ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие .....

1. Введение .....

1.1. Задачи и методы сопротивления материалов .....
1.2. Реальный объект и расчетная схема.....
1.3. Внешние и внутренние силы. Метод сечений.....
1.4. Напряжения.....
1.5. Перемещения и деформации.....
1.6. Закон Гука и принцип независимости действия сил.....

2. Растяжение и сжатие .....

2.1. Внутренние силы и напряжения.....
2.2. Удлинение стержня и закон Гука.....
2.3. Пример расчета (задача № 1).....
2.4. Потенциальная энергия деформации.....
2.5. Статически определимые и статически
неопределимые системы.....
2.6. Напряженное и деформированное состояние
при растяжении и сжатии.....
2.7. Основные механические характеристики материалов.....
2.8. Общие принципы расчета конструкции.....
2.9. Пример расчета (задача № 2).....

3. Геометрические характеристики поперечных сечений бруса.....

3.1. Статические моменты сечения.....
3.2. Моменты инерции сечения.....
3.3. Главные оси и главные моменты инерции.....
3.4. Пример расчета (задача № 3).....

4. Кручение.....

4.1. Кручение бруса с круглым поперечным сечением.....
4.2. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением.....
4.3. Пример расчета (задача № 4).....
4.4. Кручение тонкостенного бруса.....
4.5. Пример расчета (задача № 5).....

5. Изгиб.....

5.1. Внутренние усилия в поперечных сечениях бруса.....
5.2. Основные дифференциальные соотношения теории изгибе....
5.3. Напряжения при чистом изгибе.....
5.4. Примеры расчетов .....
5.4.1.Схема I. Консольная балка (задача № 6).....
5.4.2. Схема II. Двухопорная балка (задача № 7).....
5.4.3. Схема III. Плоская рама (задача № 8).....
5.5. Касательные напряжения при поперечном изгибе
Главные напряжения при изгибе.....
5.6. Пример расчета (задача № 9).....
5.7. Перемещения при изгибе. Метод начальных параметров.....
5.8. Пример расчета (задача № 10).....
5.9. Косой изгиб.....
5.10. Пример расчета (задача № 11).....
5.11. Внецентренное растяжение и сжатие.....
5.12. Пример расчета (задача № 12).....
5.13. Теории прочности.....
5.14. Пример расчета (задача № 13).....

6. Расчет статически неопределимых систем методом сил.....

6.1. Стержневые системы. Степень статической
неопределимости.....
6.2. Определение перемещений методом Мора.....
6.3. Метод сил.....
6.4. Пример расчета (задача № 14).....

7. Устойчивость прямых стержней.....

7.1. Понятие об устойчивости. Задача Эйлера.....
7.2. Границы применимости решения Эйлера
Формула Ясинского.....
7.3. Расчет сжатых стержней на устойчивость.....
7.4. Пример расчета (задача № 15).....

8. Динамические задачи.....

8.1. Основные определения.....
8.2. Колебания системы с одной степенью свободы.....
8.3. Пример расчета (задача № 16).....
8.4. Соударение твердого тела и системы
с одной степень свободы.....
8.5. Пример расчета (задача № 17).....

9. Прочность при циклических нагрузках.....

9.1. Основные характеристики цикла и предел усталости.....
9.2. Влияние концентраций напряжений, состояния поверхности и размеров детали на усталостную прочность.....
9.3. Запас усталостной прочности и его определение.....
9.4. Пример расчета (задача № 18).....

10. Основы теории упругости и пластичности.....

10.1. Напряженное состояние в точке. Уравнения равновесия.....
10.2. Определение напряжений на произвольной площадке. Главные оси и главные напряжения.....
10.3. Деформированное состояние в точке. Геометрические уравнения и уравнения неразрывности.....
10.4. Физические уравнения теории упругости для изотропного тела. Обобщенный закон Гука.....
10.5. Возможные способы решения задач теории упругости.....
10.6. Теория предельных напряжений состояний.....
10.7. Плоская задача в декартовых координатах.....
10.8. Пример расчета (задача № 19).....
10.9. Пример расчета (задача № 20).....
10.10. Основы теории пластичности.....
10.11. Пример расчета (задача № 21).....

11. Пластины и оболочки.....

11.1. Теория тонких пластин.....
11.2. Пример расчета (задача № 22).....
11.3. Прочность толстостенной цилиндрической оболочки при действии внутреннего и внешнего давлений.....
11.4. Пример расчета (задача № 23).....

12. Вопросы для самопроверки, задачи для самостоятельной и контрольных работ.....

12.1. Введение.....
12.2. Растяжение и сжатие.....
12.3. Геометрические характеристики поперечных сечений бруса.
12.4. Кручение.....
12.5. Изгиб.....
12.6. Расчет статически неопределимых систем методом сил.....
12.7. Устойчивость прямых стержней.....
12.8. Динамические задачи.....
12.9. Прочность при цилиндрических нагрузках.....
12.10. Основы теории упругости и пластичности.....
12.11. Пластины и оболочки.....

Приложения.....

1. Угольники равнобокие. Сталь прокатная. Сортамент.....
2. Балки двутавровые. Сталь прокатная. Сортамент.....
3. Швеллеры. Сталь прокатная. Сортамент.....

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Задачи и методы сопротивления материалов

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов инженерных конструкций. Методами сопротивления материалов выполняются расчеты, на основании которых определяются необходимые размеры деталей машин и конструкций инженерных сооружений.

В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, в которых наиболее существенными являются свойства твердых деформируемых тел, а законами движения тела как жесткого целого здесь пренебрегают. В то же время, вследствие общности основных положений, сопротивление материалов рассматривается как раздел механики твердых деформируемых тел.

В состав механики деформируемых тел входят также такие дисциплины, как: теория упругости, теория пластичности, теория ползучести, теория разрушения и др., рассматривающие, по существу, те же вопросы, что и сопротивление материалов. Различие между сопротивлением материалов и другими теориями механики твердого деформируемого тела заключается в подходах к решению задач.

Строгие теории механики деформируемого тела базируются на более точной постановке проблем, в связи с чем, для решения задач приходится применять более сложный математический аппарат и проводить громоздкие вычислительные операции. Вследствие этого возможности применения таких методов в практических задачах ограничены.

В свою очередь, методы сопротивления материалов базируются на упрощенных гипотезах, которые, с одной стороны, позволяют решать широкий круг инженерных задач, а с другой, получать приемлемые по точности результаты расчетов.

При этом главной задачей курса является формирование знаний для применения математического аппарата при решении прикладных задач, осмысления полученных численных результатов и поиска выбора наиболее оптимальных конструктивных решений. То есть данный предмет является базовым для формирования инженерного мышления и подготовки кадров высшей квалификации по техническим специализациям.

1.2. Реальный объект и расчетная схема

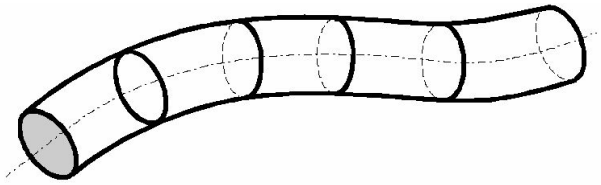
В сопротивлении материалов, как и во всякой отрасли естествознания, исследование вопроса о прочности или жесткости реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Расчетная схема конструкции – его упрощенная схема, освобожденная от несущественных в данной задаче особенностей. Выбор расчетной схемы начинается со схематизации свойств материалов сооружения. В сопротивлении материалов принято рассматривать все материалы как *однородную сплошную среду*, независимо от их микроструктуры. Под однородностью материала понимают независимость его свойств от величины выделенного из тела объема. И хотя в действительности реальный материал, как правило, неоднороден (уже в силу его молекулярного строения), тем не менее указанная особенность не является существенной, поскольку в сопротивлении материалов рассматриваются конструкции, размеры которых существенно превышают не только межатомные расстояния, но и размеры кристаллических зерен.

С понятием однородности тесно связано понятие *сплошности среды*, под которым подразумевают тот факт, что материал конструкции полностью заполняет весь отведенный ему объем, а значит в теле конструкции нет пустот .

Под действием внешних сил реальное тело меняет свои геометрические размеры. После снятия нагрузки геометрические размеры тела полностью или частично восстанавливаются. Свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры после разгрузки называется *упругостью*. При решении большинства задач в сопротивлении материалов принимается, что материал конструкций *абсолютно упругий*.

Обычно сплошная среда принимается *изотропной*, т.е. предполагается, что свойства тела, выделенного из нее, не зависят от его ориентации в пределах этой среды. Отдельно взятый кристалл материала анизотропен, но т.к. в объеме реального тела содержится бесконечно большое количество хаотично расположенных кристаллов, принимается, что материал изотропен.

При выборе расчетной схемы вводятся упрощения и в геометрию реального объекта. Основным упрощающим приемом в сопротивлении материалов является приведение геометрической формы тела к схемам бруса (стержня) или оболочки. Как известно, любое тело в пространстве характеризуется тремя измерениями. *Брусом* называется геометрический объект, одно из измерений которого (длина) много больше двух других. Геометрически брус может быть образован путем перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой, как это показано на рис. 1.1.



Ðèñ. 1.1

Эта кривая называется *осью бруса*, а плоская замкнутая фигура, располагающая свой центр тяжести на оси бруса и нормальная к ней, называется его *поперечным сечением*. Брус может иметь как постоянное, так и переменное поперечное сечение. Многие сложные конструкции на практике рассматриваются как комбинации элементов, имеющих форму бруса, поэтому в настоящей книге преимущественно рассматриваются методы расчета бруса как основного геометрического объекта изучения науки сопротивления материалов. Второй основной геометрической формой, рассматриваемой в сопротивлении материалов, является *оболочка*, под которой подразумевается тело, у которого одно из измерений (толщина) намного меньше, чем два других.

Для соединения отдельных частей конструкции между собой и передачи внешней нагрузки на основание на нее накладываются *связи*, ограничивающие перемещения тех точек сооружения, к которым они приложены. Связи могут ограничивать либо повороты точек сооружения, либо их линейные смещения, либо и то и другое.

1.3. Внешние и внутренние силы. Метод сечений

Силы являются мерилом механического взаимодействия тел. Если конструкция рассматривается изолированно от окружающих тел, то действие последних на нее заменяется силами, которые называются *внешними*. Внешние силы, действующие на тело, можно разделить на *активные* (независимые) и *реактивные*. Реактивные усилия возникают в связях, наложенных на тело, и определяются действующими на тело активными усилиями.

По способу приложения внешние силы делятся на *объемные* и *поверхностные*.

Объемные силы распределены по всему объему рассматриваемого тела и приложены к каждой его частице. В частности, к объемным силам относятся собственный вес сооружения, магнитное притяжение или силы инерции. Единицей измерения объемных
сил является сила, отнесенная к единице объема – кН/м^3 .

Поверхностные силы приложены к участкам поверхности и являются результатом непосредственного контактного взаимодействия рассматриваемого объекта с окружающими телами. В зависимости от соотношения площади приложения нагрузки и общей площади поверхности рассматриваемого тела, поверхностные нагрузки подразделяются на сосредоточенные и распределенные. К первым относятся нагрузки, реальная площадь приложения которых несоизмеримо меньше полной площади поверхности

тела (например, воздействие колонн на фундаментную плиту достаточно больших размеров можно рассматривать как действие на нее сосредоточенных усилий). Если же площадь приложения нагрузки сопоставима с площадью поверхности тела, то такая нагрузка рассматривается как распределенная. Сосредоточенные усилия измеряются в кН, а распределенные – кН/м^2.

Взаимодействие между частями рассматриваемого тела характеризуется *внутренними силами*, которые возникают внутри тела под действием внешних нагрузок и определяются силами межмолекулярного воздействия.

Величины внутренних усилий определяются с применением *метода сечений*, суть которого заключается в следующем. Если при действии внешних сил тело находится в состоянии равновесия, то любая отсеченная часть тела вместе с приходящимися на нее внешними и внутренними усилиями также находится в равновесии, следовательно, к ней применимы уравнения равновесия.

Рассмотрим тело, имеющее форму бруса (рис. 1.2, *а*).

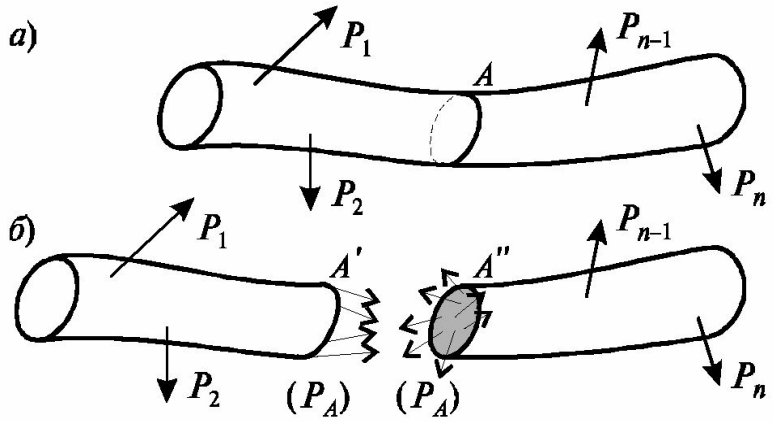


Рис. 1.2

Пусть к нему приложена некоторая система внешних сил P_1, $P_2, P_3, \ldots, P_n$, удовлетворяющая условиям равновесия, т.е. при действии указанных внешних сил тело находится в состоянии равновесия.

Если рассечь брус сечением A на две части и правую отбросить, то, т.к. связи между частями тела устранены, необходимо действие правой (отброшенной) части на левую заменить некоей системой внутренних сил (P_A), действующей в сечении A (рис. 1.2, *б*).

Обозначая через $P_{лев}$ и $P_{прав}$ суммы внешних сил, приложенных соответственно, к левой и правой частям бруса (относительно сечения A), и учитывая, что

$$P_{лев} + P_{прав} = 0 \qquad (1.1)$$

для отсеченных частей бруса получим следующие очевидные соотношения:

$$P_{лев} + P_A = 0; \qquad P_{прав} - P_A = 0. \qquad (1.2)$$

Последние соотношения показывают, что равнодействующая внутренних сил P_A в сечении A может определяться с равным успехом из условий

равновесия либо левой, либо правой частей рассеченного тела. В этом суть *метода сечений*.

Внутренние усилия должны быть так распределены по сечению, чтобы деформированные поверхности сечения A при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали. Это требование в механике твердого деформируемого тела носит название *условия неразрывности деформаций*.

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил P_A к центру тяжести сечения A в соответствии с правилами теоретической механики. В результате получим главный вектор сил $\vec{R}$ и главный вектор момента $\vec{M}$ (рис. 1.3). Далее выбираем декартову систему координат xyz с началом координат, совпадающим с центром тяжести сечения A. Ось z направим по нормали к сечению, а оси x и y расположим в плоскости сечения. Спроектировав главный вектор сил $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}$ на координатные оси x, y, z, получаем шесть составляющих: три силы N_z, Q_x, Q_y и три момента M_z, M_x, M_y, называемых внутренними силовыми факторами в сечении бруса.

Составляющая N_z называется нормальной, или продольной силой в сечении. Силы Q_x и Q_y называются поперечными усилиями. Момент M_z называется крутящим моментом, а моменты M_x и M_y –изгибающими моментами относительно осей x и y, соответственно.

При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов в сечении определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части.

Пусть R^*, M^* - результирующая сила и результирующий момент действующие на отсеченной части тела. Если тело при действии полной системы внешних сил находится в равновесном состоянии, то условия равновесия отсеченной части тела имеет вид:

$$\boldsymbol{R}^* = 0; \quad \boldsymbol{M}^* = 0. \tag{1.3}$$

Последние два векторные уравнения равновесия дают шесть скалярных уравнений в проекциях на декартовых осях координат:

$$\begin{gathered} \sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum m_x = 0; \quad \sum m_y = 0; \quad \sum m_z = 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

которые в общем случае составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно шести неизвестных внутренних усилий: Q_x, Q_y, N_z, M_x, M_y, M_z.

Следовательно, если полная система внешних сил известна, то по методу сечений, всегда можно определить все внутренние усилия действующих в произвольно взятом сечении тела. Данное положение является основополагающим обстоятельством в механике твердого деформируемого тела.

В общем случае в сечении могут иметь место все шесть силовых факторов. Однако достаточно часто на практике встречаются случаи, когда некоторые внутренние усилия отсутствуют – такие виды нагружения бруса получили специальные названия (табл. 1).

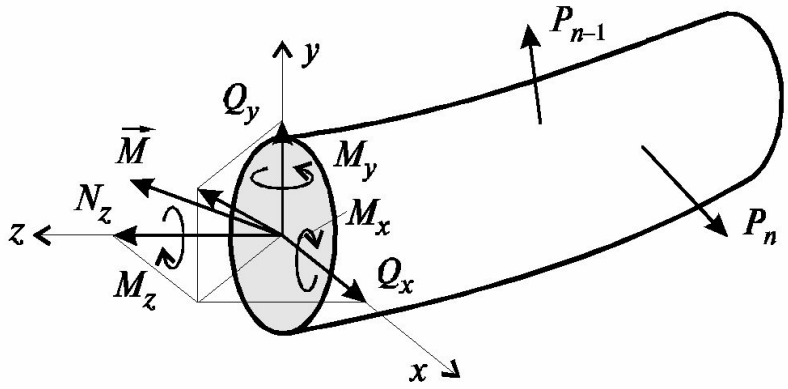


Рис. 1.3

Сопротивления, при которых в поперечном сечении бруса действует одно внутреннее усилие, условно называются *простыми*. При одновременном действии в сечении бруса двух и более усилий сопротивление бруса называется *сложным*.

В заключение заметим, что при выполнении практических расчетов, для наглядности, как правило, определяются графики функций внутренних силовых факторов относительно координатной оси, направленной вдоль продольной оси стержня. Графики изменения внутренних усилий вдоль продольной оси стержня называются *эпюрами*.

Таблица 1

Простейшие случаи сопротивления

Вид напряженного состояния	N_z	Q_x	Q_y	M_z	M_x	M_y
Растяжение/сжатие	+	0	0	0	0	0
Кручение	0	0	0	+	0	0
Чистый изгиб относительно оси x	0	0	0	0	+	0
Чистый изгиб относительно оси y	0	0	0	0	0	+
Поперечный изгиб относительно оси x	0	0	+	0	+	0

Поперечный изгиб относительно оси y	0	+	0	0	0	+

Примечание: + означает наличие усилия, 0 – его отсутствие.

1.4. Напряжения

В окрестности произвольной точки K, принадлежащей сечению A некоторого нагруженного тела, выделим элементарную площадку ΔF, в пределах которой действует внутреннее усилие $\Delta\vec{R}$ (рис. 1.4, *а*). Векторная величина

$$\lim_{\Delta F\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta F}\right)=\vec{P} \qquad (1.5)$$

называется полным напряжением в точке K. Проекция вектора полного напряжения $\vec{P}$ на нормаль к данной площадке обозначается через σ и называется *нормальным напряжением*.

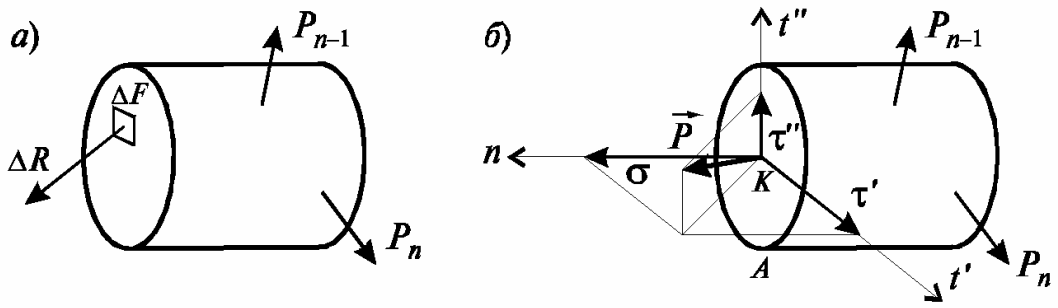


Рис. 1.4

Проекции вектора $\vec{P}$ на перпендикулярные оси в плоскости площадки (рис. 1.4, *б*) называются *касательными напряжениями* по направлению соответствующих осей и обозначаются τ' и τ''. Если через ту же самую точку K провести другую площадку, то, в общем случае будем иметь другое полное напряжение. Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через данную точку, образует напряженное состояние в этой точке.

1.5. Перемещения и деформации

Под действием внешних сил твердые тела изменяют свою геометрическую форму, а точки тела неодинаково перемещаются в пространстве. Вектор $\vec{T}$, имеющий свое начало в точке A недеформированного состояния, а конец в т. A' деформированного состояния, называется вектором полного перемещения т. A (рис. 1.5, *а*). Его проекции на оси xyz называются осевыми перемещениями и обозначаются u, v и w, соответственно.

Для того, чтобы охарактеризовать интенсивность изменения формы и размеров тела, рассмотрим точки A и B его недеформированного состояния, расположенные на расстоянии S друг от друга (рис. 1.5, *б*).

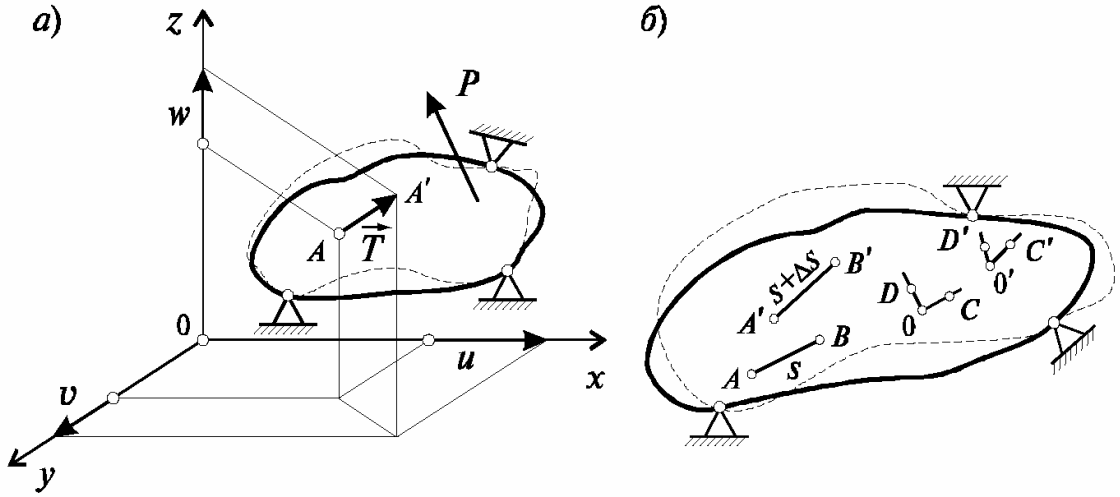


Рис. 1.5

Пусть в результате изменения формы тела эти точки переместились в положение A' и B', соответственно, а расстояние между ними увеличилось на величину ΔS и составило $S + \Delta S$. Величина

$$\lim_{\Delta S \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{S}}{S} \right) = \vec{\varepsilon} \qquad (1.6)$$

называется линейной деформацией в точке A по направлению AB. Если рассматривать деформации по направлениям координатных осей xyz, то в обозначения соответствующих проекций линейной деформации вводятся индексы ε_x, ε_y, ε_z.

Линейные деформации ε_x, ε_y, ε_z характеризуют изменения объема тела в процессе деформирования, а формоизменения тела – угловыми деформациями. Для их определения рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном состоянии двумя отрезками OD и OC (рис. 1.5, *б*). При действии внешних сил указанный угол DOC изменится и примет новое значение $D'O'C'$. Величина

$$\lim_{OC \to 0,\, OD \to 0} (\angle DOC - \angle D'O'C') = \gamma \qquad (1.7)$$

называется угловой деформацией, или сдвигом в точке O в плоскости COD. Относительно координатных осей деформации сдвига обозначаются γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}.

Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям в данной точке образует деформированное состояние в точке.

1.6. Закон Гука и принцип независимости действия сил

Многочисленные экспериментальные наблюдения за поведением деформируемых тел показывают, что в определенных диапазонах перемещения точек тела пропорциональны действующим на него нагрузкам. Впервые указанная закономерность была высказана в 1776 году английским ученым Гуком и носит название *закона Гука*.

В соответствии с этим законом перемещение произвольно взятой точки A (рис. 1.5, *а*) нагруженного тела по некоторому направлению, например, по оси x, а может быть выражено следующим образом:

$$u = \delta_x P, \qquad (1.8)$$

где P – сила, под действием которой происходит перемещение u; δ_x – коэффициент пропорциональности между силой и перемещением.

Очевидно, что коэффициент δ_x зависит от физико–механических свойств материала, взаимного расположения точки A и точки приложения и направления силы P, а также от геометрических особенностей системы. Таким образом, последнее выражение следует рассматривать как закон Гука для данной системы.

В современной трактовке закон Гука определяет линейную зависимость между напряжениями и деформациями, а не между силой и перемещением. Коэффициенты пропорциональности в этом случае представляют собой физико–механические характеристики материала и уже не связаны с геометрическими особенностями системы в целом.

Системы, для которых соблюдается условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами, подчиняются *принципу суперпозиции*, или *принципу независимости действия сил*.

В соответствии с этим принципом перемещения и внутренние силы, возникающие в упругом теле, считаются независящими от порядка приложения внешних сил. То есть, если к системе приложено несколько сил, то можно определить внутренние силы, напряжения, перемещения и деформации от каждой силы в отдельности, а затем результат действия всех сил получить как сумму действий каждой силы в отдельности. Принцип независимости действия сил является одним из основных способов при решении большинства задач механики линейных систем.

2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1. Внутренние силы и напряжения

Под растяжением (сжатием) понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные силы, а прочие силовые факторы равны нулю.

Рассмотрим однородный прямолинейный стержень длиной l и площадью поперечного сечения F, на двух концах которого приложены две равные по величине и противоположно направленные центральные продольные силы P (рис. 2.1, *а*). Поместим начало плоской системы координат yz в центре тяжести левого сечения, а ось z направим вдоль продольной оси стержня.

Для определения величин внутренних усилий воспользуемся методом сечений. Задавая некоторое сечение на расстояние z ($0 \le z \le l$) от начала системы координат и рассматривая равновесие левой относительно заданного сечения части стержня (рис. 2.1, *б*), приходим к следующему уравнению:

$$\sum z = 0 \rightarrow P + N_z = 0,$$

откуда следует, что

$$N_z = P = \text{const}.$$

Примем для N_z следующее правило знаков. Если N_z направлена от сечения, т.е. вызывает положительную деформацию (растяжение), то она считается положительной. В обратном случае – отрицательной.

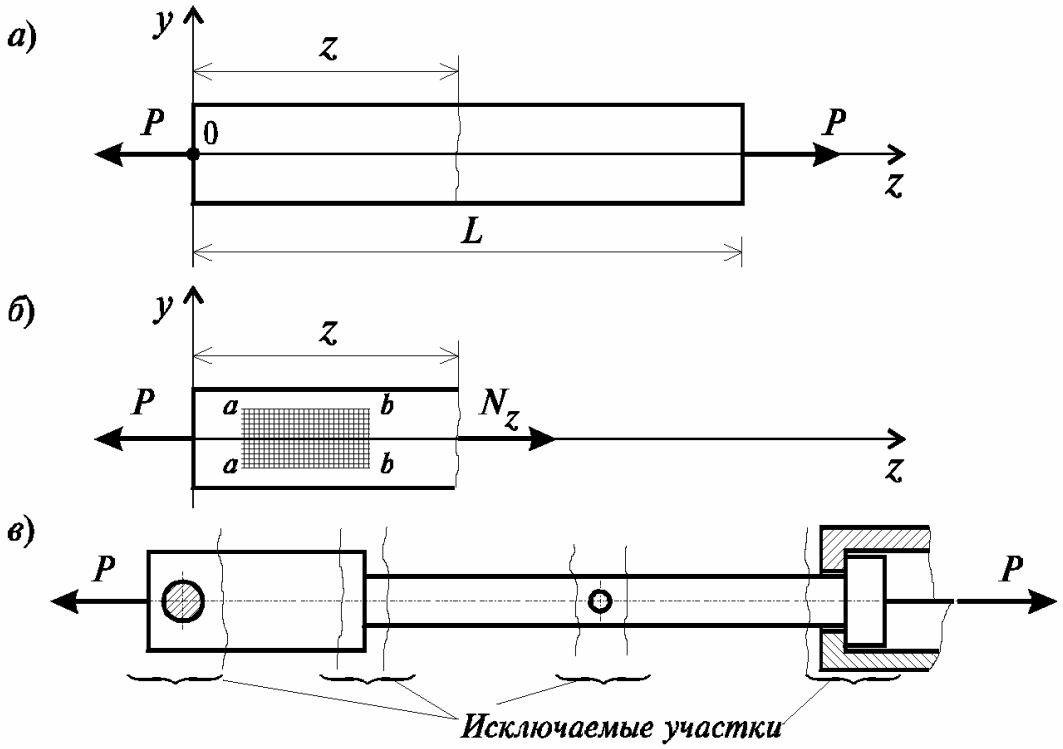


Рис. 2.1

Нормальная сила N_z приложена в центре тяжести сечения, является равнодействующей внутренних сил в сечении и, в соответствии с этим, определяется следующим образом:

$$N_z = \int_F \sigma \, dF \, .$$

Но из этой формулы нельзя найти закон распределения нормальных σ напряжений в поперечных сечениях стержня. Для этого обратимся к анализу характера его деформирования.

Если на боковую поверхность этого стержня нанести прямоугольную сетку (рис. 2.1, *б*), то после нагружения поперечные линии *a–a, b–b* и т.д. переместятся параллельно самим себе, откуда следует, что все поверхностные продольные волокна удлинятся одинаково. Если предположить также, что и внутренние волокна работают таким же образом, то можно сделать вывод о том, что поперечные сечения в центрально растянутом стержне смещаются параллельно начальным положениям, что соответствует *гипотезе плоских сечений*, введенной швейцарским ученым Д. Бернулли, гласящей, что *плоские сечения до деформации остаются плоскими и после деформации.*

Значит, все продольные волокна стержня находятся в одинаковых условиях, а следовательно, нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения должны быть также одинаковы и равны

$$\sigma = \frac{N_z}{F},$$

где F – площадь поперечного сечения стержня.

Высказанное предположение о равномерном распределении внутренних сил в поперечном сечении справедливо для участков, достаточно удаленных от мест: резкого изменения площади поперечного сечения (рис. 2.1, *в*); скачкообразного изменения внешних нагрузок; скачкообразного изменения физико-механических характеристик конструкций. Основанием для такого утверждения служит *принцип Сен-Венана*, справедливый для любого типа напряженного состояния и формулируемый следующим образом: *особенности приложения внешних нагрузок проявляются, как правило, на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения стержня.*

2.2. Удлинение стержня и закон Гука

Рассмотрим однородный стержень с одним концом, жестко заделанным, и другим – свободным, к которому приложена центральная продольная сила P (рис. 2.2). До нагружения стержня его длина равнялась l –после нагружения она стала равной $l + \Delta l$ (рис. 2.2). Величину Δl называют абсолютным удлинением стержня.

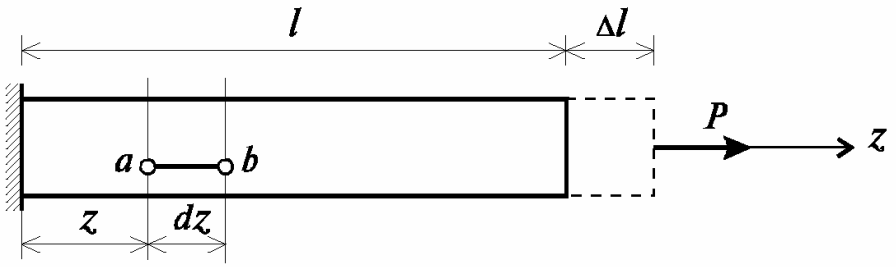


Рис. 2.2

Если в нагруженном стержне напряженное состояние является однородным, т.е. все участки стержня находятся в одинаковых условиях, деформация ε остается одной и той же по длине стержня и равной

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (2.1)$$

Если же по длине стержня возникает неоднородное напряженное состояние, то для определения его абсолютного удлинения необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент длиной dz (рис. 2.2). При растяжении он увеличит свою длину на величину Δdz и его деформация составит:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \qquad (2.2)$$

В пределах малых деформаций при простом растяжении или сжатии закон Гука записывается в следующем виде:

$$\sigma = E\varepsilon. \qquad (2.3)$$

Величина E представляет собой коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости материала первого рода. Из совместного рассмотрения уравнений (2.2) и (2.3) получим:

$$\Delta dz = \sigma \frac{dz}{E},$$

откуда с учетом того, что

$$\sigma = \frac{N_z}{F} \text{ и } \Delta l = \int_0^l \Delta dz,$$

окончательно получим:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z\, dz}{E\, F}. \qquad (2.4)$$

Если стержень изготовлен из однородного изотропного материала с $E = \text{const}$, имеет постоянное поперечное сечение $F = \text{const}$ и нагружен по концам силой P, то из (2.4) получим

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \qquad (2.5)$$

При решении многих практических задач возникает необходимость, наряду с удлинениями, обусловленными действием механических нагрузок, учитывать также удлинения, вызванные температурным воздействием. В этом случае пользуются принципом независимости действия сил, и полные деформации рассматривают как сумму силовой и температурной деформаций:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t, \qquad (2.6)$$

где α – коэффициент температурного расширения материала; t –перепад температуры тела. Для однородного стержня, нагруженного по концам продольными силами P и равномерно нагретого по длине, получим:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + l\,\alpha t. \qquad (2.7)$$

2.3. Пример расчета (задача № 1)

Для стального бруса квадратного сечения сжатого силой P с учетом собственного веса при исходных данных приведенных ниже, требуется (рис. 2.3, *а*):

1. Определить количество расчетных участков;

2. Составить аналитические выражения для нормальных сил N_z, нормальных напряжений σ_z и вычислить их значения для каждого из участков с учетом их собственных весов;

3. Построить эпюры N_z и σ_z;

4. Вычислить перемещение верхнего конца колонны от действия силы P и собственного веса.

Исходные данные: P=20 кН; $l_1 = l_2 = l_3 = 0{,}4$ м; модуль упругости стали $E = 2{,}1\cdot10^8$ кН/м^2; $F_1 = 4\cdot10^{-2}$ м^2; $F_2 = 9\cdot10^{-2}$ м^2; $F_3 = 25\cdot10^{-2}$ м^2; $\gamma = 78$ кН/м^3.

Решение

1. *Определение количества участков.* Так как нормальная сила N_z зависит от величин внешних сил, в данном случае включающих в себя и собственный вес колонны, а последний, в свою очередь, от размеров поперечного сечения F_i и объемного веса γ, то границами участков следует назначать те сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные силы и где происходит скачкообразное изменение площади поперечного сечения или объемного веса материалов конструкций.

Исходя из вышесказанного, учитывая $\gamma = \text{const}$, брус будет иметь три участка:

1 участок – от 0 до сечения B (где приложена сила P);

2 участок – от сечения B до сечения C;

3 участок – от сечения C до сечения D.

Следует заметить, что при определении нормальных напряжений используются те же участки.

2. *Составить аналитические выражения для нормальных сил N_z, нормальных напряжений σ_z и вычислить их значения для каждого из участков, с учетом их собственных весов.* Для этого воспользуемся методом сечений.

1 участок ($0 - B$) $0 \le z_1 \le 0{,}4$ м.

Проведя сечение $1 - 1$ на расстоянии z_1 от начала координат (точка 0), рассмотрим равновесие верхней части. При этом, к рассматриваемой части прикладываются в центре ее тяжести собственный вес и нормальная сила N_{z_1}, заменяющую действие отброшенной нижней части бруса на верхнюю рассматриваемую (рис. 2.3, *б*). Составив уравнение равновесия рассматриваемой верхней части колонны по оси z, получим:

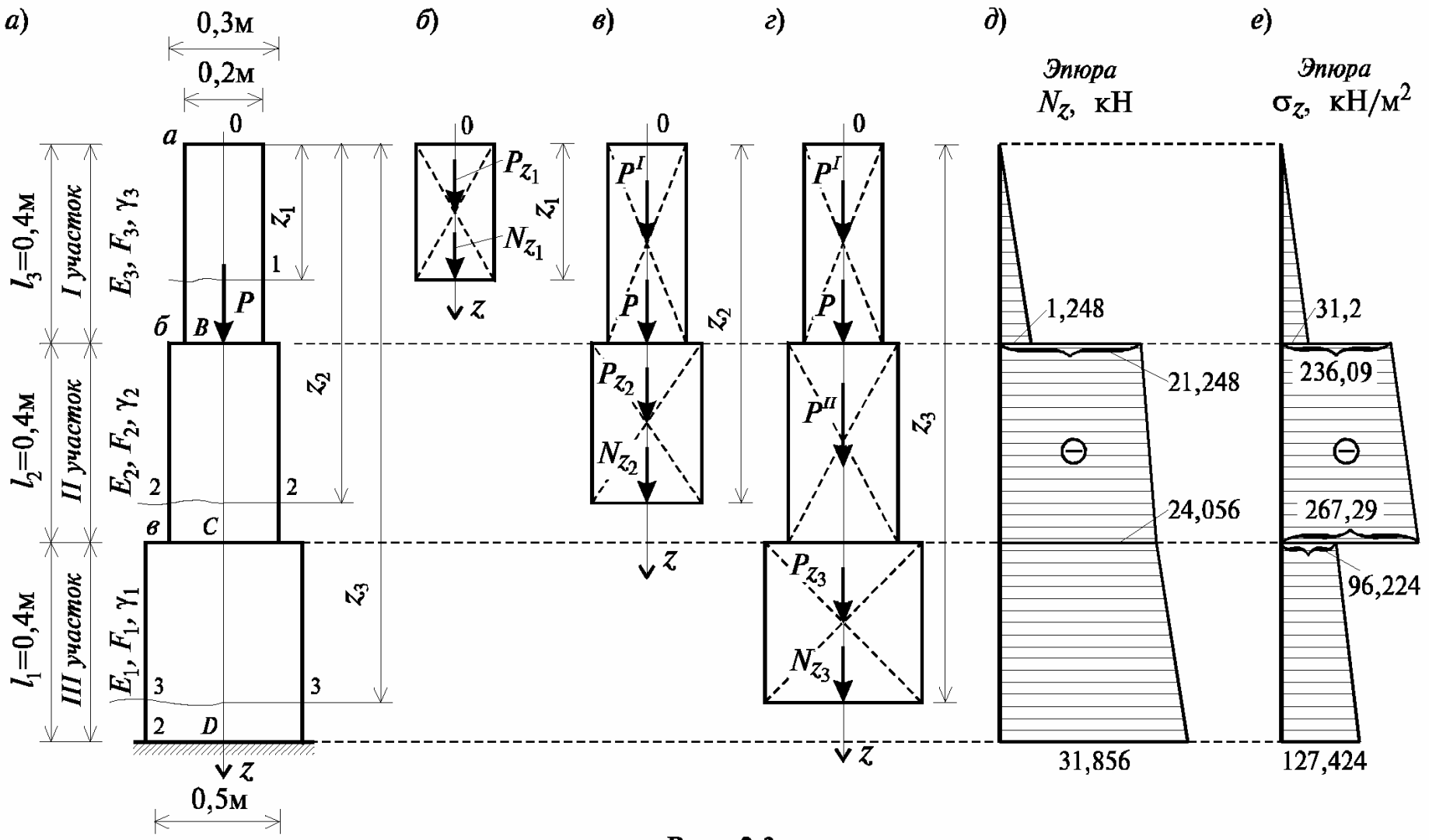

а)
0,3м
0,2м
0
а
l_3=0,4м
I участок
E_3, F_3, γ_3
z_1
1
P
б
B
l_2=0,4м
II участок
E_2, F_2, γ_2
z_2
2
2
в
C
l_1=0,4м
III участок
E_1, F_1, γ_1
z_3
3
3
2
D
z
0,5м
б)
0
P_{z_1}
N_{z_1}
z_1
z
в)
0
P^I
P
z_2
P_{z_2}
N_{z_2}
z
г)
0
P^I
P
P^{II}
z_3
P_{z_3}
N_{z_3}
z
д)
Эпюра
N_z, кН
1,248
21,248
24,056
31,856
е)
Эпюра
σ_z, кН/м^2
31,2
236,09
267,29
96,224
127,424

Рис. 2.3

$$N_{z_1} + P_{z_1} = 0.$$

В свою очередь, собственный вес верхней части колонны определяется следующим образом:

$$P_{z_1} = \gamma F_1 z_1 = 78 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 = 312 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 \text{ кН.}$$

Тогда выражение для нормальной силы будет иметь вид:

$$N_{z_1} = -312 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 \text{ кН,}$$

а для нормальных напряжений σ_{z_1}:

$$\sigma_{z_1} = N_{z_1} / F_1 = -312 \cdot 10^{-2} \cdot z_1 / 4 \cdot 10^{-2} = -78 \cdot z_1 \text{ кН/м}^2.$$

Так как, N_{z_1} и σ_{z_1} линейно зависят от z_1, то для построения их графиков (эпюр) достаточно определить значения этих величин на границах участка, т.е.

при $z_1 = 0$ $\quad N_{z_1}(0) = 0; \quad \sigma_{z_1}(0) = 0;$

при $z_1 = 0{,}4$ м $\quad N_{z_1}(0{,}4) = -312 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}4 = -1{,}248$ кН;

$\sigma_{z_1}(0{,}4) = -78 \cdot 0{,}4 = -31{,}2$ кН/м^2.

Знаки минус при N_{z_1} и σ_{z_1} указывают на то, что принятое направление для этих величин не совпадает с действительным, т. к. в принятой схеме продольная сила не растягивает, а сжимает первый участок.

2 участок ($B - C$) 0,4 м $\le z_2 \le$ 0,8 м.

Аналогично предыдущему проводим сечение 2–2 на расстоянии z_2 (рис. 2.3, *в*). Для верхней части составляем уравнение равновесия $\sum z = 0$.

В это уравнение войдут: собственный вес первого участка $P_1 = = \gamma F_1 l_1$; собственный вес отсеченной части второго участка $P_{z_2} = = \gamma F_2 (z_2 - l_1)$; сосредоточенная сила $P = 20$ кН, а также сила N_{z_2}.

Тогда уравнение равновесия примет вид:

$$P_1 + P_{z_2} + P + N_{z_2} = 0,$$

отсюда

$$N_{z_2} = -P - \gamma F_1 l_1 - P_{z_2} = -20 - 78\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}4 - 78\cdot 9\cdot 10^{-2}\,(z_2 - 0{,}4) =$$

$$= -7{,}02\cdot(z_2 + 2{,}62678)\ \text{кН}.$$

Учитывая постоянство площади поперечного сечения на втором участке, выражение для нормального напряжения может быть записано таким образом:

$$\sigma_{z_2} = \frac{N_{z_2}}{F_2} = -7{,}02\,\frac{z_2 + 2{,}62678}{9\cdot 10^{-2}} = -78\left(z_2 + 2{,}62678\right)\ \text{êÍ/ì}^2.$$

Вычислим значения ординат N_{z_2} и σ_{z_2} в граничных сечениях второго участка:

при $z_2 = 0{,}4$ м

$$N_{z_2}(0{,}4) = -7{,}02\left(0{,}4 + 2{,}62678\right) = -21{,}248\ \text{кН},$$

$$\sigma_{z_2}(0{,}4) = -78\left(0{,}4 + 2{,}62678\right) = -236{,}09\ \text{кН/м}^2;$$

при $z_2 = 0{,}8$ м

$$N_{z_2}(0{,}8) = -7{,}02\left(0{,}8 + 2{,}62678\right) = -24{,}056\ \text{кН},$$

$$\sigma_{z_2}(0{,}8) = -78\left(0{,}8 + 2{,}62678\right) = -267{,}29\ \text{кН/м}^2.$$

3 участок ($C - D$) 0,8 м $\le z_3 \le$ 1,2 м.

Составив уравнение равновесия $\sum z = 0$ (рис. 2.3, *г*) для верхней части бруса, получим:

$$P_1 + P_2 + P_{z_3} + P + N_{z_3} = 0,$$

откуда

$$N_{z_3} = -P - \gamma F_1 l_1 - \gamma F_2 l_2 - \gamma F_3 (z_3 - l_1 - l_2) P_{z_2} = -20 - 78\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}4 -$$

$$- 78\cdot 9\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}4 - 78\cdot 25\cdot 10^{-2}\,(z_3 - 0{,}8) = -19{,}5\cdot(z_3 + 0{,}43364)\ \text{кН}.$$

Выражение для напряжения:

$$\sigma_{z_3} = \frac{N_{z_3}}{F_3} = \frac{-19{,}5\left(z_3 + 0{,}43364\right)}{25\cdot 10^{-2}} = -78\left(z_3 + 0{,}43364\right)\ \text{кН/м}^2.$$

Вычислим значения ординат N_{z_3} и σ_{z_3} в граничных сечениях третьего участка:

при $z_3 = 0{,}8$ м

$$N_{z_3}(0{,}8) = -19{,}5\,(0{,}8 + 0{,}43364) = -24{,}056\ \text{кН},$$

$$\sigma_{z_3}(0{,}8) = -78\,(0{,}8 + 0{,}43364) = -96{,}224\ \text{кН/м}^2;$$

при $z_3 = 1{,}2$ м $\quad N_{z_3}(1{,}2) = -19{,}5\,(1{,}2 + 0{,}43364) = -31{,}856$ кН,

$$\sigma_{z_3}(1{,}2) = -78\,(1{,}2 + 0{,}43364) = -127{,}424 \text{ кН/м}^2.$$

3. *Построение эпюр N_z и σ_z* По причине линейной зависимости нормальной силы и напряжений от координаты z для построения их эпюр достаточно значений N_z и σ_z в граничных сечениях каждого из участков (см. рис. 2.3, *д*, *е*). Необходимым условием правильности построения этих графиков является выполнение следующих требований:

– скачок в эпюре N_z должен находиться в точке приложения сосредоточенного усилия и быть равным по величине значению этой силы;

– скачки в эпюре σ_z должны совпадать с точками приложения внешней силы P и изменения площади поперечного сечения колонны.

После анализа полученных эпюр (рис. 2.3, *д*, *е*) легко можно убедиться, что построения выполнены правильно.

