с разных сторон целесообразен в тех случаях, когда число участков превышает два. В случае же, если мы будем осуществлять расчет, двигаясь в одном направлении, количество слагаемых от участка к участку будет существенно возрастать, что неизбежно приведет к увеличению объема вычислений.

Имеем:

Для первого участка ( $0 \leq z_1 \leq a$ ):

$$\sum y^{прав} = 0; Q_y = + q z_1 \quad (\text{наклонная линия})$$

$$\sum m_0^{прав} = 0; M_x = + m - q z_1^2 / 2 \quad (\text{квадратная парабола})$$

Для второго участка ( $0 \leq z_2 \leq b$ ):

$$\sum y^{прав} = 0; Q_y = - R_B + q (a + z_2) \quad (\text{наклонная линия})$$

$$\sum m_0^{прав} = 0; M_x = + m - q (a + z_2)^2 / 2 + R_B z_2 \quad (\text{квадратная парабола})$$

Для третьего участка ( $0 \leq z_3 \leq d$ ):

$$\sum y^{лев} = 0; Q_y = - P \quad (\text{константа})$$

$$\sum m_0^{лев} = 0; M_x = - P z \quad (\text{наклонная линия})$$

Для четвертого участка ( $0 \leq z_4 \leq c$ ):

$$\sum y^{лев} = 0; Q_y = - P + V_A \quad (\text{константа})$$

$$\sum m_0^{лев} = 0; M_x = - P (d + z_4) + V_A z_4 \quad (\text{наклонная линия})$$

4. Определим теперь числовые значения  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях (как и в случае консольной балки, сначала рассмотрим лишь точки, соответствующие началу и концу каждого из участков).

Первый участок:

$$\text{При } z = 0 \quad Q_y = 0 \quad M_x = m$$

$$\text{При } z = a \quad Q_y = q a \quad M_x = m - q a^2 / 2$$

Второй участок:

$$\text{При } z = 0 \quad Q_y = q a - R_B \quad M_x = m - q a^2 / 2$$

$$\text{При } z = b \quad Q_y = q (a+b) - R_B \quad M_x = m - q (a+b)^2 / 2 + R_B b$$

Третий участок:

$$\text{При } z = 0 \quad Q_y = - P \quad M_x = 0$$

$$\text{При } z = d \quad Q_y = - P \quad M_x = - P d$$

Четвертый участок:

$$\text{При } z = 0 \quad Q_y = - P + R_A \quad M_x = - P d$$

$$\text{При } z = c \quad Q_y = - P + R_A \quad M_x = - P (c+d) + R_A c$$

Для наглядности вычислим значения ординат при следующих числовых значениях:

$a = 1 \text{ м}, \quad b = 4 \text{ м}, \quad c = 2 \text{ м}, \quad d = 2 \text{ м}, \quad P = 20 \text{ кН}, \quad m = 5 \text{ кНм}, \quad q = 30 \text{ кН/м}$   
и сведем полученные результаты в таблицу 3.2:

Таблица 3.2

№ участка	$z, \text{ м}$	$Q_y, \text{ кН}$	$M_x, \text{ кНм}$
1 участок	$z = 0$	$Q_y = 0$	$M_x = 5$
	$z = 1$	$Q_y = 30$	$M_x = -10$
2 участок	$z = 0$	$Q_y = -75$	$M_x = 20$
	$z = 4$	$Q_y = 45$	$M_x = 50$
3 участок	$z = 0$	$Q_y = -20$	$M_x = 0$
	$z = 2$	$Q_y = -20$	$M_x = -40$
4 участок	$z = 0$	$Q_y = 45$	$M_x = -40$
	$z = 2$	$Q_y = 45$	$M_x = 50$

Анализируя закон изменения  $Q_y$  на втором участке, видим, что эпюра меняет знак. Точка перехода  $Q_y$  через ноль даст нам координату экстремума  $z^*$  (см рис.306) на эпюре изгибающих моментов (рис.30в). Определим эту точку:

$$Q_y = -R_B + q(a + z) = 0, \quad \text{откуда} \quad z^* = (R_B - qa) / q = 2,5 \text{ м.}$$

Подставляя полученное значение  $z^*$  в уравнение момента на втором участке, получим величину экстремума, который даст третью (промежуточную) точку для построения эпюры  $M_x$ :

$$M_x = +m - q(a + z^*)^2/2 + R_B z^* = 83,75 \text{ кНм.}$$

5. По полученным данным (табл.3.2) в той же последовательности, что и для консольной балки, строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.30б и 30в).

