

**ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР КРУТЯЩИХ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ**  
Методические рекомендации для выполнения контрольной работы

Контрольная работа «Построение эпюр крутящих и изгибающих моментов» имеет цель привить навыки по практическому исследованию деформаций кручения и изгиба в стержнях методом сечений.

## Цель выполнения контрольной работы

Контрольная работа «Построение эпюр крутящих и изгибающих моментов» имеет цель привить навыки по практическому исследованию деформаций кручения и изгиба в стержнях методом сечений. Контрольная работа состоит из двух частей.

## Указания к выполнению контрольной работы

Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы, слушателю необходимо знать следующий теоретический материал:

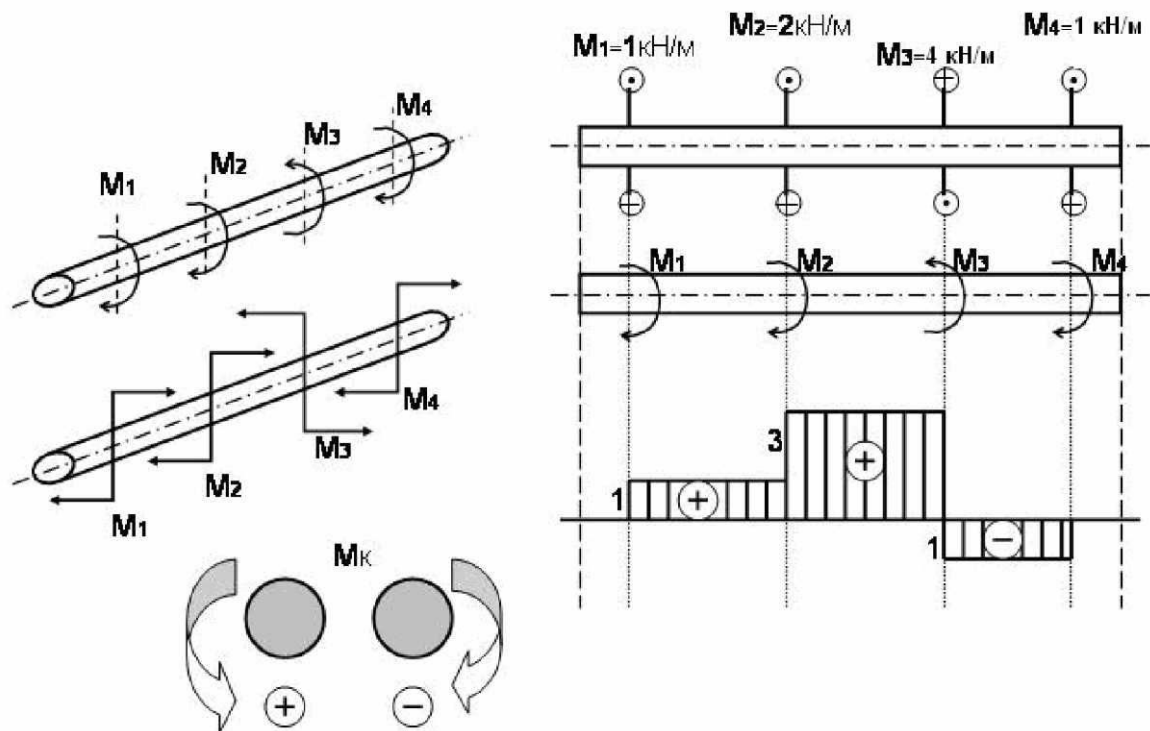
- Метод сечений.
- Построение эпюр крутящих моментов.
- Определение напряжений в стержнях круглого поперечного сечения.
- Условие прочности при кручении.
- Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
- Изгиб в двух плоскостях (косой изгиб).
- Условие прочности при косом изгибе.

## Основные понятия о кручении.

### Пример выполнения первой части контрольной работы.

**Кручение** – это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор-  
**крутящий момент ( $M_k$ )**.

Деформация кручения возникает при нагружении бруса парами сил. Моменты этих пар называются **скручивающими моментами ( $M$ )**.



Момент представлен в виде двух кружков. Кружок с точкой обозначает силу, направленную на наблюдателя, а кружок с крестом – силу, направленную от наблюдателя.

При кручении бруса в его поперечных сечениях возникают только касательные напряжения. При этом, в центре бруса касательные напряжения равны нулю, а в точках контура касательные напряжения – максимальны!

$$\tau_{\max} = \frac{M_k \cdot d}{I_p \cdot 2}$$

где  $I_p$  - полярный момент инерции:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1d^4 \text{ - для круга.}$$

Отношение полярного момента инерции к расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной его точки называется **полярным моментом сопротивления** ( $\text{см}^3$ ,  $\text{м}^3$ ):

$$W_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{2I_p}{d}, \text{ или } \tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}$$

$$\text{Для круга: } W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2d^3$$

Если крутящий момент во всех поперечных сечениях бруса имеет одно и то же значение, а размеры сечения постоянны по всей длине, то полный угол закручивания равен: 
$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p};$$

где  $G \cdot I_p$  - жесткость сечения при кручении ( $H \cdot \text{см}^2$ ,  $\text{кН} \cdot \text{м}^2$ )

Условие прочности при кручении: 
$$\tau_{\max} = \frac{|M_k^{\max}|}{W_p} \leq [\tau_k],$$

где  $[\tau_k]$  - допускаемое напряжение при кручении, зависящее от свойств материала бруса и от принятого коэффициента запаса прочности.

При расчете скручиваемых брусев на прочность возможны следующие три вида задач:

- проверка напряжений (проверочный расчет):  $\tau_{\max} \leq [\tau_k],$

- подбор сечения бруса (проектный расчет):  $W_p \geq \frac{|M_k^{\max}|}{[\tau_k]},$

- определение допускаемой нагрузки:  $|M_k^{\max}| \leq W_p \cdot [\tau_k]$

Условие жесткости при кручении: 
$$\varphi_{\max} = \frac{M_k^{\max}}{G \cdot I_p} \leq [\varphi_0],$$

где  $\varphi_{\max}$  - наибольший относительный угол закручивания бруса,  $[\varphi_0]$  - допускаемый относительный угол закручивания.

**ПРИМЕР.** Построить эпюры  $M_k$  и  $\tau_{\max}$ , из условия прочности вычислить  $d$  вала.

**Решение.** Разобьем брус на три участка:

I участок:  $M_k - m$

II участок:  $M_k - m - 2m - - m$

III участок:  $M_k - m - 2m - 4m - - 5m$

Вычислим  $\tau_{\max}$  по участкам.

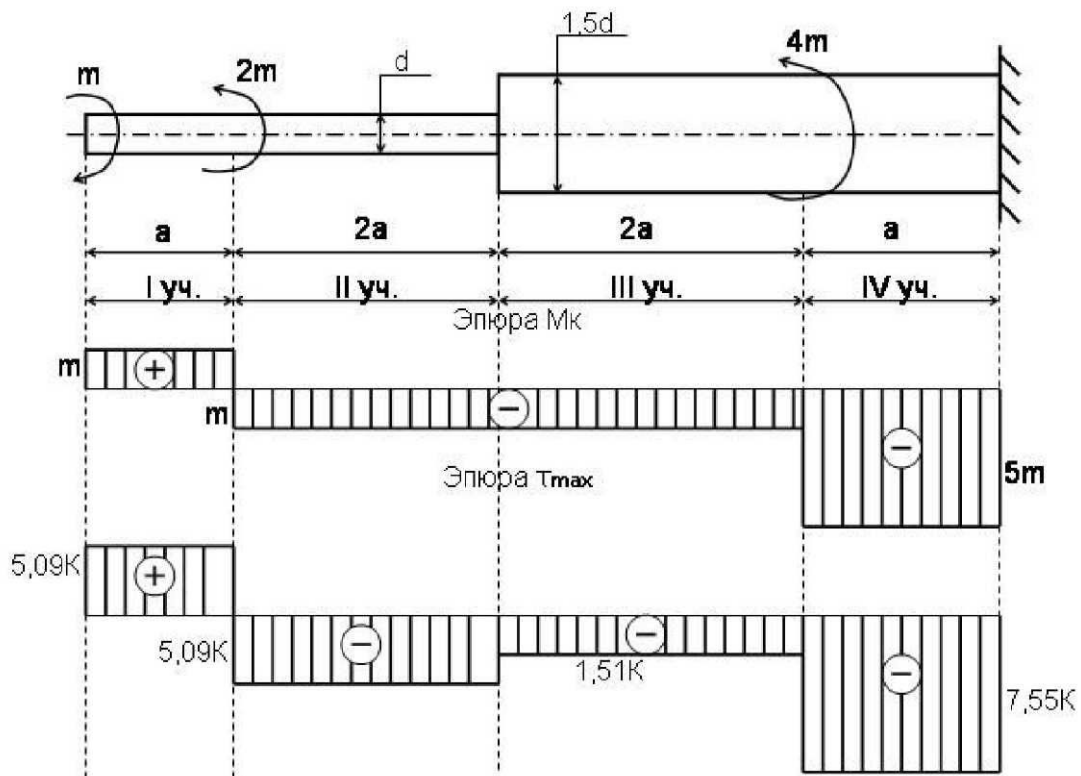
I участок:  $\tau_{\max}^I = \frac{M_k^I}{W_p^I} = \frac{m}{\pi \cdot d^3 / 16} = 5,09 \frac{m}{d^3}$

II участок:  $\tau_{\max}^{II} = \frac{M_k^{II}}{W_p^{II}} = - \frac{m}{\pi \cdot d^3 / 16} = - 5,09 \frac{m}{d^3}$

$$\text{III участок: } \tau_{\max}^{\text{III}} = \frac{M_k^{\text{III}}}{W_p^{\text{III}}} = - \frac{m}{\pi \cdot 1,5 \cdot d^3 / 16} = - 1,51 \frac{m}{d^3}$$

$$\text{IV участок: } \tau_{\max}^{\text{IV}} = \frac{M_k^{\text{IV}}}{W_p^{\text{IV}}} = - \frac{5m}{\pi \cdot 1,5 \cdot d^3 / 16} = - 7,55 \frac{m}{d^3}$$

Обозначим  $\frac{m}{d^3} = K$  и построим эпюру.



