

ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЛОМАНОГО

БРУСА ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

**Методические указания к курсовой работе
для студентов механических специальностей**

Содержатся основные положения по расчету на прочность пространственного ломаного бруса (элемента коленчатого вала). Изложены последовательность выполнения работы с графической интерпретацией. Дан численный пример расчета участка вала прямоугольного сечения. В приложениях приведены расчетные схемы и исходные данные по вариантам. Дан список рекомендуемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Выбор и построение плавающей системы координат.....	4
1.1. Построение плавающей системы координат на остальных участках.....	4
2. Уравнения равновесия отсеченных частей	5
3. Построение эпюр внутренних усилий N_x, Q_y, Q_z	5
3.1. Проверка правильности построения эпюр сил.....	6
4. Построение эпюр моментов M_y, M_z, T	7
4.1. Проверка правильности построения эпюр моментов.....	8
5. Расчет на прочность круглого сечения.....	8
5.1. Подбор диаметра круглого сечения.....	8
5.2. Проверка напряженного состояния сечения С.....	9
5.2.1. Анализ по нормальным напряжениям.....	9
5.2.2. Проверка по эквивалентным напряжениям.....	10
6. Расчет на прочность прямоугольного сечения.....	10
6.1. Подбор параметров прямоугольного сечения.....	11
6.2. Проверка напряженного состояния сечения d.....	11
6.2.1. Анализ по нормальным напряжениям	11
6.2.2. Проверка по эквивалентным напряжениям	13
7. Численный пример расчета на прочность	13
8. Порядок выполнения расчетной работы	15
Библиографический список	16
Приложение 1.....	17
Приложение 2	20
Вопросы для самопроверки.....	21

1. Выбор и построение плавающей системы координат

На рис. 1 дана расчетная схема ломаного бруса (элемента коленчатого вала ДВС). Брус состоит из четырех участков, два из которых – третий и четвертый заданы круглым и прямоугольным сечениями, соответственно. Длина участков равна l . Силовое загружение включает сосредоточенную силу F , распределенную нагрузку q и момент M .

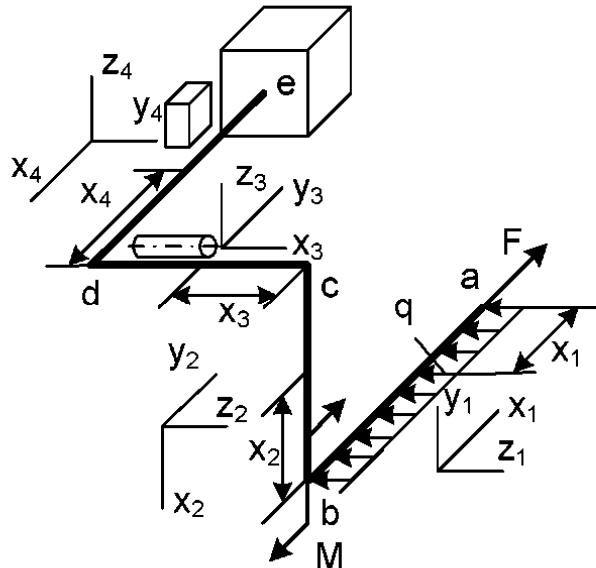


Рис. 1. Плавающая система координат

Определяем плоскость, образованную двумя первыми стержнями (ab) и (bc). В данном примере – профильная плоскость. Вдоль стержня (ab) направляем ось X_1 к свободному концу; перпендикулярно к ней в профильной плоскости – ось Y_1 ; к плоскости $X_1 - Y_1$ восстанавливаем перпендикуляр – ось Z_1 .

Примечание: ось Y_1 может быть направлена вверх или вниз; ось Z_1 может быть направлена вправо или влево.

1.1. Построение плавающей системы координат на остальных участках.

На участке bc система координат поворачивается относительно оси Z , перпендикулярной к плоскости, образованной стержнями ab и bc, следовательно, оси Z_1 и Z_2 имеют одинаковое направление, а ось X_2 направлена в сторону b. Поворачиваем "старую" систему до положения "новой" вокруг оси Z. При этом ось X_2 направлена вниз, ось Y_2 повернется из вертикального направления в горизонтальное от наблюдателя. Для третьего участка общим перпендикуляром к плоскости, образованной стержнями bc и cd, является ось Y. Для четвертого участка общий перпендикуляр к плоскости, образованной стержнями cd и de, – ось Z.

Таким образом, вращая координатные системы вокруг общих перпендикуляров, получим остальные координатные системы.

На каждом участке выделяем отсеченные части ($X_1 - X_4$) с привязкой к началу рассматриваемого участка.

2. Уравнения равновесия отсеченных частей

Правила знаков сил и моментов

N – продольная сила – знак плюс при растяжении отсеченной части;

Q_y и Q_z – поперечные (перерезающие) силы определяются по направлению одноименных осей, вращение отсеченной части по часовой стрелке по направлению третьей координаты;

M_y и M_z – изгибающие моменты, действующие вокруг одноименных осей; знак плюс, если изгиб происходит в сторону третьей координаты;

T – крутящий момент, действующий вокруг оси X (в плоскости ZY); знак плюс определяется по правилу правого винта.

