

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ  
ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ**

Методические указания к расчетно-графической работе для студентов  
строительных специальностей

Изложена методика расчета тонкостенных стержней открытого профиля при стесненном кручении.

Излагается последовательность выполнения расчетной работы, приводятся варианты расчетных схем и исходных данных задач, приведены примеры выполнения контрольных работ и список рекомендуемой литературы.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>1. Общие положения</b> .....	5
1.1. Исходные данные .....	5
1.2. Состав задания .....	7
1.3. Теоретические сведения о тонкостенном стержне .....	8
<b>2. Порядок выполнения задания</b> .....	10
2.1. Определение положения центра тяжести, величины главных центральных моментов инерции поперечного сечения.....	10
2.2. Определение координат центра изгиба .....	11
2.3. Построение эпюры главных секториальных координат поперечного сечения .....	12
2.4. Вычисление момента инерции при чистом кручении $J_K$ , секториального момента инерции $J_{\omega_0}$ , изгибно-крутильной характеристики $K$ .....	13
2.5. Определение начальных параметров внутренних усилий и деформаций при стесненном кручении тонкостенных стержней открытого профиля .....	13
2.6. Построение эпюр внутренних усилий .....	16
2.7. Вычисление нормальных напряжений .....	16
2.8. Вычисление касательных напряжений .....	16
<b>3. Примеры выполнения задания</b> .....	17
3.1. Пример №1 .....	17
3.2. Пример №2 .....	27
3.3. Пример №3 .....	39
<b>Библиографический список</b> .....	49

## **ВВЕДЕНИЕ**

Методические указания содержат задания, краткие теоретические сведения, примеры расчета тонкостенных стержней открытого профиля при стеснённом кручении.

Вариант задания для выполнения работы выдается преподавателем.

Перед выполнением задания студентам необходимо изучить теоретическую часть методических указаний и ознакомиться с алгоритмом расчёта.

Целью работы является освоение сложного теоретического материала, закрепление этих знаний практическими расчетами тонкостенных стержней открытого профиля при стеснённом кручении с изгибом.

Данные методические указания рекомендованы для студентов второго курса строительных специальностей.

# 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

## 1.1. Исходные данные

Исходные данные для выполнения курсовой работы приведены в табл. 1-4.

Таблица 1

Геометрические характеристики сечения

Первая Цифра варианта	Тип сечения	B, см	H, см	$\delta$ , см
1	A	24	30	1,4
2	B	32	40	1,6
3	A	40	44	1,8
4	B	28	36	2,0
5	C	24	30	1,4
6	D	24	30	1,6
7	C	32	40	1,8
8	D	32	40	2,0
9	A	32	40	1,4
10	C	40	44	1,6
11	A	46	44	1,8
12	C	28	36	2,0
13	B	24	30	1,4
14	D	40	44	1,6
15	B	40	44	1,8
16	D	28	36	2,0
17	A	28	36	1,4
18	B	24	36	1,6
19	C	46	40	1,8
20	D	46	40	2,0
21	D	30	40	1,4
22	C	28	40	1,6
23	B	30	40	1,8
24	A	30	40	2,0
25	C	30	40	1,4

В табл. 1 даны геометрические характеристики поперечного сечения балки, а также тип сечения.

## Нагрузки, действующие на балку

Вторая Цифра варианта	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	L, м	Тип балки
1	18	-	-	-	6	I
2	-	-	8	-	7	II
3	30	-	-	-	8	I
4	-	-	-	10	5	II
5	-	26	-	-	4	I
6	-	-	12	-	4	II
7	-	28	-	-	5	I
8	28	-	-	-	6	II
9	-	-	15	-	7	I
10	26	-	-	-	8	II
11	-	-	15	-	8	I
12	-	-	-	12	7	II
13	-	18	-	-	6	I
14	-	30	-	-	5	II
15	-	-	10	-	4	I
16	-	-	-	15	4	II
17	-	-	-	8	5	I
18	18	-	-	-	6	II
19	30	-	-	-	7	I
20	-	28	-	-	8	II
21	-	26	-	-	8	I
22	-	-	10	-	7	II
23	-	-	12	-	6	I
24	-	-	-	8	5	II
25	-	-	-	15	4	I

В табл. 2 даны нагрузки, действующие на балку, а также длина и тип закрепления балки.

Типы поперечных сечений балки

Тип поперечного сечения балки			
A	B	C	D

В табл. 3 даны типы поперечных сечений балки, а также расположение нагрузки. Тип поперечного сечения выбирается в соответствии с табл. 1.

Таблица 4

Типы закреплений балки

Тип закрепления балки	
I	II

В табл. 4 даны типы закреплений балки, а также расположение нагрузки. Тип закрепления балки выбирается в соответствии с табл. 2.

## 1.2. Состав задания

Для заданного типа поперечного сечения балки:

- определить положение центра тяжести;
- построить эпюры линейных координат;
- вычислить осевые моменты инерции сечения;
- построить эпюру секториальных координат;
- определить положение центра изгиба;

- построить эпюру главных секториальных координат;
- вычислить главный секториальный момент инерции сечения;
- вычислить момент инерции сечения при чистом кручении;
- вычислить изгибно-крутильную характеристику сечения.

Для заданной расчетной схемы балки:

- записать аналитические выражения для определения внутренних усилий;
- рассчитать значения внутренних усилий для характерных сечений (опорные сечения, середина и четверти пролета);
- построить эпюры внутренних усилий ( $Q_x$  или  $Q_y$ ,  $M_x$  или  $M_y$ ,  $B_\omega$ ,  $M_\omega$ ,  $M_0$ ,  $M_z$ ).

Для опасных сечений балки:

- определить величину нормальных и касательных напряжений;
- построить эпюры нормальных и касательных напряжений (от воздействия каждого внутреннего усилия и результирующие).

### 1.3. Теоретические сведения о тонкостенном стержне

*Тонкостенным стержнем* называется такой стержень, у которого один из линейных размеров поперечного сечения мал по сравнению с остальными.

Тонкостенные стержни могут быть закрытого профиля (трубчатое, коробчатое сечения) и открытого профиля (тавр, двутавр, швеллер и т.п.).

В стержнях открытого профиля наиболее отчетливо проявляются особенности их расчета.

Тонкостенные стержни как расчетная схема сохраняют в себе основные свойства бруса при работе на растяжение, сжатие, изгиб и кручение. Вместе с тем тонкостенный стержень в силу своих геометрических особенностей проявляет свойства, существенно отличающие его от стержней сплошного сечения:

- не всегда применим принцип Сен-Венсана с равномерным распределением усилий в сечении стержня;
- не соблюдается закон плоских сечений, происходит депланация за счет продольных перемещений точек поперечного сечения.

Условия крепления стержня влияют на депланацию поперечного сечения. Если депланация в различных поперечных сечениях различна, деформация называется *стесненным кручением* (рис.1).

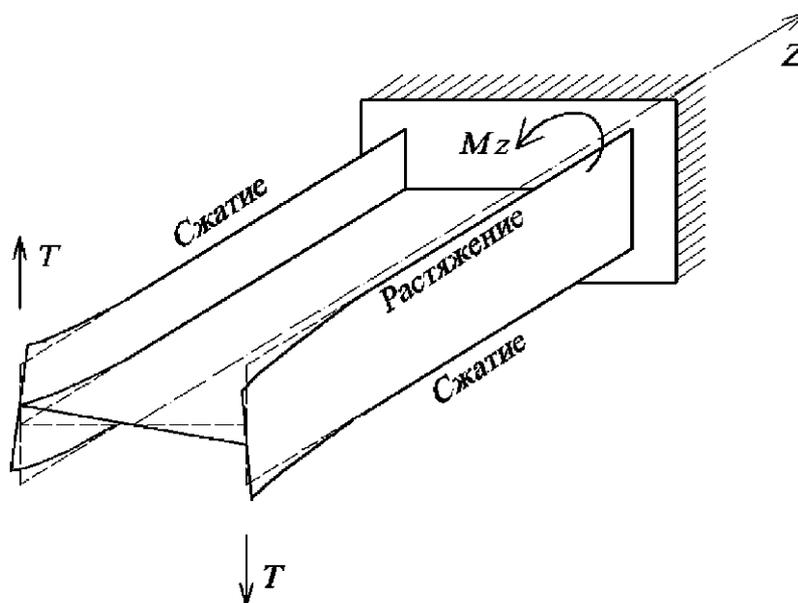


Рис. 1. Стесненное кручение стержня

Депланация приводит к возникновению не только касательных, но и нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня. Таким образом, при стесненном кручении тонкостенных стержней открытого профиля одновременно имеют место деформации кручения и изгиба.

Внутренние усилия в поперечных сечениях при стесненном кручении приводятся:

- к самоуравновешенной системе двух пар равных продольных сил  $N$  (рис. 2), которые называются *бимоментом*  $B_{\omega}$ ;
- к изгибающему моменту  $M_x$  или  $M_y$ ;
- к поперечной силе  $Q_y$  или  $Q_x$ ;
- к моменту чистого кручения  $M_0$  (рис. 3, а);
- к изгибно-крутящему моменту  $M_{\omega}$  (рис. 3, б).

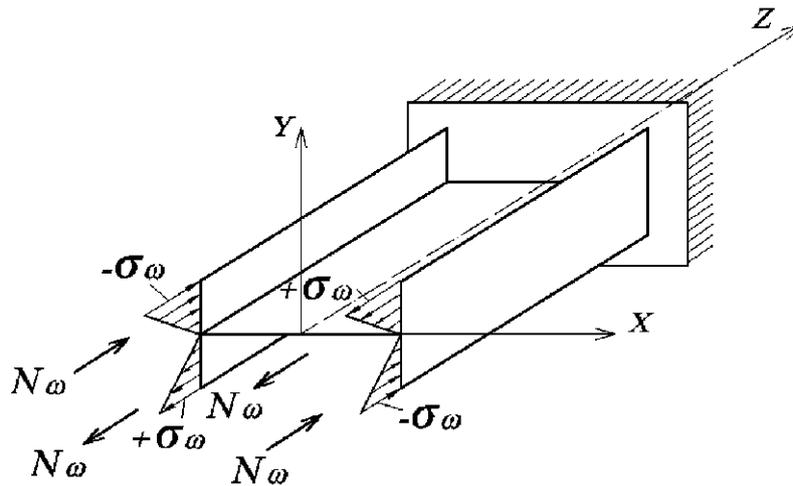


Рис. 2. Образование бимомента

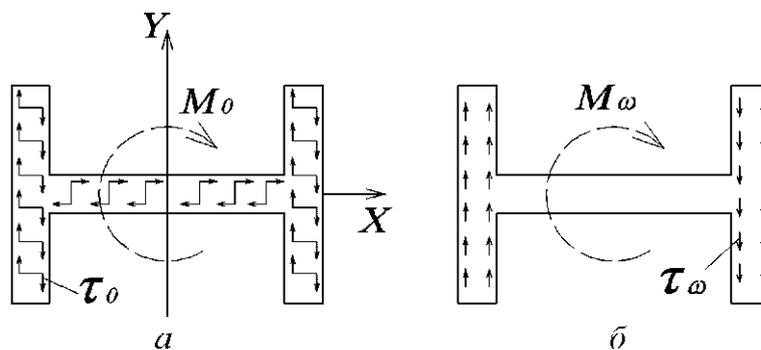


Рис. 3. Внутренние усилия:  
 а – момент чистого кручения; б – момент изгибно-крутящий

## 2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

### 2.1. Определение положения центра тяжести, величины главных центральных моментов инерции поперечного сечения

Координаты центра тяжести поперечного сечения относительно произвольных осей  $X_1$  и  $Y_1$  определяются по формулам

$$x_0 = \frac{S_{y_1}}{A}; \quad y_0 = \frac{S_{x_1}}{A},$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения;  $S_{y_1}$  – статический момент площади относительно оси  $Y_1$ ;  $S_{x_1}$  – статический момент площади относительно оси  $X_1$ .

$$A = \sum_{i=1}^n A_i; S_{y_1} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i; S_{x_1} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i.$$

Для определения главных центральных моментов инерции поперечного сечения  $J_x$  и  $J_y$  необходимо выполнить построение эпюр линейных координат  $X$  и  $Y$  в главных центральных осях сечения.

Вычисление  $J_x$  и  $J_y$  для тонкостенных стержней выполняется перемножением эпюр линейных координат с учетом толщины элементов поперечного сечения по правилу Верещагина:

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_l y^2 \cdot \delta \cdot dl; J_y = \int_A x^2 \cdot dA = \int_l x^2 \cdot \delta \cdot dl.$$

## 2.2. Определение координат центра изгиба

*Центром изгиба* называется такая точка, через которую должна проходить плоскость действия внешних сил, чтобы балка испытывала только деформацию изгиба (не подвергалась кручению).

Координаты центра изгиба  $A$  определяются по формулам

$$\alpha_x = \frac{S_{\omega_B x}}{J_x}; \alpha_y = -\frac{S_{\omega_B y}}{J_y},$$

где  $S_{\omega_B y}$  – секториально-линейный статический момент сечения относительно оси  $Y$ ;  $S_{\omega_B x}$  – секториально-линейный статический момент сечения относительно оси  $X$ .

$S_{\omega_B x}$  и  $S_{\omega_B y}$  вычисляются перемножением эпюр линейных координат с эпюрой секториальных координат  $\omega_B$  по правилу Верещагина с учетом толщины элементов поперечного сечения:

$$S_{\omega_B x} = \int_A \omega_B \cdot y \cdot dA = \int_l \omega_B \cdot y \cdot \delta \cdot dl; S_{\omega_B y} = \int_A \omega_B \cdot x \cdot dA = \int_l \omega_B \cdot x \cdot \delta \cdot dl.$$

Секториальная координата определяется по формуле

$$\omega_B = \int_0^l r dl.$$

Секториальная координата  $\omega_B$  представляет собой удвоенную площадь сектора  $M_0 B M_1$ , образованную поворотом радиуса-вектора  $r$

относительно полюса  $B$  от начального положения  $BM_0$  до  $BM_1$  (рис.4).