4. *Вычисление перемещения верхнего конца колонны от действия всех сил*. Полное перемещение согласно закону Гука может быть вычислено по формуле

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{3} \int_0^{l_i} \frac{N_z\,dz}{E_z F_z}.$$

В данном случае это выражение принимает следующий вид:

$$\Delta l = \int_0^{0,4} \frac{N_1\,dz}{E_1 F_1} + \int_{0,4}^{0,8} \frac{N_2\,dz}{E_2 F_2} + \int_{0,8}^{1,2} \frac{N_3\,dz}{E_3 F_3} =$$

$$= \frac{1}{E_1 F_1} \int_0^{0,4} N_1\,dz + \frac{1}{E_2 F_2} \int_{0,4}^{0,8} N_2\,dz + \frac{1}{E_3 F_3} \int_{0,8}^{1,2} N_3\,dz.$$

Так как величины определенных интегралов равны площадям, очерченным соответствующими подынтегральными функциями, то для вычисления перемещений Δl_i достаточно вычислить площади эпюры N_z на каждом из этих участков и разделить их на $E_i F_i$. Следовательно,

$$\Delta l = \left[-\frac{0,4}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^8} \cdot \left[\frac{1,248}{0,04} + \left(\frac{21,248 + 24,056}{0,09} \right) + \frac{31,856 + 24,056}{0,25} \right] \right] =$$

$$= -7,2212 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

2.4. Потенциальная энергия деформации

Внешние силы, приложенные к упругому телу и вызывающие изменение геометрии тела, совершают работу A на соответствующих перемещениях. Одновременно с этим в упругом теле накапливается потенциальная энергия его деформирования U. При действии динамических внешних нагрузок часть работы внешних сил превращается в кинетическую энергию движения частиц тела K. Приняв энергетическое состояние системы до момента действия данных сил равным нулю, и в условиях отсутствия рассеивания энергии, уравнение баланса энергии можно записать в следующем виде:

$$A = U + K. \qquad (2.8)$$

При действии статических нагрузок $K = 0$, следовательно,

$$A = U. \qquad (2.9)$$

Это означает, что при статическом нагружении работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации. При разгрузке тела производится работа за счет потенциальной энергии деформации, накопленной телом. Таким образом, упругое тело является аккумулятором энергии. Это свойство упругого тела широко используется в технике, например, в заводных пружинах часовых механизмов, в амортизирующих рессорах и др. В случае простого растяжения (сжатия) для вывода необходимых расчетных зависимостей потенциальной энергии деформации рассмотрим решение следующей задачи.

На рис. 2.4, *а* изображен растягиваемый силой P стержень, удлинение которого соответствует отрезку Δl, ниже показан график изменения величины удлинения стержня Δl в зависимости от силы P (рис. 2.4, *б*). В соответствии с законом Гука этот график носит линейный характер.

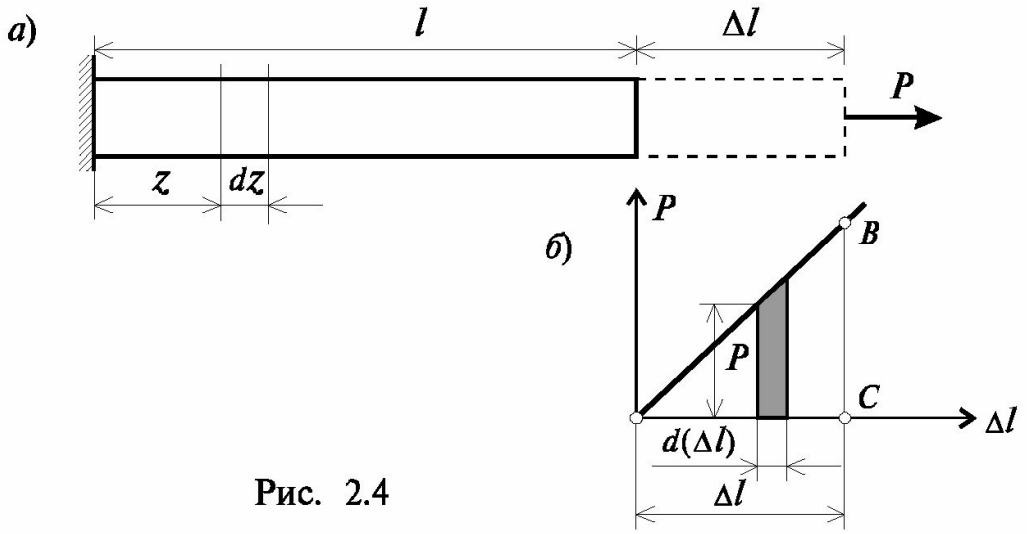


Рис. 2.4

Пусть некоторому значению силы P соответствует удлинение стержня Δl. Дадим некоторое приращение силе ΔP – соответствующее приращение удлинения составит $d(\Delta l)$. Тогда элементарная работа на этом приращении удлинения составит:

$$dA = (P + dP)\cdot d(\Delta l) = P\cdot d(\Delta l) + dP\cdot d(\Delta l), \qquad (2.10)$$

вторым слагаемым, в силу его малости, можно пренебречь, и тогда

$$dA = P\cdot d(\Delta l). \qquad (2.11)$$

Полная работа равна сумме элементарных работ, тогда, при линейной зависимости "нагрузка – перемещение", работа внешней силы P на перемещении Δl будет равна площади треугольника OCB (рис. 2.4), т.е.

$$A = 0{,}5\, P\cdot\Delta l. \qquad (2.12)$$

В свою очередь, когда напряжения σ и деформации ε распределены по объему тела V равномерно (как в рассматриваемом случае) потенциальную энергию деформирования стержня можно записать в виде:

$$U = V\int_0^{\varepsilon}\sigma\, d\varepsilon. \qquad (2.13)$$

Поскольку, в данном случае имеем, что $V = Fl$, $P = \sigma F$ и $\sigma = E\varepsilon$, то

$$U = F l\int_0^{\varepsilon} E\,\varepsilon\, d\varepsilon = 0{,}5 F l\, E\,\varepsilon^2 = 0{,}5 E\,\varepsilon\, F\,\varepsilon l = 0{,}5\sigma F\,\Delta l = 0{,}5 P\,\Delta l, \qquad (2.14)$$

т.е. подтверждена справедливость (2.9).

С учетом (2.5) для однородного стержня с постоянным поперечным сечением и при P = const из (2.14) получим:

$$U = \frac{P^2 l}{2 E F}. \qquad (2.15)$$

2.5. Статически определимые и статически неопределимые системы

Если при рассмотрении заданной системы, находящейся в равновесном состоянии от действия заданных внешних нагрузок, все реакции в связях закрепления, а также внутренние усилия в ее элементах, можно определить только по методу сечений, без использования дополнительных условий, то такая система называется *статически определимой*.

В реальной практике встречаются такие конструкции при расчете которых одних лишь уравнений равновесия оказывается недостаточно, в связи с чем требуется формулирование дополнительных уравнений, связанных с условиями деформирования конструкции.

Системы, в которых количество наложенных связей больше, нежели число независимых уравнений равновесия, называются *статически неопределимыми*.

По сравнению со статически определимыми системами, в статически неопределимых системах имеются дополнительные связи, которые называются *лишними*.

Термин “лишние связи” является условным. Эти связи являются лишними с точки зрения расчетных предпосылок. В действительности эти связи создают дополнительные резервы для конструкций, как в плане обеспечения её жесткости, так и прочности.

На рис. 2.5, а изображен кронштейн, состоящий из двух стержней, шарнирно скрепленных между собой. В связи с тем, что на конструкцию действует лишь вертикальное усилие P, а система является плоской (т.е. все элементы конструкции и вектор внешних сил лежат в одной плоскости), получается, что усилия в стержнях легко определяются из условий равновесия узла A, т.е.

$$\sum x = 0, \quad \sum y = 0. \tag{2.16}$$

Раскрывая эти уравнения, получаем замкнутую систему линейных уравнений относительно неизвестных усилий N_1 и N_2 в которой количество уравнений равно количеству неизвестных:

$$-N_1 - N_2 \sin\alpha = 0; \qquad -N_2 \cos\alpha - P = 0.$$

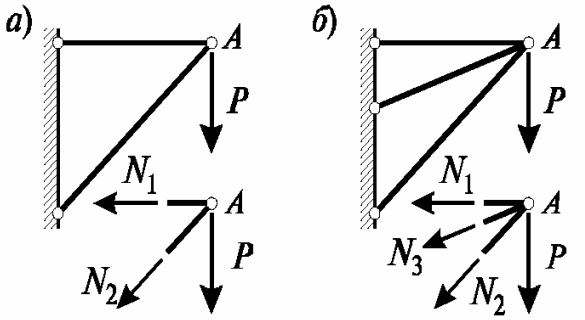


Рис. 2.5

Если конструкцию кронштейна усложнить, добавив еще один стержень (рис. 2.5, *б*), то усилия в стержнях N_1, N_2 и N_3 прежним способом определить уже не удастся, т.к. при тех же двух уравнениях равновесия (2.16) имеются уже три неизвестных усилия в стержнях. В таких случаях говорят, что система один раз статически неопределима. Разность между числом неизвестных усилий и количеством независимых (значащих) уравнений равновесия, связывающих эти усилия, называется *степенью статической неопределимости* рассматриваемой системы.

В общем случае под n–раз статически неопределимой системой понимается система, в которой число неизвестных внешних опорных реакций и внутренних усилий превышает число независимых и значащих уравнений равновесия на n единиц.

2.6. Напряженное и деформированное состояние при растяжении и сжатии

Рассмотрим более подробно особенности напряженного состояния, возникающего в однородном растянутом стержне. Определим напряжения, возникающие на некоторой наклонной площадке, составляющей угол α с плоскостью нормального сечения (рис. 2.6, *а*).

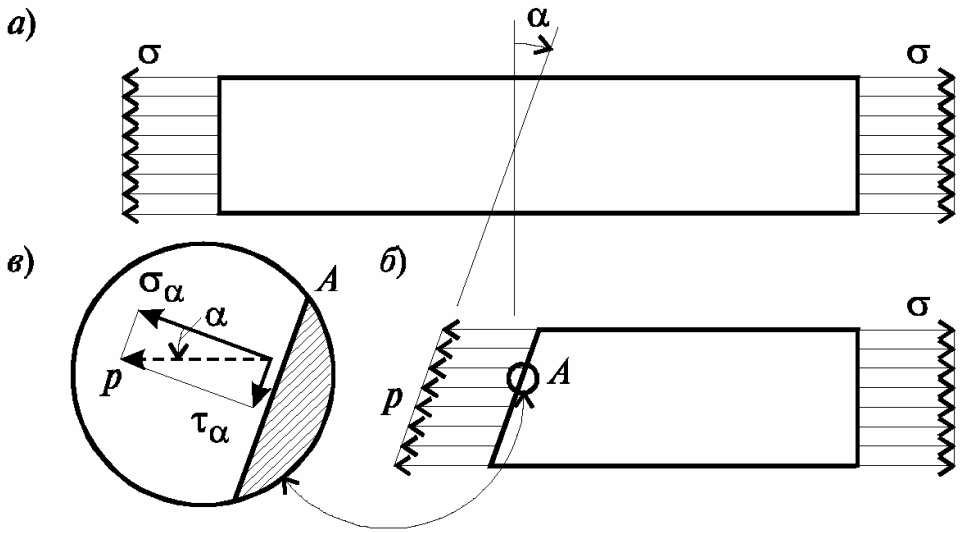


Рис. 2.6

Из условия $\sum z = 0$, записанного для отсеченной части стержня (рис. 2.6, *б*), получим:

$$pF_\alpha = \sigma F, \qquad (2.17)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня, $F_\alpha = F/\cos\alpha$ – площадь наклонного сечения. Из (2.17) легко установить:

$$p = \sigma\cos\alpha. \qquad (2.18)$$

Раскладывая напряжение p по нормали и касательной к наклонной площадке (рис. 2.6, *в*), с учетом (2.18) получим:

$$\sigma_\alpha = p\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha; \quad \tau_\alpha = p\sin\alpha = \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha. \qquad (2.19)$$

Полученные выражения показывают, что для одной и той же точки тела величины напряжений, возникающих в сечениях, проходящих через эту точку, зависят от ориентации этой площадки, т.е. от угла α. При $\alpha = 0$ из (2.19) следует, что $\sigma_\alpha = \sigma$, $\tau_\alpha = 0$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т.е. на продольных площад-

ках, $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$. Это означает, что продольные слои растянутого стержня не взаимодействуют друг с другом. Касательные напряжения τ_α принимают наибольшие значения при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, и их величина составляет $\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$. Важно отметить, как это следует из (2.19), что $\left|\tau_\alpha\right| = \left|\tau_{(\alpha+\pi/2)}\right|$. Следовательно, в любой точке тела на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны между собой по абсолютной величине. Это условие является общей закономерностью любого напряженного состояния и носит название *закона парности касательных напряжений*.

Теперь перейдем к анализу деформаций в растянутом стержне. Наблюдения показывают, что его удлинение в продольном направлении сопровождается пропорциональным уменьшением поперечных размеров стержня (рис. 2.7).

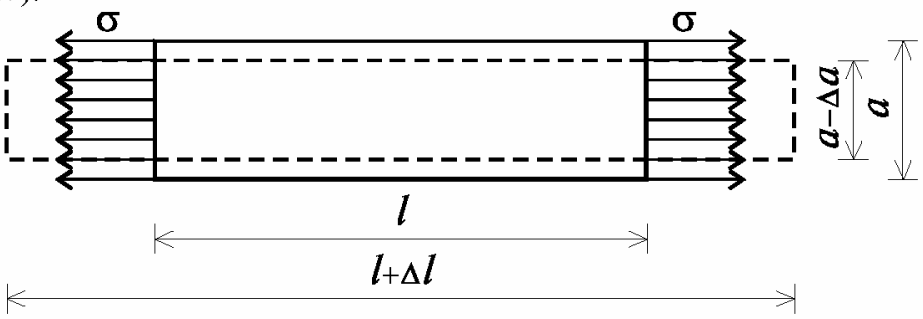


Рис. 2.7

Если обозначить:

$$\varepsilon_{прод} = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon_{попер} = -\frac{\Delta a}{a}, \; \mu = -\frac{\varepsilon_{поперед}}{\varepsilon_{продол}},$$

то, как показывают эксперименты, $\mu = const$ для данного материала и является безразмерным *коэффициентом Пуассона*. Величина μ является важной характеристикой материала и определяется экспериментально. Для реальных материалов μ принимает значения $0{,}1 \div 0{,}45$.

При растяжении стержня возникают не только линейные, но и угловые деформации.

Рассмотрим прямой угол ABC (рис. 2.8, *а*), образованный отрезками AB и AC, в недеформированном состоянии.

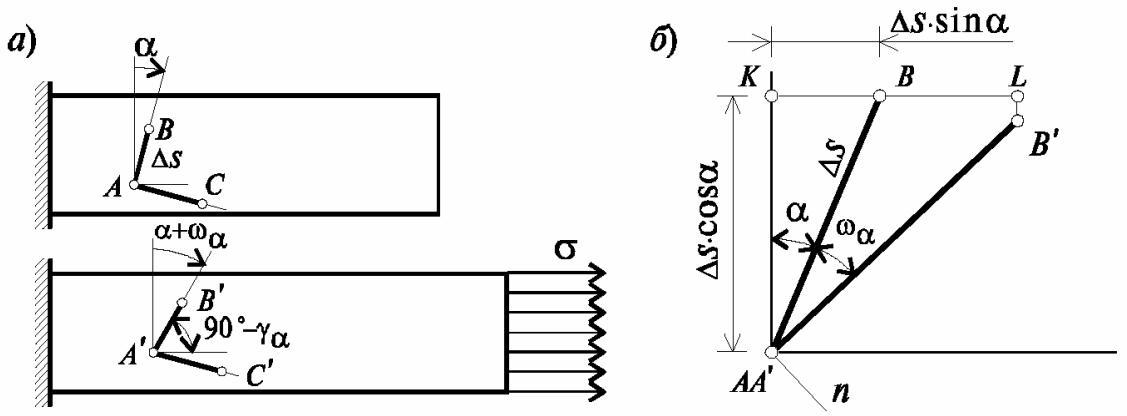


Рис. 2.8

При растяжении стержня точки A, B и C займут положение A', B', C' соответственно. Величина

$$\gamma_\alpha = \angle BAC - \angle A'B'C'$$

называется угловой деформацией или угловым сдвигом в точке A.

Совместим точки A и A' и рассмотрим взаимное расположение отрезков AB и $A'B'$ (рис. 2.8, *б*). На этом рисунке отметим вспомогательные точки K и L и прямую n, перпендикулярную отрезку $A'B'$. Из рис. 2.8, *б* имеем:

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{BL}{KB}; \qquad \varepsilon_{\text{попер}} = \frac{LB'}{AK},$$

откуда с учетом $\varepsilon_{\text{прод}} = \dfrac{\sigma}{E}$ получим:

$$BL = \frac{\sigma}{E}\Delta S \sin\alpha; \quad LB' = \mu\frac{\sigma}{E}\Delta S\cos\alpha. \qquad (2.20)$$

Для определения ω_α спроектируем ломаную $BLB'A'$ на ось n $\Delta S\cdot\sin\omega_\alpha = BL\cos(\alpha+\omega_\alpha) + LB'\sin(\alpha+\omega_\alpha)$, откуда, учитывая малость угла ω_α, т.е. $\sin\omega_\alpha \approx \omega_\alpha$, $\cos\omega_\alpha \approx 1$, получим:

$$\omega_\alpha = \frac{BL\cos\alpha + LB'\sin\alpha}{\Delta S}. \qquad (2.21)$$

В результате совместного рассмотрения (2.20) и (2.21) получим:

$$\omega_\alpha = \frac{\sigma}{2E}(1+\mu)\sin 2\alpha.$$

Откуда

$$\omega_{\alpha+\pi/2} = -\frac{\sigma}{2E}(1+\mu)\sin 2\alpha.$$

Следовательно,

$$\gamma_\alpha = \omega_\alpha - \omega_{\alpha+\pi/2} = \frac{\sigma}{E}(1+\mu)\sin 2\alpha. \qquad (2.22)$$

Сопоставляя выражение γ_α с выражением τ_α из (2.17) окончательно получим закон Гука для сдвига:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \qquad (2.23)$$

где величина $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ называется модулем сдвига или модулем упругости материала второго рода.

2.7. Основные механические характеристики материалов

Для количественной оценки основных свойств материалов, как правило, экспериментально определяют диаграмму растяжения в координатах σ и ε (рис. 2.9), На диаграмме отмечены характерные точки. Дадим их определение.

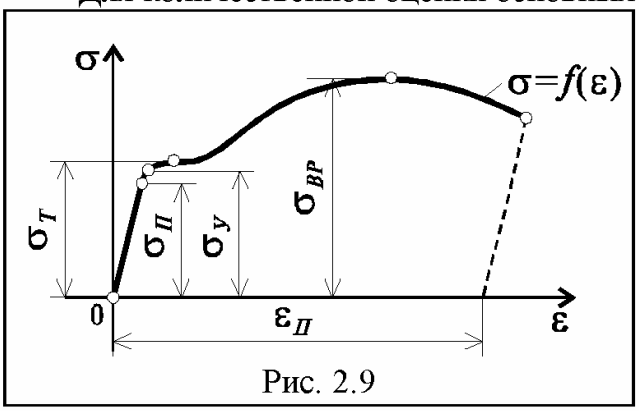


Рис. 2.9

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называется *пределом пропорциональности* $\sigma_П$. В пределах закона Гука тангенс угла наклона прямой $\sigma = f(\varepsilon)$ к оси ε определяется величиной E.

Упругие свойства материала сохраняются до напряжения $\sigma_У$, называемого *пределом упругости*. Под пределом упругости $\sigma_У$ понимается такое наибольшее напряжение, до которого материал не получает остаточных деформаций, т.е. после полной разгрузки последняя точка диаграммы совпадает с начальной точкой 0.

Величина $\sigma_Т$ называется *пределом текучести* материала. Под пределом текучести понимается то напряжение, при котором происходит рост деформаций без заметного увеличения нагрузки. Если необходимо различать предел текучести при растяжении и сжатии $\sigma_Т$ соответственно заменяется на $\sigma_{ТР}$ и $\sigma_{ТС}$. При напряжениях больших $\sigma_Т$ в теле конструкции развиваются пластические деформации $\varepsilon_П$, которые не исчезают при снятии нагрузки.

Отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к его начальной площади поперечного сечения носит название предела прочности, или временного сопротивления, и обозначается через, $\sigma_{ВР}$ (при сжатии $\sigma_{ВС}$).

Сопоставление предела прочности хрупких материалов при растяжении $\sigma_{ВР}$ с пределом прочности при сжатии $\sigma_{ВС}$ показывают, что эти материалы обладают, как правило, более высокими прочностными показателями при сжатии, нежели при растяжении. Величина отношения $\frac{\sigma_{ВР}}{\sigma_{ВС}}$ для чугуна составляет 0.2 ÷0.4, для керамических материалов 0.1÷0.2. Для пластичных материалов установлено, что $\sigma_{ВР} \approx \sigma_{ВС}$.

Большое влияние на проявление свойств материалов оказывает скорость нагружения и температурное воздействие. При высокоскоростном нагружении более резко проявляются свойства хрупкости, а при медленном нагружении - свойства пластичности. Например, хрупкое стекло способно при длительном воздействии нагрузки в условиях нормальной температуры (+20°С) проявляет пластические свойства. Пластичные же материалы, такие, как малоуглеродистая сталь, при воздействии ударных нагрузок проявляет хрупкие свойства.

В зависимости от указанных обстоятельств механические свойства материалов проявляются по-разному. Обобщенный анализ свойств материалов с учетом температуры и времени оказывается очень сложным. Функциональная зависимость между четырьмя параметрами σ, ε, температурой t^o и временем t, т.е. $f\left(\sigma, \varepsilon, t^o, t\right) = 0$ не является адекватной и содержит в сложной форме дифференциальные и интегральные соотношения, входящих в нее величин.

Так как в обобщенной форме, точное аналитическое выражение функции f получить невозможно, то влияние температуры и фактора времени рассматривается в настоящее время применительно только к частным классам задач. Деление на классы производится как по характеру действия внешних сил так и по типу материалов, а также в зависимости от скорости нагружения.

Наиболее, изучаемыми в механике материалов, являются процессы происходящие при действии медленно изменяющихся (статических) нагрузок.

Скорость изменения этих нагрузок во времени настолько мала, что кинетическая энергия деформируемого тела, составляет незначительную долю от работы внешних сил. Поэтому работа внешних сил превращается только в упругую энергию и в необратимую тепловую энергию, связанную с пластическими деформациями тела.

При статических испытаниях материалов $\left(\frac{d\varepsilon}{dt} = 0.01 \div 3\frac{1}{\text{ì ìí}}\right)$ в различных температурных режимах определяется зависимость механических характеристик материалов от температуры. Эта зависимость характеризует изменения внутрикристаллических и межкристаллических связей, а в некоторых случаях и структурными изменениями материалов. В общем случае с ростом температуры, прочностные характеристики материалов существенно падают. При этом, чем выше температура, тем труднее определить механические характеристики материалов. Происходит это не только потому, что возрастают

сложности в технике эксперимента, но также вследствие того, что сама характеристика становится менее определенной.

При статическом нагружении, начиная с некоторых значений температур, фактор времени становится очень существенным. Для разных материалов это явление происходит при совершенно различных температурных режимах. Влияние фактора времени обнаруживается и при нормальных температурах. Для металлов его влияние, из-за незначительности, можно пренебречь. А для органических материалов даже при низких температурах время нагружения имеет существенное значения.

В заключение отметим наиболее важные свойства материалов которые обнаруживаются при их испытаниях. Эти свойства имеют фундаментальное значение при построении физических уравнений механики твердого деформируемого тела.

Упругость - это способность твердого деформируемого тела восстанавливать свою форму и объем после прекращения действия внешних нагрузок.

Пластичность - это свойство твердого деформируемого тела до разрушения необратимо изменять свою форму и объем от действия внешних сил.

Вязкость - это свойство оказывать сопротивление за счет трения происходящего при перемещении элементарных частиц тела относительно друг друга в процессе деформирования. Отметим, что при этом, как показывают результаты экспериментов, сила сопротивления, возникающая за счет внутреннего трения материалов, прямым образом зависит от величины скорости перемещения элементарных частиц относительно друг друга.

Упругость, пластичность и вязкость являются главными физическими свойствами твердого деформируемого тела.

Ползучесть - это явление характеризующееся изменения во времени величин деформаций и напряжений в теле при действии статических нагрузок.

Выносливость - при действии периодически изменяющихся по времени нагрузок, это явление, которое характеризуется чувствительностью и изменениями прочностных свойств материалов в зависимости от числа циклов нагружения.

В табл. 2 приводятся значения указанных характеристик (в кН/м^2) наиболее распространенных конструкционных материалов.

Таблица 2

Материал	σ_{TP}	σ_{TC}	σ_{BP}	σ_{BC}	$E\cdot10^{-8}$
Сталь	250000	250000	390000	–	2
Чугун	140000	310000	150000	640000	0.7
Медь	250000	250000	320000	–	1.1
Алюминий	50000	50000	840000	–	0.75

При выполнении практических расчетов реальную диаграмму (рис. 2.9) упрощают, и с этой целью применяются различные аппроксимирующие диаграммы. Для решения задач с учетом *упруго–пластических* свойств материалов конструкций чаще всего применяется *диаграмма Прандтля*. По этой диаграмме напряжение изменяется от нуля до предела текучести по закону Гука $\sigma = E\varepsilon$, а далее при росте ε, $\sigma = \sigma_T$ (рис. 2.10).

Способность материалов получать остаточные деформации носит название *пластичности*. На рис. 2.9 была представлена характерная диаграмма для пластических материалов.

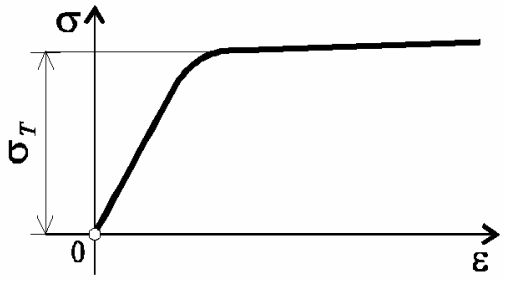


Рис. 2.10

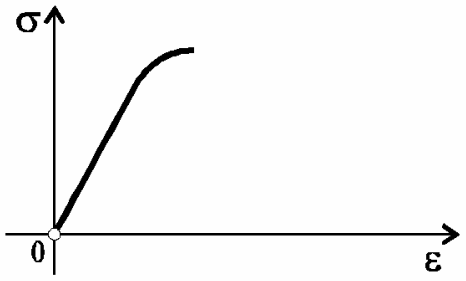


Рис. 2.11

Противоположным свойству пластичности является свойство *хрупкости*, т.е. способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. Материал, обладающий этим свойством, называется *хрупким*. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая сталь, стекло, кирпич, бетон, природные камни. Характерная диаграмма деформации хрупких материалов изображена на рис. 2.11.

2.8. Общие принципы расчета конструкции

В результате расчета нужно получить ответ на вопрос, удовлетворяет или нет конструкция тем требованиям прочности и жесткости, которые к

ней предъявляются. Для этого необходимо прежде всего сформулировать те принципы, которые должны быть положены в основу оценки условий достаточной прочности и жесткости.

Наиболее распространенным методом расчета деталей машин и элементов сооружений на прочность является *расчет по напряжениям*. В основу этого метода положено предположение, что определяющим параметром надежности конструкции является напряжение или, точнее говоря, напряженное состояние в точке. Расчет выполняется в следующем порядке.

На основании анализа напряженного состояния конструкции выявляется та точка сооружения, где возникают наибольшие напряжения. Расчетная величина напряжений сопоставляется с предельно допустимой величиной напряжений для данного материала, полученной на основе предварительных лабораторных испытаний. Из сопоставления найденных расчетных напряжений и предельных напряжений делается заключение о прочности конструкции.

Указанный метод является не единственным. Например, на практике в некоторых случаях используется метод расчета конструкций по разрушающим нагрузкам. В этом методе путем расчета определяется предельная нагрузка, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и не изменяя существенно свою форму. Предельная (разрушающая) нагрузка сопоставляется с проектной нагрузкой, и на этом основании делается вывод о несущей способности конструкции в эксплуатационных условиях.

Методы расчета конструкций выбираются в зависимости от условий работы конструкций и требований, которые к ней предъявляются. Если необходимо добиться наименьших изменений формы конструкции, то производится расчет по *допускаемым перемещениям*. Это не исключает и одновременной проверки системы на прочность по напряжениям.

При расчете конструкций по напряжениям условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_{max} \le [\sigma], \qquad (2.24)$$

где σ_{max} – расчетное значение напряжения в точке, где возникают наибольшие напряжения, $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Величина $[\sigma]$ определяется по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_\alpha}{n}. \qquad (2.25)$$

Здесь n – число, большее единицы, называемое коэффициентом запаса по прочности. Для особо ответственных конструкций, для которых требуется не допускать возникновения пластических деформаций, за величину σ_α принимается $\sigma_\alpha = \sigma_y$. В тех случаях, когда допустимо возникновение пластических деформаций, как правило, принимается $\sigma_\alpha = \sigma_T$. Для хрупких ма-

териалов, а в некоторых случаях и умеренно пластических материалов, принимается $\sigma_\alpha = \sigma_в$. Здесь $\sigma_в$ – временное сопротивление материала.

Критерий прочности, принятый в методе *допускаемых напряжений*, а именно, напряжения в точке, не всегда и не полностью характеризует условие наступления разрушения конструкции. В ряде случаев за такой критерий целесообразнее принимать предельную нагрузку, которую может выдержать заданная система, не разрушаясь и несущественно изменяя свою форму.

При определении разрушающей нагрузки для конструкций из пластичного материала применяется схематизированная диаграмма напряжений – *диаграмма Прандтля* (рис. 2.10). Схематизация диаграммы заключается в предположении, что материал на начальном этапе деформирования находится в упругой стадии вплоть до предела текучести, а затем материал обладает неограниченной площадкой текучести. Материал, работающий по такой диаграмме, называется *идеально упруго–пластическим*. Такая схематизированная диаграмма деформирования в большей степени соответствует действительной диаграмме деформирования материала, имеющего ярко выраженную площадку текучести, т.е. пластичным материалам (см. п. 2.7).

Если расчет конструкций ведется по *предельной нагрузке*, то определяющим является выполнение условия

$$P_{\max} \le [P], \qquad (2.26)$$

где $[P]$ – допускаемая сила, которая определяется по формуле:

$$[P] = \frac{P_\alpha}{n_1}, \qquad (2.27)$$

Здесь P_α – значение внешних нагрузок, при которых происходит разрушение конструкции; n_1 – коэффициент запаса.

В случае расчета конструкции на жесткость необходимо удовлетворять условию

$$u \le [u], \qquad (2.28)$$

где u и $[u]$ – расчетное и предельно допустимое значения перемещения.

2.9. Пример расчета (задача № 2)

Абсолютно жесткий брус AE (рис. 2.12, *а*), имеющий одну шарнирно неподвижную опору C и прикрепленный в точках B, $Д$ и E тремя тягами из упруго–пластического материала, нагружен переменной по величине силой P. Площадь поперечного сечения тяг F_1, F_2, F_3, модуль упругости и предел текучести материала тяг $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_т = 240$ МПа. Допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_т}{n}$, где коэффициент запаса прочности n принят равным 1,5.

Требуется:

1. Найти усилия в тягах, реакцию опоры C и угловое смещение (поворот бруса вокруг точки C) как функции от величины силы P;

2. Определить в процессе увеличения нагрузки P такую ее величину, при которой напряжение в одной из тяг достигает предела текучести;

3. Определить в процессе увеличения нагрузки P ее предельную величину, при которой напряжения в трех тягах достигнут предела текучести, реакцию опоры C и соответствующий этому предельному состоянию угол;

4. Найти величины несущей способности конструкции из расчетов по методам допускаемых напряжений и разрушающих нагрузок при одном и том же коэффициенте запаса прочности. Сопоставить результаты и сделать вывод.

Дано: $F_1 = 2\cdot10^{-4}$ м^2; $F_2 = 1\cdot10^{-4}$ м^2; $F_3 = 2\cdot10^{-4}$ м^2; $a = 2$ м; $b = 1$ м; $c = 1$ м; $d = 2$ м; $l_1 = 1$ м; $l_2 = 1$ м; $l_3 = 1{,}2$ м.

Решение

1. *Найти усилия в тягах, реакции в опоре C и угловое смещение (поворот бруса вокруг т. C), как функции от величины силы P.* Для определения величин усилий в тягах в зависимости от P применим метод сечений. Сделав сечение по всем тягам и приложив в местах сечений усилия N_1, N_2 и N_3, возникающие в тягах, рассмотрим равновесие оставшейся части, нагруженной продольными усилиями в тягах N_1, N_2 и N_3 реакциями опоры C (R_C и H_C) и силой P (рис. 2.12, *б*). Составив уравнения равновесия статики для оставшейся части, получим:

$$1)\ \Sigma z = 0, \qquad H_C = 0; \tag{2.29}$$

$$2)\ \Sigma y = 0, \qquad -P + N_1 + R_C - N_2 - N_3 = 0; \tag{2.30}$$

$$3)\ \Sigma M_C = 0, \qquad -P\cdot3 + N_1\cdot1 + N_2\cdot1 + N_3\cdot3 = 0. \tag{2.31}$$

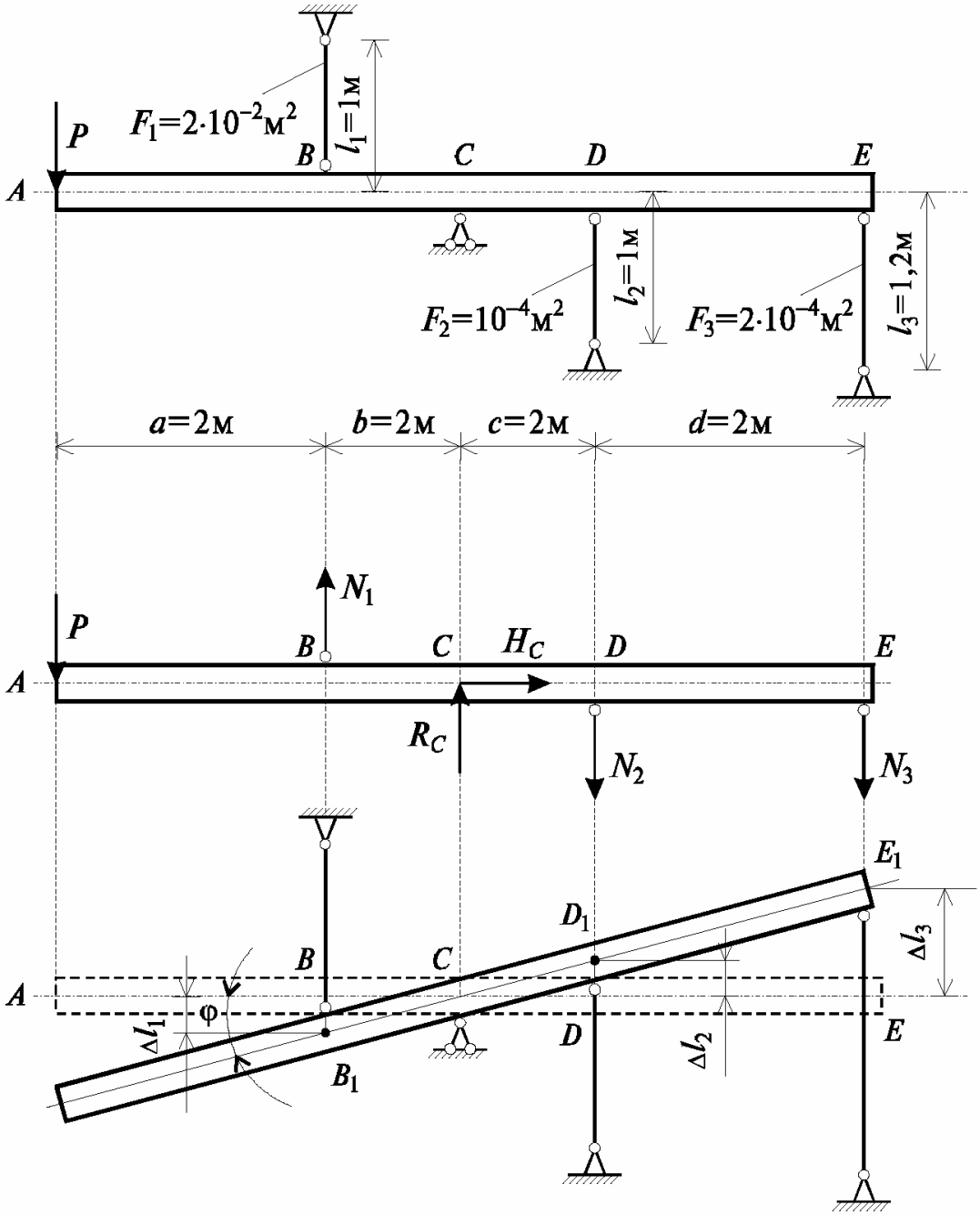


Рис. 2.12

Из уравнений равновесия видно, что система дважды статически неопределима, т.к. два уравнения равновесия (2.30) и (2.31) содержат в своем составе четыре неизвестных. Поэтому для решения задачи необходимо составить два дополнительных уравнения совместности деформаций, раскрывающих статическую неопределимость системы.

Для составления дополнительных уравнений рассмотрим деформированное состояние системы (рис. 2.12, *в*), имея в виду, что брус абсолютно жесткий и поэтому после деформации тяг останется прямолинейным.

Эти дополнительные уравнения совместности деформаций получим из подобия треугольников $BCB_1 \sim DCD_1$ и $BCB_1 \sim ECE_1$:

$$\frac{\Delta l_1}{b} = \frac{\Delta l_2}{c} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l_1}{b} = \frac{\Delta l_3}{c+d}.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$\Delta l_2 = \frac{c\,\Delta l_1}{b} = \Delta l_1, \quad \Delta l_2 = \Delta l_1; \tag{2.32}$$

$$\Delta l_3 = \frac{(c+d)\,\Delta l_1}{b} = \frac{3\,\Delta l_1}{1} = 3\,\Delta l_1, \quad \Delta l_3 = 3\,\Delta l_1. \tag{2.33}$$

Выразив деформации тяг по формуле определения абсолютного удлинения:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E F_1} = \frac{N_1 \cdot 1}{E \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^4}{E} \cdot N_1;$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E F_2} = \frac{N_2 \cdot 1}{E \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^4}{E} \cdot N_2;$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E F_3} = \frac{N_3 \cdot 1}{E \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = \frac{0{,}6 \cdot 10^4}{E} \cdot N_3$$

и подставив эти значения в уравнения (2.32) и (2.33), получим:

$$\frac{10^4 \cdot N_2}{E} = \frac{0{,}5 \cdot 10^4 \cdot N_1}{E}, \quad N_2 = 0{,}5 N_1; \tag{2.34}$$

$$\frac{0{,}6 \cdot 10^4 \cdot N_3}{E} = 3\frac{0{,}5 \cdot 10^4 \cdot N_1}{E}, \quad N_3 = 2{,}5 N_1. \tag{2.35}$$

Подставив найденные значения N_2 и N_3 в уравнение (2.31) определяем величину N_1 :

$$-P \cdot 3 + N_1 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot N_1 \cdot 1 + 2{,}5 \cdot N_1 \cdot 3 = 0; \quad N_1 = 0{,}3333P.$$

Зная N_1, из уравнений (2.34) и (2.35), находим N_2 и N_3:

$$N_2 = \frac{P}{6} = 0{,}167P; \quad N_3 = 2{,}5\frac{1}{3}P = 0{,}833P.$$

Опорную реакцию R_C определяем из уравнения (2.30), подставив найденные значения N_1, N_2 и N_3:

$$-P + 0{,}333P + R_C - 0{,}167P - 0{,}833P = 0; \quad R_C = 1{,}667P.$$

После определения величин усилий в тягах N_1, N_2, N_3 и реакции R_C необходимо проверить правильность их вычисления. Для этого составим уравнение равновесия статики $\Sigma M_A = 0$:

$$-N_1 \cdot a - R_C(a+b) + N_2(a+b+c) + N_3(a+b+c+d) = 0;$$

$$-\frac{1}{3}P \cdot 2 - \frac{5}{3}P \cdot 3 + \frac{1}{6}P \cdot 4 + \frac{5}{6}P \cdot 6 = 0;$$

$$-5\frac{2}{3}\cdot P + 5\frac{2}{3}\cdot P = 0; \qquad 0 = 0.$$

Следовательно, N_1, N_2, N_3 и R_C определены правильно.

Угловое смещение бруса (угол φ), ввиду его малости, находим как тангенс угла наклона бруса AE:

$$\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi = \frac{\Delta l_1}{b} = \frac{N_1 l_1}{E F_1 b} = \frac{0{,}333 P \cdot l}{2\cdot 10^8 \cdot 2\cdot 10^{-4} \cdot l} = 0{,}0833\cdot 10^{-4} P \text{ [рад]}.$$

2. *Определить в процессе увеличения нагрузки P такую ее величину, при которой напряжение в одной из тяг достигнет предела текучести.* Для вычисления величины P, при которой напряжение в одной из тяг достигнет предела текучести σ_T, определим нормальные напряжения, возникающие в тягах, учитывая то, что тяги работают на растяжение:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0{,}333 P}{2\cdot 10^{-4}} = 0{,}167\cdot 10^4 P;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0{,}167 P}{1\cdot 10^{-4}} = 0{,}167\cdot 10^4 P;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{0{,}833 P}{2\cdot 10^{-4}} = 0{,}417\cdot 10^4 P.$$

Полученные величины напряжений показывают, что в тяге 3 напряжение достигнет предела текучести раньше, чем в тягах 1 и 2, так как $\sigma_3 > \sigma_1$ и $\sigma_3 > \sigma_2$. Поэтому, приравняв напряжение σ_3 пределу текучести σ_T, определим величину P, при которой нормальное напряжение в тяге 3 достигнет предела текучести σ_T:

$$0{,}417\cdot 10^4 \cdot P = 24\cdot 10^4 \text{ кПа},$$

откуда

$$P = \frac{24\cdot 10^{-4}}{0{,}417\cdot 10^4} = 57{,}6 \text{ кН}.$$

3. *Определить в процессе увеличения нагрузки P ее предельную величину, при которой напряжения в трех тягах достигнут предела текучести, реакцию опоры C и соответствующий этому предельному состоянию угол.* При исчерпании несущей способности всех тяг напряжения в них достигнут предела текучести σ_T. В этом случае предельные усилия, которые возникнут в тягах, будут равны:

$$N_1^{\text{пр}} = F_1\cdot\sigma_T = 2\cdot 10^{-4}\cdot 24\cdot 10^4 = 48 \text{ кН};$$

$$N_2^{\text{пр}} = F_2\,\sigma_T = 1\cdot 10^{-4}\cdot 24\cdot 10^4 = 24 \text{ кН};$$

$$N_3^{пр} = F_3 \cdot \sigma_T = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 24 \cdot 10^4 = 48 \text{ кН}.$$

Предельную величину внешней нагрузки, соответствующую исчерпанию несущей способности, найдем из уравнения (2.31), подставив в него предельные значения $N_1^{пр}$, $N_2^{пр}$, $N_3^{пр}$:

$$-P_{пр} \cdot 3 + 48 \cdot 1 + 24 \cdot 1 + 48 \cdot 3 = 0; \quad P_{пр} = \frac{216}{3} = 72 \text{ кН}.$$

Предельную величину реакции $R_N^{пр}$ определяем из уравнения (2.30):

$$-72 + 48 + R_N^{пр} - 24 - 48 = 0; \; R_N^{пр} = 96 \text{ кН}.$$

При определении наименьшего угла поворота бруса, соответствующего предельному состоянию системы, необходимо знать, в какой из тяг текучесть наступит позже.

Полученные величины напряжений (см. п. 2) показывают, что в тягах 1 и 2 напряжения достигнут предела текучести одновременно, но позже, чем в тяге 3. Поэтому предельный угол поворота бруса определяем для момента перехода материала тяг 1 и 2 в пластическое состояние:

$$\operatorname{tg} \varphi_{пр} \approx \varphi_{пр} = \frac{\Delta l_1}{b} = \frac{N_1^{пр} \cdot l_1}{E F_1 \cdot b} = \frac{48 \cdot 1}{2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ рад},$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi_{пр} \approx \varphi_{пр} = \frac{\Delta l_2}{c} = \frac{N_2^{пр} \cdot l_2}{E F_2 \cdot c} = \frac{24 \cdot 1}{2 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 1} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

4. *Найти несущую способность из расчетов по методам допускаемых напряжений и разрушающих нагрузок при одном и том же коэффициенте запаса прочности. Сопоставить результаты и сделать вывод.* Из предыдущих расчетов (см. п. 2) видно, что текучесть материала раньше появится в тяге 3, т.к. $\sigma_3 > \sigma_1$ и $\sigma_3 > > \sigma_2$. Поэтому для определения величины грузоподъемности из расчета по методу допускаемых напряжений приравниваем напряжение в этой тяге $\sigma_3 = 0{,}417 \cdot 10^4 P$ к допускаемому напряжению:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{24 \cdot 10^4}{1{,}5} = 16 \cdot 10^4 \text{ кПа}, \quad 0{,}417 \cdot 10^4 [P] = 16 \cdot 10^4 \text{ кПа},$$

$$[P] = \frac{16 \cdot 10^4}{0{,}417 \cdot 10^4} \approx 38{,}4 \text{ кН}.$$

Несущая способность конструкции из расчета по методу разрушающих нагрузок получим путем деления ранее полученного значения $P_{пр} = 72$ кН на коэффициент запаса $n_1 = 1{,}5$:

$$[P_{\text{Ï Ð}}] = \frac{P_{\text{Ï Ð}}}{n_1} = \frac{72}{1{,}5} = 48\ \text{кН}.$$

Сравнивая полученные величины, видим, что несущая способность из расчета по методу разрушающих нагрузок больше несущей способности из расчета по методу допускаемых напряжений на $\frac{48 - 38{,}4}{38{,}4} \times 100\% \approx 25\%$, что подтверждает известное положение о том, что метод допускаемых напряжений, в отличии от метода разрушающих нагрузок, не позволяет определить полную несущую способность системы. Это объясняется тем, что для статически неопределимых систем, переход одного элемента в пластическую стадию работы, как правило, не означает наступления *предельного состояния*. Переход системы в предельное состояние отождествляется с превращением ее из неизменяемой в геометрически изменяемую систему. Известно, что в статически неопределимой системе разрушение "лишних связей" не превращает ее в геометрически изменяемую. Так как реальные сооружения чаще всего представляют собой многократно статически неопределимые системы, материал которых обладает свойством пластичности, поэтому метод предельного равновесия имеет важное значение для раскрытия истинных резервов их несущей способности.

3. ÃÅÎÌÅÒÐÈ×ÅÑÊÈÅ ÕÀÐÀÊÒÅÐÈÑÒÈÊÈ ÏÎÏÅÐÅ×ÍÛÕ ÑÅ×ÅÍÈÉ ÁÐÓÑÀ

3.1. Статические моменты сечения

При решении практических задач возникает необходимость в использовании различных геометрических характеристик поперечных сечений бруса. Настоящий раздел посвящен методам их определения. Рассмотрим некоторое поперечное сечение в системе координат x, y (рис. 3.1) и рассмотрим два следующих интегральных выражения:

$$S_X = \int_F y\,dF\,; \quad S_y = \int_F x\,dF\,, \tag{3.1}$$

где нижний индекс y знака интеграла указывает на то, что интегрирование ведется по всей площади сечения F. Каждый из этих интегралов представляет собой сумму произведений элементарных площадок dF на расстояние до соответствующей оси (x или y). Первый интеграл называется статическим моментом сечения относительно оси x, а второй – относительно оси y.

