

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
Методические указания к расчетно-графическим работам

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Методические указания к выполнению расчетно-графических работ

Расчетно-графические работы выполняются на листах формата А4 чернилами кроме красных и зеленых, четким почерком. Также допускается набор работы на компьютере.

Перед решением РГР следует указать ее название, выписать полностью условие с числовыми данными, составить аккуратную схему в масштабе. Она должна содержать все заданные числовые величины.

Решение должно быть разбито на пункты, название которых необходимо указывать.

Выполненные работы компонуются в единую папку и имеют общий титульный лист. Следующим листом должно быть содержание, включающее номер, название расчетно-графических работ и номера их первых страниц. Все работы должны иметь сквозную нумерацию, причем первой страницей считается титульный лист. На последней странице должен быть указан список используемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

Общие указания	2
Расчет стержня на растяжение-сжатие	4
Расчет фермы	11
Расчет балки	21
Приложение А. Решение систем линейных алгебраических уравнений на базе программного комплекса MATHCAD	33
Приложение Б. Расчет трехступенчатого стержня методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS	39
Приложение В. Расчет фермы методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS	45
Приложение Г. Расчет балки методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS	51
Рекомендуемая литература	56

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Для заданной схемы, используя метод конечных элементов, требуется определить:

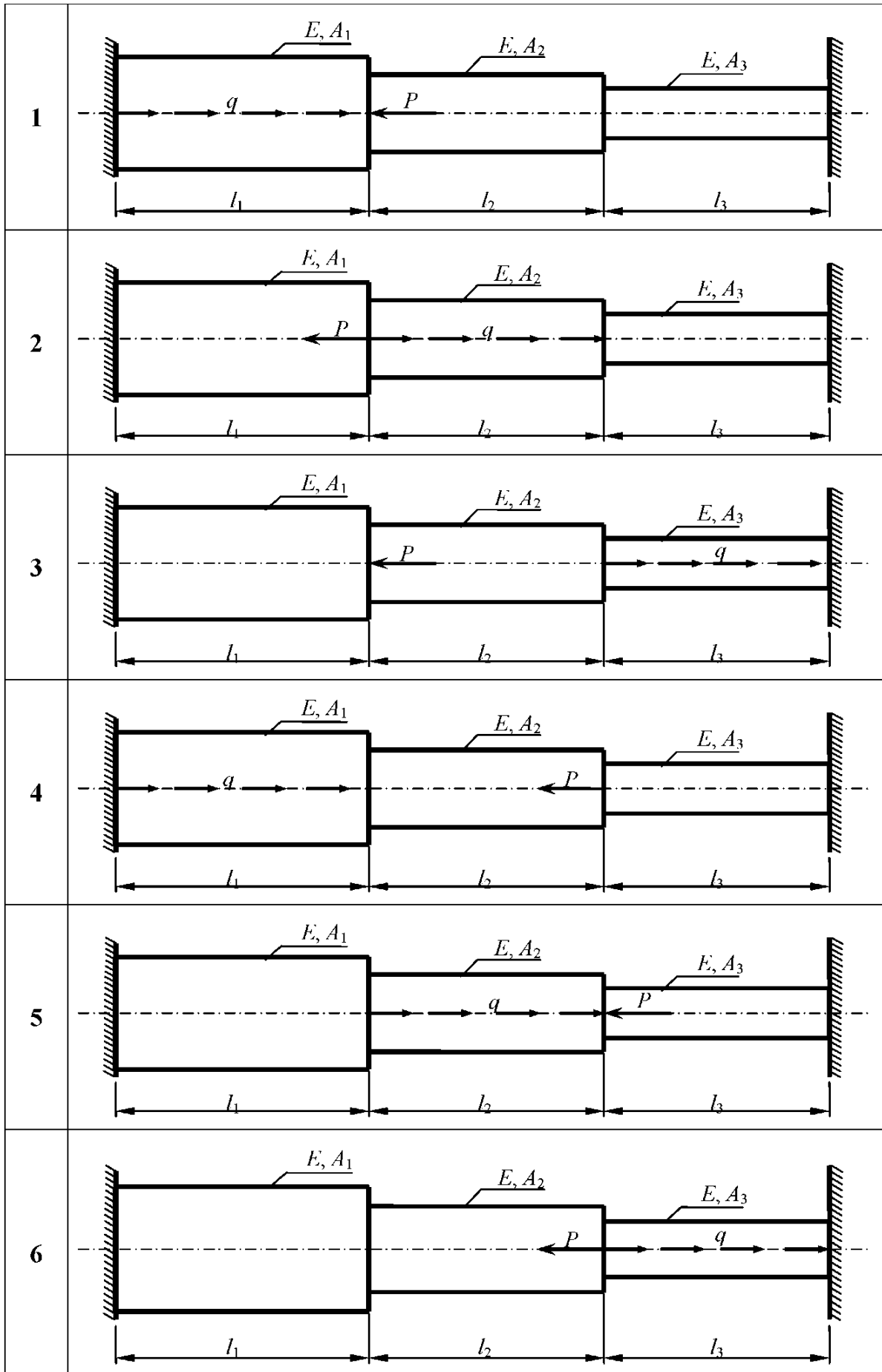
- узловые перемещения;
- реакции в опорах;
- напряжения в конечных элементах.

Модуль упругости для всех вариантов принять $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м².

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

№	Номер схемы	Площадь участков, см ²			Длина участков, м			Нагрузка	
		<i>A</i> ₁	<i>A</i> ₂	<i>A</i> ₃	<i>l</i> ₁	<i>l</i> ₂	<i>l</i> ₃	<i>P</i> , кН	<i>q</i> , кН/м
1	1	30	15	6	1,5	2,0	1,5	5	2
2	2	34	16	10	2,0	3,0	2,5	6	3
3	3	36	17	14	2,5	4,0	3,5	7	4
4	4	38	18	18	3,0	1,0	4,5	8	5
5	5	40	19	22	3,5	2,0	1,5	9	6
6	6	42	20	24	4,0	3,0	2,5	10	7
7	1	44	21	28	1,5	4,0	3,5	11	8
8	2	46	22	32	2,0	1,0	4,5	12	7
9	3	48	23	8	2,5	1,5	1,0	13	6
10	4	50	24	12	3,0	2,5	2,0	14	5
11	5	52	25	16	3,5	3,5	3,0	15	4
12	6	54	26	20	4,0	1,0	2,5	16	3
13	1	56	27	24	2,0	1,5	2,5	5	2
14	2	58	28	28	2,0	2,5	3,5	6	2
15	3	60	29	32	2,5	3,5	4,5	7	3
16	4	30	22	6	3,0	1,0	1,5	8	4
17	5	34	23	10	3,5	1,5	2,5	9	5
18	6	36	24	14	4,0	2,5	3,5	10	6
19	1	38	25	18	1,5	3,5	4,5	11	7
20	2	40	26	22	2,0	1,0	1,0	12	6
21	3	42	27	26	2,5	1,0	2,0	13	5
22	4	44	28	30	3,0	2,0	3,0	14	4
23	5	46	29	8	3,5	3,0	2,5	15	3
24	6	48	15	4	4,0	4,0	3,5	16	2
25	1	50	16	6	1,5	3,5	1,0	10	4
26	2	52	17	32	2,0	4,0	1,5	12	8
27	3	54	18	22	2,5	3,5	2,0	14	6
28	4	56	19	12	3,0	2,5	3,0	16	10
29	5	58	20	10	3,5	2,0	2,5	8	10
30	6	60	21	5	1,0	1,5	3,5	10	6

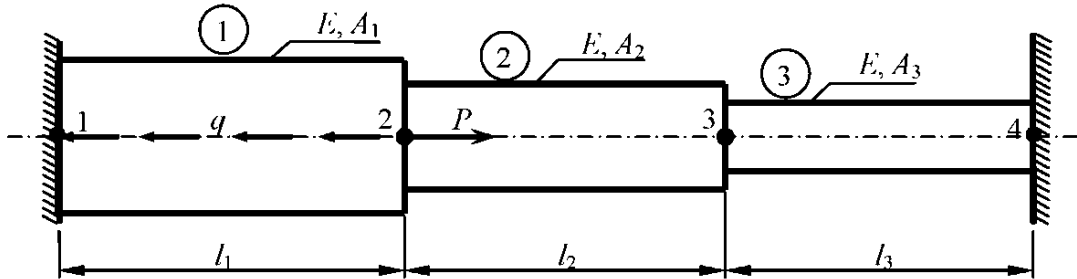
ВАРИАНТЫ СХЕМ



ПРИМЕР РАСЧЕТА

Дано

$A_1=15\text{см}^2$; $A_2=10\text{см}^2$; $A_3=5\text{см}^2$; $l_1=1\text{м}$; $l_2=2\text{м}$; $l_3=3\text{м}$; $P=15\text{кН}$; $q=10\text{кН/м}$;
 $E=2,1 \cdot 10^{11}\text{Н/м}^2$



Решение

1. Составление матриц жесткости конечных элементов

В общем виде матрица жесткости для стержневого конечного элемента имеет вид:

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

где E – модуль упругости; A – площадь поперечного сечения элемента; L – длина элемента.

Выполним некоторые подготовительные операции.

Пусть $A=5\text{см}^2$, $L=1\text{м}$;

тогда $A_1=3A$; $A_2=2A$; $A_3=A$;

$L_1=L$; $L_2=2L$; $L_3=3L$.

Элемент 1 (1-2)

$$k_1 = \frac{E3A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{matrix}$

Цифры над коэффициентами в матрице жесткости называются адресами. Они определяют место коэффициентов в общей матрице жесткости всей системы

(первая цифра – номер строки, вторая – номер столбца). Адреса проставляются в зависимости от номеров узлов, которые соединяет элемент.

Элемент 2 (2-3)

$$k_2 = \frac{E2A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 22 & 23 \\ 32 & 33 \end{matrix}$

Элемент 3 (3-4)

$$k_3 = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0,33 & -0,33 \\ -0,33 & 0,33 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 33 & 34 \\ 43 & 44 \end{matrix}$

2. Составление общей матрицы жесткости

Используя адреса, объединим составленные матрицы жесткости отдельных элементов в общую матрицу жесткости (при совпадении адресов коэффициенты складываются). Пустые ячейки заполняются нулями.

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+0,33 & -0,33 \\ 0 & 0 & -0,33 & 0,33 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1,33 & -0,33 \\ 0 & 0 & -0,33 & 0,33 \end{bmatrix}$$

Правильно составленная матрица жесткости должна быть симметричной относительно главной диагонали.

3. Составление уравнения равновесия системы

Уравнение равновесия имеет вид:

$$K \cdot u - F,$$

где u – вектор перемещений узлов; F – вектор внешних нагрузок, приложенных к каждому узлу.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \text{ т.к. 1-й и 4-й узел находятся в опорах, их перемещения равны нулю,}$$

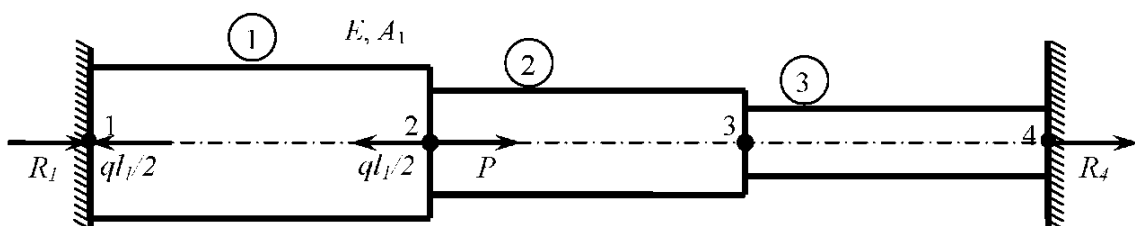
тогда вектор перемещений примет вид $u = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Вектор внешних нагрузок в общем виде равен: $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$.

Для корректного использования, заданную нагрузку необходимо преобразовать следующим образом:

- 1) в опорах действуют реакции R_1 и R_4 , которые тоже являются внешней нагрузкой;
- 2) распределенная нагрузка действует на протяжении всего 1-го элемента, однако МКЭ учитывает только нагрузку, приложенную в узлах, поэтому всю нагрузку q следует равномерно распределить по узлам этого элемента.

С учетом замечаний схема нагружения имеет вид:



Вектор внешних нагрузок запишется следующим образом: $F = \begin{pmatrix} R_1 - \frac{ql_1}{2} \\ P - \frac{ql_1}{2} \\ 0 \\ R_4 \end{pmatrix}$

Запишем окончательно уравнение равновесия

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1,33 & -0,33 \\ 0 & 0 & -0,33 & 0,33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 - \frac{ql_1}{2} \\ P - \frac{ql_1}{2} \\ 0 \\ R_4 \end{bmatrix}.$$

4. Определение неизвестных перемещений узлов

Поскольку перемещение первого и четвертого узлов равны нулю, можно вычеркнуть соответствующие строчки и столбцы матрицы жесткости:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1,33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P - \frac{ql_1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Или в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{EA}{L} (4u_2 - u_3) = P - \frac{ql_1}{2}, \\ \frac{EA}{L} (-u_2 + 1,33u_3) = 0. \end{cases}$$

Подставим численные значения параметров стержня и приложенной нагрузки (все значения подставляются в СИ).

$$\frac{EA}{L} = \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{1} = 10,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м},$$

$$P - \frac{ql_1}{2} = 15 \cdot 10^3 - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1}{2} = 10 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Разделим левую и правую часть каждого уравнения системы на жесткость EA/L .

$$\begin{cases} 4u_2 - u_3 = 0,95 \cdot 10^{-4}, \\ -u_2 + 1,33u_3 = 0. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 4.

$$\begin{cases} 4u_2 - u_3 = 0,95 \cdot 10^{-4}, \\ -4u_2 + 5,32u_3 = 0. \end{cases}$$

И сложим эти уравнения

$$4,32u_3 = 0,95 \cdot 10^{-4}.$$

Отсюда найдем u_3

$$u_3 = \frac{0,95 \cdot 10^{-4}}{4,32} = 0,22 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Перемещение u_2 найдем из второго уравнения

$$u_2 = 1,33u_3 = 1,33 \cdot 0,22 \cdot 10^{-4} = 0,293 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

5. Определение реакций опор

Подставив найденные перемещения в первое уравнение равновесия, найдем неизвестную реакцию R_1 .

$$10,5 \cdot 10^7 \cdot (-3 \cdot 0,29 \cdot 10^{-4}) = R_1 - \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1}{2},$$

откуда

$$R_1 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1}{2} + 10,5 \cdot 10^7 \cdot (-3 \cdot 0,293 \cdot 10^{-4}) = -4,23 \cdot 10^3 \text{ Н} = -4,23 \text{ кН}.$$

Аналогично найдем реакцию в 4-м узле R_4 .

$$R_4 = 10,5 \cdot 10^7 \cdot (-0,33 \cdot 0,22 \cdot 10^{-4}) = -0,77 \cdot 10^3 \text{ Н} = -0,77 \text{ кН}.$$

В качестве проверки воспользуемся уравнением статики и найдем сумму проекций сил на ось X .

$$\Sigma X=0; \quad R_1 - ql_1 + P + R_4 = -4,23 - 10 \cdot 1 + 15 - 0,77 = 0.$$

6. Определение напряжений в элементах

$$\sigma_1 = E \frac{u_2 - u_1}{L_1} = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{0,293 \cdot 10^{-4} - 0}{1} = 6,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,1 \text{ МПа};$$