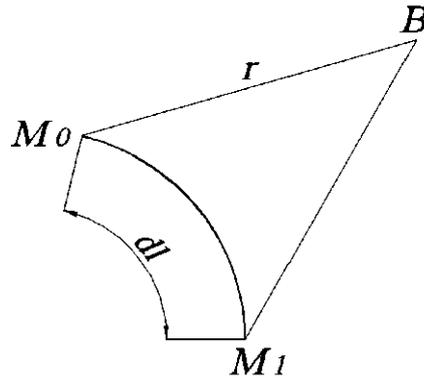


Рис. 4. Нахождение секториальной координаты

Если поворот радиуса-вектора  $r$  вокруг полюса  $B$  от точки начала отсчета  $M_0$  к точке  $M_1$  осуществляется против хода часовой стрелки, то секториальная координата положительна. Для определения положения центра изгиба выполняется построение эпюры секториальных координат  $\omega_B$ . Полюс  $B$  и точку начала отсчета  $M_0$  располагают на контуре сечения по оси симметрии. Координаты центра изгиба откладываются от полюса  $B$ .

### 2.3. Построение эпюры главных секториальных координат поперечного сечения

Для построения эпюры главных секториальных координат  $\omega_0$  полюс располагают в центре изгиба  $A$ , точку отсчета  $M_0$  – на контуре сечения по оси симметрии.

Обязательной проверкой правильности вычисления координат центра изгиба является равенство нулю секториально-линейного статического момента  $S_{\omega_0 x}$  или  $S_{\omega_0 y}$ , который вычисляется перемножением эпюры главных секториальных координат  $\omega_0$  с соответствующей эпюрой линейных координат:

$$S_{\omega_0 x} = \int_A \omega_0 \cdot y \cdot dA = \int_0^l \omega_0 \cdot \delta \cdot y \cdot dl = 0;$$

$$S_{\omega_0 y} = \int_A \omega_0 \cdot x \cdot dA = \int_0^l \omega_0 \cdot \delta \cdot x \cdot dl = 0.$$

Погрешность вычислений не должна превышать 1‰.

## 2.4. Вычисление момента инерции при чистом кручении $J_K$ , секториального момента инерции $J_{\omega_0}$ , изгибно-крутильной характеристики $K$

Момент инерции чистого кручения определяется по формуле

$$J_K = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \delta_i^3}{3},$$

где  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от формы сечения;  $b_i$  – наибольший размер элемента сечения;  $\delta_i$  – толщина элемента сечения.

Для двутаврового сечения  $\alpha = 1,20$ ; для швеллера  $\alpha = 1,12$ ; для таврового сечения  $\alpha = 1,15$ .

Секториальный момент инерции вычисляется перемножением эпюры  $\omega_0$  с учетом толщины по правилу Верещагина:

$$J_{\omega_0} = \int_A \omega_0^2 \cdot dA = \int_l \omega_0^2 \cdot \delta \cdot dl.$$

Изгибно-крутильная характеристика

$$K = \sqrt{\frac{G \cdot J_K}{E \cdot J_{\omega_0}}},$$

где модуль упругости I рода  $E = 200$  ГПа; модуль упругости II рода  $G = 80$  ГПа.

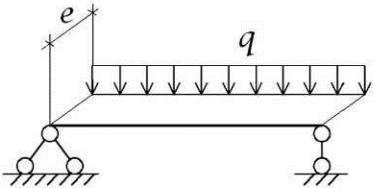
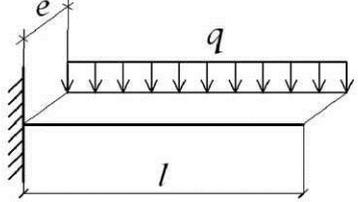
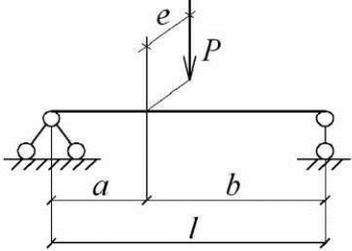
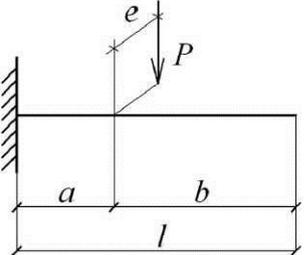
## 2.5. Определение начальных параметров внутренних усилий и деформаций при стесненном кручении тонкостенных стержней открытого профиля

Величина внутреннего усилия в сечении тонкостенного стержня определяется методом начальных параметров по табл. 5, где  $\theta_0$  – угол закручивания в начале координат;  $\theta_0'$  – относительный угол закручивания в начале координат;  $B_{\omega_0}$  – бимомент в начале координат;  $M_{K_0}$  – крутящий момент в начале координат. Начало координат располагается в левом сечении стержня.

Из четырех начальных параметров два неизвестных. Неизвестные начальные параметры определяются из условия крепления балки справа. Таким образом, при любом креплении однопролетной балки необходимо решать не более двух уравнений, вытекающих из условия опирания правого сечения балки (табл. 6).

Таблица 6

**Определение неизвестных начальных параметров**

№ схе- мы	Схема закрепления балки	Начальные параметры
1		$\theta_0 = 0; B_{\omega_0} = 0;$ $\theta'_0 = -\frac{m}{K \cdot GJ_K} \left( \frac{Kl}{2} - \frac{chKl - 1}{shKl} \right);$ $M_{K_0} = -\frac{ml}{2}$
2		$\theta_0 = 0; \theta'_0 = 0;$ $B_{\omega_0} = \frac{1}{K^2 chKl} (m \cdot (1 - chKl) - M_0 \cdot K \cdot shKl);$ $M_{K_0} = -\sum M_K$
3		$\theta_0 = 0; B_{\omega_0} = 0;$ $\theta'_0 = -\frac{P \cdot e}{GJ_K} \left( \alpha - \frac{shKl\alpha}{shKl} \right);$ $M_{K_0} = -\alpha \cdot P \cdot e;$ $\alpha = b/l$
4		$\theta_0 = 0; \theta'_0 = 0;$ $B_{\omega_0} = \frac{P \cdot e}{K} \left( \frac{shKl - shKl\alpha}{chKl} \right);$ $M_{K_0} = -P \cdot e;$ $\alpha = b/l$

## 2.6. Построение эпюр внутренних усилий

Аналитические выражения для определения внутренних усилий и деформаций можно составить по табл. 5.

По результатам вычислений выполняется построение эпюр внутренних усилий:  $Q_x$  или  $Q_y$  – поперечных сил;  $M_y$  или  $M_x$  – изгибающих моментов;  $B_{\omega_x}$  – бимомент;  $M_0$  – момента чистого кручения;  $M_{\omega}$  – изгибно-крутящего момента;  $M_K$  – внешнего крутящего момента.

## 2.7. Вычисление нормальных напряжений

В сечениях тонкостенных стержней открытого профиля при стесненном кручении возникают нормальные напряжения

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_x} + \sigma_{\omega} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J_y} \cdot X + \frac{M_x}{J_x} \cdot Y + \frac{B_{\omega}}{J_{\omega_0}} \cdot \omega_0,$$

где  $N$  – продольная сила в сечении;  $M_y$  – изгибающий момент относительно оси  $Y$ ;  $M_x$  – изгибающий момент относительно оси  $X$ ;  $B_{\omega}$  – изгибно-крутящий бимомент;  $A$  – площадь поперечного сечения;  $J_x$  – момент инерции относительно оси  $X$ ;  $J_y$  – момент инерции относительно оси  $Y$ ;  $J_{\omega_0}$  – секториальный момент инерции;  $X, Y$  – эпюры линейных координат;  $\omega_0$  – эпюра главных секториальных координат.

## 2.8. Вычисление касательных напряжений

Касательные напряжения при стесненном кручении тонкостенных стержней определяются выражением

$$\tau = \tau_{yz} + \tau_{xz} + \tau_{M_{\omega}} + \tau_{M_0} = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{J_x \cdot \delta} + \frac{Q_x \cdot S_y^{omc}}{J_y \cdot \delta} + \frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega}^{omc}}{J_{\omega_0} \cdot \delta} + \frac{M_0}{J_K} \cdot \delta,$$

где  $Q_x$  – поперечная сила по направлению оси  $X$ ;  $Q_y$  – поперечная сила по направлению оси  $Y$ ;  $M_0$  – момент при чистом кручении;  $M_{\omega}$  – изгибно-крутящий момент;  $J_K$  – момент инерции сечения при чистом кручении;  $J_{\omega}$  – секториальный момент инерции;  $S_x^{omc}$  – эпюра

статического момента отсеченной части сечения относительно оси  $X$ ;  
 $S_y^{omc}$  – эпюра статического момента отсеченной части сечения  
 относительно оси  $Y$ ;  $S_\omega^{omc}$  – площадь отсеченной части эпюры главных  
 секториальных координат.

Для пояснения теории расчета тонкостенных стержней далее  
 приведено несколько примеров.

### 3. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

#### 3.1. Пример №1

##### 3.1.1. Исходные данные

Таблица 7

Исходные данные

$B$ , см	30
$H$ , см	40
$\delta$ , см	2
$q$ , кН/м	15
$L$ , м	4
$E$ , ГПа	200
$G$ , ГПа	80

В табл. 7 приведены исходные данные для примера №1. На рис. 5  
 и 6 даны поперечное сечение и расчетная схема рассматриваемого  
 стержня.

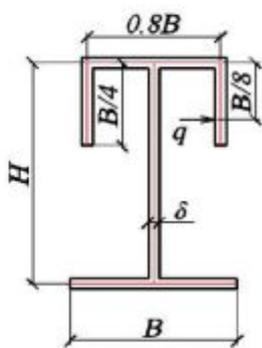


Рис. 5.  
 Поперечное  
 сечение

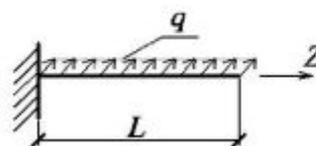


Рис. 6. Расчетная  
 схема

### 3.1.2. Определение положения центра тяжести, величины главных центральных моментов инерции поперечного сечения

Площадь поперечного сечения

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = 4 \cdot 15 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 248 \text{ см}^2.$$

Статический момент площади относительно оси  $X_1$

$$S_{x_1} = \int_A y dA = 40 \cdot 2 \cdot 20 + 24 \cdot 2 \cdot 40 + 15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 32,5 = 5470 \text{ см}^3.$$

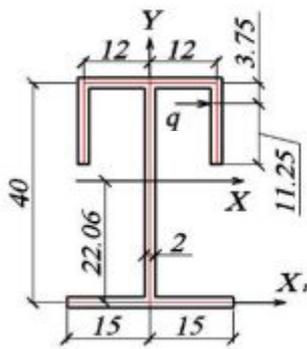


Рис. 7.

Координаты центра тяжести

Координаты центра тяжести (рис. 7)

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{5470}{248} = 22,06 \text{ см};$$

$$x_0 = 0 \text{ см}.$$

Моменты инерции относительно центральных осей (вычисляются при помощи эюр линейных координат рис. 8 и 9)

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_l y^2 \delta \cdot dl =$$

$$= 2(17,94^2 \cdot 24 + \frac{17,94^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 17,94 +$$

$$+ \frac{2 \cdot 15}{6} (2 \cdot 17,94^2 + 2 \cdot 2,94^2 + 2 \cdot 17,94 \cdot 2,94) +$$

$$+ \frac{22,06^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 22,06 + 22,06 \cdot 30 \cdot 22,06) = 63317,90 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \int_l x^2 \delta \cdot dl = 2 \cdot (2 \cdot 12^2 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{12^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 + 2 \cdot \frac{15^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15) =$$

$$= 15444 \text{ см}^4.$$

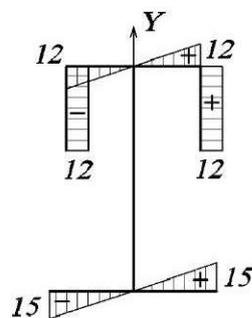


Рис.8. Эюра X, см

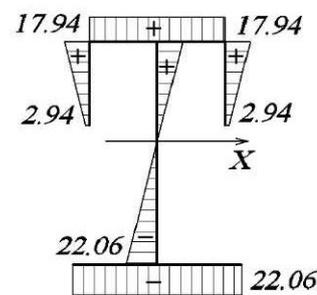


Рис.9. Эюра Y, см

### 3.1.3. Определение координат центра изгиба

Для определения центра изгиба строим эпюру секториальных координат (рис. 10) с произвольным полюсом  $B$  и началом отсчета  $M_0$ .  $B$  и  $M_0$  располагаем на контуре по оси симметрии сечения.

Секториальную координату определяем по формуле

$$\omega_B = \int_0^l r dl.$$

$$\omega_{B_1} = 0 \text{ см}^2; \quad \omega_{B_2} = -40 \cdot 12 = -480 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_3} = \omega_{B_2} + (-12 \cdot 15) = -480 - 180 = -660 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_4} = 40 \cdot 12 = 480 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_5} = \omega_{B_4} + 12 \cdot 15 = 480 + 180 = 660 \text{ см}^2.$$

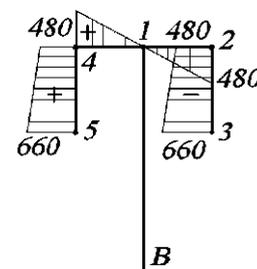


Рис. 10.  
Эпюра  $\omega_B$ ,  $\text{см}^2$

Секториально-линейный статический момент относительно оси  $Y$  вычисляем перемножением эпюр  $\omega_B$  и  $X$  по формуле

$$S_{\omega_{By}} = \int_A \omega_B \cdot x \cdot dA = \int_l \omega_B \cdot x \cdot \delta \cdot dl.$$

$$S_{\omega_{By}} = -2 \cdot 2 \frac{480 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 - 12 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{480 + 660}{2} = -502560 \text{ см}^5.$$

Определяем координаты центра изгиба

$$a_y = -\frac{S_{\omega_{By}}}{J_y} = \frac{502560}{15444} = 32,54 \text{ см},$$

$a_y$  откладываем от полюса  $B$  по оси  $Y$ , получаем центр изгиба  $A$  (рис. 11).