Диаметр стержня вычислим из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_k^{\max}|}{W_p} \leq [\tau_k],$$

$$\text{Для круглого сечения: } W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{|M_k^{\max}|}{0,2 \cdot [\tau_k]}} = 2,93 \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{[\tau_k]}}$$

**ПРИМЕР.** Построить эпюры  $M_k$  и  $\tau_{\max}$ , из условия прочности найти  $d$  вала.

**Решение:** Разобьем брус на три участка:

I участок:  $M_k = m$

II участок:  $M_k = m - 2m = -m$

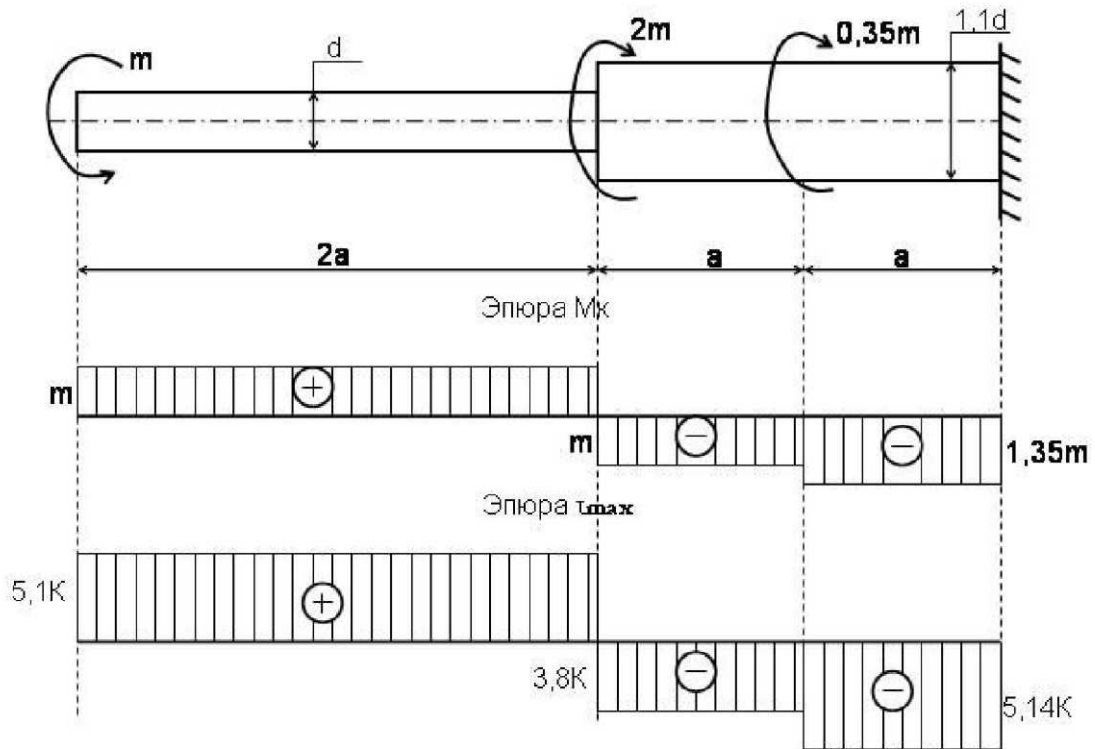
III участок:  $M_k = m - 2m - 0,35m = -1,35m$

Вычислим  $\tau_{\max}$  по участкам:

$$\text{I участок: } \tau_{\max}^I = \frac{M_k^I}{W_p^I} = \frac{m}{\pi \cdot d^3 / 16} = 5,1 \frac{m}{d^3}$$

$$\text{II участок: } \tau_{\max}^{II} = \frac{M_k^{II}}{W_p^{II}} = - \frac{m}{\pi \cdot 1,1d^3 / 16} = - 3,8 \frac{m}{d^3}$$

$$\text{III участок: } \tau_{\max}^{III} = \frac{M_k^{III}}{W_p^{III}} = - \frac{m}{\pi \cdot 1,1 \cdot d^3 / 16} = - 5,14 \frac{m}{d^3}$$



Диаметр стержня вычислим из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_k^{\max}|}{W_p} \leq [\tau_k],$$

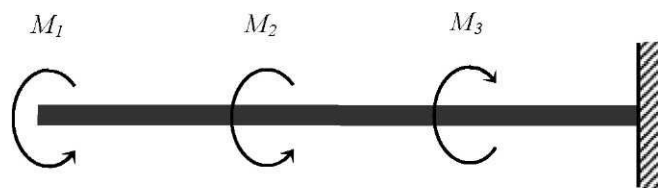
Для круглого сечения:  $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{|M_k^{\max}|}{0,2 \cdot [\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{1,35m}{0,2 \cdot [\tau_k]}} =$   
 $= 1,89 \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{[\tau_k]}}$

### Варианты заданий для построения эпюр крутящих моментов

Вариант схемы выбирается слушателем по своему порядковому номеру в учебном журнале.

#### Вариант 1

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{\max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$

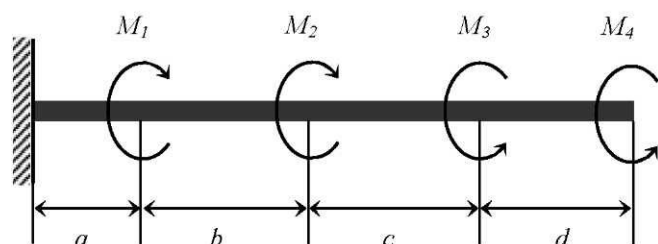
$$M_1 = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

#### Вариант 2

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{\max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

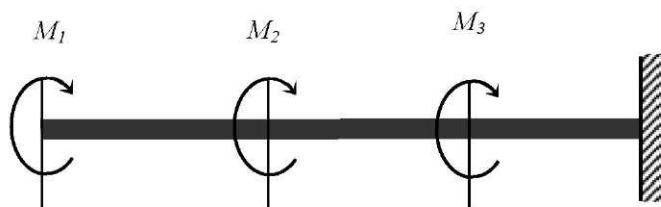
$$M_2 = 1,1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 3

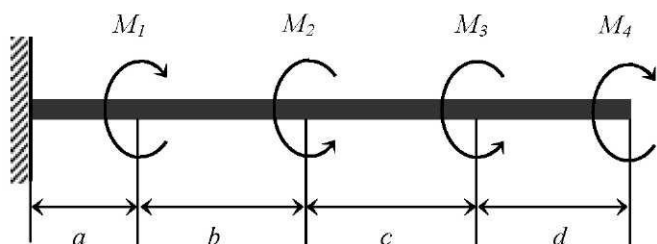
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 4

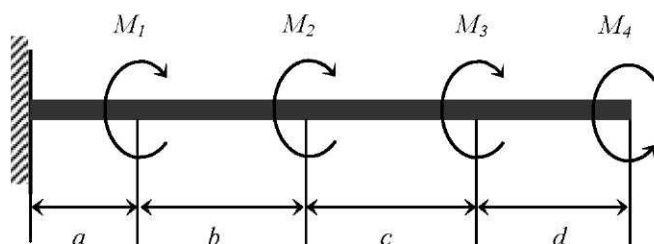
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 4,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 3,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_4 = 7,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 5

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .

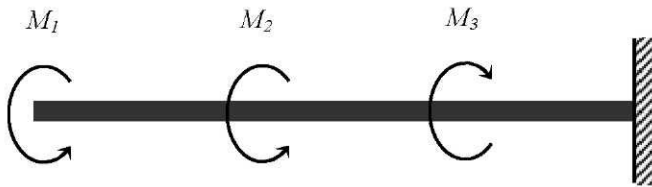


$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_4 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$



### Вариант 6

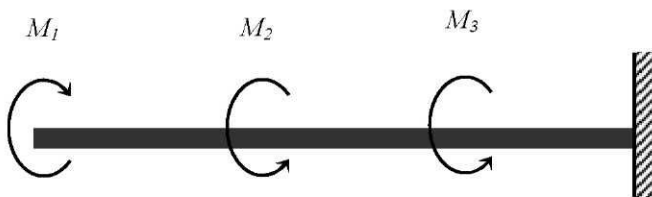
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 7

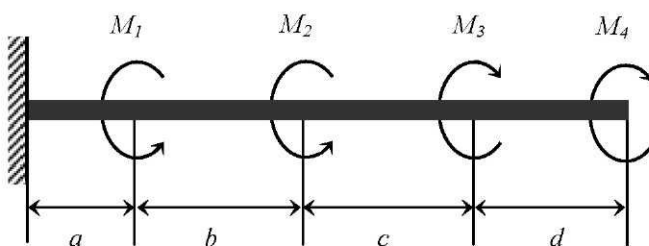
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 40 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 8

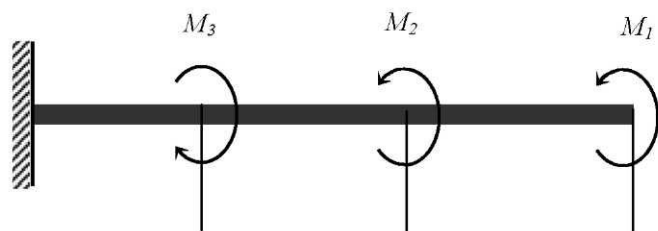
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_4 = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 9

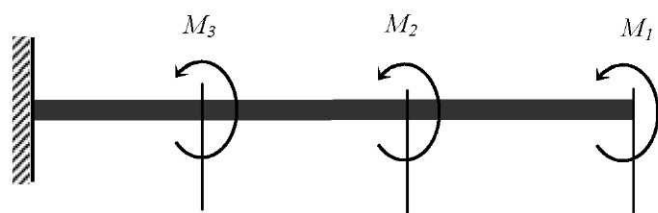
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 40 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 3,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 10

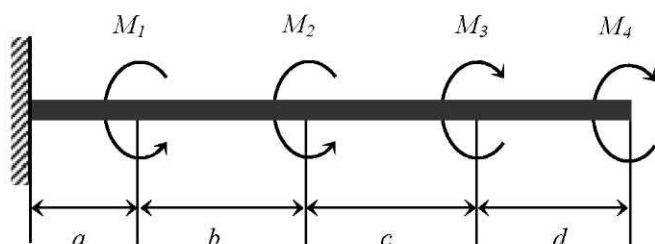
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 40 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 3,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 11

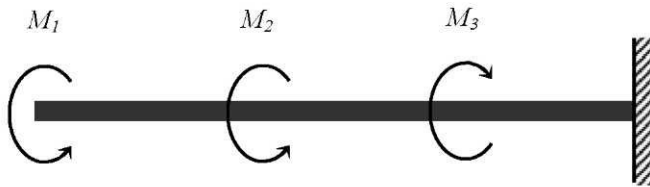
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_4 = 1,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 12

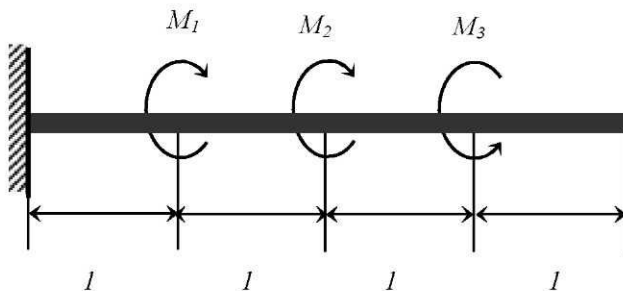
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 13

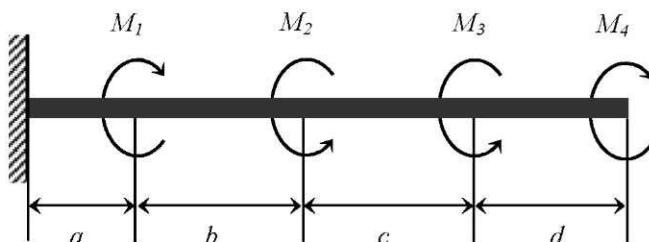
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 14