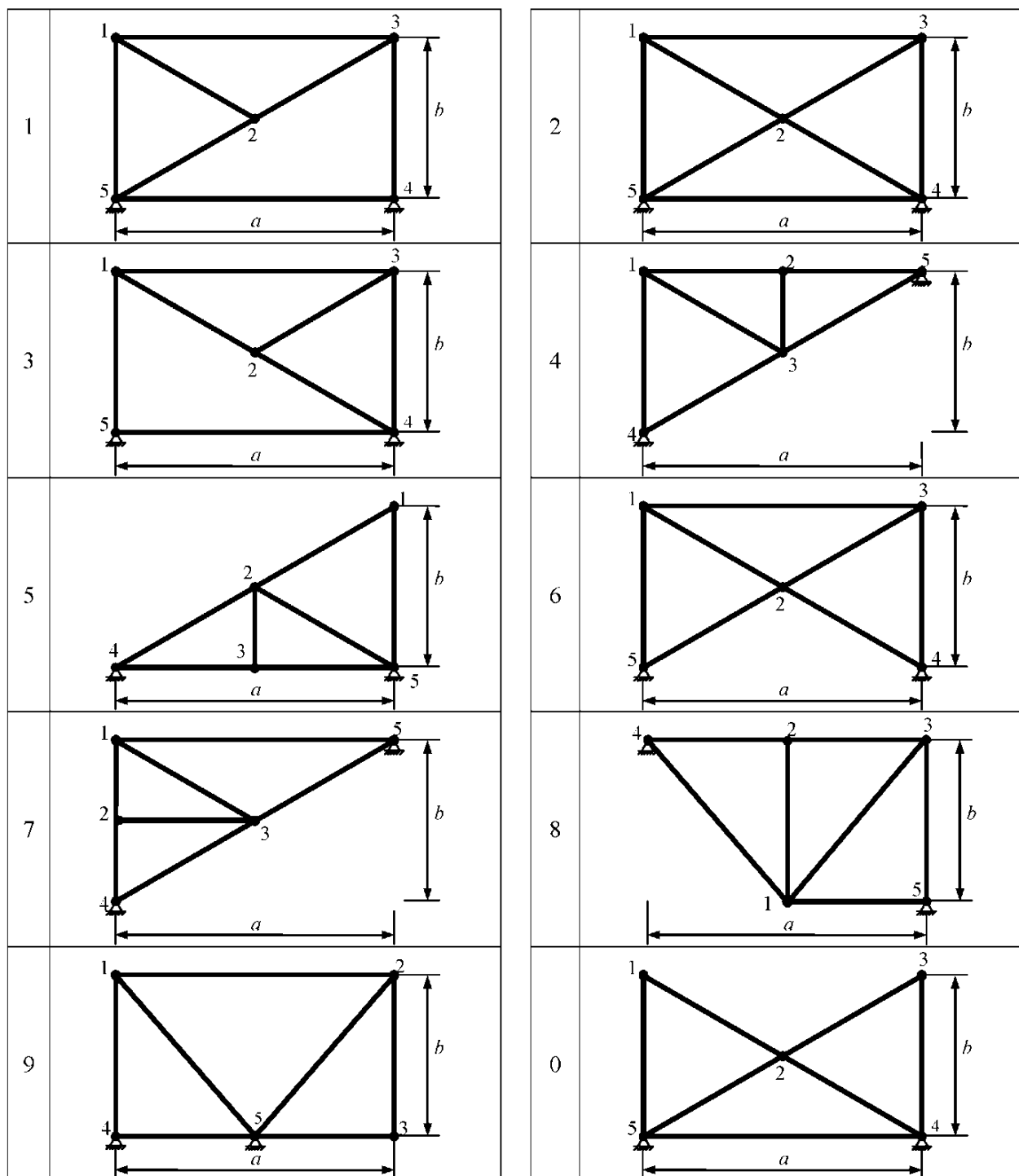
$$\sigma_2 = E \frac{u_3 - u_2}{L_2} = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{0,22 \cdot 10^{-4} - 0,293 \cdot 10^{-4}}{2} = -0,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = -0,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = E \frac{u_4 - u_3}{L_3} = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{0 - 0,22 \cdot 10^{-4}}{3} = -1,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,5 \text{ МПа}.$$

РАСЧЕТ ФЕРМЫ

Для заданной фермы необходимо определить перемещения узлов, реакции опор, и напряжения в стержнях.

Исходные данные принимаются по двум последним цифрам номера зачетной книжки. Для всех вариантов принять $E=2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $A=20 \text{ см}^2$.



ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Последняя цифра шифра	Предпоследняя цифра шифра									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	$\frac{1;2;3}{-10;0;15;0}$	$\frac{2;4;2}{5;0;-10;0}$	$\frac{3;4;3}{20;5;0;-10}$	$\frac{4;5;2;5}{0;-20;5;0}$	$\frac{5;3;5;7}{15;0;10;0}$	$\frac{6;4;4}{15;-10;0;5}$	$\frac{7;6;3}{-15;-10;0;5}$	$\frac{8;4;2}{10;20;0;8}$	$\frac{9;5;2;5}{15;10;20;0}$	$\frac{0;7;3;5}{-10;-20;0;10}$
2	$\frac{1;4;2}{15;10;0;20}$	$\frac{2;3;2}{15;10;-20;0}$	$\frac{3;5;4}{10;0;0;15}$	$\frac{4;4;2}{10;30;0;-20}$	$\frac{5;5;2;5}{10;30;40;0}$	$\frac{6;7;3;5}{-20;30;10;0}$	$\frac{7;8;4}{20;30;0;-10}$	$\frac{8;6;3}{0;30;10;15}$	$\frac{9;2;5;5}{-10;-5;0;10}$	$\frac{0;6;3}{40;-10;0;-5}$
3	$\frac{7;7;3}{0;20;0;15}$	$\frac{2;5;2}{20;-8;0;10}$	$\frac{3;3;5}{0;8;0;20}$	$\frac{4;2;4}{20;0;-30;0}$	$\frac{0;2;4}{0;40;0;-20}$	$\frac{6;5;3}{10;40;-20;10}$	$\frac{1;6;3}{-8;15;-10;0}$	$\frac{8;8;2}{-15;10;20;0}$	$\frac{9;7;3;5}{0;30;-30;10}$	$\frac{0;3;6}{-15;20;0;10}$
4	$\frac{1;7;3;5}{20;-10;5;0}$	$\frac{2;6;3}{-10;15;30;0}$	$\frac{3;2;4}{-15;10;0;5}$	$\frac{4;3;5}{15;10;0;10}$	$\frac{5;4;4}{30;10;20;0}$	$\frac{6;2;6}{-30;0;-10;0}$	$\frac{7;4;6}{30;-15;0;20}$	$\frac{8;7;4}{20;-15;0;10}$	$\frac{9;8;2}{20;0;10;15}$	$\frac{0;3;7}{-20;0;0;30}$
5	$\frac{1;8;2}{30;20;0;10}$	$\frac{2;7;3;5}{-5;-8;0;10}$	$\frac{3;6;2}{40;20;0;20}$	$\frac{4;6;6}{0;15;40;10}$	$\frac{5;7;2}{-8;0;-10;5}$	$\frac{6;8;4}{40;-5;0;-10}$	$\frac{7;4;2}{5;8;0;-12}$	$\frac{8;5;2;5}{16;-10;10;0}$	$\frac{9;6;3}{0;-12;16;0}$	$\frac{0;6;4}{12;10;15;0}$
6	$\frac{1;2;6}{18;-12;25;0}$	$\frac{2;2;4}{-18;24;0;10}$	$\frac{3;4;4}{0;-8;10;5}$	$\frac{4;7;3}{-18;20;0;-8}$	$\frac{5;2;5}{16;20;0;-10}$	$\frac{6;4;8}{0;15;8;-12}$	$\frac{7;2;6}{-10;0;8;5}$	$\frac{8;3;4}{-12;0;18;5}$	$\frac{9;3;6}{-20;6;14;0}$	$\frac{0;4;8}{18;5;-8;0}$
7	$\frac{1;4;4}{24;10;12;0}$	$\frac{2;6;6}{24;-5;0;-10}$	$\frac{3;7;3;5}{15;20;0;8}$	$\frac{4;4;4}{16;-5;0;12}$	$\frac{5;3;5;7}{-10;12;-6;0}$	$\frac{6;3;3}{-10;18;0;10}$	$\frac{7;7;7}{-20;6;10;0}$	$\frac{8;2;6}{25;12;-10;0}$	$\frac{9;4;8}{18;-8;0;8}$	$\frac{0;5;5}{30;-10;0;12}$
8	$\frac{1;5;2;5}{-16;0;10;8}$	$\frac{2;4;6}{12;10;5;0}$	$\frac{3;4;6}{12;24;0;12}$	$\frac{4;5;7}{0;18;-8;8}$	$\frac{5;5;7}{40;0;15;8}$	$\frac{6;5;7}{12;-10;0;20}$	$\frac{7;6;7}{15;9;0;25}$	$\frac{8;3;3}{0;-30;20;6}$	$\frac{9;6;6}{12;14;0;16}$	$\frac{0;7;3;5}{35;0;-10;5}$
9	$\frac{1;1;5;4}{28;0;32;12}$	$\frac{2;4;5;3}{0;18;-24;5}$	$\frac{3;5;6}{28;-12;0;18}$	$\frac{4;4;5;5}{32;40;0;-6}$	$\frac{5;2;5;6}{32;-18;0;12}$	$\frac{6;8;3}{-28;0;-6;6}$	$\frac{7;8;2}{24;0;8;-6}$	$\frac{8;4;7}{0;15;-10;12}$	$\frac{9;4;6}{-15;0;40;5}$	$\frac{0;8;2}{0;9;14;10}$
0	$\frac{1;2;5}{12;-14;0;18}$	$\frac{2;2;5}{-15;-9;0;18}$	$\frac{3;7;2}{-16;25;0;-8}$	$\frac{4;8;4}{-24;18;5;0}$	$\frac{5;8;3}{-24;0;10;9}$	$\frac{6;8;2}{32;10;0;-15}$	$\frac{7;5;4}{-6;12;0;40}$	$\frac{8;5;4}{15;0;-12;18}$	$\frac{9;5;4}{0;-20;12;9}$	$\frac{0;6;3}{26;0;12;-40}$

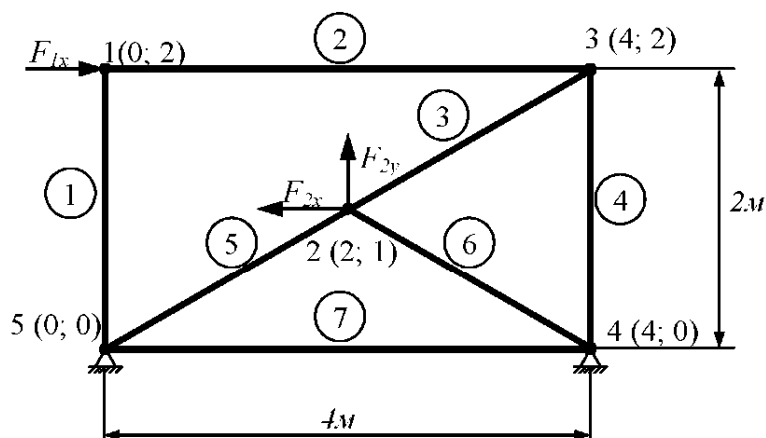
Примечание: в числителе – номер схемы, размер a и b ; в знаменателе – нагрузка в узлах «1» и «2» $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}$.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Для заданной фермы необходимо определить:

- перемещения узлов;
- реакции опор;
- напряжения в стержнях.

Дано: $E=2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/М}^2$; $A=20 \text{ см}^2$; $F_{1x} = 5 \text{ кН}$; $F_{2x} = 8 \text{ кН}$; $F_{2y} = 10 \text{ кН}$.



1. Составление матриц жесткости конечных элементов

Матрица жесткости для всех элементов имеет одинаковый вид:

$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

где L – длина элемента: $L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$;

l и m – косинус и синус угла наклона элемента к горизонтальной оси:

$$l = \cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L}, \quad m = \sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L}.$$

X, Y – координаты узлов.

В соответствии с приведенными формулами составим матрицы жесткости для каждого элемента. Эти матрицы состоят из четырех ячеек. Следует проставить адреса этих ячеек, определяющие их положение в общей

матрице жесткости. Они соответствуют номерам узлов, которые соединяет элемент.

Элемент 1 (1 – 5).

$$L_1 = 2m; l = \frac{0-0}{2} = 0; m = \frac{0-2}{2} = -1; l^2 = 0; m^2 = (-1)^2 = 1; l \cdot m = 0 \cdot (-1) = 0.$$

$$k_1 = \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & -1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & | & 0 & -0,5 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & | & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

¹¹¹⁵
₅₁₅₅

Элемент 2 (1 – 3).

$$L_2 = 4m; l = \frac{4-0}{4} = 1; m = \frac{2-2}{4} = 0; l^2 = 1; m^2 = 0; l \cdot m = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$k_2 = \frac{EA}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & | & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline -0,25 & 0 & | & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¹¹¹³
₃₁₃₃

Элемент 3 (2 – 3).

$$L_3 = \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5} = 2,24m; l = \frac{4-2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; m = \frac{2-1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$l^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,8; m^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,2; l \cdot m = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,4.$$

$$k_3 = \frac{EA}{2,24} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 & | & -0,8 & -0,4 \\ 0,4 & 0,2 & | & -0,4 & -0,2 \\ \hline -0,8 & -0,4 & | & 0,8 & 0,4 \\ -0,4 & -0,2 & | & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0,36 & 0,18 & | & -0,36 & -0,18 \\ 0,18 & 0,09 & | & -0,18 & -0,09 \\ \hline -0,36 & -0,18 & | & 0,36 & 0,18 \\ -0,18 & -0,09 & | & 0,18 & 0,09 \end{bmatrix}$$

²²²³
₃₂₃₃

Элемент 4 (3 – 4).

$$L_4 = 2m; l = \frac{4-4}{2} = 0; m = \frac{0-2}{2} = -1; l^2 = 0; m^2 = (-1)^2 = 1; l \cdot m = 0 \cdot (-1) = 0.$$

$$k_4 = \frac{EA}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] = EA \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{array} \right]$$

Элемент 5 (2 – 5).

$$L_5 = \sqrt{(0-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5} = 2,24M; \quad l = \frac{0-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad m = \frac{0-1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$l^2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,8; \quad m^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,2; \quad l \cdot m = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0,4.$$

$$k_5 = \frac{EA}{2,24} \left[\begin{array}{cc|cc} 0,8 & 0,4 & -0,8 & -0,4 \\ 0,4 & 0,2 & -0,4 & -0,2 \\ \hline -0,8 & -0,4 & 0,8 & 0,4 \\ -0,4 & -0,2 & 0,4 & 0,2 \end{array} \right] = EA \left[\begin{array}{cc|cc} 0,36 & 0,18 & -0,36 & -0,18 \\ 0,18 & 0,09 & -0,18 & -0,09 \\ \hline -0,36 & -0,18 & 0,36 & 0,18 \\ -0,18 & -0,09 & 0,18 & 0,09 \end{array} \right]$$

Элемент 6 (2 – 4).

$$L_6 = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5} = 2,24M; \quad l = \frac{4-2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad m = \frac{0-1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$l^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,8; \quad m^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0,2; \quad l \cdot m = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -0,4.$$

$$k_6 = \frac{EA}{2,24} \left[\begin{array}{cc|cc} 0,8 & -0,4 & -0,8 & 0,4 \\ -0,4 & 0,2 & 0,4 & -0,2 \\ \hline -0,8 & 0,4 & 0,8 & -0,4 \\ 0,4 & -0,2 & -0,4 & 0,2 \end{array} \right] = EA \left[\begin{array}{cc|cc} 0,36 & -0,18 & -0,36 & 0,18 \\ -0,18 & 0,09 & 0,18 & -0,09 \\ \hline -0,36 & 0,18 & 0,36 & -0,18 \\ 0,18 & -0,09 & -0,18 & 0,09 \end{array} \right]$$

Элемент 7 (4 – 5).

$$L_7 = 4M; \quad l = \frac{0-4}{4} = -1; \quad m = \frac{0-0}{4} = 0; \quad l^2 = 1; \quad m^2 = 0; \quad l \cdot m = (-1) \cdot 0 = 0.$$

$$k_7 = \frac{EA}{4} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = EA \left[\begin{array}{cc|cc} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2. Составление общего уравнения равновесия

Уравнение равновесия для всей фермы имеет вид:

$$K \cdot U - F,$$

где K – общая матрица жесткости (должна получиться симметричной относительно главной диагонали):

$$K = EA \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1,08 & 0,18 & -0,36 & -0,18 & -0,36 & 0,18 & -0,36 & -0,18 \\ 0 & 0 & 0,18 & 0,27 & -0,18 & -0,09 & 0,18 & -0,09 & -0,18 & -0,09 \\ -0,25 & 0 & -0,36 & -0,18 & 0,61 & 0,18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,18 & -0,09 & 0,18 & 0,59 & 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & 0,18 & 0 & 0 & 0,61 & -0,18 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,18 & -0,09 & 0 & -0,5 & -0,18 & 0,59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,36 & -0,18 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0,61 & 0,18 \\ 0 & -0,5 & -0,18 & -0,09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,18 & 0,59 \end{bmatrix}$$

U – вектор перемещений; F – вектор внешних нагрузок.

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{bmatrix} \text{ кН}.$$

Вектор перемещений составлен с учетом того, что в 4-м и 5-м узле перемещения по вертикали и горизонтали отсутствуют, так как в этих узлах находятся шарнирно-неподвижные опоры.

В вектор внешних нагрузок были вписаны силы, приложенные к 1-му и 2-му узлу, в 3-м узле внешние нагрузки отсутствуют, поэтому на их месте стоят нули. На 4-й и 5-й узел действуют реакции опор, которые пока не найдены.