6. Проведем теперь проверку правильности построения эпюр. Прежде всего, установим соответствие между эпюрами изгибающих моментов и поперечных сил на каждом из участков. Ранее было показано, что порядок линии, описывающей  $Q_y$  на единицу меньше, чем порядок линии, описывающей  $M_x$ . У нас на первом и втором участках эпюра  $M_x$  представляет собой параболу, а эпюра  $Q_y$  - наклонную прямую, на третьем и четвертом участках соответственно  $M_x$  - наклонная прямая,  $Q_y$  - константа. Очевидно, что дифференциальная зависимость  $dM_x/dz = Q_y$  на всех участках выполняется. Кроме того, отмечаем, что при  $Q_y = 0$  эпюра моментов имеет максимальное значение (экстремум), что также говорит об удовлетворении указанной дифференциальной зависимости.

Помня о том, что внешние сосредоточенные силовые факторы должны давать на соответствующих им эпюрах скачки, убеждаемся, что под  $P, V_A, R_B$  и  $m$  действительно есть такие изменения ординат (на 20 кН, 65 кН и 105 кН в эпюре  $Q_y$  и 5 кНм - в эпюре  $M_x$ ). Таким образом, делаем вывод, что эпюры построены правильно.

7. При вычерчивании изображения примерного вида изогнутой оси балки помимо рассуждений о соответствии её кривизны расположению эпюры моментов (подробности изложены ранее при расчете консольной схемы), отметим также, что в отличие от первого случая здесь имеются две характерные точки (опоры  $A$  и  $B$ ), в которых перемещения равны нулю. Построение обычно начинают с участков, прилегающих к точкам опор

(или включающих в себя эти точки). По эпюре моментов делаем вывод, что упругая линия имеет три точки перегиба, комбинируя виды балки изображенные на рис. 28а и 28б, сопрягая участки упругой линии в точках перегиба и не забывая при этом, что на опорах перемещения отсутствуют, строим окончательную кривую, представленную на рис. 30г.

8. Поскольку балка в нашем примере должна быть изготовлена из двутавра, очевидно, что ее поперечное сечение, а также механические свойства по длине остаются неизменными, следовательно, расчет на прочность следует проводить для сечения, в котором действует максимальный изгибающий момент  $M_x = 83,75$  кНм (опасное сечение).

9. Номер двутавра для балки подбираем из условия прочности при изгибе и допускаемом напряжении  $[\sigma] = 200$  МПа (сталь):

$$\sigma = M_{max} / W_x \leq [\sigma],$$

откуда требуемый момент сопротивления должен быть больше или равен

$$W_x^{TP} = 418,75 \text{ см}^3.$$

10. По сортаменту (ГОСТ 8239-72 Приложение 1) выбираем двутавр № 30 с  $W_x = 472 \text{ см}^3$ .