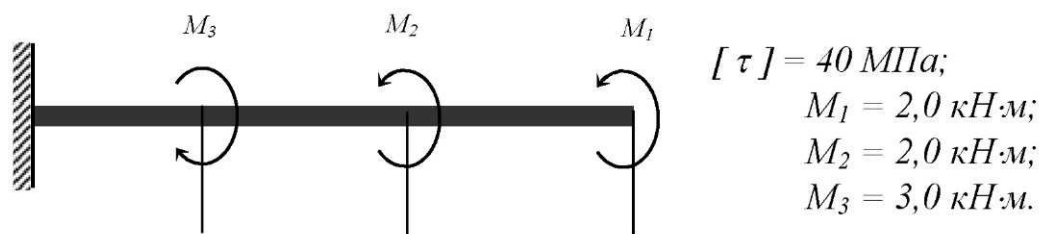
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 1,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_4 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

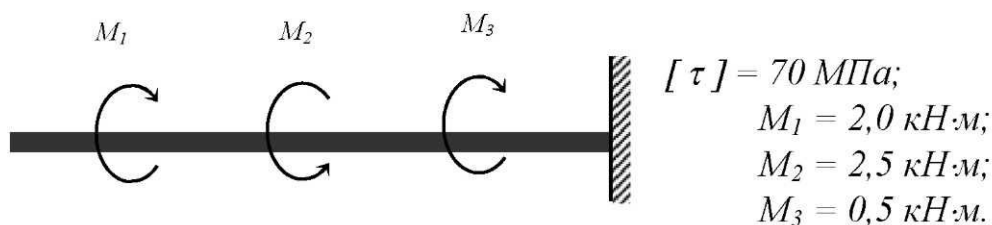
### Вариант 15

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



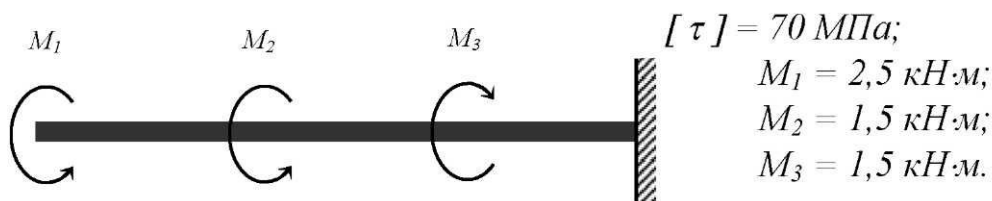
### Вариант 16

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



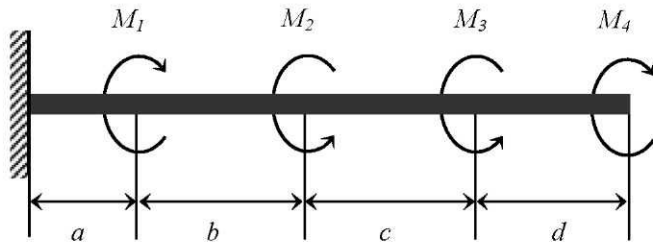
### Вариант 17

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



### Вариант 18

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 1,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

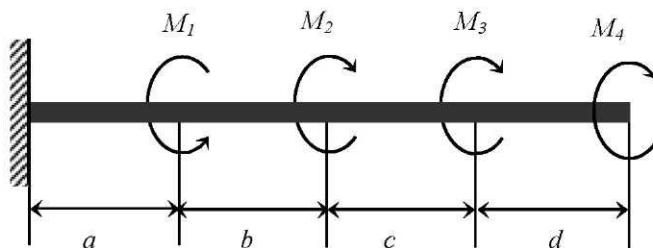
$$M_2 = 2,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 1,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 19

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 1,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

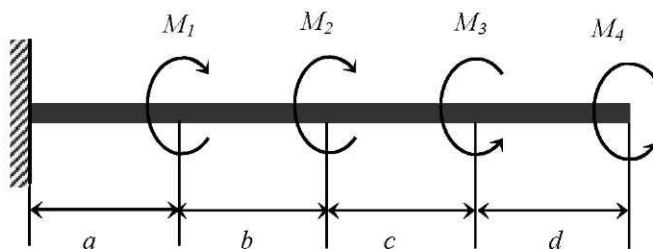
$$M_2 = 2,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 1,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 1,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 20

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

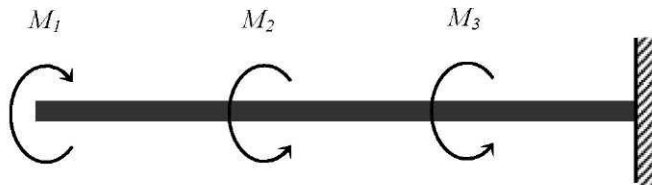
$$M_2 = 1,1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 21

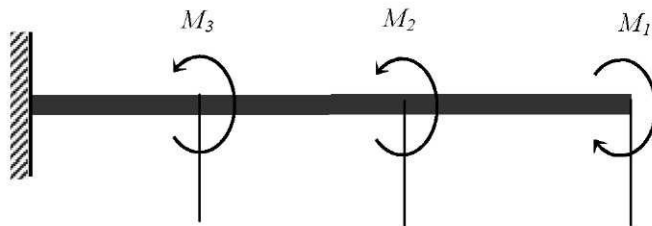
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 40 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 22

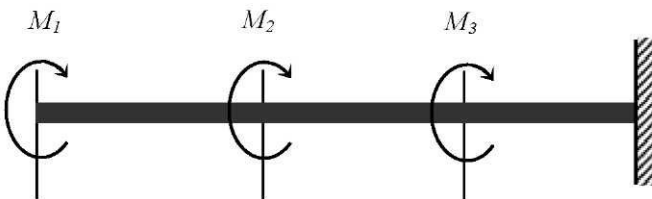
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 23

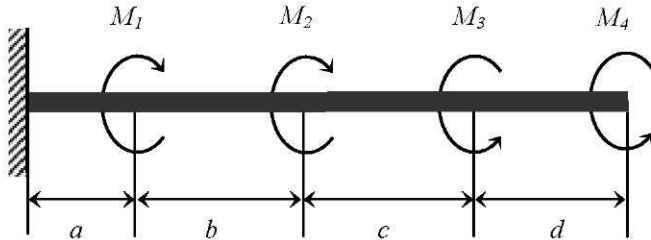
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 24

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

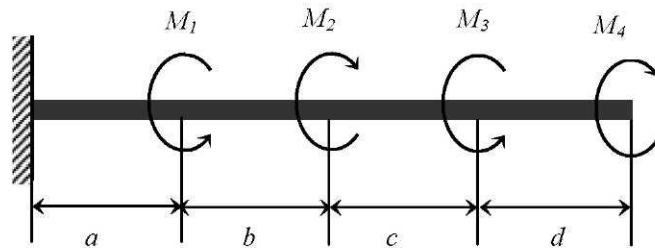
$$M_2 = 1,1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 25

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 40 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

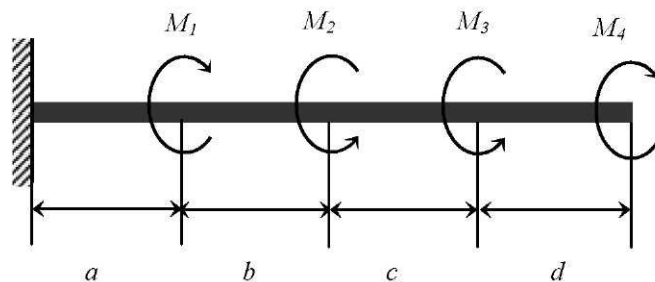
$$M_2 = 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 3,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 26

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 1,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

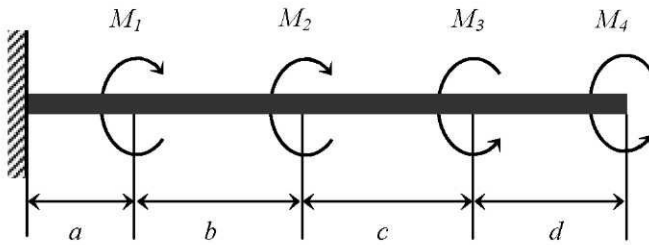
$$M_2 = 2,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 1,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 27

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

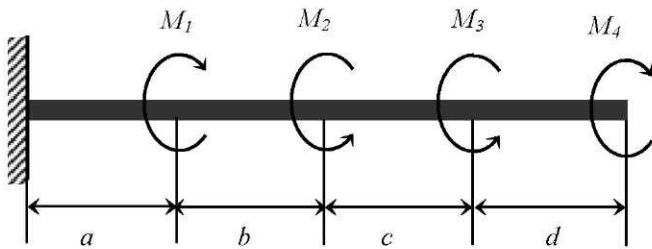
$$M_2 = 1,1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 28

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

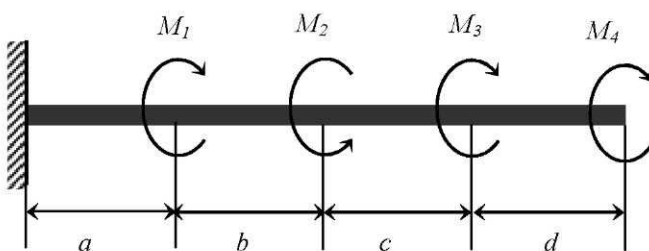
$$M_2 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 2,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 2,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 29

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 70 \text{ МПа};$$

$$M_1 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

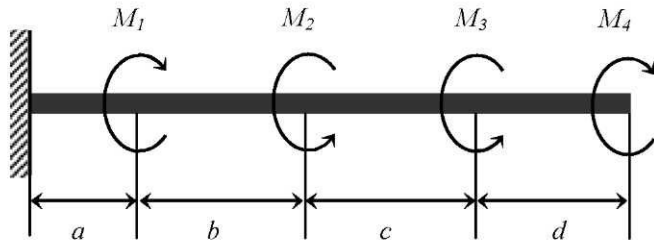
$$M_3 = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 1,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$



### Вариант 30

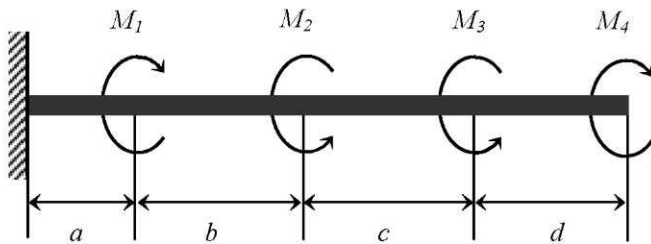
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 4,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 3,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_4 = 7,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 31

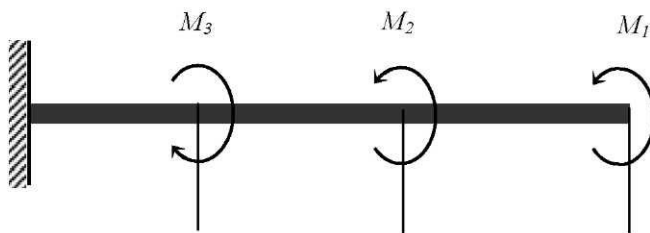
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 60 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 1,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 1,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_4 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