$$0 \leq X_1 \leq l$$

$$N_1 = F; Q_{y1} = 0; Q_{z1} = q \cdot x_1(0; q \cdot a); M_{y1} = -q \cdot x^2 / 2; M_{z1} = 0; T_1 = 0.$$

$$0 \leq X_2 \leq l$$

$$N_1 = 0; Q_{y2} = F; Q_{z2} = q \cdot l; M_{y2} = -q \cdot l \cdot x_2^2 / 2; M_{z2} = F \cdot x_2; T_2 = -q \cdot l^2 / 2.$$

$$0 \leq X_3 \leq l$$

$$N_3 = -q \cdot l; Q_{y3} = F; Q_{z3} = 0; M_{y3} = -q \cdot l^2; M_{z3} = F \cdot x_3 + q \cdot l^2 / 2;$$

$$T_3 = F \cdot l - M.$$

$$0 \leq X_4 \leq l$$

$$N_4 = -F; Q_{y4} = -q \cdot l; Q_{z4} = 0; M_{y4} = M - F \cdot l; M_{z4} = F \cdot l - q \cdot l(x_4 - l/2);$$

$$T_4 = -q \cdot l^2.$$

3. Построение эпюор внутренних усилий N_x, Q_y, Q_z

Эпюра продольных сил N строится в плоскости XY с учетом знака, (см. рис. 2).

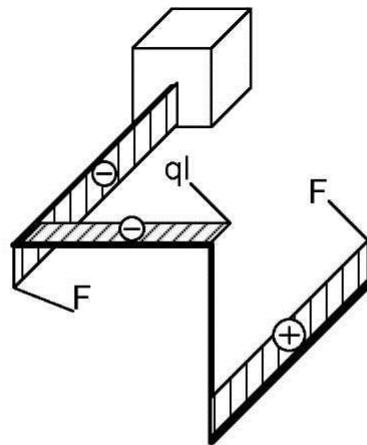


Рис. 2. Эпюра продольных сил N

Эпюры поперечных сил строятся в своих плоскостях со знаком, рис. 3 и рис. 4. Например, на первом участке эпюра Q_{z1} имеет вид треугольника, построена в положительной полуплоскости X_1Z_1 , рис. 4.

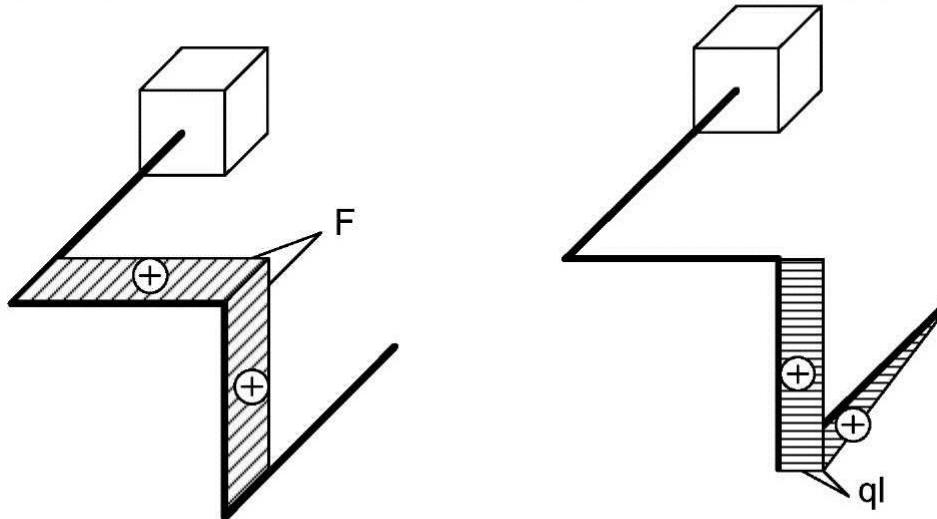


Рис. 3. Эпюра поперечных сил Q_y

Рис.4. Эпюра поперечных сил Q_z

3.1. Проверка правильности построения эпюр сил

Главный вектор сил в узле равен нулю, если там отсутствует сосредоточенная сила. Необходимо определить попарно равенство ординат сил в узле.

Пример. Узел C : включает стержни bc и cd , табл. 1.

Таблица 1

Стержни	Эпюры		
	N_x	Q_y	Q_z
bc	0	F	ql
cd	$-ql$	F	0

4. Построение эпюор моментов M_y , M_z , T

Эпюры изгибающих моментов M_y и M_z строятся на сжатых волокнах в плоскостях их действия, рис. 5 и рис. 6.

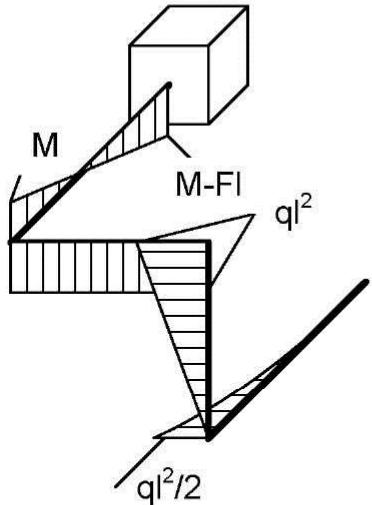


Рис.5. Эпюра изгибающего момента M_y

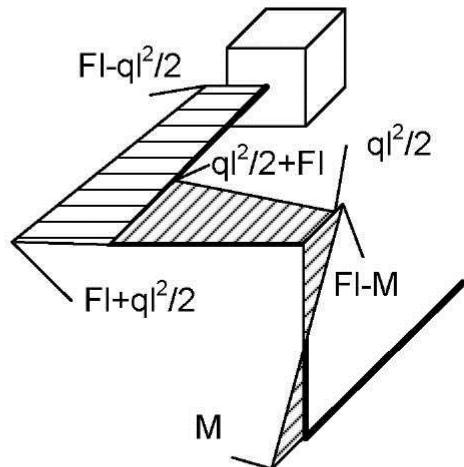


Рис.6. Эпюра изгибающего момента M_z

Например: Уравнение равновесия $M_{z3} = q \cdot l^2 / 2 + F \cdot x_4$. Эпюра момента строится в горизонтальной плоскости в положительной полу-плоскости (на сжатом волокне). При $x_4 = 0; M_{z4} = q \cdot l^2 / 2$. При $x_4 = l; M_{z4} = q \cdot l^2 / 2 + F \cdot l$.