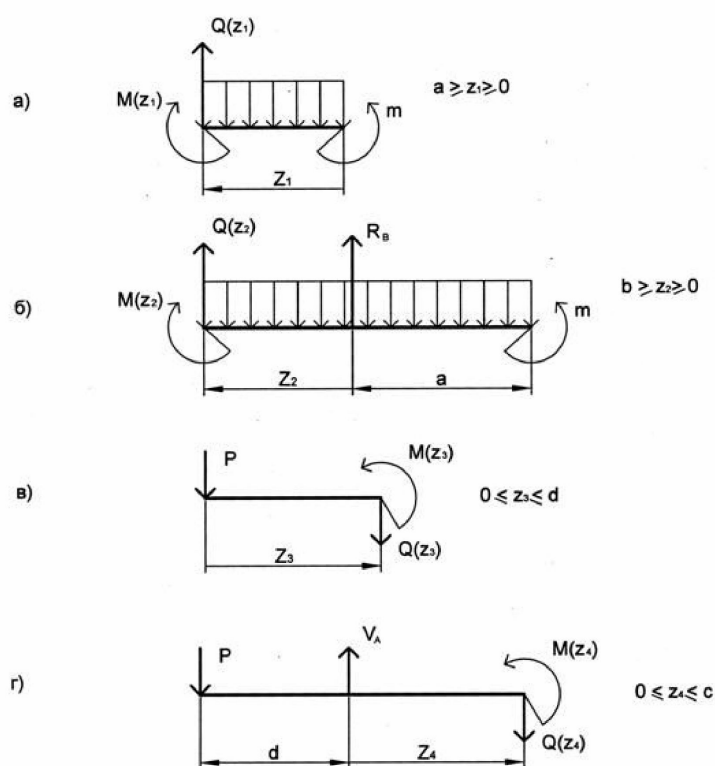


рис. 31

#### ЗАДАЧА № 4

Задача относится к разделу «Определение перемещений при изгибе балок». В задании требуется найти компоненты перемещений балки, рассчитанной в задаче № 3.

Мы рассмотрим новую схему (рис.32).

Приведем эпюры  $M$  и  $Q$  для балки по схеме № 4 Задачи № 3: при  $a=2$  м;  $q=10$  кН/м;  $C=1,5a$ ;  $M=0,5 qa^2$ ;  $P=0,8 qa$ ;  $M_0=M$ ;  $[\sigma]=200$  МПа (рис.32).

Из условия прочности выбрано сечение балки в виде двутавра № 33  $W_x=597 \text{ см}^3=5,97 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ ;  $J_x=9,84 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$ ;  $E=2,1 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ ;  $EJ_x=2,066 \cdot 10^4 \text{ кНм}^2$ .

Наибольшее напряжение в сечении  $M_{max}=113,3$  кНм составляет

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{113,3}{5,97 \cdot 10^{-4}} = 1,898 \cdot 10^5 \text{ кН/м}^2 = 189,8 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Недонапряжение составляет 5%, что допустимо.

На этом результате должна заканчиваться задача №3. Далее определяем перемещения в точках 1 и 2 балки (рис.32а). Состояние балки под действием заданной нагрузки обозначим  $q$ .

Определим вертикальное перемещение  $v_{1q}$  центра сечения, где применен сосредоточенный момент. Для этого рассмотрим балку в состоянии  $P1$  под действием только сосредоточенной силы  $\bar{P}_1 = 1$ , приложенной в точке 1 перпендикулярно оси балки (по направлению искомого перемещения  $v_{1q}$ ) (рис.32г).

Вычислим опорные реакции, составив три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0; \quad V_B \cdot 10 + \bar{P}_1 \cdot 2 = 0; \quad V_B = -\frac{2}{10} = -0,2; \\ \sum m_B = 0; \quad R_A \cdot 10 - \bar{P}_1 \cdot 12 = 0; \quad R_A = \frac{12}{10} = 1,2; \\ \sum z = 0; \quad H_B = 0. \end{aligned}$$