### 3.1.4. Построение эпюры главных секториальных координат поперечного сечения

$$\omega_{0_1} = 0 \text{ см}^2; \quad \omega_{0_2} = -7,46 \cdot 12 = -89,52 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_3} = \omega_{0_2} - 12 \cdot 15 = -89,52 - 180 = -269,52 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_4} = 0 \text{ см}^2; \quad \omega_{0_5} = 32,54 \cdot 15 = 488,1 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_6} = 7,46 \cdot 12 = 89,52 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_7} = \omega_{0_6} + 12 \cdot 15 = 89,52 + 180 = 269,52 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_8} = -32,54 \cdot 15 = -488,1 \text{ см}^2.$$

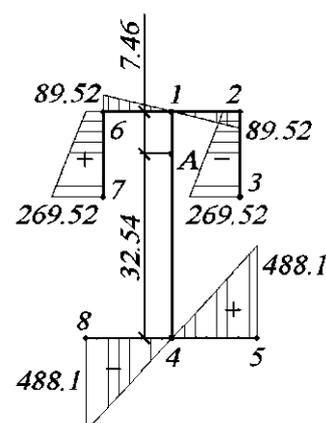


Рис. 11. Эпюра  $\omega_0$ ,

Проверка правильности определения положения центра изгиба:

$$S_{\omega_0, y} = \int_0^l \omega_0 \cdot \delta \cdot x \cdot dl = 2 \cdot 2 \left( \frac{488,1 \cdot 15}{2} \right) \left[ \frac{2}{3} \cdot 15 \right] - 2 \cdot 2 \left( \frac{89,52 \cdot 12}{2} \right) \left[ \frac{2}{3} \cdot 12 \right] - 2 \cdot 2 \left( \frac{89,52 + 269,52}{2} \cdot 15 \right) [12] = -146442,24 + 146430 = -12,24 \text{ см}^5.$$

$$\Delta = \frac{12,24 \cdot 100\%}{146430} = 0,008\% < 1\%.$$

Эюра  $\omega_0$  построена правильно, положение центра изгиба верное.

3.1.5. Вычисление момента инерции при чистом кручении  $J_K$ , секториального момента инерции  $J_{\omega_0}$ , изгибно-крутильной характеристики  $K$

$$J_K = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \delta_i^3}{3}.$$

Для двутаврового сечения  $\alpha = 1,2$ .

$$J_K = 1,2 \cdot \frac{2^3}{3} \cdot (2 \cdot 15 + 24 + 40 + 30) = 396,8 \text{ см}^4 = 396,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_{\omega_0} = \int_l \delta \cdot \omega_0^2 dl = 2 \cdot 2 \left[ \frac{488,1 \cdot 15}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 488,1 + \frac{89,52 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 89,52 + \frac{15}{6} (2 \cdot 89,52^2 + 2 \cdot 269,52^2 + 2 \cdot 89,52 \cdot 269,52) \right] = 6988698,4 \text{ см}^6;$$

$$K = \sqrt{\frac{G \cdot J_K}{E \cdot J_{\omega_0}}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 396,8}{200 \cdot 6988698,4}} = 0,0048 \text{ см}^{-1} = 0,48 \text{ м}^{-1}.$$

3.1.6. Определение неизвестных начальных параметров

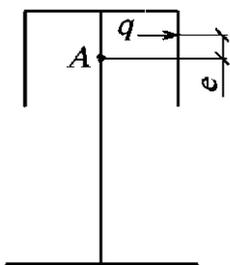


Рис.12. Нахождение эксцентриситета

На рис.12 показан эксцентриситет  $e$ .

$$\begin{aligned} z = 0; & & z = L; \\ \theta_0 = 0; & & B_{\omega_L} = 0; \\ \theta'_0 = 0; & & M_{K_L} = 0. \\ M_{K_0} \neq 0; & & \\ B_{\omega_0} \neq 0. & & \end{aligned}$$

$$m = q \cdot e,$$

где  $e = 40 - 32,54 - 3,75 = 3,71$  см;

$$m = 15 \cdot 3,71 \cdot 10^{-2} = 0,5565 \text{ кН} \cdot \text{м/м};$$

$$M_{K_0} = -m \cdot L = -15 \cdot 3,71 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = -2,226 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При  $z = L$  по табл. 5

$$B_{\omega_L} = B_{\omega_0} \cdot chKz + M_{K_0} \frac{shKz}{K} + \frac{m}{K^2} (chKz - 1) = 0;$$

$$\begin{aligned} B_{\omega_0} &= -\frac{M_{K_0} \cdot shKL}{K \cdot chKL} - \frac{m}{K^2 \cdot chKL} (chKL - 1) = \\ &= \frac{q \cdot e}{K^2 \cdot chKL} (KL \cdot shKL - chKL + 1) = \\ &= \frac{15 \cdot 3,71 \cdot 10^{-2}}{0,48^2 \cdot 3,4838} \cdot (0,48 \cdot 4 \cdot 3,3372 - 3,4838 + 1) = 2,72 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

### 3.1.7. Определение ординат для построения эюры бимоментов $B_{\omega}$

По табл. 5

$$\begin{aligned} B_{\omega_z} &= B_{\omega_0} \cdot chKz + M_{K_0} \cdot \frac{shKz}{K} + \frac{m}{K^2} \cdot (chKz - 1) = \\ &= 2,72 \cdot chKz - 2,226 \cdot \frac{shKz}{0,48} + \frac{0,5565}{0,48^2} \cdot (chKz - 1). \end{aligned}$$

С шагом в 1 м длины балки определяем

$$B_{\omega_0} = 2,72 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\begin{aligned} B_{\omega_1} &= 2,72 \cdot 1,1174 - \frac{2,226}{0,48} \cdot 0,4986 + \frac{0,5565}{0,48^2} \cdot (1,1174 - 1) = \\ &= 1,011 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \end{aligned}$$

$$B_{\omega_2} = 2,72 \cdot 1,4973 - 4,64 \cdot 1,1144 + 2,45 \cdot (1,4973 - 1) = 0,106 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\begin{aligned} B_{\omega_3} &= 2,72 \cdot 2,2288 - 4,64 \cdot 1,9919 + 2,45 \cdot (2,2288 - 1) = \\ &= -0,207 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \end{aligned}$$

$$B_{\omega_4} = 2,72 \cdot 3,4838 - 4,64 \cdot 3,3372 + 2,45 \cdot (3,4838 - 1) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

3.1.8. Определение ординат для построения эпюры изгибно-крутящих моментов  $M_{\omega}$

По табл. 5

$$M_{\omega_z} = B_{\omega_0} \cdot K \cdot shKz + M_{K_0} \cdot chKz + \frac{m}{K} \cdot shKz = 2,72 \cdot 0,48 \cdot shKz - 2,226 \cdot chKz + \frac{0,5565}{0,48} \cdot shKz = 1,31 \cdot shKz - 2,226 \cdot chKz + 1,18 \cdot shKz;$$

$$M_{\omega_0} = -2,226 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_1} = 1,31 \cdot 0,4986 - 2,226 \cdot 1,1174 + 1,18 \cdot 0,4986 = -1,258 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_2} = 1,31 \cdot 1,1144 - 2,226 \cdot 1,4973 + 1,18 \cdot 1,1144 = -0,586 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_3} = 1,31 \cdot 1,9919 - 2,226 \cdot 2,2288 + 1,18 \cdot 1,9919 = -0,051 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_4} = 1,31 \cdot 3,3372 - 2,226 \cdot 3,4838 + 1,18 \cdot 3,3372 = 0,471 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3.1.9. Определение ординат для построения эпюры моментов чистого кручения  $M_{0z}$

По табл.5

$$M_{0z} = GJ_K \cdot \theta'_z = -B_{\omega_0} \cdot \frac{K \cdot shKz}{GJ_K} \cdot GJ_K + \frac{M_{K_0} \cdot GJ_K}{GJ_K} \cdot (1 - chKz) + m \cdot \left( z - \frac{shKz}{K} \right) = -2,72 \cdot 0,48 \cdot shKz - 2,226 \cdot (1 - chKz) + 0,5565 \cdot \left( z - \frac{shKz}{0,48} \right);$$

$$M_{0_0} = 0;$$

$$M_{0_1} = -2,72 \cdot 0,48 \cdot 0,4986 - 2,226 \cdot (1 - 1,1174) + 0,5565 \cdot \left( 1 - \frac{0,4986}{0,48} \right) = -0,411 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{0_2} = -2,72 \cdot 0,48 \cdot 1,1144 - 2,226 \cdot (1 - 1,4973) + 0,5565 \cdot \left( 2 - \frac{1,1144}{0,48} \right) = -0,527 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{0_3} = -2,72 \cdot 0,48 \cdot 1,9919 - 2,226 \cdot (1 - 2,2288) + 0,5565 \cdot \left( 3 - \frac{1,9919}{0,48} \right) = -0,505 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{0,4} = -2,72 \cdot 0,48 \cdot 3,3372 - 2,226 \cdot (1 - 3,4838) + 0,5565 \cdot \left( 4 - \frac{3,3372}{0,48} \right) = -0,471 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3.1.10. *Определение ординат для построения эпюры внешних крутящих моментов  $M_{Kz}$*

$$M_{Kz} = M_{K_0} + m \cdot z = -2,226 + 0,5565 \cdot z;$$

$$M_{K_1} = -2,226 + 0,5565 = -1,6695 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{K_2} = -2,226 + 1,113 = -1,113 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{K_3} = -2,226 + 1,6695 = -0,5565 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{K_4} = 0.$$

Результаты вычислений внутренних усилий сводим в табл. 8.

Таблица 8

**Внутренние усилия**

$z$	$Kz$	$M_{Kz}$	$M_{0z}$	$B_{\omega z}$	$M_{\omega z}$	$shKz$	$chKz$
0	0	-2,226	0	2,72	-2,226	0	1
1	0,48	-1,6695	-0,411	1,011	-1,258	0,4986	1,1174
2	0,96	-1,113	-0,527	0,106	-0,586	1,1144	1,4973
3	1,44	-0,5565	-0,505	-0,207	-0,051	1,9919	2,2288
4	1,92	0	-0,471	0	0,471	3,3372	3,4838

### 3.1.11. Построение эюр внутренних усилий

$M_y, Q_x, M_{0z}, M_{\omega z}, B_{\omega z}, M_{Kz}$  (рис. 13)

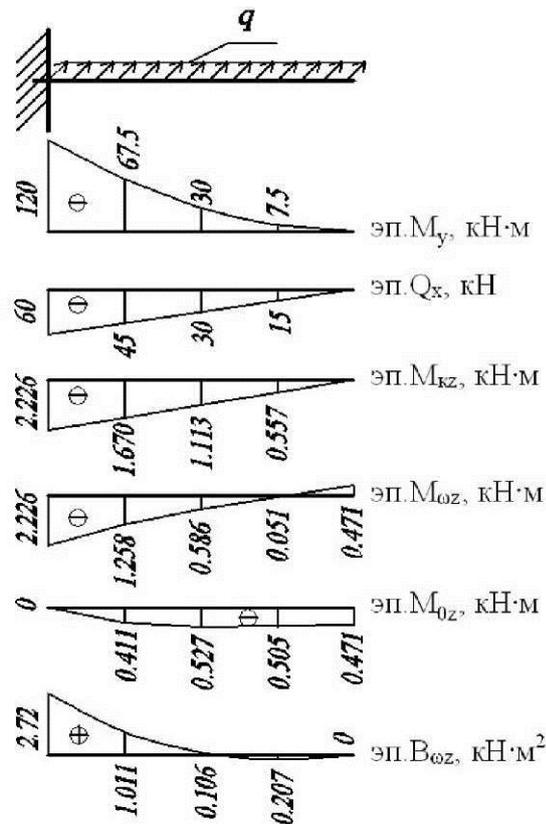


Рис. 13. Эюры внутренних усилий

### 3.1.12. Построение эюры нормальных напряжений в опасном сечении стержня

Нормальные напряжения

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_\omega = \frac{M_y}{J_y} \cdot x + \frac{B_\omega}{J_\omega} \cdot \omega_0.$$

По эюрам  $M_y$  и  $B_\omega$  опасным сечением в консольной балке является опорное.

$$M_y = 120 \text{ кН}\cdot\text{м} = -120 \cdot 10^{-3} \text{ МН}\cdot\text{м};$$

$$B_\omega = 2,72 \text{ кН}\cdot\text{м}^2 = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ МН}\cdot\text{м}^2;$$

$$\sigma_u = \frac{-120 \cdot 10^{-3}}{15444 \cdot 10^{-8}} X \cdot 10^{-2} = -7,77 \cdot X \text{ (рис. 14, а);}$$

$$\sigma_\omega = \frac{2,72 \cdot 10^{-3}}{6988698,4 \cdot 10^{-12}} \omega_0 \cdot 10^{-4} = 0,0389 \cdot \omega_0 \text{ (рис. 14, б).}$$

Эпюры  $\sigma_u$  и  $\sigma_\omega$  построены с помощью эпюр  $X$  и  $\omega_0$ . Эпюру  $\sigma$  получаем суммированием эпюр  $\sigma_u$  и  $\sigma_\omega$  (рис. 14, в).