Эпюра крутящего момента. Строится в плоскости ZY по правилу правого вращения отсеченной части стержня – положительное значение.

Например: Для третьего участка плоскость действия $T(x_3)$ – $Z_3 Y_3$ (профильная) наблюдается в виде прямой с указанием направления вращения. Для четвертого участка плоскость действия $T(x_4)$ – $Z_4 Y_4$ (фронтальная); в аксонометрии изображается в виде эллипса с указанием значения и направления вращения, рис. 7.

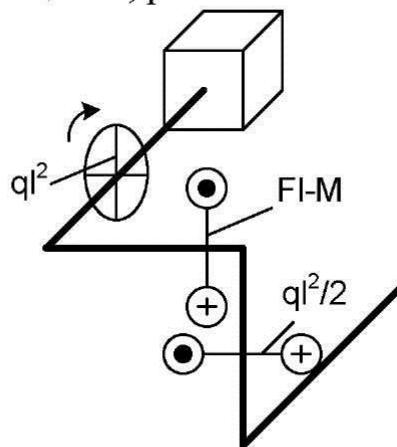


Рис. 7. Эпюра крутящего момента T

4.1. Проверка правильности построения эпюр моментов

Главный вектор момента в узле равен нулю, если там отсутствует сосредоточенный момент. Необходимо определить попарно равенство ординат моментов в узле.

Пример. Узел C : включает стержни bc и cd , табл. 2.

Таблица 2

Стержни	Эпюры		
	M_y	M_z	T
bc	ql^2	$Fl-M$	$ql^2/2$
cd	ql^2	$ql^2/2$	$Fl-M$

5. Расчет на прочность круглого сечения

Ввиду линейности эпюр, проведем анализ загружения крайних сечений третьего стержня. Согласно табл. 3, сечения c и d одинаково загружены. Принимаем решение: произвести расчет по сечению c .

Примечание: касательные напряжения от поперечных сил Q_y и Q_z не учитываем ввиду их малости.

Таблица 3

Сечение	Эпюры			
	N	M_y	M_z	T
c	$-ql$	ql^2	$Fl-M$	$ql^2/2$
d	$-ql$	ql^2	$ql^2/2$	$Fl-M$

Для этого развернем стержень cd вокруг Z_3 , рис. 8.

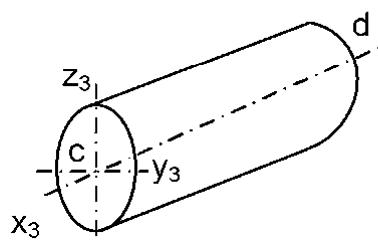


Рис. 8. Расчет круглого сечения

5.1. Подбор диаметра круглого сечения

Считаем, что главным силовым фактором для круглого сечения является крутящий момент $T = q \cdot l^2 / 2$

Условие прочности при действии момента T

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_x} \leq [\tau], \quad (1)$$

где W_x – полярный момент сопротивления; для круглого сечения $W_x = \pi \cdot d^3 / 16$; $[\tau]$ – допускаемое напряжение для материала стержня; сталь 40Х – $[\tau] = 80$ МПа.

Из формулы (1) имеем $d \geq \sqrt[3]{16 \cdot T / \pi \cdot [\tau]}$.

Округляем полученный результат в большую сторону с окончанием на "0" или "5" в мм.

5.2. Проверка напряженного состояния сечения С

5.2.1. Анализ по нормальным напряжениям

Проверка осуществляется с учетом нормальных напряжений, от действия силовых факторов N, M_y, M_z . Соответствующие напряжения определяют по зависимостям:

$$\sigma_N = \frac{N}{A}; \quad \sigma_{M_y} = \frac{M_y}{W_y}; \quad \sigma_{M_z} = \frac{M_z}{W_z},$$

где A – площадь сечения; W_y, W_z – осевые моменты сопротивления относительно осей Y и Z , соответственно.

Для проверки строим эпюры напряжений

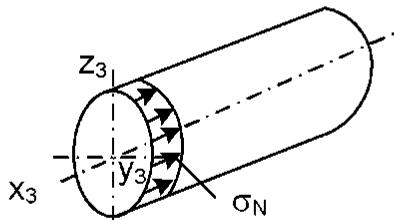


Рис. 9. Эпюра нормальных напряжений σ_N

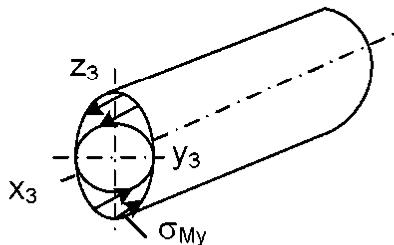


Рис. 10. Эпюра нормальных напряжений σ_{M_y}

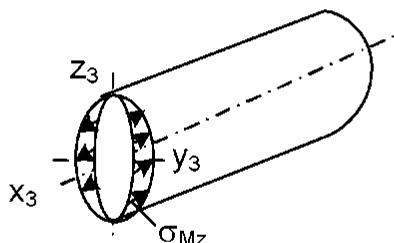


Рис. 11. Эпюра нормальных напряжений σ_{M_z}

Эпюры показывают растяжение или сжатие волокон в соответствующих квадрантах.

Согласно рис. 9 – рис. 11 наиболее нагруженный квадрант – четвертый; в нем полное сжатие от действия трех факторов.