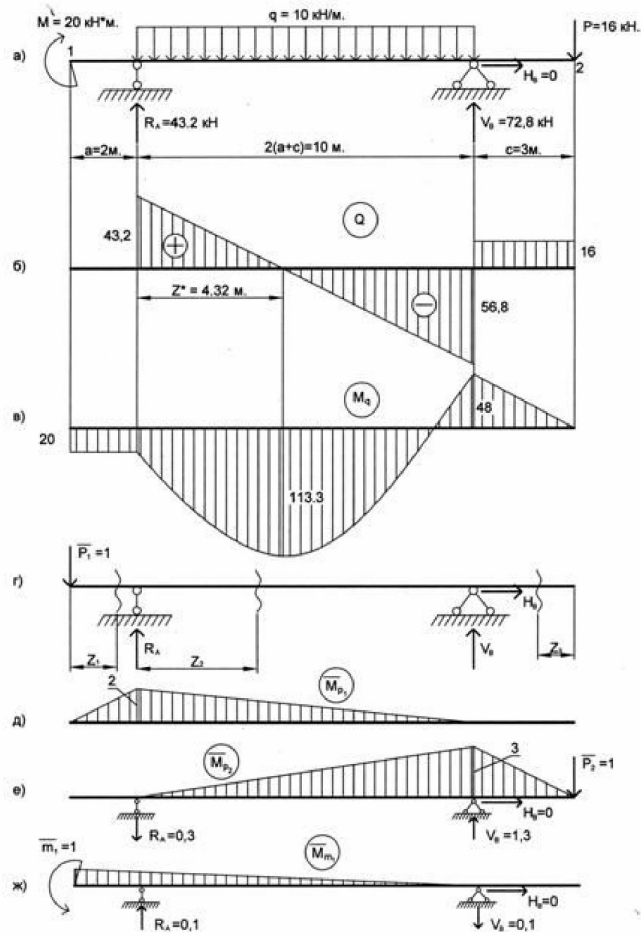


рис. 32

Проверка  $\sum y = 0; R_A + V_B - \bar{P}_1 = 1,2 - 0,2 - 1 = 0$ .

Реакции найдены верно.

Для построения эпюры  $\bar{M}_{P_1}$  рассмотрим три участка (рис.32г).

1 участок

$0 \leq z_1 \leq 2\text{ м}$   $M(z_1) = -\bar{P}_1 z_1 = -z_1$ ; прямая линия  $z_1 = 0; M = 0; z_1 = 2; M = -2$ .

2 участок

$$0 \leq z_2 \leq 10 \text{ м} \quad M(z_2) = -\bar{P}_1(2 + z_2) + R_A z_2 = (R_A - \bar{P}_1)z_2 - 2\bar{P}_1 = 0,2z_2 - 2;$$

прямая линия  $z_2 = 0; M = -2; z_2 = 10; M = 0$ .  
растянуты верхние волокна

### 3 участок

$$3 \geq z_3 \geq 0 \quad M = 0$$

По этим данным строим эпюру  $\bar{M}_{P_1}$  (рис.32д) со стороны растянутых волокон.

Определим  $v_{1q}$  по формуле Мора (58) с помощью правила Верещагина. При этом криволинейную эпюру  $M_q$ , на участке между опорами, можно представить в виде сложения трех эпюр, как показано на рис. 23. Стрелка

$$f = \frac{q \cdot 10^2}{8} = \frac{1000}{8} = 125 \text{ кНм.}$$

$$\begin{aligned} v_{1q} &= \sum \int \frac{\bar{M}_{P_1} M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 20 - \frac{2}{3} \cdot 125 \cdot 10 \cdot 1 - \frac{20 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{48 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} [-40 - 833,3 - 133,3 + 160] = -\frac{846,6}{2,066 \cdot 10^4} = -0,041 \text{ м.} \end{aligned}$$

Знак «минус» означает, что точка 1 перемещается вверх (в направлении противоположном  $\bar{P}_1$ ).

Определим вертикальное перемещение  $v_{2q}$  точки 2, где приложена сосредоточенная сила. Для этого рассмотрим балку в состоянии  $P_2$  под действием только сосредоточенной силы  $\bar{P}_2 = 1$ , приложенной в точке 2 перпендикулярно оси балки (по направлению искомого перемещения  $v_{2q}$ ) (рис.32е).

Эпюра  $\bar{M}_{P_2}$  строится аналогично предыдущей.

Далее по формуле Мора (58)

$$\begin{aligned} v_{2q} &= \sum \int \frac{\bar{M}_{P_2} M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 16 - \frac{2}{3} \cdot 125 \cdot 10 \cdot 1,5 - \frac{20 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{48 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} [72 - 1250 - 100 + 480] = -\frac{798}{2,066 \cdot 10^4} = -0,0386 \text{ м.} \end{aligned}$$

Точка 2 перемещается вверх.

Определим угол поворота  $\varphi_{1q}$  сечения, где приложен сосредоточенный момент.

Для этого рассмотрим балку в состоянии  $m_1$  под действием только сосредото-

ченного момента  $\bar{m}_1 = 1$ , приложенного в сечении 1 против часовой стрелки (рис.32ж).

Вычислим опорные реакции, составив три уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0; \quad V_B \cdot 10 - \bar{m}_2 = 0; \quad V_B = \frac{1}{10} = 0,1; \\ \sum m_B = 0; \quad R_A \cdot 10 - \bar{m}_2 = 0; \quad R_A = \frac{1}{10} = 0,1; \\ \sum z = 0; \quad H_B = 0. \end{aligned}$$

Проверка  $\sum y = 0; R_A - V_B = 0; 0,1 - 0,1 = 0$ . Реакции найдены верно

Эпюра  $\bar{M}_{m_1}$  показана на рис.32ж.