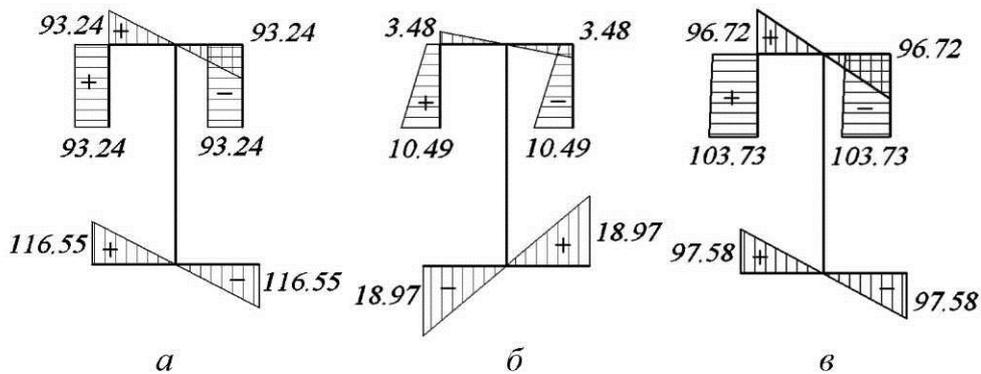


Рис. 14. Эпюры нормальных напряжений:  
 а – эпюра  $\sigma_u$ , МПа; б – эпюра  $\sigma_\omega$ , МПа; в – эпюра  $\sigma$ , МПа

### 3.1.13. Построение эпюр касательных напряжений в опасном сечении стержня

Касательные напряжения

$$\tau = \tau_u + \tau_{M_\omega} + \tau_{M_0} = \frac{Q_x \cdot S_y^{omc}}{J_y \cdot \delta} + \frac{M_\omega \cdot S_\omega^{omc}}{J_\omega \cdot \delta} + \frac{M_0}{J_K} \delta.$$

По эпюрам  $Q_x, M_\omega, M_K$  опасным является опорное сечение.

Касательные напряжения от изгиба

$$\tau_u = \tau_{Q_y} = \frac{Q_x \cdot S_y^{omc}}{J_y \cdot \delta} = \frac{-60 \cdot 10^{-3}}{15444 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \cdot S_{y_i}^{omc} = -19425 \cdot S_{y_i}^{omc},$$

где  $S_{y_i}^{omc}$  – статический момент отсеченной части

сечения относительно оси  $Y$ .  $S_{y_i}^{omc}$  считается с

помощью рис. 15.

$$S_{y_1}^{omc} = S_{y_5}^{omc} = 0;$$

$$S_{y_2}^{omc} = 15 \cdot 2 \cdot 12 = 360 \text{ см}^3 = 360 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$S_{y_3}^{omc} = S_{y_2}^{omc} + 12 \cdot 2 \cdot 6 = 504 \text{ см}^3 = 504 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$S_{y_4}^{omc} = 15 \cdot 2 \cdot 7,5 = 225 \text{ см}^3 = 225 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Остальные участки симметричны найденным.

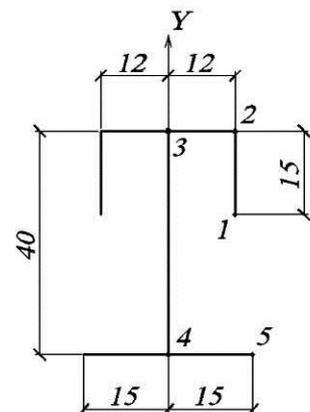


Рис. 15. Расчетные точки

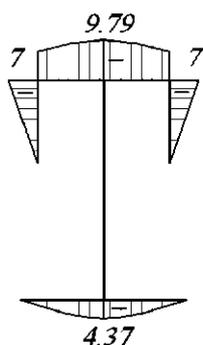


Рис. 16.

Эпюра  $\tau_u$ , МПа

Касательные напряжения от изгиба (рис. 16)

$$\tau_{Q_1} = \tau_{Q_5} = 0;$$

$$\tau_{Q_2} = -19425 \cdot 360 \cdot 10^{-6} = -7 \text{ МПа};$$

$$\tau_{Q_3} = -19425 \cdot 504 \cdot 10^{-6} = -9,79 \text{ МПа};$$

$$\tau_{Q_4} = -19425 \cdot 225 \cdot 10^{-6} = -4,37 \text{ МПа}.$$

Определяем напряжения от изгибно-крутящего момента.

$$\tau_{M_\omega} = \frac{M_\omega \cdot S_{\omega_i}^{омс}}{J_\omega \cdot \delta} = \frac{-2,226 \cdot 10^{-3} \cdot S_{\omega_i}^{омс}}{6988698,4 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = -15925,712 \cdot S_{\omega_i}^{омс}.$$

Эпюра  $S_{\omega_i}^{омс}$  (рис. 18) строится с помощью эпюры  $\omega_0$  (рис. 17).

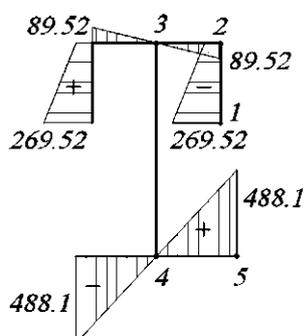


Рис. 17. Эпюра  $\omega_0$ , см<sup>2</sup>

$$S_{\omega_i}^{омс} = \int_{A^{омс}} \omega \cdot dA = \int_{l^{омс}} \omega_0 \cdot \delta \cdot dl;$$

$$S_{\omega_i}^{омс} = S_{\omega_5}^{омс} = 0;$$

$$S_{\omega_2}^{омс} = \frac{89,52 + 269,52}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 5385,6 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega_3}^{омс} = S_{\omega_2}^{омс} + \frac{89,52 \cdot 12}{2} \cdot 2 = 6459,8 \text{ см}^4;$$

$$S_{\omega_4}^{омс} = \frac{488,1 \cdot 15}{2} \cdot 2 = 7321,5 \text{ см}^4.$$

Касательные напряжения от изгибно-крутящего момента (рис. 19)

$$\tau_{M_{\omega_1}} = \tau_{M_{\omega_5}} = 0 \text{ МПа}; \tau_{M_{\omega_2}} = -15925,7 \cdot 5385,6 \cdot 10^{-8} = -0,86 \text{ МПа};$$

$$\tau_{M_{\omega_3}} = -15925,7 \cdot 6459,8 \cdot 10^{-8} = -1,03 \text{ МПа};$$

$$\tau_{M_{\omega_4}} = -15925,7 \cdot 7321,5 \cdot 10^{-8} = -1,17 \text{ МПа}.$$

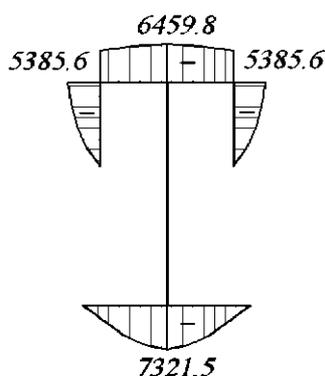


Рис. 18. Эпюра  $S_{\omega}^{омс}$ , см<sup>3</sup>

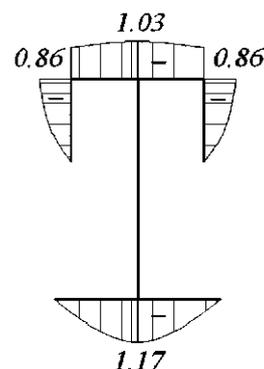


Рис. 19. Эпюра  $\tau_\omega$ , МПа

Находим напряжения от чистого кручения в опорном сечении  $\tau_{M_0} = \frac{M_0}{J_K} \cdot \delta = 0$ , так как в опорном сечении  $M_0 = 0$ .

Эпюру  $\tau$  получаем суммированием эпюр  $\tau_u$ ,  $\tau_\omega$  и  $\tau_0$  (рис.20).

### 3.1.14. Нахождение угла закручивания

При  $z = L$

$$\begin{aligned} \theta_L &= B_{\omega_0} \cdot \frac{1 - chKL}{GJ_K} + M_{K_0} \cdot \frac{L - shKL/K}{GJ_K} + \frac{m}{GJ_K} \cdot \left( \frac{L^2}{2} - \frac{chKL}{K^2} + \frac{1}{K^2} \right) = \\ &= 2,72 \cdot \frac{1 - 3,48}{80 \cdot 10^6 \cdot 396,8 \cdot 10^{-8}} - 2,23 \cdot \frac{4 - 3,34/0,48}{80 \cdot 10^6 \cdot 396,8 \cdot 10^{-8}} - \\ &\quad - \frac{0,56}{80 \cdot 10^6 \cdot 396,8 \cdot 10^{-8}} \cdot \left( \frac{4^2}{2} - \frac{3,48}{0,48^2} + \frac{1}{0,48^2} \right) = \\ &= -0,0210 + 0,0210 + 0,0048 = 0,0048 \text{ рад.} \end{aligned}$$

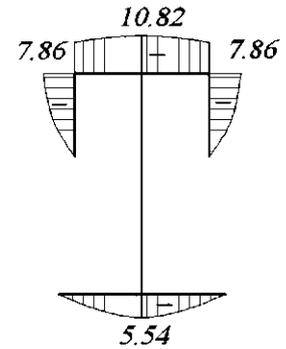


Рис. 20.  
Эпюра  $\tau$ , МПа

## 3.2. Пример №2

### 3.2.1. Исходные данные

Таблица 9

Исходные данные

$B$ , см	40
$H$ , см	44
$\delta$ , см	1,6
$q$ , кН/м	15
$L$ , м	8
$E$ , ГПа	200
$G$ , ГПа	80

В табл. 9 приведены исходные данные для примера №2. На рис. 21 и 22 даны поперечное сечение и расчетная схема рассматриваемого стержня.

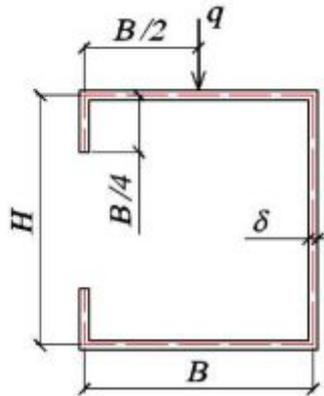


Рис. 21. Поперечное сечение

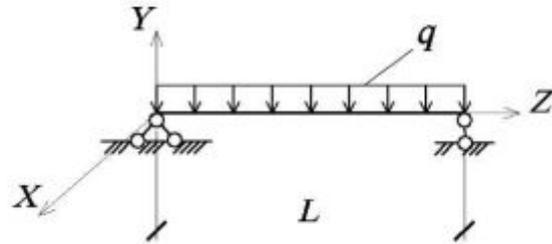


Рис. 22. Расчетная схема

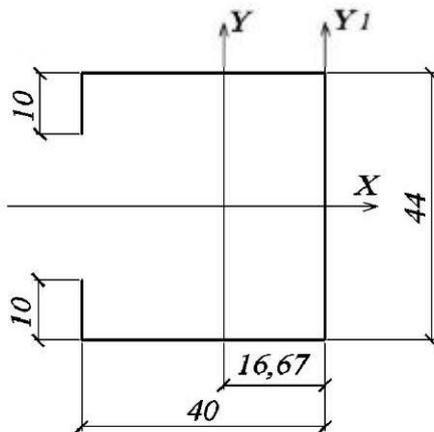


Рис. 23. Координаты центра тяжести

### 3.2.2. Определение положения центра тяжести, величины главных центральных моментов инерции поперечного сечения

Площадь поперечного сечения

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = 2 \cdot 1,6 \cdot 40 + 2 \cdot 1,6 \cdot 10 + 44 \cdot 1,6 = 230,4 \text{ см}^2.$$

Статический момент площади

относительно оси  $Y_1$

$$S_{y_1} = \int_A x \cdot dA = -2 \cdot 1,6 \cdot 40 \cdot 20 - 2 \cdot 1,6 \cdot 10 \cdot 40 = -3840 \text{ см}^3.$$

Координата центра тяжести (рис.23)

$$x_0 = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{-3840}{230,4} = -16,67 \text{ см};$$

$$y_0 = 0 \text{ см}.$$

Для тонкостенных стержней моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$

вычисляем перемножением эпюр линейных координат по правилу Верещагина (при помощи эпюр линейных координат рис. 24 и 25):

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_l y^2 \cdot \delta \cdot dl;$$

$$J_x = 1,6 \cdot 2 \cdot \left( 22 \cdot 40 \cdot 22 + \frac{22 \cdot 22}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 22 + \frac{10}{6} \cdot (2 \cdot 22^2 + 2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 22) \right) = 82824,53 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \int_A x^2 \cdot dA = \int_l x^2 \cdot \delta \cdot dl;$$

$$J_y = 1,6 \cdot (16,67 \cdot 44 \cdot 16,67 + 2 \cdot \frac{16,67^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 16,67 + \\ + 2 \cdot \frac{23,33^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 23,33 + 2 \cdot 23,33 \cdot 10 \cdot 23,33) = 55466,67 \text{ см}^4.$$

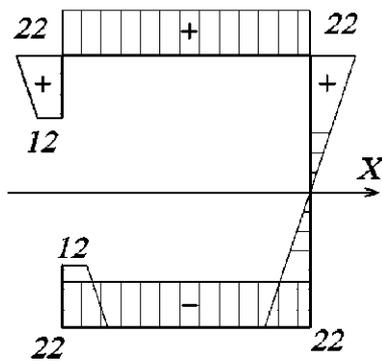


Рис. 24. Эпюра Y, см

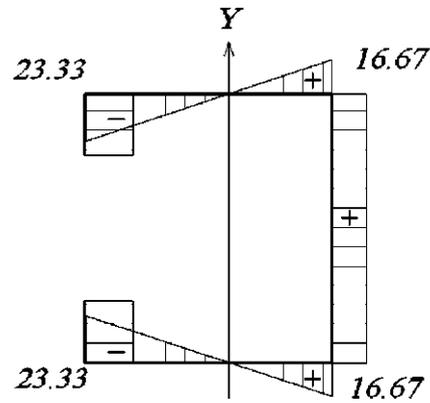


Рис. 25. Эпюра X, см

### 3.2.3. Определение координат центра изгиба

Для определения центра изгиба строим эпюру секториальных координат с произвольным полюсом B (рис. 26).