### Вариант 32

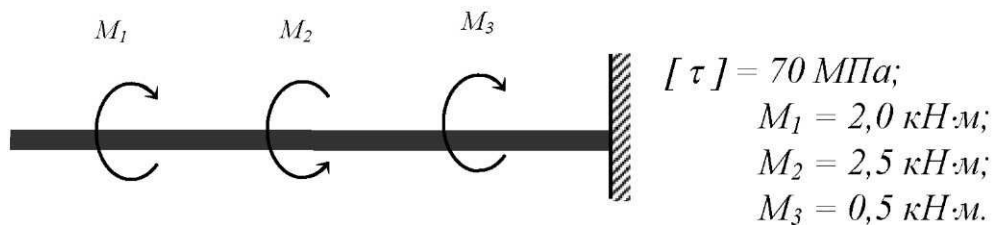
Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



$$[\tau] = 40 \text{ МПа};$$
$$M_1 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_2 = 2,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$M_3 = 3,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

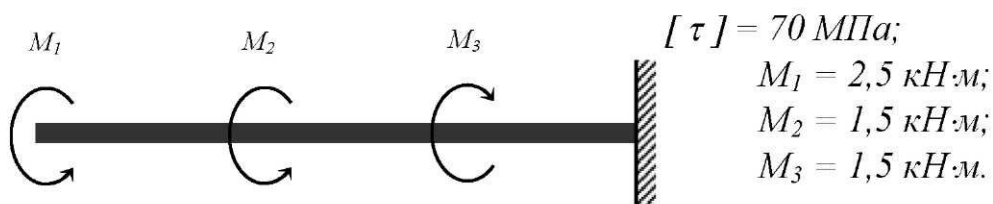
### Вариант 33

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



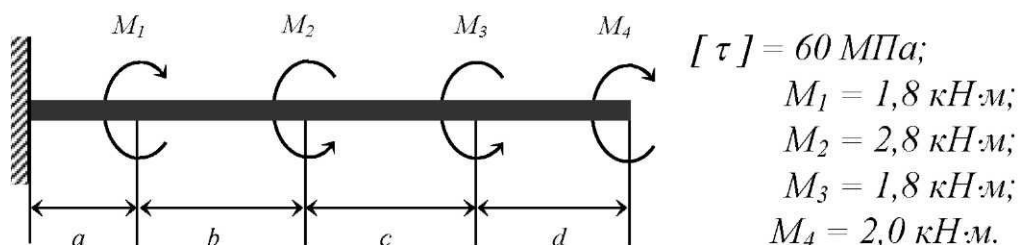
### Вариант 34

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



### Вариант 35

Для заданного вала построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала на каждом из участков. Построить эпюру  $\tau_{max}$ .



## Основные понятия о косом изгибе.

### Пример выполнения второй части контрольной работы.

**Косым** изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении бруса не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции сечения.

Пусть балка нагружена некоторой силой  $P$ , перпендикулярной её продольной оси, но не совпадающей ни с одной из главных центральных осей её поперечного сечения (рис. 1).

Силу  $P$  можно разложить на составляющие  $P_x$  и  $P_y$ , каждая из которых вызывает прямой изгиб балки: сила  $P_x$  – в горизонтальной плоскости, а сила  $P_y$  – в вертикальной (рис. 2).

Таким образом, косой изгиб балки представляет собой сочетание двух прямых изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях.

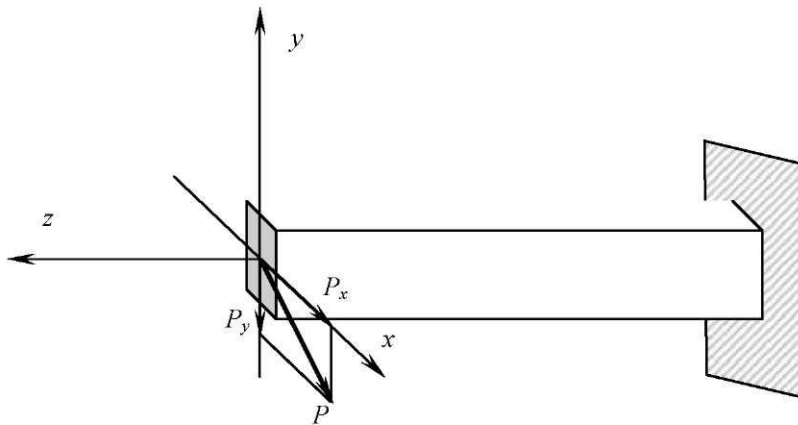


Рис. 1

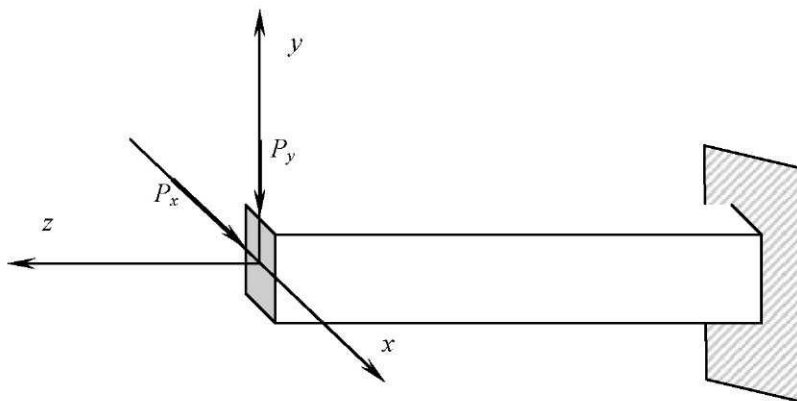


Рис. 2

Напомним: при прямом изгибе в поперечных сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения.

**Нормальное напряжение при косом изгибе** в произвольной точке сечения с координатами  $(x; y)$  равно сумме напряжений от изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  относительно главных центральных осей инерции сечения:

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x,$$

где  $M_x$  – изгибающий момент относительно оси  $x$  (возникает под действием силы  $P_y$ );  
 $M_y$  – изгибающий момент относительно оси  $y$  (возникает под действием силы  $P_x$ );  
 $I_x$  – момент инерции сечения относительно оси  $x$ ;  
 $I_y$  – момент инерции сечения относительно оси  $y$ ;  
 $x, y$  – координаты точки сечения, в которой определяется напряжение.

Необходимо учитывать, что величины  $M_x, M_y, x, y$  в выражении (1) могут быть как положительными, так и отрицательными.

**Условие прочности** по нормальным напряжениям, как и при прямом изгибе, имеет вид:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

Для расчета на прочность при косом изгибе необходимо:

- определить поперечное сечение, в котором оба изгибающих момента  $M_x$  и  $M_y$  имеют наибольшие значения – **опасное сечение**;
- найти точку в этом сечении, в которой нормальное напряжение максимально – **опасную точку**.

Чтобы определить опасное сечение, требуется построить эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ .

Для брусьев, поперечное сечение которых имеет две оси симметрии, опасными точками являются крайние точки, максимально удаленные одновременно от обеих осей (точки  $A, B, C, D$  на рис.3):

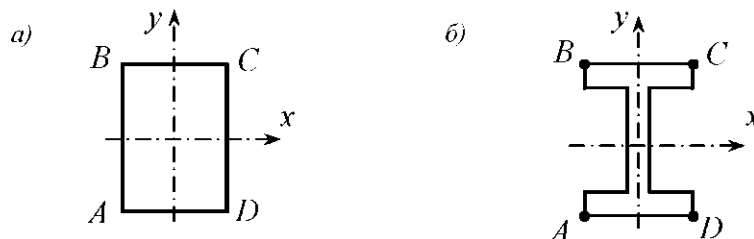


Рис. 3. Опасные точки прямоугольного (а) и двутаврового (б) сечений

Ось, во всех точках которой нормальные напряжения равны нулю, называется *нейтральной осью*. При косом изгибе нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения стержня.

### Пример 1.

Для балки с постоянным прямоугольным поперечным сечением (рис. 4) построить эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ .

Проверить балку на прочность по нормальным напряжениям в *самых опасных точках заделки*.

Дано допускаемое значение нормального напряжения:  $[\sigma] = 835$  МПа.

Значения сосредоточенных сил:  $P_1=3$  кН;  $P_2=10$  кН;  $P_3=6$  кН.  
Размеры сечения:  $b = 6$  см  $= 0,06$  м;  $h = 10$  см  $= 0,1$  м.

Линейные размеры приведены на схеме.

*Решение:*

Применяем метод сечений. Начиная со свободного торца, разбиваем балку на участки, проводя их границы через сечения, в которых приложены внешние силы.

1. *Построим эпюру для изгибающего момента  $M_x$ .* Для этого рассмотрим только все вертикальные силы на балке, то есть те, которые стремятся совершить деформацию изгиба относительно оси  $x$ .

(В вертикальной плоскости, в плоскости чертежа.)