В общем уравнении равновесия вектор перемещений умножается на матрицу жесткости. При этом 7-й, 8-й, 9-й и 10-й столбец умножается на ноль, т.е. их можно сразу вычеркнуть. Также следует вычеркнуть 7-ю, 8-ю, 9-ю и 10-ю строчку, поскольку в них присутствуют неизвестные пока реакции опор. После сокращения уравнение равновесия примет вид:

$$EA \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0.25 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1.08 & 0.18 & -0.36 & -0.18 \\ 0 & 0 & 0.18 & 0.27 & -0.18 & -0.09 \\ \hline -0.25 & 0 & -0.36 & -0.18 & 0.61 & 0.18 \\ 0 & 0 & -0.18 & -0.09 & 0.18 & 0.59 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} = \begin{array}{l} 5 \\ 0 \\ -8 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{array} \cdot 10^3$$

В этом уравнении приложенные силы переведены в [Н].

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений

Решив составленное уравнение равновесия, получим вектор неизвестных перемещений. Этот расчет рекомендуется выполнять в программе Mathcad.

$$E := 2.1 \cdot 10^{11} \quad A := 20 \cdot 10^{-4}$$

$$K := E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.08 & 0.18 & -0.36 & -0.18 \\ 0 & 0 & 0.18 & 0.27 & -0.18 & -0.09 \\ -0.25 & 0 & -0.36 & -0.18 & 0.61 & 0.18 \\ 0 & 0 & -0.18 & -0.09 & 0.18 & 0.59 \end{pmatrix} \quad F := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^3$$

$$U := \text{Isolve}(K, F) \quad U = \begin{pmatrix} 1.594 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -9.921 \times 10^{-6} \\ 1.653 \times 10^{-4} \\ 1.118 \times 10^{-4} \\ -1.19 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Определение реакций в опорах

$$R := E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.36 & 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.18 & -0.09 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.36 & -0.18 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.18 & -0.09 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot U \quad R = \begin{pmatrix} 1.4 \times 10^4 \\ -4.5 \times 10^3 \\ -1.1 \times 10^4 \\ -5.5 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$\sum F + \sum R = 0$$

Таким образом, получены следующие значения узловых перемещений:

$$u_1 = 1,594 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad v_1 = 0; \quad u_2 = -9,921 \cdot 10^{-6} \text{ м}; \quad v_2 = 1,653 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$u_3 = 1,118 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad v_3 = -1,19 \cdot 10^{-5}; \quad u_4 = 0; \quad v_4 = 0; \quad u_5 = 0; \quad v_5 = 0.$$

4. Определение реакций в опорах

Для определения реакций в опорах следует перемножить полученный вектор перемещений на соответствующую строку в матрице жесткости. Т.е. перемножив вектор U на 7-ю строку общей матрицы жесткости K , получим реакцию F_{4x} ; перемножив вектор U на 8-ю строку, получим реакцию F_{4y} и т.д. Причем при перемножении вычеркнутые столбцы можно не учитывать, т.к. они все равно умножаются на ноль.

$$F_{4x} = E \cdot A \cdot [0 \cdot 1,594 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 0 + (-0,36) \cdot (-9,921 \cdot 10^{-6}) + 0,18 \cdot 1,653 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 1,118 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot (-1,19 \cdot 10^{-5})] = 1,4 \cdot 10^4 H = 14 \text{ кН}.$$

$$F_{4y} = E \cdot A \cdot [0 \cdot 1,594 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 0 + 0,18 \cdot (-9,921 \cdot 10^{-6}) + (-0,09) \cdot 1,653 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 1,118 \cdot 10^{-4} + (-0,5) \cdot (-1,19 \cdot 10^{-5})] = -4,5 \cdot 10^3 H = -4,5 \text{ кН}.$$

$$F_{5x} = E \cdot A \cdot [0 \cdot 1,594 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 0 + (-0,36) \cdot (-9,921 \cdot 10^{-6}) + (-0,18) \cdot 1,653 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 1,118 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot (-1,19 \cdot 10^{-5})] = -1,1 \cdot 10^4 H = -11 \text{ кН}.$$

$$F_{5y} = E \cdot A \cdot [0 \cdot 1,594 \cdot 10^{-4} + (-0,5) \cdot 0 + (-0,18) \cdot (-9,921 \cdot 10^{-6}) + (-0,36) \cdot 1,653 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 1,118 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot (-1,19 \cdot 10^{-5})] = -5,5 \cdot 10^3 H = -5,5 \text{ кН}.$$

Эту же операцию можно выполнить в упомянутой выше программе Mathcad. Для этого нужно перемножить вырезанные строки матрицы жесткости с полученным вектором перемещений.

5. Проверка

Правильность проведенных вычислений можно проверить, составив уравнения статики – сумму проекций сил на ось X и сумму проекций сил на ось Y.

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & 5 - 8 + 14 - 11 &= 0. \\ \sum Y &= 0; & 10 - 4,5 - 5,5 &= 0. \end{aligned}$$

6. Определение напряжений в элементах

Напряжение в элементе определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Элемент 1 (1 – 5).

$$\sigma_1 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2} [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{vmatrix} 1,594 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Элемент 2 (1 – 3).

$$\sigma_2 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{4} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{vmatrix} 1,594 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 1,118 \cdot 10^{-4} \\ -0,119 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix} = -2,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = -2,5 \text{ МПа}.$$

Элемент 3 (2 – 3).

$$\sigma_3 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2,24} [-0,89 \quad -0,45 \quad 0,89 \quad 0,45] \cdot \begin{vmatrix} -9,921 \cdot 10^{-6} \\ 1,653 \cdot 10^{-4} \\ 1,118 \cdot 10^{-4} \\ -0,119 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix} = 2,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,7 \text{ МПа}$$

Элемент 4 (3 – 4).

$$\sigma_4 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2} [0 \quad 1 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{vmatrix} 1,118 \cdot 10^{-4} \\ -0,119 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 1,25 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,25 \text{ МПа}.$$

Элемент 5 (2 – 5).

$$\sigma_5 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2,24} [0,89 \quad 0,45 \quad -0,89 \quad -0,45] \cdot \begin{vmatrix} -9,921 \cdot 10^{-6} \\ 1,653 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 6,20 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,20 \text{ МПа}.$$

Элемент 6 (2 – 4).

$$\sigma_6 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2,24} [-0,89 \quad 0,45 \quad 0,89 \quad -0,45] \cdot \begin{vmatrix} -9,921 \cdot 10^{-6} \\ 1,653 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 7,74 \cdot 10^6 \text{ Па} = 7,74 \text{ МПа}$$

Элемент 7 (4 – 5).

$$\sigma_7 = \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{2} [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0] \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 0.$$

РАСЧЕТ БАЛКИ

Для заданной балки определить перемещения и углы поворота в узлах, а также опорные реакции.

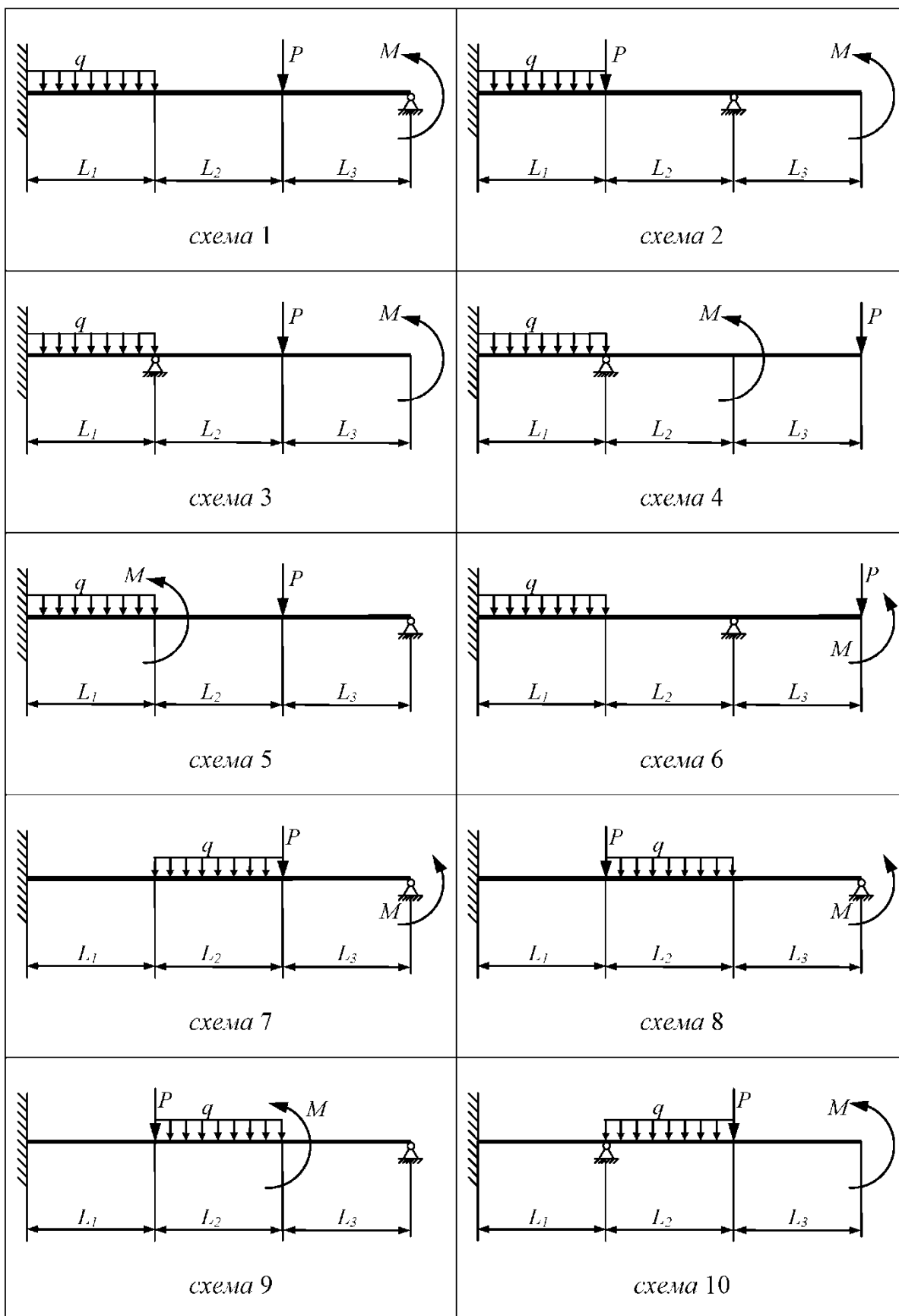
Принять: $E=2,1 \cdot 10^{11} \text{Н/м}^2$; $I=2000 \text{см}^4$.

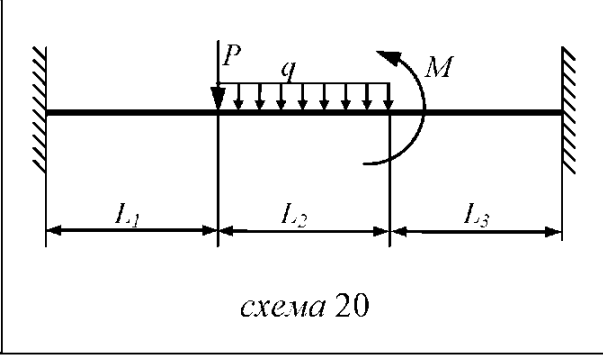
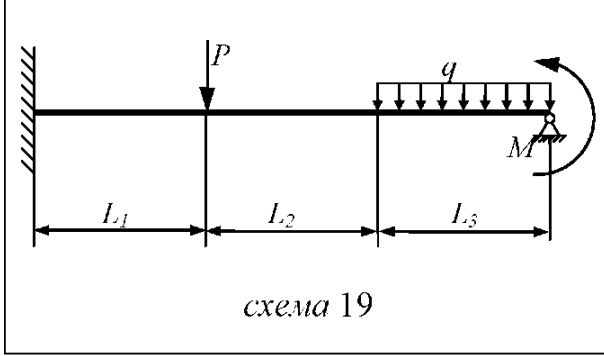
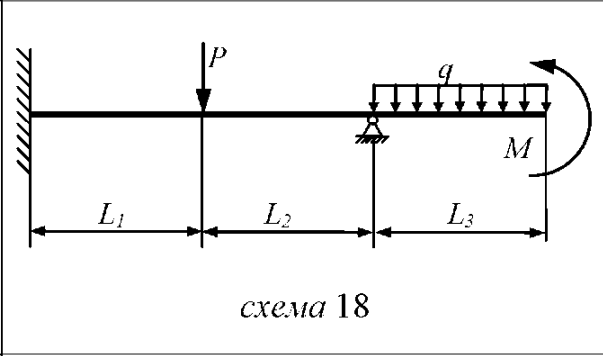
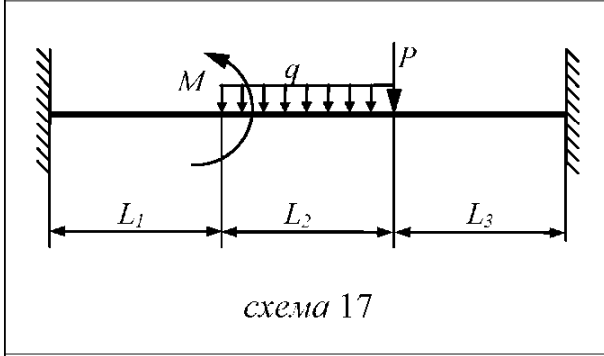
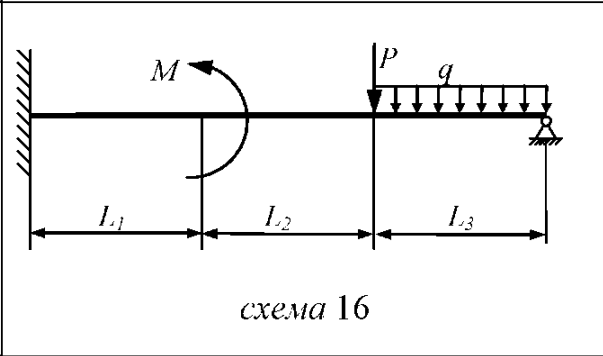
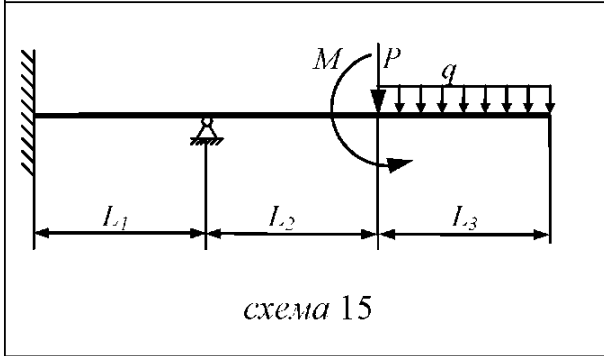
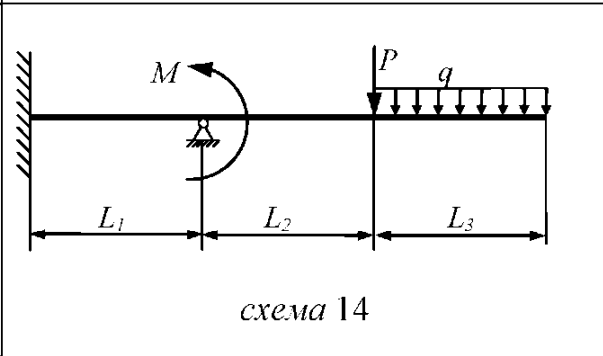
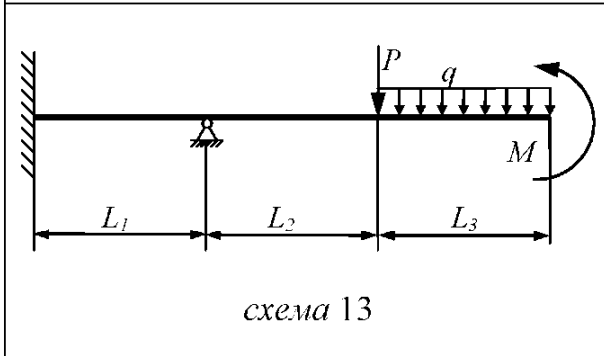
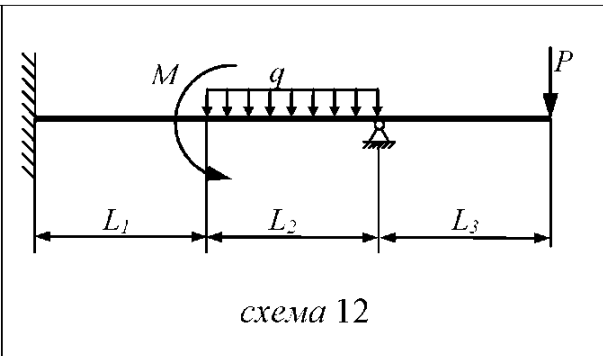
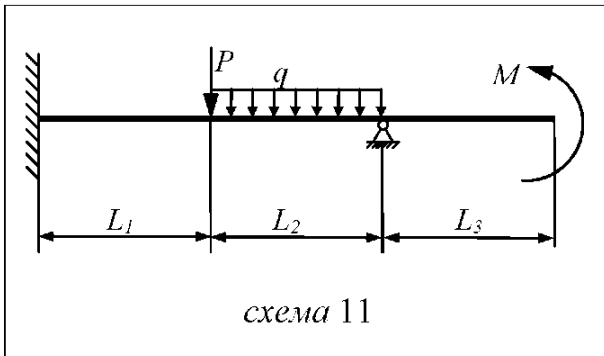
ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