При выполнении практических расчетов важно знать, как меняются статические моменты сечения при параллельном переносе координатных осей (рис 3.2).

Очевидно, что

$$x = x_1 + a;\ y = y_1 + b. \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1) получим:

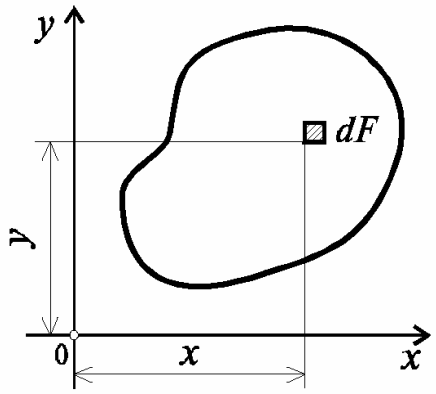


Рис. 3.1

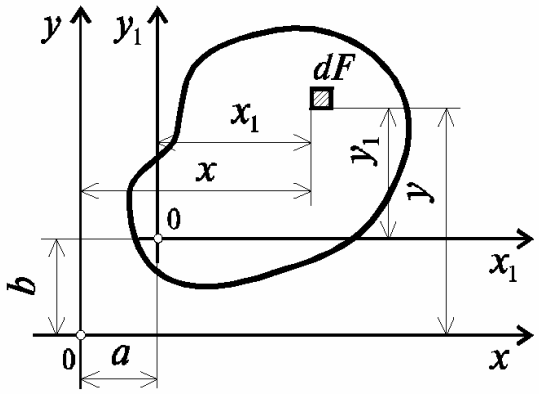


Рис. 3.2

$$S_x = \int_F (y_1 + b)\, dF = \int_F y_1\, dF + b\,F;$$
$$S_y = \int_F (x_1 + a)\, dF = \int_F x_1\, dF + a\,F. \qquad (3.3)$$

Величины a и b можно подобрать (причем единственным образом) так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$b \cdot F = S_x; \quad a \cdot F = S_y, \qquad (3.4)$$

тогда статические моменты $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*. Точка $C(x_C, y_C)$ пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения* в системе координат (x, y) и определяется из (3.4):

$$x_C = a = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = b = \frac{S_x}{F}. \qquad (3.5)$$

Далее предположим, что брус имеет составное сечение (рис. 3.3) с общей площадью F. Обозначим через F_k ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$) площадь k–ой области, принадлежащей к составному сечению бруса. Тогда выражение (3.1) можно преобразовать в следующем виде:

$$S_x = \sum_{k=1}^{n} \int_{F_k} y\, dF = \sum_{k=1}^{n} S_x^{(k)}; \quad S_y = \sum_{k=1}^{n} \int_{F_k} x\, dF = \sum_{k=1}^{n} S_y^{(k)}, \qquad (3.6)$$

где $S_x^{(k)}$, $S_y^{(k)}$ – статические моменты k–той области относительно осей x и y. Следовательно, статический момент составного сечения равен сумме статических моментов составляющих областей.

3.2. Моменты инерции сечения

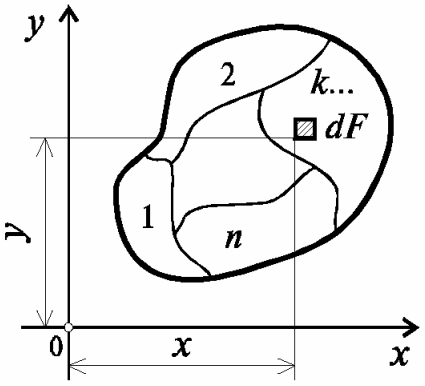


Рис. 3.3

В дополнение к статическим моментам в системе координат $x0y$ (рис. 3.1)рассмотрим три интегральных выражения:

$$I_x = \int_F y^2 dF; \quad I_y = \int_F x^2 dF; \qquad I_{xy} = \int_F y\,x\,dF. \tag{3.7}$$

Первые два интегральных выражения называются осевыми моментами инерции относительно осей x и y, а третье – центробежным моментом инерции сечения относительно осей x, y.

Для сечений, состоящих из n-числа областей (рис. 3.3), формулы (3.7) по аналогии с (3.6) будут иметь вид:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} \int_{F_k} y^2 dF = \sum_{k=1}^{n} I_x^{(k)}; \quad I_y = \sum_{k=1}^{n} \int_{F_k} x^2 dF = \sum_{k=1}^{n} I_y^{(k)};$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} \int_{F_k} x\,y\,dF = \sum_{k=1}^{n} I_{xy}^{(k)}.$$

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции сечения при параллельном переносе координатных осей x и y (см. рис. 3.2). Преобразуя формулы (3.7) с учетом выражения (3.2), получим :

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_1} + 2b\,S_{x_1} + b^2F; \\ I_y &= I_{y_1} + 2a\,S_{y_1} + a^2F; \\ I_{xy} &= I_{x_1y_1} + a\,S_{x_1} + b\,S_{y_1} + abF. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Если предположить, что оси x_1 и y_1 (см. рис. 3.2) являются центральными, тогда $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$ и выражения (3.8) упрощаются и принимают вид:

$$I_x = I_{x_1} + b^2F; \quad I_y = I_{y_1} + a^2F; \quad I_{xy} = I_{x_1y_1} + abF. \tag{3.9}$$

Определим осевые моменты инерции прямоугольника относительно осей x и y, проходящих через его центр тяжести (рис. 3.4). В качестве элементарной площадки dF возьмем полоску шириной b и высотой dy (рис. 3.4). Тогда будем иметь:

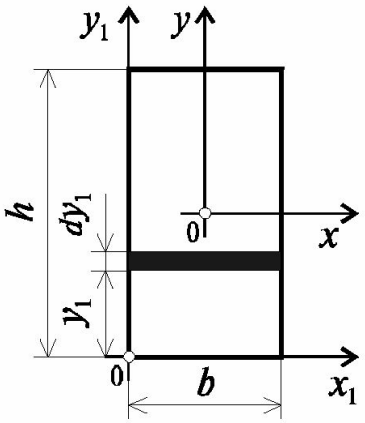


Рис. 3.4

$$I_X = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dF\, b\, dy =$$

$$= \frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) = \frac{b\,h^3}{12}.$$

Аналогичным образом можно установить, что $I_y = \dfrac{h\,b^3}{12}$.

Для систем, рассматриваемых в полярной системе координат (рис. 3.5, а), вводится также полярный момент инерции:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF\ .$$

где ρ – радиус–вектор точки тела в заданной полярной системе координат.

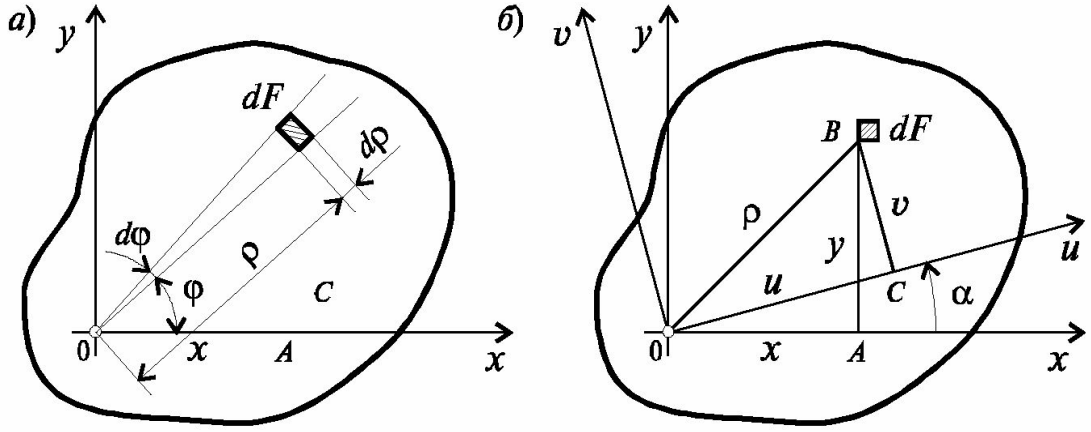


Рис. 3.5

Вычислим полярный момент инерции круга радиуса R. На рис. 3.5, *а* показана элементарная площадка, очерченная двумя радиусами и двумя концентрическими поверхностями, площадью

$$dF = \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Интегрирование по площади заменим двойным интегрированием:

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Найдем зависимость между полярным и осевыми моментами инерции для круга. Из геометрии видно (рис. 3.5, *б*), что

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

следовательно,

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_F \left(x^2 + y^2\right) dF = \int_F x^2 dF = \int_F y^2 dF = I_x + I_y.$$

Так как оси x и y для круга равнозначны, то $I_x = I_y = \dfrac{\pi R^4}{4}$.

Полярный момент инерции кольца может быть найден как разность моментов инерции двух кругов: наружного (радиусом R) и внутреннего (радиусом r):

$$I_\rho^K = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right).$$

3.3. Главные оси и главные моменты инерции

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции плоского сечения при повороте осей координат из положения x и y к положению u и v. Из рис. 3.5, *б* легко установить, что

$$u = y\sin\alpha + x\cos\alpha; \quad v = y\cos\alpha - x\sin\alpha. \tag{3.10}$$

Из выражений:

$$I_u = \int_F v^2 dF; \quad I_v = \int_F u^2 dF; \quad I_{uv} = \int_F uv\, dF$$

с учетом (3.10) после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha; \\ I_v &= I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha; \\ I_{uv} &= 0{,}5(I_x - I_y)\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Складывая первые два уравнения, получим:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_\rho, \tag{3.12}$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$; I_ρ – полярный момент инерции сечения, величина которого, как видно, не зависит от угла поворота координатных осей.

Дифференцируя в (3.11) выражение I_u по α и приравнивая его нулю, находим значение $\alpha = \alpha_0$, при котором функция I_u принимает экстремальное значение:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \qquad (3.13)$$

С учетом (3.12) можно утверждать, что при $\alpha = \alpha_0$ один из осевых моментов I_u или I_v будет наибольшим, а другой наименьшим. Одновременно при $\alpha = \alpha_0$ I_{uv} обращается в нуль, что легко установить из третьей формулы (3.11).

Декартовы оси координат, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются *главными осями инерции*. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными и определяются из (3.11) с учетом (3.13) и имеют вид:

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \qquad (3.14)$$

В заключение введем понятие *радиуса инерции* сечения относительно координатных осей x и y – i_x и i_y, соответственно, которые определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}. \qquad (3.15)$$

3.4. Пример расчета (задача № 3)

Для сечения, составленного из швеллера №20 а, равнобокого уголка $(80\times80\times8)\cdot10^{-9}$ м^3 и полосы $(180\times10)\cdot10^{-6}$ м^2 (рис. 3.6) требуется:

1. Найти общую площадь сечения;
2. Определить центр тяжести составного сечения;
3. Определить осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно осей, проходящих через его центр тяжести;
4. Найти положение главных центральных осей инерции;
5. Определить величины главных центральных моментов инерции сечения и проверить правильность их вычисления;
6. Вычислить величины главных радиусов инерции.

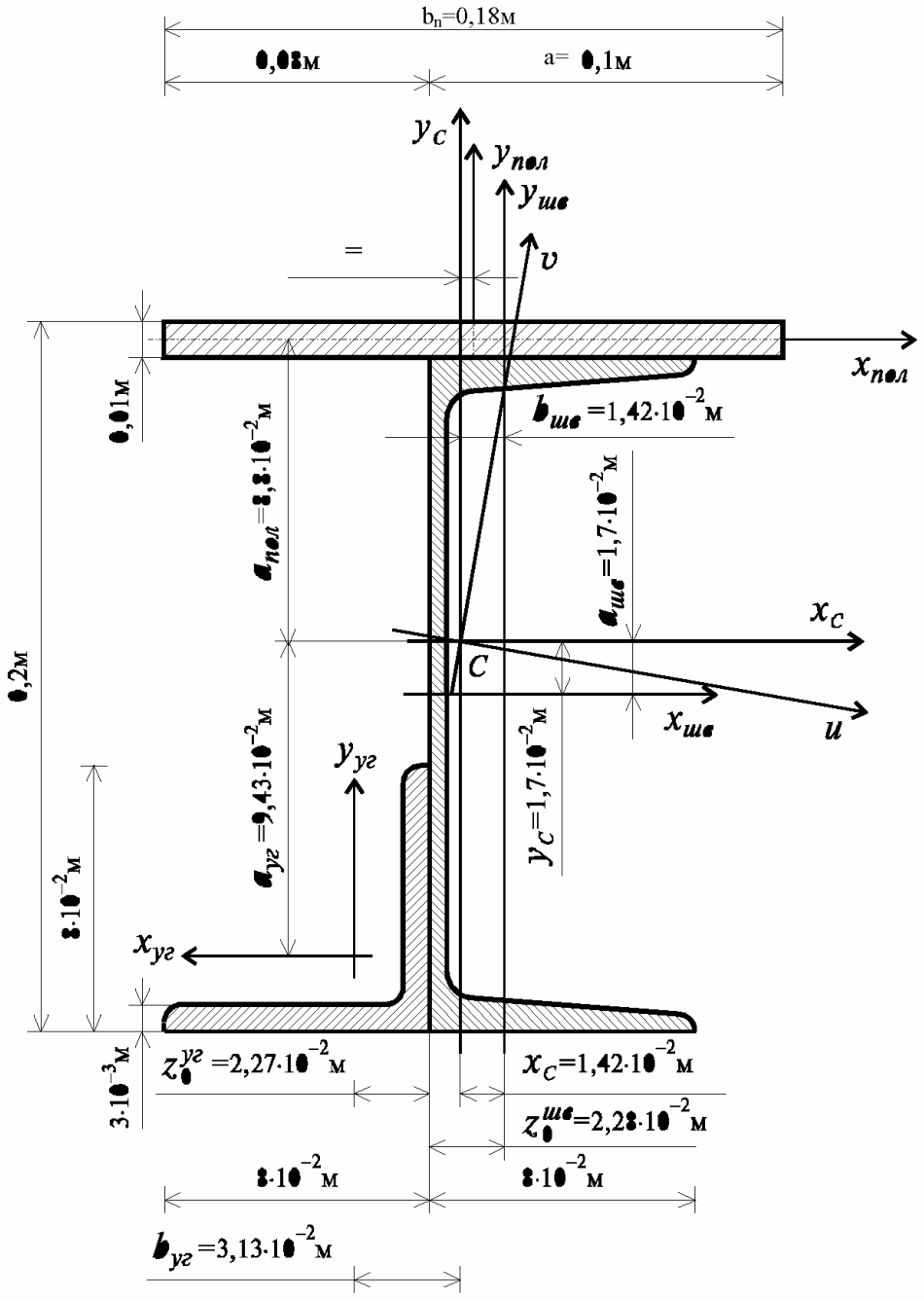


Рис. 3.6

Р е ш е н и е

Из сортамента выписываем все необходимые геометрические характеристики для профилей, входящих в составное сечение. Швеллер № 20 а

(ГОСТ 8240–72): $h_{шв} = 0{,}2$ м, $b_{шв} = 0{,}08$ м, $F_{шв} = 25{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^2, $I_x^{шв} = 1670 \cdot 10^{-8}$ м^4, $I_y^{шв} = 139 \cdot 10^{-8}$ м^4, $z_0^{шв} = 0{,}0228$ м.

Уголок $(80 \times 80 \times 8) \cdot 10^{-9}$ м^3 (ГОСТ 8509–72): $b_{уг} = 0{,}08$ м, $F_{уг} = \ = 12{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^2, $I_x^{уг} = I_y^{уг} = 73{,}4 \cdot 10^{-8}$ м^4, $I_{x_0}^{уг} = I_{\max}^{уг} = 116 \cdot 10^{-8}$ м^4, $I_{y_0}^{уг} = I_{\min}^{уг} = 30{,}3 \cdot 10^{-8}$ м^4, $z_0^{уг} = 0{,}0227$ м.

Полоса $b_П \cdot \delta_П = 18 \cdot 1 \cdot 10^{-4}$ м^2, $F_П = b_П \cdot \delta_П = 18 \cdot 1 \cdot 10^{-4}$ м^2 $= 18 \cdot 10^{-4}$ м^2;

$$I_x^{'} = \frac{18 \cdot 10^{-2} (1 \cdot 10^{-2})^3}{12} = 1{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad I_y^{'} = \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot (18 \cdot 10^{-2})^3}{12} = 486 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

1. *Определение общей площади составного сечения*. Общая площадь составного сечения определяется по формуле:

$$F = F_{шв} + F_{уг} + F_П, \qquad \text{F} = (25{,}2 + 12{,}3 + 18) \cdot 10^{-4} = 55{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

2. *Определить центр тяжести составного сечения*. В качестве вспомогательных осей для определения положения центра тяжести примем горизонтальную и вертикальную оси $x_{шв}$ и $y_{шв}$, проходящие через центр тяжести швеллера. Статические моменты площади всего сечения относительно этих осей будут равны:

$$S_{x_{шв}} = F_П \left(0{,}5\, h_{шв} + 0{,}5\, \delta_П\right) + F_{уг} \left(-0{,}5\, h + z_0^{уг}\right) =$$

$$= \left[18(10 + 0{,}5) + 12{,}3(-10 + 2{,}27)\right] \cdot 10^{-6} \text{ì}^3 = 93{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ì}^3;$$

$$S_{y_{шв}} = F_П \left(a - \frac{b_п}{2} - z_0^{шв}\right) + F_{уг} \left(-z_0^{шв} - z_0^{уг}\right) =$$

$$= \left[18(-2{,}28 + 1) + 12{,}3(-2{,}28 - 2{,}27)\right] \cdot 10^{-6} \text{ì}^3 = 79 \cdot 10^{-4} \text{ì}^3.$$

Координаты центра тяжести вычисляем по формулам:

$$y_C = \frac{S_{x_{шв}}}{F} = \frac{93{,}9 \cdot 10^{-6}}{55{,}5 \cdot 10^{-4}} = +0{,}017\text{ì}, \quad x_C = \frac{S_{y_{шв}}}{F} = \frac{79 \cdot 10^{-6}}{55{,}5 \cdot 10^{-4}} = -0.0142\text{ì}.$$

3. *Определить осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно осей, проходящих через его центр тяжести*. Для определения указанных моментов инерции

составного сечения воспользуемся формулами, выражающими зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$I_{x_C} = I_x^{øâ} + F_{øâ}\, a_{øâ}^2 + I_x^{óã} + F_{óã}\, a_{óã}^2 + I_x^{ï} + F_ï\ a_ï^2. \qquad (3.16)$$

$$I_{y_C} = I_y^{øâ} + F_{øâ}\, b_{øâ}^2 + I_y^{óã} + F_{óã}\, b_{óã}^2 + I_y^{ï} + F_ï\ b_ï^2. \qquad (3.17)$$

$$I_{x_C y_C} = I_{xy}^{øâ} + F_{øâ}\, a_{øâ}\, b_{øâ} + I_{xy}^{óã} + F_{óã} a_{óã} b_{óã} + I_{xy}^{ï} + F_ï\ a_ï\ b_{øâ}. \qquad (3.18)$$

В этих формулах расстояние между осями, проходящими через центр тяжести составного сечения, и осями, проходящими через центры тяжести каждой составной части фигуры, a и b (рис. 3.6), в рассматриваемом случае будут равны:

$$a_{øâ} = -y_C = -0{,}017\,ì\ , \quad b_{øâ} = -x_C = +0{,}0142\,ì\ ;$$

$$a_П = \left(\frac{h_{øâ}}{2} + \frac{\delta_П}{2} - y_C\right) = \left(10 + 0{,}5 - 1{,}7\right)\cdot 10^{-2} = 0{,}088\,ì\ ;$$

$$b_П = \left(a - z_0^{øâ} - \frac{b_П}{2} + \left|x_C\right|\right) = \left(10 - 2{,}28 - 9 + 1{,}42\right)\cdot 10^{-2} = +0{,}0014\,ì\ .$$

Подставив числовые значения величин в формулы (3.16) и (3.17), получим:

$$I_{x_C} = [1670 + 25{,}2(-1{,}7)^2 + 73{,}4 + 12{,}3(-9{,}43)^2 + 1{,}5 + 18\cdot(8{,}8)^2]\cdot 10^{-8} =$$
$$= 4305{,}4\cdot 10^{-8}\ м^4.$$

$$I_{y_C} = [139 + 25{,}2(1{,}42)^2 \quad + 73{,}4 + 12{,}3(-3{,}13)^2 + 486 + 18(0{,}14)^2)\cdot 10^{-8} \quad =$$
$$= 870{,}1\cdot 10^{-8}\ м^4.$$

При вычислении центробежного момента инерции составного сечения следует иметь в виду, что $I_{xy}^{øâ}$ и $I_{xy}^{ï}$ равны 0, так как швеллер и полоса имеют оси симметрии, а

$$I_{xy}^{óã} = \frac{I_{\max}^{óã} - I_{\min}^{óã}}{2}\sin 2\alpha\ ,$$

где $I_{\max}^{óã} = I_{x_0}^{óã}$; $I_{\min}^{óã} = I_{y_0}^{óã}$; α – угол между осью x и главной осью x_0 уголка. Этот угол может быть положительным или отрицательным. В нашем примере $\alpha = +45°$, поэтому:

$$I_{xy}^{\text{óã}} = \frac{(116-30{,}3)\cdot 10^{-8}}{2}\sin 2\left(+45^\circ\right) = \frac{85{,}7}{2}(1)\cdot 10^{-8} = 42{,}85\cdot 10^{-8}\ \text{ì}^4.$$

Далее, подставив числовые значения в формулу (3.18), получим величину центробежного момента инерции составного сечения:

$$I_{x_C y_C} = [0+25{,}2\cdot(-1{,}7)\cdot 1{,}42+42{,}85+12{,}3\cdot(-9{,}43)(-3{,}13)+0+$$
$$+18\cdot 8{,}8\cdot 0{,}14]\cdot 10^{-8} = 367{,}2\cdot 10^{-8}\ \text{м}^4.$$

4. *Найти положение главных центральных осей инерции*. Угол наклона главных осей инерции, проходящих через центр тяжести составного сечения, к центральным осям инерции x_C и y_C определим по формуле:

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2I_{x_C y_C}}{I_{x_C} - I_{y_C}} = \frac{2\cdot 367{,}2\cdot 10^{-8}}{(4305{,}4-870{,}1)\cdot 10^{-8}} = -0{,}214,\ 2\alpha \approx -12^\circ,\ \alpha = -6^\circ.$$

Так как угол α получился отрицательным, то для отыскания положения главной оси максимального момента инерции u следует ось x_0, осевой момент инерции относительно которой имеет наибольшее значение, повернуть на угол α по ходу часовой стрелки. Вторая ось минимального момента инерции v будет перпендикулярна оси u.

5. *Определить величины главных центральных моментов инерции сечения и проверить правильность их вычисления*. Величины главных центральных моментов инерции составного сечения вычисляем по формуле:

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_{x_C}+I_{y_C}}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{I_{x_C}-I_{y_C}}{2}\right)^2 + I_{x_C y_C}^2};$$

$$I_{\max} = \left[\frac{4305{,}4+870{,}1}{2} + \sqrt{\left(\frac{4305{,}4-870{,}1}{2}\right)^2 + 367{,}2^2}\right]\cdot 10^{-8} =$$

$$= (2587{,}75+1756{,}8 = 4344{,}55)\cdot 10^{-8}\ \text{ì}^4;$$

$$I_{\min} = (2587{,}75-1756{,}8)\cdot 10^{-8} = 830{,}95\cdot 10^{-8}\ \text{ì}^4.$$

Для контроля правильности вычисления величины моментов инерции составного сечения производим проверки.

1-ая проверка: $I_{\max}+I_{\min} = I_{x_C}+I_{y_C} = \text{const};$

$$I_{max} + I_{min} = (4344{,}55 + 830{,}95)\cdot 10^{-8} = (5175{,}5)\cdot 10^{-8}\ м^4;$$

$$I_{x_C} + I_{y_C} = (4305{,}4 + 870{,}1)\cdot 10^{-8} = (5175{,}5)\cdot 10^{-8}\ м^4.$$

2–ая проверка: $I_{max} > I_{x_C} > I_{y_C} > 0;$

$$4344{,}55\cdot 10^{-8} > 4305{,}4\cdot 10^{-8} > 870{,}1\cdot 10^{-8} > 830{,}95\cdot 10^{-8}\ м^4.$$

Проверки удовлетворяются, что говорит о правильности вычисления моментов инерции составного сечения.

6. *Вычислить величины главных радиусов инерции.* Величины главных радиусов инерции вычисляем по известным формулам:

$$i_{max} = \sqrt{\frac{I_{max}}{F}} = \sqrt{\frac{4344{,}55\cdot 10^{-8}}{55{,}5\cdot 10^{-4}}} \approx 0{,}0885\ м;$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{830{,}95\cdot 10^{-8}}{55{,}5\cdot 10^{-4}}} \approx 0{,}0387\ м.$$

4. КРУЧЕНИЕ

4.1. Кручение бруса с круглым поперечным сечением

Здесь под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент. Прочие силовые факторы, т.е. N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y равны нулю.

Для крутящего момента, независимо от формы поперечного сечения бруса, принято следующее правило знаков. Если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видит момент M_z направленным по часовой стрелке, то момент считается положительным. При противоположном направлении моменту приписывается отрицательный знак.

При расчете бруса на кручение (вала) требуется решить две основные задачи. Во–первых, необходимо определить напряжения, возникающие в брусе, и, во–вторых, надо найти угловые перемещения сечений бруса в зависимости от величин внешних моментов.

Наиболее просто можно получить решение для вала с круглым поперечным сечением (рис. 4.1 *а*). Механизм деформирования бруса с круглым поперечным сечением можно представить в виде. Предполагая, что каждое поперечное сечение бруса в результате действия внешних моментов поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как жесткое целое. Данное

предположение, заложенное в основу теории кручения, носит название гипотезы *плоских сечений*.

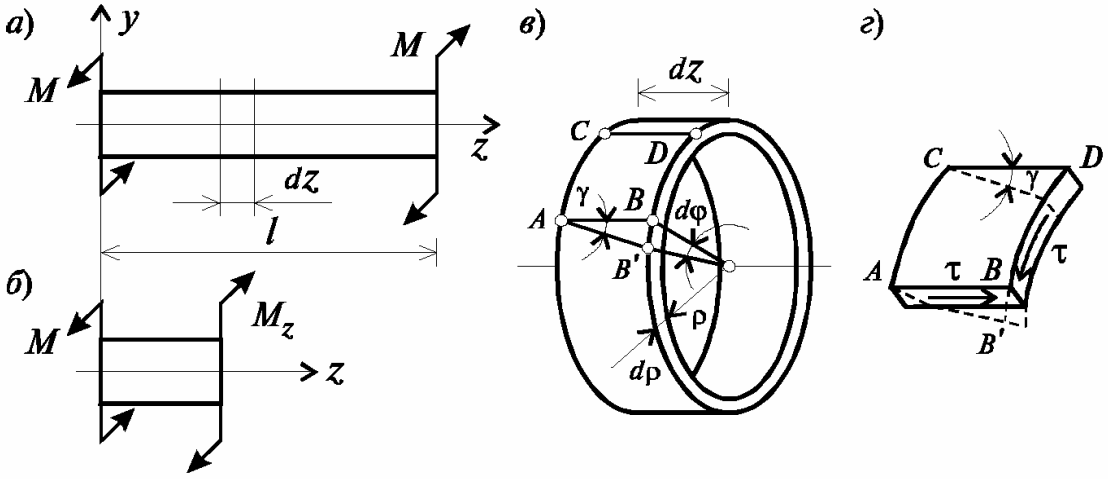


Рис. 4.1

Для построения эпюры крутящих моментов M_z применим традиционный метод сечений – на расстоянии z от начала координат рассечем брус на две части и правую отбросим (рис. 4.1, *б*). Для оставшейся части бруса, изображенной на рис. 4.1, *б*, составляя уравнение равенства нулю суммы крутящих моментов $\Sigma M_z = 0$, получим:

$$M_z = M. \qquad (4.1)$$

Поскольку сечение было выбрано произвольно, то можно сделать вывод, что уравнение (4.1) верно для любого сечения вала –крутящий момент M_z в данном случае постоянен по всей длине бруса.

Далее двумя поперечными сечениями, как это показано на рис. 4.1, *а*, из состава бруса выделим элемент длиной dz, а из него свою очередь двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ выделим элементарное кольцо, показанное на рис. 4.1, *в*. В результате кручения правое торцевое сечение кольца повернется на угол $d\varphi$. При этом образующая цилиндра AB повернется на угол γ и займет положение AB'. Дуга BB' равна с одной стороны, $\rho\, d\varphi$, а с другой стороны – $\gamma\, dz$. Следовательно,

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \qquad (4.2)$$

Если разрезать образовавшуюся фигуру по образующей и развернуть (рис. 4.1, *г*), то можно видеть, что угол γ представляет собой не что иное, как угол сдвига данной цилиндрической поверхности под действием касательных напряжений τ, вызванных действием крутящего момента. Обозначая

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dz}, \qquad (4.3)$$

где Θ – относительный угол закручивания. Этот угол представляет собой угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними. Величина Θ аналогична относительному удлинению при простом растяжении или сжатии стержня.

Из совместного рассмотрения (4.2) и (4.3) и после некоторых преобразований, получим:

$$\gamma = \rho\Theta. \qquad (4.4)$$

Подставляя выражение (4.4) в выражение закона Гука для сдвига (2.23), в данном случае выражение касательных напряжений принимает следующий вид:

$$\tau = G\Theta\rho, \qquad (4.5)$$

где τ – касательные напряжения в поперечном сечении бруса. Парные им напряжения возникают в продольных плоскостях – в осевых сечениях.

Величину крутящего момента M_z можно определить через τ с помощью следующих рассуждений. Момент относительно оси z от действия касательных напряжений τ на элементарной площадке dF равен (рис. 4.2):

$$dM = \tau\rho\, dF.$$

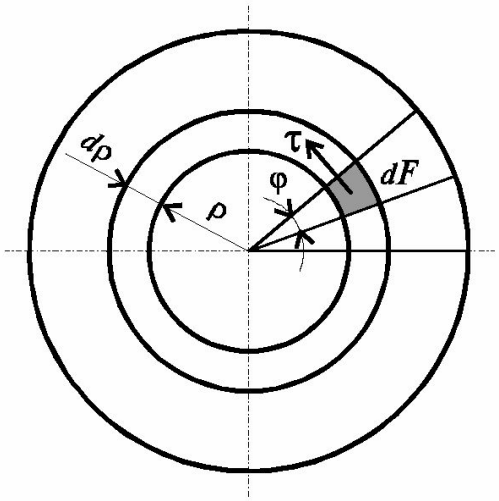


Рис. 4.2

Проинтегрировав это выражение по площади поперечного сечения вала, получим:

$$M_z = \int_F \tau\rho\, dF\,. \qquad (4.6)$$

Из совместного рассмотрения (4.5) и (4.6) получим:

$$M_z = G\Theta\int_F \rho^2 dF = G\Theta I_\rho. \qquad (4.7)$$

Откуда

$$\Theta = \frac{M_z}{G I_\rho}. \qquad (4.8)$$

Величина GI_ρ называется жесткостью бруса при кручении.

Из (4.8), с учетом (4.3), интегрируя полученное выражение по параметру z, получим:

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M_z\, dz}{G\, I_\rho}. \qquad (4.9)$$

Если крутящий момент M_z и жесткость GI_ρ по длине бруса постоянны, то из (4.9) получим:

$$\varphi(z) = \frac{M_z\, dz}{G\, I_\rho} + \varphi(0), \qquad (4.10)$$

где $\varphi(0)$ – угол закручивания сечения в начале системы отсчета.

Для определения выражения напряжений, возвращаясь к формуле (4.5) и исключая из него θ, согласно (4.8), получим:

$$\tau(\rho) = \frac{M_z\, dz}{G\, I_\rho}. \qquad (4.11)$$

Величина $W_\rho = \dfrac{I_\rho}{\rho_{max}}$ называется полярным моментом сопротивления поперечного сечения бруса в форме сплошного круга радиусом R. Определяется эта величина из следующих соображений:

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2}; \quad \rho_{max} = R \rightarrow W_\rho = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}. \qquad (4.12)$$

Если же в брусе имеется внутренняя центральная полость радиусом $r = \dfrac{d}{2}$, то для кольца

$$W_\rho^K = \frac{\pi}{2}\left(R^3 - r^3\right) = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - c^4\right), \qquad (4.13)$$

где $c = \dfrac{r}{R} = \dfrac{d}{D}$.

4.2. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением

Определение напряжений в брусе с некруглым поперечным сечением представляет собой сложную задачу, которая не может быть решена методами сопротивления материалов. Причина заключается в том, что для некруглого поперечного сечения упрощающая гипотеза плоских сечений, оказывается неприемлимой. В данном случае поперечные сечения существенно

искривляются, в результате чего заметно меняется картина распределения напряжений.

Таким образом, при определении углов сдвига, в данном случае, необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но и деформации сечений в своей плоскости, связанная с искривлением сечений.

Задача резко усложняется тем, что для некруглого сечения, напряжения должны определяться как функции уже не одного независимого переменного ρ, а двух – x и y.

Отметим некоторые особенности законов распределения напряжений в поперечных сечениях некруглой формы. Если поперечное сечение имеет внешние углы, то в них касательные напряжения должны обращаться в нуль. Если наружная поверхность бруса при кручении свободна, то касательные напряжения в поперечном сечении, направленные по нормали к контуру также будут равны нулю.

На рис. 4.3 показана, полученная методом теории упругости, эпюра касательных напряжений для бруса прямоугольного сечения. В углах, как видно, напряжения равны нулю, а наибольшие их значения возникают по серединам больших сторон:

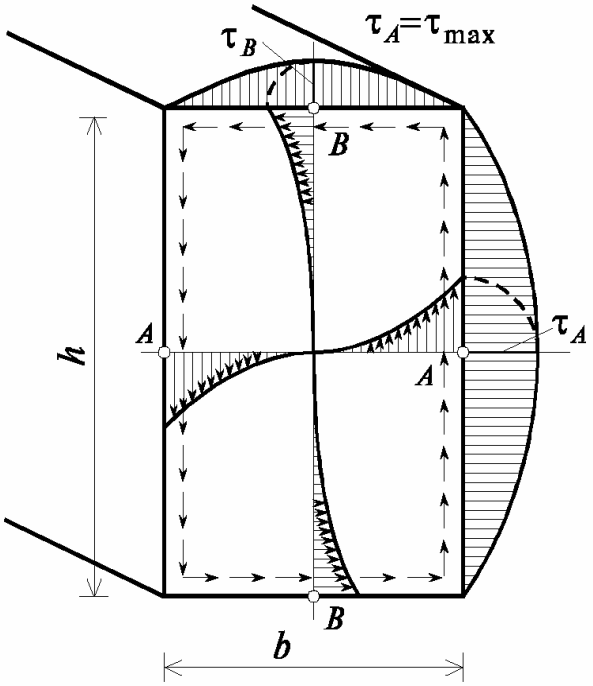


Рис. 4.3

в точке А

$$\tau_A = \tau_{max} = \frac{M_z}{W_K}, \quad (4.14)$$

где $W_K = \beta b^3$ – аналог полярного момента сопротивления поперечного сечения прямоугольного бруса;

в точке В

$$\tau_B = \eta \tau_{max}, \quad (4.15)$$

здесь необходимо учесть, что b – малая сторона прямоугольника.

Значения угла закручивания определяется по формуле:

$$\varphi(z) = \frac{M_z z}{G I_K}, \quad (4.16)$$

где $I_K = \alpha b^4$ – аналог полярного момента инерции поперечного сечения бруса.

Коэффициенты α, β и η зависят от отношения сторон $m = h/b$, и их значения приведены в табл. 3.

Таблица 3

m	1	1,5	2,0	3,0	6,0	10
α	0,141	0,294	0,457	0,790	1,789	3,123
β	0,208	0,346	0,493	0,801	1,789	3,123
η	1,000	0,859	0,795	0,753	0,743	0,742

Геометрические характеристики наиболее представительных форм сечений обобщены в табл. 4.

4.3. Пример расчета (задача № 4)

Стальной валик переменного сечения, испытывающего кручение, закручивается крутящими моментами, действующими в двух крайних и двух пролетных сечениях. Расчетная схема валика, ее геометрические размеры, величины и точки приложения внешних крутящих моментов указаны на рис. 4.4, *а*.

Требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов;
2. Найти допускаемую величину момента M;
3. Построить эпюры касательных напряжений по сечениям вала, отметив на сечениях опасные точки;
4. Построить эпюру углов закручивания;

Модуль упругости при сдвиге материала вала $G = 8 \cdot 10^7$ кН/м^2. Расчетное сопротивление материала вала срезу $R_C = 10^5$ кН/м^2.

Решение

1. *Построить эпюру крутящих моментов.* Для определения величины крутящих моментов используется метод сечений. Согласно расчетной схемы (рис. 4.5, *а*) для I участка ($0 \le z \le 0{,}5$ м):

$$\sum M_{\text{ëåâ}} = 2M + M_{z_1} = 0, \quad \text{откуда} \quad M_{z_1} = -2M .$$

Согласно расчетной схемы (рис. 4.5, *б*) для участка II (0,5 м $\le$ $\le z \le$ 1,0 м):

$$\sum M_{\text{ëåâ}} = 2M - 5{,}5M + M_{z_1} = 0, \quad \text{откуда} \quad M_{z_2} = 3{,}5M \ .$$

Согласно расчетной схемы (рис. 4.5, *в*) для участка III (1,0 м ≤ ≤ z ≤ 1,8 м):

$$\sum M_{\text{ï ð}} = M + M_{z_3} = 0, \quad \text{откуда} \quad M_{z_3} = -M \ .$$

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов (рис. 4.4, *б*).

2. *Найти допускаемую величину момента M.* Допускаемая величина момента M_P определяется из условия прочности:

$$\tau = \frac{M_P}{W_{KP}} \le R_C \ .$$

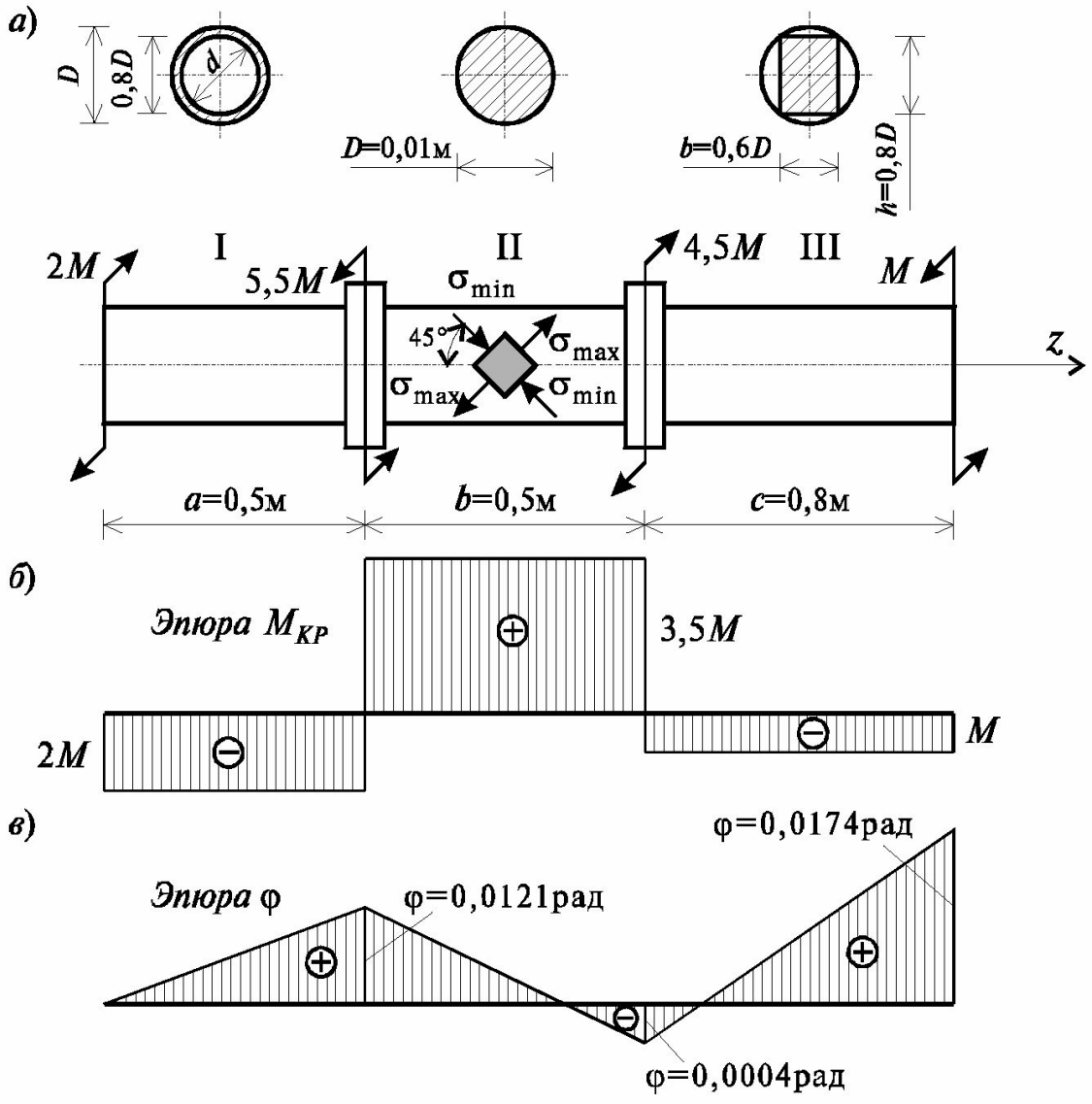


Рис. 4.4

Сначала определим моменты сопротивления сечения валика для каждого участка.

I участок (трубчатое сечение) согласно (4.13):

$$W_{\rho}^{\text{I}} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \tilde{n}^4); \quad \text{где } c = \frac{d}{D} = 0{,}8;$$

$$W_{\rho}^{\text{I}} = \frac{3{,}14 \cdot \left(10 \cdot 10^{-2}\right)^3}{16}(1 - 0{,}8^3) = 116 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

II участок (круглое сечение):

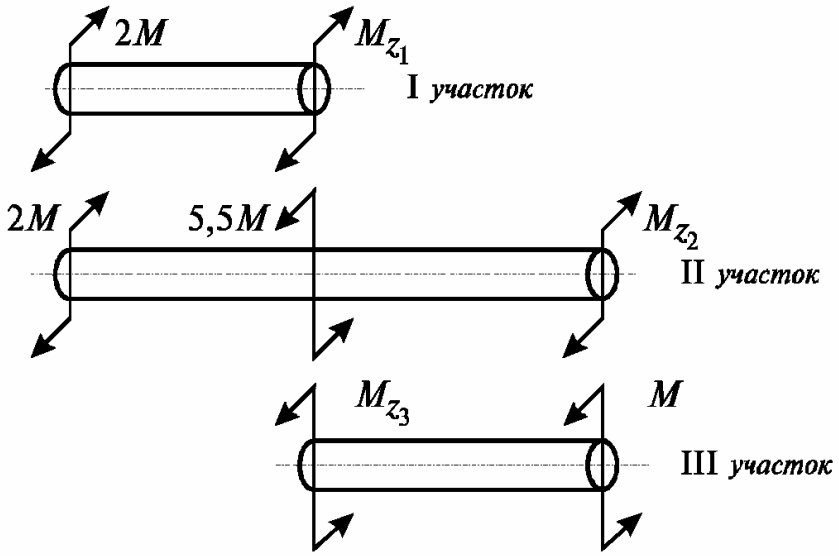


Рис. 4.5

$$W_{\rho}^{\text{II}} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3{,}14 \cdot \left(10 \cdot 10^{-2}\right)^3}{16} = 196 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

III участок (прямоугольное сечение):

$$W_{KP}^{\text{III}} = \beta b^3,$$

где β – коэффициент, зависящий от отношения сторон прямоугольного сечения h/b ($h > b$). В данном случае $h/b = 8/6 = 1{,}333$, $\beta = 0{,}300$ тогда

$$W_{KP}^{III} = 0{,}300 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^3 = 64{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Подсчитаем теперь напряжения по участкам в зависимости от момента M:

$$\tau_1 = \frac{M_{z1}}{W_\rho^{I}} = \frac{-2M}{116} \cdot 10^6 = -0{,}0172 \cdot 10^6 M,$$

$$\tau_2 = \frac{M_{z2}}{W_\rho^{II}} = \frac{3{,}5M}{196} \cdot 10^6 = 0{,}0178 \cdot 10^6 M,$$

$$\tau_3 = \frac{M_{z3}}{W_{KP}^{III}} = \frac{-M}{64{,}8} \cdot 10^6 = -0{,}0154 \cdot 10^6 M\ .$$

Из сравнения результатов видно, что наиболее напряженным является участок II, поэтому допускаемая величина момента $[M]$ определяется из зависимости:

$$\tau_2 = 0{,}0178 \cdot 10^6 [M] \le R_C,$$

откуда

$$[M] = \frac{10^5}{17800} = 5{,}62 \text{ кН·м}.$$

4. *Построить эпюры касательных напряжений по сечениям вала, отметив на сечениях опасные точки.* Касательные напряжения в точках поперечного сечения валика определяются по формулам:

<u>для круглого сечения</u> при $0 \le \rho \le \frac{D}{2}$, $\tau = \frac{M_{KP}}{I_\rho}\rho$;

<u>для трубчатого сечения</u> при $\frac{d}{2} \le \rho \le \frac{D}{2}$, $\tau = \frac{M_{KP}}{I_\rho}\rho$;

<u>для прямоугольного сечения</u> $\tau_{max} = \frac{M_{KP}}{W_{KP}}$ (в середине большей стороны) и $\tau_1 = \gamma\,\tau_{max}$ (в середине меньшей стороны).

Подсчитаем моменты инерции сечений валика относительно центра их кручения.

<u>Участок I (трубчатое сечение):</u>

$$I_{\rho}^{\text{I}} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4) = \frac{3{,}14 \cdot 10^4}{32}(1 - 0{,}8^4) = 580 \cdot 10^{-8}\ \text{м}^4.$$

Участок II (круглое сечение):

$$I_{\rho}^{\text{II}} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 10^4}{32} \cdot 10^{-8} = 980 \cdot 10^{-8}\ \text{м}^4.$$

Участок III (прямоугольное сечение):

$$I_{KP}^{\text{III}} = \alpha b^4 = 0{,}243 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^4 = 315 \cdot 10^{-8}\ \text{м}^4,$$

где $\alpha = 0{,}243$ при $h/b = 1/33$.

Определим значения напряжений в характерных точках сечений.