Секториальную координату определяем по формуле

$$\omega_B = \int_0^l r dl;$$

$$\omega_{B_1} = 0 \text{ см}^2; \omega_{B_2} = 22 \cdot 40 = 880 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_3} = \omega_{B_2} + 40 \cdot 10 = 1280 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_4} = 0 \text{ см}^2; \omega_{B_5} = -22 \cdot 40 = -880 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_6} = \omega_{B_5} - 40 \cdot 10 = -1280 \text{ см}^2.$$

Секториально-линейный статический момент относительно оси X вычисляем перемножением эпюр  $\omega_B$  и Y по формуле

$$S_{\omega_B X} = \int_A \omega_B \cdot y \cdot dA = \int_l \omega_B \cdot y \cdot \delta \cdot dl;$$

$$S_{\omega_B X} = 1,6 \cdot 2 \cdot \left( \frac{880 \cdot 40}{2} \cdot 22 + \frac{10}{6} \cdot (2 \cdot 880 \cdot 22 + 2 \cdot 1280 \cdot 12 + 880 \cdot 12 + \right. \\ \left. + 1280 \cdot 22) \right) = 1815893,33 \text{ см}^5.$$

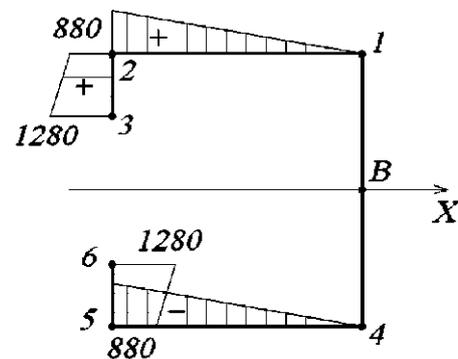


Рис. 26. Эпюра  $\omega_B$ , см<sup>2</sup>

Определяем координаты центра изгиба

$$a_x = \frac{S_{\omega_B x}}{J_x} = \frac{1815893,33}{82824,53} = 21,92 \text{ см},$$

$a_x$  откладываем от полюса  $B$  по оси  $X$ , получаем центр изгиба  $A$  (рис. 27).

### 3.2.4. Построение эпюры главных секториальных координат поперечного сечения

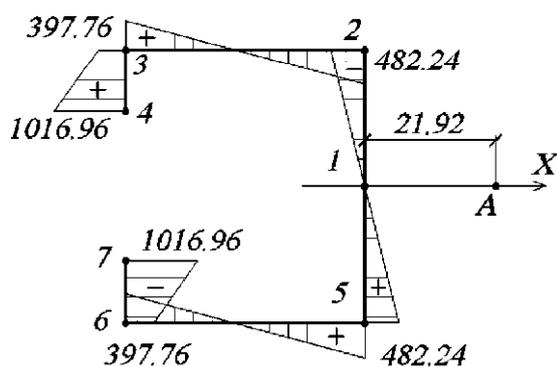


Рис. 27. Эпюра  $\omega_0$ , см<sup>2</sup>

Эпюру главных секториальных координат строим, располагая полюс в центре изгиба  $A$ .

$$\omega_{01} = 0 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{02} = -21,92 \cdot 22 = -482,24 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{03} = \omega_{02} + 22 \cdot 40 = 397,76 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{04} = \omega_{03} + 61,92 \cdot 10 =$$

$$= 1016,96 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{05} = 21,92 \cdot 22 = 482,24 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{06} = \omega_{05} - 22 \cdot 40 = -397,76 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{07} = \omega_{06} - 61,92 \cdot 10 = -1016,96 \text{ см}^2.$$

Проверка правильности определения положения центра изгиба:

$$S_{\omega_0 x} = \int_0^l \omega_0 \cdot \delta \cdot y \cdot dl = -1,6 \cdot 2 \cdot \frac{482,24 \cdot 22}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 22 +$$

$$+ 2 \cdot 1,6 \cdot \frac{40}{6} (2 \cdot 397,76 \cdot 22 - 2 \cdot 482,24 \cdot 22 - 22 \cdot 482,24 + 397,76 \cdot 22) +$$

$$+ 2 \cdot 1,6 \cdot \frac{10}{6} \cdot (2 \cdot 397,76 \cdot 22 + 2 \cdot 1016,96 \cdot 12 + 397,76 \cdot 12 +$$

$$+ 1016,96 \cdot 22) = -118947,84 - 248964,44 + 368291,84 = 379,56 \text{ см}^5.$$

$$\Delta = \frac{379,56 \cdot 100\%}{368291,84} = 0,1\% < 1\%.$$

Эпюра  $\omega_0$  построена правильно, положение центра изгиба верное.

3.2.5. Вычисление момента инерции при чистом кручении  $J_K$ , секториального момента инерции  $J_{\omega_0}$ , изгибно-крутильной характеристики  $K$

$$J_K = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \delta_i^3}{3}$$

Для данного сечения  $\alpha = 1,12$ .

$$J_K = 1,12 \cdot \frac{1,6^3}{3} (2 \cdot 10 + 44 + 2 \cdot 40) = 220,2 \text{ см}^4;$$

$$J_{\omega_0} = \int_l \delta \cdot \omega_0^2 dl = 2 \cdot 1,6 \cdot \frac{482,24 \cdot 22}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 482,24 +$$

$$+ \frac{40}{6} \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot (2 \cdot 397,76^2 + 2 \cdot 482,24^2 - 2 \cdot 397,76 \cdot 482,24) +$$

$$+ \frac{10}{6} \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot (2 \cdot 397,76^2 + 2 \cdot 1016,96^2 + 2 \cdot 397,76 \cdot 1016,96) =$$

$$= 30979831,5 \text{ см}^6;$$

$$K = \sqrt{\frac{G \cdot J_K}{E \cdot J_{\omega_0}}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 220,2}{200 \cdot 30979831,5}} = 0,0017 \text{ см}^{-1} = 0,17 \text{ м}^{-1}.$$

3.2.6. Определение неизвестных начальных параметров

На рис.28 показан эксцентриситет  $e$   
 $e = 21,92 + 20 = 41,92 \text{ см};$

$$m = q \cdot e = 15 \cdot 41,92 \cdot 10^{-2} =$$

$$= 6,288 \text{ кН} \cdot \text{м/м}.$$

Начальные параметры для способа закрепления, показанного на рис. 29.

$$z = 0; \quad z = L;$$

$$\theta_0 = 0; \quad \theta_L = 0;$$

$$B_{\omega_0} = 0; \quad B_{\omega_L} = 0.$$

$$\theta_0' \neq 0;$$

$$M_{K_0} = \frac{m \cdot L}{2}.$$

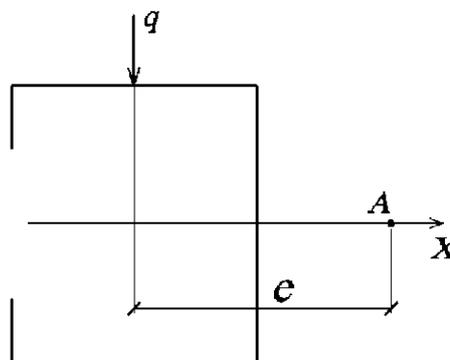


Рис. 28. Нахождение эксцентриситета

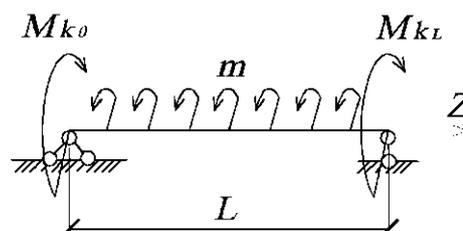


Рис. 29. Расчетная схема

При  $z = L$  по табл. 5

$$B_{\omega_L} = -\theta'_0 \cdot \frac{GJ_K \cdot shKL}{K} + M_{K_0} \cdot \frac{shKL}{K} - \frac{m}{K^2} \cdot (chKL - 1) = 0;$$

$$\theta'_0 = \left( M_{K_0} \cdot \frac{shKL}{K} - \frac{m}{K^2} (chKL - 1) \right) \cdot \frac{K}{GJ_K \cdot shKL} =$$

$$= \frac{M_{K_0}}{GJ_K} - \frac{m \cdot (chKL - 1)}{K \cdot GJ_K \cdot shKL} = \frac{25,152}{8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7}} -$$

$$\frac{6,288 \cdot 1,0764}{0,17 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7} \cdot 1,8198} = 0,143 - 0,124 = 0,019.$$

### 3.2.7. Определение ординат для построения эпюры бимоментов $B_{\omega}$

По табл. 5

$$B_{\omega_z} = -\theta'_0 \cdot \frac{GJ_K \cdot shKz}{K} + M_{K_0} \cdot \frac{shKz}{K} - \frac{m}{K^2} \cdot (chKz - 1) =$$

$$= -0,019 \cdot \frac{8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7} \cdot shKz}{0,17} + 25,152 \cdot \frac{shKz}{0,17} - \frac{6,288}{0,17^2} (chKz - 1) =$$

$$= -19,688 \cdot shKz + 147,953 \cdot shKz - 217,578 \cdot (chKz - 1);$$

$$B_{\omega_0} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$B_{\omega_1} = -19,688 \cdot 0,171 + 147,953 \cdot 0,171 - 217,578 \cdot (1,014 - 1) = 18,579;$$

$$B_{\omega_2} = -19,688 \cdot 0,347 + 147,953 \cdot 0,347 - 217,578 \cdot (1,058 - 1) = 31,758;$$

$$B_{\omega_3} = -19,688 \cdot 0,532 + 147,953 \cdot 0,532 - 217,578 \cdot (1,133 - 1) = 39,373;$$

$$B_{\omega_4} = -19,688 \cdot 0,734 + 147,953 \cdot 0,734 - 217,578 \cdot (1,240 - 1) = 41,827.$$

Ввиду симметрии нагрузки эпюра  $B_{\omega_z}$  симметрична, поэтому для ее построения достаточно определить ординаты для половины балки.

### 3.2.8. Определение ординат для построения эпюры изгибно-крутящих моментов $M_{\omega}$

По табл.5

$$M_{\omega_z} = -\theta'_0 \cdot GJ_K \cdot chKz + M_{K_0} \cdot chKz - \frac{m}{K} \cdot shKz =$$

$$\begin{aligned}
&= -0,019 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7} \cdot chKz + 25,152 \cdot chKz - \frac{6,288}{0,17} \cdot shKz = \\
&= -3,347 \cdot chKz + 25,152 \cdot chKz - 36,988 \cdot shKz ; \\
M_{\omega_0} &= -3,347 \cdot 1 + 25,152 \cdot 1 = 21,805 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_{\omega_1} &= -3,347 \cdot 1,014 + 25,152 \cdot 1,014 - 36,988 \cdot 0,171 = 15,804 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_{\omega_2} &= -3,347 \cdot 1,058 + 25,152 \cdot 1,058 - 36,988 \cdot 0,347 = 10,261 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_{\omega_3} &= -3,347 \cdot 1,133 + 25,152 \cdot 1,133 - 36,988 \cdot 0,532 = 5,014 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_{\omega_4} &= -3,347 \cdot 1,240 + 25,152 \cdot 1,240 - 36,988 \cdot 0,734 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.
\end{aligned}$$

Для определения ординат эюры  $M_{\omega_x}$  составляем уравнения для половины балки, так как при симметричной нагрузке эюра  $M_{\omega_x}$  кососимметрична.

### 3.2.9. Определение ординат для построения эюры моментов чистого кручения $M_{0z}$

По табл.5

$$\begin{aligned}
M_{0z} &= GJ_K \cdot \theta'_z = \theta'_0 \cdot chKz \cdot GJ_K + \frac{M_{K_0} \cdot (1 - chKz) \cdot GJ_K}{GJ_K} - \\
&- \frac{m \cdot GJ_K}{GJ_K} \left( z - \frac{shKz}{K} \right) = -0,019 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 22,02 \cdot 10^{-7} \cdot chKz + \\
&+ 25,152 \cdot (1 - chKz) - 6,288 \cdot \left( z - \frac{shKz}{0,17} \right) = 3,347 \cdot chKz + \\
&+ 25,152 \cdot (1 - chKz) - 6,288 \cdot (z - 5,88 \cdot shKz); \\
M_{0_0} &= 3,347 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_{0_1} &= 3,347 \cdot 1,014 + 25,152 \cdot (1 - 1,014) - 6,288 \cdot (1 - 5,88 \cdot 0,171) = \\
&= 3,060 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_{0_2} &= 3,347 \cdot 1,058 + 25,152 \cdot (1 - 1,058) - 6,288 \cdot (2 - 5,88 \cdot 0,347) = \\
&= 2,315 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_{0_3} &= 3,347 \cdot 1,133 + 25,152 \cdot (1 - 1,133) - 6,288 \cdot (3 - 5,88 \cdot 0,532) = \\
&= 1,274 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
M_{0_4} &= 3,347 \cdot 1,240 + 25,152 \cdot (1 - 1,240) - 6,288 \cdot (4 - 5,88 \cdot 0,734) = \\
&= 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.
\end{aligned}$$

3.2.10. Определение ординат для построения эпюры  
внешних крутящих моментов  $M_{Kz}$

$$M_{K_0} = M_{K_0} - m \cdot z = \frac{q \cdot e \cdot L}{2} - q \cdot e \cdot z = q \cdot e \cdot \left( \frac{L}{2} - z \right) =$$

$$= 15 \cdot 41,92 \cdot 10^{-2} \cdot (4 - z).$$

Результаты вычислений внутренних усилий сводим в табл.10.