№ варианта	№ схемы	Длина, м			Нагрузка		
		L_1	L_2	L_3	P , кН	q , кН/м	M , кНм
1	1	0,2	0,1	0,1	5	2	30
2	2	0,4	0,3	0,2	6	3	29
3	3	0,6	0,5	0,3	7	4	28
4	4	0,8	0,7	0,4	8	5	27
5	5	1,0	0,9	0,5	9	6	26
6	6	1,2	1,1	0,6	10	7	25
7	7	1,4	1,3	0,7	11	8	24
8	8	1,6	1,5	0,8	12	9	23
9	9	1,8	1,7	0,9	13	10	22
10	10	2,0	1,9	1,0	14	11	21
11	11	2,2	2,1	1,1	15	12	20
12	12	2,4	2,3	1,2	19	13	19
13	13	2,6	2,5	1,3	20	14	18
14	14	2,8	2,7	1,4	21	15	17
15	15	3,0	2,9	1,5	22	16	16
16	16	0,1	0,2	1,6	23	17	15
17	17	0,3	0,4	1,7	24	18	14
18	18	0,5	0,6	1,8	25	19	13
19	19	0,7	0,8	1,9	26	20	12
20	20	0,9	1,0	2,0	27	19	11
21	1	1,1	1,2	2,1	28	18	10
22	2	1,3	1,4	2,2	29	17	9
23	3	1,5	1,6	2,3	30	16	8
24	4	1,7	1,8	2,4	29	15	7
25	5	1,9	2,0	2,5	28	14	6
26	6	2,1	2,2	2,6	27	13	5
27	7	2,3	2,4	2,7	26	12	16
28	8	2,5	2,6	2,8	25	11	6
29	9	2,7	2,8	2,9	24	10	7
30	10	2,9	3,0	3,0	23	9	8
31	11	0,1	0,2	0,1	22	8	9
32	12	0,2	0,4	0,3	21	7	10
33	13	0,3	0,6	0,5	20	6	11
34	14	0,4	0,8	0,7	19	5	12
35	15	0,5	1,0	0,9	18	4	13
36	16	0,6	1,2	1,1	17	3	14
37	17	0,7	1,4	1,3	16	2	15
38	18	0,8	1,6	1,5	15	2	19
39	19	0,9	1,8	1,7	14	3	20
40	20	1,0	2,0	1,9	13	4	21
41	1	1,1	2,2	2,1	12	5	22
42	2	1,2	2,4	2,3	11	6	23
43	3	1,3	2,6	2,5	10	7	24
44	4	1,4	2,8	2,7	9	8	25
45	5	1,5	3,0	2,9	8	9	26

№ варианта	№ схемы	Длина, м			Нагрузка		
		L_1	L_2	L_3	P , кН	q , кН/м	M , кНм
46	6	1,6	0,1	0,2	7	14	27
47	7	1,7	0,3	0,4	6	13	28
48	8	1,8	0,5	0,6	5	12	29
49	9	1,9	0,7	0,8	14	11	30
50	10	2,0	0,9	1,0	15	10	16
51	11	2,1	1,1	1,2	19	9	17
52	12	2,2	1,3	1,4	20	8	18
53	13	2,3	1,5	1,6	21	7	13
54	14	2,4	1,7	1,8	22	6	12
55	15	2,5	1,9	2,0	23	5	11
56	16	2,6	2,1	2,2	24	4	10
57	17	2,7	2,3	2,4	25	3	9
58	18	2,8	2,5	2,6	26	2	8
59	19	2,9	2,7	2,8	27	11	7
60	20	3,0	2,9	3,0	28	12	6
61	1	2,9	2,8	1,5	29	13	5
62	2	2,8	2,6	1,4	30	14	16
63	3	2,7	2,4	1,3	29	15	6
64	4	2,6	2,2	1,2	28	16	7
65	5	2,5	2,0	1,1	27	17	8
66	6	2,4	1,8	1,0	26	18	9
67	7	2,3	1,6	0,9	25	19	10
68	8	2,2	1,4	0,8	24	20	11
69	9	2,1	1,2	0,7	23	19	12
70	10	2,0	1,0	0,6	22	18	13
71	11	1,9	0,8	0,4	21	17	14
72	12	1,8	0,6	0,3	20	16	15
73	13	1,7	0,4	0,2	19	15	19
74	14	1,6	2,9	0,1	18	14	20
75	15	1,5	0,2	1,8	17	13	21
76	16	1,4	0,4	1,9	16	3	22
77	17	1,3	0,6	2,0	5	4	11
78	18	1,2	0,8	2,1	6	5	10
79	19	1,1	1,0	2,2	7	6	9
80	20	1,0	1,2	2,3	8	7	8
81	1	0,9	1,4	2,4	9	8	7
82	2	0,8	1,6	2,5	10	9	6
83	3	0,7	1,8	2,6	11	14	5
84	4	0,6	2,0	2,7	12	13	14
85	5	0,4	2,2	2,8	13	12	15
86	6	0,3	2,4	2,9	14	11	19
87	7	0,2	2,6	3,0	15	10	20
88	8	0,1	2,8	2,9	19	9	21
89	9	2,5	3,0	2,8	20	14	22
90	10	2,7	0,1	2,7	21	15	23
91	11	2,9	0,3	2,6	22	16	24
92	12	0,2	0,5	2,5	24	17	25
93	13	0,4	0,7	2,4	25	18	26
94	14	0,6	0,9	2,2	26	19	27
95	15	0,8	1,1	2,4	27	20	28
96	16	1,0	1,3	2,6	28	19	29
97	17	1,2	1,5	2,8	29	18	30
98	18	1,4	1,7	3,0	30	17	30
99	19	2,7	1,9	0,1	29	16	29
100	20	2,9	2,1	0,3	28	15	28

ВАРИАНТЫ СХЕМ

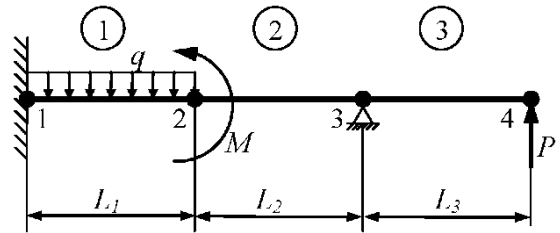




ПРИМЕР РАСЧЕТА

Для заданной балки определить перемещения и углы поворота в узлах, а также опорные реакции.

Дано: $L_1=1$ м; $L_2=2$ м; $L_3=3$ м; $q=5$ кН/м;
 $M=20$ кНм; $P=10$ кН; $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²;
 $I=2000$ см⁴.



Решение

1. Составление матрицы жесткости отдельных элементов

Элемент 1 (1-2)

$$k_1 = \frac{EI}{L_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_1 & -12 & 6L_1 \\ 6L_1 & 4I_1^2 & -6L_1 & 2I_1^2 \\ -12 & -6L_1 & 12 & -6L_1 \\ 6L_1 & 2I_1^2 & -6L_1 & 4I_1^2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 1 & -12 & 6 \cdot 1 \\ 6 \cdot 1 & 4 \cdot 1^2 & -6 \cdot 1 & 2 \cdot 1^2 \\ -12 & -6 \cdot 1 & 12 & -6 \cdot 1 \\ 6 \cdot 1 & 2 \cdot 1^2 & -6 \cdot 1 & 4 \cdot 1^2 \end{bmatrix} =$$

$$= EI \begin{bmatrix} 12^{11} & 6 & -12^{12} & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 21 \\ \\ 22 \end{matrix}$$

Элемент 2 (2-3)

$$k_2 = \frac{EI}{L_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_2 & -12 & 6L_2 \\ 6L_2 & 4L_2^2 & -6L_2 & 2L_2^2 \\ -12 & -6L_2 & 12 & -6L_2 \\ 6L_2 & 2L_2^2 & -6L_2 & 4L_2^2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 2 & -12 & 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 & 4 \cdot 2^2 & -6 \cdot 2 & 2 \cdot 2^2 \\ -12 & -6 \cdot 2 & 12 & -6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 & 2 \cdot 2^2 & -6 \cdot 2 & 4 \cdot 2^2 \end{bmatrix} =$$

$$= EI \begin{bmatrix} 1,5^{35} & 1,5 & -1,5^{55} & 1,5 \\ 1,5 & 2 & -1,5 & 1 \\ -1,5 & -1,5 & 1,5 & -1,5 \\ 1,5 & 1 & -1,5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 55 \end{matrix}$$

Элемент 3 (3-4)

$$k_3 = \frac{EI}{L_3^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_3 & -12 & 6L_3 \\ 6L_3 & 4L_3^2 & -6L_3 & 2L_3^2 \\ -12 & -6L_3 & 12 & -6L_3 \\ 6L_3 & 2L_3^2 & -6L_3 & 4L_3^2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{3^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 3 & -12 & 6 \cdot 3 \\ 6 \cdot 3 & 4 \cdot 3^2 & -6 \cdot 3 & 2 \cdot 3^2 \\ -12 & -6 \cdot 3 & 12 & -6 \cdot 3 \\ 6 \cdot 3 & 2 \cdot 3^2 & -6 \cdot 3 & 4 \cdot 3^2 \end{bmatrix} =$$

$$= EI \begin{bmatrix} 0,44 & 0,67 & -0,44 & 0,67 \\ 0,67 & 1,33 & -0,67 & 0,67 \\ -0,44 & -0,67 & 0,44 & -0,67 \\ 0,67 & 0,67 & -0,67 & 1,33 \end{bmatrix}$$

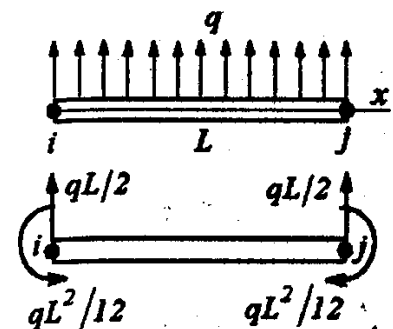
2. Составление глобального уравнения равновесия

Запишем глобальную матрицу жесткости:

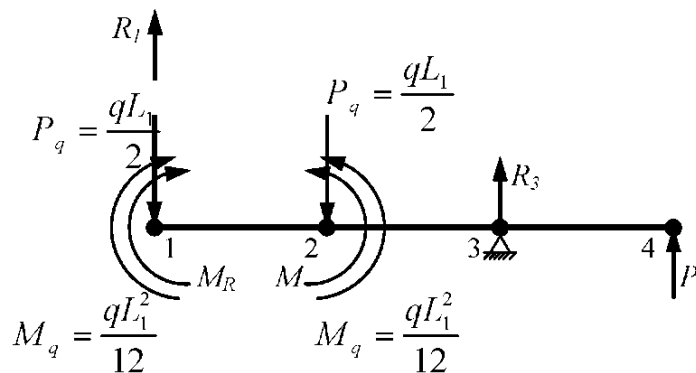
$$K = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 12+1,5 & -6+1,5 & -1,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -6+1,5 & 4+2 & -1,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & -1,5 & 1,5+0,44 & -1,5+0,67 & -0,44 & 0,67 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1 & -1,5+0,67 & 2+1,33 & -0,67 & 0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,44 & -0,67 & 0,44 & -0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,67 & 0,67 & -0,67 & 1,33 \end{bmatrix} =$$

$$= EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 13,5 & -4,5 & -1,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -4,5 & 8 & -1,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & -1,5 & 1,94 & -0,83 & -0,44 & 0,67 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1 & -0,83 & 3,33 & -0,67 & 0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,44 & -0,67 & 0,44 & -0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,67 & 0,67 & -0,67 & 1,33 \end{bmatrix}$$

Для того, что бы записать вектор нагрузок в уравнении равновесия, приведем заданную распределенную нагрузку к эквивалентным силам, сосредоточенным в узлах схемы, согласно изображенному правилу.



Заданная схема примет вид:



В общем виде глобальное уравнение равновесия имеет вид:

$$EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 13,5 & -4,5 & -1,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -4,5 & 8 & -1,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & -1,5 & 1,94 & -0,83 & -0,44 & 0,67 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1 & -0,83 & 3,33 & -0,67 & 0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,44 & -0,67 & 0,44 & -0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,67 & 0,67 & -0,67 & 1,33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,y} \\ M_1 \\ F_{2,y} \\ M_2 \\ F_{3,y} \\ M_3 \\ F_{4,y} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

С учетом внешней нагрузки, и закреплений опорных узлов, это уравнение примет вид:

$$EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 13,5 & -4,5 & -1,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -4,5 & 8 & -1,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & -1,5 & 1,94 & -0,83 & -0,44 & 0,67 \\ 0 & 0 & 1,5 & 1 & -0,83 & 3,33 & -0,67 & 0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,44 & -0,67 & 0,44 & -0,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,67 & 0,67 & -0,67 & 1,33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 - \frac{qL_1}{2} \\ -M_R - \frac{qL_1^2}{12} \\ -\frac{qL_1}{2} \\ M + \frac{qL_1^2}{12} \\ R_3 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

3. Определение перемещений в узлах

Из этого уравнения следует вычеркнуть строки и столбцы, соответствующие нулевым перемещениям узлов, т.е. номер 1, 2 и 5. Полученная матрица должна быть симметричной относительно главной диагонали:

$$EI \begin{bmatrix} 13,5 & -4,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ -4,5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1 & 3,33 & -0,67 & 0,67 \\ 0 & 0 & -0,67 & 0,44 & -0,67 \\ 0 & 0 & 0,67 & -0,67 & 1,33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{qL_1}{2} \\ M + \frac{qL_1^2}{12} \\ 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему уравнений, получаем вектор неизвестных перемещений.