Участок I ($0 \le z \le 0{,}5$ м):

при $\rho = \frac{d}{2} = 0{,}04$ ì , $\tau_1 = \frac{2 \cdot 5{,}62 \cdot 0{,}04}{580 \cdot 10^{-8}} = 77517$ кН/м^2 = 77,5 МПа;

при $\rho = \frac{D}{2} = 0{,}05$ ì , $\tau_{1\,max} = \frac{2 \cdot 5{,}62 \cdot 0{,}05}{580 \cdot 10^{-8}} = 96896$ кН/м^2 =97,0МПа.

Участок II (0,5 м $\le z \le$ 1,5 м):

при $\rho = 0$, $\tau_2 = 0$.

при $\rho = \frac{D}{2}$, $\tau_{2\,max} = \frac{3{,}5 \cdot 2 \cdot 5{,}62 \cdot 0{,}05}{980 \cdot 10^{-8}} = 100357$ кН/м^2 = 100,0 МПа.

Участок III (1,0 м $\le z \le$ 1,8 м): в середине большей стороны

$$\tau_{3\,max} = \frac{5{,}62}{64{,}8 \cdot 10^{-6}} = 86728\ \text{кН/м}^2 = 86{,}8\ \text{МПа},$$

в середине меньшей стороны

$$\tau_3 = \gamma\,\tau_{max} = 0{,}906 \cdot 86{,}7 = 78{,}6\ \text{МПа}.$$

где $\gamma = 0{,}906$ при $h/b = 1{,}33$.

По полученным данным строятся эпюры напряжений, приведенные на рис. 4.6.

4. *Построить эпюру углов закручивания*. Угол закручивания на i–ом участке вала в соответствии с (4.10) определяется:

$$\varphi_i\left(z\right) = \varphi_i^{\text{ï ðàâ}} + \frac{M_{z_i}\left(z - l_i\right)}{G\,I_{\rho_i}},$$

где $\varphi_i^{\text{ï ðàâ}}$ – угол закручивания на правом конце $(i-1)$–го участка (для первого участка $\varphi_i^{\text{ï ðàâ}}$ – начальный угол закручивания вала); l_i – координата начала i–го участка.

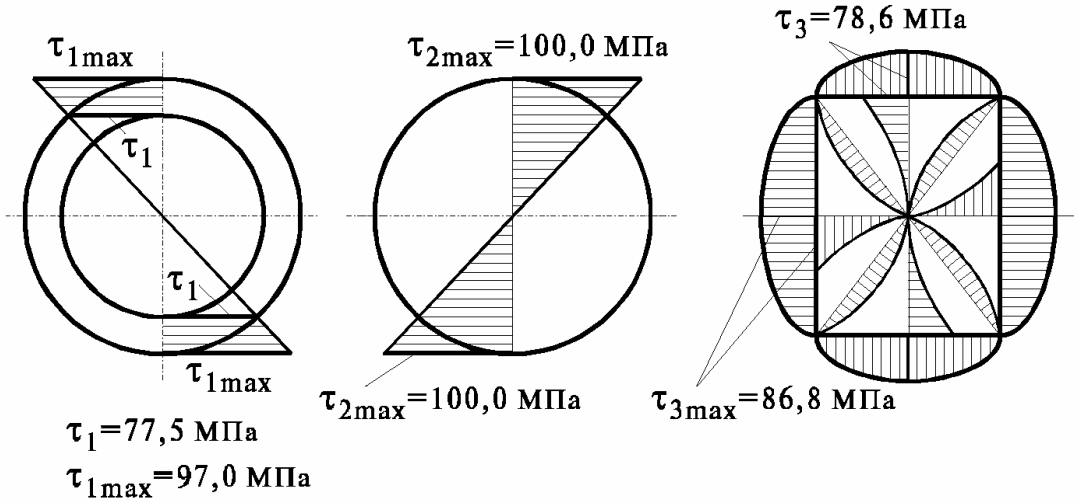


Рис. 4.6

Так как, в данном случае в пределах каждого из трех участков крутящие моменты и жесткости на кручение GI_ρ постоянны, то эпюры углов закручивания на каждом из участков будут линейны. В связи с этим, достаточно подсчитать их значения лишь на границах участков. Приняв, что левый конец вала защемлен от поворота, т.е. $\varphi(0) = 0$, получим:

$$\varphi_1^{\text{ï ðàâ}} = \frac{M_{\hat{E}\text{Ð}}^{\text{I}}\, l_1}{G\, I_\rho^{\text{I}}} = \frac{2 \cdot 5{,}62 \cdot 0{,}5}{8 \cdot 10^7 \cdot 580 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0121 \text{ рад};$$

$$\varphi_2^{\text{ï ðàâ}} = \varphi_1^{\text{ï ðàâ}} + \frac{M_{\hat{E}\text{Ð}}^{\text{II}}\, l_2}{G\, I_\rho^{\text{II}}} = 0{,}0121 + \frac{-3{,}5 \cdot 5{,}62 \cdot 0{,}5}{8 \cdot 10^7 \cdot 980 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0004 \text{ рад};$$

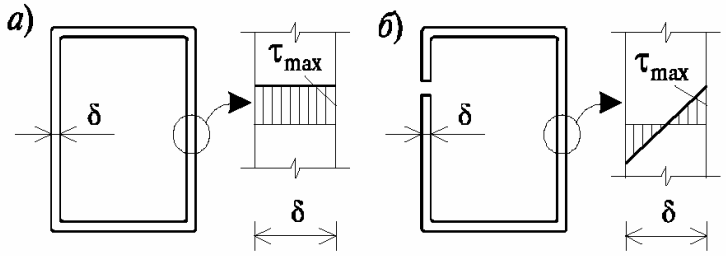
$$\varphi_3^{\text{ï ðàâ}} = \varphi_2^{\text{ï ðàâ}} + \frac{M_{\hat{E}\text{Ð}}^{\text{III}}\, l_3}{G\, I_\rho^{\text{III}}} = -0{,}0004 + \frac{1 \cdot 5{,}62 \cdot 0{,}8}{8 \cdot 10^7 \cdot 315 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0174 \text{ рад}.$$

По полученным данным строим эпюру углов закручивания φ (рис. 4.4, *в*). Сравнивая эпюры τ и φ, можно отметить очевидную закономерность их изменения по оси z, вытекающую из расчетных формул.

4.4. Кручение тонкостенного бруса

В машиностроении, авиастроении и вообще в технике широко применяются тонкостенные стержни с замкнутыми (рис. 4.7, *а*) и открытыми профилями (рис. 4.7, *б*) поперечных сечений. Поэтому расчеты на кручение таких тонкостенных стержней имеет большое практическое значение.

Характерной геометрической особенностью тонкостенных стержней является то, что их толщина существенно (на порядок и более) меньше других геометрических размеров (длиной срединной линии контура поперечного сечения и длины стержня).



Ðèñ. 4.7

Характер распределения напряжений по толщине тонкостенного стержня открытого профиля близок к равномерному (рис. 4.7, б), а замкнутого профиля меняется по линейному закону, как это показано на рис. 4.7, а. Откуда следует, что напряжения в поперечных сечениях открытого профиля практически не изменятся, если профиль сечения распрямить. Иначе говоря, напряжения в криволинейном открытом профиле будут примерно такими же, как и в прямом.

Обращаясь к формулам (4.14), (4.16) и при предельном переходе $h/b \to \infty$, получим:

$$\tau_{max} = \frac{3M_K}{\delta^2 s}; \qquad \varphi = \frac{3M_K}{G\delta^2 s}, \tag{4.17}$$

где δ – толщина профиля; s – длина контура профиля; l – длина стержня.

В случае, если тонкостенный незамкнутый профиль является составным (рис. 4.8) и не может быть развернут в вытянутый прямоугольник, воспользовавшись почленной аналогией, легко определить выражения напряжений на i–ом произвольном участке:

$$\tau_{max(i)} = \frac{3M_{K(i)}}{\delta_i^2 s_i}, \tag{4.18}$$

где $M_{K(i)}$ – доля крутящего момента, соответствующего i–му участку:

$$M_{K(i)} = \frac{\varphi G}{3l}\delta_i^3 s_i,$$

где φ – угловое перемещение, единое для всех участков:

$$\varphi = \frac{3M_K l}{G\sum_{i=1}^{n}\delta_i^3 s_i}. \qquad (4.19)$$

Изложенный подход к определению напряжений является приближенным, так как он не позволяет определить напряжения в зонах сопряжения элементов поперечного сечения профиля, которые являются зонами концентрации напряжений.

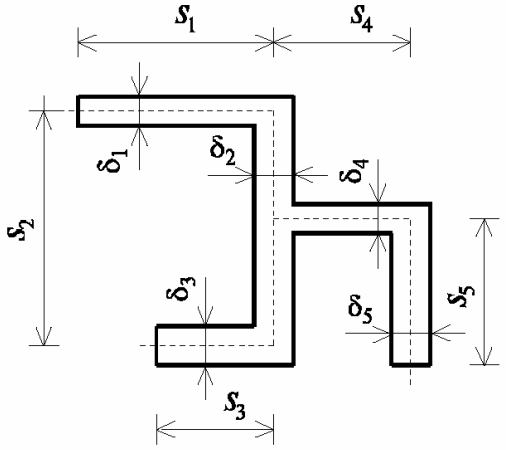


Рис. 4.8

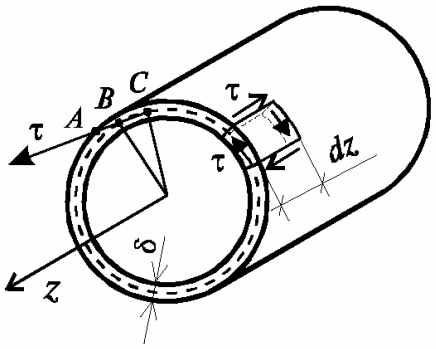


Рис. 4.9

Далее рассмотрим брус, имеющий поперечное сечение в форме замкнутого тонкостенного профиля (рис. 4.9). Выделим на контуре элементарный участок длиной *ds* и выразим крутящий момент через напряжения τ, выполняя операцию контурного интегрирования получим:

$$M_K = \oint_s \tau\,\delta\,ds. \qquad (4.20)$$

Из условия равновесия сил по оси *z* выделенного элемента длиной *dz* (4.9) легко установить, что по контуру сечения произведение τ·δ является постоянной величиной. С учетом данного обстоятельства, выражение (4.20) примет вид:

$$M_K = \tau\,\delta\oint_s \hat{I}\,\grave{A}\,ds = 2\tau\,\delta\,F^*, \qquad (4.21)$$

где $2F^* = \oint_s \hat{I}\,\grave{A}\,ds$ – представляет собой удвоенной площадь, ограниченную срединной линией контура сечения.

Из (4.21) наибольшее напряжение определяется по формуле:

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{2F^* \delta_{min}}. \qquad (4.22)$$

Для вывода выражения для угла закручивания воспользуемся энергетическими соображениями. Энергия, накопленная в элементарном объеме с размерами δ, dz, ds за счет деформаций чистого сдвига, равна:

$$U = \frac{1}{2G}\oint_s \tau^2 \delta \, ds = \frac{l \, \tau^2 \delta^2}{2G} \oint_s \frac{ds}{\delta}.$$

С учетом (4.21), последнее выражение можно представить в виде:

$$U = \frac{M_K^2}{8G F^{*2}} \oint_s \frac{ds}{\delta}.$$

С другой стороны, работу внешних сил можно представить в виде:

$$U = \frac{1}{2} M_K \varphi. \qquad (4.24)$$

Приравнивая оба выражения из (4.22) и (4.23), получим:

$$\varphi = \frac{M_K l}{4G F^{*2}} \oint_s \frac{ds}{\delta}, \qquad (4.25)$$

Если δ является постоянной по контуру, будем иметь:

$$\varphi = \frac{M_K l s}{4G F^{*2} \delta}, \qquad (4.26)$$

где s – длина замкнутого контура.

4.5. Пример расчета (задача 5)

Пусть задан тонкостенный стержень (рис. 4.10, *а*) при действии самоуравновешивающих крутящих моментов на двух противоположных концах, требуется:

1. Определить выражения максимальных напряжений и углов закручивания в случаях, когда стержень имеет открытый (рис. 4.10, *б*) и замкнутый (рис. 4.10, *в*) профиль;

2. Сопоставить вычисленные значения напряжений и углов закручивания для двух различных профилей тонкостенного стержня.

Решение

1. *Определение выражения максимальных напряжений и углов закручивания в случаях, когда стержень имеет*

открытый и замкнутый профиль. Для стержня с открытым профилем (рис. 4.10, *б*), согласно (4.17), получим:

$$\tau_{max(1)} = \frac{2M}{\pi D \delta^2}; \qquad \varphi_{(1)} = \frac{3M l}{G \pi D \delta^3}.$$

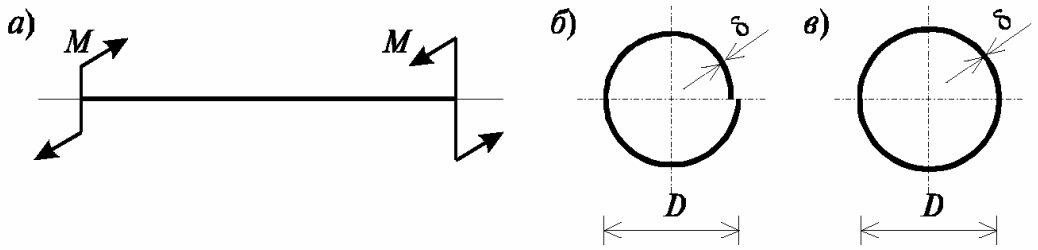


Рис. 4.10

Для стержня замкнутого профиля (рис. 4.10, *в*), воспользовавшись выражениями (4.22) и (4.25), имеем:

$$\tau_{max(2)} = \frac{M}{2\frac{\pi D^2}{4}\delta}; \qquad \varphi_{(2)} = \frac{M l \pi D}{4G\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 \delta}.$$

2. Сопоставить вычисленные значения напряжений и углов закручивания для двух различных профилей тонкостенного стержня. Для наглядности составим отношения выражений напряжений и углов закручивания, т.е.:

$$\frac{\tau_{max(1)}}{\tau_{max(2)}} = \frac{3D}{2\delta}; \qquad \frac{\varphi_{(1)}}{\varphi_{(2)}} = \frac{3D^2}{2\delta^2}.$$

Откуда следует, что отношение напряжений имеет величину порядка D/δ, а отношение углов закручивания – порядка $(D/\delta)^2$. Так как для тонкостенных стержней $D>>\delta$, следовательно, стержень с замкнутым профилем является существенно более прочным и жестким, нежели стержень с открытым профилем при идентичных исходных данных.

Заметим, что этот вывод является общим для тонкостенных стержней независимо от формы сечений.

5. ИЗГИБ

5.1. Внутренние усилия в поперечных сечениях бруса

Под изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты M_x или M_y. Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, то изгиб называется *чистым* (рис. 5.1, *а*).

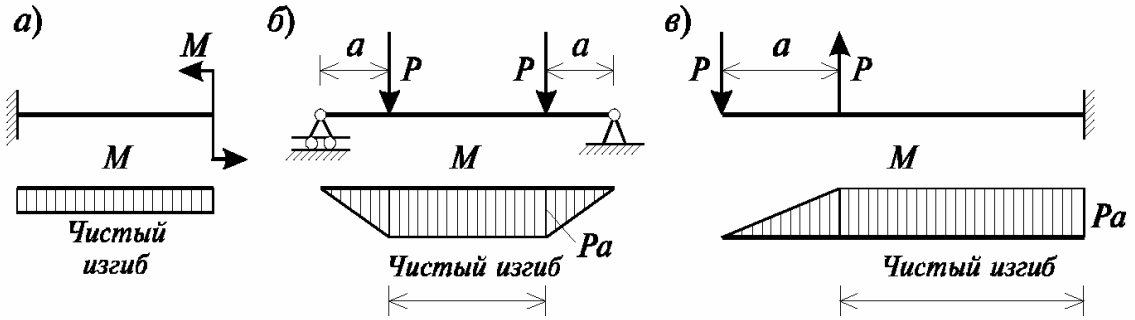


Рис. 5.1

В тех случаях, когда в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающим моментом возникают и поперечные силы изгиб называется *поперечным*. Брус, работающий в основном на изгиб, часто называют *балкой*. В дальнейшем будем рассматривать такие случаи изгиба балки, при которых, во–первых, поперечное сечение балки имеет хотя бы одну ось симметрии, и, во–вторых, вся нагрузка лежит в плоскости, совпадающей с осью симметрии балки. Таким образом, одна из главных осей инерции лежит в плоскости изгиба, а другая перпендикулярна ей.

Для того, чтобы правильно ориентироваться в вопросах, связанных с расчетом бруса на изгиб, необходимо прежде всего научиться определять законы изменения внутренних силовых факторов, т.е. научиться строить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Предварительно рассмотрим три основных типа опорных связей балки с основанием:

1. Шарнирно–подвижная опора (рис. 5.1, б – левая опора балки), ограничивающая лишь вертикальное перемещение опорного узла.

2. Шарнирно–неподвижная опора (рис. 5.1, б – правая опора балки), ограничивающая вертикальное и горизонтальное перемещения опоры.

3. Жесткая заделка (рис. 5.1, *а* – опора балки на левом краю), не допускающая поворота и перемещений по вертикали и горизонтали сечения балки, примыкающего к опоре.

По запрещенным направлениям во всех этих типах опор возникают соответствующие реакции.

Рассмотрим характерный пример (рис. 5.2, *а*) и установим необходимые правила. Решение задачи, как правило, начинается с определения полной системы внешних сил. Для этого отбросим опоры и заменим их соответствующими реакциями (рис. 5.2, *б*), выполняющими ту же роль, что и опорные закрепления.

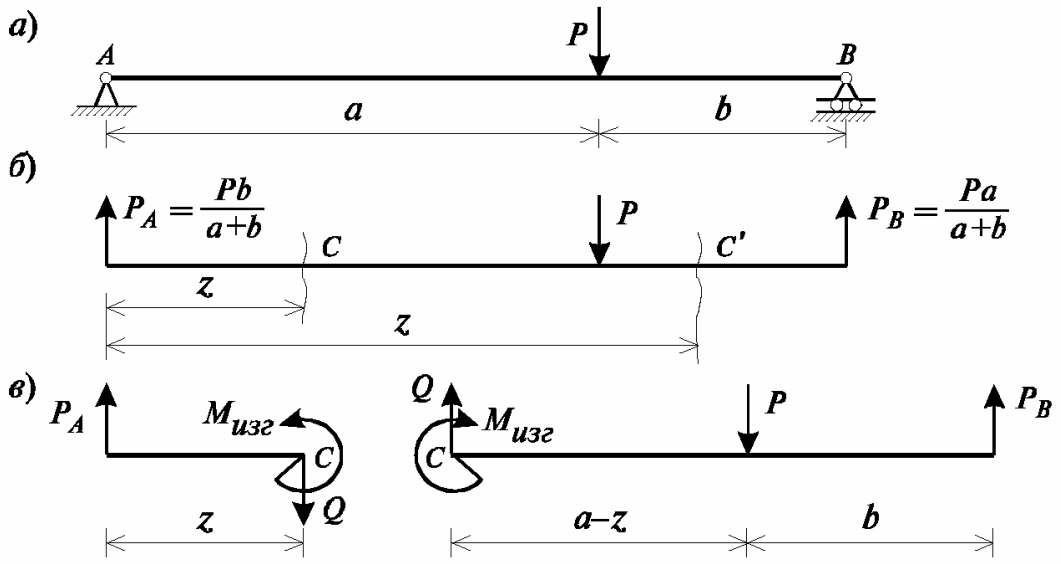


Рис. 5.2

Заданная система статически определима, следовательно, из условий равновесия системы, т.е. равенства нулю суммы моментов всех сил относительно шарнирных опор (в шарнирах нет ограничений поворота сечений балки, поэтому изгибающих моментов не возникает) $\Sigma m(A) = 0$ и $\Sigma m(B) = 0$, определяем вертикальные реакции в опорах:

$$R_a = \frac{Pb}{a+b}; \quad R_b = \frac{Pa}{a+b}. \tag{5.1}$$

Для определения H_A имеем: $\sum z = 0$, откуда H_A =0. Для проверки правильности вычислений воспользуемся условием равенства нулю суммы всех вертикальных сил $\Sigma y = 0$, откуда получим

$$R_a + R_b - P = 0 \rightarrow \frac{P \cdot b}{a+b} + \frac{P \cdot a}{a+b} - P = 0, \quad 0 = 0.$$

Для определения внутренних силовых факторов – изгибающего момента $M(z)$ и поперечной силы $Q(z)$ как функций от продольной координаты z, воспользуемся *методом сечений*. Для получения этих зависимостей балку разбивают на участки, границами которых являются следующие точки: начало и конец балки; точки приложения сосредоточенных усилий; начало и конец действия распределенных усилий; сечения, в которых скачкообразно изменяется жесткость балки; в точках, где происходит изменение

ориентации элементов, если имеем дело с стержневой системой со сложной структурой.

Заданная система состоит из двух участков – первого ($0 \le z \le a$) и второго ($a \le z \le a+b$). Следовательно, задавая последовательно сечения, принадлежащие к первому и второму участкам, и рассматривая равновесие отсеченных частей системы при действии на них всех внешних сил и внутренних усилий, определим выражения для внутренних силовых факторов. При этом, знак изгибающего момента устанавливается по знаку кривизны изогнутого бруса (рис. 5.3, *а*) и зависит от выбранного направления осей системы координат $y0z$. Следовательно, в системе координат $y0z$ принятой на рис. 5.3, *а* положительный момент вызывает растяжение нижних волокон балки.

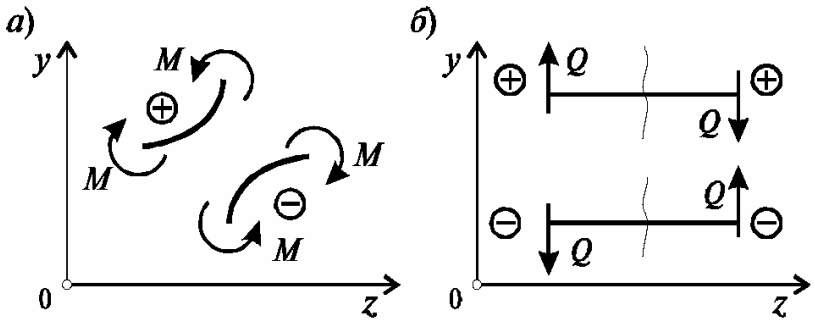


Рис. 5.3

Для поперечных сил, независимо от направления координатных осей, устанавливается следующее правило знаков: если результирующая поперечная сила Q_y вращает рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки, то она считается положительной, в обратном случае – отрицательной (рис. 5.3, *б*).

Из условия равновесия $\Sigma M_x = 0$; $\Sigma y = 0$ отсеченной части системы, расположенной левее от сечения z_1 (первый участок), (см. рис. 5.2, *в*), получим:

$$M_x(z_1) = R_a z_1; \qquad Q_y = R_a. \qquad (5.2)$$

Для определения M_x и Q_y на втором участке рассмотрим равновесие отсеченной части балки, расположенной правее от сечения z_2 (см. рис. 5.2, *б*), т.е. $\Sigma M_x = 0$; $\Sigma y = 0$ откуда и определим:

$$M_x(z_2) = R_b(a + b - z_2); \qquad Q_y = -R_b. \qquad (5.3)$$

Эпюры M_x и Q_y изображены на рис. 5.4. Заметим, что эпюры изгибающих моментов M_x, как и поперечных сил Q_y строятся на оси бруса, однако в отличие от эпюры поперечных сил знак момента не указывается, а ординаты изгибающего момента откладываются со стороны растянутых волокон.

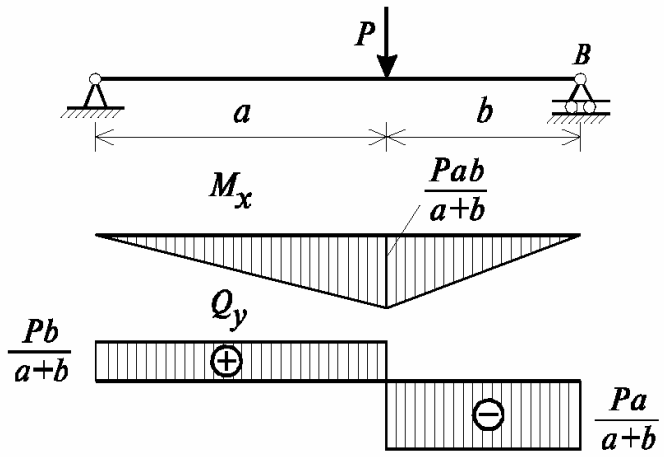


Рис. 5.4

5.2. Основные дифференциальные соотношения теории изгиба

Пусть брус нагружен произвольным образом распределенной нагрузкой $q = f(z)$ (рис. 5.5, *а*).

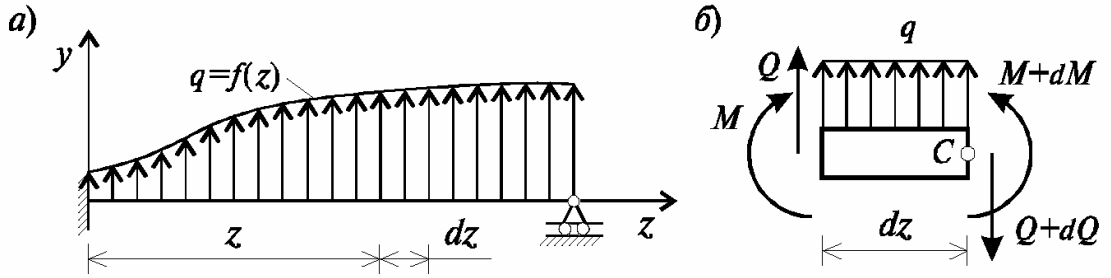


Рис. 5.5

Выделим из бруса элемент длиной dz и приложим по его краям положительные внутренние усилия (рис. 5.5, *б*). В пределах малого отрезка dz нагрузку q можно считать распределенной равномерно. Приравняем нулю сумму проекций всех сил на вертикальную ось y и сумму моментов всех сил относительно поперечной оси x, проходящей через точку C (рис. 5.5, *б*), получим:

$$Q_y + q\,dz - Q_y - dQ_y = 0;$$
$$M_x + Q_y dz + q\,dz \cdot dz/2 - M_x - dM_x = 0.$$

Производя упрощения и отбрасывая величины высшего порядка малости, получим:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y, \tag{5.4}$$

откуда

$$\frac{d^2 M_X}{dz^2} = q. \qquad (5.5)$$

Из (5.4) следует, что при q = const функция Q_y будет линейной, а функция M_x – квадратичной. Если на каких–то участках бруса распределенная нагрузка отсутствует, т.е. $q = 0$, то получим, что Q_y = const, а M_x является линейной функцией от z.

В сечениях, где приложена сосредоточенная сила, эпюра Q_y претерпевает скачок на величину внешней силы. И наконец, в тех сечениях, где Q_y принимает нулевое значение и меняет знак, функция M_x достигает экстремальных значений.

5.3. Напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим наиболее простой случай изгиба, называемый *чистым изгибом*. Как было отмечено выше, под чистым изгибом понимается такой вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю. Для тех участков бруса, где соблюдается данное условие, изгибающий момент, согласно второго выражения (5.4), вдоль продольной оси z принимает постоянное значение. Так как в любом сечении стержня при чистом изгибе $Mx(z)$ = const, то для однородного бруса постоянного поперечного сечения изменение кривизны постоянно вдоль оси z. Под действием изгибающих моментов ось бруса искривляется. Исходя из этого, ось бруса принимает форму дуги окружности с радиусом кривизны ρ (рис. 5.6). В данном случае с высокой степенью точности справедлива гипотеза плоских сечений. Следовательно, точки, расположенные до изгиба в плоскости поперечного сечения бруса, в результате изгиба переместятся в пространстве таким образом, что их совокупность снова образует плоскость.

Процесс формирования деформаций при чистом изгибе может рассматриваться как результат поворота плоских поперечных сечений друг относительно друга.

Рассмотрим два смежных сечения, отстоящих один от другого на расстоянии dz (рис. 5.6).

В результате изгиба эти сечения наклонятся, образуя между собой угол $d\Theta$, в связи с чем верхние волокна удлиняются, а нижние – укоротятся. Очевидно, что при этом существует слой, длина которого не изменилась. Назовем его *нейтральным слоем* и обозначим отрезком CD. При этом $CD = C'D' = dz = \rho d\Theta$. Произвольный отрезок AB, расположенный от CD на расстоянии y, в результате изгиба удлинится на величину $A'B' - AB$. С уче-

том построений, изображенных на рис. 5.6, легко определить величину его линейной деформации:

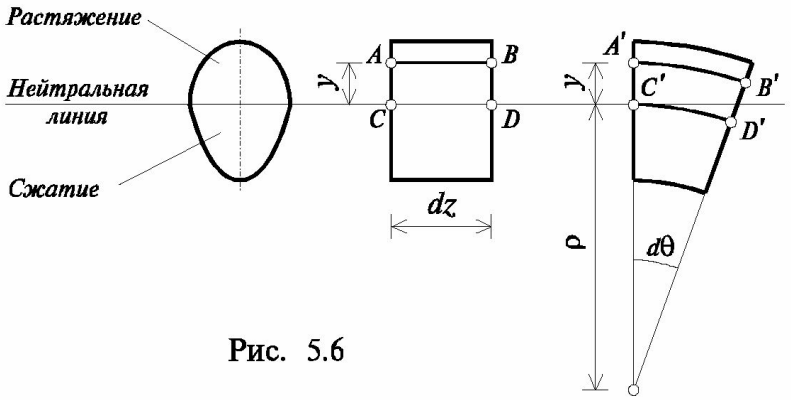


Рис. 5.6

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dz}{dz} = \frac{(\rho + y)\,d\Theta - dz}{dz} = y\frac{d\Theta}{dz} = \frac{y}{\rho}. \qquad (5.6)$$

Если предположить, что продольные волокна не давят друг на друга, то каждое из них будет находиться в условиях простого растяжения – сжатия. Тогда переход от деформаций к нормальным напряжениям σ можно осуществить посредством закона Гука:

$$\sigma = E\,\varepsilon = E\frac{y}{\rho} \qquad (5.7)$$

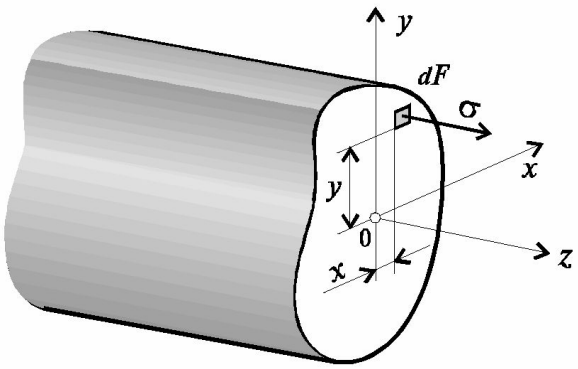


Рис. 5.7

Установим положение нейтральной оси x, от которой происходит отсчет координаты y (рис. 5.7). Учитывая, что сумма элементарных сил σdF по площади поперечного сечения F дает нормальную силу N_z. Но при чистом изгибе $N_z = 0$, следовательно:

$$N_z = \int_F \sigma\,dF = \frac{E}{\rho}\int_F y\,dF ;$$

Как известно, последний интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной линии (оси x). Статический момент

равен нулю, значит, нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения.

Выразим момент внутренних сил относительно нейтральной оси M_x через σ. Очевидно, что

$$M_X = \int_F \sigma\, y\, dF \,. \tag{5.8}$$

С учетом выражения (5.7) получим:

$$M_X = \frac{E}{\rho}\int_F y^2\, dF = \frac{E}{\rho} I_X \,.$$

Откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_X}{E\, I_X}, \tag{5.9}$$

где $\frac{1}{\rho}$ – кривизна нейтрального волокна; EI_x – жесткость бруса.

Из формулы (5.7), исключая 1/ρ, окончательно получим:

$$\sigma = \frac{M_X\, y}{I_X}. \tag{5.10}$$

Откуда следует, что нормальные напряжения σ в поперечном сечении бруса при его изгибе изменяются по линейному закону в зависимости от координаты y и принимают максимальное значение на уровне крайних волокон (при $y = y_{max}$):

$$\sigma_{max} = \frac{M_X}{W_X},$$

где $W_X = \frac{I_X}{y_{max}}$ – момент сопротивления сечения.

Энергия упругих деформаций бруса при изгибе V определяется работой момента M_x на соответствующем угловом перемещении $d\Theta$:

$$dV = \frac{1}{2} M_X\, d\Theta \,, \text{ с учетом } d\Theta = \frac{dz}{\rho} \text{ и } \frac{1}{\rho} = \frac{M_X}{EI_X},$$

окончательно получим

$$V = \int_l \frac{M_X^2\, dz}{2E\, I_X}. \tag{5.11}$$

5.4. Примеры расчетов

Для статически определимых систем: схемы I (консольная балка, рис. 5.8, *а*), схемы II (двухопорная балка с консолями, рис. 5.13) и схемы III (плоской рамы в виде ломаного бруса, рис. 5.17) при последовательном их рассмотрении требуется:

1. Построить эпюры M_x и Q_y для всех схем и эпюру N_z для схемы III;

2. Руководствуясь эпюрой M_x, показать на схемах I и II приблизительный вид изогнутой оси балки. По опасному сечению подобрать размеры поперечного сечения:

а) для схемы I – прямоугольное $h \times b$ при расчетном сопротивлении $R_H = 16 \cdot 10^3$ кН/м^2 (клееная древесина); $h:b = 1{,}5$;

б) для схемы II – двутавровое (ГОСТ 8239–72) при расчетном сопротивлении $R_H = 200 \cdot 10^3$ кН/м^2 (сталь);

Р е ш е н и е

5.4.1. Схема I. Консольная балка (задача №6)

Учитывая особенности рассматриваемой системы (рис. 5.8, а), чтобы исключить необходимость определения опорных реакций, достаточно применяя метод сечений, последовательно рассмотреть те отсеченные части системы от заданного сечения, в котором отсутствует опорное сечение.

1. *П о с т р о и т ь э п ю р ы* Q_y *и* M_x. Для построения эпюр Q_y и M_x определяем количество участков, затем, используя метод сечений, составляем аналитические выражения изменения Q_y и M_x в зависимости от текущей абсциссы z для каждого участка.

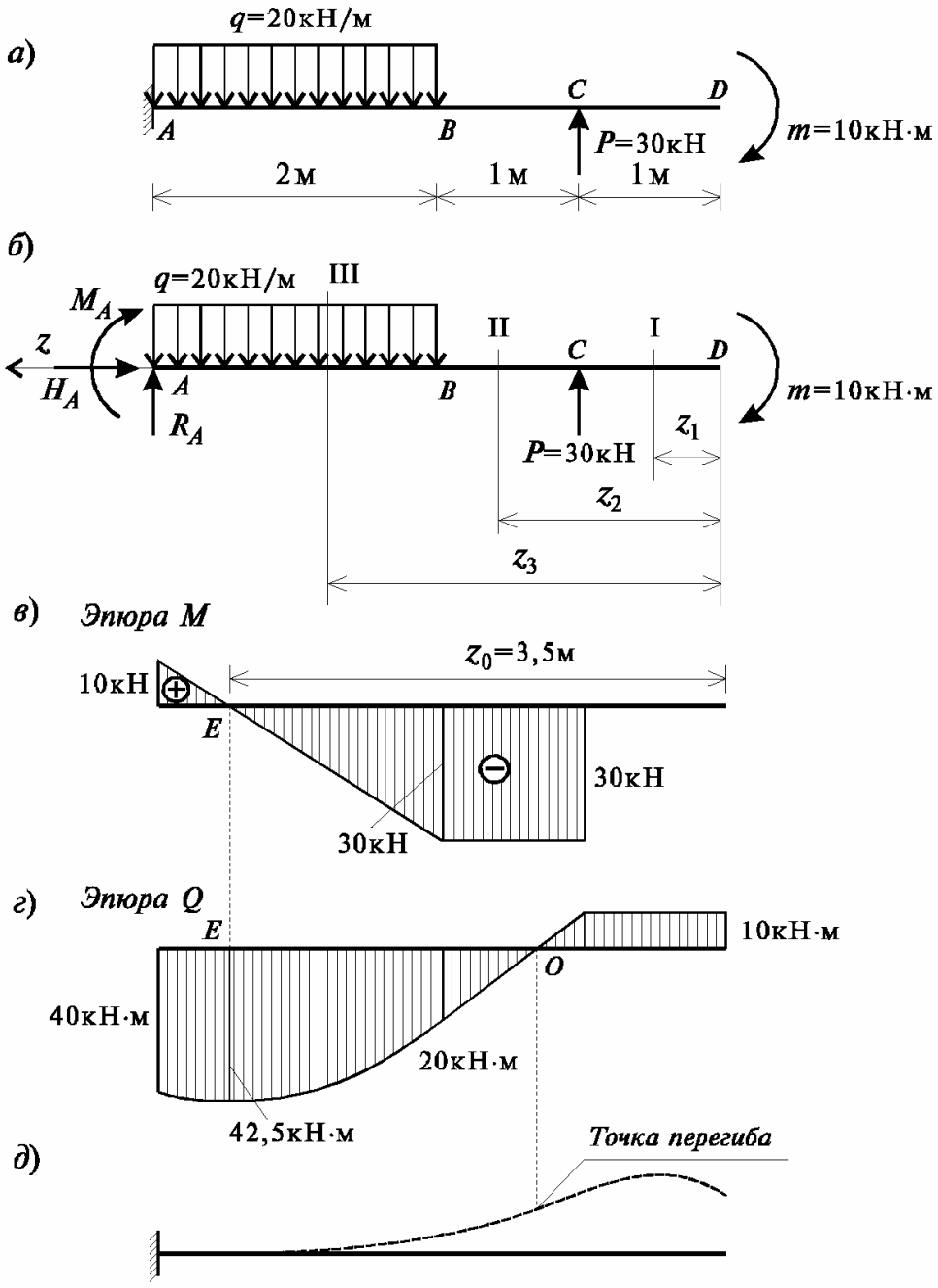


Рис. 5.8

Определение количества участков балки

Границами между двумя смежными участками, как правило, являются места расположения тех сечений, где происходит скачкообразное изменение: физико-механических характеристик материала конструкций; геометрических характеристик поперечных сечений (формы и/или размеров), а также внешних нагрузок. В данном случае, рассматриваемая балка, имею-

щая постоянное поперечное сечение (рис. 5.8, *б*) имеет три участка: участок I – *DC*, участок II – *CB*, участок III – *BA*.

Составление аналитических выражений Q_y и M_x и определение значений в характерных сечениях

Проведя сечение I–I, рассмотрим равновесие правой отсеченной части балки длиной z_1, приложив к ней все действующие справа от сечения заданные нагрузки и внутренние силовые факторы Q_y и M_x, возникающие в сечении, которые заменяют действие отброшенной части балки (рис. 5.9). При этом, предполагаем, что изображенные на рисунке внутренние силовые факторы положительны.

Составив уравнения равновесия $\Sigma y = 0$ и $\sum M_{0_1} = 0$ для этой части балки и решив их, найдем выражения для Q_{y_1} и M_{x_1} в зависимости от z_1 на участке I ($0 \le z_1 \le 1$ м):

$$\Sigma y = 0, \qquad Q_{y_1} = 0;$$

$$\sum M_{0_1} = 0, \qquad M_{x_1} + m = 0, \; M_{x_1} = -m = -10 \text{ кН·м}.$$

Полученные выражения показывают, что на участке I Q_{y_1} и M_{x_1} – const. Знак “минус” у M_{x_1} говорит о том, что момент в сечении I–I вызывает растяжение верхних, а не нижних волокон, как это показано на рис. 5.9.

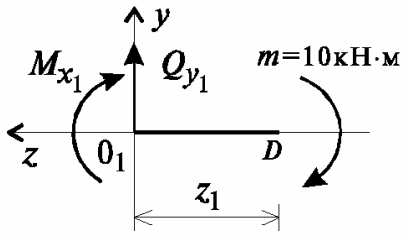


Рис. 5.9

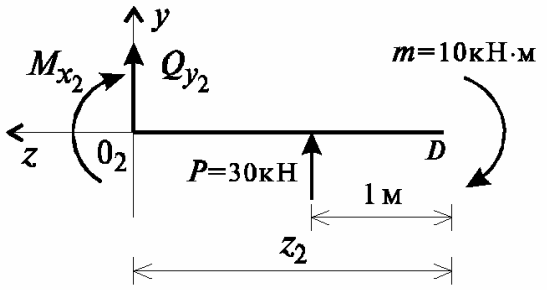


Рис. 5.10

Участок II ($1 \text{ м} \le z_2 \le 2$ м).

Составим уравнения $\Sigma y = 0$ и $\sum M_{0_2} = 0$ для отсеченной сечением II–II правой части балки (рис. 5.10) и определим из них Q_{y_2} и M_{x_2}:

$$\Sigma y = 0, \qquad Q_{y_2} + P = 0, \quad Q_{y_2} = -P = -30 \text{ кН};$$

$$\sum M_{0_2} = 0, \; M_{x_2} + m - P(z_2 - 1) = 0, \; M_{x_2} = -m + P(z_2 - 1).$$

Из полученных выражений для Q_{y_2} и M_{x_2} видно, что на участке II величина Q_{y_2} постоянна, а величина M_{x_2} изменяется в зависимости от z_2 по закону прямой линии. Знак "минус" у Q_{y_2} показывает, что в сечении II–II возникает поперечная сила, действующая в направлении, обратном показанному на рис. 5.10.

Теперь, подставляя значения z_2 для характерных сечений участка II в полученные аналитические выражения, определим величины Q_{y_2} и M_{x_2}, возникающие в этих сечениях, т.е. ординаты эпюр M_x и Q_y в точках C и B (рис. 5.8, *б*).

при $z_2 = 1$ м; $Q_{y_2} = -30$ кН; $M_{x_2} = -10 + 30\,(1 - 1) = -10$ кН·м;

при $z_2 = 2$ м; $Q_{y_2} = -30$ кН; $M_{x_2} = -10 + 30\,(2 - 1) = 20$ кН·м.

Участок III ($2\text{ м} \le z_2 \le 4$ м).

Составим уравнения равновесия $\Sigma y = 0$ и $\sum M_{0_3} = 0$ для отсеченной сечением III–III правой части балки (рис. 5.11) и, решив их, получим,

$$\Sigma y = 0, \qquad Q_{y_3} + P - q\left(z_3 - 2\right) = 0, \quad Q_{y_3} = -P + q\left(z_3 - 2\right);$$

$$\sum M_{0_3} = 0, \quad M_{x_3} + m - P\,(z_3 - 1) + 0{,}5\,q\,(z_2 - 2)^2 = 0,$$

$$M_{x_3} = -m + P\,(z_3 - 1) - 0{,}5\,q\,(z_2 - 2)^2 .$$

Таким образом, величина Q_{y_3} на участке III изменяется по закону прямой линии, а величина M_{x_3} – по закону квадратной параболы.

Подставив значения z_3, соответствующие характерным сечениям участка, в аналитические выражения изменения Q_{y_3} и M_{x_3}, определим координаты эпюр для сечений B и A (рис. 5.8, *б*).

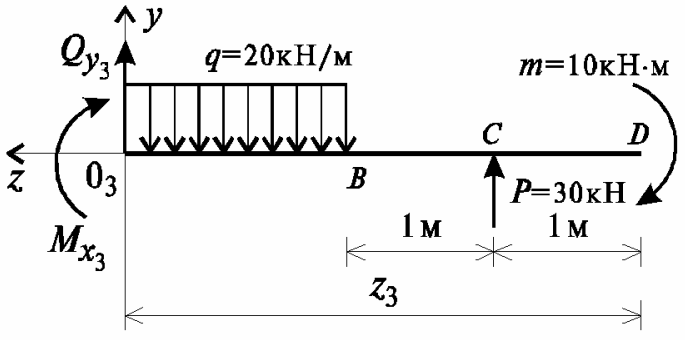


Рис. 5.11

При $z_3 = 2$ м

$Q_{y_3} = -30 + 20\cdot(2 - 2) = -30$ кН;

$$M_{x_3} = -10 + 30\,(2 - 1) - 0{,}5 \cdot 20 \cdot (2 - 2)^2 = 20 \text{ кН·м}.$$

При $z_3 = 4$ м $\quad Q_{y_3} = -30 + 20 \cdot (4 - 2) = 10$ кН;

$$M_{x_3} = -10 + 30\,(4 - 1) - 0{,}5 \cdot 20 \cdot (4 - 2)^2 = 40 \text{ кН·м}.$$

Так как, поперечная сила в пределах участка меняет знак, т.е. имеет промежуточное нулевое значение (рис. 5.8, *в*), то в этом сечении возникает экстремальное значение изгибающего момента. Для определения его величины вначале найдем значение z_0, при котором $Q_{y_3} = 0$. Для этого, приравняв выражение для Q_{y_3} нулю, получим:

$$-P + q\,(z_0 - 2) = 0, \quad z_0 = \frac{P + 2q}{q} = \frac{30 + 2 \cdot 20}{20} = 3{,}5 \text{ м}.$$

Подставив найденное значение $z_0 = 3{,}5$ м в аналитическое выражение изменения M_{x_3}, вычислим величину $M_{\max}$:

$$M_{\max} = -10 + 30 \cdot (3{,}5 - 1) - \frac{20 \cdot (3{,}5 - 2)}{2} = 42{,}5 \text{ кН·м}.$$

Построение эпюр Q_y и M_x для всей балки

Отложив перпендикулярно к оси абсцисс (линии, параллельной оси балки) в удобном для пользования масштабе вычисленные значения Q_y и M_x в характерных и промежуточных сечениях каждого участка и соединяя концы полученных ординат линиями, соответствующими законам изменения Q_y и M_x на каждом участке, построим эпюры Q_y и M_x для всей балки (рис. 5.8, *в*, *г*). При этом положительные ординаты эпюры Q_y откладываются вверх, а отрицательные – вниз по оси абсцисс. Ординаты же эпюр M_x откладываются со стороны растянутого волокна. На эпюрах Q_y обязательно указываются знаки, а на эпюре M_x знаки можно не ставить.

Проверка правильности построения эпюр Q_y и M_x

Для этого необходимо вначале проверить соответствие эпюры Q_y эпюре M_x согласно дифференциальной зависимости $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, из которой следует, что эпюра Q_y представляет собой эпюру тангенсов угла наклона касательных эпюры M_x к оси балки. В самом деле, на участке II балки (рис. 5.8, *г*) тангенс угла наклона касательной эпюры M_x к оси балки (рис. 5.12) равен:

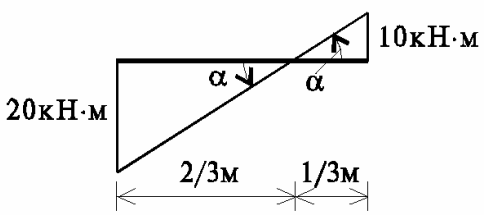


Рис. 5.12

$$Q_y = \operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{\frac{1}{3}} = \frac{20}{\frac{2}{3}} = 30\,\text{кН}.$$

При этом, знак поперечной силы будет положительным, если угол образован вращением оси балки или элемента системы по ходу часовой стрелки, и отрицательным, если угол образован вращением этой оси против часовой стрелки до совмещения с эпюрой M_x.