Напряженное состояние от указанных факторов считается одноосным, суммарное значение равно $\Sigma \sigma = \sigma_N + \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z}$. В данном примере σ_N имеет отрицательное значение, поэтому $\Sigma \sigma$ берем по модулю.

Условие первой проверки: $\Sigma \sigma \leq [\sigma] - 10\%$,

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение, сталь 40Х $[\sigma] = 480$ МПа.

В случае превышения допускаемого напряжения необходимо увеличивать диаметр стержня, добиваясь выполнения условия проверки.

5.2.2. Проверка по эквивалентным напряжениям

Условие второй проверки: $\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_\Sigma^2 + 4\tau_{max}^2} \leq [\sigma] - 10\%$.

На рис.12 представлены эпюры касательных напряжений от T .

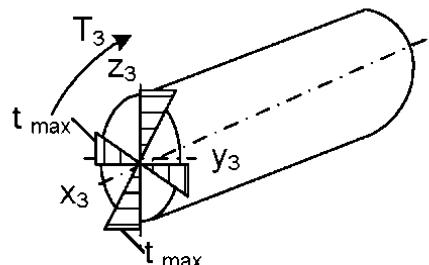


Рис.12. Эпюры касательных напряжений τ

6. Расчет на прочность прямоугольного сечения

Анализ загруженности сечений четвертого стержня.

По табл. 4, определим, что сечение d загружено более. Произведем расчет по сечению d. На рис. 13 представлена расчетная схема прямоугольного стержня. Обозначим вершины граней сечения d цифрами 1–4.

Таблица 4

Сечение	Эпюры			
	N	M _y	M _z	T
d	-F	M-Fl	Fl+ql ² /2	-ql ²
e	-F	M-Fl	Fl-ql ² /2	-ql ²

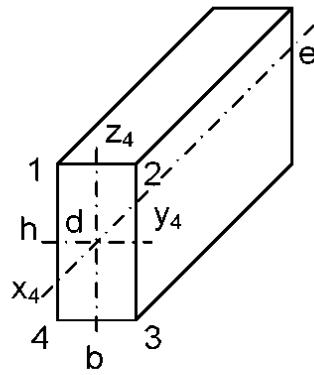


Рис. 13. Расчет прямоугольного сечения

6.1. Подбор параметров прямоугольного сечения

Для упрощения расчета принимаем соотношение сторон $h/b = 2$. Основными силовыми факторами для прямоугольного стержня являются изгибающие моменты M_y и M_z .

Напряженное состояние от указанных факторов считается одноосным, суммарное значение равно $\sum \sigma = \sigma_{My} + \sigma_{Mz}$. (1)

Запишем условие прочности и раскроем уравнение (1)

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{3M_y}{2b^3} + \frac{3M_z}{b^3} = \frac{3(M_y + 2M_z)}{2b^3} \leq [\sigma] \quad (2)$$

где $W_y = \frac{b \cdot h^2}{6}$ – осевой момент сопротивления (ось y_4); $W_z = \frac{b^2 \cdot h}{6}$ – осевой момент сопротивления (ось z_4). При соотношении $h/b = 2$ $W_y = \frac{2}{3}b^3$ и $W_z = \frac{1}{3}b^3$.

$$\text{Из формулы (2) определим } b \geq \sqrt[3]{\frac{3(M_y + 2M_z)}{2[\sigma]}}. \quad (3)$$

Округляем полученный результат в большую сторону с окончанием на "0" или "5" в мм.

6.2. Проверка напряженного состояния сечения d

6.2.1. Анализ по нормальным напряжениям

Первая проверка с учетом нормального напряжения от действия N . Соответствующие напряжения определяют по зависимостям:

$$\sigma_N = \frac{N}{A}; \sigma_{My} = \frac{M_y}{W_y}; \sigma_{Mz} = \frac{M_z}{W_z}, \quad (4)$$

где A – площадь сечения; W_y , W_z – осевые моменты сопротивления относительно осей Y и Z , соответственно.

Для проверки строим эпюры напряжений.

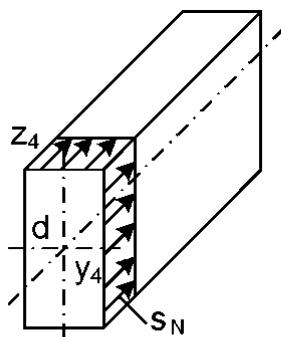


Рис. 14. Эпюра нормальных напряжений σ_N

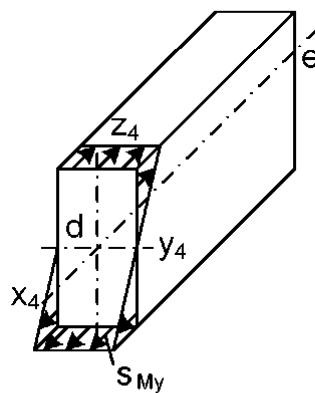


Рис. 15. Эпюра нормальных напряжений σ_{My}

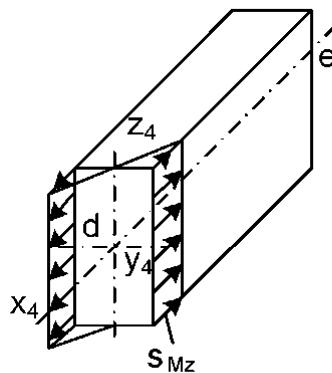


Рис. 16. Эпюра нормальных напряжений σ_{Mz}

Согласно рис. 14–16 наиболее нагруженной точкой является точка 2.

Напряженное состояние от указанных факторов считается одноосным, суммарное значение равно $\sum \sigma = \sigma_N + \sigma_{My} + \sigma_{Mz}$. В данном примере σ_N имеет отрицательное значение, поэтому $\sum \sigma$ берем по модулю.