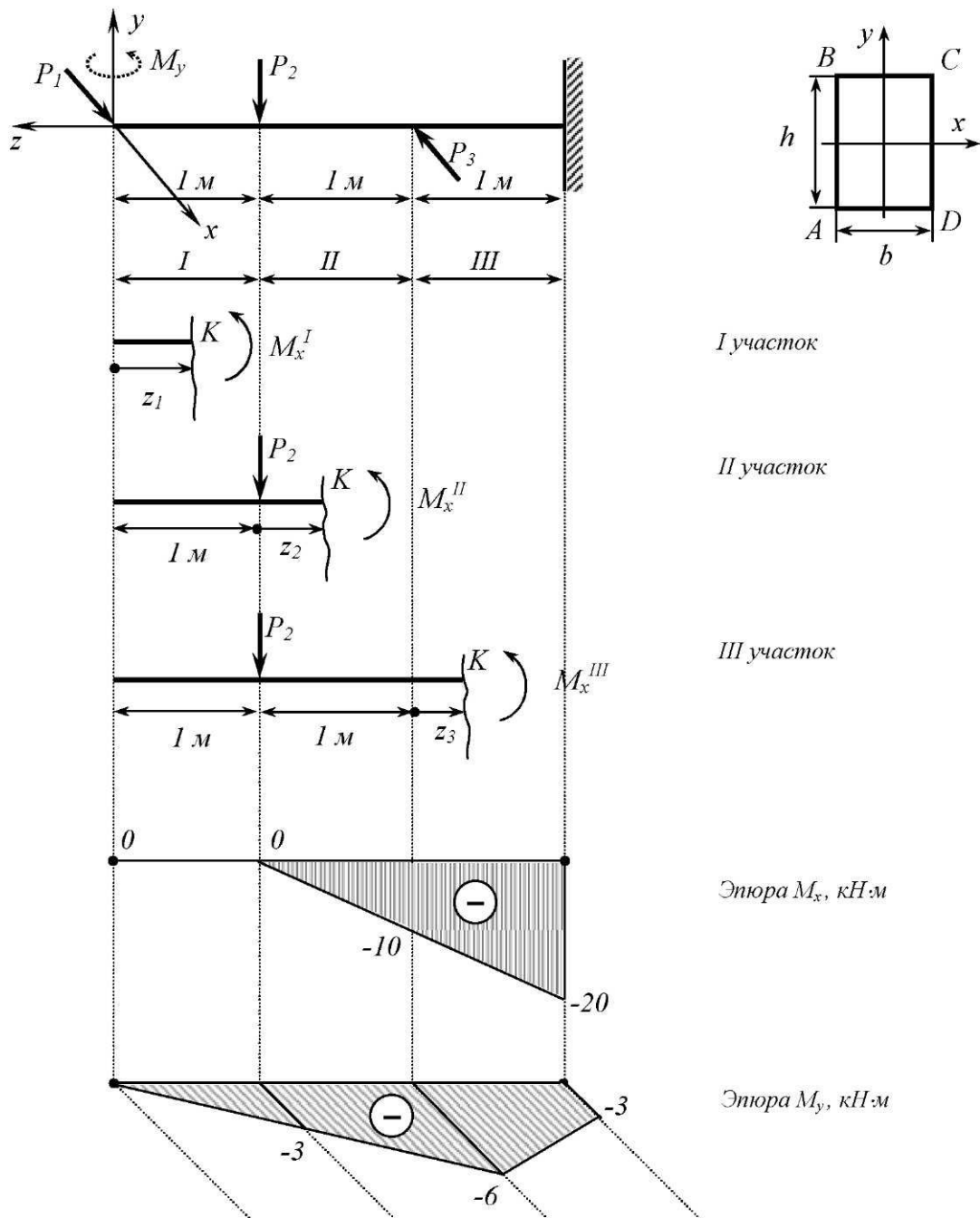


Рис. 4

**I участок.**  $0 \leq z_1 \leq l$ .

Проводим произвольное сечение. Отбрасываем правую часть балки вместе с заделкой. Рассматриваем моменты всех сил, приложенных к оставленной левой части балки. Заменяем действие отброшенной (правой) части внутренним изгибающим моментом  $M_x$ , считая его положительным (последовательность рассуждений отображена на рис. 4).

Составляем уравнение равновесия для моментов относительно точки  $K$  – центра тяжести сечения:

$$\sum M_{x(\cdot)K} = 0. \quad M_x^I = 0.$$

**II участок.**  $0 \leq z_2 \leq 1.$

$$\sum M_{x(\cdot)K} = 0. \quad M_x^{II} + P_2 \cdot z_2 = 0; \quad M_x^{II} = -P_2 \cdot z_2;$$

$$\underline{M_x^{II} = -10 \cdot z_2}$$

На границах участка:  $M_x^{II}(0) = 0$  (кН·м);  
 $M_x^{II}(1) = -10$  (кН·м).

**III участок.**  $0 \leq z_3 \leq 1.$

$$\sum M_{x(\cdot)K} = 0. \quad M_x^{III} + P_2(1 + z_3) = 0; \quad \underline{M_x^{III} = -10(1 + z_3)}$$

На границах участка:  $M_x^{III}(0) = -10$  (кН·м);  
 $M_x^{III}(1) = -20$  (кН·м).

Строим эпюру  $M_x$  в плоскости чертежа.

2. **Построим эпюру для изгибающего момента  $M_y$ .** Для этого рассмотрим только все горизонтальные силы на балке, то есть те, которые стремятся совершить деформацию изгиба относительно оси  $y$ . (В горизонтальной плоскости, то есть в плоскости, перпендикулярной чертежу.) Изгибающий момент  $M_y$ , так же, как и момент  $M_x$ , справа от сечения считаем положительным (см. рис. 4). (Последовательность рассуждений аналогична той, что использовалась для построения эпюры  $M_x$ , и на схеме не отображена.)

**I участок.**  $0 \leq z_1 \leq 1.$

$$\sum M_{y(\cdot)K} = 0. \quad M_y^I + P_1 \cdot z_1 = 0. \quad \underline{M_y^I = -3 \cdot z_1}$$

На границах участка:  $M_y^I(0) = 0$  (кН·м);  
 $M_y^I(1) = -3$  (кН·м).

**II участок.**  $0 \leq z_2 \leq 1.$

$$\sum M_{y(\cdot)K} = 0. \quad M_y^{II} + P_1(1 + z_2) = 0; \quad \underline{M_y^{II} = -3(1 + z_2)}$$

На границах участка:  $M_y^{II}(0) = -3$  (кН·м);  
 $M_y^{II}(1) = -6$  (кН·м).

**III участок**

$$0 \leq z_3 \leq 1.$$

$$\sum M_{y(\cdot)K} = 0. \quad M_y^{III} + P_1(2 + z_3) - P_3 \cdot z_3 = 0;$$

$$M_y^{III} = P_3 \cdot z_3 - P_1(2 + z_3)$$

$$\underline{M_y^{III} = 6z_3 - 3(2 + z_3)}$$

На границах участка:  $M_y^{III}(0) = -6$  (кН·м);

$$M_y^{III}(1) = 6 - 9 = -3$$
 (кН·м).

Строим эпюру  $M_y$  в горизонтальной плоскости.

3. Определим нормальные напряжения в четырех опасных точках сечения в заделке по формуле (1).

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x;$$

Рассчитаем моменты инерции прямоугольника:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot (10^{-1})^3}{12} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^4\text{)};$$

$$I_y = \frac{b^3h}{12} = \frac{(6 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 10^{-1}}{12} = 1,8 \cdot 10^{-6} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^4\text{)}.$$

Значения изгибающих моментов в заделке определяем по эпюрам (рис. 4):

$$M_x = -20 \cdot 10^3 \text{ (Н·м)};$$

$$M_y = -3 \cdot 10^3 \text{ (Н·м)}.$$

Определим напряжение в точке **A**.

Её координаты:  $x = -b/2 = -0,03$  м;

$$y = -h/2 = -0,05 \text{ м}.$$

$$\sigma_A = \frac{-20 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0,05) + \frac{-3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0,03) = 20 \cdot 10^7 + 4,5 \cdot 10^7 = 2,45 \cdot 10^8$$

(Па).

Определим напряжение в точке **B**.

Её координаты:  $x = -b/2 = -0,03$  м;

$$y = h/2 = 0,05 \text{ м}.$$

$$\sigma_B = \frac{-20 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,05 + \frac{-3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0,03) = -20 \cdot 10^7 + 4,5 \cdot 10^7 = -1,55 \cdot 10^8$$

(Па).



Определим напряжение в точке **C**.

Её координаты:  $x = b/2 = 0,03$  м;  
 $y = h/2 = 0,05$  м.

$$\sigma_C = \frac{-20 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,05 + \frac{-3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,03 = -20 \cdot 10^7 - 4,5 \cdot 10^7 = -2,45 \cdot 10^8 \text{ (Па)}.$$

Определим напряжение в точке **D**.

Её координаты:  $x = b/2 = 0,03$  м;  
 $y = -h/2 = -0,05$  м.

$$\sigma_D = \frac{-20 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0,05) + \frac{-3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,03 = 20 \cdot 10^7 - 4,5 \cdot 10^7 = 1,55 \cdot 10^8 \text{ (Па)}.$$

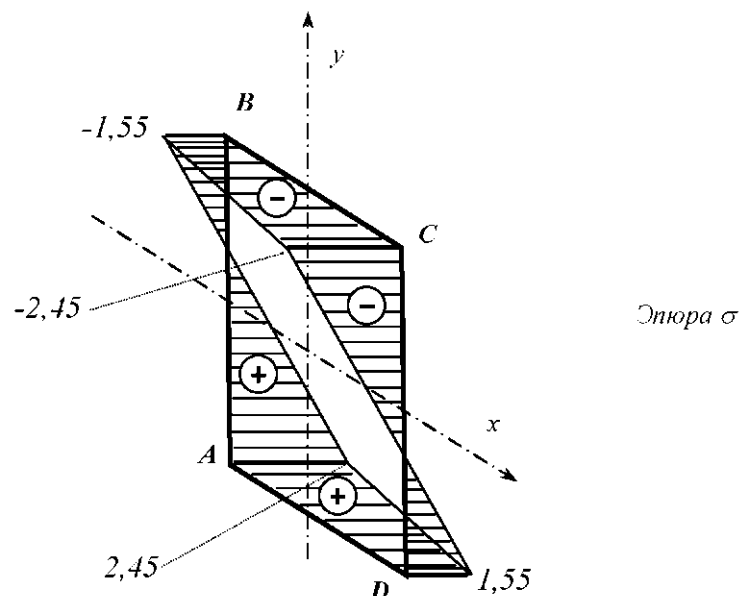
Значения напряжения максимальны в точках **A** и **C**.

Проверим, соблюдается ли в этих точках условие прочности:

$$\sigma_A = |\sigma_C| = 2,45 \cdot 10^8 = 245 \text{ МПа} < [\sigma] = 835 \text{ МПа}.$$

Следовательно, расчет подтверждает выполнение условия прочности.

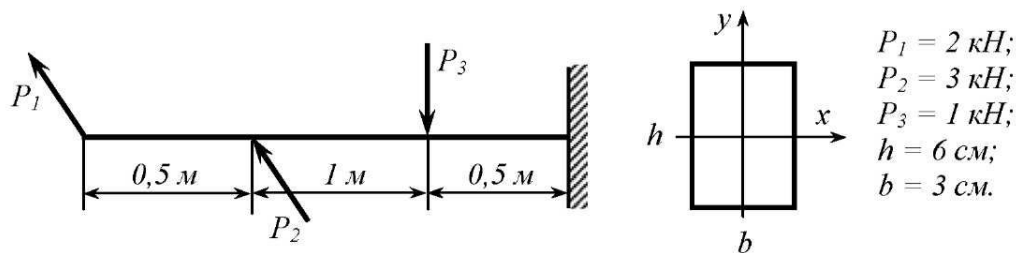
4. Строим эпюру нормальных напряжений в сечении, находящемся в заделке.