В рассматриваемом примере угол α образован вращением оси балки против часовой стрелки, поэтому поперечная сила на этом участке будет отрицательной. После указанной проверки полезно также проверить выполнение следующих положений:

1. Эпюра M_x на участке между сосредоточенными силами, а также между сосредоточенными силой и моментом, и между началом или концом действия равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенными силой и моментом всегда изменяется по закону прямой линии, наклонной к оси элемента, а в пределах действия равномерно распределенной нагрузки по закону квадратной параболы, имеющей выпуклость в сторону ее действия, если эпюра построена со стороны растянутого волокна;

2. Под точкой приложения сосредоточенной силы эпюра M_x имеет излом, острие которого направлено в сторону действия силы, если эпюра построена со стороны растянутого волокна;

3. На эпюре M_x в месте действия сосредоточенного момента m имеет место скачок, равный его величине;

4. Над шарнирными опорами двухшарнирной балки изгибающий момент может быть только в тех случаях, когда в опорных сечениях приложены сосредоточенные моменты или когда на консолях, расположенных за опорами, приложены нагрузки. Во всех других случаях изгибающие моменты в шарнирах равны нулю;

5. На участке действия равномерно распределенной нагрузки изгибающий момент достигает экстремального значения M_x = $= M_{\max}$ в том сечении, где поперечная сила $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$, т.е. переходит через нуль, меняя знак;

6. Поперечная сила Q_y на участке равна нулю, если во всех сечениях по длине этого участка M_x = const;

7. Эпюра Q_y постоянна на участках между сосредоточенными нагрузками и изменяется по закону наклонной прямой лишь на участках, где действует равномерно распределенная нагрузка;

8. Эпюра Q_y в точках приложения сосредоточенных вертикальных сил (P, R_A, R_B) имеет скачки, равные по величине приложенным в этих сечениях

сосредоточенным силам, причем направление скачков всегда совпадает с направлением этих сил.

В нашем примере все эти положения выполняются.

2.1. *Руководствуясь эпюрой M_x, показать приблизительный вид изогнутой оси балки.* При построении приблизительного вида изогнутой оси балки по эпюре M_x необходимо знать, что знак изгибающего момента связан с характером деформации балки от действия заданной внешней нагрузки. Если на участке балки изгибающий момент положителен, то балка на этом участке изгибается выпуклостью вниз, а если отрицателен – выпуклостью вверх. В тех же сечениях, где изгибающий момент равен нулю, кривизна балки меняет свой знак, т.е. ось балки в этих сечениях имеет точки перегиба. При этом всегда следует помнить, что прогибы балки на опорах равны нулю.

Анализируя эпюру M_x (рис. 5.8, *г*), видим, что на участке AO растянуты нижние волокна, значит, на этом участке изогнутая ось балки будет иметь выпуклость вниз. На участке $OД$ растянуты верхние волокна, поэтому изогнутая ось балки на этом участке будет иметь выпуклость вверх. Таким образом, под точкой O, где $M_x = 0$, кривизна изогнутой оси балки меняет знак, т.е. упругая линия имеет в этом сечении точку перегиба. Учитывая это, строим приблизительный вид изогнутой оси балки (рис. 5.8, *д*).

2.2. *Подбор поперечного сечения балки.* Опасным сечением является то, в котором возникает наибольший по абсолютной величине изгибающий момент. В нашем примере опасным является сечение E, где $M_{\max} = 42{,}5$ кН·м. Прямоугольное сечение балки из клееной древесины подбираем из условия прочности при расчетном сопротивлении $R_И = 16 \cdot 10^3$ кН/м^2 и соотношения $h/b = 1{,}5$:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_X} \le R_И ,$$

откуда требуемый момент сопротивления сечения балки при изгибе будет равен:

$$W_X^{тр} = \frac{42{,}5}{16000} = 2{,}66 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения равен:

$$W_X = \frac{b h^2}{6} = \frac{h^3}{9}.$$

Приравняв его $W_X^{тр}$, получим $h = \sqrt[3]{9 \cdot 2{,}66 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{23{,}94} \cdot 10^{-1} =$ = 0,288 м, тогда:

$$b = 0{,}288/1{,}5 = 0{,}192 \text{ м}.$$

Округляя, принимаем брус поперечным сечением $h \times b = 0{,}29 \times \times 0{,}19$ м^2, ($W_x = 2{,}663 \cdot 10^{-3}$м^3).

5.4.2. Схема II. Двухопорная балка (задача № 7)

1. *Построить эпюры* Q_y *и* M_x. Существенное отличие этой схемы (рис. 5.13, *а*) от предыдущего примера расчета (рис. 5.8, *а*) заключается в том, что при рассмотрении однопролетной консольной балки, для определения внутренних силовых факторов с применением метода сечений, мы последовательно рассматривали равновесие той части системы, где отсутствовало опорное сечение. Данное обстоятельство позволило без предварительного определения опорных реакций, вычислить значения внутренних усилий. Так как этот прием, в данном случае, нереализуем, поэтому предварительно необходимо определить полную систему внешних сил, которая включает заданную систему и все опорные реакции.

Определение опорных реакций

При общем случае нагружения в заданной системе возникают три опорные реакции. Однако, учитывая особенности характера нагружения, т.е. все внешние силы направлены по оси y, поэтому можно утверждать, что горизонтальная опорная реакция в опорном сечении A в данном случае равна нулю. Вертикальные опорные реакции могут быть определены из условий $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$.

Необходимым и достаточным условием проверки правильности определения вертикальных опорных реакций является $\Sigma y = 0$, т.к. это уравнение статики, применительно к рассматриваемой системе, которое содержит все искомые опорные реакции.

Из $\Sigma M_A = 0$ получим:

$$\Sigma M_A = -P \cdot 1 + q \cdot 5 \cdot 4{,}5 - m - R_B \cdot 6 = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{20 \cdot 5 \cdot 4{,}5 - 10 \cdot 1 - 20}{6} = 70 \text{ кН}.$$

Из уравнения $\Sigma M_B = 0$ будем иметь:

$$\Sigma M_B = -P \cdot 7 - m - q \cdot 5 \cdot 1{,}5 + R_A \cdot 6 = 0; \qquad R_A = 40 \text{ кН}.$$

Опорные реакции R_A и R_B получились положительными. Это означает, что выбранные направления совпадают с их действительными направлениями. После определения опорных реакций следует провести проверку правильности их вычисления.

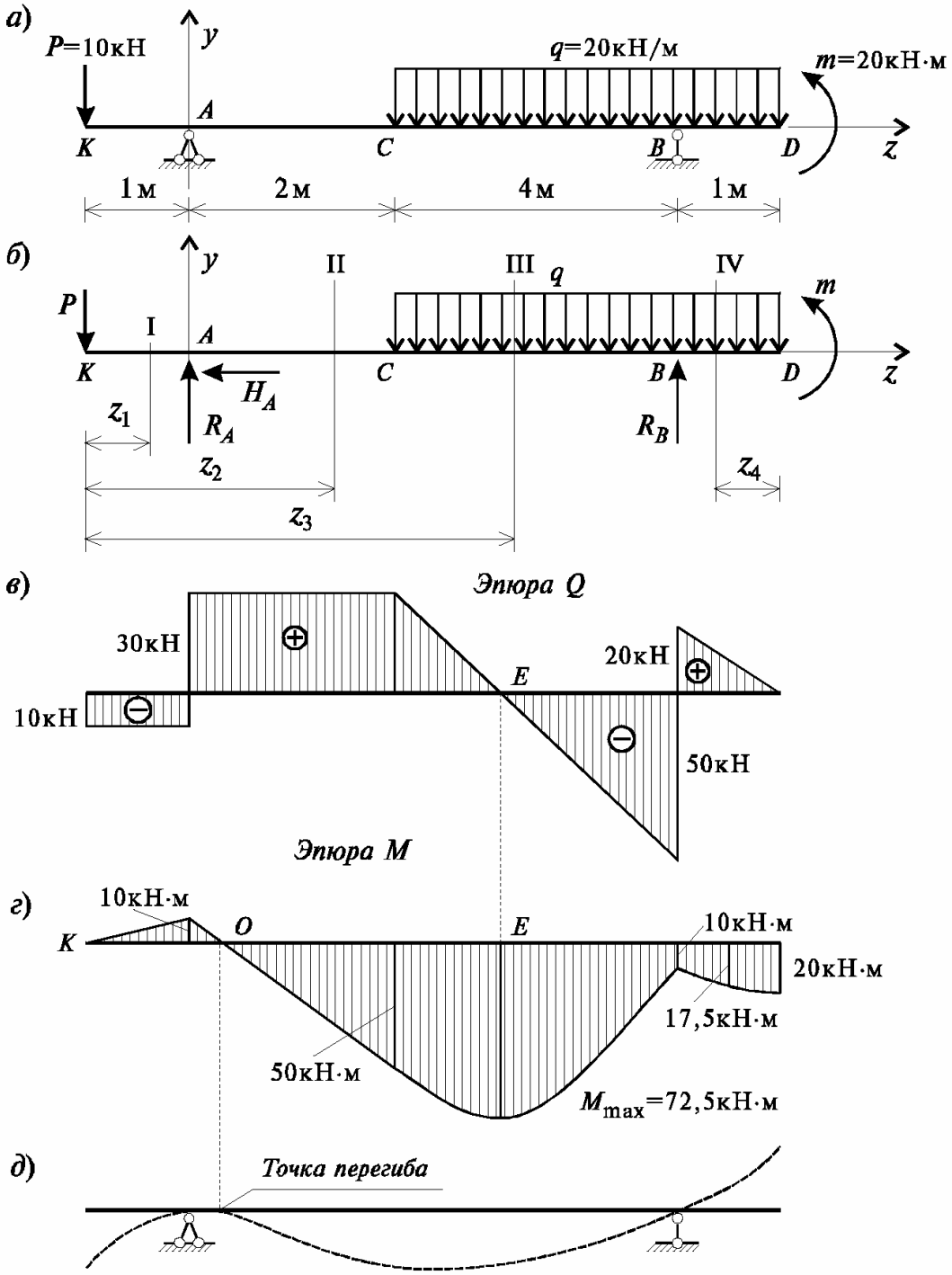


Рис. 5.13

$$\Sigma y = -P - q\cdot 5 + R_A + R_B = 0; \quad -10 - 20\cdot 5 + 40 + 70 = 0;$$

$$-110 + 110 = 0; \quad 0 = 0.$$

Удовлетворение этого уравнения говорит о правильности вычисления величин и направления опорных реакций.

Определение количества участков

Учитывая, что границами участков являются точки приложения внешних сил и опорных реакций, а также сечения, где распределенная нагрузка меняется скачкообразно. Поэтому заданная балка имеет четыре участка: I участок – KA; II участок – AC; III участок – CB и IV участок – BD (рис. 5.13, *б*).

Составление аналитических выражений Q_y, M_x и определение значений их в характерных сечениях каждого участка

Поместив начало системы координат в центре тяжести крайнего левого поперечного сечения балки, и рассекая ее в пределах участка I, рассмотрим равновесие левой части балки длиной z_1 (рис. 5.14, *а*). Составив уравнения равновесия $\Sigma y = 0$ и $\sum M_{0_1} = 0$ для этой части, найдем аналитические выражения изменения Q_y и M_x на участке I, где z_1 изменяется в пределах $0 \le z_1 \le 1$ м:

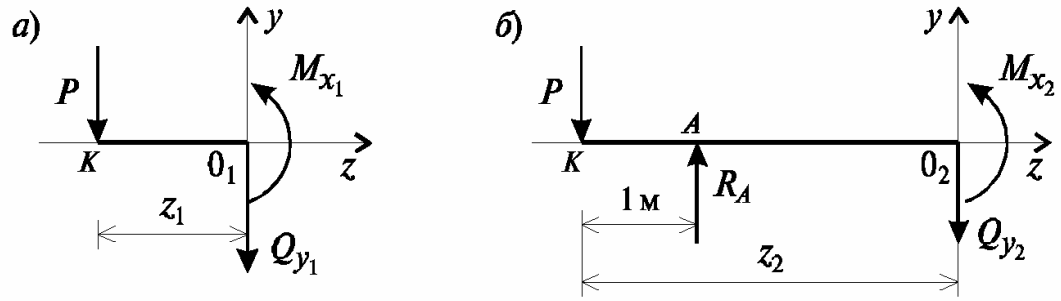


Рис. 5.14

$\Sigma y = 0$, $\quad -Q_{y_1} - P = 0$, $\quad Q_{y_1} = -P$ (постоянная величина);

$\sum M_{0_1} = 0$, $\quad -M_{x_1} - P \cdot z_1 = 0$, $\quad M_{x_1} = -P \cdot z_1$ (уравнение прямой линии).

Знак "минус" у Q_{y_1} говорит о том, что в этом сечении возникает поперечная сила, действующая в направлении, обратном показанному на рис. 5.14, *а,* а у M_{x_1} – что в сечении будет возникать изгибающий момент, растягивающий верхние волокна, а не нижние, как показано на рис. 5.14, *а*. Для определения величин Q_{y_1} и M_{x_1} в характерных сечениях этого участка подставим значения z_1 в полученные аналитические выражения:

при $z_1 = 0$ $\quad Q_{y_1} = -10$ кН, $\quad M_{x_1} = -10 \cdot 0 = 0$;

при $z_1 = 1$ м $\quad Q_{y_1} = -10$ кН, $\quad M_{x_1} = -10 \cdot 1 = -10$кН·м.

Проведя сечение в пределах участка II, рассмотрим равновесие левой отсеченной части балки (рис. 5.14, *б*) и из уравнений равновесия $\Sigma y = 0$ и $\sum M_{0_2} = 0$ найдем аналитические выражения для Q_{y_2} и M_{x_2} на этом участке, где z_2 изменяется в пределах 1 м $\le z_2 \le$ 3 м:

$\Sigma y = 0, \quad -Q_{y_2} - P + R_A = 0, \quad Q_{y_2} = R_A - P$ (постоянная величина);

$$\sum M_{0_2} = 0, \qquad -M_{x_2} - P \cdot z_2 + R_A(z_2 - 1) = 0,$$

$$M_{x_2} = R_A(z_2 - 1) - P \cdot z_2 \text{ (уравнение прямой линии).}$$

Подставив в полученные выражения значения z_2, соответствующие граничным сечениям участка II, определим величины Q_{y_2} и M_{x_2}, возникающие в этих сечениях:

при $z_2 = 1$ м $\qquad Q_{y_2} = 40 - 10 = 30$ кН,

$M_{x_2} = 40 \cdot (1 - 1) - 10 \cdot 1 = -10$ кН·м;

при $z_2 = 3$ м $\qquad Q_{y_2} = 30$ кН, $M_{x_2} = 40 \cdot (3 - 1) - 10 \cdot 3 = 50$ кН·м.

Сделав сечение в пределах участка III, составив и решив уравнения равновесия $\Sigma y = 0$ и $\sum M_{0_3} = 0$ для левой отсеченной части (рис. 5.15), получим аналитические выражения изменения Q_y и M_x на участке III, где z_3 изменяется в пределах $3 \le z_3 \le 7$ м:

$$\Sigma y = 0, \qquad -Q_{y_3} - P + R_A - q \cdot (z_3 - 3) = 0,$$

$$Q_{y_3} = R_A - P - q \cdot (z_3 - 3) \text{ –уравнение прямой;}$$

$$\sum M_{0_3} = 0, \qquad -P z_3 + R_A (z_3 - 1) - q (z_3 - 3) \frac{z_3 - 3}{2} - M_{x_3} = 0,$$

$$M_{x_3} = R_A (z_3 - 1) - P z_3 - q \frac{(z_3 - 3)^2}{2} \text{ – уравнение параболы.}$$

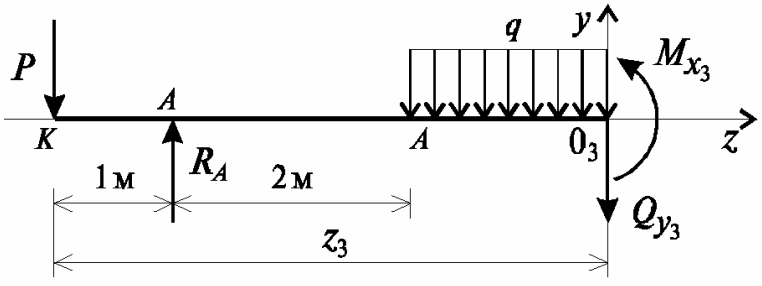


Рис. 5.15

Теперь найдем Q_{y_3} и M_{x_3} в граничных сечениях C и B участка III: при $z_3 = 3$ м

$Q_{y_3} = 40 - 10 -$

$- 20 \cdot (3 - 3) = 30$ кН,

$$M_{x_3} = 40\cdot(3-1) - 10\cdot 3 - \frac{20\cdot(3-3)^2}{2} = -50 \text{ кН·м};$$

при $z_3 = 7$ м $\qquad Q_{y_3} = 40 - 10 - 20\cdot(7-3) = -50$ кН,

$$M_{x_3} = 40\cdot(7-1) - 10\cdot 7 - \frac{20\cdot(7-3)^2}{2} = 10 \text{ кН·м}.$$

Как видно, поперечная сила Q_{y_3} на этом участке принимает в некотором сечении нулевое значение и меняет знак при прохождении через него (рис. 5.13, *в*). Поэтому в сечении, где $Q_{y_3} = \frac{dM_{x_3}}{dz_3} = 0$, будет экстремальное значение изгибающего момента. Для его определения найдем величину z_0, при котором $Q_{y_3} = 0$. Приравняв выражение для Q_{y_3} к нулю, получим:

$$R_A - P - q\cdot(z_0 - 3) = 0, \quad z_0 = \frac{R_A - P + q\cdot 3}{q} = \frac{40 - 10 + 20\cdot 3}{20} = 4{,}5 \text{ м}.$$

Подставив найденное значение $z_0 = 4{,}5$ м в выражение для M_{x_3}, найдем величину экстремального значения изгибающего момента на этом участке $M_{\max} = 72{,}5$ кН·м.

Для получения аналитических выражений изменения Q_y и M_x на участке IV целесообразно начало координат перенести в сечение D и рассматривать равновесие правой отсеченной части, т.к. в этом случае вследствие меньшего количества внешних сил, приложенных к правой части балки, аналитические выражения будут проще по своему виду, а вычисление ординат менее трудоемко.

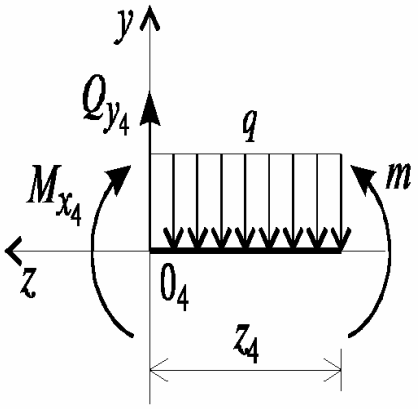


Рис. 5.16

Аналитические выражения Q_{y_4} и M_{x_4} на участке IV (рис. 5.16) ($0 \le z_4 \le \le 1$ м) получим из следующих уравнений:

$\Sigma y = 0, \qquad -Q_{y_4} - q\cdot z_4 = 0,$

$Q_{y_4} = q\cdot z_4$ – (прямая линия);

$$\sum M_{0_4} = 0, \quad M_{x_4} + \frac{q\cdot z_4^2}{2} - m = 0,$$

$$M_{x_4} = m - \frac{q\cdot z_4^2}{2} - \text{(парабола)}.$$

В граничных сечениях D и B участка IV ординаты эпюр Q_y и M_x:

при $z_4 = 0$ $Q_{y_4} = 0$, $M_{x_4} = 20$ кН·м;

при $z_4 = 1$ м $Q_{y_4} = 20 \cdot 1 = 20$ кН, $M_{x_4} = 20 - \frac{20 \cdot 1^2}{2} = 10$ кН·м.

Так как величина M_{x_4} на участке IV изменяется по закону квадратной параболы, то для уточнения ее очертания надо определить ординату эпюры M_x в каком–нибудь промежуточном сечении. Например, при $z_4 = 0{,}5$ м, где ордината M_{x_4} будет равна:

$$M_{x_4} = 20 - \frac{20 \cdot (0{,}5)^2}{2} = 17{,}5 \text{ кН·м.}$$

Построение эпюр Q_y и M_x для всей балки

Откладывая перпендикулярно от оси абсцисс в удобном для пользования масштабе значения Q_y и M_x, возникающие в характерных и промежуточных сечениях каждого участка, и соединяя концы полученных ординат линиями, соответствующими законам изменения Q_y и M_x на этих участках, строим эпюры Q_y и M_x для всей балки (рис. 5.13, *в*, *г*).

2.1. *Руководствуясь эпюрой M_x показать приблизительный вид изогнутой оси балки.* Анализируя эпюру M_x (рис. 5.13, *г*) видим, что на участке KO растянуты верхние волокна, и поэтому на этом участке изогнутая ось балки будет иметь выпуклость вверх. На участке OD растянуты нижние волокна, и изогнутая ось балки будет иметь выпуклость вниз. Вследствие этого под т. O, где $M_x = 0$, будет точка перегиба. Учитывая все сказанное и то, что прогибы в опорных сечениях равны нулю, строим приблизительный вид изогнутой балки (рис. 5.13, *д*).

2.2. *Подбор поперечного сечения балки.* Опасным является сечение E, где возникает наибольший по абсолютной величине $M_{\max} = 72{,}5$ кН·м. Двутавровое сечение балки подбираем из условия прочности при изгибе при расчетном сопротивлении материала $R_H = 200 \cdot 10^3$ кН/м^2 (сталь):

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \le R_H .$$

Откуда требуемый момент сопротивления W_x равен:

$$W_x^{\text{ò}\text{Ð}} = \frac{M_{\max}}{R_H} = \frac{72{,}5}{2 \cdot 10^5} = 36{,}25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 .$$

По сортаменту (ГОСТ 8239–72) принимаем двутавр № 27 с $W_x = 37{,}1 \cdot 10^{-5}$ м^3. В этом случае при проверке прочности получается недо-

напряжение, но оно будет меньше 5%, что допускается СНиП при практических расчетах.

5.4.3. Схема III. Плоская рама (задача № 8)

Заданная плоская стержневая система (рис. 5.17, *а*), элементы которой представляют собой прямолинейные стержни, жестко соединенных между собой, называется *рамой*. При произвольном характере нагружения, в поперечных сечениях элементов заданной системы возникают следующие три силовых фактора: поперечная сила Q, изгибающий момент M и продольная сила N. Главной отличительной особенностью рамной системы от других стержневых систем является то, что в деформированной состоянии угол сопряжения между различными элементами равен углам сопряжения элементов до нагружения системы.

Правило знаков для Q_y, M_x и N_z и порядок построения их эпюр для таких систем остаются прежними.

Так как заданная система имеет только три внешние связи (вертикальную и горизонтальную в т. D и горизонтальную в т. A), следовательно, при общем характере нагружения возникает всего три опорные реакции. Как нам уже известно, для плоских систем можно воспользоваться только тремя уравнениями равновесия статики для определения опорных реакций, поэтому заданная система является статически определимой.

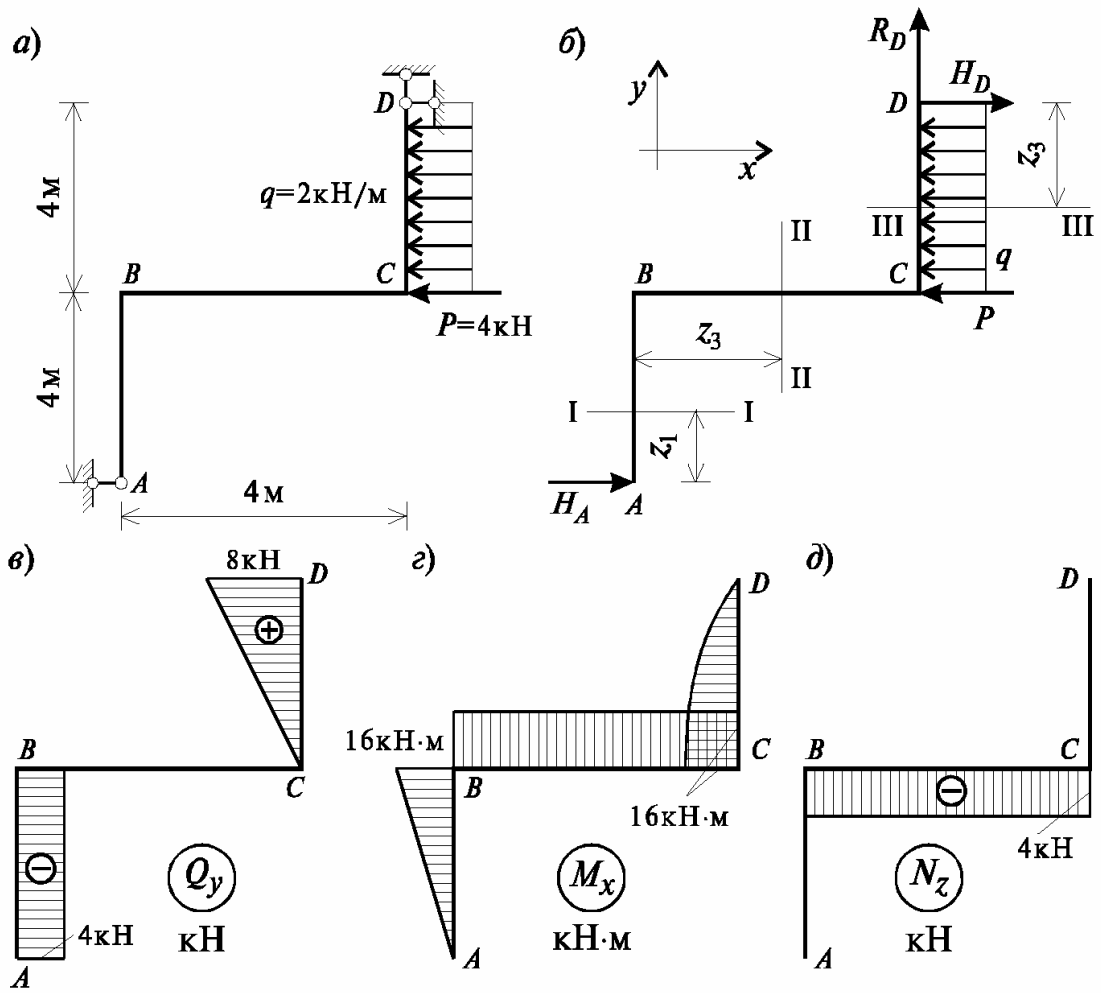


Рис. 5.17

Построить эпюры Q_y, M_x и N_z.

Определение опорных реакций. Составив уравнения равновесия для всей рамы и решив их, получим:

$\Sigma y = 0, \quad R_D = 0;$

$$\Sigma M_D = 0, \quad -H_A \cdot 8 + P \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad H_A = \frac{4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2}{8} = 4 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A = 0, \quad H_D \cdot 8 - P \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 6 = 0, \quad H_D = \frac{4 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 6}{8} = 8 \text{ кН}.$$

П р о в е р к а : $\Sigma x = 0$; $H_A + H_D - P - q \cdot 4 = 0$;

$4 + 8 - 4 - 2 \cdot 4 = 0; \quad 12 - 12 = 0; \quad 0 = 0.$

Уравнение равновесия превращается в тождество, что говорит о правильности вычисления опорных реакций.

О п р е д е л е н и е к о л и ч е с т в а у ч а с т к о в

Так как, в рамах границами участков являются точки приложения сил и точки изменения направления оси элементов системы, то заданная система имеет три участка: участок I – AB, участок II – BC, участок III – CD (рис. 5.13, *б*).

Составление аналитических выражений Q_y, M_x и N_z и определение их значений в характерных сечениях каждого участка

Определение внутренних силовых факторов в сечениях рам производится также с помощью метода сечений. Однако при выполнении разрезов всегда следует выяснить, какую из частей рамы считать левой, а какую правой. Для этого предполагают, что обход рамы ведется слева направо, т.е. от A к B, от B к C, от C к D. При этом наблюдение ведут с нижней стороны участков, находясь лицом к оси участков.

Участок I ($0 \le z_1 \le 4$ м) (рис. 5.18).

Проведя сечение в пределах этого участка, рассмотрим равновесие левой отсеченной части длиной z_1. Составив уравнение равновесия $\Sigma y = 0$ и $\sum M_{0_1} = 0$ и $\Sigma z = 0$ для этой части и решив их относительно Q_{y_1}, M_{x_1} и N_{z_1}, получим аналитические выражения изменения Q_y, M_x и N_z на участке I:

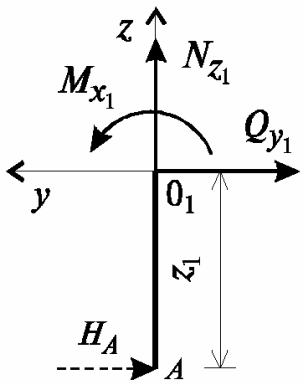


Рис. 5.18

$\Sigma y = 0$, $-H_A - Q_{y_1} = 0$, $Q_{y_1} = -H_A = \text{const}$;

$\sum M_{0_1} = 0$, $-H_A \cdot z_1 - M_{x_1} = 0$, $M_{x_1} = -H_A \cdot z_1$ – уравнение прямой;

$\Sigma z = 0$, $N_{z_1} = 0$ – нормальная сила отсутствует.

Величины Q_y, M_x и N_z в граничных сечениях участка будут равны:

при $z_1 = 0$ $Q_{y_1} = -4$ кН, $M_{x_1} = 0$, $N_{z_1} = 0$;

при $z_1 = 4$ м $Q_{y_1} = -4$ кН, $M_{x_1} = -4 \cdot 4 = -16$кН·м, $N_{z_1} = 0$.

Участок II ($0 \le z_2 \le 4$ м) (рис. 5.19).

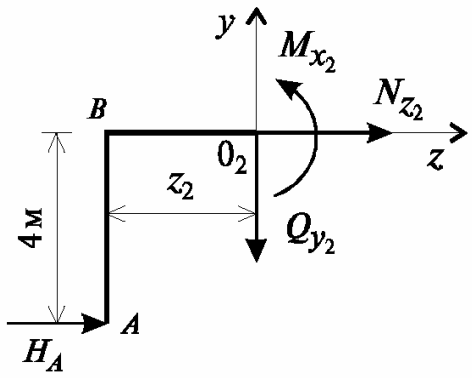


Рис. 5.19

Сделав сечение в пределах этого участка, составим уравнения равновесия для левой части:

$$\Sigma y = 0, \qquad Q_{y_2} = 0;$$

$$\sum M_{0_2} = 0, \quad -M_{x_2} - H_A \cdot 4 = 0,$$

$$M_{x_2} = -H_A \cdot 4 = -4 \cdot 4 = -16 \text{ кН·м};$$

$$\Sigma z = 0, \qquad H_A + N_{z_2} = 0,$$

$$N_{z_2} = -H_A = -4 \text{ кН}.$$

Знак "минус" перед N_{z_2} говорит о том, что элемент BC сжат, а не растянут. Из полученных уравнений видно, что на участке II поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент и нормальная сила постоянны.

Участок III ($0 \le z_3 \le 4$ м) (рис. 5.20). Приняв начало координат в сечении D и сделав разрез в пределах этого участка, рассмотрим равновесие правой отсеченной части длиной z_3. Составив уравнения равновесия $\Sigma y = 0$; $\sum M_{0_3} = 0$ и $\Sigma z = 0$ и решив их, получим:

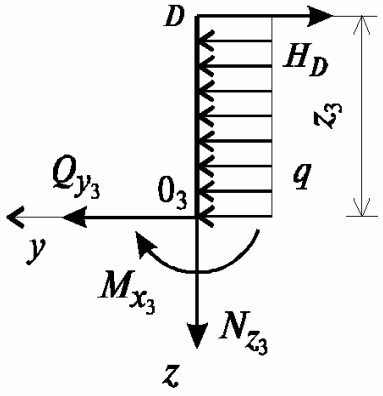


Рис. 5.20

$$\Sigma y = 0, \quad Q_{y_3} - H_D + q \cdot z_3 = 0,$$

$$Q_{y_3} = H_D - q \cdot z_3 \text{ – уравнение прямой.}$$

$$\sum M_{0_3} = 0, \qquad M_{x_3} + H_D \cdot z_3 - \frac{q \cdot z_3^2}{2},$$

$$M_{x_3} = -H_D \cdot z_3 + \frac{q \cdot z_3^2}{2} \text{ – уравнение квадратной параболы;}$$

$$\Sigma z = 0, \qquad N_z = 0.$$

Ординаты эпюр найдем из полученных выражений, подставив в них значения z_3, соответствующие граничным сечениям участка:

при $z_3 = 0$ $\qquad Q_{y_3} = 8$ кН, $\qquad M_{x_3} = 0, \qquad N_{z_3} = 0;$

при $z_3 = 4$ м $\quad Q_{y_3} = 8 - 2 \cdot 4 = 0, \quad M_{x_3} = -8 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 4}{2} = -16$ кН·м,

$$N_{z_3} = 0.$$

Для уточнения очертания квадратной параболы определим величину M_{x_3} при $z_3 = 2$ м:

$$M_{x_3} = -8 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} = -12 \text{ кН·м}.$$

Построение эпюр Q_y, M_x и N_z для бруса с ломанной осью (рамы)

Отложив в масштабе перпендикулярно к оси каждого элемента рамы полученные значения Q_y, M_x, N_z в граничных и промежуточных сечениях участка и соединяя концы ординат линиями, соответствующими выражениям Q_y, M_x и N_z, строим их эпюры (рис. 5.17, *в*, *г*, *д*).

Правильность построения эпюр внутренних усилий подтверждается на основе статической проверки, заключающейся в том, что условия равновесия рамы ($\Sigma x \equiv 0$; $\Sigma y \equiv 0$; $\Sigma M \equiv 0$;), как в целом, так и любой ее отсеченной части, под воздействием внешних нагрузок и усилий, возникающих в проведенных сечениях, соблюдаются тождественно.

5.5. Касательные напряжения при поперечном изгибе. Главные напряжения при изгибе

В случае поперечного изгиба в сечениях балки возникают не только изгибающий момент, но и поперечная сила. Следовательно, в этом случае в поперечных сечениях бруса возникают не только нормальные, но и касательные напряжения.

Так как касательные напряжения в общем случае распределены по сечению неравномерно, то при поперечном изгибе поперечные сечения балки строго говоря не остаются плоскими. Однако при $\frac{h}{l} << 1$ (где h – высота поперечного сечения, l – длина балки) оказывается, что эти искажения заметным образом не сказываются на работе балки на изгиб. В данном случае гипотеза плоских сечений и в случае чистого изгиба с достаточной точностью приемлема. Поэтому для расчета нормальных напряжений σ применяют ту же формулу (5.10).

Рассмотрим вывод расчетных формул для касательных напряжений. Выделим из бруса, испытывающего поперечный изгиб, элемент длиной dz (рис. 5.21, *а*).

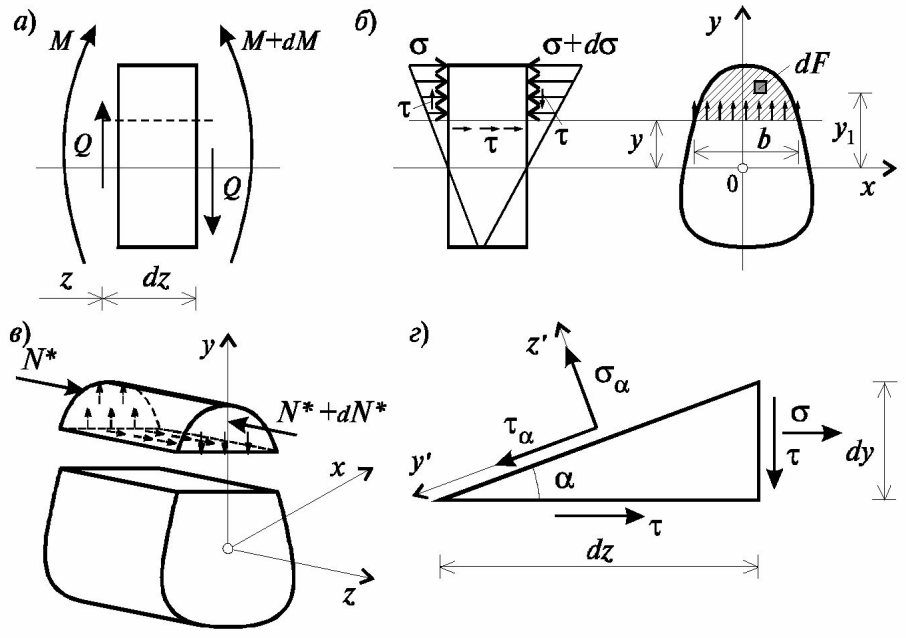


Рис. 5.21

Продольным горизонтальным сечением, проведенным на расстоянии y от нейтральной оси, разделим элемент на две части (рис. 5.21, *в*) и рассмотрим равновесие верхней части, имеющей основание шириной b. При этом с учетом закона парности касательных напряжений, получим, что касательные напряжения в поперечном сечении равны касательным напряжениям, возникающим в продольных сечениях (рис. 5.21, *б*). С учетом данного обстоятельства и из допущения о том, что касательные напряжения по площади $b \cdot dz$ распределены равномерно, используя условие $\sum z = 0$, получим:

$$N^* - N^* - dN^* + \tau \cdot b \cdot dz = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{dN^*}{b \cdot dz}. \qquad (5.12)$$

где N^* – равнодействующая нормальных сил $\sigma \cdot dF$ в левом поперечном сечении элемента dz в пределах заштрихованной площади F^* (рис. 5.20, *г*):

$$N^* = \int_{F^*} \sigma \, dF. \qquad (5.13)$$

С учетом (5.10) последнее выражение можно представить в виде

$$N^* = \frac{M_X}{J_X} \int_{F^*} y_1 \, dF, \qquad (5.14)$$

где $S_X^* = \int_{F^*} y_1 \, dF$ – статический момент части поперечного сечения, расположенной выше координаты y (на рис. 5.21,б эта область заштрихована). Следовательно, (5.14) можно переписать в виде

$$N^* = \frac{M_X S_X^*}{J_X},$$

откуда

$$dN^* = \frac{dM_X S_X^*}{J_X}. \qquad (5.15)$$

В результате совместного рассмотрения (5.12) и (5.15) получим

$$\tau = \frac{S_X^*}{b J_X} \cdot \frac{dM_X}{dz},$$

или окончательно

$$\tau = \frac{S_X^* Q_y}{b J_X}. \qquad (5.16)$$

Полученная формула (5.16) носит имя русского ученого Д.И. Журавского.

Для исследования напряженного состояния в произвольной точке балки, испытывающей поперечный изгиб, выделим из состава балки вокруг исследуемой точки элементарную призму (рис. 5.21, *г*), таким образом, чтобы вертикальная площадка являлась частью поперечного сечения балки, а наклонная площадка составляла произвольный угол α относительно горизонта. Принимаем, что выделенный элемент имеет следующие размеры по координатным осям: по продольно оси – *dz*, т.е. по оси *z*; по вертикальной оси – *dy*, т.е. по оси *y*; по оси *x* – равный ширине балки.

Так как вертикальная площадка выделенного элемента принадлежит поперечному сечению балки, испытывающему поперечный изгиб, то нормальные напряжения σ на этой площадке определяются по формуле (5.10), а касательные напряжения τ – по формуле Д.И. Журавского (5.16). С учетом закона парности касательных напряжений, легко установить, что касательные напряжения на горизонтальной площадке также равны τ. Нормальные же напряжения на этой площадке равны нулю, согласно уже известной нам гипотезе теории изгиба о том, что продольные слои не оказывают давления друг на друга.

Обозначим величины нормальных и касательных напряжений на наклонной площадке через σ_α и τ_α, соответственно. Принимая площадь наклонной площадки *dF*, для вертикальной и горизонтальной площадок будем иметь $dF\sin\alpha$ и $dF\cos\alpha$, соответственно.

Составляя уравнения равновесия для элементарной вырезанной призмы (рис. 5.21, *г*), получим:

$$\sum z' = 0; \qquad \sum y' = 0,$$

откуда будем иметь:

$$\sigma_\alpha\, dF - \tau\cos\alpha\, dF\sin\alpha - \tau\sin\alpha\, dF\cos\alpha - \sigma\sin\alpha\, dF\sin\alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha\, dF + \tau\sin\alpha\, dF\sin\alpha - \tau\cos\alpha\, dF\cos\alpha - \sigma\cos\alpha\, dF\sin\alpha = 0.$$

Следовательно, окончательные выражения напряжений на наклонной площадке принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma\sin^2\alpha + \tau\sin 2\alpha; \\ \tau_\alpha &= \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha + \tau\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Определим ориентацию площадки, т.е. значение $\alpha = \alpha_0$, при котором напряжение σ_α принимает экстремальное значение. Согласно правилу оп-

ределения экстремумов функций из математического анализа, возьмем производную функции σ_α от α и приравняем ее нулю:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\sigma \sin\alpha \cos\alpha + 2\tau \cos 2\alpha = 0.$$

Предполагая $\alpha = \alpha_0$, получим:

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}.$$

Откуда окончательно будем иметь:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{2\tau}{\sigma}\right).$$

Согласно последнему выражению, экстремальные напряжения возникают на двух взаимно перпендикулярных площадках, называемых *главными*, а сами напряжения – *главными напряжениями*.

Сопоставляя выражения τ_α и $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}$, имеем:

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha},$$

откуда и следует, что касательные напряжения на главных площадках всегда равны нулю.

В заключение, с учетом известных тригонометрических тождеств:

$$\sin^2\alpha_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha_0) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha}}\right);$$

$$\sin 2\alpha_0 = \pm\frac{\mathrm{tg}2\alpha_0}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha_0}},$$

и формулы $\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}$,

определим главные напряжения, выражая из через σ и τ:

$$\sigma_{\alpha_0} = \sigma_{\substack{\min\\ \max}} = \frac{\sigma}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \sigma\tau^2}.$$

Полученное выражение имеет важное значение в теории прочности изгибаемых элементов, позволяющее производить расчеты их прочности, с учетом сложного напряженного состояния, присущее поперечному изгибу.

5.6. Пример расчета (задача № 9)

Для составной балки, имеющей поперечное сечение, показанное на рис. 5.22, требуется:

1. Определить расчетные параметры поперечного сечения балки;

2. Вычислить нормальные напряжения σ по заданному изгибающему моменту и построить их эпюру;

3. Определить значения касательных напряжений в точке 3;

4. Определить значения главных напряжений в точке 3 и указать их направления (показать главные площадки), имея в виду, что сечение относится к левой части балки.

Д а н о : расчетные значения изгибающего момента и поперечной силы в сечении M_P = 156 кН·м, Q_P = 104 кН; h_{CT} = 0,34 м; b_1/h_{CT} = 0,7; b_2/h_{CT} = 0,9; δ_1/h_{CT} = 0,1; δ_2/h_{CT} = 0,07; δ/δ_1 = 0,4. Нормативное значение сопротивления материалу при изгибе R_H = = 217100 кН/м^2, коэффициент запаса по прочности n = 1,3.

Р е ш е н и е

1. *О п р е д е л е н и е р а с ч е т н ы х п а р а м е т р о в п о п е р е ч н о г о с е ч е н и я б а л к и* (рис. 5.22, *а*). Ширина верхней полки b_1 = = 0,7·h_{CT} = 0,7·0,34 = 0,238 м, принимаем b_1 = 0,24 м; толщина верхней полки δ_1 = 0,1·h_{CT} = 0,1·0,34 = 0,034 м; площадь сечения верхней полки $F_f^{\text{В}} = b_1\delta_1 = 0{,}24 \cdot 0{,}034 = 0{,}00816$ м^2, ширина нижней полки b_2 = 0,9·h_{CT} = 0,9·0,34 = 0,306 м, принимаем b_2 = 0,3 м; толщина нижней полки δ_2 = 0,07·h_{CT} = 0,07·0,34 = 0,0238 м, принимаем δ_2 = 0,024 м; площадь сечения нижней полки F_f^H = 0,3·0,024 = =0,0072 м^2, толщина стенки δ = 0,4·δ_1 = 0,4·0,034 = 0,0136 м, принимаем δ = 0,014 м; площадь сечения стенки F_{CT} = 0,34·0,014 = = 0,00476 м^2; высота балки h_δ = h_{CT} + δ_1 + δ_2 = 0,34 + 0,034 + + 0,024 = 0,398 м.

О п р е д е л е н и е п л о щ а д и п о п е р е ч н о г о с е ч е н и я б а л к и .

$$F = F_f^{\text{В}} + F_f^H + F_{CT} = 0{,}00816 + 0{,}0072 + 0{,}00476 = 0{,}02012 \text{ м}^2.$$

О п р е д е л е н и е ц е н т р а т я ж е с т и п о п е р е ч н о г о с е ч е н и я б а л к и . Ось y является осью симметрии сечения балки, следовательно, центр его тяжести находится на этой оси. За вспомогательную ось для определения координаты центра тяжести сечения на оси y принимаем ось x_1 (рис. 5.22, *а*). Заметим, что поперечное сечение балки является составным, и включает в себя три прямоугольника (верхняя и нижняя полки, а также стенка). С учетом данного обстоятельства и воспользовавшись выражением (3.6), вычислим статический момент площади поперечного сечения балки относительно оси x_1 :

$$S_{X_1} = F_{\text{Â}}\left(h_\delta - \frac{\delta_1}{2}\right) + F_{\text{Í}}\,\frac{\delta_2}{2} + F_{CT}\left(\delta_2 + \frac{h_{CT}}{2}\right) =$$

$$= 10^{-3}\cdot\left[8{,}16\cdot(0{,}398 - 0{,}034\cdot 0{,}5) + 7{,}2\cdot 0{,}024\cdot 0{,}5 +\right.$$

$$\left. + 4{,}76\,(0{,}024 + 0{,}034\cdot 0{,}5)\right] = 4{,}1188\cdot 10^{-3}\ \text{ì}^{\,3}.$$

Тогда положение центра тяжести на оси *y* определится ординатой

$$y_C = \frac{S_{X_1}}{F} = \frac{4{,}118.8\cdot 10^{-3}}{201{,}2\cdot 10^{-4}} = 0{,}205\ \text{м}.$$

Определение момента инерции поперечного сечения балки относительно центральной оси (рис. 5.22). Значение момента инерции вычислим, пользуясь зависимостью между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$I_{X_C} = I_{\text{Í}}^{\text{Â}} + F_{\text{Í}}^{\text{Â}}\,a_1^2 + I_{\text{Í}}^{\text{Í}} + F_{\text{Í}}^{\text{Í}}\,a_2^2 + I_{CT} + F_{CT}\,a_{CT}^2 =$$

$$= \frac{0{,}24\cdot 0{,}034^3}{12} + 0{,}0816\cdot 0{,}176^2 + \frac{0{,}3\cdot 0{,}024^3}{12} + 0{,}72\cdot(-0{,}193)^2 +$$

$$+ \frac{0{,}014\cdot 0{,}034^3}{12} + 0{,}476\cdot(-0{,}011)^2 = 56{,}85\cdot 10^{-5}\ \text{ì}^{\,4},$$

где $I_{\text{Í}}^{\text{Â}}$, $I_{\text{Í}}^{\text{Í}}$ и I_{CT} – моменты инерции верхней и нижней полки и стенки, соответственно, относительно собственных горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести (см. п. 3.2),

$$a_1 = h_{\text{Á}} - y_C - \frac{\delta_1}{2} = 0{,}398 - 0{,}205 - 0{,}034\cdot 0{,}5 = 0{,}176\ \text{ì};$$

$$a_2 = -\left(y_C - \frac{\delta_2}{2}\right) = -(0{,}205 - 0{,}024\cdot 0{,}5) = -0{,}193\ \text{ì};$$

$$a_{CT} = \frac{h_{CT}}{2} + s_2 - y_C = 0{,}34\cdot 0{,}5 + 0{,}024 - 0{,}205 = -0{,}11\ \text{ì}.$$

2. *Вычислить нормальные напряжения* σ *по заданному изгибающему моменту и построить их эпюру.*

Момент сопротивления W_x для точек 1 и 2 определим по формулам:

для точки 1 $$W_x^{(1)} = \frac{I_{x_C}}{y_1} = \frac{56{,}85\cdot 10^{-5}}{19{,}3\cdot 10^{-2}} = 2{,}95\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3;$$

для точки 2 $$W_x^{(2)} = \frac{I_{x_C}}{y_2} = \frac{56{,}85\cdot 10^{-5}}{20{,}5\cdot 10^{-2}} = 2{,}77\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3,$$

где $y_1 = h_\delta - y_c = 0{,}398 - 0{,}205 = 0{,}193$ м, $y_2 = y_c = 0{,}205$ м.