Условие первой проверки: $\sum \sigma \leq [\sigma] - 10\%$,

где $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение, сталь 40Х $[\sigma] = 480$ МПа.

В случае превышения допускаемого напряжения необходимо увеличивать диаметр стержня, добиваясь выполнения условия проверки.

6.2.2. Проверка по эквивалентным напряжениям

Дополнительно проводят проверку напряженного состояния для точек 5 и 6.

На рис.17 представлена эпюра касательных напряжений от T .

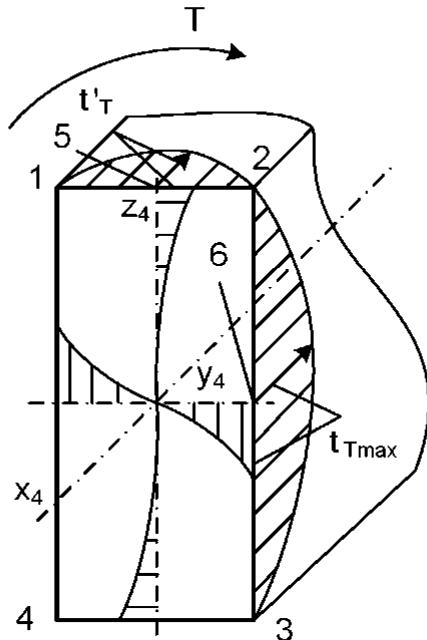


Рис.17. Эпюра касательных напряжений τ

Условие проверки для точки 5:

$$\sigma_{(5)\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_N + \sigma_{M_y})^2 + 4(\tau')^2} \leq [\sigma] - 10\%. \quad (5)$$

Условие проверки для точки 6:

$$\sigma_{(6)\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_N + \sigma_{M_z})^2 + 4\tau_{\max}^2} \leq [\sigma] - 10\%. \quad (6)$$

Касательные напряжения в призматических стержнях определяют по эмпирическим зависимостям $\tau_{\max} = \frac{T}{\beta \cdot b^3}$ и $\tau' = \gamma \cdot \tau_{\max}$,

где $\beta = 0,493$ при $h/b = 2$; $\gamma = 0,795$ при $h/b = 2$.

7. Численный пример расчета на прочность

Рассмотрим прямоугольное сечение.

Исходные данные: $q = 5$ кН/м; $F = 8$ кН; $M = 6$ кНм; $l = 0,5$ м; $[\sigma] = 380$ МПа.

По таблице 4 вычислим значения: $N = -F = -8$ кН;
 $M_y = M - Fl = 6 - 8 \cdot 0,5 = 2$ кНм;
 $M_z = Fl + ql^2 / 2 = 8 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5^2 / 2 = 4,625$ кНм;
 $T = ql^2 = 5 \cdot 0,5^2 = 1,25$ кНм.

Согласно формуле (3) определим

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3(M_y + 2M_z)}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3(2 + 2 \cdot 4,625) \cdot 10^3}{2 \cdot 380 \cdot 10^6}} \geq 3,54 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Переведем результат в мм и округлим в большую сторону: $b = 40$ мм.

При этом площадь сечения $A = 2b^2 = 2 \cdot (40 \cdot 10^{-3})^2 = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$;
 моменты сопротивления $W_y = \frac{2}{3}b^3 = \frac{2}{3}(40 \cdot 10^{-3})^3 = 42,66 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$;
 $W_z = \frac{1}{3}b^3 = \frac{1}{3}(40 \cdot 10^{-3})^3 = 21,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

Условие первой проверки: $\sum \sigma = \sigma_N + \sigma_{My} + \sigma_{Mz} \leq [\sigma] - 10\%$.

Вычислим напряжения от каждого силового фактора:
 $\sigma_N = N / A = -8 \cdot 10^3 / 3,2 \cdot 10^{-3} = -2,5$ МПа;
 $\sigma_{My} = M_y / W_y = 2 \cdot 10^3 / 42,66 \cdot 10^{-6} = 46,8$ МПа;
 $\sigma_{Mz} = M_z / W_z = 4,625 \cdot 10^3 / 21,33 \cdot 10^{-6} = 216,8$ МПа.

Суммарное нормальное напряжение формируется с учетом знака σ_N . Необходимо определить наиболее напряженную точку сечения d . Анализ эпюор σ_N ; σ_{My} ; σ_{Mz} по рис. 14-16 дает точку 2 – все напряжения сжатия.

$$\sum \sigma = \sigma_N + \sigma_{My} + \sigma_{Mz} = |2,5 + 46,8 + 216,8| = 261,96 \leq [380] \text{ да}$$

Вывод: первая проверка не выполняется – принимаем решение уменьшить сечение до $b = 35$ мм.

Корректируем значения $A = 2b^2 = 2 \cdot (35 \cdot 10^{-3})^2 = 2,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$;
 $W_y = \frac{2}{3}b^3 = \frac{2}{3}(35 \cdot 10^{-3})^3 = 28,58 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$;
 $W_z = \frac{1}{3}b^3 = \frac{1}{3}(35 \cdot 10^{-3})^3 = 14,29 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

Следовательно, новые значения

$$\sigma_N = N / A = -8 \cdot 10^3 / 2,45 \cdot 10^{-3} = -3,26 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{My} = M_y / W_y = 2 \cdot 10^3 / 28,58 \cdot 10^{-6} = 69,98 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{Mz} = M_z / W_z = 4,625 \cdot 10^3 / 14,29 \cdot 10^{-6} = 329,87 \text{ МПа.}$$

Суммарное напряжение

$$\sum \sigma = \sigma_N + \sigma_{My} + \sigma_{Mz} = |3,26 + 69,98 + 323,87| = 397,11 \leq [380] \text{ до } 342.$$

Вывод: условие проверки выполняется.