## Варианты заданий для построения эпюр изгибающих моментов

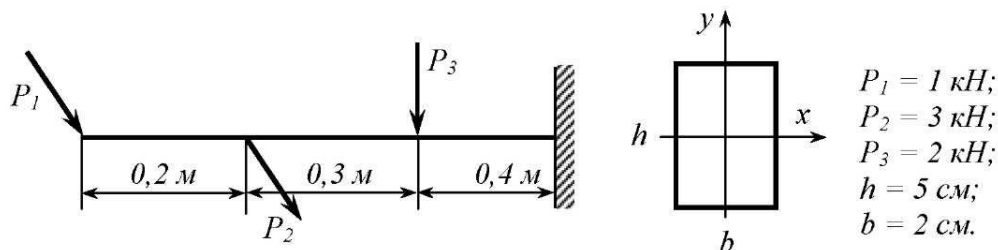
### Вариант 1

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



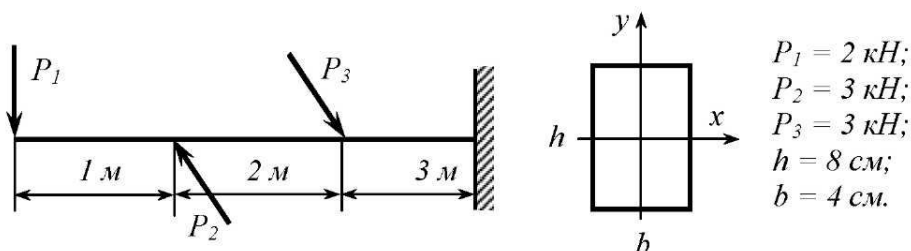
### Вариант 2

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



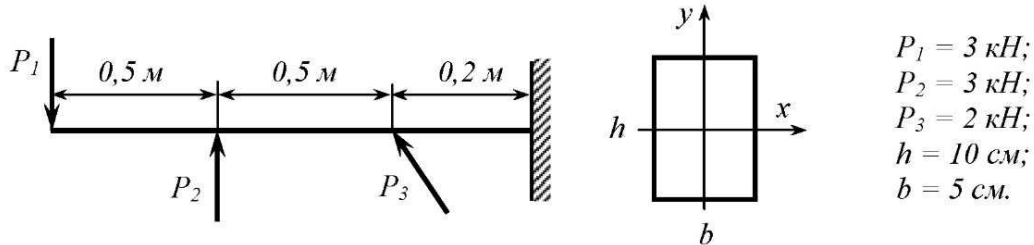
### Вариант 3

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



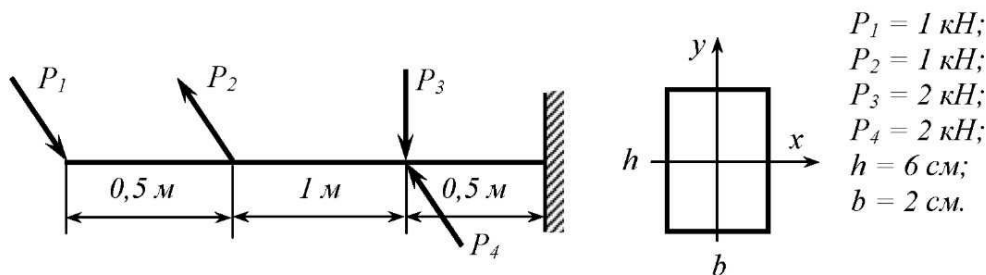
### Вариант 4

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



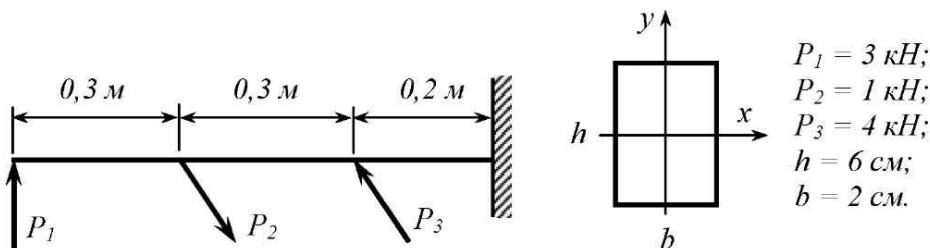
### Вариант 5

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



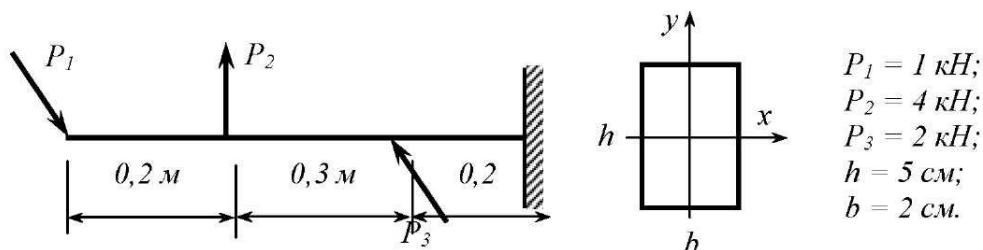
### Вариант 6

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



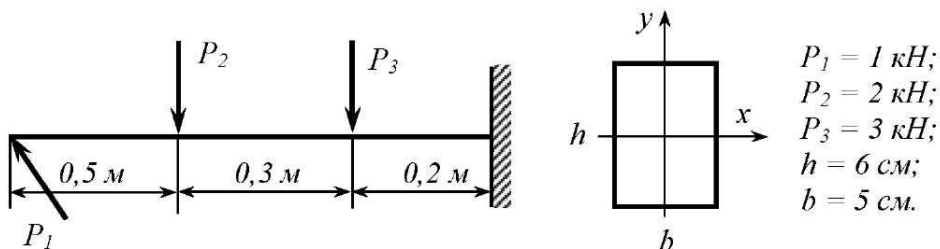
### Вариант 7

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



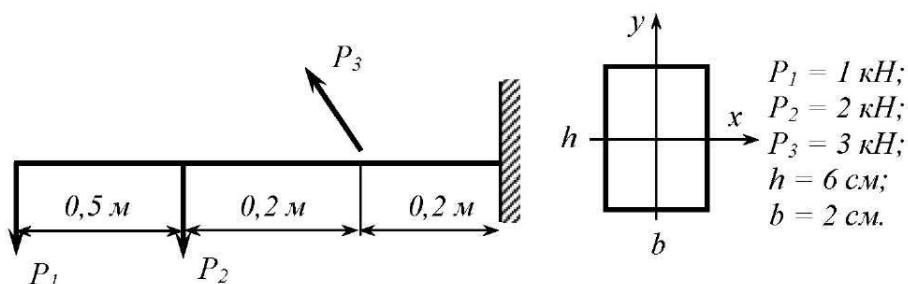
### Вариант 8

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



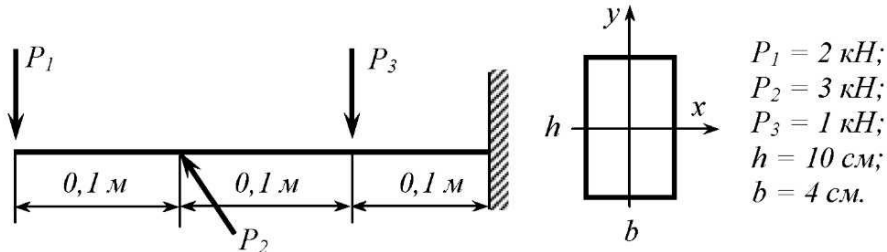
### Вариант 9

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



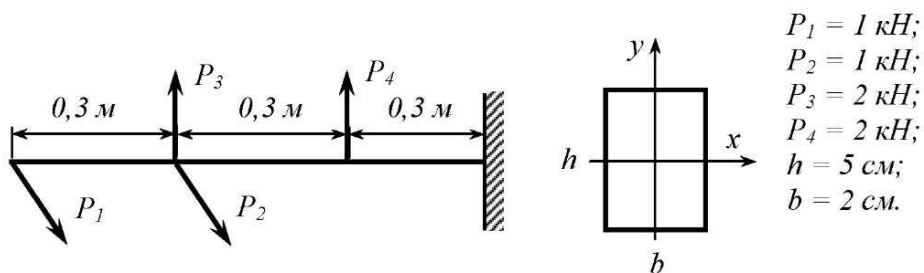
### Вариант 10

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



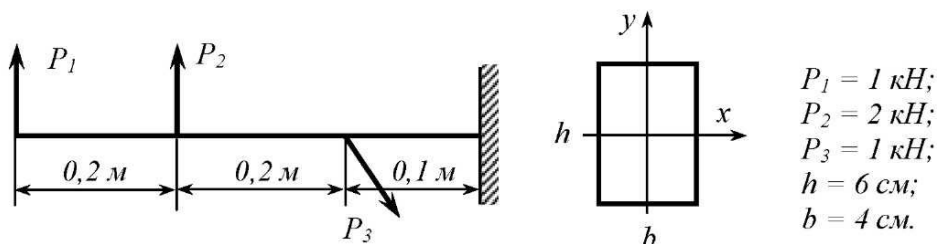