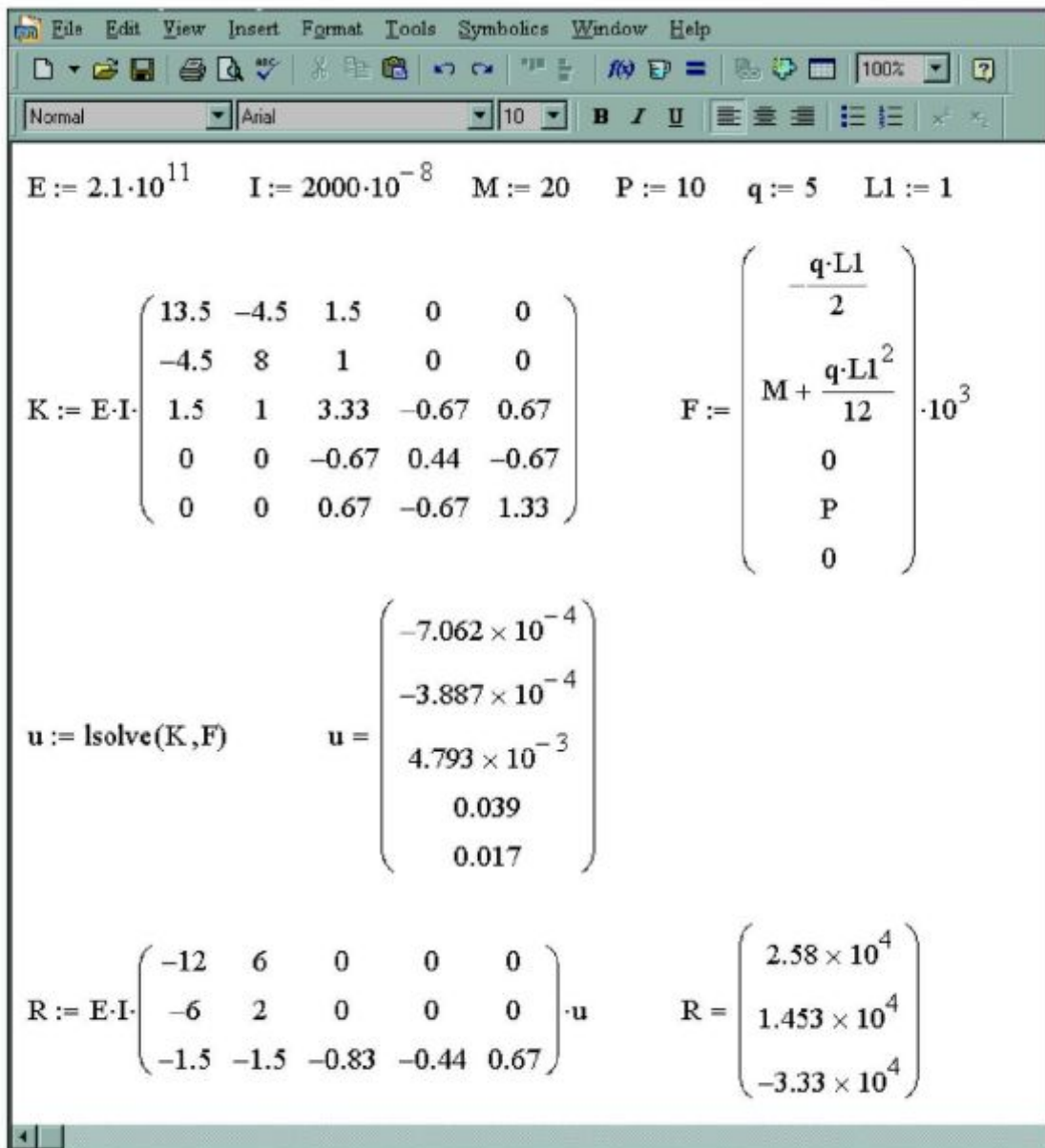
4. Определение реакций в опорах

Умножим найденный вектор перемещений на 1-ю, 2-ю и 5-ю строку глобального уравнения равновесия (1). Запишем это произведение в матричном виде:

$$R = EI \begin{bmatrix} -12 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & -1,5 & -0,83 & -0,44 & 0,67 \end{bmatrix} \cdot |u|,$$

$$\text{где } R = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 - \frac{qL_1}{2} \\ -M_R - \frac{qL_1^2}{12} \\ R_3 \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{l} R_1 = F_{1y} + \frac{qL_1}{2}; \\ \text{Откуда } M_R = -M_1 - \frac{qL_1^2}{12}; \\ R_3 = F_{3y}. \end{array} \quad (2)$$

Описанные выше расчеты рекомендуется выполнить в программном комплексе MathCad.



В соответствии с (2) окончательно найдем реакции:

$$R_1 = 25,8 \cdot 10^3 + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 1}{2} = 28,3 \cdot 10^3 \text{ H} = 28,3 \text{ кН};$$

$$M_R = -14,53 \cdot 10^3 - \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{12} = -14,95 \cdot 10^3 \text{ Нм} = -14,95 \text{ кНм};$$

$$R_3 = -33,3 \cdot 10^3 \text{ H} = -33,3 \text{ кН}.$$

5. Проверка полученных результатов

Для проверки составим уравнение статики.

$$\sum Y = 0; \quad R_1 - qL_1 + R_3 + P = 28,3 - 5 \cdot 1 + (-33,3) + 10 = 0.$$

Так как условие равновесия сил соблюдается задача решена верно.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА БАЗЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА MATHCAD

Цель работы: ознакомиться с основными возможностями MathCad и методом решения линейных алгебраических уравнений.

1. Знакомство с программным комплексом MathCad

Mathcad – это программный комплекс, предназначенный для математических расчетов. Его основным преимуществом является наглядность, ведь все математические выражения в Mathcad выглядят так же, как и в книге или на доске. Большое количество встроенных функций, наличие численного и символьного процессоров позволяют решать задачи как численно, так и аналитически. Наличие графического и текстового редакторов дают возможность готовить технические документы непосредственно в оболочке Mathcad.

1.1 Основные элементы интерфейса

Познакомимся с основными элементами интерфейса программы.

Главное меню

Файл Правка Вид Вставить Формат Сервис Символика Окно Помощь

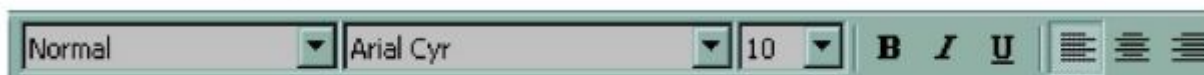
является вашими воротами к математическим выражениям, графике и символическим функциями, и обеспечивает команды, посредством которых производится управление рабочими листами, и их редактирование.

Панель инструментов



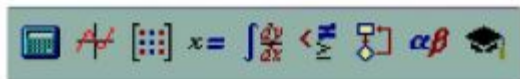
обеспечивает доступ ко многим общим задачам, от открытия рабочего листа и сохранения файла до проверки правильности написания и выдачи списков встроенных функций и единиц. В зависимости от того, что вы делаете в вашем рабочем листе, одна или большее количество этих кнопок может оказаться неактивными.

Панель шрифтов



позволяет, выбирать текстовые и математические шрифты, стили.

Математическая палитра.



С ее помощью выводятся палитры математических операторов.

1.2 Основные принципы работы с программой

Данные в рабочий лист программы вводятся так же, как и в любом текстовом редакторе. Однако здесь нет четко разграниченных строк. В качестве курсора используется красный крестик \times . Этот крестик можно установить по желанию пользователя в любое место листа. Каждая введенная формула является самостоятельным элементом, который можно перемещать в пространстве листа. Для этого необходимо нажать на этот элемент левой клавишей мышки, навести на него курсор до появления черной руки, снова нажать левой клавишей и, не отпуская клавишу перетащить элемент в новое положение.

Расчеты можно вести в числовом виде, т.е. вводить непосредственно цифры.

Введите в рабочем окне запись:

$$2 + 3 =$$

Программа автоматически выдаст результат:

$$2 + 3 = 5$$

Однако предпочтительнее вести расчеты в символьном виде.

Введите следующую запись:

a b

c b c

На рабочем листе Mathcad эта запись будет иметь следующий вид:

<code>a := 2</code>	<code>b := 3</code>
<code>c := a + b</code>	<code>c = 5</code>

Преимущество символьного ввода данных заключается в том, что всегда есть возможность изменить значения заданных величин, при этом результат автоматически пересчитается. Замените число 2 на 5, а число 3 на 7, щелкните за пределами черной рамки, получите:

<code>a := 5</code>	<code>b := 7</code>
<code>c := a + b</code>	<code>c = 12</code>

Следует отметить, что рекомендуется использовать латинский алфавит, кроме того, программа различает регистры, т.е. А и а – это разные величины.

В программе для введения исходных данных используется оператор присвоения :=, который вводится при помощи клавиши «двоеточие» $\boxed{:}$, а для вывода полученного результата – одноименный оператор =.

Mathcad читает введенные данные сверху вниз и слева направо, поэтому, если поменять местами первую и вторую строчку нашего примера, программа выделит красным цветом переменные и покажет ошибку:

<code>c := a + b</code>	<code>c = a</code>
This variable or function is not defined above.	
<code>a := 5</code>	<code>b := 7</code>

Которая в переводе на русский язык звучит следующим образом: эта переменная или функция не определена.

2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Решим систему, записанную в матричном виде:

$$E \cdot A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 10 & 4 & 9 & 10 & 36 \\ 3 & 4 & 8 & 6 & 15 & 12 \\ 4 & 6 & 8 & 12 & 10 & 24 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 20 & 30 \\ 6 & 8 & 4 & 15 & 5 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \\ 22 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Или в сокращенном виде:

$$K \cdot U = F,$$

где $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $A=20 \cdot 10^{-4}$ м².

Прежде всего, зададим исходные данные.

Введите

E [:] 2.1 [*] 10 [^] 11 [Tab] A [:] 20 [*] 10 [^] -4 [Tab] [Enter]
[Enter]

Следует отметить, что десятые от целых отделяются точкой.

Далее необходимо ввести матрицу коэффициентов, которая займет значительное место, поэтому опустим курсор несколько ниже, нажав около десяти раз подряд клавишу [Enter].


Введите

K [:] E [*] A [*]

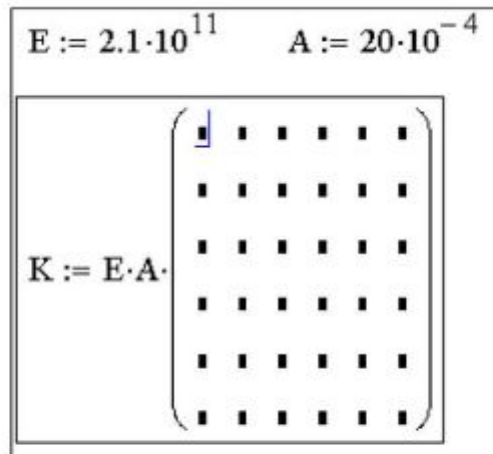
Для ввода матрицы выполните следующие действия. Нажмите в палитре

математики кнопку . Появится панель матриц



На этой панели нажмите кнопку аналогичную показанной выше , в появившемся окне в поле строк и столбцов введите 6. Нажмите [OK].

В формулу добавится матрица размером 6x6 с пустыми ячейками:



Введите заданные коэффициенты в матрицу, перемещаясь по ячейкам при помощи клавиш \leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow . Нажмите **Tab**.

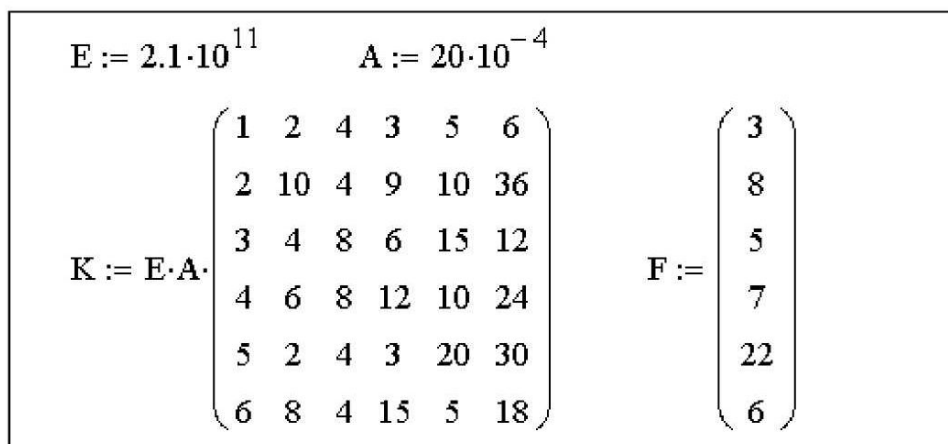
Далее аналогично матрице коэффициентов следует ввести вектор нагрузок F .

Введите

F $\left[\begin{array}{c} : \\ : \\ : \\ : \\ : \\ : \end{array} \right]$

используя описанную выше методику ввода матриц, добавьте матрицу с 6-ю строками и 1-м столбцом. Заполните пустые ячейки. Нажмите **Tab**.

Рабочее окно будет иметь вид:



Таким образом, все исходные данные введены, теперь следует решить эту систему и получить вектор неизвестных U . Для этого воспользуемся стандартной функцией *lsolve*.

Щелкните левой клавишей мышки по рабочему окну программы, ниже исходных данных, с таким расчетом, что бы мог поместиться вектор неизвестных.

Введите

и $\boxed{\text{:}}$ `Isolve(K,F)` $\boxed{\text{Tab}}$ и $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Tab}}$

Программа выведет вектор неизвестных:

$$\begin{array}{l} E := 2.1 \cdot 10^{11} \quad A := 20 \cdot 10^{-4} \\ \\ K := E \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 10 & 4 & 9 & 10 & 36 \\ 3 & 4 & 8 & 6 & 15 & 12 \\ 4 & 6 & 8 & 12 & 10 & 24 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 20 & 30 \\ 6 & 8 & 4 & 15 & 5 & 18 \end{pmatrix} \quad F := \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \\ U := \text{Isolve}(K, F) \quad U = \begin{pmatrix} 1.56 \times 10^{-8} \\ 2.586 \times 10^{-9} \\ 5.337 \times 10^{-9} \\ -8.73 \times 10^{-9} \\ -3.596 \times 10^{-9} \\ 1.533 \times 10^{-9} \end{pmatrix} \end{array}$$

Точность полученного результата можно проверить, умножив матрицу коэффициентов на полученный вектор неизвестных. В результате должен получиться вектор внешних нагрузок:

$$K \cdot U = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix}$$

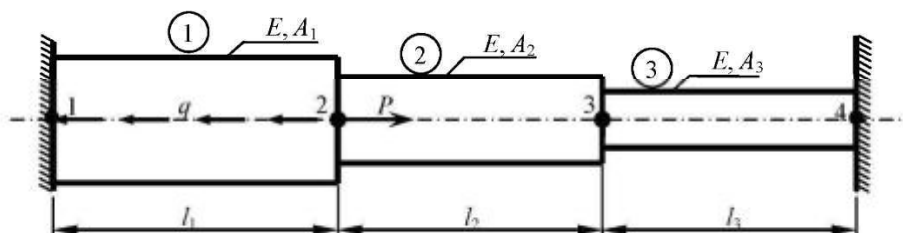
ПРИЛОЖЕНИЕ Б

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS

Постановка задачи

Для заданного стержня необходимо определить перемещения узлов, реакции опор и осевые усилия. Сравнить полученные результаты со значениями найденными вручную.

Дано $A_1=15\text{см}^2$; $A_2=10\text{см}^2$; $A_3=5\text{см}^2$; $l_1=1\text{м}$; $l_2=2\text{м}$; $l_3=3\text{м}$; $P=15\text{кН}$; $q=10\text{кН/м}$; $E=2,1\cdot 10^{11}\text{Н/м}^2$.

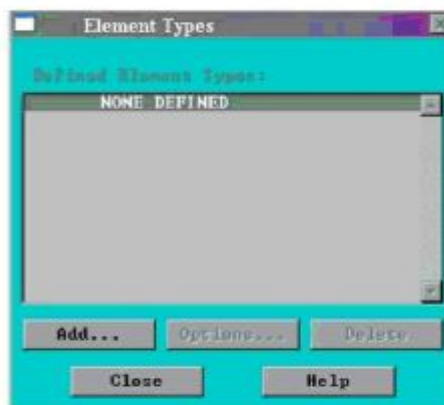


В этой работе мы не будем отдельно создавать геометрическую модель, а затем разбивать ее на конечные элементы. В данном случае гораздо проще сразу создать узлы и объединить их в элементы.

Шаг 1: Задание типа и параметров конечных элементов.

В этой задаче мы будем использовать стержневой конечный элемент Link1. Поскольку условие предполагает три ступени, для их описания воспользуемся тремя конечными элементами одного типа и разных диаметров.

1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Preprocessor** (Препроцессор) > **Element Type** (Тип элемента) > **Add/Edit/Delete** (Добавить/Редактировать/Удалить).
2. Нажмите **Add...** для добавления типа элемента.
3. В библиотеке выберите семейство **Link**.
4. Из этого семейства выберите **2D spar** элемент (Link 1).
5. Нажмите **OK**.
6. В окне **Element Type** нажмите **Close**.



Шаг 2: Выбор действительных параметров элементов.

На этом этапе нам необходимо задать три площади поперечного сечения ступеней стержня.

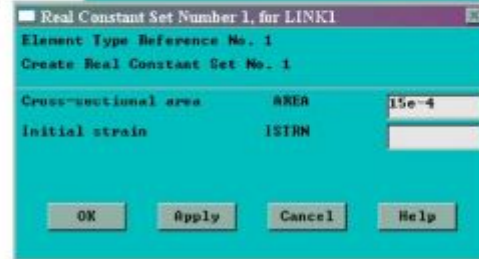
1. **Main Menu** > **Preprocessor** > **Real Constants** (действительные параметры) > **Add/Edit/Delete**



2. Нажмите **Add** (добавить к существующему списку наборов параметров).
3. В окне **Element Type for Real Constants** нажмите **OK**.
4. В появившемся окне **Real Constants for LINK1** необходимо заполнить поле

Cross-sectional area **AREA** **15e-4**
(Площадь поперечного сечения равна $A=15 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$).

5. Нажмите **OK**.



6. Добавим площадь второй ступени. Нажмите **Add** в окне **Real Constants**.
7. В окне **Element Type for Real Constants** нажмите **OK**.
8. В появившемся окне **Real Constants for LINK1** необходимо заполнить поле

Cross-sectional area **AREA** **10e-4**
(Площадь поперечного сечения равна $A=10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$).

9. Нажмите **OK**.