Таблица 10

**Внутренние усилия**

$z$	$Kz$	$shKz$	$chKz$	$B_{\omega_z}$	$M_{Kz}$	$M_{0z}$	$M_{\omega_z}$
0	0	0	1	0	25,152	3,347	21,805
1	0,17	0,171	1,014	18,759	18,864	3,060	15,804
2	0,34	0,347	1,058	31,758	12,576	2,315	10,261
3	0,51	0,532	1,133	39,373	6,288	1,274	5,014
4	0,68	0,734	1,240	41,827	0	0	0
5	0,85	0,956	1,384	-39,373	-6,288	-1,274	-5,014
6	1,02	1,206	1,567	-31,758	-12,576	-2,315	-10,261
7	1,19	1,491	1,796	-18,759	-18,864	-3,060	-15,804
8	1,36	1,820	2,076	0	-25,152	-3,347	-21,805

Проверка:

$$M_{Kz} = M_{0z} + M_{\omega_z}.$$

### 3.2.11. Построение эюр внутренних усилий

$M_x, Q_y, M_{0z}, M_{\omega z}, B_{\omega z}, M_{Kz}$  (рис.30)

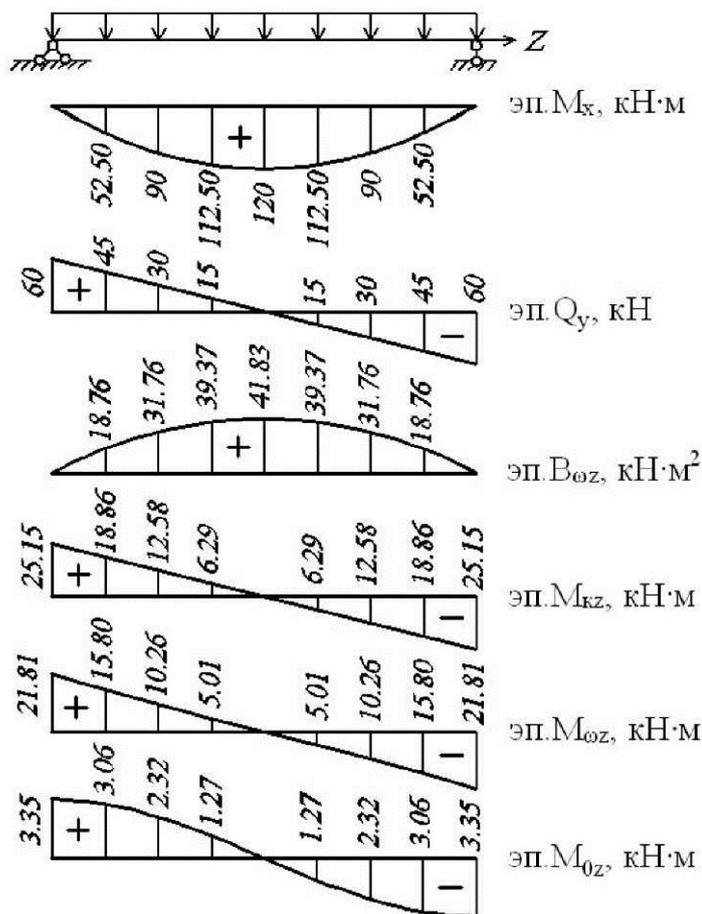


Рис.30. Эюры внутренних усилий

### 3.2.12. Построение эюры нормальных напряжений в опасном сечении стержня

Нормальные напряжения

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_\omega = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{B_\omega}{J_\omega} \cdot \omega_0.$$

По эюрам  $M_x$  и  $B_\omega$  опасным сечением является середина стержня.

$$M_x = 120 \text{ кН·м} = 120 \cdot 10^{-3} \text{ МН·м};$$

$$B_\omega = 41,827 \text{ кН·м}^2 = 41,827 \cdot 10^{-3} \text{ МН·м}^2;$$

$$J_x = 82824,53 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_\omega = 30979831,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^6;$$

$$\sigma_u = \frac{120 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{82824,53 \cdot 10^{-8}} Y = 1,45 \cdot Y \text{ (рис. 31, а);}$$

$$\sigma_\omega = \frac{41,827 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}}{30979831,5 \cdot 10^{-12}} \omega_0 = 0,135 \cdot \omega_0 \text{ (рис. 31, б).}$$

Эпюры  $\sigma_u$  и  $\sigma_\omega$  построены с помощью эпюр  $Y$  и  $\omega_0$ . Эпюру  $\sigma$  получаем суммированием эпюр  $\sigma_u$  и  $\sigma_\omega$  (рис. 31, в).

Наибольшие нормальные напряжения

$$\sigma = 137,3 - 17,4 = 119,9 \text{ МПа.}$$

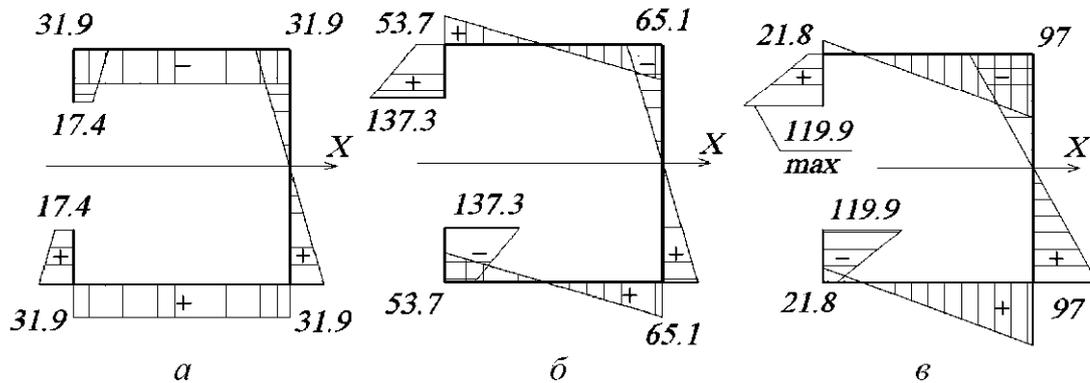


Рис.31. Эпюры нормальных напряжений:  
а – эпюра  $\sigma_u$ , МПа; б – эпюра  $\sigma_\omega$ , МПа; в – эпюра  $\sigma$ , МПа

### 3.2.13. Построение эпюр касательных напряжений в опасном сечении стержня

Касательные напряжения

$$\tau = \tau_u + \tau_{M_\omega} + \tau_{M_0} = \frac{Q_y \cdot S_{x_i}^{omc}}{J_x \cdot \delta} + \frac{M_\omega \cdot S_\omega^{omc}}{J_\omega \cdot \delta} + \frac{M_0}{J_K} \delta.$$

По эпюрам  $Q_x, M_\omega, M_K$  опасным является опорное сечение.

Находим касательные напряжения от изгиба (рис. 33).

$$\tau_u = \tau_{Q_y} = \frac{Q_y \cdot S_{x_i}^{omc}}{J_x \cdot \delta} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{82824,53 \cdot 10^{-8} \cdot 1,6 \cdot 10^{-2}} \cdot S_{x_i}^{omc} = 4527,64 \cdot S_{x_i}^{omc},$$

где  $S_{x_i}^{omc}$  - статический момент отсеченной части сечения

относительно оси  $X$ .  $S_{x_i}^{omc}$  считается с помощью рис. 32.

$$S_{x_1}^{omc} = 0 \text{ м}^3; S_{x_2}^{omc} = 10 \cdot 1,6 \cdot 17 = 272 \text{ см}^3 = 272 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$S_{x_3}^{omc} = S_{x_2}^{omc} + 40 \cdot 1,6 \cdot 22 = 1680 \text{ см}^3 = 1680 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$S_{x_4}^{omc} = S_{x_3}^{omc} + 22 \cdot 1,6 \cdot 11 = 2067,2 \text{ см}^3 = 2067,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Остальные ординаты симметричны найденным.

$$\tau_{Q_1} = 0 \text{ МПа}; \tau_{Q_2} = 4527,64 \cdot 272 \cdot 10^{-6} = 1,23 \text{ МПа};$$

$$\tau_{Q_3} = 4527,64 \cdot 1680 \cdot 10^{-6} = 7,61 \text{ МПа};$$

$$\tau_{Q_4} = 4527,64 \cdot 2067,2 \cdot 10^{-6} = 9,36 \text{ МПа}.$$

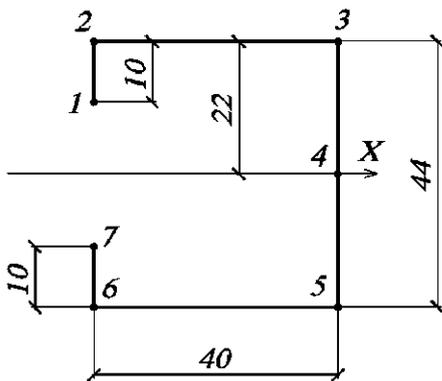


Рис. 32. Расчетные точки

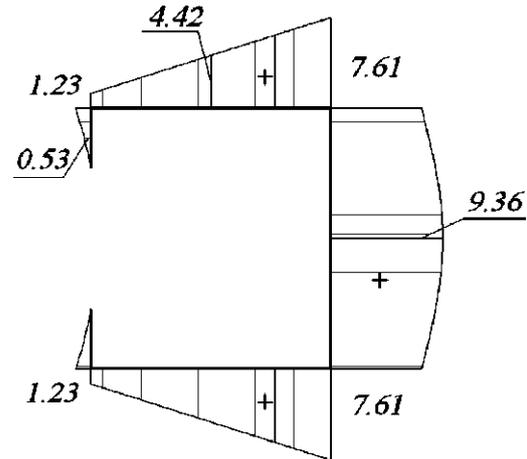


Рис. 33. Эпюра  $\tau_u$ , МПа

Находим напряжения от изгибно-крутящего момента (рис. 36).

$$\tau_{M_\omega} = \frac{M_\omega \cdot S_{\omega_i}^{omc}}{J_\omega \cdot \delta} = \frac{21,805 \cdot 10^{-3} \cdot S_{\omega_i}^{omc}}{30979831,5 \cdot 10^{-12} \cdot 1,6 \cdot 10^{-2}} = 43990,31 \cdot S_{\omega_i}^{omc}$$

Эпюра  $S_{\omega_i}^{omc}$  (рис. 35) строится с помощью эпюры  $\omega_0$  (рис. 34).

$$S_{\omega_i}^{omc} = \int_{A^{omc}} \omega \cdot dA = \int_{l^{omc}} \omega_0 \cdot \delta dl;$$

$$S_{\omega_1}^{omc} = 0 \text{ м}^4;$$

$$S_{\omega_2}^{omc} = \frac{1016,96 + 397,76}{2} \cdot 1,6 \cdot 10 = 11317,76 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$S_{\omega_3}^{omc} = S_{\omega_2}^{omc} + \frac{18,08 \cdot 397,76}{2} \cdot 1,6 = 17070,96 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$S_{\omega_4}^{omc} = S_{\omega_3}^{omc} - \frac{21,92 \cdot 482,24}{2} \cdot 1,6 = 8614,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$S_{\omega_5}^{omc} = S_{\omega_4}^{omc} - \frac{22 \cdot 482,24}{2} \cdot 1,6 = 126,98 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

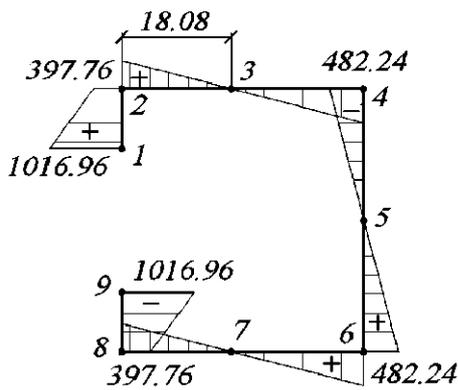


Рис. 34. Эпюра  $\omega_0$ ,  $\text{см}^2$

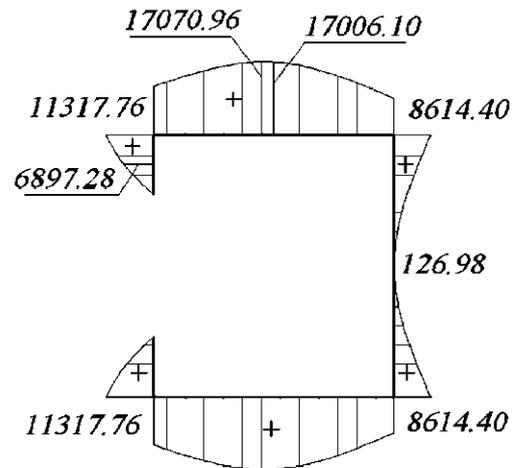


Рис.35. Эпюра  $S_{\omega}^{onc}$ ,  $\text{см}^3$

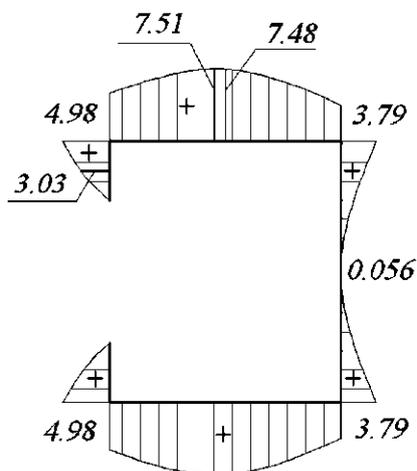


Рис. 36. Эпюра  $\tau_{\omega}$ , МПа

Касательные напряжения от изгибно-крутящего момента (рис. 36)

$$\tau_{M_{\omega 1}} = 0 \text{ МПа};$$

$$\tau_{M_{\omega 2}} = 43990,31 \cdot 11317,76 \cdot 10^{-8} = 4,98;$$

$$\tau_{M_{\omega 3}} = 43990,31 \cdot 17070,96 \cdot 10^{-8} = 7,51;$$

$$\tau_{M_{\omega 4}} = 43990,31 \cdot 8614,4 \cdot 10^{-8} = 3,79;$$

$$\tau_{M_{\omega 5}} = -2782,367 \cdot 126,98 \cdot 10^{-8} = 0,056.$$

Находим напряжения от чистого кручения в опорном сечении (рис. 37)

$$\tau_{M_0} = \frac{M_0}{J_K} \cdot \delta = \frac{3,347 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-2}}{220,2 \cdot 10^{-8}} = 24,32 \text{ МПа}.$$

Эпюра  $\tau_{\omega}$  построена с помощью эпюр  $\omega_0$  и  $S_{\omega_i}^{onc}$ . Эпюру  $\tau$  (рис. 38) получаем суммированием эпюр  $\tau_u$ ,  $\tau_{\omega}$  и  $\tau_0$ .