### Вариант 11

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



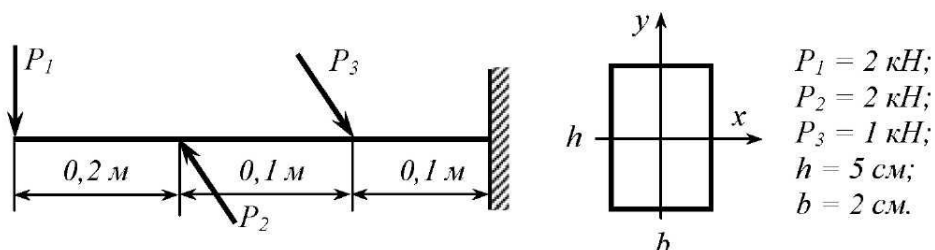
### Вариант 12

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



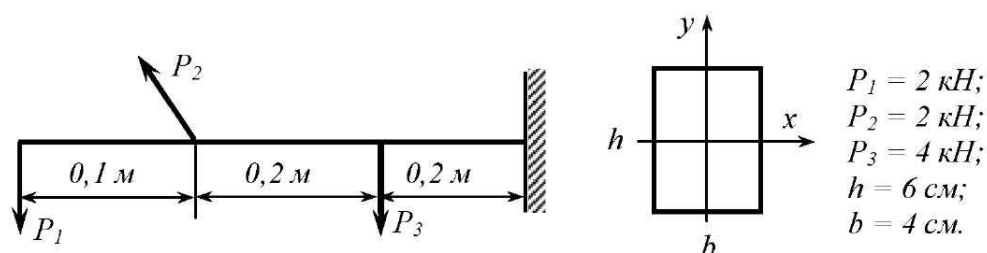
### Вариант 13

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



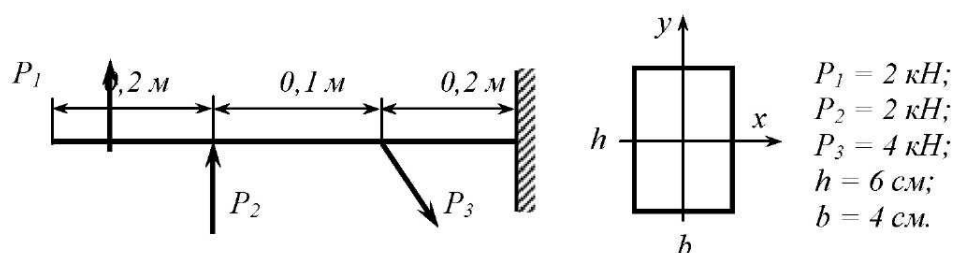
### Вариант 14

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



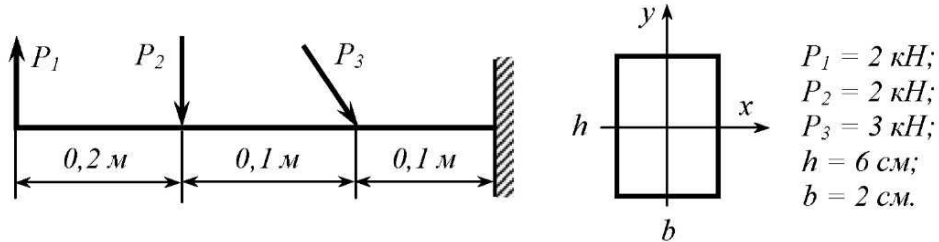
### Вариант 15

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



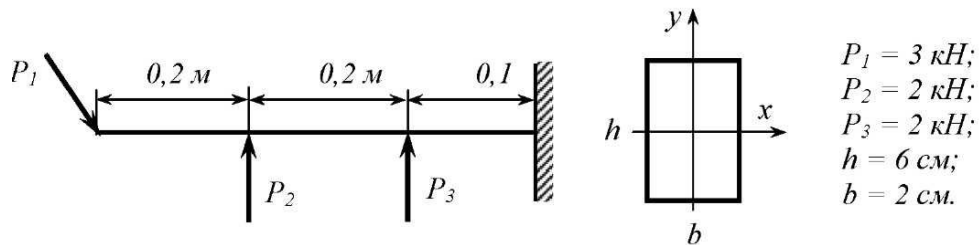
### Вариант 16

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



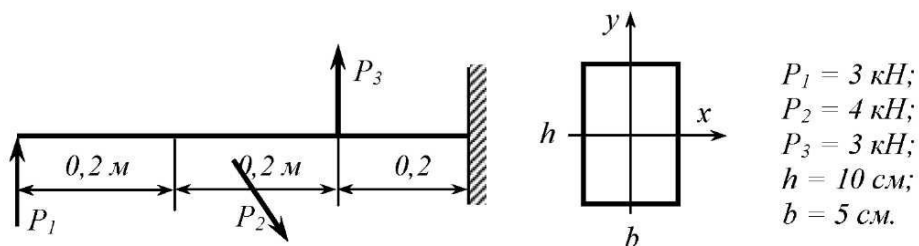
### Вариант 17

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



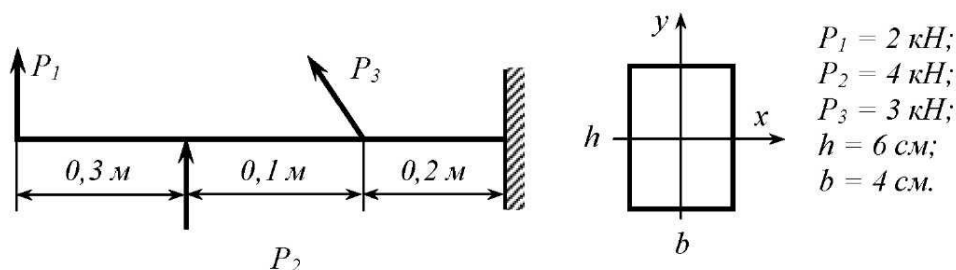
### Вариант 18

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



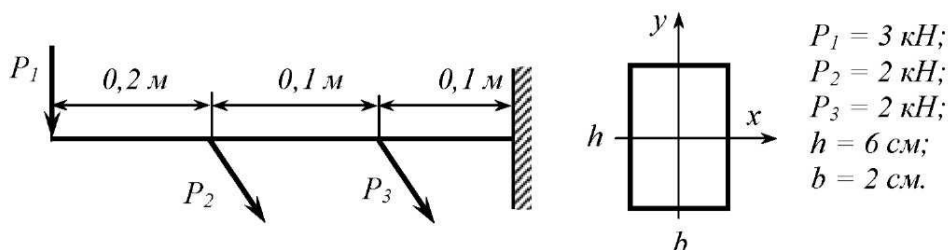
### Вариант 19

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



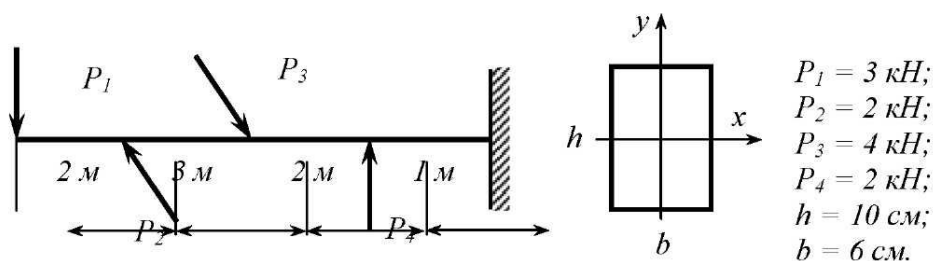
### Вариант 20

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



### Вариант 21

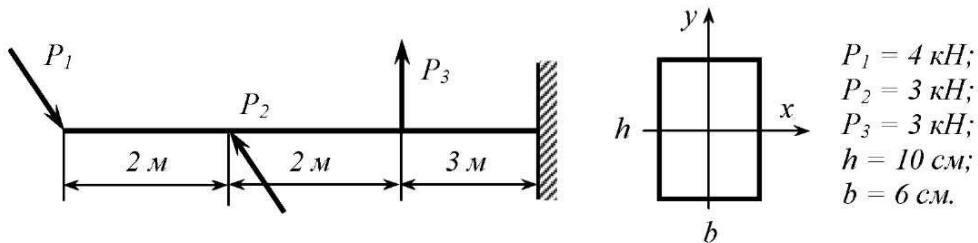
1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .