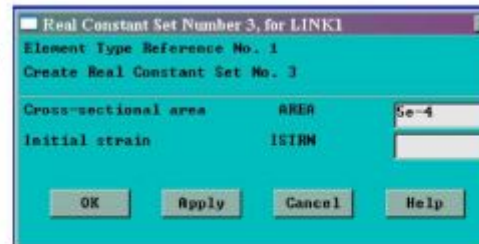


10. Добавим площадь второй ступени. Нажмите **Add** в окне **Real Constants**.
11. В окне **Element Type for Real Constants** нажмите **OK**.
12. В появившемся окне **Real Constants for LINK1** необходимо заполнить поле

Cross-sectional area **AREA** **5e-4**
(Площадь поперечного сечения равна $A=5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$).

13. Нажмите **OK**.

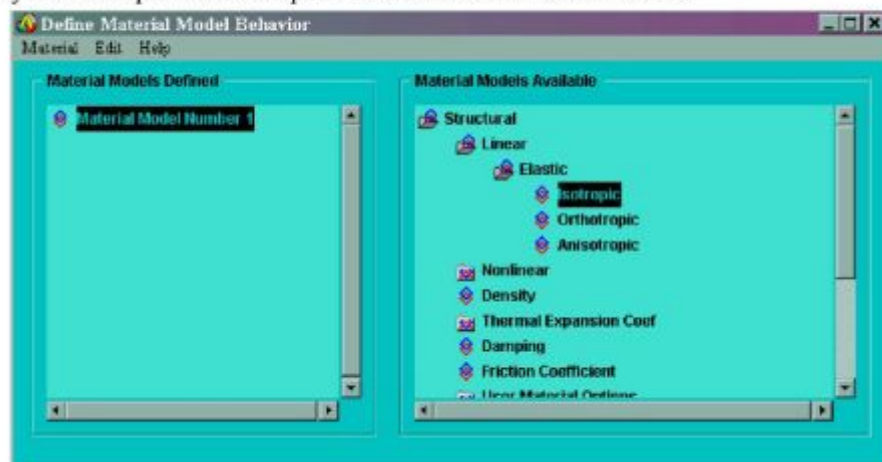
14. В окне **Real Constants** нажмите **Close**.



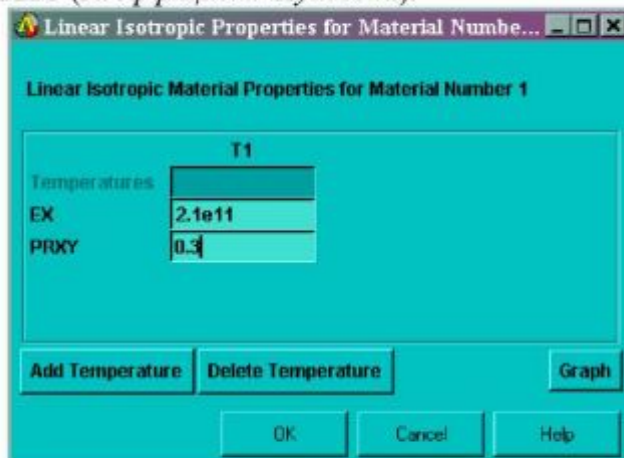
Шаг 3: Установка свойств материала.

В данном примере используется изотропный материал с постоянными свойствами.

1. **Main Menu** > **Preprocessor** (*Препроцессор*) > **Material Props** (Свойства материала) > **Material Models** (модель материала)
2. Дважды щелкните на **Structural** (*Структурный*), **Linear** (*Линейный*), **Elastic** (*Упругий*), **Isotropic** (*Изотропный*).



3. Введите **2.1e11** для **E_X** (*Модуль упругости*).
4. Введите **0.3** для **PR_{XY}** (*Коэффициент Пуассона*).



5. Нажмите **OK**.
6. **Save_DB**.

Шаг 4: Создание узлов.

1. **Main Menu** (*Главное Меню*) > **Preprocessor** (*Препроцессор*) > **-Modeling** (*Моделирование*)- **Create** (*Создать*) > **- Nodes** (*Узлы*)- **In Active CS** (*В текущей координатной системе*).
2. Заполните поля появившегося диалогового окна

Node number (<i>Номер узла</i>)	1		
X, Y, Z Location in active CS	0	0	0

 (*Координаты 1-го узла X=0; Y=0; Z=0*)
3. **Apply** (*Применить*).
4.

Node number (<i>Номер узла</i>)	2		
X, Y, Z Location in active CS	1	0	0

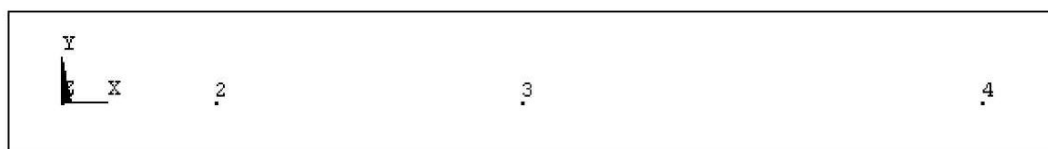
 (*Координаты 2-го узла X=1м; Y=0; Z=0*)
5. **Apply** (*Применить*).
6.

Node number (<i>Номер узла</i>)	3		
X, Y, Z Location in active CS	3	0	0

 (*Координаты 3-го узла X=3м; Y=0; Z=0*)
7. **Apply** (*Применить*).
8.

Node number (<i>Номер узла</i>)	4		
X, Y, Z Location in active CS	6	0	0

 (*Координаты 4-го узла X=6м; Y=0; Z=0*)
9. **OK**.

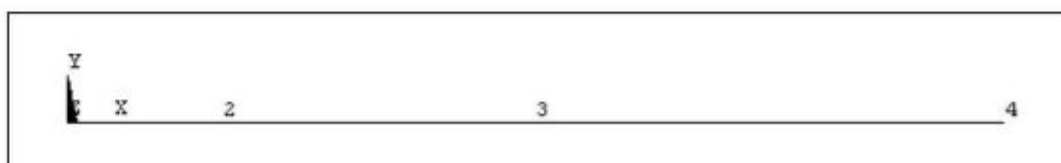
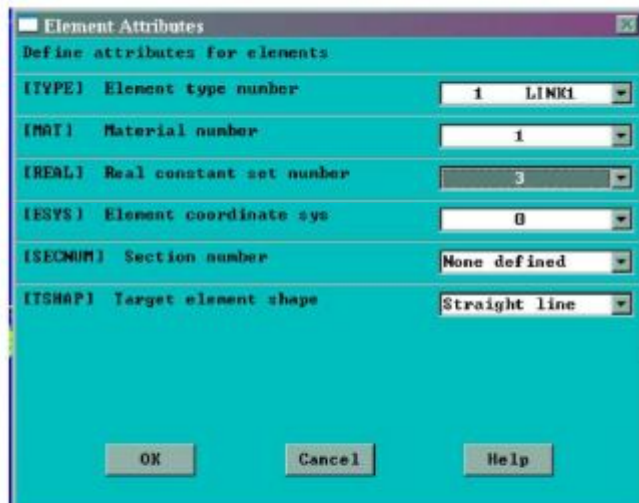


10. **Save_DB**.

Шаг 5: Создание конечных элементов.

При создании конечных элементов будем учитывать то, что каждый элемент имеет свою площадь поперечного сечения. Эта площадь задается при помощи параметра **Real Constants**.

1. **Main Menu** (*Главное Меню*) > **Preprocessor** (*Препроцессор*)> - **Modeling** (*Моделирование*)- **Create** (*Создать*) > **Elements** (*Элементы*)> **Elem Attributes...** (*Атрибуты элементов*).
2. Нажмите **ОК**.
3. **Main Menu** (*Главное Меню*) > **Preprocessor** (*Препроцессор*)> - **Modeling** (*Моделирование*)- **Create** (*Создать*) > **Elements** (*Элементы*)> **Thru Nodes** (*По узлам*)
4. Выберите курсором мышки узел **1** и **2** в графическом поле.
5. **ОК**.
6. **Main Menu** > **Preprocessor** (*Препроцессор*)> -**Modeling** (*Моделирование*)- **Create** (*Создать*) > **Elements** (*Элементы*)> **Elem Attributes...** (*Атрибуты элементов*).
7. В поле **Real constant set number** выберите **2**.
8. Нажмите **ОК**.
9. **Main Menu** (*Главное Меню*) > **Preprocessor** (*Препроцессор*)> - **Modeling** (*Моделирование*)- **Create** (*Создать*) > **Elements** (*Элементы*)> **Thru Nodes** (*По узлам*).
10. Выберите курсором мышки узел **2** и **3** в графическом поле.
11. **ОК**.
12. **Main Menu** (*Главное Меню*) > **Preprocessor** (*Препроцессор*)> - **Modeling** (*Моделирование*)- **Create** (*Создать*) > **Elements** (*Элементы*)> **Elem Attributes...** (*Атрибуты элементов*).
13. В поле **Real constant set number** выберите **3**.
14. Нажмите **ОК**.
15. **Main Menu** (*Главное Меню*) > **Preprocessor** (*Препроцессор*)> - **Modeling** (*Моделирование*)- **Create** (*Создать*) > **Elements** (*Элементы*)> **Thru Nodes** (*По узлам*)
16. Выберите курсором мышки узел **3** и **4** в графическом поле.
17. **ОК**.
18. **Save_DB**.



Шаг 6: Задание граничных перемещений.

На этом этапе следует задать нулевое вертикальное и горизонтальное перемещение 1-го и 4-го узла.

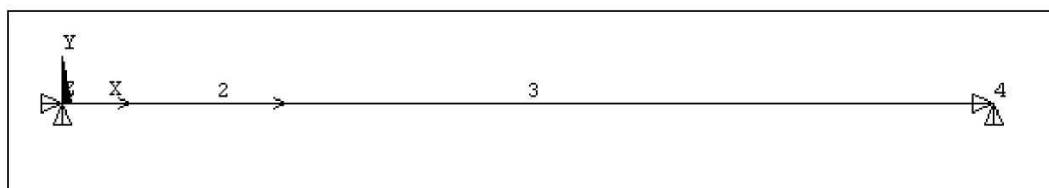
1. **Main Menu** (Главное меню) > **Solution** (Решение) > **-Loads** (Нагрузки) - **Apply** (Приложенные) > **-Structural** (Структурный) - **Displacement** (Перемещения) > **On Nodes** (В узлах)
2. Выберите узел 1 и 4.
3. Нажмите **OK** в **Picking Menu** (Меню выбора).
4. Выберите **All DOF** (перемещения по всем осям).
5. Введите **0** в **Value** (нулевые перемещения).
6. Нажмите **OK**.
7. **SAVE_DB**.



Шаг 7: Приложение внешней нагрузки.

Распределенную нагрузку приложим как две сосредоточенные, действующие в узлах элемента и равные половине общей распределенной нагрузки. При этом во втором узле общая нагрузка будет складываться из половины распределенной и сосредоточенной.

1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Solution** (Решение) > **-Loads** (Нагрузки) - **Apply** (Приложенные) > **-Structural** (Структурный) – **Force/Moment** (Сила/Момент) > **On Nodes** (К узлам).
2. Выберите 1-й узел.
3. Нажмите **OK**.
4. Из списка **Direction of force/mom** (Направление силы/момента) выберите **FX**.
5. В поле **Force/moment value** (Значение силы/момента) введите заданную силу - $10 \cdot 1000 \cdot 1/2$ (сила направленная вправо считается положительной).
6. Нажмите **Apply**.
7. Выберите 2-й узел.
8. Нажмите **OK**.
9. Из списка **Direction of force/mom** (Направление силы/момента) выберите **FX**.
10. В поле **Force/moment value** (Значение силы/момента) введите заданную силу $10 \cdot 1000$.
11. Нажмите **OK**.
12. **SAVE_DB**.



Шаг 8: Расчет.

1. **Main Menu** (Главное меню) > **Solution** (Решение) > **-Solve** (Счет) - **Current LS** (Текущая задача).
2. Изучите содержание появившегося окна и закройте его **File** > **Close**.
3. Нажмите **OK** для запуска счета.
4. Нажмите кнопку **Close** в появившемся желтом информационном окне **Solution is done** (Расчет выполнен).

Шаг 9: Просмотр перемещений в узлах.

1. **Main Menu > General Postproc > List Results (Список результатов) > Nodal Solution .**
.. (Расчет в узлах)
2. Выберите **DOF solution** (Расчет степеней свободы) в левом scroll-меню.
3. Выберите **ALL DOFs** (Все степени свободы) в правом scroll-меню.
4. Нажмите **OK**.
5. Сравните полученные перемещения со значениями, найденными вручную.
6. Нажмите **File > Close** для закрытия окна.



Шаг 10: Просмотр реакций в закреплениях.

1. **Main Menu > General Postproc > List Results (Список результатов) > Reaction Solu** (Расчет реакций).
2. Нажмите **OK**.
3. Сравните полученные реакции со значениями, найденными вручную.
4. Нажмите **File > Close** для закрытия окна.

Шаг 11: Просмотр напряжений в элементах.

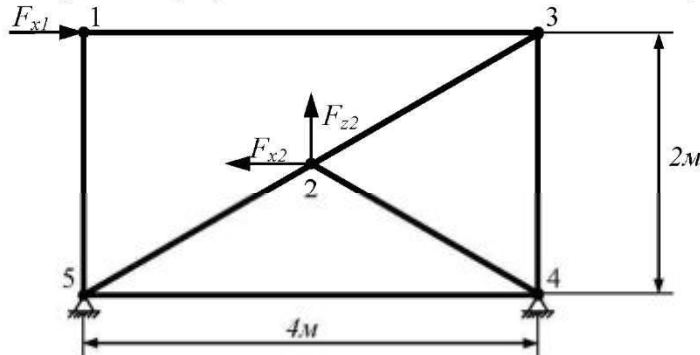
1. **Main Menu > General Postproc > List Results (Список результатов) > Element Solution.**
2. В открывшемся окне выберите **LineElem Results**.
3. Нажмите **OK**.
4. Величина **SAXL** показывает напряжения, возникающие в элементе.
5. Сравните полученные реакции со значениями, найденными вручную.
6. Нажмите **File > Close** для закрытия окна.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

РАСЧЕТ ФЕРМЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS

Постановка задачи

Для заданной фермы необходимо определить перемещения узлов, реакции опор и осевые усилия. Сравнить полученные результаты со значениями найденными вручную.

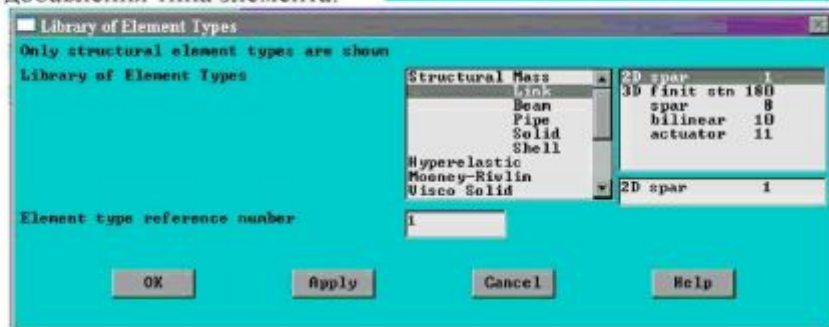


Дано: $E=2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $A=20 \text{ см}^2$; $F_{1x} = 5 \text{ кН}$; $F_{2x} = 8 \text{ кН}$; $F_{2y} = 10 \text{ кН}$.

Шаг 1: Задание типа и параметров конечных элементов.

В этой задаче мы будем использовать стержневой конечный элемент Link1. Поскольку условие предполагает три ступени, для их описания воспользуемся тремя конечными элементами одного типа и разных диаметров.

1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Preprocessor** (Препроцессор) > **Element Type** (Тип элемента) > **Add/Edit/Delete** (Добавить/Редактировать/Удалить).
2. Нажмите **Add...** для добавления типа элемента.
3. В библиотеке выберите семейство **Link**.
4. Из этого семейства выберите **2D spar** элемент (Link 1).
5. Нажмите **OK**.
6. В окне **Element Type** нажмите **Close**.



Шаг 2: Выбор действительных параметров элементов.

На этом этапе нам необходимо задать площадь поперечного сечения стержней фермы.

1. **Main Menu** > **Preprocessor** > **Real Constants** (действительные параметры) > **Add/Edit/Delete**



- Нажмите **Add** (добавить к существующему списку наборов параметров).
- В окне **Element Type for Real Constants** нажмите **OK**.
- В появившемся окне **Real Constants for LINK1** необходимо заполнить поле

Cross-sectional area **AREA** **20e-4**
(Площадь поперечного сечения равна $A=20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$).