Вторая проверка: Производится по эквивалентным напряжением с учетом касательных. При этом необходимо вычислить значения

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\beta \cdot b^3} = \frac{1,25 \cdot 10^3}{0,493 \cdot (35 \cdot 10^{-3})^3} = 59,13 \text{ МПа;}$$

$$\tau' = \gamma \cdot \tau_{\max} = 0,795 \cdot 59,13 = 47 \text{ МПа.}$$

Согласно рис. 17 максимальное касательное напряжение в точке 6.

Проверка напряжения по формуле (6)

$$\sigma_{(6)\text{экв}} = \sqrt{(3,26 + 323,87)^2 + 4 \cdot 59,13^2} = 347,85 \leq [380] \text{ до } 342 \text{ МПа;}$$

Дополнительная проверка точки 5, формула (5):

$$\sigma_{(5)\text{экв}} = \sqrt{(3,26 + 4 \cdot 69,98)^2 + 4 \cdot (47)^2} = 119,16 \leq [380] \text{ до } 342 \text{ МПа.}$$

Общий вывод: оставляем сечение $b \cdot h = 0,035 \times 0,070$ м, полученное по условию первой проверки.

8. Порядок выполнения расчетной работы

В данной задаче необходимо выполнить следующие этапы:

1. Согласно варианта расчетной схемы, состоящего из четырехзначного числа, необходимо обозначить стержни, начиная от свободного конца;
2. Выбрать и построить плавающую систему координат;
3. Последовательно, от консоли к защемлению, выделить произвольные сечения с координатами привязки к началу участка;
4. Записать уравнения равновесия внутренних силовых факторов с учетом знаков;
5. Построить эпюры внутренних силовых факторов;
6. Произвести проверку правильности эпюр;
7. На третьем (круглого сечения) участке проанализировать загруженность сечений;
8. Произвести расчет круглого сечения с построением эпюр напряжений;
9. Проверить условия прочности круглого сечения;

10. Произвести анализ загруженности сечений четвертого (прямоугольного сечения) участка;

11. Подобрать сечение бруса из условия прочности, построить эпюры напряжений;

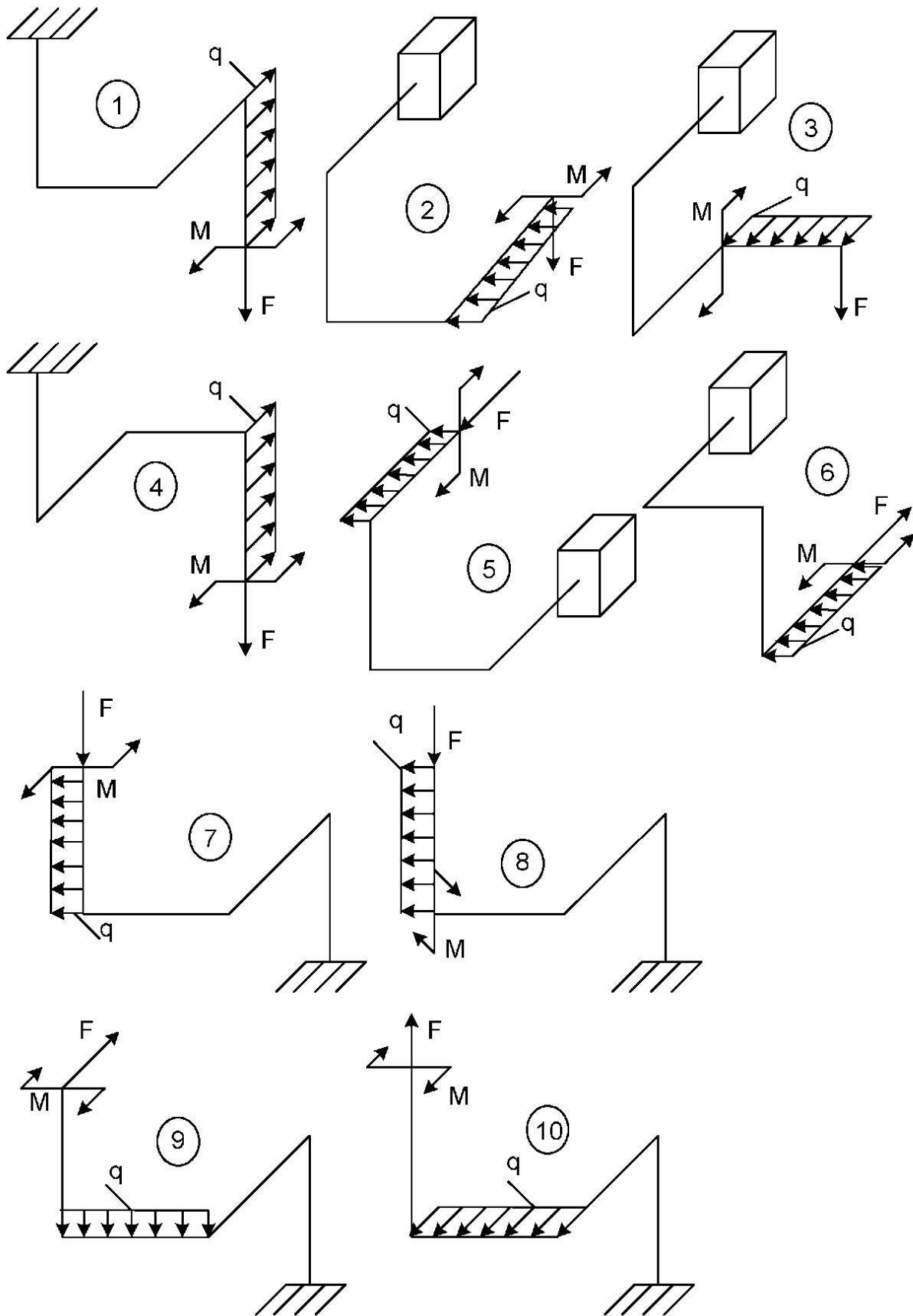
12. Проверить условия напряженного состояния прямоугольного сечения для характерных точек.