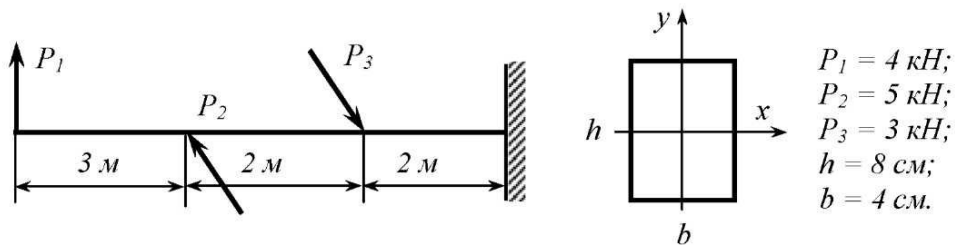
### Вариант 22

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



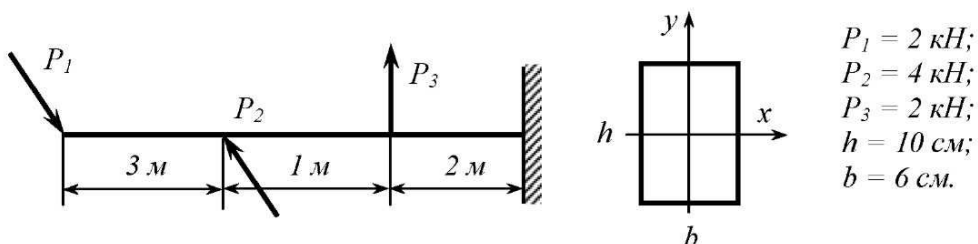
### Вариант 23

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



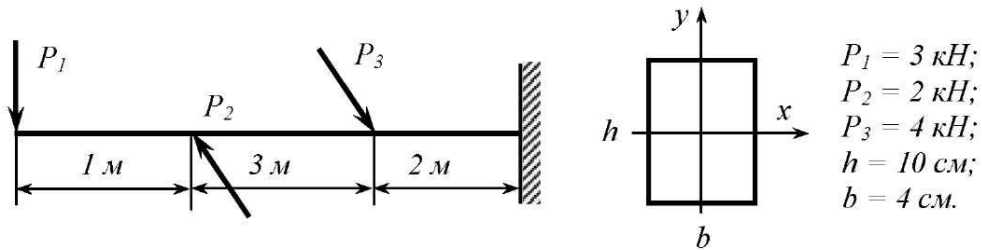
### Вариант 24

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



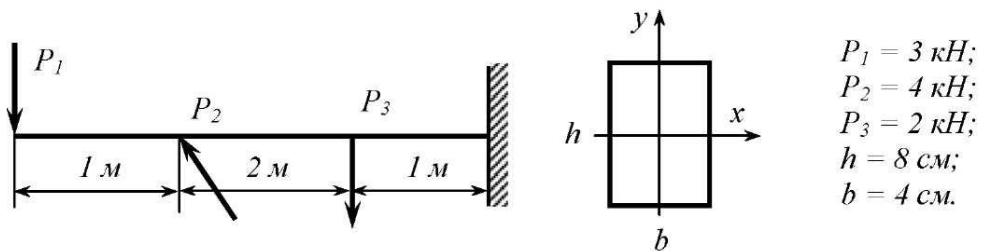
### Вариант 25

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



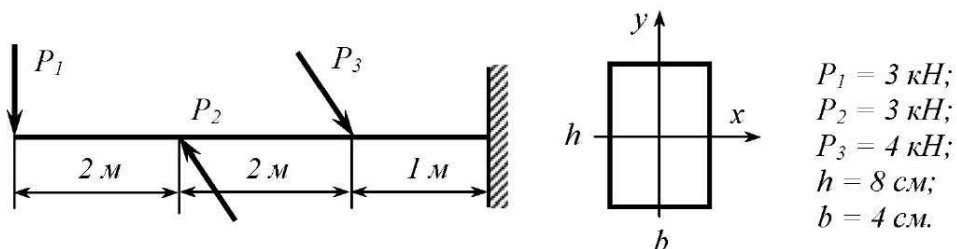
### Вариант 26

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



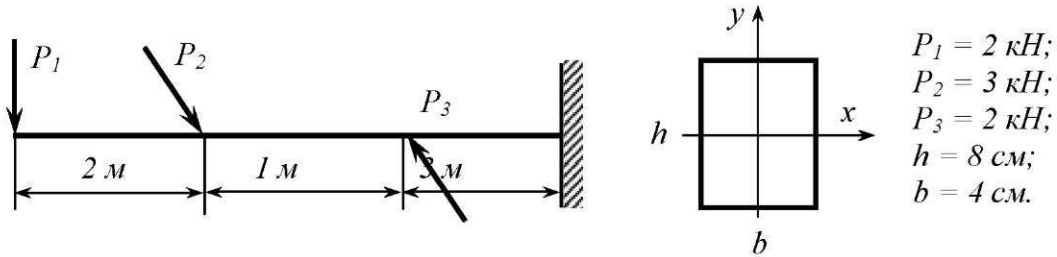
### Вариант 27

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



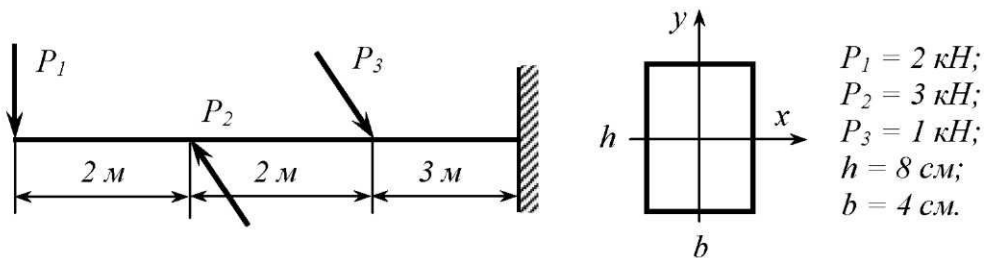
### Вариант 28

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



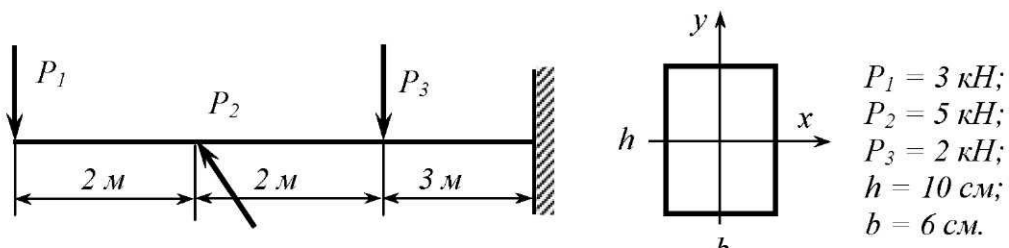
### Вариант 29

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



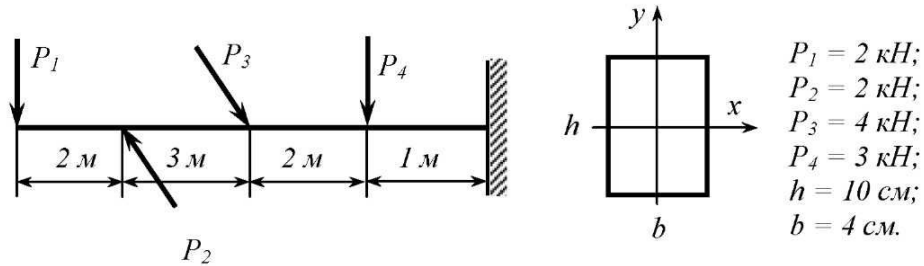
### Вариант 30

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



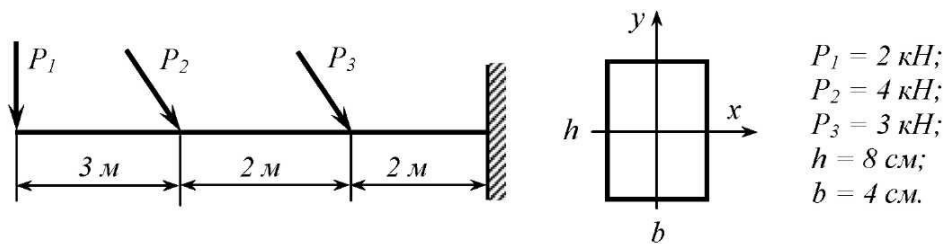
### Вариант 31

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



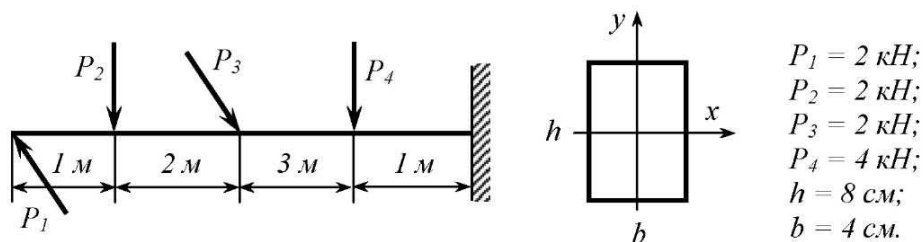
### Вариант 32

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



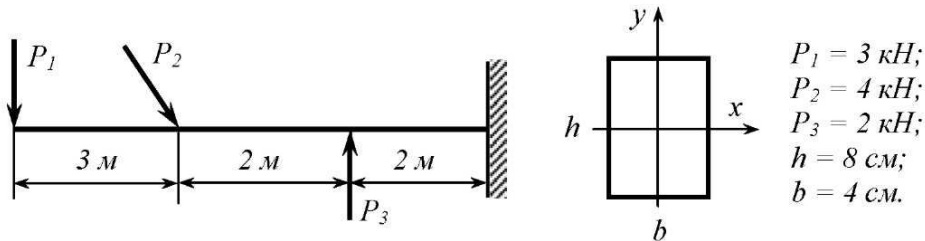
### Вариант 33

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



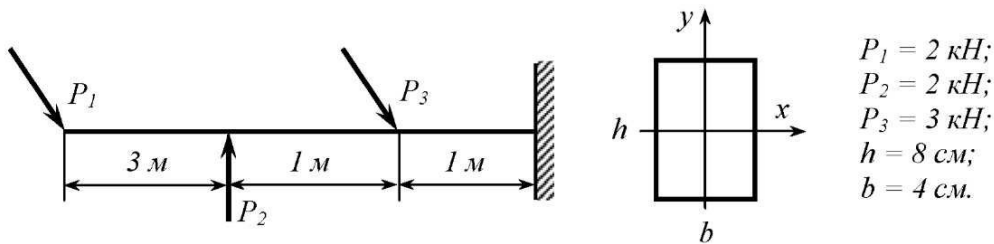
### Вариант 34

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



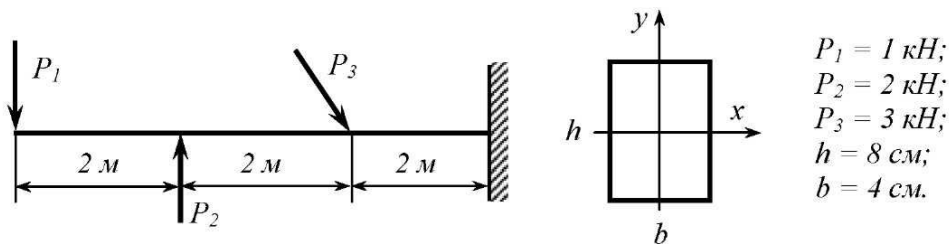
### Вариант 35

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



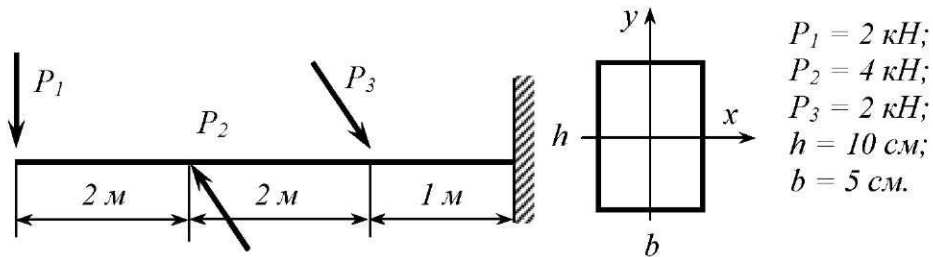
### Вариант 36

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



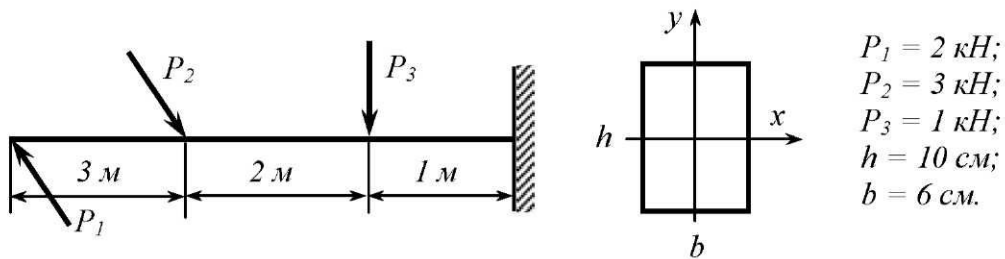
### Вариант 37

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



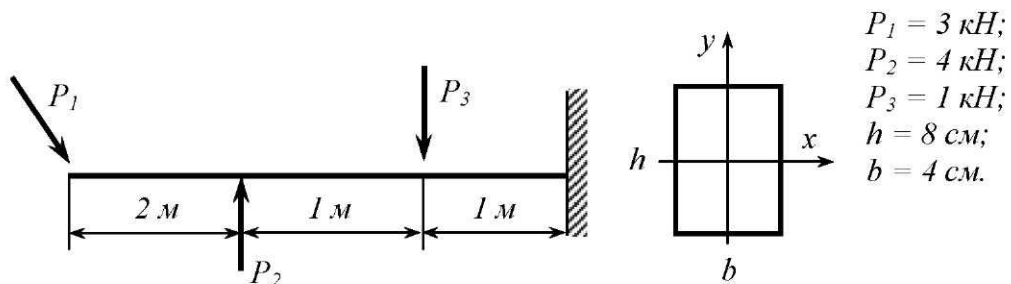
### Вариант 38

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



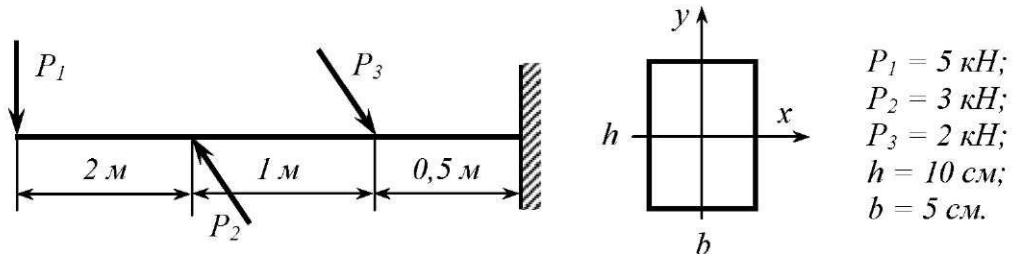
### Вариант 39

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



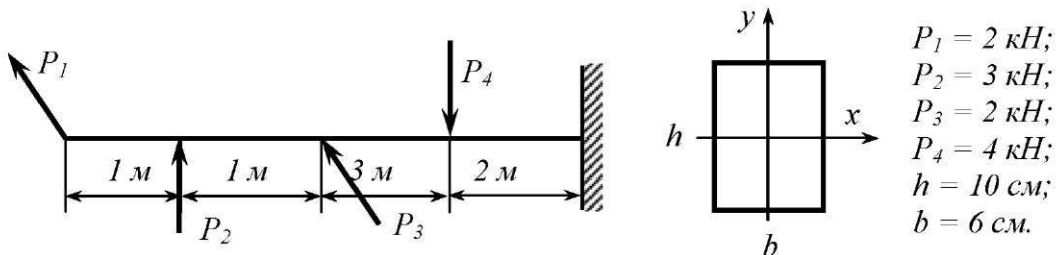
### Вариант 40

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



### Вариант 41

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .



### Вариант 42

1. Построить эпюры  $M_{изг}^{верт}$ ,  $M_{изг}^{гориз}$ .
2. Определить напряжение во всех крайних точках сечения заделки. Построить эпюру  $\sigma$ .