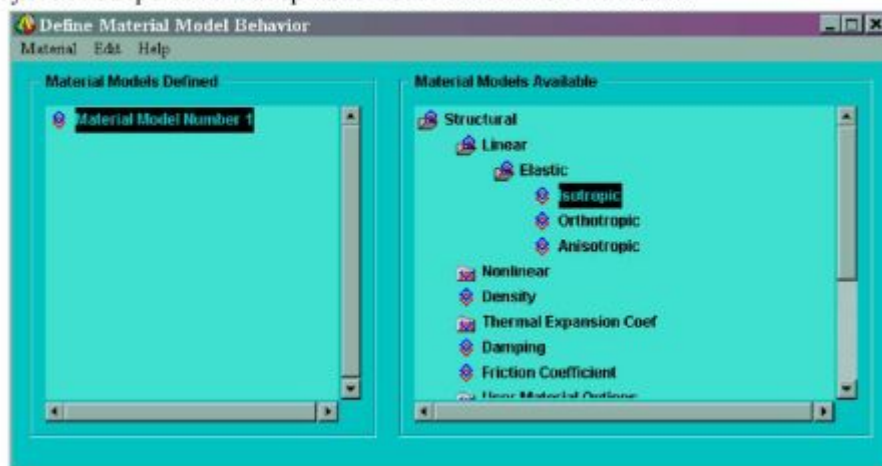
- Нажмите **OK**.



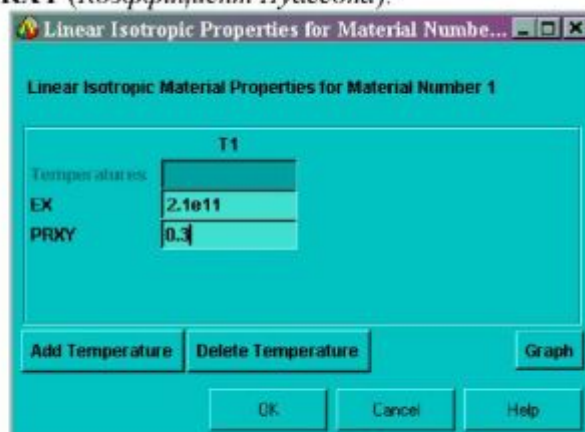
Шаг 3: Установка свойств материала.

В данном примере используется изотропный материал с постоянными свойствами.

- Main Menu** >
Preprocessor
(Препроцессор) >
Material Props
(Свойства материала) >
Material Models
(модель материала)
- Дважды щелкните на
Structural
(Структурный),
Linear *(Линейный),*
Elastic *(Упругий),*
Isotropic
(Изотропный).



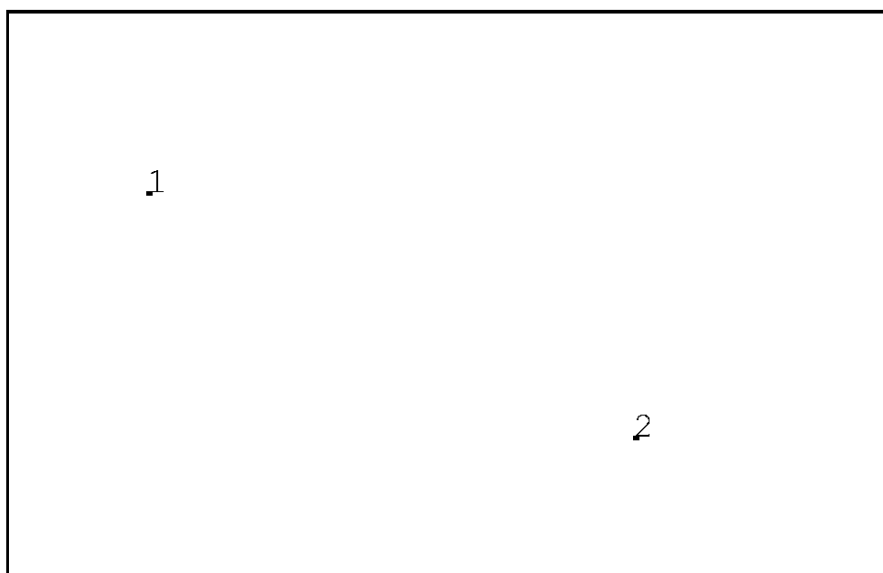
- Введите **2.1e11** для **EX** *(Модуль упругости).*
- Введите **0.3** для **PRXY** *(Коэффициент Пуассона).*



- Нажмите **OK**.
- Save_DB**.

Шаг 4: Создание узлов.

1. **Main Menu** (*Главное Меню*) > **Preprocessor** (*Препроцессор*)> **-Modeling** (*Моделирование*)- **Create** (*Создать*) > - **Nodes** (*Узлы*)- **In Active CS** (*В текущей координатной системе*).
2. Заполните поля появившегося диалогового окна
Node number (*Номер узла*) **1**
X, Y, Z Location in active CS **0** **2** **0**
(*Координаты 1-го узла X=0; Y=0; Z=0*)
3. **Apply** (*Применить*).
4. **Node number** (*Номер узла*) **2**
X, Y, Z Location in active CS **2** **1** **0**
(*Координаты 2-го узла X=1м; Y=0; Z=0*)
5. **Apply** (*Применить*).
6. **Node number** (*Номер узла*) **3**
X, Y, Z Location in active CS **4** **2** **0**
(*Координаты 3-го узла X=3м; Y=0; Z=0*)
7. **Apply** (*Применить*).
8. **Node number** (*Номер узла*) **4**
X, Y, Z Location in active CS **4** **0** **0**
(*Координаты 3-го узла X=3м; Y=0; Z=0*)
9. **Apply** (*Применить*).
10. **Node number** (*Номер узла*) **5**
X, Y, Z Location in active CS **0** **0** **0**
(*Координаты 4-го узла X=6м; Y=0; Z=0*)
11. **OK**.

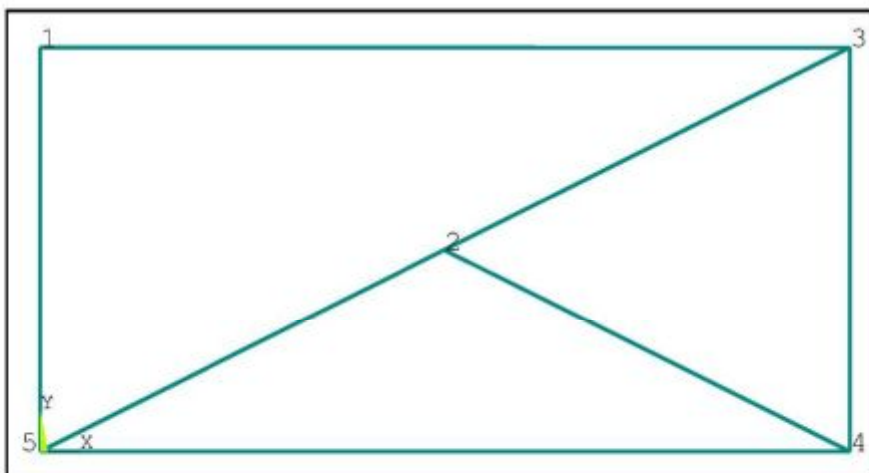


12. **Save_DB**.

Шаг 5: Создание конечных элементов.

При создании конечных элементов будем учитывать то, что каждый элемент имеет свою площадь поперечного сечения. Эта площадь задается при помощи параметра **Real Constants**.

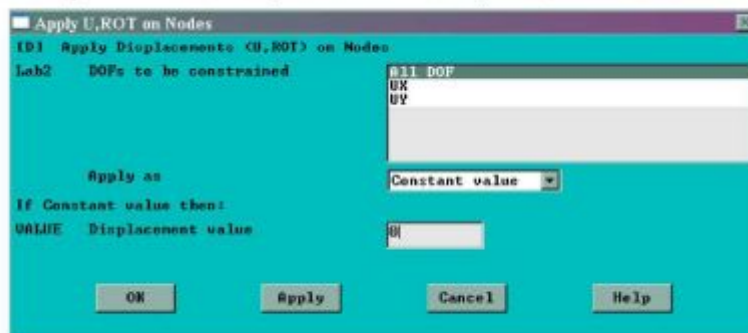
1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Preprocessor** (Препроцессор) > **-Modeling** (Моделирование) - **Create** (Создать) > **Elements** (Элементы) > **Thru Nodes** (По узлам)
2. Выберите курсором мышки узел **1** и **5** в графическом поле.
3. Нажмите **Apply** в меню выбора в левой нижней части экрана.
4. Выберите курсором мышки узел **1** и **3** в графическом поле.
5. Нажмите **Apply** в меню выбора в левой нижней части экрана.
6. Выберите курсором мышки узел **3** и **2** в графическом поле.
7. Нажмите **Apply** в меню выбора в левой нижней части экрана.
8. Выберите курсором мышки узел **3** и **4** в графическом поле.
9. Нажмите **Apply** в меню выбора в левой нижней части экрана.
10. Выберите курсором мышки узел **2** и **5** в графическом поле.
11. Нажмите **Apply** в меню выбора в левой нижней части экрана.
12. Выберите курсором мышки узел **2** и **4** в графическом поле.
13. Нажмите **Apply** в меню выбора в левой нижней части экрана.
14. Выберите курсором мышки узел **4** и **5** в графическом поле.
15. Нажмите **OK** в меню выбора в левой нижней части экрана.



Шаг 6: Задание граничных перемещений.

На этом этапе следует задать нулевое вертикальное и горизонтальное перемещение 4-го и 5-го узла.

1. **Main Menu** (Главное меню) > **Solution** (Решение) > **-Loads** (Нагрузки) - **Apply** (Приложенные) > **-Structural** (Структурный) - **Displacement** (Перемещения) > **On Nodes** (В узлах)
2. Выберите узел **4** и **5**.
3. Нажмите **OK** в **Picking Menu** (Меню выбора).

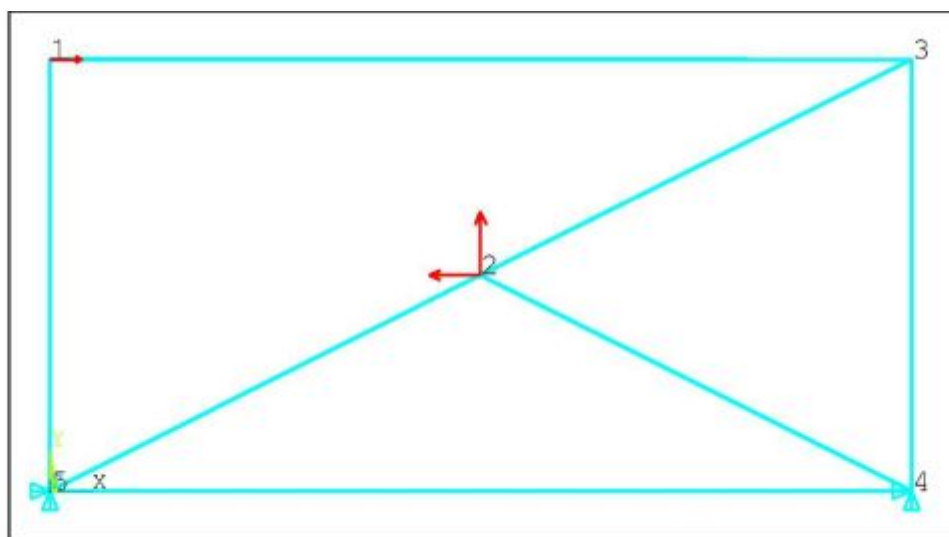


4. Выберите **All DOF** (перемещения по всем осям).
5. Введите **0** в **Value** (нулевые перемещения).
6. Нажмите **ОК**.
7. **SAVE_DB**.

Шаг 7: Приложение внешней нагрузки.

Приложим сосредоточенные нагрузки в соответствии с заданной схемой.

1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Solution** (Решение) > **-Loads** (Нагрузки) - **Apply** (Приложенные) > **-Structural** (Структурный) – **Force/Moment** (Сила/Момент) > **On Nodes** (К узлам).
2. Выберите **1-й** узел.
3. Нажмите **ОК**.
4. Из списка **Direction of force/mom** (Направление силы/момента) выберите **FX**.
5. В поле **Force/moment value** (Значение силы/момента) введите заданную силу **5000** (сила направленная вправо считается положительной).
6. Нажмите **Apply**.
7. Выберите **2-й** узел.
8. Нажмите **ОК**.
9. Из списка **Direction of force/mom** (Направление силы/момента) выберите **FX**.
10. В поле **Force/moment value** (Значение силы/момента) введите заданную силу **-8000**.
11. Нажмите **Apply**.
12. Выберите **2-й** узел.
13. Нажмите **ОК**.
14. Из списка **Direction of force/mom** (Направление силы/момента) выберите **FY**.
15. В поле **Force/moment value** (Значение силы/момента) введите заданную силу **10000** (Сила направленная вверх считается положительной).
16. Нажмите **ОК**.
17. **SAVE_DB**.



Шаг 8: Расчет.

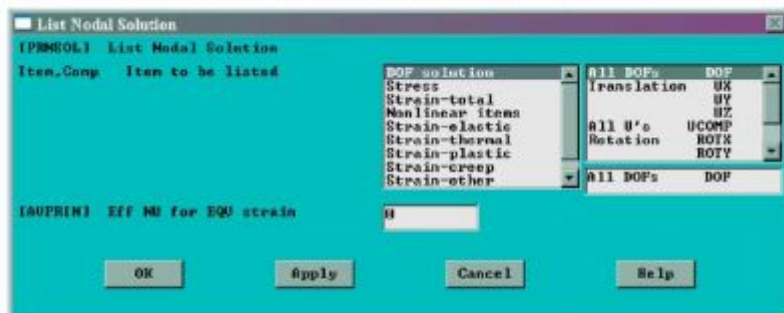
1. **Main Menu** (Главное меню) > **Solution** (Решение) > **-Solve** (Счет) - **Current LS** (Текущая задача).
2. Изучите содержание появившегося окна и закройте его **File** > **Close**.
3. Нажмите **ОК** для запуска счета.
4. Нажмите кнопку **Close** в появившемся желтом информационном окне **Solution is done** (Расчет выполнен).

Шаг 9: Просмотр деформации фермы в анимированном виде.

1. **Utility Menu** (меню Утилит) > **PlotCtrls** (Параметры отображения) > **Animate** (Анимация) > **Deformed Shape** (Деформированная форма)
2. Выберите строку **Def + undeformed** (Деформированная + недеформированная).
3. Нажмите кнопку **ОК**.

Шаг 10: Просмотр перемещений в узлах.

7. **Main Menu** > **General Postproc** > **List Results** (Список результатов) > **Nodal Solution** .
.. (Расчет в узлах)
8. Выберите **DOF solution** (Расчет степеней свободы) в левом scroll-меню.
9. Выберите **ALL DOFs** (Все степени свободы) в правом scroll-меню.
10. Нажмите **ОК**.
11. Сравните полученные перемещения со значениями, найденными вручную.
12. Нажмите **File** > **Close** для закрытия окна.



Шаг 11: Просмотр реакций в закреплениях.

5. **Main Menu** > **General Postproc** > **List Results** (Список результатов) > **Reaction Solu** (Расчет реакции).
6. Нажмите **ОК**.
7. Сравните полученные реакции со значениями, найденными вручную.
8. Нажмите **File** > **Close** для закрытия окна.

Шаг 12: Просмотр напряжений в элементах.

7. **Main Menu** > **General Postproc** > **List Results** (Список результатов) > **Element Solution**.
8. В открывшемся окне выберите **LineElem Results**.
9. Нажмите **ОК**.
10. Величина **SAXL** показывает напряжения, возникающие в элементе.
11. Сравните полученные реакции со значениями, найденными вручную.
12. Нажмите **File** > **Close** для закрытия окна.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

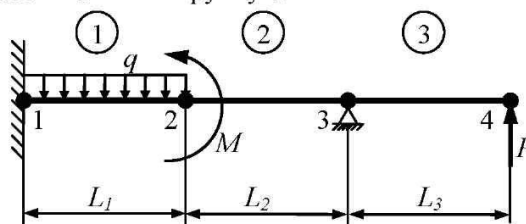
РАСЧЕТ БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS

Постановка задачи

Дана балка, к которой приложена распределенная нагрузка, сосредоточенная сила и момент. Необходимо определить:

- прогибы и углы поворота узлов;
- реакции в опорах;
- сравнить полученные значения с рассчитанными вручную.

Дано: $L_1=1$ м; $L_2=2$ м; $L_3=3$ м; $q=5$ кН/м;
 $M=20$ кНм; $P=10$ кН; $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²;
 $I=2000$ см⁴.