Наибольшие касательные напряжения  $\tau$ :

$$\tau = 0,53 + 3,03 + 24,32 = 27,88 \text{ МПа};$$

$$\tau = 4,42 + 7,48 + 24,32 = 36,22 \text{ МПа};$$

$$\tau = 9,36 + 0,056 + 24,32 = 33,74 \text{ МПа}.$$

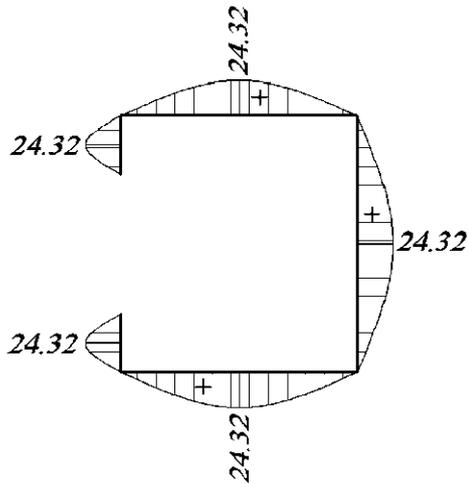


Рис. 37. Эпюра  $\tau_0$ , МПа

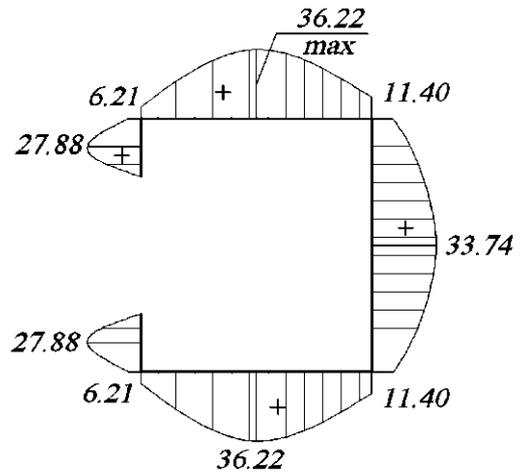


Рис. 38. Эпюра  $\tau$ , МПа

### 3.2.14. Нахождение угла закручивания

При  $z = \frac{l}{2}$

$$\theta_z = \theta_0' \cdot \frac{shKz}{K} + M_{K0} \cdot \frac{z - \frac{shKz}{K}}{GJ_K} - \frac{m}{GJ_K} \cdot \left( \frac{z^2}{2} - \frac{chKz}{K^2} + \frac{1}{K^2} \right) = 0,019 \cdot \frac{shKz}{0,17} +$$

$$+ 25,152 \cdot \frac{4 - \frac{shKz}{0,17}}{80 \cdot 10^6 \cdot 220,2 \cdot 10^{-8}} - \frac{6,288}{80 \cdot 10^6 \cdot 220,2 \cdot 10^{-8}} \cdot \left( \frac{4^2}{2} - \frac{chKz}{0,17^2} + \frac{1}{0,17^2} \right)$$

$$= 0,082 - 0,045 + 0,011 = 0,048 \text{ рад.}$$

## 3.3. Пример №3

### 3.3.1. Исходные данные

Таблица 11

#### Исходные данные

$B$ , см	24
$H$ , см	30
$\delta$ , см	1,4
$F_2$ , кН	30
$L$ , м	4
$E$ , ГПа	200
$G$ , ГПа	80

В табл. 11 приведены исходные данные для примера №3. На рис. 39 и 40 даны поперечное сечение и расчетная схема рассматриваемого стержня.

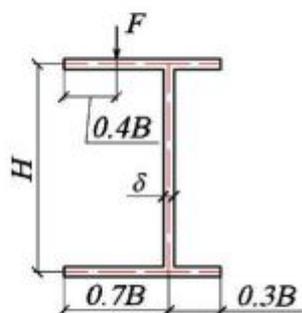


Рис. 39. Поперечное сечение

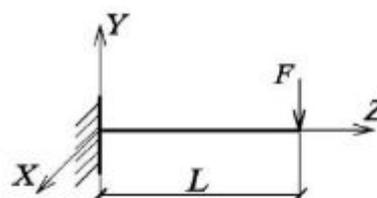


Рис. 40. Расчетная схема

### 3.3.2. Определение положения центра тяжести, величины главных центральных моментов инерции поперечного сечения

Площадь поперечного сечения

$$A = \sum_{i=1}^n A_i = 30 \cdot 1,4 + 24 \cdot 1,4 + 24 \cdot 1,4 = 109,2 \text{ см}^2.$$

Статический момент площади относительно оси  $Y_1$

$$S_{Y_1} = \int_A x \cdot dA = -24 \cdot 1,4 \cdot 4,8 - 24 \cdot 1,4 \cdot 4,8 = -322,56 \text{ см}^3.$$

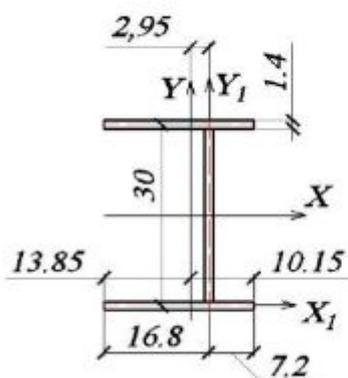


Рис. 40. Координаты центра тяжести

Координаты центра тяжести (рис. 40)

$$x_0 = \frac{S_{Y_1}}{A} = \frac{-322,56}{109,2} = -2,95 \text{ см}; \quad y_0 = 0 \text{ см}.$$

Для тонкостенных стержней моменты инерции  $J_x$  и  $J_y$  вычисляем перемножением эюр линейных координат по правилу Верещагина (при помощи эюр линейных координат рис. 41 и 42):

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_l y^2 \cdot \delta \cdot dl =$$

$$= 1,4 \cdot \left( \frac{15^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 + \frac{15^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 + 24 \cdot 15 \cdot 15 + 24 \cdot 15 \cdot 15 \right) = 18270 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \int_A x^2 \cdot dA = \int_l x^2 \cdot \delta \cdot dl = 2 \cdot 1,4 \cdot \left( \frac{13,85 \cdot 13,85}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 13,85 + \right. \\ \left. + \frac{10,15 \cdot 10,15}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10,15 \right) = 3455,59 \text{ см}^4.$$

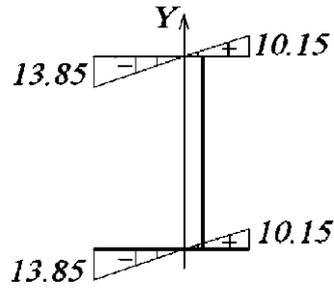


Рис. 41. Эпюра X, см

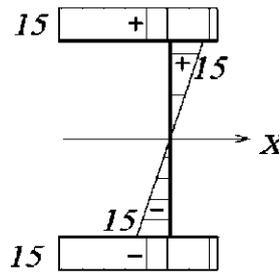


Рис. 42. Эпюра Y, см

### 3.3.3. Определение координат центра изгиба

Для определения центра изгиба строим эпюру секториальных координат (рис. 43) с произвольным полюсом  $B$  и началом отсчета  $M_0$ .  $B$  и  $M_0$  располагаем на контуре по оси симметрии сечения.

Секториальную координату определяем по формуле

$$\omega_B = \int_0^l r dl;$$

$$\omega_{B_1} = 0 \text{ см}^2; \quad \omega_{B_2} = -15 \cdot 7,2 = -108 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_3} = 15 \cdot 16,8 = 252 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_4} = 15 \cdot 7,2 = 108 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{B_5} = -15 \cdot 16,8 = -252 \text{ см}^2.$$

Расположение точек взято с рис. 44.

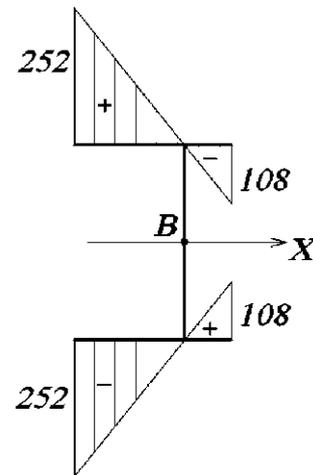


Рис. 43. Эпюра  $\omega_B$ , см<sup>2</sup>

Секториально-линейный статический момент относительно оси  $X$  вычисляем перемножением эпюр  $\omega_B$  и  $Y$  по формуле

$$S_{\omega_{Bx}} = \int_A \omega_B \cdot y \cdot dA = \int_l \omega_B \cdot y \cdot \delta \cdot dl;$$

$$S_{\omega_{Bx}} = 2 \frac{252 \cdot 16,8}{2} \cdot 1,4 \cdot 15 - 2 \frac{108 \cdot 7,2}{2} \cdot 1,4 \cdot 15 = 72576 \text{ см}^5.$$

Определяем координаты центра изгиба

$$a_x = \frac{S_{\omega_{Bx}}}{J_x} = \frac{72576}{18270} = 3,97 \text{ см},$$

$a_x$  откладываем от полюса  $B$  по оси  $X$ , получаем центр изгиба  $A$  (рис. 44).

### 3.3.4. Построение эпюры главных секториальных координат поперечного сечения

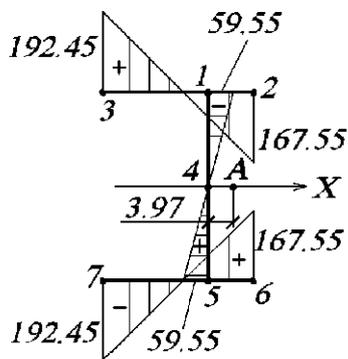


Рис. 44. Эпюра  $\omega_0$ ,  $\text{см}^2$

Эпюру главных секториальных координат строим, располагая полюс в центре изгиба  $A$ .

$$\omega_{0_1} = -3,97 \cdot 15 = -59,55 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_2} = -3,97 \cdot 15 - 15 \cdot 7,2 = -167,55 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_3} = -3,97 \cdot 15 + 15 \cdot 16,8 = 192,45 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_4} = 0 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_5} = 3,97 \cdot 15 = 59,55 \text{ см}^2;$$

$$\omega_{0_6} = 3,97 \cdot 15 + 15 \cdot 7,2 = 167,55 \text{ см}^2.$$

Проверка правильности определения положения центра изгиба:

$$\begin{aligned} S_{\omega_0 x} &= \int_0^l \omega_0 \cdot \delta \cdot y dl = -2 \cdot 1,4 \cdot \frac{59,55 \cdot 15}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 + \\ &+ 2 \cdot 1,4 \cdot \frac{24}{6} (2 \cdot 12,45 \cdot 15 - 2 \cdot 167,55 \cdot 15 + 192,45 \cdot 15 - 167,55 \cdot 15) = \\ &= -12505,5 + 12549,6 = 44,1 \text{ см}^5. \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{44,1 \cdot 100\%}{12505,5} = 0,35\% < 1\%.$$

Эпюра  $\omega_0$  построена правильно, положение центра изгиба верное.

### 3.3.5. Вычисление момента инерции при чистом кручении $J_K$ , секториального момента инерции $J_{\omega_0}$ , изгибно-крутильной характеристики $K$

$$J_K = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \delta_i^3}{3}.$$

Для двутаврового сечения  $\alpha = 1,2$ .

$$J_K = 1,2 \cdot \frac{1,4^3}{3} (2 \cdot 24 + 30) = 85,61 \text{ см}^4;$$

$$J_{\omega_0} = \int_l \delta \cdot \omega_0^2 dl = 2 \cdot 1,4 \cdot \left( \frac{188 \cdot 11,2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 188 + \frac{192 \cdot 12,8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 192 + \frac{60 \cdot 15}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 \right) = 860264,53 \text{ см}^4;$$

$$K = \sqrt{\frac{G \cdot J_K}{E \cdot J_{\omega_0}}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 85,61}{200 \cdot 860264,53}} = 0,0063 \text{ см}^{-1} = 0,63 \text{ м}^{-1}.$$

### 3.3.6. Определение неизвестных начальных параметров

$$z = 0; \theta_0 = 0; \theta'_0 = 0; M_{K_0} \neq 0; B_{\omega_0} \neq 0.$$

$$z = L; B_{\omega_L} = 0; M_{K_L} \neq 0.$$

На рис. 45 показан эксцентриситет  $e$ .

$$e = 7,2 + 3,97 = 11,17 \text{ см};$$

$$M_{K_0} = F \cdot e = 30 \cdot 11,17 \cdot 10^{-2} = 3,351 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При  $z = L$  по табл. 5

$$B_{\omega_L} = B_{\omega_0} \cdot chKL + M_{K_0} \frac{shKL}{K} = 0;$$

$$B_{\omega_0} = -\frac{M_{K_0} \cdot shKL}{K \cdot chKL} = -\frac{3,351}{0,63} \cdot \frac{6,1741}{6,2545} = -5,2507 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

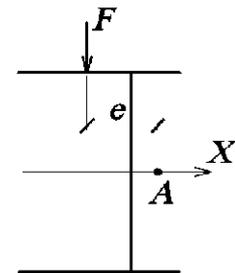


Рис. 45.

Нахождение эксцентриситета

### 3.3.7. Определение ординат для построения эпюры бимоментов $B_{\omega}$

По табл. 5

$$B_{\omega_z} = B_{\omega_0} \cdot chKz + M_{K_0} \cdot \frac{shKz}{K} = -5,2507 \cdot chKz + 3,351 \cdot \frac{shKz}{0,63}.$$

С шагом в 1 м длины балки определяем

$$B_{\omega_0} = -5,2995 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$B_{\omega_1} = -5,2507 \cdot 1,2051 + 3,351 \cdot 1,0675 = -2,8093 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$B_{\omega_2} = -5,2507 \cdot 1,9045 + 3,351 \cdot 2,5728 = -1,4715 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$B_{\omega_3} = -5,2507 \cdot 3,3852 + 3,351 \cdot 5,1335 = -0,7374 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$B_{\omega_4} = -5,2507 \cdot 6,2545 + 3,351 \cdot 9,800 = -0,3057 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

3.3.8. *Определение ординат для построения эпюры изгибно-крутящих моментов  $M_{\omega}$*

По табл. 5

$$M_{\omega_z} = B_{\omega_0} \cdot K \cdot shKz + M_{K_0} \cdot chKz = -5,2507 \cdot 0,63 \cdot shKz + 3,351 \cdot chKz = -3,3079 \cdot shKz + 3,351 \cdot chKz;$$

$$M_{\omega_0} = 3,351 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_1} = -3,3079 \cdot 0,6725 + 3,351 \cdot 1,2051 = 1,7930 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_2} = -3,3079 \cdot 1,6209 + 3,351 \cdot 1,9045 = 0,9705 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_3} = -3,3079 \cdot 3,2341 + 3,351 \cdot 3,3852 = 0,5460 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\omega_4} = -3,3079 \cdot 6,1741 + 3,351 \cdot 6,2545 = 0,3456 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3.3.9. *Определение ординат для построения эпюры моментов чистого кручения  $M_{0z}$*

По табл.5

$$M_{0z} = GJ_K \cdot \theta'_z = -B_{\omega_0} \cdot \frac{K \cdot shKz}{GJ_K} \cdot GJ_K + \frac{M_{K_0} \cdot GJ_K}{GJ_K} \cdot (1 - chKz) = 5,2507 \cdot 0,63 \cdot shKz + 3,351 \cdot (1 - chKz);$$

$$M_{0_0} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{0_1} = 5,2507 \cdot 0,63 \cdot 0,6725 + 3,351 \cdot (1 - 1,2051) = 1,5580 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{0_2} = 5,2507 \cdot 0,63 \cdot 1,6209 + 3,351 \cdot (1 - 1,9045) = 2,3805 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{0_3} = 5,2507 \cdot 0,63 \cdot 3,2341 + 3,351 \cdot (1 - 3,3852) = 2,8050 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{0_4} = 5,2507 \cdot 0,63 \cdot 6,1741 + 3,351 \cdot (1 - 6,2545) = 3,0054 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3.3.10. *Определение ординат для построения эпюры внешних крутящих моментов  $M_{K_z}$*

$$M_{K_z} = F \cdot e = 30 \cdot 11,17 \cdot 10^{-2} = 3,351 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{K_z} = M_{0_z} + M_{\omega_z}.$$

Результаты вычислений внутренних усилий сводим в табл.12.