Вычислим напряжения в точке 1 (рис. 5.22, *а*):

$$\sigma_1 = \frac{M_P}{W_X^{(1)}} = \frac{156}{2{,}95 \cdot 10^{-3}} = 52881 \text{ кН/м}^2 \approx 53000 \text{ МПа} < 167000 \text{ кН/м}^2$$

Вычислим напряжения в точке 2 (рис. 5.22, *а*):

$$\sigma_2 = \frac{M_P}{W_X^{(2)}} = \frac{156}{2{,}77 \cdot 10^{-3}} = 56318 \text{ кН/м}^2 \approx 56000 \text{ МПа} < 167000 \text{ кН/м}^2$$

Найдем значение нормальных напряжений в точке 3 по (5.10):

$$\sigma_3 = \frac{M_P}{I_{X_C}} y_3 = \frac{156}{56{,}85 \cdot 10^{-5}} 9{,}6 \cdot 10^{-2} = 26350 \text{ кН/м}^2 .$$

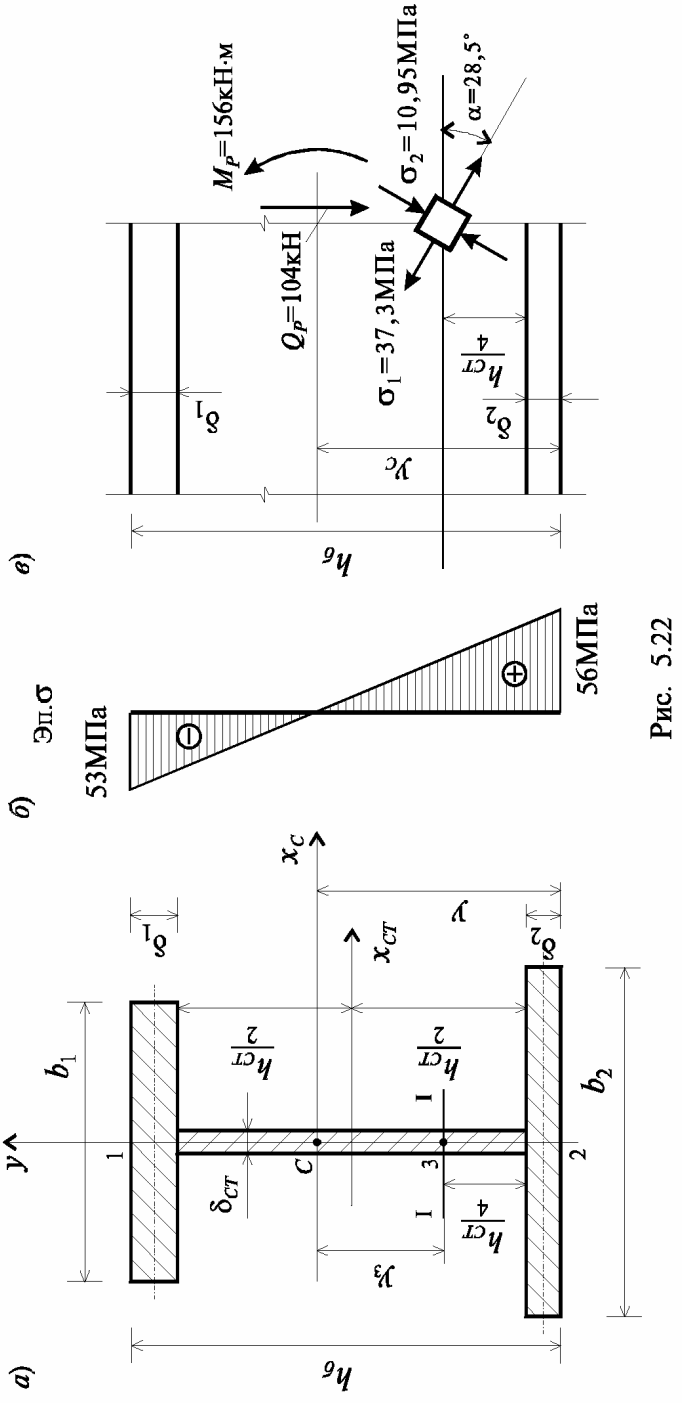


Рис. 5.22

По полученным значениям σ строим эпюру нормальных напряжений (рис. 5.22, *б*).

Проверку прочности производим по формуле

$$\sigma = \frac{M_P}{W_X} \le R_È ,$$

где M_P – расчетный изгибающий момент; W_x – момент сопротивления при изгибе; $R_И$ – допускаемое напряжение при изгибе.

Допускаемое напряжение при изгибе равно:

$$R_È = \frac{R_f}{n} = \frac{217100}{1{,}3} = 167000 \text{ кН/м}^2.$$

Как видно, балка имеет значительное недонапряжение.

3. *Определить значения касательных напряжений в точке 3.*

Касательное напряжение определим по формуле *Журавского*:

$$\tau = \frac{Q_P S_X^{îòñ}}{I_{X_C} \delta},$$

где Q_P – расчетная поперечная сила, δ – ширина сечения на уровне точки 3.

Вычислим статический момент отсеченной части в точке 3 части сечения $S_X^{îòñ}$:

$$S_X^{îòñ} = F_f^f \left(y_{Ñ} - \frac{\delta_2}{2} \right) + F_{CT}^{îòñ} \left(y_3 + \frac{h_{CT}}{8} \right) = 0{,}0072 \cdot (0{,}205 - 0{,}5 \cdot 0{,}024) +$$

$$+ 0{,}00119 \cdot (0{,}096 + 0{,}125 \cdot 0{,}34) = 1{,}544 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

где $F_{CT}^{îòñ} = 0{,}25 \cdot h_{CT} \cdot \delta = 0{,}25 \cdot 0{,}34 \cdot 0{,}014 = 0{,}00119$ м^2.

Вычислим касательное напряжение в точке 3:

$$\tau_3 = \frac{104 \cdot 1{,}544 \cdot 10^{-3}}{56{,}85 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-2}} \approx 20200 \text{ кН/м}^2.$$

4. *Определить значения главных напряжений в т. 3 и указать их направления (показать главные площадки), имея в виду, что сечение относится к левой части балки.*

Главные напряжения в точке 3 определяем по формуле:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Подставив в данную формулу значения σ_3 и τ_3, получим:

$$\sigma_{max} = \left(\frac{26,3}{2} + \sqrt{\left(\frac{26,3}{2} \right)^2 + 20,2^2} \right) \cdot 10^3 = 37,3 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2;$$

$$\sigma_{min} = \left(\frac{26,3}{2} - \sqrt{\left(\frac{26,3}{2} \right)^2 + 20,2^2} \right) \cdot 10^3 = -10,95 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

В заключение найдем положение главных площадок и направление главных напряжений (рис. 5.22, *в*).

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_3}{\sigma_3} = -\frac{2 \cdot 20,2}{26,3} = -1,542; \quad \alpha_0 \approx -57^\circ; \quad \alpha_0 = -28,5^\circ.$$

При отрицательном угле α_0 откладываем его от нормали к сечению (площадке) по часовой стрелке и показываем положение главных площадок и направление главных напряжений (рис. 5.22).

5.7. Перемещения при изгибе. Метод начальных параметров

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При поперечном изгибе ось балки принимает вид кривой, расположенной в плоскости действия поперечных нагрузок. При этом точки оси получают поперечные перемещения, а поперечные сечения совершают повороты относительно своих нейтральных осей. Углы поворота поперечных сечений принимаются равными углам наклона φ, касательной к изогнутой оси балки (рис. 5.23).

Прогибы и углы поворотов в балках являются функциями координаты *z* и их определение необходимо для расчета жесткости. Рассмотрим изгиб стержня в одной из главных плоскостей например, в плоскости *yz*. Как показывает практика, в составе реальных сооружений стержни испытывают весьма малые искривления ($y_{max}/l = 10^{-2} - 10^{-3}$, где y_{max} – максимальный прогиб; l – пролет балки).

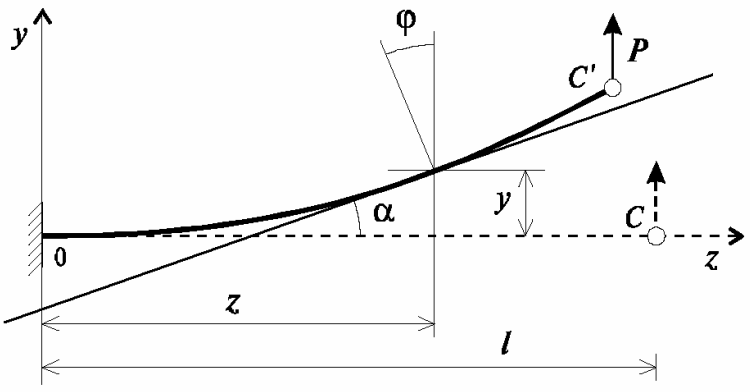


Рис. 5.23

В этом случае неизвестными функциями, определяющими положение точек поперечных сечений балки являются $y(z)$ и $\varphi(z) = = \alpha(z)$ (рис.5.23). Совокупность значений этих параметров по длине балки образуют две функции от координаты z – функцию перемещений $y(z)$ и функцию углов поворота $\varphi(z)$. Из геометрических построений (рис. 5.23) наглядно видно, что угол наклона касательной к оси z и угол поворота поворота поперечных сечений при произвольном z равны между собой. В силу малости углов поворота можно записать:

$$\varphi(z) \approx \operatorname{tg}\varphi(z) = y'(z) . \qquad (5.17)$$

Из курса математического анализа известно, что кривизна плоской кривой $y(z)$ выражается следующей формулой:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''(z)}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} .$$

Если рассмотреть совместно соотношение (5.9) и последнее выражение, то получим нелинейное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, точное решение которого, как правило, затруднительно. В связи с малостью величины y'^2 по сравнению с единицей последнее выражение можно существенно упростить, и тогда

$$\frac{1}{\rho} = y''(z) . \qquad (5.18)$$

Учитывая (5.9), из (5.18) получим следующее важное дифференциальное соотношение

$$E I_x y''(z) = M_x(z) , \qquad (5.19)$$

где I_x – момент инерции поперечного сечния балки, относительно ее нейтральной оси; E – модуль упругости материала; EI_x – изгибная жесткость балки.

Уравнение (5.19), строго говоря, справедливо для случая чистого изгиба балки, т.е. когда изгибающий момент $M_x(z)$ имеет постоянное значение, а поперечная сила равна нулю. Однако это уравнение используется и в случае поперечного изгиба, что равносильно пренебрежению искривлений поперечных сечений за счет сдвигов, на основании гипотезы плоских сечений.

Введем еще одно упрощение, связанное с углом поворота поперечного сечения. Если изогнутая ось балки является достаточно пологой кривой, то углы поворота сечений с высокой степенью точности можно принимать равными первой производной от прогибов. Отсюда следует, что прогиб балки принимает экстремальные значения в тех сечениях, где поворот равен нулю.

В общем случае, для того, чтобы найти функции прогибов $y(z)$ и углов поворота $\varphi(z)$, необходимо решить уравнение (5.19), с учетом граничных условий между смежными участками.

Для балки, имеющей несколько участков, определение формы упругой линии является достаточно сложной задачей. Уравнение (5.19), записанное для каждого участка, после интегрирования, содержит две произвольные постоянные.

На границах соседних участков прогибы и углы поворота являются непрерывными функциями. Данное обстоятельство позволяет определить необходимое число граничных условий для вычисления произвольных постоянных интегрирования.

Если балка имеет n – конечное число участков, из $2n$ числа граничных условий получим $2n$ алгебраических уравнений относительно $2n$ постоянных интегрирования.

Если момент и жесткость являются непрерывными по всей длине балки функциями $M_x(z)$ и $EI_x(z)$, то решение может быть получено, как результат последовательного интегрирования уравнения (5.19) по всей длине балки: интегрируя один раз, получаем закон изменения углов поворота

$$\varphi(z) = y'(z) = \int_0^z \frac{M_x(z)\,dz}{E\,I_x(z)} + C_1,$$

интегрируя еще раз, получаем функцию прогибов

$$y(z) = \int_0^z \left(\int_0^z \frac{M_x(z)\,dz}{E\,I_x(z)} \right) dz + C_1\,z + C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 произвольные постоянные интегрирования должны быть определены из граничных условий.

Если балка имеет постоянное поперечное сечение по длине, то для определения функций прогибов и углов поворота удобно применить *метод начальных параметров*, суть которого в следующем.

Рассмотрим балку (рис. 5.24) с постоянным поперечным сечением, нагруженную взаимоуравновешенной системой положительных силовых факторов (т.е., вызывающих вертикальные перемещения сечений балки в положительном направлении оси y). Начало системы координат поместим на левом конце балки так, чтобы ось z проходила вдоль оси балки, а ось y была бы направлена вверх. На балку действуют: момент M, сосредоточенная сила P и равномерно распределенная на участке бруса нагрузка интенсивностью q (рис. 5.24).

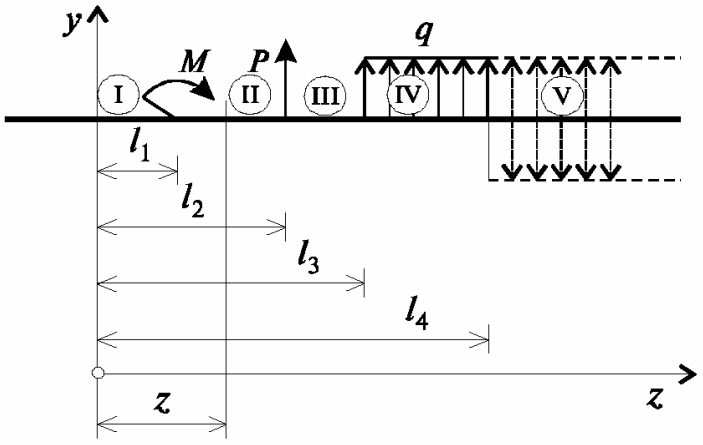


Рис. 5.24

Задача заключается в том, чтобы выявить особенности, вносимые в уравнение упругой линии, различными типами внешних силовых факторов. Для этого составим выражение изгибающих моментов для каждого из пяти участков заданной системы.

Участок I ($0 \le z \le l_1$) $\qquad M_{x(z)} = 0.$

Участок II ($l_1 \le z \le l_2$) $\quad M_{x(z)} = M.$

Участок III ($l_2 \le z \le l_3$) $\quad M_{x(z)} = M + P(z - l_2).$

Участок IV ($l_3 \le z \le l_4$) $\quad M_{x(z)} = M + P(z - l_2) + \dfrac{q(z - l_3)^2}{2}.$

Уч–ток V($l_4 \le z \le l_5$) $M_{x(z)} = M + P(z - l_2) + \dfrac{q(z - l_3)^2}{2} - \dfrac{q(z - l_4)^2}{2}.$

На участке V, где распределенная нагрузка отсутствует, при выводе выражения для изгибающего момента, с целью сохранения рекуррентности формул для разных участков была приложена взаимоуравновешенная распределенная нагрузка.

Для вывода *обобщенного* выражения изгибающего момента введем следующий оператор $\Big|_{z>l_i}$, означающий, что члены выражения, стоящее перед ним следует учитывать при $z > l_i$ и игнорировать при $z \le l_i$. На основании этого, обобщенное выражение момента $M_x(z)$ для произвольного сечения z может быть записано единой формулой:

$$M_x(z) = M\Big|_{z>l_1} + P(z - l_2)\Big|_{z>l_2} + \frac{q(z - l_3)^2}{2}\Big|_{z>l_3} - \frac{q(z - l_4)^2}{2}\Big|_{z>l_4}. \qquad (5.20)$$

Подставляя (5.20) в (5.19) и дважды интегрируя, получим выражение для прогибов:

$$EI_x y(z) = C_0 + C_1 z + \frac{M}{2}(z - l_1)^2\Big|_{z>l_1} + \frac{P}{6}(z - l_2)^3\Big|_{z>l_2} + \frac{q(z - l_3)^4}{24}\Big|_{z>l_3} - \frac{q(z - l_4)^4}{24}\Big|_{z>l_4}. \qquad (5.21)$$

Постоянные интегрирования C_0 и C_1 по своей сути означают:

$$C_0 = EI_x y(0),\ C_1 = EI_x y'(0) = EI_x \varphi(0) \qquad (5.22)$$

и определяются из граничных условий на левом конце балки. Тогда формула для прогибов примет следующий окончательный вид:

$$EI_x y(z) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z + \frac{M}{2}(z-l_1)^2\Big|_{z>l_1} + \frac{P}{6}(z-l_2)^3\Big|_{z>l_2} +$$

$$+\frac{q(z-l_3)^4}{24}\Big|_{z>l_3} - \frac{q(z-l_4)^4}{24}\Big|_{z>l_4}. \qquad (5.23)$$

Соответственно, формула для углов поворотов сечений балки определяется из (5.23) простым дифференцированием:

$$EI_x \varphi(z) = EI_x \varphi_0 + M(z-l_1)\Big|_{z>l_1} + \frac{P}{2}(z-l_2)^2\Big|_{z>l_2}$$

$$+\frac{q(z-l_3)^3}{6}\Big|_{z>l_3} - \frac{q(z-l_4)^3}{6}\Big|_{z>l_4}. \qquad (5.24)$$

Как видно, для определения прогибов и углов поворота балок данным методом начальных параметров достаточно знание лишь значений прогиба y_0, угла поворота φ_0 в начале системы координат, т.е. так называемых *начальных параметров*. Поэтому данный метод и называется методом начальных параметров.

5.8. Пример расчета (задача № 10)

Для схем стальных балок I и II, изображенных на рис. 5.25 и 5.26, определить методом начальных параметров углы поворота сечения и прогиб в точке D. Модуль упругости $E = 2\cdot10^8$ кН/м^2. Поперечные сечения балок: схема I – круглое диаметром $d = 0{,}24$ м, схема II – квадратное со стороной $a = 0{,}2$ м.

Решение

Схема I.

1. *Определение опорных реакций балки* (рис. 5.25)

$\Sigma y = 0$, $R_0 + q\cdot c - P = 0$, $R_0 = -q\cdot c + P = -10\cdot1{,}4 + 12 = -2$ кН;

$\Sigma M_0 = 0$, $M_0 - qc(b + 0{,}5c) + M + P(b + c + e) = 0$,

$M_0 = qc(b + 0{,}5c) - M - P(b + c + e) = 10\cdot1{,}4\cdot(1{,}8 + 0{,}5\cdot1{,}4) -$

$- 20 - 12\cdot(1{,}8 + 1{,}4 + 1{,}2) = -37{,}8$ кН·м.

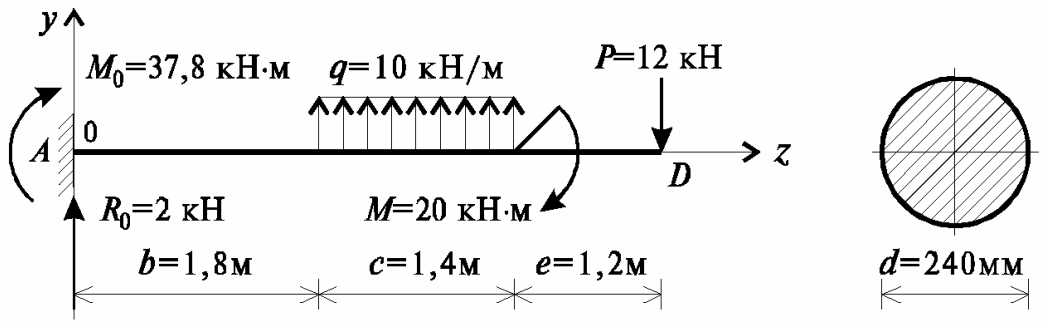


Рис. 5.25

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнения равновесия:

$\sum M_D = 0$, $M_0 + R_0 \cdot 4{,}4 + q \cdot c \cdot (0{,}5 \cdot c + e) + M = -37{,}8 - 2 \cdot 4{,}4 +$

$+ 10 \cdot 1{,}44 \cdot (0{,}5\ 1{,}4 + 1{,}2) + 20 = 46{,}6 - 46{,}6 = 0.$

Реакции найдены верно.

2. *Применение метода начальных параметров.* Используя уравнение (5.23), для нашего случая запишем:

$$EI_x y(z) = EI_x y_0 + E I_X \varphi_0 z + \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{R_0 z^3}{3!} + \frac{q(z-b)^4}{4!}\Bigg|_{z>b} -$$

$$- \frac{q(z-b-c)^4}{4!}\Bigg|_{z>b+c} + \frac{M(z-b-c)^2}{2!}\Bigg|_{z>b+c}.$$

Здесь M_0 и Q_0 – момент и реакция в заделке (т.е. в начале координат). Знак $\big|_{z>a}$ означает, что слагаемое, после которого он стоит, нужно учитывать при $z > a$ и не надо – при $z \le a$. Начальные параметры имеют значения: $y_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; $M_0 = -37{,}8$ кН·м, $R_0 =$
$= -2$ кН (знак реакций определяется по знаку перемещения вызванного этими усилиями). Тогда выражение для определения прогибов будет иметь вид:

$$EIy(z) = -\frac{37{,}8 z^2}{2} - \frac{2 z^3}{6} + \frac{10 \cdot (z-1{,}8)^4}{24}\Bigg|_{z>1{,}8} - \frac{10 \cdot (z-3{,}2)^4}{24}\Bigg|_{z>3{,}2} +$$

$$+ \frac{20(z-3{,}2)^2}{2}\Bigg|_{z>3{,}2}.$$

Соответственно выражение для определения углов поворота будет:

$$EI\ \varphi(z) = -37{,}8 \cdot z - z^2 + \frac{10 \cdot (z-1{,}8)^3}{6}\Bigg|_{z>1{,}8} - \frac{10 \cdot (z-3{,}2)^3}{6}\Bigg|_{z>3{,}2} +$$

$$+ 20 \cdot (z-3{,}2)\Big|_{z>3{,}2}.$$

С помощью этих выражений определяем y_D и φ_D:

$$EI\ y_D = -\frac{37{,}8 \cdot 4{,}4^2}{2} - \frac{2 \cdot 4{,}4^3}{6} + \frac{10 \cdot (4{,}4-1{,}8)^4}{24} - \frac{10 \cdot (4{,}4-3{,}2)^4}{24} +$$

$$+ \frac{20 \cdot (4{,}4-3{,}2)^2}{2} = -361{,}7 \text{ кН·м}^3.$$

$$EI\ \varphi_D = -37{,}8 \cdot 4{,}4 - 4{,}4^2 + \frac{10 \cdot 2{,}6^3}{6} - \frac{10 \cdot 1{,}2^3}{6} + 20 \cdot 1{,}2 = -135{,}27 \text{ кН·м}^2.$$

Жесткость сечения при $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м^2 равна:

$$EI = E\frac{\pi d^4}{64} = 2 \cdot 10^8 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 2{,}4^4 \cdot 10^{-4}}{64} = 326 \cdot 10^2 \text{ кН·м}^2.$$

Тогда, окончательно:

$$y_D = -\frac{361{,}7}{326 \cdot 10^2} = -0{,}011 \text{ ì}, \quad \varphi_D = -\frac{135{,}27}{326 \cdot 10^2} = -0{,}004 \text{ ðàä}.$$

Прогиб точки D происходит вниз, а сечение поворачивается по часовой стрелке.

Схема II.

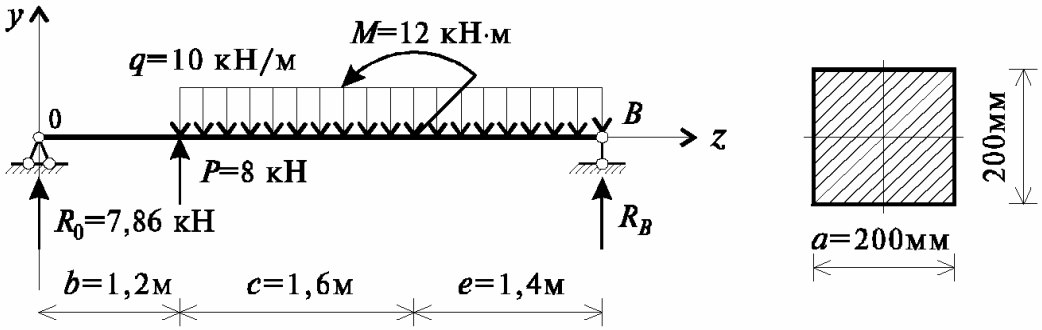


Рис. 5.26

1. *Определение опорных реакций балки* (рис. 5.26).

$\Sigma M_0 = 0, \quad R_B(b + c + e) - q \cdot (c + e) \cdot [b + 0{,}5 \cdot (c + e)] + M + Pb = 0,$

$$R_B = \frac{q\cdot(c+e)\left[b+0{,}5\cdot(c+e)\right] - M - P\cdot b}{b+c+e} =$$

$$= \frac{10\cdot 3\cdot(1{,}2+1{,}5) - 12 - 8\cdot 1{,}2}{4{,}2} = 14{,}14 \text{ кН};$$

$\Sigma M_B=0, \quad R_0(b + c + e) - 0{,}5\cdot q\cdot(c + e)^2 - M + P\cdot(c + e) = 0,$

$$R_0 = \frac{0{,}5\cdot q(c+e)(c+e) + M - P\cdot(c+e)}{b+c+e} = \frac{10\cdot 4{,}5 + 12 - 8\cdot 3}{4{,}2} = 7{,}86 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнение равновесия сил по оси y:

$\Sigma y=0; R_0+R_B+P - q(c + e) = 7{,}86 + 14{,}14 + 8 - 10\cdot 3 = 30 - 30 = 0.$

Реакции найдены верно.

2. *Применение метода начальных параметров.* Используя метод начальных параметров, для рассматриваемой балки запишем:

$$EI\ y(z) = EI\ y_0 + EI\ \varphi_0 z + \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{R_0 z^3}{3!} + \frac{P(z-b)^3}{3!}\Big|_{z>b} -$$

$$- \frac{q(z-b)^4}{4!}\Big|_{z>b} - \frac{M(z-b-c)^2}{2!}\Big|_{z>b+c}.$$

Из условий закрепления балки при $z = 0$ имеем: $y_0 = 0$; $M_0=0$.

Подставляя числовые значения, получим:

$$EI\,y(z) = EI\,\varphi_0\cdot z + \frac{7{,}86\cdot z^3}{6} + \frac{8\cdot(z-1{,}2)^3}{3}\Big|_{z>1{,}2} -$$

$$- \frac{10\cdot(z-1{,}2)^4}{24}\Big|_{z\,>\,1{,}2} - \frac{1{,}2\cdot(z-2{,}8)^2}{2}\Big|_{z\,>\,2{,}8}.$$

В данном выражении неизвестно φ_0. Из условия закрепления балки при $z = b + c + e$ имеем, что $y = 0$. Вычисляя прогиб на правом конце балки и приравнивая его к нулю, получим уравнение для определения φ_0:

$$0 = EI\varphi_0\cdot 4{,}2 + \frac{7{,}86\cdot 4{,}2^3}{6} + \frac{8\cdot(4{,}2-1{,}2)^3}{6} - \frac{10\cdot(4{,}2-1{,}2)^4}{24} - \frac{12\cdot(4{,}2-2{,}8)^2}{2}.$$

Отсюда $EI\varphi_0 = -20{,}84$ кН·м^2. Теперь выражение для определения прогибов будет иметь вид:

$$EI\,y(z) = -20{,}84\,z + \frac{7{,}86\cdot z^3}{6} + \frac{8\left(z-1{,}2\right)^3}{6}\Big|_{z>1{,}2} -$$

$$-\frac{10\cdot\left(z-1{,}2\right)^4}{24}\Big|_{z>1{,}2} - \frac{1{,}2\cdot\left(z-2{,}8\right)^2}{2}\Big|_{z>2{,}8}\cdot$$

Соответственно, выражение для определения углов поворота будет:

$$EI\,\varphi(z) = -20{,}84 + \frac{7{,}86\cdot z^2}{3} + \frac{8\left(z-1{,}2\right)^2}{2}\Big|_{z>1{,}2} -$$

$$-\frac{10\cdot\left(z-1{,}2\right)^3}{6}\Big|_{z>1{,}2} - 1{,}2\cdot\left(z-2{,}8\right)\Big|_{z>2{,}8}\cdot$$

С помощью этих выражений определяем y_D и φ_D:

$$EI\,y_D = -20{,}84\cdot 1{,}2 + \frac{7{,}86\cdot 1{,}2^3}{6} = 22{,}744\ \text{кН·м}^3.$$

$$EI\,\varphi_D = -20{,}84 + \frac{7{,}86\cdot 1{,}2^2}{2} = -15{,}18\ \text{кН·м}^2.$$

Вычисляем жесткость сечения ($E = 2\cdot 10^8$ кН/м^2):

$$EI = 2\cdot 10^8\cdot\frac{0{,}2\cdot(0{,}2)^3}{12} = 2{,}67\cdot 10^4\ \text{кН·м}^2.$$

Тогда, окончательно,

$$y_D = -\frac{22{,}7}{2{,}67\cdot 10^4} = -0.0085\ \text{ì}\ , \quad \varphi_D = -\frac{15{,}18}{2{,}67\cdot 10^4} = -0{,}00569\ \text{рад}.$$

Перемещение точки D происходит вниз, а сечение поворачивается по часовой стрелке.

5.9. Косой изгиб

Под *косым изгибом* понимается такой случай изгиба, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных осей поперечного сечения (рис. 5.27, *а*). Косой изгиб удобнее всего рассмотреть как одновременный изгиб бруса относительно главных осей x и y поперечного сечения бруса. Для этого общий вектор изгибающего момента M, действующего в поперечном сечении бруса, раскладывается на составляющие момента относительно этих осей (рис. 5.27, *б*):

$$M_x = M\cdot\sin\alpha; \quad M_y = M\cdot\cos\alpha\,. \tag{5.25}$$

Введем следующее правило знаков для моментов M_x и M_y – момент считается положительным, если в первой четверти координатной плоскости (там, где координаты x и y обе положительны) он вызывает сжимающие напряжения.

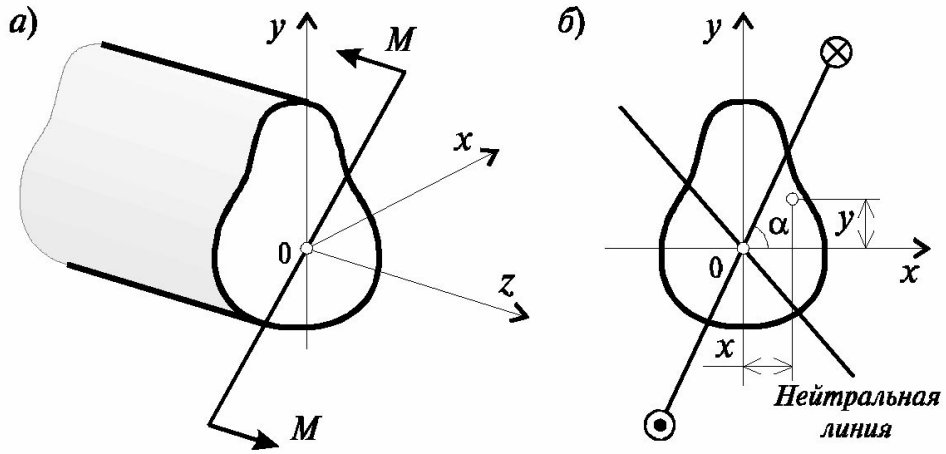


Рис. 5.27

На основании принципа независимости действия сил нормальное напряжение в произвольной точке, принадлежащей к поперечному сечению бруса и имеющей координаты x, y, определяется суммой напряжений, обусловленных моментами M_x и M_y, т.е.

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}. \qquad (5.26)$$

Подставляя выражения M_x и M_y из (5.25) в (5.26), получим:

$$\sigma(x, y) = M \left(\frac{y}{I_x} \sin\alpha + \frac{x}{I_y} \cos\alpha \right).$$

Из курса аналитической геометрии известно, что последнее выражение представляет собой уравнение плоскости. Следовательно, если в каждой точке сечения отложить по нормали вектор напряжения σ, то концы векторов образуют геометрическое место точек, принадлежащих одной плоскости, как и при поперечном изгибе.

Уравнение *нейтральной линии*, т.е. геометрического места точек, где нормальное напряжение принимает нулевые значения, найдем, полагая в (5.26) $\sigma = 0$:

$$\frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = 0.$$

Откуда определяется:

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x = -\mathrm{ctg}\alpha \frac{I_x}{I_y} x . \qquad (5.27)$$

Поскольку свободный член в (5.27) равен нулю нейтральная линия всегда проходит через начало координат. Как видно из выражения (5.26), эпюра напряжений в поперечных сечениях бруса линейна, следовательно, максимальные напряжения в сечении возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной линии. В том случае, когда сечение имеет простую форму (прямоугольник, круг), положение наиболее опасных точек легко определяется визуально. Для сечений, имеющих сложную форму, необходимо применить графический подход.

Далее покажем, что при косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна к плоскости действия изгибающего момента, как это всегда выполнялось при поперечном изгибе. Действительно угловой коэффициент K_1 следа момента (рис. 5.27, *б*) равен:

$$K_1 = \mathrm{tg}\alpha . \qquad (5.28)$$

Угловой же коэффициент нейтральной линии, как это следует из (5.27), определяется выражением:

$$\mathrm{tg}\varphi = K_2 = \frac{I_x M_y}{I_y M_x} = \frac{I_x}{I_y}\mathrm{ctg}\alpha . \qquad (5.29)$$

Так как в общем случае $I_x \neq I_y$, то условие перпендикулярности прямых, известное из аналитической геометрии, не соблюдается, поскольку $K_1 \neq -\frac{1}{K_2}$. Брус, образно выражаясь, предпочитает изгибаться не в плоскости изгибающего момента, а в некоторой другой плоскости, где жесткость на изгиб будет минимальной.

5.10. Пример расчета (задача № 11)

Стальная балка AB, расчетная схема и поперечное сечение которой показаны на рис. 5.28, *а*, (c = 0,03 м) нагружена силами P_1 и P_2. Требуется:

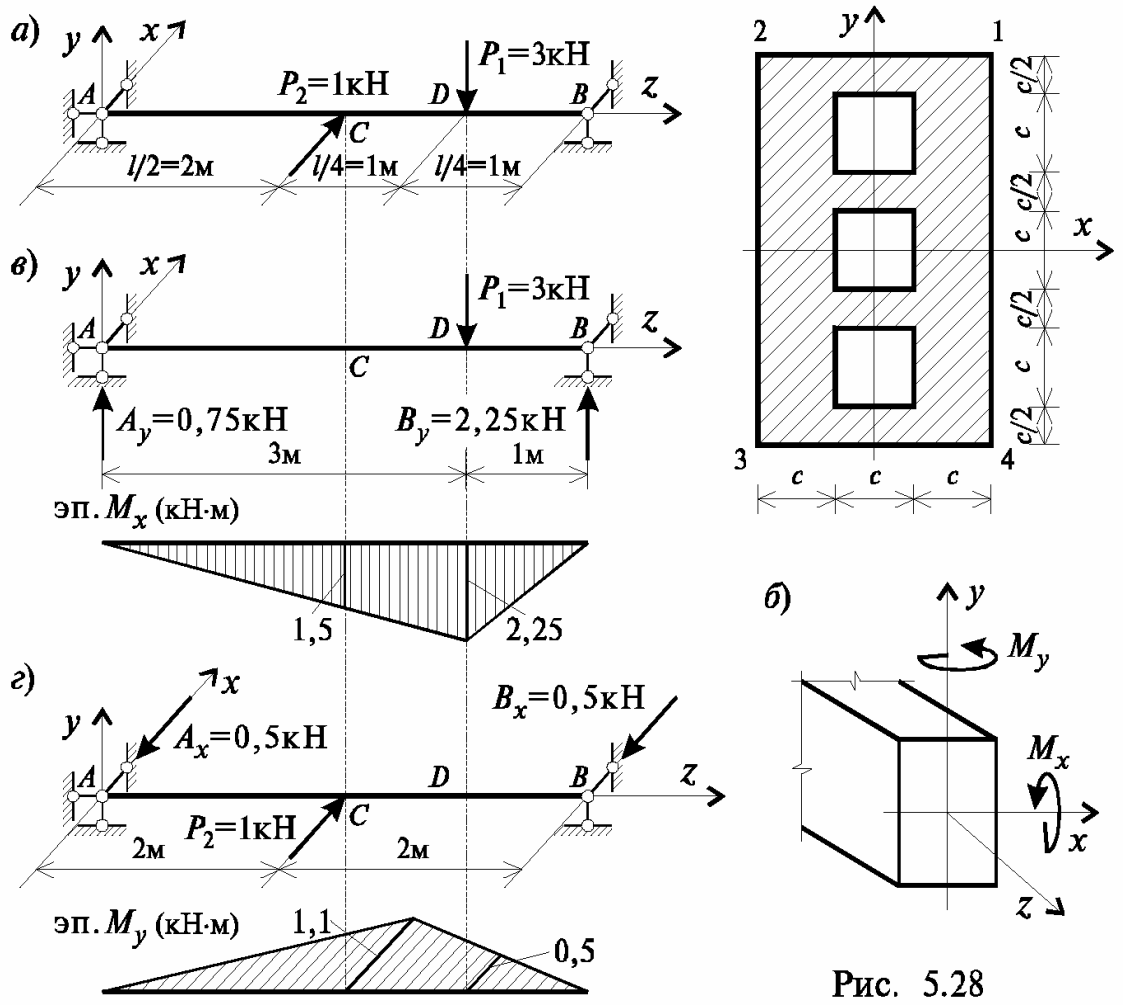


Рис. 5.28

1. Построить эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях инерции;

2. Установить по эпюрам изгибающих моментов опасное сечение балки. Найти для опасного сечения положение нулевой линии;

3. Вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие нормальные напряжения;

4. Определить значение полного прогиба в середине пролета балки и указать его направление.

Решение

1. *Построить эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях инерции.* Ввиду симметричности сечения балки относи-

тельно осей x и y (рис. 5.28, *а*), можно сделать вывод, что эти оси – главные. Для построения эпюр изгибающих моментов, используя принцип независимости действия сил, представим косой изгиб как изгиб в двух главных плоскостях инерции бруса (рис. 5.28, *б*, *г*). Определив опорные реакции, составим аналитические выражения изгибающих моментов и вычислим их значения в характерных сечениях. Построим эпюры изгибающих моментов M_x и M_y (рис. 5.28, *в*, *г*), откладывая ординаты со стороны растянутых волокон. В соответствии с принятым правилом знаков (п. 5.9), $M_x < 0$, $M_y > 0$.

2. *Установить по эпюрам изгибающих моментов опасное сечение балки. Найти для опасного сечения положение нулевой линии.* Сравнивая ординаты эпюр M_x и M_y, делаем вывод, что опасными могут быть сечения D или C, т.к. в них предположительно возникают наибольшие по величине изгибающие моменты. Для того, чтобы установить, какое из них является наиболее опасным, нужно вычислить возникающие в сечениях C и D наибольшие нормальные напряжения и сравнить их. Теоретически доказано, что если контур поперечного сечения так вписывается в прямоугольник, что четыре крайние точки сечения совпадают с углами прямоугольника, то максимальное нормальное напряжение будет в одном из углов прямоугольника и определится по формуле:

$$\sigma_{max} = \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_y}{W_y},$$

где все величины берутся по абсолютной величине. У нас именно такой случай. Осевые моменты инерции сечения вычислим по следующим зависимостям:

$$I_X = \frac{3c\cdot(5c)^3}{12} - \left[\frac{c\cdot c^3}{12} + 2\left(\frac{c\cdot c^3}{12} + c^2\cdot(2{,}5\tilde{n} - c)^2\right)\right] = \frac{106}{4}c^4 =$$

$$= 0{,}25\cdot 106\cdot(0{,}03)^4 = 2147\cdot 10^{-8}\ \text{м}^4;$$

$$I_y = \frac{5c\cdot(3c)^3}{12} - 3\frac{c\cdot c^3}{12} == \frac{132}{12}c^4 = 11\cdot c^4 = 11\cdot(0{,}03)^4 = 891\cdot 10^{-8}\ \text{м}^4.$$

Моменты сопротивления сечения W_x и W_y определятся следующим образом:

$$W_X = \frac{I_X}{2{,}5\cdot c} = \frac{2147\cdot 10^{-8}}{2{,}5\cdot 3\cdot 10^{-2}} = 286{,}3\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3;$$

$$W_y = \frac{I_y}{1{,}5 \cdot c} = \frac{891 \cdot 10^{-8}}{1{,}5 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 198 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3.$$

Таким образом, наибольшие напряжения в сечениях C и D равны:
сечение C

$$\sigma^C_{max} = \frac{1{,}5}{286{,}3 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{198 \cdot 10^{-6}} \approx 10290\ \text{кПа} = 10{,}29\ \text{МПа};$$

сечение D

$$\sigma^D_{max} = \frac{2{,}25}{286{,}3 \cdot 10^{-6}} + \frac{0{,}5}{198 \cdot 10^{-6}} \approx 10385\ \text{кПа} = 10{,}38\ \text{МПа}.$$

Сравнивая эти значения, заключаем – опасным является сечение D. Подставив значения I_x, I_y, M_x, M_y в формулу (5.29) получим:

$$\text{tg}\varphi = -\frac{2147 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5}{891 \cdot 10^{-8} \cdot (-2{,}25)} =$$

$= 0{,}535$, откуда $\varphi \approx 28{,}17°$.

Нулевая линия пройдет в тех четвертях поперечного сечения, в которых изгибающие моменты будут вызывать нормальные напряжения разных знаков. В нашем случае это будут первая и третья четверти. Поэтому, отложив угол $\varphi \approx$ $\approx 28{,}17°$ от оси x против хода часовой стрелки, проведем нулевую линию (рис. 5.29).

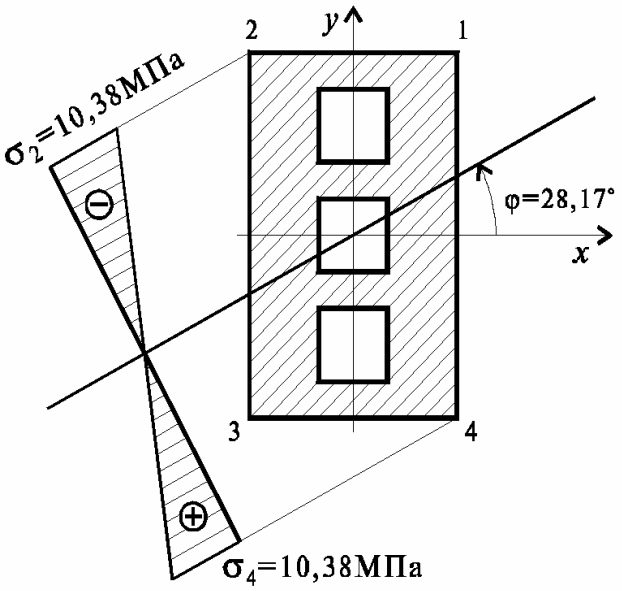


Рис. 5.29

3. *Вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие нормальные напряжения.* Вершины стрелок нормальных напряжений, определяемых по формуле (5.26) будут лежать на плоскости, пересекающей плоскость поперечного сечения по нулевой линии. При взгляде на плоскость напряжений вдоль нулевой линии мы увидим ее в виде прямой, ординаты которой показаны в виде эпюры σ на рис. 5.29. Наибольшие нормальные напряжения будут иметь место в точках 2 и 4 и различаться только знаком. Действительно, подставляя в формулу (5.26) координаты точек 2 и 4, получаем:
точка 2

$$\sigma = \frac{-2{,}25}{2147 \cdot 10^{-8}}(0{,}075) + \frac{0{,}5}{891 \cdot 10^{-8}}(-0{,}045) \approx -10385 \text{ кН/м}^2 \approx$$

$\approx -10{,}38$ МПа;

точка 4

$$\sigma = \frac{-2{,}25}{2147 \cdot 10^{-8}}(-0{,}075) + \frac{0{,}5}{891 \cdot 10^{-8}}(0{,}045) \approx -10385 \text{ кН/м}^2 \approx$$

$\approx 10{,}38$МПа.

Отложив в удобном масштабе полученные величины напряжений, построим эпюру напряжений σ (рис. 5.29).

4. *Определить значение полного прогиба в середине пролета балки и указать его направление.* Полный прогиб (перемещение центра тяжести сечения C) вычисляем по формуле:

$$f_{\tilde{n}} = \sqrt{f_{x_C}^2 + f_{y_C}^2},$$

где f_{x_C}, f_{y_C} – проекции полного прогиба на главные оси. Эти величины можно определить методом начальных параметров. Начало координат поместим на левом конце балки в точке A.