Далее по формуле Мора (59)

$$\begin{aligned} \varphi_{1q} &= \sum \int \frac{\bar{M}_{m_1} M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[ -1 \cdot 2 \cdot 20 - \frac{2}{3} \cdot 125 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 20 + \frac{1 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 48 \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} [-40 - 416,67 - 66,67 + 80] = -\frac{443,34}{2,066 \cdot 10^4} = -0,02146 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Сечение 1 поворачивается по часовой стрелке.

### ЗАДАЧА № 5

Исходные данные те же, что в задаче № 4, но в точке на оси, где приложен сосредоточенный момент, устанавливаем шарнирно подвижную опору (рис.33а). Балка становится один раз статически неопределимой. Для вновь созданной балки необходимо:

1. Построить эпюры M и Q.
2. Определить по формуле Мора вертикальное перемещение центра сечения, где приложена сосредоточенная сила.
3. Вычертить приблизительный вид изогнутой оси балки.
4. Определить новые размеры двутаврового поперечного сечения из условия прочности при  $[\sigma] = 200$  МПа (сталь) и величину прогиба точки в п.2.
5. Сравнить статически определимую и статически неопределимую балки.



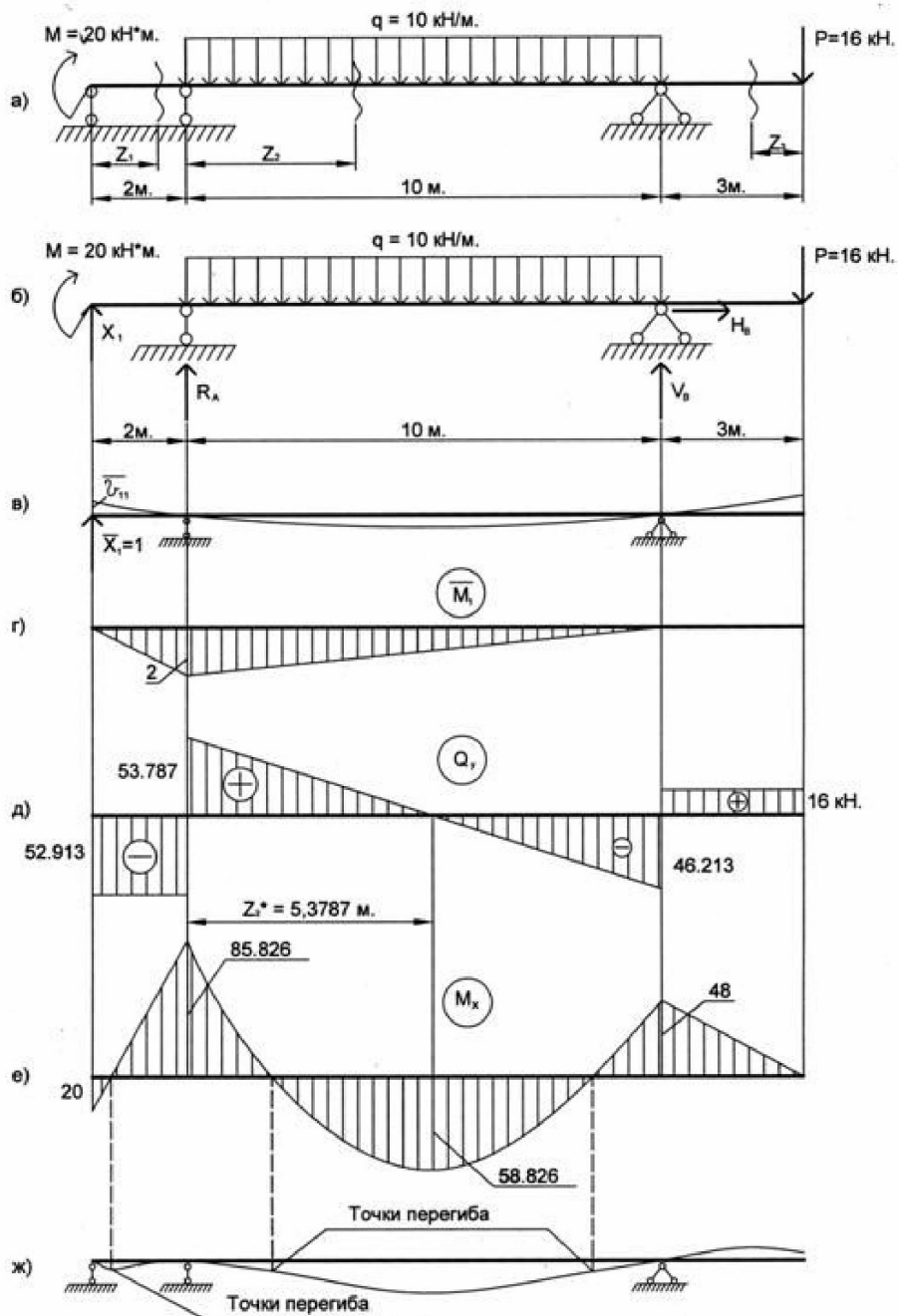


рис. 33

*Пример решения*

1. Алгоритм расчета один раз статически неопределимых балок приведен в формулах (59)-(61). Выбираем основную систему. Для этого отбросим вновь поставленную связь и заменим ее действие неизвестной реакцией  $X_1$  (рис.336). Полученная основная система является статически определимой (она рассчитана в задачах № 3,4) и находится под действием заданной нагрузки и неизвестной силы  $X_1$ .

Можно было бы отбросить какую-либо другую связь и заменить ее действие неизвестным силовым фактором  $X_1$ . При этом полученная система должна быть геометрически неизменяемой, то есть не имеющей возможности получать перемещения без возникновения напряжений.