Библиографический список

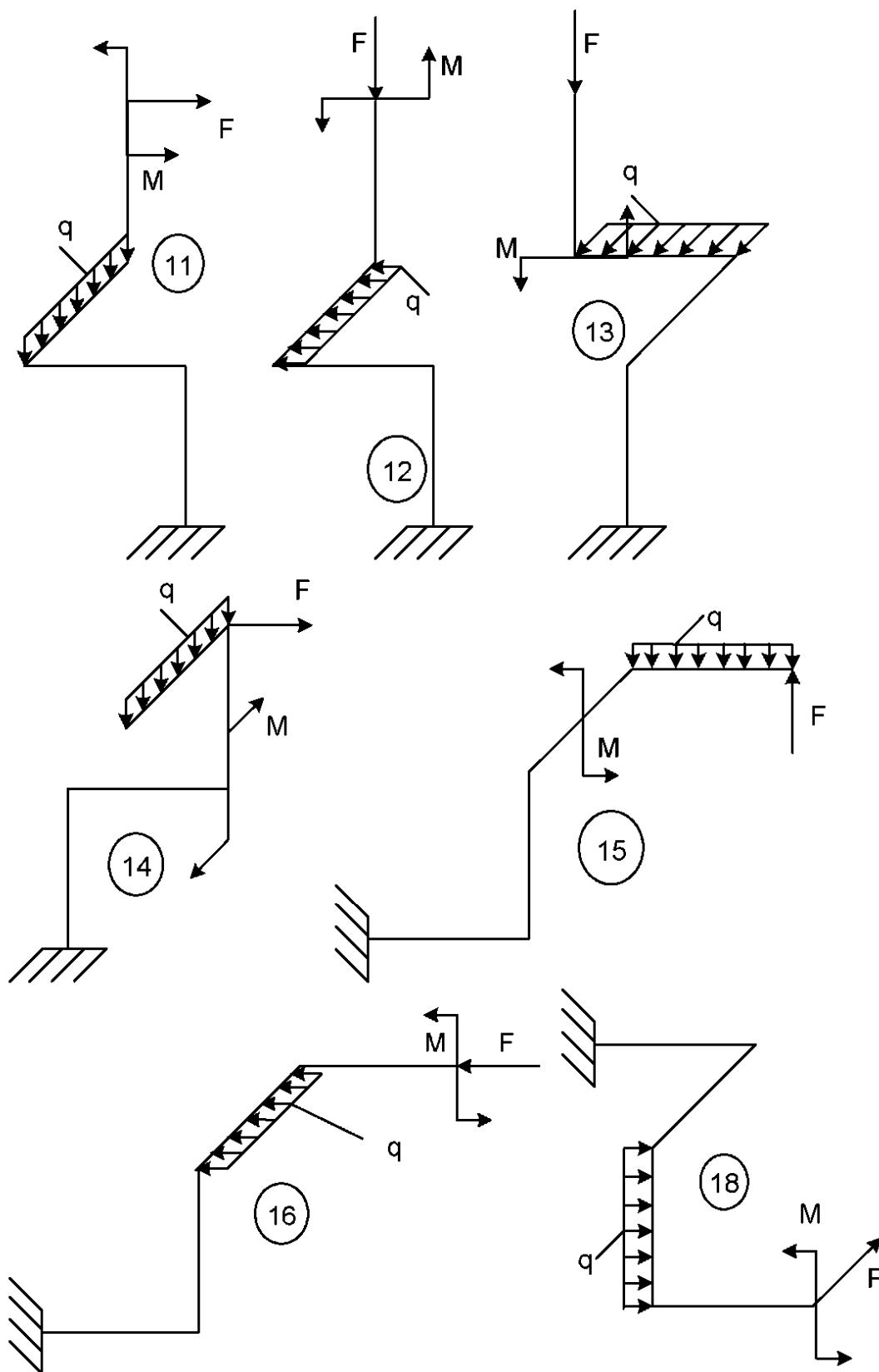
1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М., 1976.
2. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов. М., 1975.
3. Ицкович Г.М., Винокуров А.И., Минин Л.С. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. Росиздат, 1963.
4. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, 1975.
5. Анульев А.И. Справочник конструктора. Т.1...3. Техн. лит. М., 1977.
6. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Matcad. Спб.: БХВ – Петербург, 2004. - 512с.