Прогиб в плоскости $x0z$. Начальные параметры:

$$f_{x_0} = 0; \quad \varphi_0 \neq 0; \quad Q_0 = A_x = -0{,}5 \text{ кН}.$$

Составим выражение прогибов $f_x(z)$ с помощью универсального уравнения упругой линии балки:

$$E I_y f_x(z) = E I_y \varphi_0 z + \frac{Q_0 z^3}{6} + \frac{P_2 \cdot (z - 0{,}5 \cdot l)^3}{6}\Big|_{z>0{,}5l}. \qquad (5.30)$$

Величину φ_0 определим из условия, что при $f_x(l) = 0$. Подставляя в выражение (5.30) $z = l = 4$ м, получим:

$$0 = E I_y \varphi_0 \cdot 4 - \frac{0{,}5 \cdot 4^3}{6} + \frac{1 \cdot (4-2)^3}{6};$$

$$\varphi_0 = \frac{32}{6 \cdot 4 \cdot E I_y} - \frac{8}{6 \cdot 4 \cdot E I_y} = \frac{1}{E I_y}.$$

Окончательно выражение прогибов $f_x(z)$ будет иметь вид:

$$E I_y f_x(z) = z + \frac{Q_0 \cdot z^3}{6} + \frac{P_2 \cdot (z - 0{,}5 \cdot l)^3}{6}\Big|_{z>0{,}5l}. \qquad (5.31)$$

Для определения прогиба в середине пролета подставим $z = 0{,}5 \cdot l = 2$ м в выражение (5.31):

$$E I_y f_{x_C} = 2 - \frac{0{,}5 \cdot 2^3}{6} = 1{,}33 \text{ кН·м}^3.$$

Учитывая, что $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м^2 и $I_y = 891 \cdot 10^{-8}$ м^4, получаем:

$$f_{x_C} = \frac{1{,}33}{E I_y} = \frac{1{,}33}{2 \cdot 10^8 \cdot 891 \cdot 10^{-8}} \approx 0{,}000745 \text{ м} = 7{,}45 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Прогиб в плоскости $y0z$. Начальные параметры:

$$f_{y_0} = 0; \quad \varphi_0 \neq 0; \quad Q_0 = A_y = 0{,}75 \text{ кН}.$$

Выражение для прогибов $f_y(z)$ получаем с помощью метода начальных параметров:

$$E I_x f_y(z) = E I_x \varphi_0 z + \frac{Q_0 z^3}{6} - \frac{P_1 \cdot (z - 0{,}75 \cdot l)^3}{6}\Big|_{z > 0{,}75l}. \qquad (5.32)$$

Подставляя $z = l = 4$ м в выражение (5.32) и учитывая, что в т. B прогиб равен нулю, получаем уравнение для определения φ_0:

$$E I_x \varphi_0 \cdot 4 + \frac{0{,}75 \cdot 4^3}{6} - \frac{3 \cdot (4-3)^3}{6} = 0,$$

откуда

$$\varphi_0 = -\frac{48}{6 \cdot 4 \cdot E I_x} + \frac{3}{6 \cdot 4 \cdot E I_x} = -\frac{15}{8 E I_x} = -\frac{1{,}875}{E I_x}.$$

Окончательно выражение для прогибов $f_y(z)$ будет иметь вид:

$$E I_x f_y(z) = 1{,}875 \cdot z + \frac{0{,}75 \cdot z^3}{6} - \frac{3(z-3)^3}{6}\Big|_{z>3i}. \qquad (5.33)$$

Для определения прогиба в середине пролета подставим $z = 0{,}5l = 2$ м в выражение (5.33):

$$E I_x f_{y_C} = -1{,}875 \cdot 2 + \frac{0{,}75 \cdot 2^3}{6} = -3{,}75 + 1 = 2{,}75 \text{ кН·м}^3;$$

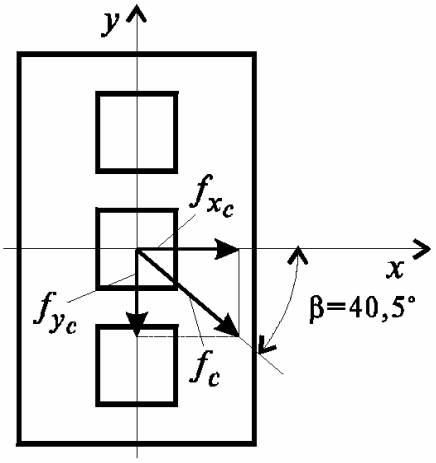
$$f_{y_C} = \frac{2{,}75}{2 \cdot 10^8 \cdot 2147 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0064 \text{ м} = -0{,}64 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Определим величину модуля вектора полного прогиба

$$f_C = \sqrt{\left(7{,}45\cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(-6{,}4\cdot 10^{-4}\right)^2} \approx 9{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Направление вектора полного прогиба показано на рис. 5.30. При этом, угол β определим по формуле:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f_{yC}}{f_{xC}} = \frac{-6{,}4\cdot 10^{-4}}{7{,}45\cdot 10^{-4}} \approx -0{,}853; \quad \beta = -40{,}5°.$$



f_{xc}=7,5·10^{-4}м

f_{yc}=6,4·10^{-4}м

f_c=9,8·10^{-4}м

Рис. 5.30

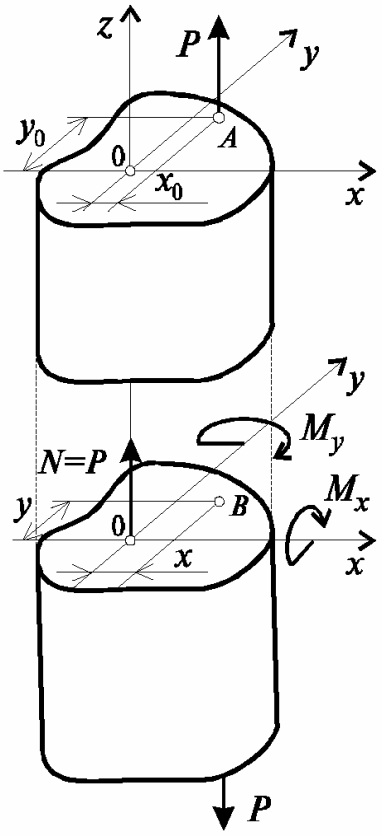


Рис. 5.31

5.11. Внецентренное растяжение и сжатие

Внецентренное сжатие и растяжение как и косой изгиб относится к сложному виду сопротивления бруса. При внецентренном растяжении (сжатии) равнодействующая внешних сил не совпадает с осью бруса, как при простом растяжении, а смещена относительно оси z и параллельна ей (рис. 5.31).

Пусть в точке $A(x_A, y_A)$ приложена равнодействующая внешних сил P. Тогда относительно главных осей x и y равнодействующая сила P вызывает моменты:

$$M_x = P\cdot y_A; \quad M_y = P\cdot x_A. \qquad (5.34)$$

Таким образом, при внецентренном растяжении (сжатии) в поперечном сечении бруса возникает нормальная сила $N_z=P$ и изгибающие моменты M_x и M_y. Следовательно, на основании принципа независимости действия сил в произвольной точке B с координатами x, y нормальное напряжение σ определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P\,y_A}{I_x}\,y + \frac{P\,x_A}{I_y}\,x\,. \qquad (5.35)$$

Используя выражения для квадратов радиусов инерции сечения:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{F}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{F},$$

можно (5.35) преобразовать к следующему виду:

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_A \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_A \cdot x}{i_y^2}\right).$$

Уравнение нейтральной линии получим, приравнивая нулю выражение для нормальных напряжений σ:

$$\frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_A \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_A \cdot x}{i_y^2}\right) = 0. \qquad (5.36)$$

Из (5.36) можно легко определить отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях. Если приравнять $x = 0$, то получим:

$$1 + \frac{y_A \cdot a_y}{i_x^2} = 0.$$

где a_y – координата точки пересечения нейтральной линии и оси y.

Решая это уравнение, получим:

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_A}.$$

Аналогичным образом можно определить координату пересечения нейтральной линии и оси x:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_A}.$$

Можно решить и обратную задачу – определить координаты приложения силы P при заданных отрезках a_x и a_y. Опуская простейшие выкладки, приведем окончательные выражения:

$$x_A = -\frac{i_y^2}{a_x}; \quad y_A = -\frac{i_x^2}{a_y}.$$

Наибольшее напряжения, как и при косом изгибе, имеют место в точке наиболее удаленной от нейтральной линии. При внецентренном растяжении (сжатии) в отличие от косого изгиба нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения. Расстояние от начала координат $x0y$ до прямой $ay + bx + c = 0$, как известно из курса аналитической геометрии, определяется по формуле:

$$0C = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Следовательно, в данном случае (рис. 5.32):

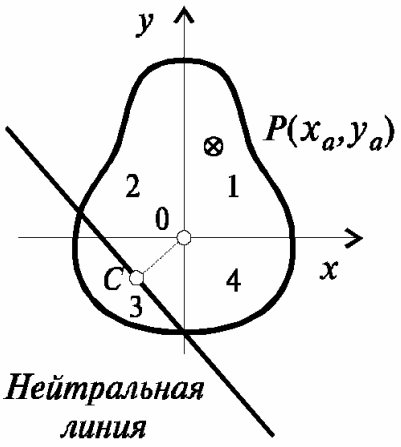


Рис. 5.32

$$0C = \frac{1}{F\sqrt{\left(\frac{y_A}{I_x}\right)^2 + \left(\frac{x_A}{I_y}\right)^2}}. \qquad (5.37)$$

Тогда, как это следует из (5.37), по мере того, как точка приложения силы приближается к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него.

При $x_A \to 0$, $y_A \to 0$, получаем $0C \to \infty$. Сила в данном случае становится центральной, а напряжения в этом случае распределены по сечению равномерно. В тех случаях, когда нейтральная линия пересекает сечение, в нем возникают напряжения разного знака. В противном случае в сечении во всех точках возникают напряжения одного знака. Следовательно, в окрестности центра тяжести всегда существует некая область, называемая *ядром сечения*, такая, что если точка приложения силы P расположена в пределах указанной области, то в поперечном сечении возникают напряжения лишь одного знака. При этом если сила приложена по границе ядра сечения, то нейтральная линия касается контура сечения.

Данный факт имеет большое значение при проектировании колонн из хрупких материалов, (например, бетона, кирпича и т.д.), которые, как правило, имеют существенно меньшую прочность на растяжение, нежели на сжатие. Поэтому при проектировании таких конструкций необходимо предусмотреть, чтобы равнодействующая сжимающая сила была расположена в пределах ядра сечения.

5.12. Пример расчета (задача № 12)

На брус заданного поперечного сечения (a = 1,05 м, b = 1 м, c = 0,15 м, d = 0,2 м) в точке D верхнего торца действует продольная сила P = 150 кН (рис. 5.33). Требуется:

1. Найти положение нулевой линии;
2. Определить наибольшие (растягивающие и сжимающие) напряжения;
3. Построить ядро сечения.

Решение

1. *Найти положение нулевой линии.*

1.1. *Нахождение положения главных центральных осей.* Так как поперечное сечение бруса (рис. 5.33) имеет две оси симметрии x_C и y_C, то они и будут главными центральными осями инерции. Площадь поперечного сечения бруса равна:

$$F = 2\left(2cb - \frac{\pi d^2}{4}\right) + \left[3c(b - 4c) - \frac{\pi d^2}{4}\right] =$$

$$= 2\left(2 \cdot 0{,}15 \cdot 1 - \frac{3{,}14 \cdot 0{,}2^2}{4}\right) + \left(3 \cdot 0{,}15(1 - 4 \cdot 0{,}15) - \frac{3{,}14 \cdot 0{,}2^2}{4}\right) = 0{,}686\ \text{м}^2.$$

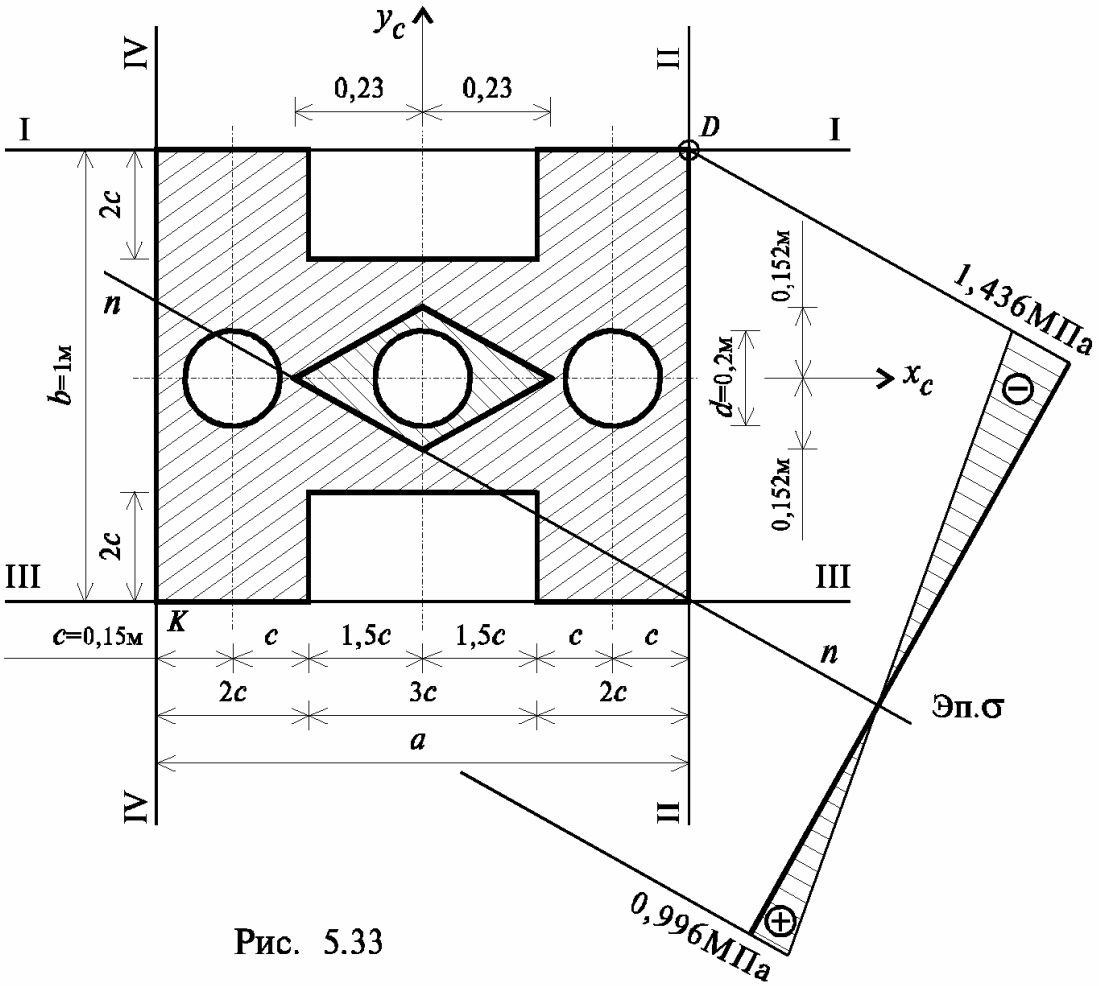


Рис. 5.33

1.2. *Определение главных центральных моментов инерции и главных радиусов инерции.* Моменты инерции определяем по формулам:

$$I_{x_C} = 2I^{\text{I}}_{x_C} + I^{\text{II}}_{x_C} = \left(2\frac{2cb^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64}\right) + \left[\frac{3c\cdot(b-4c)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}\right] =$$

$$= 2\left(\frac{2\cdot 0{,}15\cdot 1^3}{12} - \frac{3{,}14\cdot 0{,}2^4}{64}\right) + \frac{3\cdot 0{,}15\cdot(1-4\cdot 0{,}15)^3}{12} - \frac{3{,}14\cdot 0{,}2^4}{64} =$$

$$= 521{,}6\cdot 10^{-4}\ \text{м};$$

$$I_{y_C} = 2I^{\text{I}}_{y_C} + I^{\text{II}}_{y_C} = 2\left\{\left[\frac{b(2c)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}\right] + \left(b\cdot 2c - \frac{\pi d^2}{4}\right)(2{,}5c)^2\right\} +$$

$$+\left[\frac{(b-4c)(3c)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}\right] = 2\left\{\left[\frac{1\cdot(2\cdot 0{,}15)^3}{12} - \frac{3{,}14\cdot 0{,}2^4}{64}\right] +\right.$$

$$+\left(1\cdot 2\cdot 0{,}15-\frac{3{,}14\cdot 0{,}2^2}{4}\right)\cdot(2{,}5\cdot 0{,}15)^2\Bigg\}+\Bigg[\frac{(1-4\cdot 0{,}15)(3\cdot 0{,}15)^3}{12}-$$

$$-\frac{3{,}14\cdot 0{,}2^4}{64}\Bigg]=828{,}5\cdot 10^{-4}\ \text{м}^4.$$

Вычисляем квадраты главных радиусов инерции:

$$i^2_{x_{\tilde{N}}}=\frac{I_{x_{\tilde{N}}}}{F}=\frac{521{,}6\cdot 10^{-4}}{0{,}686}=7{,}606\cdot 10^{-2}\ \text{м}^2;$$

$$i^2_{y_{\tilde{N}}}=\frac{I_{y_{\tilde{N}}}}{F}=\frac{828{,}5\cdot 10^{-4}}{0{,}686}=12{,}08\cdot 10^{-2}\ \text{м}^2.$$

1.3. *Определение положения нулевой линии.* Отрезки, отсекаемые нулевой линией на главных центральных осях инерции, определяем по формулам:

$$a_{x_{\tilde{N}}}=-\frac{i^2_{y_{\tilde{N}}}}{x_P}=-\frac{12{,}08\cdot 10^{-2}}{52{,}5\cdot 10^{-2}}=-0{,}23\ \text{м};$$

$$a_{y_{\tilde{N}}}=-\frac{i^2_{x_{\tilde{N}}}}{y_P}=-\frac{12{,}08\cdot 10^{-2}}{50\cdot 10^{-2}}=-0{,}152\ \text{м},$$

где $x_P = 0{,}525$ м и $y_P = 0{,}5$ м – координаты точки приложения силы P (точка D на рис. 5.33). Отложив отрезки $a_{x_{\tilde{N}}}$ и $a_{y_{\tilde{N}}}$, соответственно, на осях x_C и y_C, и проведя через их концы прямую, получим нулевую линию сечения, т.е. геометрическое место точек, где нормальные напряжения равны нулю ($\sigma = 0$). На рис. 5.33 эта линия обозначена n–n.

2. *Определить наибольшие (растягивающие и сжимающие) напряжения.* Точка D, координаты которой $x_D =$ $= 0{,}525$ м и $y_D = 0{,}5$ м, наиболее удалена от нулевой линии в сжатой зоне сечения, поэтому наибольшие сжимающие напряжения возникают в ней и определяются по формуле:

$$\sigma_D=-\frac{P}{F}\left[1+\frac{y_P\,y_D}{i^2_{x_C}}+\frac{x_P\,x_D}{i^2_{y_C}}\right]=$$

$$=-\frac{150}{0{,}686}\left[1+\frac{(50\cdot 10^{-2})^2}{7{,}606\cdot 10^{-2}}+\frac{(52{,}5\cdot 10^{-2})^2}{12{,}08\cdot 10^{-2}}\right]=-1{,}436\ \text{кН/м}^2.$$

Наибольшие растягивающие напряжения возникают в точке K, имеющей координаты $x_K = -0{,}525$ м и $y_K = -0{,}5$ м:

$$\sigma_K = -\frac{P}{F}\left[1 + \frac{y_P\, y_K}{i_{x_C}^2} + \frac{x_P\, x_K}{i_{y_C}^2}\right] =$$

$$= -\frac{150}{0{,}686}\left[1 - \frac{(50\cdot 10^{-2})^2 \cdot}{7{,}06\cdot 10^{-2}} - \frac{(52{,}5\cdot 10^{-2})^2}{12{,}08\cdot 10^{-2}}\right] = 0{,}996 \text{ кН/м}^2.$$

По полученным значениям σ_D и σ_K строим эпюру нормальных напряжений (рис. 5.33).

3. *Построить ядро сечения.* Для построения ядра симметричного сечения рассмотрим два положения касательной к контуру сечения I–I и II–II (рис. 5.33). Отрезки, отсекаемые касательной I–I на осях координат, равны:

$$a_{x_{\tilde{N}}} = \infty; \qquad a_{y_{\tilde{N}}} = 0{,}5 \text{ м}.$$

Координаты граничной точки I ядра сечения определяются по формулам:

$$x_{P_1} = \frac{i_{y_{\tilde{N}}}^2}{a_{x_{\tilde{N}}}} = -\frac{12{,}08\cdot 10^{-2}}{\infty} = 0; \quad y_{P_1} = \frac{i_{x_{\tilde{N}}}^2}{a_{y_{\tilde{N}}}} = -\frac{7{,}606\cdot 10^{-2}}{0{,}5} = -0{,}152 \text{ м}.$$

Касательная II–II отсекает отрезки $a_{x_{\tilde{N}}} = 0{,}525$ м, $a_{y_{\tilde{N}}} = \infty$.

Соответственно, координаты граничной точки 2:

$$x_{P_2} = \frac{i_{y_{\tilde{N}}}^2}{a_{x_{\tilde{N}}}} = -\frac{12{,}08\cdot 10^{-2}}{52{,}5\cdot 10^{-2}} = -0{,}23 \text{ ì}; \quad y_{P_2} = \frac{i_{x_{\tilde{N}}}^2}{a_{y_{\tilde{N}}}} = -\frac{7{,}606\cdot 10^{-2}}{\infty} = 0.$$

Координаты граничных точек второй половины ядра сечения можно не определять, т.к. сечение бруса симметричное. Учитывая это, для касательных III–III, IV–IV координаты граничных точек 3 и 4 будут:

$$x_{P_3} = 0; \quad y_{P_3} = 0{,}152 \text{ м}; \qquad x_{P_4} = 0{,}23 \text{ ì}; \quad y_{P_4} = 0.$$

Соединив последовательно точки 1, 2, 3 и 4 прямыми, получим ядро рассматриваемого сечения (рис. 5.33).

5.13. Теории прочности

Как показывают экспериментальные исследования, прочность материалов существенно зависит от вида напряженного состояния. В общем случае нагруженного тела напряженное состояние в какой–либо точке вполне может быть определено величиной напряжений в трех координатных плоскостях, проходящих через эту точку. При произвольном выборе положения координатных плоскостей, в каждой из них, вообще говоря, имеются и нормальные, и касательные напряжения. Для них вводятся соответствующие обозначения в плоскости *xy*: σ_{zz}, τ_{zx}, τ_{zy}; в плоскости *xz*: σ_{yy}, τ_{yx}, τ_{yz}; в плоскости *yz*: σ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}. Здесь первый индекс показывает ориентацию площадки, в которой действует напряжение, т.е. какой из координатных осей она перпендикулярна. Второй индекс указывает направление напряжения по координатной оси.

В каждой точке тела существуют три взаимно перпендикулярные плоскости, свободные от касательных напряжений, носящие название *главных площадок*. Нормальные напряжения в этих площадках называются главными напряжениями и обозначаются σ_1, σ_2, σ_3. При этом всегда $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Заметим, что более подробно вопросы теории напряженного состояния в точке обсуждены в десятом разделе настоящей книги, и по данному вопросу имеется обширная литература.

Напряженные состояния разделяются на три группы. Напряженное состояние называется: а) *объемным* или *трехосным*, если все главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 не равны нулю; б) *плоским* или *двухосным*, если одно из трех главных напряжений равно нулю; в) *одномерным* или *одноосным*, если два из трех главных напряжений равны нулю.

Основной задачей теории прочности является установление критерия прочности, позволяющего сравнить между собой опасность различных напряженных состояний материала.

Выбранный критерий прочности должен быть обоснован на основе экспериментальных данных путем проведения испытаний различных материалов в зависимости от вида напряженного состояния, как функция от соотношений между значениями главных напряжений.

Заметим, что, так как в настоящее время строгой единой теории прочности материалов, в зависимости от вида напряженного состояния, не существует, поэтому при выполнении практических расчетов применяются упрощенные критерии.

Как отмечалось в п. 2.8, наиболее распространенным и наглядным критерием проверки конструкций на прочность, при простейших случаях напряженного состояния (сжатие–растяжение, кручение, чистый изгиб), является выполнение условия:

$$\sigma_{max} \le [\sigma], \qquad (5.38)$$

где σ_{max} – максимальное расчетное значение напряжения, возникающее в наиболее опасной точке конструкции; $[\sigma]$ – допускаемое значение напряжения для материала конструкции.

В настоящее время при выполнении расчетов конструкций на прочность, при произвольных напряженных состояниях, широко используются три теории прочности.

Согласно *первой теории* критерием прочности является ограничение главного максимального напряжения:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \le [\sigma], \qquad (5.39)$$

где $[\sigma]$ – предельное напряжение, полученное из опытов на одноосное растяжение.

Основным недостатком этой теории является не учет двух других главных напряжений.

В основу *второй теории прочности* заложена гипотеза о том, что критерием оценки работы конструкции является ограничение наибольшего удлинения. В формулировке данного положения через главные напряжения (σ_1 и σ_2) это условие для плоского напряженного состояния записывается следующим образом:

$$\sigma_1 - \mu\sigma_2 \le [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – напряжение, при котором было вызвано предельное удлинение образца в опытах на одноосное растяжение; μ – коэффициент бокового расширения.

При объемном напряженном состоянии вторая теория прочности записывается в виде:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 - \sigma_3) \le [\sigma], \qquad (5.40)$$

Экспериментальная проверка не всегда подтверждает правильность теории прочности наибольших линейных деформаций при простых нагружениях, т.е. при чистом растяжении или чистом сдвиге. Однако до настоящего времени эта теория имела широкое применение при выполнении инженерных расчетов..

В основу *третьей теории прочности* заложена гипотеза о том, что причиной разрушения материалов являются сдвиговые деформации, происходящие на площадках максимальных касательных напряжений, т.е.

$$\tau_{max} < [\tau], \qquad (5.41)$$

где τ_{max} – расчетное максимальное касательное напряжение, возникающее в опасной точке нагруженного тела; $[\tau]$ – предельное значение касательного напряжения, полученное из опытов.

Для плоского напряженного состояния по третьей теории условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_1 - \sigma_2 < [\sigma]. \qquad (5.42)$$

В случае поперечного изгиба балки ($\sigma_2 = 0$), если выразить главные напряжения σ_1 и σ_3 через σ и τ, то условие прочности (5.42) преобразуется в виде:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le R, \qquad (5.43)$$

где R – расчетное сопротивление материала балки при изгибе.

5.14. Пример расчета (задача № 13)

Дан пространственный консольный брус с ломаным очертанием осевой линии, нагруженный сосредоточенной силой $P = 1$ кН и равномерно распределенной нагрузкой $q = 2$ кН/м. На рис. 5.34, *а* этот брус показан в аксонометрии в соответствии с прямоугольной системой координат xyz. Вертикальный элемент бруса имеет поперечное сечение в виде круга диаметром $d = 0{,}06$ м (рис. 5.34, *в*), горизонтальные элементы бруса имеют поперечные сечения в виде прямоугольника (рис. 5.34, *б*). Ширина сечения $b = d = 0{,}06$ м, а высота сечения $c = 0{,}5\,d = 0{,}03$ м. Ориентация главных осей поперечных сечений на каждом участке показана на рис. 5.34, *г*.

Требуется:

1. Построить в аксонометрии эпюры M_x, M_y, M_z, N_z, Q_x, Q_y;
2. Указать вид сопротивления для каждого участка бруса;
3. Определить максимальные напряжения в опасном сечении каждого участка от внутренних усилий N_z, M_x, M_y и M_z (касательными напряжениями от Q_x и Q_y можно пренебречь);
4. Проверить прочность при расчетном сопротивлении R = = 180 МПа.

Решение

1. *Построить в аксонометрии эпюры* M_x, M_y, M_z, N_z, Q_x, Q_y. Заметим, что так как заданная система пространственная, при произвольном характере нагружения, в опорном сечении, где установлена заделка, возникает шесть опорных реакций (три опорные силы и три момента). Для определения опорных реакций, в данном случае, можем применить шесть уравнений равновесия статики. Так как число независимых уравнений равновесия равно числу опорных реакций, то можно сделать вывод, что рассматриваемая система в виде ломаного бруса, с заделанным одним концом, является статически определимой. Поэтому рассматриваемая система разрешима по методу сечений. Далее, учитывая особенности конструкции, определение величин внутренних усилий можно осуществить без предварительного вычисления величин опорных реакций.

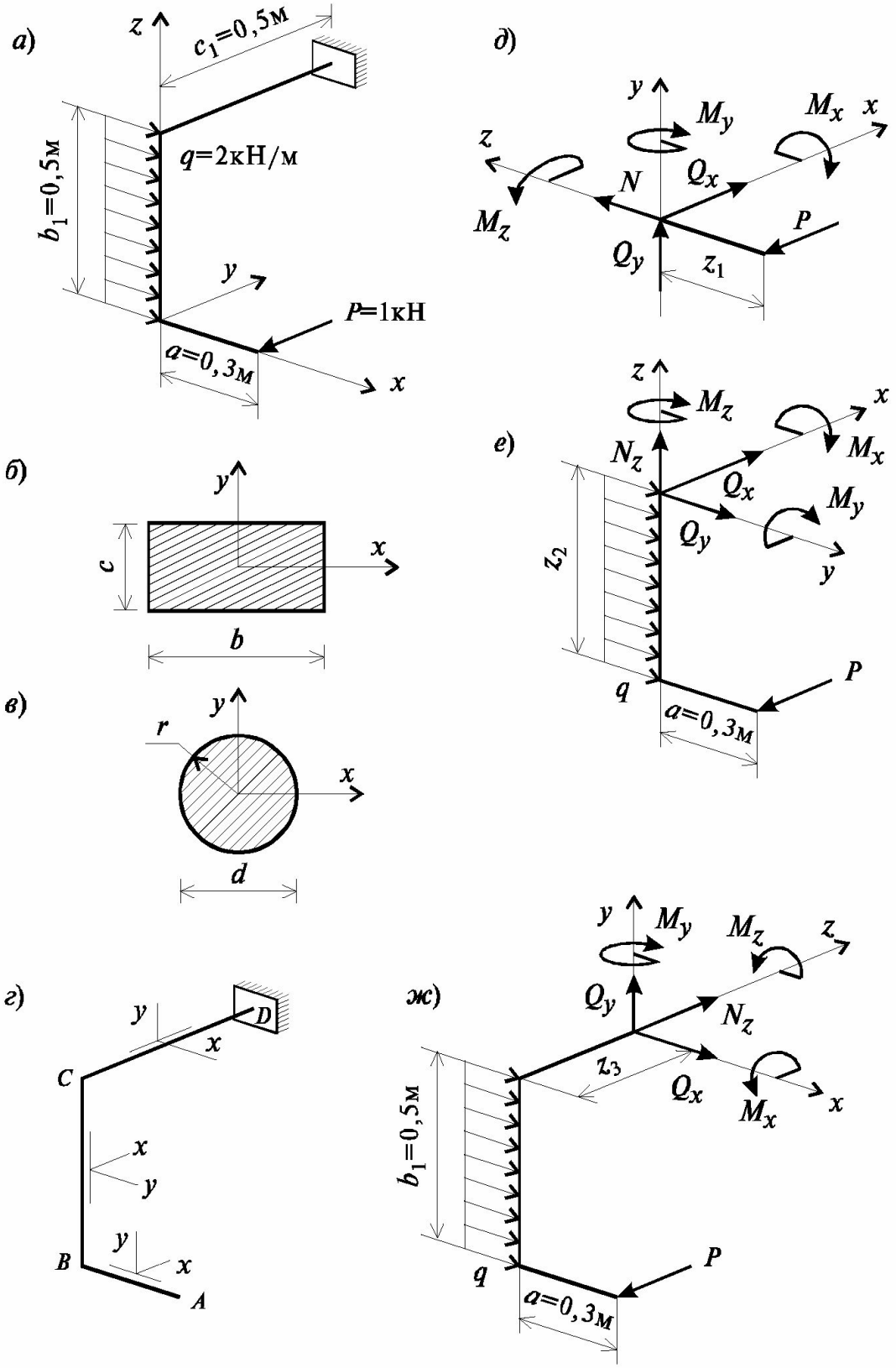

а)
z
c_1=0,5м
q=2кН/м
b_1=0,5м
y
P=1кН
a=0,3м
x
б)
y
x
c
b
в)
y
r
x
d
г)
y
D
x
C
x
y
y
B
x
A
д)
y
M_y
M_x
x
z
N
Q_x
M_z
P
Q_y
z_1
е)
z
M_z
x
N_z
M_x
Q_x
M_y
Q_y
y
z_2
q
P
a=0,3м
ж)
y
M_y
M_z
z
Q_y
N_z
z_3
Q_x
M_x
x
b_1=0,5м
q
P
a=0,3м

Рис. 5.34

Брус имеет три участка AB, BC и CD (рис. 5.34, *г*). При этом, после рассечения бруса на две части будем рассматривать равновесие оставшейся части, не связанной с заделкой (чтобы избежать предварительного определения опорных реакций в заделке бруса). Внутренние силовые факторы можно рассматривать как реакции, действующие в сечении на оставшуюся часть со стороны отброшенной части, поэтому процесс определения шести величин M_x , M_y , M_z, N_z, Q_x, Q_y может быть сведен к известному процессу определения опорных реакций.

Следует отметить, что при определении опорных реакций их направление можно указать произвольно, а затем из решения уравнения равновесия будет ясно, как в действительности действует реакция: если результат положительный, то реакция действует именно так, как мы предварительно указали, если отрицательный – то наоборот.

При построении эпюр будем руководствоваться следующими правилами:

– нормальная сила N_z считается положительной, если она вызывает растяжение бруса;

– крутящий момент M_z считается положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он виден вращающим брус по ходу часовой стрелки;

– поперечная сила Q_x считается положительной, если при взгляде со стороны положительного направления оси y она стремится вращать оставшуюся часть бруса по ходу часовой стрелки относительно ближайшей точки на оси бруса (для поперечной силы Q_y – то же, по отношению к x);

– ординаты эпюр Q_x и Q_y следует откладывать перпендикулярно оси бруса в плоскости действия этих сил и указывать знак;

– ординаты эпюр M_x и M_y будем откладывать перпендикулярно оси бруса со стороны растянутого волокна.

Участок AB ($0 \le z_1 \le a$).

Оставшаяся часть изображена на рис. 5.34, *д*. В центре сечения помещаем систему координат. Оси x и y совпадают с направлением главных осей инерции сечения, показанных на рис. 5.34, *г*. Координата z_1 увеличивается от точки A к точке B. Для определения N покажем ее в направлении от сечения, т.е. растягивающей, и составим уравнения равновесия: $\Sigma z = 0$; $N_z = 0$. Из $\sum M_x = 0$ следует $M_x = 0$ (рис. 5.35, *а*).

Для определения M_z покажем его так, чтобы при взгляде на сечение он был виден вращающим брус по часовой стрелке, и составим уравнения равновесия (рис. 5.35,б):

$$\Sigma m_z = 0;\ M_z = 0.$$

Для определения Q_x и Q_y покажем их положительными в соответствии с выбранным правилом знаков и составим уравнения равновесия:

$$\Sigma x = 0, \qquad Q_x - P = 0, \qquad Q_x = P = 1 \text{ кН};$$

$$\Sigma y = 0, \qquad Q_y = 0.$$

Эпюра Q_x представляет собой прямоугольник (рис. 5.35, *в*) с ординатой, равной 1, лежащей в плоскости действия этого силового фактора. Составляем уравнение равновесия:

$$\Sigma M_y = 0, \qquad M_y + P \cdot z = 0, \qquad M_y = -P \cdot z.$$

Ординаты эпюры M_y линейно зависят от z:

$$z = 0, \; M_y = 0; \qquad z = a, \; M_y = -P \cdot a = -1 \cdot 0{,}3 = -0{,}3 \text{ кН·м}.$$

Знак минус указывает на то, что в действительности изгибающий момент M_y вызывает растягивающее напряжение в правой части поперечного сечения, поэтому ординаты эпюры M_y откладываются в правую сторону.

Участок BC $(0 \le z_2 \le b)$.

Оставшаяся часть изображена на рис. 5.34, *е*. В центре сечения помещаем систему координат. Оси x и y совпадают с направлением главных осей инерции сечения, показанных на рис. 5.34, *г*. Координата z_2 увеличивается от точки B к точке C. Процесс определения внутренних силовых факторов на этом участке такой же, как и на предыдущем. Важно отметить, что на оставшейся части соответствующий внутренний силовой фактор удобно показывать непосредственно перед его определением – для того, чтобы не затемнить чертеж. При этом N_z, M_z, Q_x, Q_y показывают в положительном направлении в соответствии с принятым правилом знаков, а изгибающие моменты M_x и M_y – наугад из двух возможных направлений (рис. 5.34, *е*):

$$\Sigma z = 0, \; N_z = 0; \qquad \Sigma M_z = 0, \; M_z + P \cdot a = 0, \; M_z = -P \cdot a = -0{,}3 \text{ кН·м}.$$

Плоскость прямоугольной эпюры произвольна (рис. 5.35, *б*).

$$\Sigma x = 0, \quad Q_x - P = 0, \; Q_x = P = 1 \text{ кН}.$$

Эпюра Q_x в виде прямоугольника показана на рис. 5.35, *в*.

$$\Sigma y = 0, \qquad Q_y - qz = 0; \; Q_y = qz \; ;$$

$$z = 0, \quad Q_y = 0; \quad z = 0{,}6 \text{ м}, \quad Q_y = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2 \text{ кН}.$$

Эпюра Q_y в виде треугольника показана на рис. 5.35 *е*.

$$\sum \grave{I}_{\ X} = 0, \quad M_X + \frac{q z^2}{2} = 0, \quad M_X = -\frac{q z^2}{2} = -z^2.$$

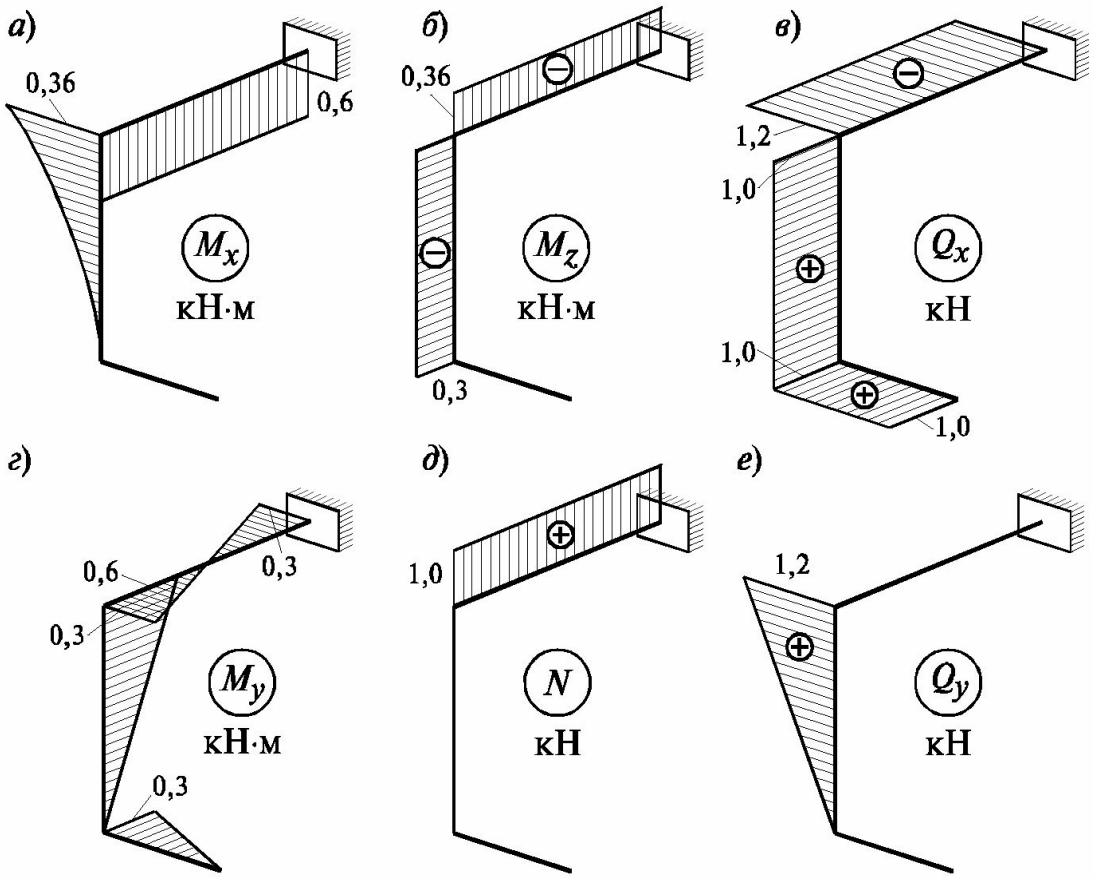


Рис. 5.35

Ординаты M_x изменяются по закону квадратной параболы.

$z = 0, \quad M_x = 0; \quad z = 0{,}6$ м, $\quad M_x = -0{,}36$ кН·м;

$\frac{dM_X}{dz} = 2z = 0$; $z = 0$– точка экстремума в эпюре M_x в сечении $z = 0$.

Знак минус указывает, что растягивающие напряжения возникают не в ближней части сечения, а в дальней. При этом наблюдатель ориентирован относительно глобальной системы координат xy, показанной на рис. 5.34, *а* следующим образом: ось x направлена к наблюдателю, поэтому ординаты M_x откладываем в дальнюю сторону (рис. 5.35, *а*).

$\Sigma M_y = 0, \quad M_y + Pz = 0, \quad M_y = -Pz;$

$z = 0, \quad M_y = 0; \quad z = 0{,}6$ м, $\quad M_y = -0{,}6$ кН·м.

Эпюра M_y – треугольная. Растягивающие напряжения возникают в правой части сечения – ординаты откладываем вправо.

Участок CD $(0 \le z_3 \le c_1)$.

Оставшаяся часть изображена на рис. 5.34, *ж*. В центре сечения помещаем систему координат. Оси x и y совпадают с направлением главных осей инерции сечения, показанных на рис. 5.34, *г*. Координаты z_3 увеличиваются от точки C к точке D. Повторяя все рассуждения, проведенные на предыдущих участках, будем иметь следующее (рис. 5.34, *д*):

$$\Sigma z = 0, \quad N - P = 0, \quad N = P = 1 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_z = 0, \quad M_z + \frac{q b_1^2}{2} = 0, \quad M_z = -\frac{q b_1^2}{2} = -0{,}36 \text{ кН·м}.$$

Эпюра M_z – в виде прямоугольника. Плоскость изображения произвольная:

$$\Sigma x = 0, \quad Q_x + q b_1 = 0, \quad Q_x = -q b_1 = -2 \cdot 0{,}6 = -1{,}2 \text{ кН}.$$

Эпюра Q_x – в виде прямоугольника в плоскости действия Q_x.

$$\Sigma y = 0, \quad Q_y = 0; \ \Sigma M_x = 0, \ M_x + P b_1 = 0, \ M_x = -P b_1 = -0{,}6 \text{ кН·м}.$$

Эпюра M_x – в виде прямоугольника. Растягивающие напряжения при изгибе возникают в нижней части поперечного сечения –ординаты эпюры откладываем вниз.

$$\Sigma M_y = 0, \ M_y + P a - q b_1 z_3 = 0, \ M_y = q b_1 z_3 - P a = 1{,}2 z_3 - 0{,}3.$$

Величина M_y определяется как линейная функция от z_3. При $z_3 = 0$; $M_y = -0{,}3$ кН·м. В этом сечении растягивающие напряжения возникают не в дальней части сечений, а в ближней – ординату откладываем к наблюдателю.

При $z_3 = 0{,}5$м $\qquad M_y = 1{,}2 \cdot 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$ кН·м.

В этом сечении M_y откладываем от наблюдателя (рис. 5.35, *г*).

2. *Установить вид сопротивления для каждого участка бруса*. По эпюрам устанавливаем вид сопротивления на каждом участке бруса. На участке AB возникают изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_x, что свидетельствует о наличии поперечного изгиба. На участке BC возникают изгибающие моменты M_x, M_y, поперечные силы Q_x, Q_y и крутящий момент M_x, что свидетельствует о наличии косого изгиба и кручения. На участке CD действуют изгибающие моменты M_x и M_y, попе-

речная сила Q_x, растягивающая сила N и крутящий момент M_z, что свидетельствует о наличии косого изгиба с растяжением и кручением.

3. *Определить максимальные напряжения в опасном сечении каждого участка от внутренних усилий* N, M_x, M_y *и* M_z (*касательными напряжениями от* Q_x *и* Q_y *можно пренебречь*). Участок AB. Наибольшая величина изгибающего момента M_y, судя по эпюре (рис. 5.35, *г*) возникает в сечении, бесконечно близком к точке B. Максимальные нормальные напряжения при изгибе определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} = \frac{0{,}3}{1{,}8 \cdot 10^{-5}} = 16{,}7 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2,$$

где момент сопротивления $W_y = \frac{c \cdot b^2}{6} = \frac{0{,}03 \cdot 10^2}{6} = 1{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$.

Участок BC. По эпюрам M_x и M_y устанавливаем, что опасным является сечение, бесконечно близкое к точке C. Для круглого сечения суммарный изгибающий момент:

$$M_{\text{И}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0{,}36^2 + 0{,}6^2} = 0{,}6997 \text{ кН·м},$$

а наибольшие нормальные напряжения равны:

$$\sigma = \frac{M_{\text{И}}}{W_{\text{И}}} = \frac{0{,}6997}{2{,}1 \cdot 10^{-5}} = 33{,}32 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 = 33{,}32 \text{ МПа},$$

где момент сопротивления круглого сечения при изгибе:

$$W_{\text{И}} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 0{,}06^3}{32} = 2{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

При кручении круглого сечения возникают касательные напряжения, максимальные значения которых определяются по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p},$$

где W_p – момент сопротивления при кручении. Известно, что

$$W_p = 2\ W_{\text{И}} = 2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \text{ м}^3 = 4{,}2 \cdot 10^5 \text{ м}^3,$$

тогда

$$\tau_{\max} = \frac{0{,}3}{4{,}2 \cdot 10^{-5}} = 7{,}143 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 7{,}143 \text{ МПа}.$$

Участок CD. По эпюрам M_x и M_y видим, что равными по опасности будут сечения, бесконечно близкие к точкам C и D. При действии растягивающей силы N во всех точках поперечного сечения возникают одинаковые нормальные напряжения:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{1}{0{,}0018} = 555 \text{ кН/м}^2 = 0{,}555 \text{ МПа},$$

где $F = b \cdot c = 0{,}06 \cdot 0{,}03 = 0{,}0018$ м^2 – площадь поперечного сечения;

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{0{,}6}{9 \cdot 10^{-6}} = 66666 \text{ кН/м}^2 = 66{,}67 \text{ МПа},$$

где

$$W_x = \frac{b \cdot c^2}{6} = \frac{0{,}06 \cdot 0{,}03^2}{6} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

При действии изгибающего момента M_y наибольшие нормальные напряжения будут равны:

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} = \frac{0{,}3}{1{,}8 \cdot 10^{-5}} = 16667 \text{ кН/м}^2 = 16{,}67 \text{ МПа}.$$

При кручении бруса прямоугольного сечения возникают касательные напряжения, максимальные значения которых определятся по формуле:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_K} = \frac{0{,}36}{13{,}3 \cdot 10^{-6}} = 27067 \text{ кН/м}^2 = 27{,}07 \text{ МПа},$$

где $W_K = \beta \cdot c^3 = 0{,}493 \cdot 0{,}03^3 = 13{,}3 \cdot 10^{-6}$ м^3 – геометрическая величина, играющая роль момента сопротивления при кручении стержней прямоугольного сечения. Здесь β – коэффициент, зависящий от отношения большей стороны прямоугольника к меньшей (в данном случае при $b/c = 2$, $\beta = 0{,}493$).