Мы выбираем основную систему в виде балки на рис.33б, потому, что у нас уже построены для нее необходимые эпюры в задаче № 4.

Для основной системы запишем уравнение деформации типа (59):

$$\bar{v}_{11} \cdot X_1 + v_{1q} = 0. \quad (62)$$

Для определения  $\bar{v}_{11}$  по формуле (60) рассмотрим основную систему под действием силы  $\bar{X}_1 = 1$  (рис.33в). Эпюра  $\bar{M}_1$  (рис.33г) будет та же, что при действии силы  $\bar{P}_1 = 1$  вниз в задаче №4, но с обратным знаком.

Применим формулу Мора (60). Нужно с помощью правила Верещагина «перемножить» эпюру  $\bar{M}_1$  «саму на себя»:

$$\bar{v}_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{1}{EJ} (8 + 40) = \frac{48}{3EJ} = \frac{16}{EJ}.$$

Величину  $v_{1q}$  мы определили при решении задачи №4.

$$v_{1q} = -\frac{846,6}{EJ}.$$

Минус означает, что прогиб направлен в противоположную сторону, чем  $\bar{P}_1 = 1$ . В нашем случае все определяет направление  $\bar{X}_1 = 1$ :  $v_{1q}$  совпадает с направлением  $\bar{X}_1 = 1$  (вверх), поэтому в уравнение деформации поставим  $v_{1q}$  с положительным знаком

$$\text{ком } v_{1q} = \frac{846,6}{EJ}.$$

Итак уравнение для  $X_1$  будет иметь вид

$$\frac{16}{EJ} X_1 + \frac{846,6}{EJ} = 0.$$

Отсюда

$$X_1 = -\frac{846,6}{EJ} = -52,913 \text{ кН}.$$

Интересно, что жесткость сечения на изгиб сокращается. Величина  $X_1$  от заданной нагрузки будет одинаковой для балок с любым поперечным сечением постоянным по длине.

Знак минус означает, что на самом деле реакция  $X_1$  направлена вниз.

Теперь на основную систему действуют известная внешняя нагрузка и известная сила  $X_1$ . Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ , вычисленные для основной системы будут соответствовать тем же эпюрам в заданной статически неопределимой балке.