## Внутренние усилия

$z$	$Kz$	$B_{\omega_z}$	$M_{Kz}$	$M_{0z}$	$M_{\omega_z}$
0	0	-5,2995	3,351	0	3,351
1	0,63	-2,8093	3,351	1,5580	1,7930
2	1,26	-1,4715	3,351	2,3805	0,9705
3	1,89	-0,7374	3,351	2,8050	0,5460
4	2,52	-0,3057	3,351	3,0054	0,3456

## 3.3.11. Построение эюр внутренних усилий

$M_x, Q_y, M_{0z}, M_{\omega_z}, B_{\omega_z}, M_{Kz}$  (рис.46)

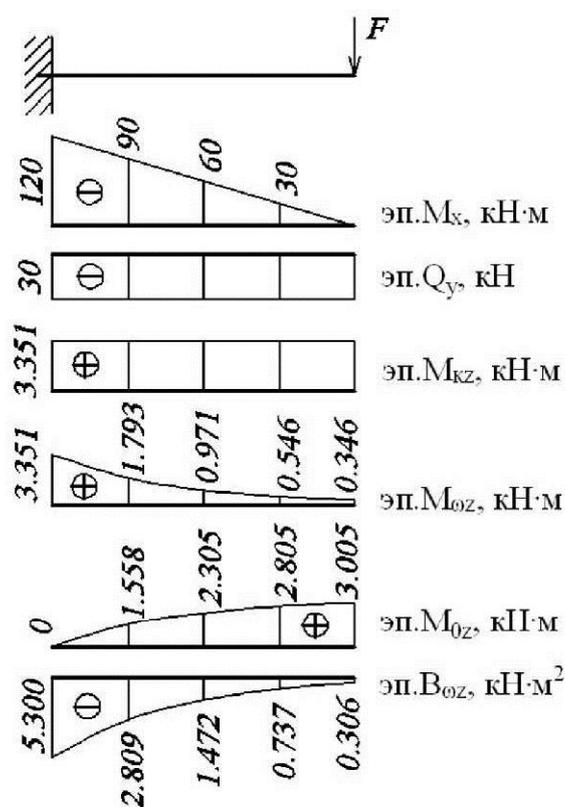


Рис. 46. Эпюры внутренних усилий

## 3.3.12. Построение эпюры нормальных напряжений в опасном сечении стержня

Нормальные напряжения

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_\omega = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{B_\omega}{J_\omega} \cdot \omega_0.$$

По эпюрам  $M_x$  и  $B_\omega$  опасным сечением в консольной балке является опорное.

$$M_x = 120 \text{ кН}\cdot\text{м} = 120 \cdot 10^{-3} \text{ МН}\cdot\text{м};$$

$$B_\omega = -5,2995 \text{ кН}\cdot\text{м}^2 = -5,2995 \cdot 10^{-3} \text{ МН}\cdot\text{м}^2;$$

$$\sigma_u = \frac{120 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{18270 \cdot 10^{-8}} \cdot Y = 6,568 \cdot Y \text{ (рис. 47, а);}$$

$$\sigma_\omega = \frac{-5,2995 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}}{860264,53 \cdot 10^{-12}} \cdot \omega_0 = 0,616 \cdot \omega_0 \text{ (рис. 47, б).}$$

Эпюры  $\sigma_u$  и  $\sigma_\omega$  построены с помощью эпюр  $Y$  и  $\omega_0$ . Эпюру  $\sigma$  получаем суммированием эпюр  $\sigma_u$  и  $\sigma_\omega$  (рис. 47, в).

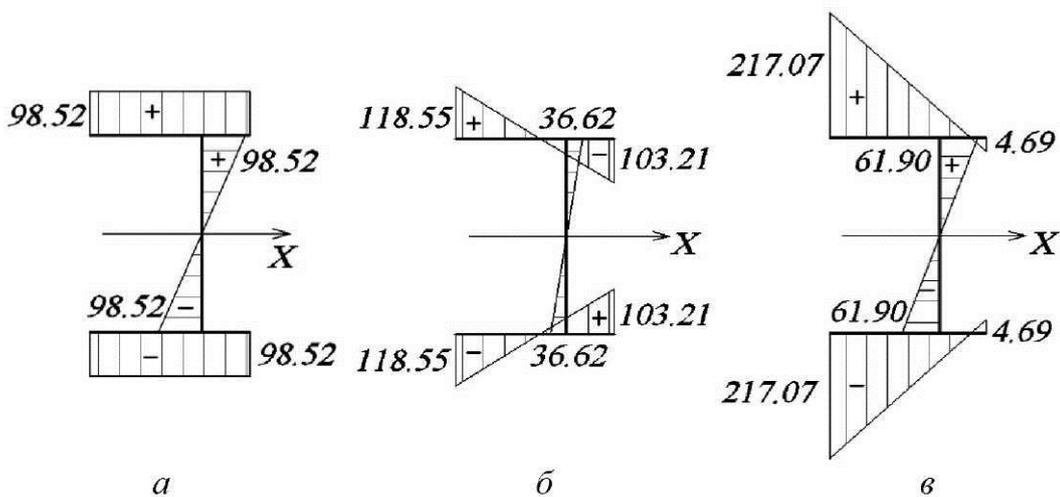


Рис. 47. Эпюры нормальных напряжений:  
а – эпюра  $\sigma_u$ , МПа; б – эпюра  $\sigma_\omega$ , МПа; в – эпюра  $\sigma$ , МПа

### 3.3.13. Построение эпюр касательных напряжений в опасном сечении стержня

Касательные напряжения

$$\tau = \tau_u + \tau_{M_\omega} + \tau_{M_K} = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}}{J_x \cdot \delta} + \frac{M_\omega \cdot S_\omega^{omc}}{J_\omega \cdot \delta} + \frac{M_0}{J_K} \cdot \delta.$$

По эпюрам  $Q_x$ ,  $M_\omega$ ,  $M_K$  опасным является опорное сечение.

Определим касательные напряжения от изгиба (рис. 48).

$$\tau_u = \tau_{Q_y} = \frac{Q_y \cdot S_{x_i}^{omc}}{J_x \cdot \delta} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{18270 \cdot 10^{-8} \cdot 1,4 \cdot 10^{-2}} \cdot S_{x_i}^{omc} = 11728,83 \cdot S_{x_i}^{omc},$$

где  $S_{x_i}^{omc}$  – статический момент отсеченной части сечения относительно оси  $X$ .

$$S_{x_2}^{omc} = S_{x_3}^{omc} = 0;$$

$$\text{слева: } S_{x_1}^{omc} = 16,8 \cdot 1,4 \cdot 15 = 352,8 \text{ см}^3 = 352,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\text{справа: } S_{x_1}^{omc} = 7,2 \cdot 1,4 \cdot 15 = 151,2 \text{ см}^3 = 151,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$S_{x_4}^{omc} = 24 \cdot 1,4 \cdot 15 + 7,5 \cdot 1,4 \cdot 15 = 661,5 \text{ см}^3 = 661,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Остальные ординаты симметричны найденным.

Касательные напряжения от изгиба (рис. 48)

$$\text{слева: } \tau_{Q_1} = 11728,83 \cdot 352,8 \cdot 10^{-6} = 4,138 \text{ МПа};$$

$$\text{справа: } \tau_{Q_1} = 11728,83 \cdot 151,2 \cdot 10^{-6} = 1,773 \text{ МПа};$$

$$\tau_{Q_2} = \tau_{Q_3} = 0 \text{ МПа};$$

$$\tau_{Q_4} = 11728,83 \cdot 661,5 \cdot 10^{-6} = 7,759 \text{ МПа}.$$

Определение напряжения от изгибно-крутящего момента (рис. 49).

$$\tau_{M_\omega} = \frac{M_\omega \cdot S_{\omega_i}^{omc}}{J_\omega \cdot \delta} = \frac{3,351 \cdot 10^{-3} \cdot S_{\omega_i}^{omc}}{860264,53 \cdot 10^{-12} \cdot 1,4 \cdot 10^{-2}} = 278236,675 \cdot S_{\omega_i}^{omc};$$

$$S_{\omega_i}^{omc} = \int_{A^{omc}} \omega_0 \cdot dA = \int_{l^{omc}} \omega_0 \cdot \delta \cdot dl;$$

$$S_{\omega_2}^{omc} = S_{\omega_3}^{omc} = 0;$$

$$S_{\omega_{\max}}^{omc} = \frac{192,45 \cdot 12,83}{2} \cdot 1,4 = 1728,393 \text{ см}^4 = 1728,393 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\text{слева: } S_{\omega_1}^{omc} = S_{\omega_4}^{omc} - \frac{3,97 \cdot 59,55}{2} \cdot 1,4 = 1562,904 \text{ см}^4 = 1562,904 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\begin{aligned} \text{справа: } S_{\omega_1}^{omc} &= -\left(\frac{167,55 + 59,55}{2}\right) \cdot 7,2 \cdot 1,4 = -1144,584 \text{ см}^4 = \\ &= -1144,584 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\omega_5}^{omc} &= \text{лев} S_{\omega_1}^{omc} + \text{прав} S_{\omega_1}^{omc} - \frac{15 \cdot 59,55}{2} \cdot 1,4 = \\ &= 1562,904 - 1144,584 - 625,275 = -206,646 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4. \end{aligned}$$

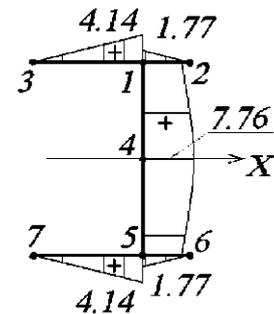


Рис. 48.  
Эпюра  $\tau_{ts}$ , МПа

слева:  $\tau_{M_{\omega 1}} = 278236,675 \cdot 1562,904 \cdot 10^{-8} = 4,349$  МПа;

справа:  $\tau_{M_{\omega 1}} = -278236,675 \cdot 1144,584 \cdot 10^{-8} = -3,185$  МПа;

$\tau_{M_{\omega 2}} = \tau_{M_{\omega 3}} = 0$  МПа;

$\tau_{M_{\omega 4}} = 278236,675 \cdot 1728,393 \cdot 10^{-8} = 4,809$  МПа;

$\tau_{M_{\omega 5}} = -278236,675 \cdot 206,646 \cdot 10^{-8} = -0,575$  МПа.

Эпюра  $\tau_{\omega}$  построена с помощью эпюр  $\omega_0$  и  $S_{\omega_i}^{omc}$ . Эпюру  $\tau$  (рис. 50) получаем суммированием эпюр  $\tau_u$ ,  $\tau_{\omega}$  и  $\tau_0$ .

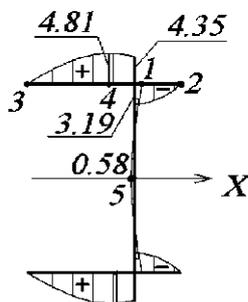


Рис. 49.  
Эпюра  $\tau_{\omega}$ , МПа

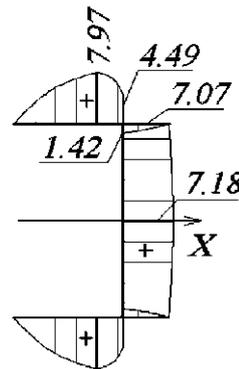


Рис. 50.  
Эпюра  $\tau$ , МПа

Определим напряжения от чистого кручения в опорном сечении

$$\tau_{M_0} = \frac{M_0}{J_K} \cdot \delta = 0, \text{ так как на опоре } M_0 = 0.$$

### 3.3.14. Нахождение угла закручивания

$$\theta_z = B_{\omega_0} \cdot \frac{1 - chKz}{GJ_K} + M_{K_0} \cdot \frac{z - \frac{shKz}{K}}{GJ_K} = -5,2995 \cdot \frac{1 - chKz}{80 \cdot 10^6 \cdot 220,2 \cdot 10^{-8}} +$$

$$+ 3,351 \cdot \frac{4 - \frac{shKz}{0,63}}{80 \cdot 10^6 \cdot 220,2 \cdot 10^{-8}} = 0,407 - 0,284 = 0,123 \text{ рад.}$$

### Библиографический список

1. Александров А.В., Потанов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 560 с.
2. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Гориков А.А. Сопротивление материалов (с основами строительной механики): Учебник. – М.: Инфра-М, 2003. – 480 с.
3. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Сопротивление материалов.- Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.
4. Винокуров Е.Ф., Балькин М.К., Голубев И.А. Справочник по сопротивлению материалов.- Минск: Наука и техника, 1988. – 463 с.