Приложение 1

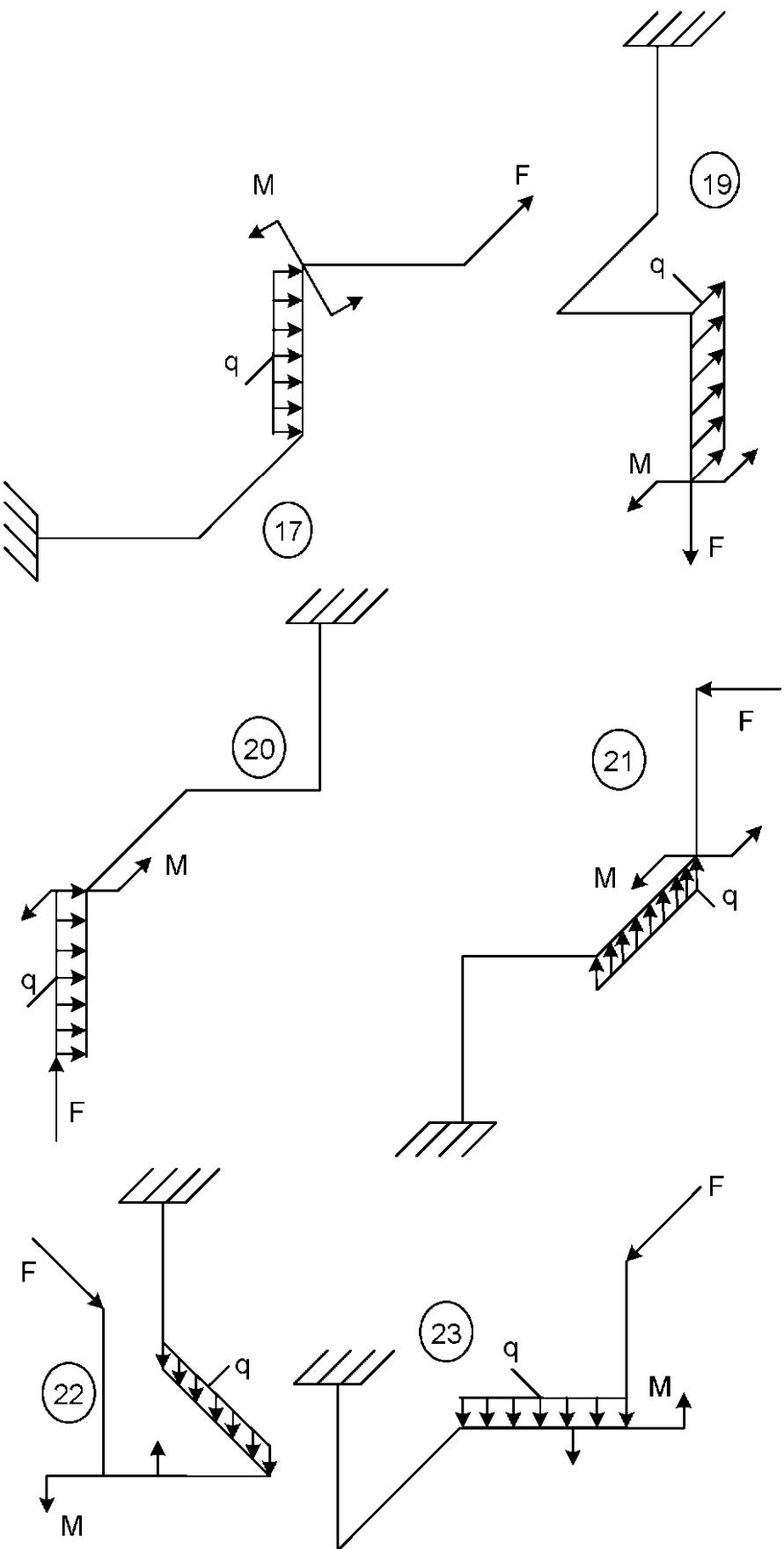
Расчетные схемы пространственного ломаного бруса



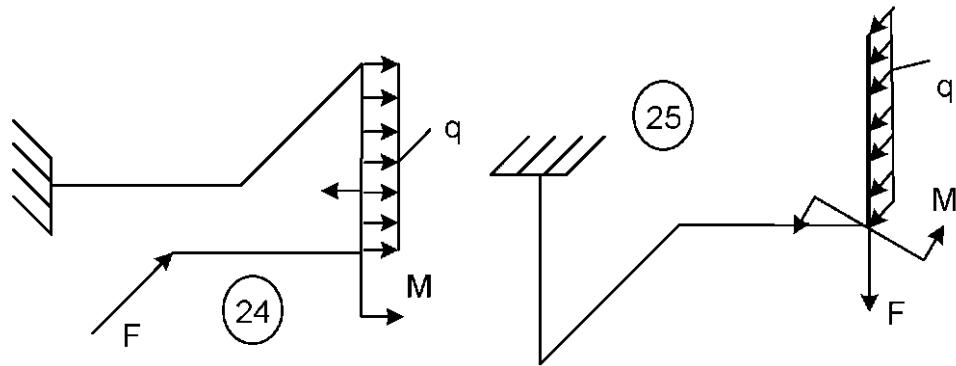
Продолжение приложения 1



Продолжение приложения 1



Окончание приложения 1



Приложение 2

Исходные данные к расчетным схемам

№ варианта	Силовые факторы		
	q кН/м	F кН	M кНм
1	5	8	4
2	6	6	5
3	4	5	6
4	3	9	3
5	5	8	5
6	7	6	4
7	6	7	3
8	5	9	4
9	6	6	5
10	4	8	5
11	7	7	4
12	5	8	9
13	4	7	8
14	5	6	7
15	3	5	8
16	4	4	6
17	5	7	9
18	7	6	5
19	8	4	3
20	6	6	4
21	4	3	9
22	6	8	10
23	5	7	9
24	4	5	8
25	4	6	7

Вопросы для самопроверки

1. Как выбирается координатная система для первого стержня?
2. Как строится плавающая система координат для последующих стержней?
3. Какие правила знаков приняты для внутренних силовых факторов N_x ; Q_y ; Q_z ; M_y ; M_z ; T ?
4. Как производится проверка эпюр N_x ; Q_y ; Q_z и эпюр M_y ; M_z ; T ?
5. По каким условиям выбирается опасное сечение стержня?
6. Какое напряженное состояние возникает в точках сечения бруса?
7. Какие гипотезы прочности используются для расчетов ломаного бруса?