Вычислим опорные реакции. Для этого запишем три уравнения статического равновесия:

$$\begin{aligned} V_B \cdot 10 - P \cdot 13 - q \frac{10^2}{2} - M - X_1 \cdot 2 &= 0; \\ \sum m_A = 0; \quad V_B &= \frac{1}{10} \left( P \cdot 13 + q \frac{100}{2} + M + 2X_1 \right) = \\ &= \frac{1}{10} (16 \cdot 13 + 500 + 20 - 2 \cdot 52,913) = \\ &= \frac{1}{10} (728 - 105,826) = 62,217 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_A \cdot 10 - q \frac{10^2}{2} + M + X_1 \cdot 12 + P \cdot 3 &= 0; \\ \sum m_B = 0; \quad R_A &= \frac{1}{10} \left( q \frac{100}{2} - M - X_1 \cdot 12 - 2P \right) = \\ &= \frac{1}{10} (500 - 20 + 52,913 \cdot 12 - 48) = 106,7 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\sum z = 0; \quad H_B = 0.$$

$$\text{Проверка: } \sum y = 0; \quad R_A + V_B - q \cdot 10 - P + X_1 = 0;$$

$$106,7 + 62,217 - 100 - 16 - 52,913 = 168,917 - 168,913 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Балку разбиваем на 3 участка. На каждом участке разрезаем балку на две части, и рассматриваем равновесие оставшейся части (подобно рис. 31) длина которой является переменной  $z_i$ , получаем аналитические выражения для ординат эпюр  $Q_y$  и  $M_x$ .

#### 1 участок

$$\begin{aligned} 0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м} \quad Q_y(z_1) &= X_1 = -52,913 \text{ кН} && \text{(постоянная)} \\ M_x(z_1) &= M + X_1 z_1 = 20 - 52,913 z_1 && \text{(прямая линия)} \\ z_1 = 0; M_x &= 20 \text{ кНм}; z_1 = 2 \text{ м}; M &= 20 - 52,913 \cdot 2 = -85,826 \text{ кНм} \end{aligned}$$

#### 2 участок

$$0 \leq z_2 \leq 10 \text{ м} \quad Q_y(z_2) = X_1 + R_A - qz_2 = -52,913 + 106,7 - 10z_2 = 53,787 - 10z_2$$

(прямая линия)

$$z_2 = 0; Q_y = 53,787 \text{ кН}; z_2 = 10 \text{ м}; Q_y = -46,213 \text{ кН}$$

$$M_x(z_2) = M + X_1(z_2 + 2) + R_A z_2 - q \frac{z_2^2}{2} = 20 - 52,913(z_2 + 2) +$$

$$+ 106,7 z_2 - 5z_2^2 = -85,826 + 53,787 z_2 - 5z_2^2;$$

$$z_2 = 0; M_x = -85,826 \text{ кНм}; z_2 = 10 \text{ м};$$

$$M_x = -85,826 + 537,87 - 500 = -48 \text{ кНм}$$

Определяем экстремальное значение

$$\frac{dM_x}{dz} = 53,787 - 10z_2^* = 0; z_2^* = 5,3787 \text{ м};$$

$$M_{\text{экстр}} = -85,826 + 53,787 \cdot 5,3787 - 5 \cdot 5,3787^2 =$$

$$= -85,826 + 289,304 - 144,652 = 58,826 \text{ кНм}.$$

3 участок

$$3 \text{ м} \geq z_3 \geq 0 \quad Q_y = P = 16 \text{ кН} \quad (\text{постоянная})$$

$$M_x(z_3) = -Pz_3 = -16z_3 \quad (\text{прямая линия})$$

$$z_3 = 0; M_x = 0; z_3 = 3 \text{ м}; M_x = -48 \text{ кНм}.$$

Эпюра  $Q_y$  показана на рис. 33д, а эпюра  $M_x$  – на рис.33е.

2. Определяем прогиб  $v_{2q}$  точки, где приложена сосредоточенная сила по формуле (55)

$$v_{2q} = \sum \int \frac{\bar{M}_{P_2} M_q dS}{EJ}.$$

Эпюра  $\bar{M}_{P_2}$  (рис.32) построена в процессе решения задачи №4. Сила  $\bar{P}_2 = 1$  приложена не к заданной статически неопределимой балке, а к основной системе. Дело в том, если к основной системе приложить все внешние силы и известную силу  $X_1$ , то она будет полностью эквивалента заданной статически неопределимой балке.