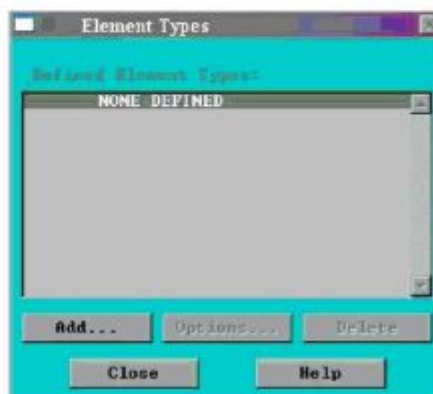


Как и для расчета стержневых конструкций, для балки, мы сразу создадим узлы и объединим их в элементы. Следует отметить, что такой подход используется исключительно с целью программного подтверждения ручных вычислений. Но необходимо помнить, что точность результатов расчета балок повышается с увеличением количества конечных элементов. И в этом случае есть смысл сначала создать геометрическую модель, а потом ее разбить на необходимое количество конечных элементов.

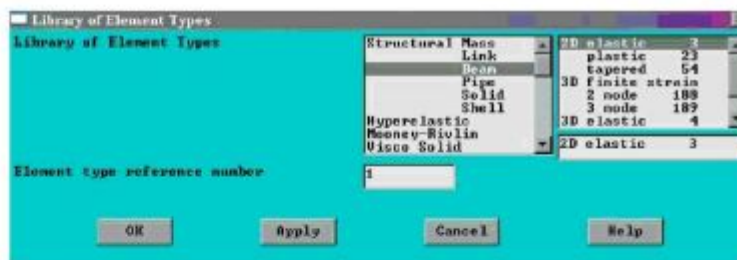
Шаг 1: Задание типа и параметров конечных элементов.

В этой задаче мы будем использовать балочный конечный элемент Beam 3.

1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Preprocessor** (Препроцессор) > **Element Type** (Тип элемента) > **Add/Edit/Delete** (Добавить/Редактировать/Удалить)
2. Нажмите **Add...** для добавления типа элемента.



3. В библиотеке выберете семейство **Beam**.
4. Из этого семейства выберете **2D elastic** элемент (Beam 3).
5. Нажмите **OK**.



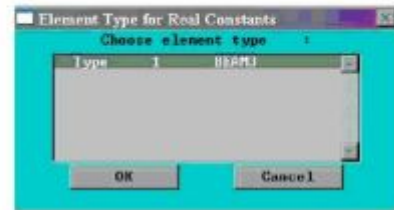
Шаг 2: Выбор действительных параметров элементов.

На этом этапе необходимо задать характеристики поперечного сечения балки.

1. **Main Menu** > **Preprocessor** > **Real Constants** (действительные параметры) > **Add/Edit/Delete**

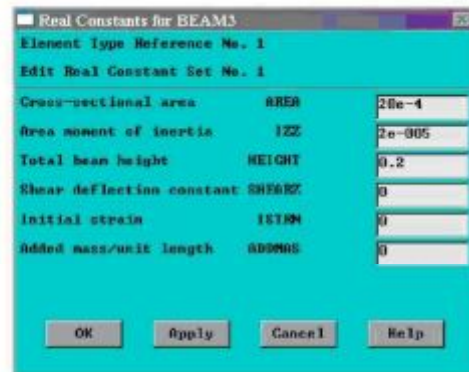


- Нажмите **Add** (добавить к существующему списку наборов параметров).
- Нажмите **OK**.



- В появившемся окне **Real Constants for BEAM3** необходимо заполнить поле

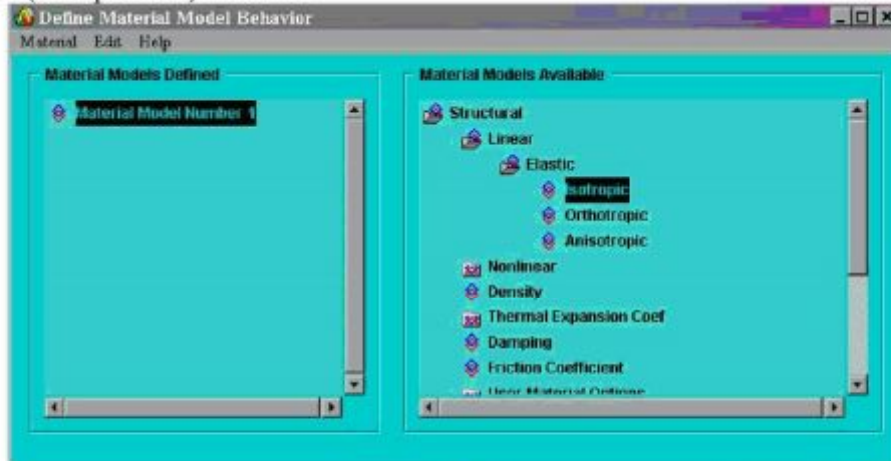
Cross-sectional area	AREA	20e-4
<i>(Площадь поперечного сечения равна $A=20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$)</i>		
Area moment of inertia	IZZ	2e-5
<i>(Осевой момент инерции относительно оси Z равен $I=2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$)</i>		
Total beam height	HEIGHT	0.2
<i>(Высота сечения балки равна $H=0.2 \text{ м}$)</i>		
- Нажмите **OK**.
- Нажмите **Close** для закрытия окна Real Constant.



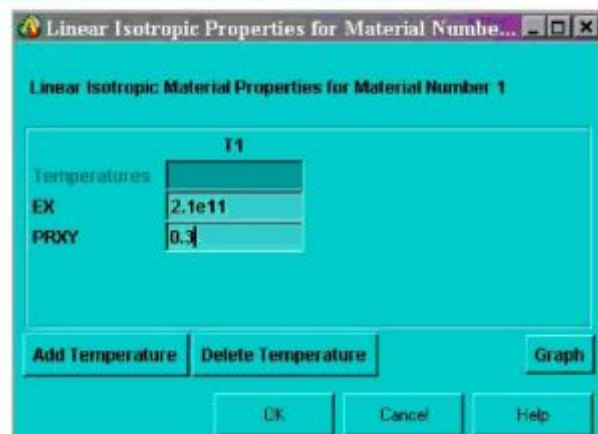
Шаг 3: Установка свойств материала.

В данном примере используется изотропный материал с постоянными свойствами.

- Main Menu** (Главное меню) > **Preprocessor** (Препроцессор) > **Material Props** (Свойства материала) > **Material Models** (модель материала)
- Дважды щелкните на **Structural** (Структурный), **Linear** (Линейный), **Elastic** (Упругий), **Isotropic** (Изотропный).



- Введите **2.1e11** для **EX** (Модуль упругости).
- Введите **0.3** для **PRXY** (Коэффициент Пуассона).
- Нажмите **OK**.



Шаг 4: Создание узлов.

1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Preprocessor** (Препроцессор) > **-Modeling** (Моделирование)- **Create** (Создать) > **- Nodes** (Узлы)- **In Active CS** (В текущей координатной системе)
2. Заполните поля появившегося диалогового окна
Node number (Номер узла) **1**
X, Y, Z Location in active CS **0** **0** **0**
(Координаты 1-го узла $X=0$; $Y=0$; $Z=0$)
3. **Apply** (Применить)
4. **Node number** (Номер узла) **2**
X, Y, Z Location in active CS **1** **0** **0**
(Координаты 2-го узла $X=1$ м; $Y=0$; $Z=0$)
5. **Apply** (Применить)
6. **Node number** (Номер узла) **3**
X, Y, Z Location in active CS **3** **0** **0**
(Координаты 3-го узла $X=3$ м; $Y=0$; $Z=0$)
7. **Apply** (Применить)
8. **Node number** (Номер узла) **4**
X, Y, Z Location in active CS **6** **0** **0**
(Координаты 4-го узла $X=6$ м; $Y=0$; $Z=0$)
9. **OK**
10. **Save_DB**

Шаг 5: Создание конечных элементов.

1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Preprocessor** (Препроцессор) > **-Modeling** (Моделирование)- **Create** (Создать) > **Elements** (Элементы) > **Thru Nodes** (По узлам)
2. Выберите курсором мышки узел **1** и **2** в графическом поле.
3. **Apply**.
4. Выберите курсором мышки узел **2** и **3** в графическом поле.
5. **Apply**.
6. Выберите курсором мышки узел **3** и **4** в графическом поле.
7. **OK**.
8. **Save_DB**

Шаг 6: Изменение параметров отображения.

Для удобства отобразим нумерацию узлов и элементов

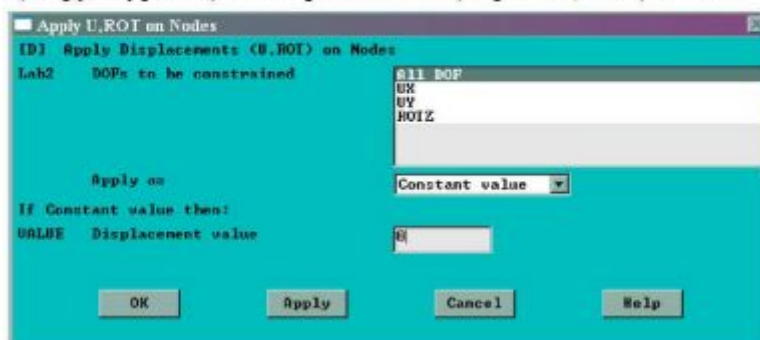
1. **Utility Menu** (меню Утилит) > **PlotCtrls** (Параметры отображения) > **Numbering** (Нумерация)
2. Установите маркер около пункта **Node numbers** (нумерация узлов).
3. В списке **Elem/Attrib numbering** выберите **Element numbers**.
4. Нажмите **OK**.
5. **Utility Menu** (меню Утилит) > **Plot** (Отображение) > **Elements** (Элементы).



Шаг 7: Задание граничных перемещений.

На этом этапе следует задать нулевое вертикальное перемещение 1-го и 3-го узла, а также нулевой угол поворота поперечного сечения балки в 1-м узле.

1. **Main Menu** (Главное меню) > **Solution** (Решение) > **-Loads** (Нагрузки) - **Apply** (Приложенные) > **-Structural** (Структурный) - **Displacement** (Перемещения) > **On Nodes** (В узлах)
2. Выберите узел **1**.
3. Нажмите **ОК** в **Picking Menu** (Меню выбора).
4. Выберите **All DOF** (перемещения по всем осям).
5. Введите **0** в **Value** (нулевые перемещения).
6. Нажмите **Apply**.
7. **SAVE_DB**.

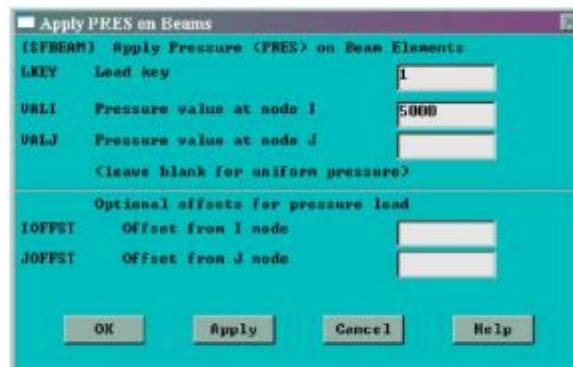


8. Выберите узел **3**.
9. Нажмите **ОК** в **Picking Menu** (Меню выбора).
10. Последовательно выберите **UX**, **UY** (перемещения по осям X и Y).
11. Введите **0** в **Value** (нулевые перемещения).
12. Нажмите **ОК**.
13. **SAVE_DB**.



Шаг 8: Приложение распределенной нагрузки.

1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Solution** (Решение) > **-Loads** (Нагрузки) - **Apply** (Приложенные) > **-Structural** (Структурный) - **Pressure** (Давление) > **On Beams** (На балку)
2. Выберите **1**-й элемент.
3. Нажмите **ОК**.
4. Введите значение распределенной нагрузки (распределенная нагрузка считается положительной, если действует в сторону балки)
Pressure value at node I **5000**
5. Нажмите **ОК**.

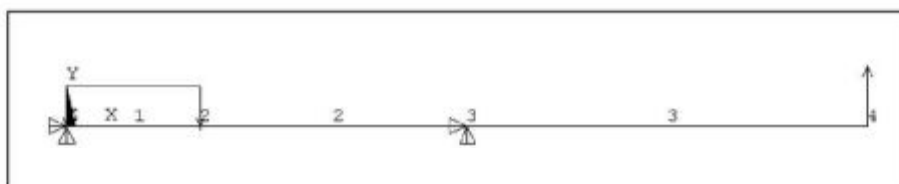
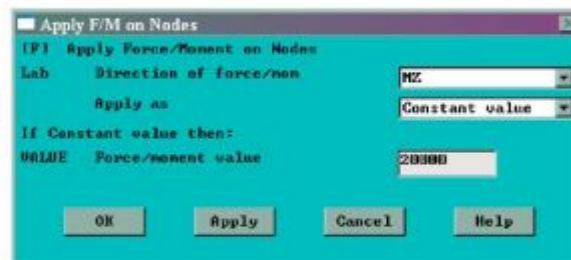


Шаг 9: Приложение сосредоточенной силы.

1. **Main Menu** (Главное Меню) > **Solution** (Решение) > **-Loads** (Нагрузки) - **Apply** (Приложенные) > **-Structural** (Структурный) - **Force/Moment** (Сила/Момент) > **On Nodes** (К узлам).
2. Выберите **4**-й узел.
3. Нажмите **ОК**.
4. Из списка **Direction of force/mom** (Направление силы/момента) выберите **FY**.



- В поле **Force/moment value** (*Значение силы/момента*) введите заданную силу **10000** (сила направленная вверх считается положительной).
- Нажмите **Apply** (Применить).
- Выберите 2-й узел.
- Нажмите **OK**.
- Из списка **Direction of force/mom** выберите **MZ**
- В поле **Force/moment value** введите значение заданного момента **20000** (положительным направлением момента считается по часовой стрелке)
- Нажмите **OK**.

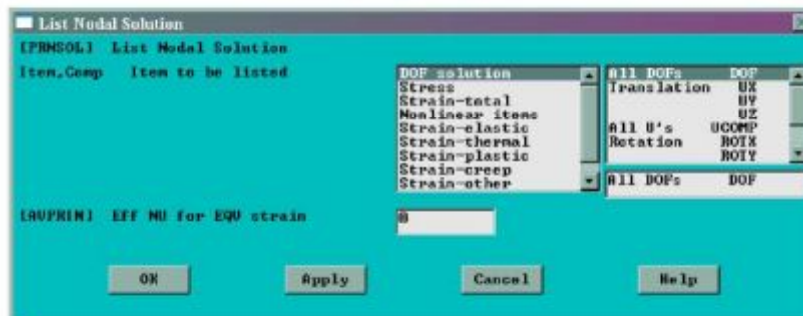


Шаг 9: Расчет.

- Main Menu** (*Главное меню*) > **Solution** (*Решение*) > **-Solve** (*Счет*) - **Current LS** (*Текущая задача*)
- Изучите содержание появившегося окна и закройте его **File** > **Close**.
- Нажмите **OK** для запуска счета.
- Нажмите кнопку **Close** в появившемся желтом информационном окне **Solution is done** (*Расчет выполнен*).

Шаг 10: Просмотр перемещений и углов поворота поперечных сечений в узлах.

- Main Menu** > **General Postproc** > **List Results** (*Список результатов*) > **Nodal Solution** . . . (*Расчет в узлах*)
- Выберите **DOF solution** (*Расчет степеней свободы*) в левом scroll-меню.
- Выберите **ALL DOFs** (*Все степени свободы*) в правом scroll-меню.
- Нажмите **OK**.
- Сравните полученные перемещения и углы поворота поперечных сечений со значениями, найденными вручную.
- Нажмите **File** > **Close** для закрытия окна.



Шаг 11: Просмотр реакций в закреплениях.

- Main Menu** > **General Postproc** > **List Results** (*Список результатов*) > **Reaction Solu** (*Расчет реакций*)
- Нажмите **OK**
- Сравните полученные реакции со значениями, найденными вручную.
- Нажмите **File** > **Close** для закрытия окна.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: практическое руководство. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
2. Бутенко Ю.И., Засядько Н.А. и др. Строительная механика: учебник для вузов. – К.: «Выща школа», 1989. – 479 с.
3. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975.-541с.
4. Галагер Р. Метод конечных элементов: Основы. – М.: Мир, 1984. – 428с.
5. Баженов В.А., Сахаров А.С., Мельниченко Г.И., Черный С.М. Метод конечных элементов в задачах строительной механики. Киев, 1994 (КГТУСА)-368с.
6. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. Под ред. А.Ф.Смирнова ч.1 и 2.-М.-Стройиздат, 1976.
7. Турчак Л.И. Основы численных методов. Москва «Наука», 1982,-318с.
8. Крылов О.В. Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчетах (учебное пособие для ВУЗов). – М.: Радио и связь, 2002. – 104с.