$$v_{2q} = \sum \int \frac{\bar{M}_{P_2} M_q dS}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 85,826 + \frac{3 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 48 - \frac{2}{3} \cdot 125 \cdot 10 \cdot 1,5 + \right.$$

$$\left. + \frac{48 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{1}{EJ} [429,13 + 480 - 1250 + 144] = \frac{1}{EJ} [1053,13 - 1250] =$$

$$= -\frac{196,87}{EJ} = -\frac{196,87}{2,066 \cdot 10^4} = -0,00953 \text{ м}.$$

Точка 2 перемещается вверх, но на гораздо меньшую величину, чем в случае ста-

тически определимой балки.

$$\text{В определимой балке } v_{2q}^o = -0,0386 \text{ м}$$

$$\text{В неопределимой балке } v_{2q} = -0,00953 \text{ м}$$

$$\text{Прогиб уменьшился в } \frac{0,0386}{0,00953} = 4,05 \text{ раза.}$$

3. Приблизительный вид изогнутой оси балки строим в соответствии с видом эпюры  $M_x$  и характером опор (рис. 33ж).

4. Максимальное значение изгибающего момента возникает над опорой А

$$M_{\max} = 85,826 \text{ кНм.}$$

Из условия прочности

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

определяем двутавровое сечение для статически неопределимой балки

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{85,826}{200 \cdot 10^3} = 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 4,29 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 429 \text{ см}^3.$$

По сортаменту (приложение 1) выбираем двутавр № 30  $W_x = 472 \text{ см}^3$

$$J_x = 7080 \text{ см}^4.$$

Вычисляем напряжения в опасном сечении

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{85,826}{4,72 \cdot 10^{-4}} = 18,18 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 181,8 \text{ МПа} < [\sigma].$$

$$\text{Недонапряжение составляет } \frac{(200 - 181,8)}{200} \cdot 100\% = 9,1\%.$$

Шаг сортамента не позволяет выбрать более экономное решение. Определяем величину прогиба точки 2 балки с новым сечением. Жесткость сечения при изгибе

$$EJ_x = 2 \cdot 10^8 \cdot 7080 \cdot 10^{-8} = 1,416 \cdot 10^4 \text{ кНм}^2$$

$$v_{2q} = -\frac{196,87}{1,416 \cdot 10^4} = -0,0139 \text{ м}$$

5. Таким образом, постановка шарнирно подвижной опоры в точке 1 превращает статически определимую балку в статически неопределимую.

При этом сечение балки из условия прочности можно принять меньшим (вместо I № 33 можно принять I № 30).

Подсчитаем экономию по массе металла:

$$\text{масса 1 погонного метра I №33} - 42,2 \text{ кг;}$$

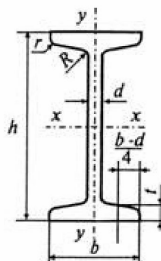
масса 1 погонного метра I № 30 – 36,5 кг.

$$\text{Экономия} \frac{42,2 - 36,5}{36,5} \cdot 100\% = 15,6\%.$$

Прогиб точки приложения сосредоточенной силы уменьшается в  $\frac{0,0386}{0,0139} = 2,77$  раза.

Приложение 1

Сталь прокатная. Балка двутавровая. ГОСТ 8239-56



Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей x-x		
	h	b	d	t		I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>
						10	100	55
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	62,3
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	81,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	89,8
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	114
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	143
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	178
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	210
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	229
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	268
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	292
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	339
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	423
40	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	540
45	450	160	8,6	14,2	83,0	27450	1220	699
50	500	170	9,5	15,2	97,8	39290	1570	905
55	550	180	10,3	16,5	114,0	55150	2000	1150
60	600	190	11,1	17,8	132,0	75450	2510	1450
65	650	200	12,0	19,2	153,0	101400	3120	180
70	700	210	13,0	20,8	176,0	134600	3840	2230
70a	700	210	15,0	24,0	202,0	152700	4360	2550
706	700	210	17,5	28,2	234,0	175370	5010	2940

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
2. Сидоров В.Н. Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости. – М.: Изд. Центр генштаба Вооруженных сил РФ, 2002. – 352 с.
3. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов: учеб. Для студентов заочных вузов и факультетов. – 5-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1989.- 654 с.
4. Смирнов А.Ф. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1975. – 390 с.