4. *Проверка прочности при расчетным сопротивлении* $R = 180$ МПа. Расчетное напряжение по третьей теории прочности для плоского напряженного состояния определяется по формуле:

$$\sigma_{PAC} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\,.$$

Участок AB. Линейное напряженное состояние является частным случаем плоского ($\tau = 0$), поэтому в нашем случае:

$$\sigma_{PAC} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma = 16{,}7 < R\,, \quad \text{где } R = 180 \text{ МПа}.$$

Участок BC. Проверка прочности по третьей теории:

$$\sigma_{PAC} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{33{,}32^2 + 4 \cdot 7{,}14^2} = 36{,}25 \text{ МПа} < 180 \text{ МПа}.$$

Участок CD. Сначала найдем максимальное нормальное напряжение от внутренних силовых факторов N, M_x и M_y:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = 0{,}555 + 66{,}67 + 16{,}67 = 83{,}89 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения в угловой точке от кручения равны 0. Имеет место линейное напряженное состояние:

$$\sigma_{PAC} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma = 83{,}89 \text{ МПа} < 180 \text{ МПа}.$$

Далее рассмотрим напряженное состояние в окрестности точки, где действует максимальное касательное напряжение $\tau = 27{,}7$ МПа. Имеет место плоское напряженное состояние:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} = 0{,}555 + 66{,}67 = 67{,}22 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{PAC} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{67{,}22^2 + 4 \cdot 27{,}07^2} = 86{,}31 \text{ МПа} < 180 \text{ МПа}.$$

Следовательно, так как условие обеспечения прочности во всех опасных точках участков ломанного бруса выполняются, то прочность конструкции в целом следует считать обеспеченной.

6. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

6.1. Стержневые системы. Степень статической неопределимости

Под *стержневой системой* понимается всякая конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму бруса. Если элементы конструкции работают только на растяжение или сжатие система называется *фермой* (рис. 6.1). Ферма состоит из шарнирно опертых между собой прямых стержней, образующих треугольники и для нее характерно приложение внешних сил в узлах заданной системы.

Если элементы стержней системы работают в основном на изгиб или кручение, то такая система называется *рамой* (рис. 6.2).

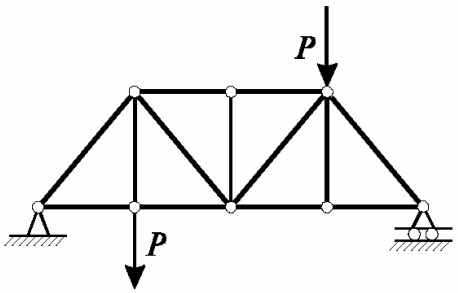


Рис. 6.1

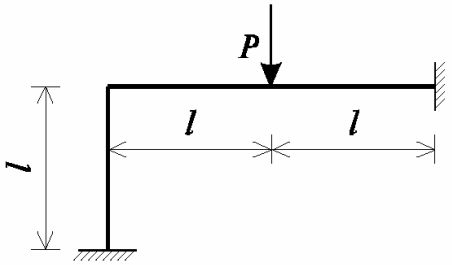


Рис. 6.2

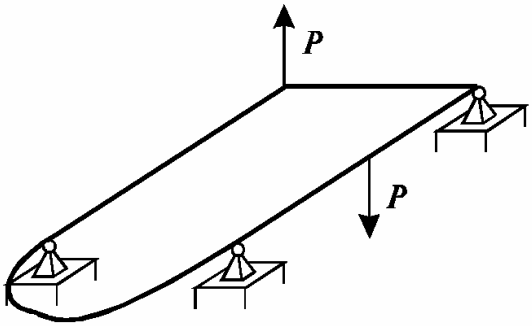


Рис. 6.3

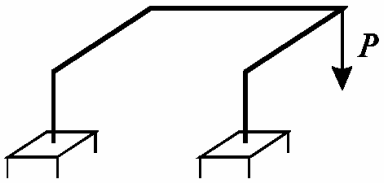


Рис. 6.4

Если все элементы стержневой системы расположены в одной плоскости, в которой также действуют все внешние силы, включая реакции опор, то система называется *плоской* (рис. 6.1, 6.2).

Если все элементы заданной системы расположены в одной плоскости, а внешние силы действуют в перпендикулярной плоскости, то система называется *плоскопространственной* (рис. 6.3). Стержневые системы, не относящиеся к двум указанным категориям, называются *пространственными* (рис. 6.4).

Все стержневые системы принято разделять на статически определимые и статически неопределимые. Под *статически определимой* понимается такая система, для которой усилия во всех ее элементах могут быть определены по методу сечений с применением лишь уравнений равновесия. Если этого сделать нельзя, то такая система называется *статически неопределимой*.

Разность между числом неизвестных усилий (реакций опор и внутренних силовых факторов) и числом независимых уравнений равновесий, которые могут быть составлены для рассматриваемой системы, называется *степенью статической неопределимости* системы.

Связи, наложенные на систему, бывают внешними и внутренними. Под *внешними* понимают ограничения, накладываемые на абсолютные перемещения точек системы, как единое целое. *Внутренние* же связи ограничивают взаимные (относительные) перемещения элементов системы. Следовательно, статическая неопределимость системы может быть вызвана как внешними, так и внутренними связями.

Если рассматривать внешние связи, то можно отметить, что положение жесткого тела на плоскости x,y характеризуется тремя независимыми параметрами – координатами x, y и углом поворота рассматриваемой плоскости. Таким образом, необходимое для равновесия число наложенных внешних связей должно быть равно трем (по количеству уравнений равновесия – $\sum x = 0$, $\sum y = 0$, $\sum m = 0$). Если плоская система состоит из D частей, каждую из которых можно рассматривать как жесткое тело, то количество параметров, определяющих положение этой системы будет равно $3D$. Каждый шарнир, соединяющий две части системы, разрешает лишь их взаимный поворот, устраняя возможность их взаимных смещений – следовательно он уменьшает количество возможных перемещений системы на две единицы. Кроме этого, каждый опорный стержень устраняет возможность перемещения системы в соответствующем направлении. Таким образом, подсчитать степень статической неопределимости системы, определяемую внешними связями, можно по следующей формуле:

$$W = 3D - 2Ш - C,$$

где D – число частей (“дисков”) системы, каждая из которых может рассматриваться как абсолютно жесткое тело, $Ш$ – количество шарниров в системе, соединяющих “диски”, C – число опорных стержней. Для статически определимых систем W =0. При W<0 система является статически неопределимой.

Наиболее характерные типы внешних связей и их схематичные изображения рассмотрены в п. 5.1.

На рис. 6.5 показана плоская рама, имеющая в первом (*а*) случае три внешние связи, а во втором случае (*б*) – пять. Значит, в первом случае рама

имеет необходимое для статической определимости количество внешних связей, а во втором же – две дополнительные внешние связи. Однако в обеих ситуациях рама статически неопределима, т.к. конфигурация ее такова, что не позволяет определить усилия во всех ее элементах, используя только уравнения равновесия. Следовательно, для окончательного ответа на вопрос о статической определимости системы необходимо проведение совместного анализа наложенных на систему внешних и внутренних связей (более подробно этот вопрос рассматривается в курсе строительной механики).

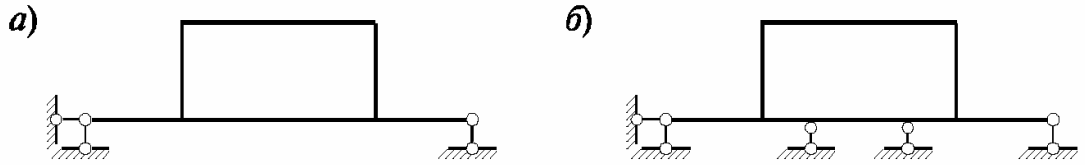


Рис. 6.5

Методы расчета статически неопределимых систем основаны на определении перемещений в ее точках. Выше мы рассматривали метод начальных параметров для вычисления перемещений в балках. При всех достоинствах этого метода он обладает одним существенным недостатком – при большом количестве участков вычислительные формулы становятся весьма громоздкими. Особенно это существенно в случае криволинейной оси стержневой системы.

В связи с этим, рассмотрим более универсальный метод определения перемещений – *метод Мора*, названный так по имени немецкого ученого, предложившего его.

6.2. Определение перемещений методом Мора

Суть метод Мора в следующем. Если необходимо определить перемещение в заданной точке по заданному направлению, то наряду с заданной системой внешних сил в этой точке прикладывается внешнее усилие $\Phi = 1$ в интересующим нас направлении.

Далее составляется выражение потенциальной энергии системы, состоящей из n участков с учетом одновременного действия заданной системы внешних сил и силы Φ:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{\left(M_z + \overline{M}_z \hat{O}\right)^2}{2G I_z} dz + \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{\left(M_x + \overline{M}_x \hat{O}\right)^2}{2E I_x} dz +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{\left(M_y + \overline{M}_y \hat{O}\right)^2}{2E I_y} dz + \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{\left(N_z + \overline{N}_z \hat{O}\right)^2}{2E F} dz + \qquad (6.1)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{K_x\left(Q_x+\overline{Q}_x\hat{O}\right)^2}{2GF}dz+\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{K_y\left(Q_y+\overline{Q}_y\hat{O}\right)^2}{2GF}dz,$$

где K_x, K_y – безразмерные величины, зависящие от геометрической формы сечения и учитывают неравномерность распределения касательных напряжений в сечении при поперечном изгибе. Так, например, для прямоугольника $K_x = K_y = 1{,}2$, а для двутавра при изгибе в плоскости его стенки $K = F/F_{CT}$, где F – площадь всего сечения двутавра, F_{CT} – площадь стенки; N_z, Q_x, Q_y, M_z, M_x, M_y – внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях заданной стержневой системы; $\overline{N}_z, \overline{Q}_x, \overline{Q}_y, \overline{M}_z, \overline{M}_x, \overline{M}_y$ –внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях заданной системы, от действия усилия $\Phi = 1$.

Дифференцируя выражение (6.1) по Φ, и полагая после этого $\Phi = 0$, находим искомое перемещение в искомой точке в нужном направлении.

$$\frac{dU}{d\hat{O}}\Big|_{\hat{O}=0}=\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{M_z\overline{M}_z}{GI_z}dz+\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{M_x\overline{M}_x}{EI_x}dz+\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{M_y\overline{M}_y}{EI_y}dz+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{N_z\overline{N}_z}{EF}dz+\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{K_xQ_x\overline{Q}_x}{GF}dz+\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{K_yQ_y\overline{Q}_y}{GF}dz. \qquad (6.2)$$

Полученные интегралы называются интегралами Мора и широко применяются при вычислении перемещений стержневых систем.

Для систем, элементы которых работают на растяжение или сжатие (например, шарнирно–стержневые системы – фермы), в формуле Мора (6.2) отличен от нуля будет только слагаемое, содержащее продольные силы. При расчете балок или рамных систем, работающих в основном на изгиб, влияние поперечной и продольной силы на перемещение несущественно и в большинстве случаев их влияние не учитывается. В случае пространственной работы стержня или стержневой системы, элементы которой работают, в основном, на изгиб и кручение, в формуле Мора обычно ограничиваются рассмотрением слагаемых, содержащих изгибающие и крутящие моменты.

Подробно рассмотрим случай, когда брус работает только на изгиб ($M_x \neq 0$, $N_z = M_z = M_y = Q_x = Q_y = 0$). В этой ситуации выражение (6.2) принимает вид:

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}\int_{l_i}\frac{M_x\overline{M}_x}{EI}dz. \qquad (6.3)$$

Согласно (6.3) для определения перемещения произвольной точки в произвольном направлении, последовательно необходимо выполнять следующее:

1. Построить эпюру моментов M_x от заданной системы внешних сил;

2. Исключая внешние силы и в точке, где необходимо определить перемещение по заданному направлению, прикладывается единичное усилие (сила – если требуется определить линейное перемещение; момент – если требуется определить угловое перемещение), и от действия единичного усилия строится эпюра моментов $\overline{M}_X$;

3. По формуле Мора (6.3) вычисляется искомое перемещение.

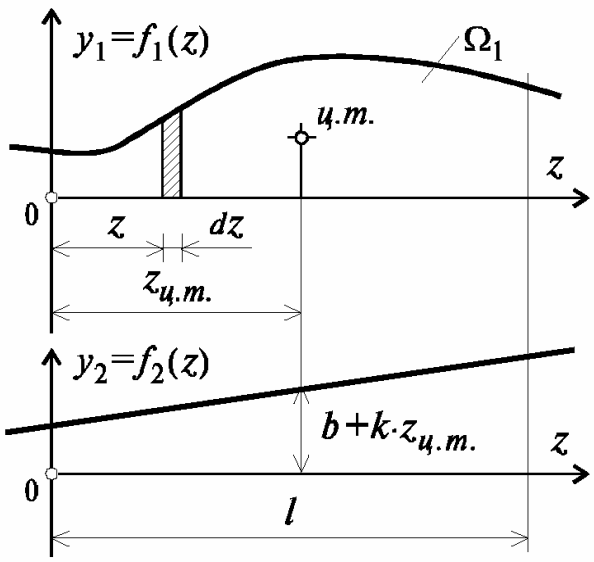


Рис. 6.6

Если принять $EI = \text{const}$, то перемещение в некоторой точке стержня определяется как интеграл от произведения двух функций моментов – M_x и $\overline{M}_X$. В общем виде интеграл Мора можно выразить следующей формулой:

$$I = \frac{1}{EI}\int_0^l f_1(z)\, f_2(z)\, dz. \quad (6.4)$$

Часто встречаются случаи, когда на участке стержня длиной l необходимо вычислить интеграл Мора при условии, что по крайней мере одна из функций – линейная (рис. 6.6). Пусть $f_2 = b + kz$, тогда из (6.4) получим :

$$I = b\int_0^l f_1(z)\, dz + \int_0^l z\, f_1(z)\, dz = b\Omega_1 + \int_0^l z\, d\Omega_1 = \quad (6.5)$$
$$b\Omega_1 + k\,\Omega_1\, z_C = \Omega_1\,(b + k\, z_C) = \Omega_1\, f_2(z_C),$$

где Ω_1 – площадь эпюры f_1; $f_2(z_C)$ – ордината линейной эпюры под центром тяжести криволинейной эпюры (рис. 6.6).

Приведенное решение носит имя русского ученого Верещагина, впервые его получившего. Таким образом, по *способу Верещагина* операция интегрирования выражения (6.4) в случае линейности хотя бы одной из подынтегральных функций существенно упрощается и сводится к перемножению площади криволинейной эпюры на ординату второй (линейной) функции под центром тяжести криволинейной.

Используя способ Верещагина, приведем результаты вычисления интегралов Мора для двух наиболее часто встречающихся случаев:

1. Обе функции f_1 и f_2 – линейные (рис. 6.7), тогда

$$I = \frac{l}{6}(2ab + 2cd + ad + bc); \qquad (6.6)$$

2. Функция f_1 – квадратная парабола, f_2 – линейная функция (рис. 6.8). Такая ситуация встречается, когда на участке длиной l приложена равномерно распределенная нагрузка q, тогда

$$I = \frac{2}{3} f \cdot l \cdot \frac{a+c}{2}, \qquad (6.7)$$

где f – "стрелка" квадратной параболы (рис. 6.8), $f = \frac{ql^2}{8}$.

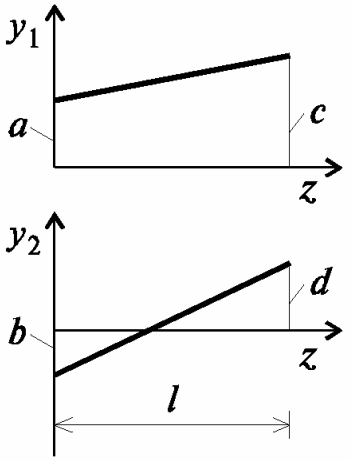


Рис. 6.7

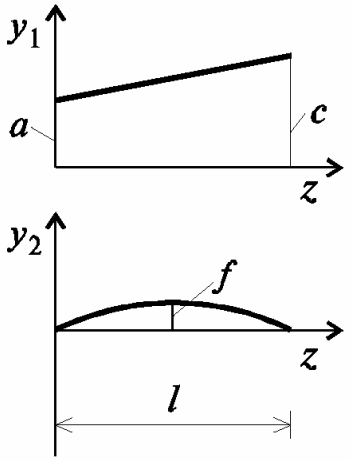


Рис. 6.8

В общем случае, если площадь Ω эпюры моментов имеет сложную геометрию и представляется возможным ее разбить на площади Ω_k (k = 1,2,3,...), имеющие элементарную геометрию, то интеграл Мора I от произведения эпюры Ω на эпюру моментов M, может быть представлен в виде:

$$I(\Omega, M) = I(\Omega_1, M) + I(\Omega_2, M) + I(\Omega_3, M) + \ldots . \qquad (6.8)$$

Для расчета усилий в статически неопределимых стержневых системах существуют различные методы. Здесь рассмотрим *метод сил*.

6.3. Метод сил

Суть этого метода заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и внутренних, а их действие заменяется соответствующими силами и моментами. Их величины, в дальнейшем, подбираются так, чтобы переме-

щения системы соответствовали тем бы ограничениям, которые на нее накладываются отброшенными связями.

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой. Она носит название *основной системы*. Для каждой статически неопределимой заданной системы (рис. 6.9, *а*) можно подобрать, как правило, различные основные системы (рис. 6.9, *б*, *в*), однако их должно объединять следующее условие – основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой (т.е. не должна менять свою геометрию без деформаций элементов).

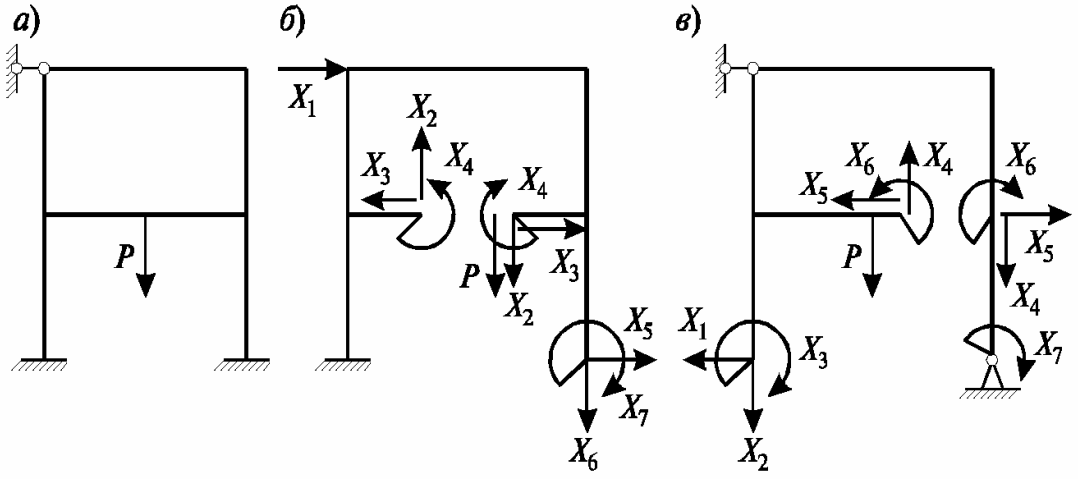


Рис. 6.9

Рассмотрим систему, которая дважды статически неопределима (рис. 6.10, *а*). Заменим в основной системе действие отброшенных связей неизвестными усилиями X_1 и X_2 (рис. 6.10, *б*). Принятая основная система будет работать также, как и заданная, если на нее наложить условие отсутствия вертикальных перемещений в точках A и B (т.е. в тех местах, где в заданной системе стоят опоры):

$$y_A(P, X_1, X_2) = 0; \quad y_B(P, X_1, X_2) = 0. \qquad (6.9)$$

Уравнения (6.9) называются *уравнениями совместности деформаций* и при их выполнении фактически устанавливается условие эквивалентности между заданной и основной системой при действии внешней силы P и неизвестных усилий X_1 и X_2. На основании принципа независимости действия сил (6.9) можно представить в следующем виде:

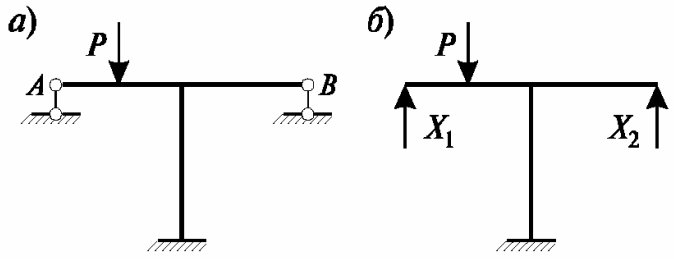


Рис. 6.10

$$\begin{aligned} y_A(P) + y_A(X_1) + y_A(X_2) &= 0, \\ y_B(P) + y_B(X_1) + y_B(X_2) &= 0, \end{aligned} \qquad (6.10)$$

где $y_A(P)$, $y_B(P)$, $y_A(X_1)$, $y_B(X_1)$, $y_A(X_2)$, $y_B(X_2)$ – вертикальные перемещения точек A и B основной системы соответственно от действия сил P, X_1, X_2.

Вводя обозначения δ_{11}, δ_{12}, Δ_{1P} – вертикальные перемещения точки A основной системы, соответственно, от последовательного действия сил $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, от внешней силы P; δ_{21}, δ_{22}, Δ_{2P} –вертикальные перемещения точки B основной системы, соответственно, от последовательного действия сил $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, от внешней силы P, и учитывая существование линейности связи между силой и перемещением, систему уравнений (6.3) можно преобразовать в канонической форме:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \qquad (6.11)$$

Последние уравнения носят названия *канонических уравнений метода сил*.

Для вычисления коэффициентов при неизвестных X_1 и X_2 используют формулу Мора:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{E I} dz, \ (i,j = 1,2). \qquad (6.12)$$

Легко видеть, что $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, это свойство называется законом *парности коэффициентов* при неизвестных. Свободные же коэффициенты определяются по формуле:

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{M_i M_P}{E I} dz. \qquad (6.13)$$

После решения системы (6.11) определяются величины неизвестных усилий X_1 и X_2. Если их значения получились отрицательными, это означает, что реально они действуют в направлении противоположном принятому. Окончательная эпюра моментов определяется по зависимости

$$M_{OK} = M_P + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2. \qquad (6.14)$$

Эпюра поперечных сил Q_{OK} может быть построена по эпюре моментов M_{OK} с использованием зависимости $Q = \frac{dM}{dz}$ и величин приложенных к системе усилий.

6.4. Пример расчета (задача № 14)

Для балки (рис. 6.11) задано: $l_1 = 2l_2$, $P = ql_1$, $m = ql_1^2$.

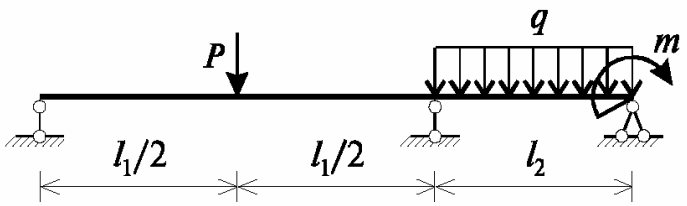


Рис. 6.11

Требуется:

1. Определить степень статической неопределимости системы и составить уравнение совместности деформаций;

2. Определить коэффициенты и решить каноническое уравнение метода сил;

3. Построить эпюры моментов M и поперечных сил Q.

Решение

1. *Определить степень статической неопределимости системы и составить уравнение совместности деформаций*. Используя зависимость W из пункта 6.1, подсчитаем степень статической неопределимости системы. $D = 1$, $Ш = 0$, $C = 4 \rightarrow W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = -1$, следовательно система один раз статически неопределима. Основную систему получим путем отбрасывания опоры в точке A и замены ее действия неизвестным усилием X_1 (рис. 6.12). Каноническое уравнение метода сил в данном случае запишется в следующем виде:

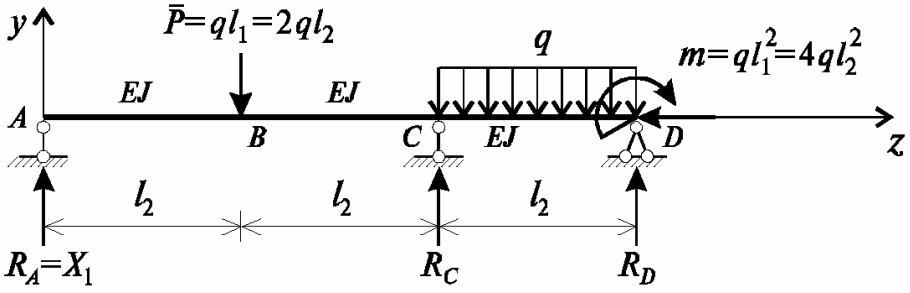


Рис. 6.12

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

2. *Определить коэффициенты и решить каноническое уравнение метода сил*. От силы X_1 строим эпюру M_1 (рис. 6.13). Для определения величины δ_{11} воспользуемся выражением (6.12). Фактически эпюру M_1 нужно умножить саму на себя и проинтегрировать это произведение:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_1 M_1 dz = \frac{1}{EI}\cdot\left(\frac{2l_2}{6}\left[2\cdot(2l_2)^2\right] + \frac{l_2}{6}\left[2\cdot(2l_2)^2\right]\right) = \frac{4l_2^3}{EI}.$$

Для определения свободного коэффициента в каноническом уравнении строим в основной системе эпюру моментов M_P от внешней нагрузки (рис. 6.14) и в соответствии с (6.7) получаем:

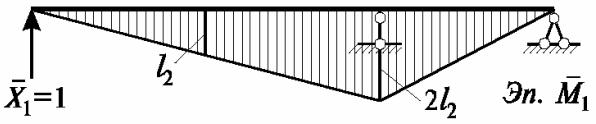


Рис. 6.13

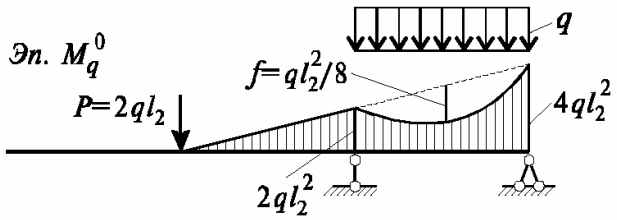


Рис. 6.14

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI}\int_0^l M_1 M_P dz =$$

$$= -\frac{l_2}{6EI}\cdot\left(2\cdot 2l_2\cdot 2ql_2^2 + 2ql_2^2\cdot l_2\right) - \frac{l_2}{6EI}\cdot(2\cdot 2ql_2^2\cdot 2l_2 + 2l_2\cdot 4ql_2^2) +$$

$$+\frac{2}{3EI}\cdot\frac{ql_2^2}{8}\cdot l_2\cdot\frac{2l_2}{2} = -\frac{51}{12EI}ql_2^4.$$

При вычислении Δ_{1P} было учтено, что эпюры M_1 и M_P имеют разный знак, т.к. вызывают растяжение разных волокон – об этом говорит отрицательный знак при Δ_{1P}. Кроме этого, криволинейный участок в эпюре M_P был представлен как разность трапеции и параболического сегмента.

Напишем уравнение совместности деформаций в виде

$$EI\delta_{11}\cdot X_1 + EI\Delta_{1P} = 0,$$

и, подставляя найденные величины перемещений, получим:

$$4l_2^3\cdot X_1 = \frac{51}{12}ql_2^4, \text{ откуда } X_1 = \frac{17}{16}ql_2.$$

3. *Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.* Окончательную эпюру изгибающих моментов получим по формуле:

$$M_{f\hat{E}} = M_P + M_1\cdot\frac{17}{16}ql_2.$$

Последняя формула означает, что окончательное значение момента в любом сечении определяется путем сложения значения момента в эпюре M_P с величиной момента в эпюре M_1, увеличенной на коэффициент $\frac{17}{16}ql_2$ (рис. 6.15, *а*). Эпюру $Q_{ОК}$ для заданной системы можно построить следующим образом. Заменив в заданной системе опорные реакции R_A на X_1, получим статически определимую эквивалентную систему, тождественную заданной. Далее, определяя остальные опорные реакции R_C и R_D и по методу сечений составляя аналитические выражения изменения поперечных сил на каждом участке, по ним определив ординаты в характерных сечениях, строится эпюра $Q_{ОК}$ (рис. 6.15,*б*).

7. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

7.1. Понятие об устойчивости. Задача Эйлера

До сих пор мы рассматривали методы определения напряжений и перемещений, возникающих в стержнях и соответственно, занимались оценкой их прочности и жесткости. Однако оказывается, что соблюдение условий прочности и жесткости еще не гарантирует способности конструкций выполнять, предназначенные им функции в эксплуатационных режимах. Наряду с выполнением условий прочности и жесткости, необходимо обеспечить и *устойчивость конструкций*.

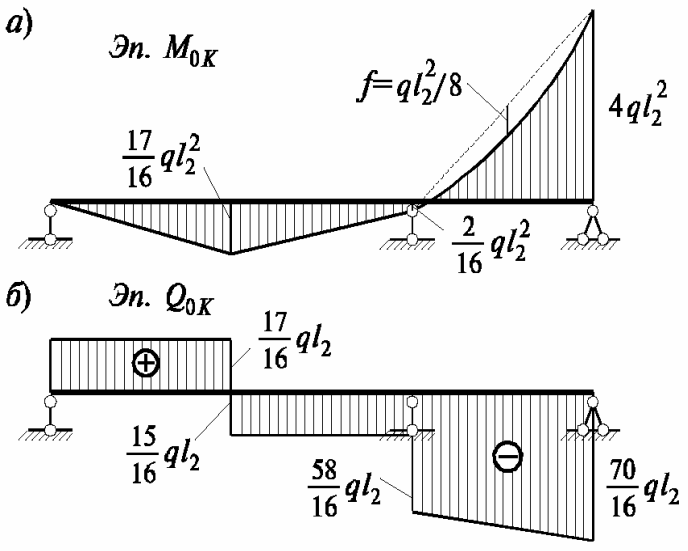


Рис. 6.15

При неизменной схеме нагружения, под устойчивостью понимается свойство способности системы сохранять свое первоначальное равновесное состояние. Если рассматриваемая система таким свойством не обладает, то она называется *неустойчивой*, а ее равновесное состояние – *неустойчивым состоянием*.

При неизменной схеме нагружения, в процессе роста интенсивности нагрузок, явление перехода системы от одного равновесного состояния к

другому равновесному состоянию, называется *потерей устойчивости системы*. Значения внешних сил, при которых происходит потеря устойчивости, называются *критическими*.

В некоторых случаях при потере устойчивости, система, переходя в новое устойчивое равновесное состояние, продолжает выполнять свои функции. Однако в подавляющем большинстве случаев, потеря устойчивости системы сопровождается возникновением больших перемещений, пластических деформаций или ее полным разрушением. Поэтому сохранение исходного (расчетного) равновесного состояния системы является важной задачей и одной из основных проблем сопротивления материалов.

Основная задача теории устойчивости заключается в определении критического значения внешних сил и ограничение их величин таким образом, чтобы исключить возможность потери устойчивости заданной системы в эксплуатационных режимах.

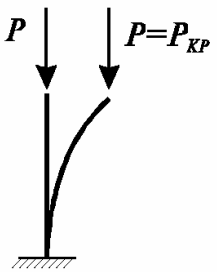


Рис. 7.1

Пусть вертикальный стержень закреплен нижним концом, а на свободном верхнем конце центрально приложена продольная сила P (рис. 7.1). На начальном этапе нагружения равновесное состояние системы определяется как простое продольное сжатие, так как на данном этапе нагружения в поперечных сечениях стержня, за исключением продольной силы, остальные силовые факторы равны нулю. При дальнейшем росте внешней силы P, обнаруживается, что при некотором ее значении $P = P_{KP}$, стержень изогнется. Так как явление изгиба тесно связано с действием изгибающих моментов, возникающих в поперечных сечениях стержня, можем утверждать, что при $P = P_{KP}$ происходила смена формы равновесного состояния системы. Если на начальном этапе нагружения $P < P_{KP}$, равновесное состояние вертикального стержня определялось как простое сжатие, то при $P > P_{KP}$ сжатие сопровождается изгибом. Это означает, что при $P = P_{KP}$ происходила потеря устойчивости системы.

Заметим, что в данном случае, смена формы равновесного состояния сопровождается и сменой формы деформирования: в докритическом – прямолинейная форма деформирования, в закритическом – криволинейная, а в критическом – смешанная форма.

Заметим также, что для гибких стержней потеря устойчивости может наступить при напряжениях, значительно меньших предела прочности материалов. Поэтому расчет стержней должен выполняться при условии, что сжимающие напряжения не превышают критического значения с точки зрения потери их устойчивости:

$$\sigma < \sigma_{\hat{E}\Theta} = \frac{P_{\hat{E}\Theta}}{F}, \qquad (7.1)$$

где $P_{КР}$ – значение сжимающей силы, при котором стержень переходит из прямолинейного состояния равновесия к криволинейному; F – площадь сечения стержня.

Изучение устойчивости стержней начнем с простейшей задачи о стержне с двумя шарнирно опертыми концами при действии центрально сжимающей силы P (рис. 7.2).

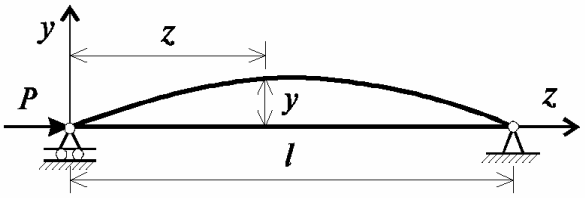


Рис. 7.2

Впервые эта задача была поставлена и решена Л.Эйлером в середине XVIII века и носит его имя.

Рассмотрим условия, при которых происходит переход от центрально сжатого состояния к изогнутому, т.е. становится возможной криволинейная форма оси стержня при центрально приложенной сжимающей силе P. Предполагая, что изгиб стержня будет происходить в плоскости минимальной жесткости, записывая дифференциальное уравнение упругой линии балки и ограничиваясь рассмотрением только малых перемещений, имеем:

$$E I_X \, y''(z) = M_X(z), \qquad (7.2)$$

где I_x – минимальный момент инерции сечения.

Для определения выражения изгибающего момента $M_x(z)$, действующего в поперечном сечении стержня, расположенном на расстоянии z от начала системы координат, применяя метод сечений к системе, изображенной на рис. 7.2 и рассматривая равновесие отсеченной части системы, расположенной левее от заданного сечения, получим:

$$M_x = -Py. \tag{7.3}$$

При положительном прогибе в выбранной системе координат знак "минус" означает, что момент является отрицательным

Введем следующее обозначение:

$$\frac{P}{EI_x} = k^2. \tag{7.4}$$

Тогда уравнение (7.2) преобразуется к виду:

$$y'' + k^2 y = 0. \tag{7.5}$$

Решение (7.5) записывается в виде:

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \tag{7.6}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий задачи:

$$y(0) = 0; \qquad y(l) = 0.$$

Из первого условия вытекает, что $C_2 = 0$, а из второго получается, что либо $C_1 = 0$ (что нам неинтересно, т.к. в этом случае $y(z) \equiv 0$), либо

$$\sin kl = 0. \tag{7.7}$$

Из (7.7) следует, что $kl = \pi n$, где n – произвольное целое число. Учитывая (7.4), получаем:

$$P_n = \frac{\pi^2 n^2 EI_x}{l^2}. \tag{7.8}$$

Это означает, что для того, чтобы центрально сжатый стержень принял криволинейную форму, необходимо, чтобы сжимающая сила была равна какому–либо значению из множества P_n по (7.8). Наименьшее из этих значений называется критической силой P_{KP} и будет иметь место при $n = 1$:

$$P_{KP} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}. \tag{7.9}$$

Эта сила носит название *первой критической эйлеровой силы*.

Следовательно, согласно (7.6) при $P = P_{KP}$ выражение прогибов можно записать в следующем виде:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi n z}{l}. \qquad (7.10)$$

Из (7.10) видно, что прогибаться стержень будет по синусоиде. Графики функций прогибов $y(z)$ при различных n изображены на рис. 7.3.

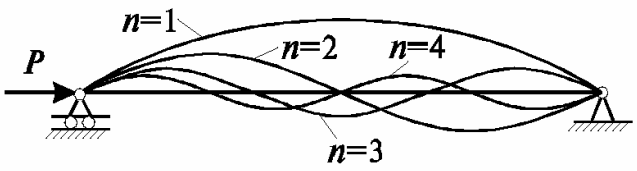


Рис. 7.3

Из (7.9) видно, что критическая с точки зрения устойчивости сила зависит от жесткости стержня и его длины, но никак не зависит от прочностных свойств материала стержня, т.е. два стержня одинаковой длины с идентичными граничными условиями их закрепления, изготовленных из различных материалов, но имеющих одинаковую изгибную жесткость, теряют устойчивость при одном и том же значении сжимающей силы. В этом заключается значительная разница между проверкой прочности стержня на сжатие и растяжение и проверкой на устойчивость.

При изменении условий закрепления концов стержня необходимо решение дифференциального уравнения его изгиба, но уже в виде:

$$E I_x y^{IV}(z) + P y''(z) = 0. \qquad (7.11)$$

Анализ этих решений говорит о том, что все они могут быть представлены в следующем виде:

$$P_{KP} = \frac{\pi^2 E I_x}{(\mu l)^2}. \qquad (7.12)$$

где μ – коэффициент приведения длины. Он показывает, во сколько раз следует изменить длину шарнирно опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась бы критической силе стержня длиной l в рассматриваемых условиях закрепления. На рис. 7.4 показано несколько видов закрепления стержня и указаны соответствующие значения коэффициента μ.

7.2. Границы применимости решения Эйлера. Формула Ясинского

Как показали опыты, решение Эйлера подтверждалось не во всех случаях. Причина состоит в том, что формула Эйлера была получена в предположении, что при любой нагрузке стержень работает в пределах упругих деформаций по закону Гука. Следовательно, его нельзя применять в тех ситуациях, когда напряжения превосходят предел пропорциональности. В связи с этим найдем границы применимости решения Эйлера:

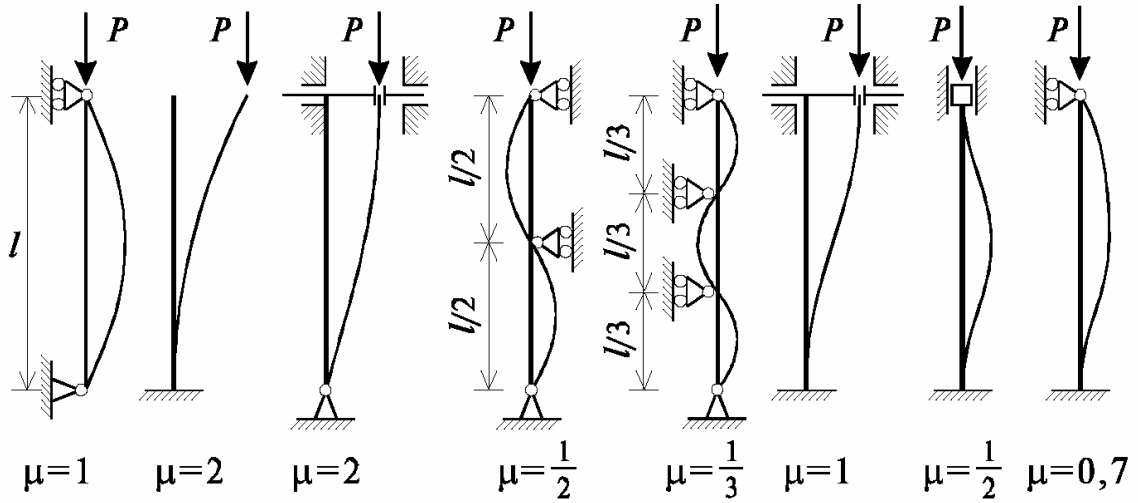


Рис. 7.4

$$\sigma_{KP} = \frac{P_{KP}}{F} = \frac{\pi^2 E I}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2}, \qquad (7.13)$$

где $i = \sqrt{I/F}$ – радиус инерции сечения. Если стержень имеет одинаковые опорные закрепления в двух взаимно перпендикулярных плоскостях инерции, то при определении значения критической силы и критического напряжения, необходимо брать наименьшее значение момента инерции и, соответственно, радиуса инерции поперечного сечения.

Введем понятие *гибкости стержня*:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}.$$

Тогда (7.13) принимает вид:

$$\sigma_{KP} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \qquad (7.14)$$

Из (7.14) следует, что напряжение σ_{KP} возрастает по мере уменьшения гибкости стержня. Заметим, что стержень, имеющий неодинаковые опорные закрепления в главных плоскостях и, следовательно, неодинаковые

приведенные длины, теряет устойчивость в той главной плоскости, в которой гибкость стержня имеет наибольшее значение.

Формула Эйлера неприемлема, если напряжения $\sigma_{КР} > \sigma_{П}$, где $\sigma_{П}$ – предел пропорциональности. Приравнивая (7.14) к пределу пропорциональности, получим предельное значение гибкости:

$$\lambda_{ПРЕД} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{П}}} . \qquad (7.15)$$

Если $\lambda > \lambda_{ПРЕД}$, то формулу Эйлера можно применять. В противном случае ею пользоваться нельзя. Для стали Ст.3 $\lambda_{ПРЕД} = 100$.

В ситуациях, когда напряжения превышают предел пропорциональности, получение теоретического решения осложняется, т.к. зависимость между напряжениями и деформациями становится нелинейной. В связи с этим, в этих случаях пользуются эмпирическими зависимостями. В частности, Ф.С. Ясинский предложил следующую формулу для критических по устойчивости напряжений:

$$\sigma_{КР} = a - b\lambda , \qquad (7.16)$$

где a, b – постоянные, зависящие от материала, так для стали Ст.3 $a = 3{,}1 \cdot 10^5$ кН/м^2, $b = 11{,}4 \cdot 10^2$ кН/м^2.

При гибкостях стержня, находящихся в диапазоне $0 < \lambda < 40 \div 50$, стержень настолько “короток”, что его разрушение происходит по схеме сжатия, следовательно, критические напряжения можно приравнять в этом случае к пределу пропорциональности. Обобщая вышесказанное, зависимость критических напряжений $\sigma_{КР}$ от гибкости стержня λ можно представить, как это сделано на рис. 7.5.

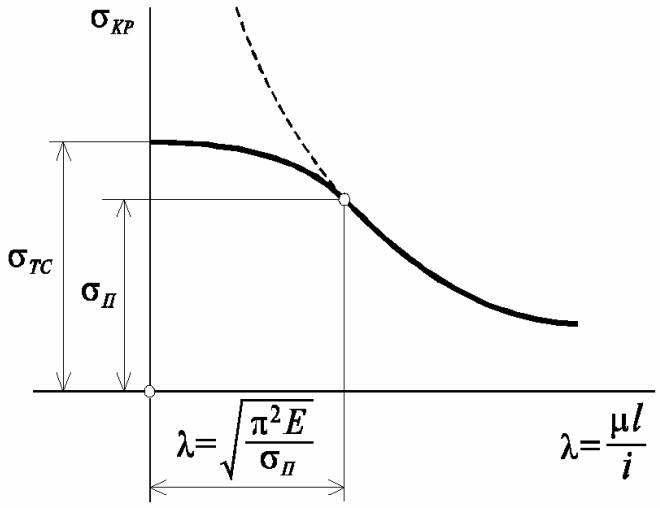


Рис. 7.5

7.3. Расчет сжатых стержней на устойчивость

Как правило, основная проблема при расчете сжатых стержней состоит в том, чтобы сжимающие напряжения σ не превышали бы критических значений по устойчивости σ_{KP}, т.е.

$$\sigma = \frac{Ð}{F} < \frac{P_{KP}}{F} = \sigma_{KP}. \qquad (7.17)$$

При продольном изгибе центрально сжатый стержень теряет несущую способность, когда напряжения в его поперечных сечениях достигают критических значений. Поэтому необходимо ввести в расчет *коэффициент запаса устойчивости* n по отношению к критическим напряжениям, с помощью которого и определяется допускаемое напряжение при расчете на устойчивость:

$$\sigma < \frac{\sigma_{KP}}{n}.$$

При расчете же стержней на растяжение применяют условие $\sigma < R$, где R – расчетное сопротивление на растяжение.

Для унификации расчетов на растяжение и сжатие введем соотношение правых частей двух последних неравенств:

$$\varphi < \frac{\sigma_{KP}}{nR}, \qquad (7.18)$$

откуда $\frac{\sigma_{KP}}{n} = \varphi R$. И тогда (7.17) можно записать так: $\sigma < \varphi R$.

Величина φ носит название *коэффициента уменьшения расчетного сопротивления* при расчете на сжатие и является функцией от гибкости стержня λ (табл. 5).

Таким образом, окончательно формула для расчета стержней на устойчивость принимает следующий вид:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} < R . \qquad (7.19)$$

Несмотря на простоту выражения (7.19) расчет сжатых стержней производится, как правило, в несколько этапов. Это связано с тем, что величина φ зависит от формы и размеров сечения, поэтому не может быть назначена заранее. В связи с этим, подбор сечения осуществляют итеративно, постепенно приближаясь к тому, чтобы разница между напряжением сжатия σ и расчетным сопротивлением на растяжение R не превышала бы 3–5%.

Таблица 5

λ	Ст 2–4	Ст 5	Чугун	Дерево	λ	Ст 2-4	Ст 5	Чугун	Дерево
0	1.00	1.00	1.00	1.00	110	0.52	0.43	–	0.25
10	0.99	0.98	0.97	0.99	120	0.45	0.36	–	0.22
20	0.96	0.95	0.91	0.97	130	0.40	0.33	–	0.18
30	0.94	0.92	0.81	0.93	140	0.36	0.29	–	0.16
40	0.92	0.89	0.69	0.87	150	0.32	0.26	–	0.14
50	0.89	0.86	0.57	0.80	160	0.29	0.24	–	0.12
60	0.86	0.82	0.44	0.71	170	0.26	0.21	–	0.11
70	0.81	0.76	0.34	0.60	180	0.23	0.19	–	0.10
80	0.75	0.70	0.26	0.48	190	0.21	0.17	–	0.09
90	0.69	0.62	0.20	0.38	200	0.19	0.16	–	0.08
100	0.60	0.51	0.16	0.31					

7.4. Пример расчета (задача № 15)

Заданную стойку двутаврового (№30) поперечного сечения центрально сжатую силой P (рис. 7.6, *а*), рассчитать на устойчивость, а также указать положительные и отрицательные стороны конструкции этой стойки. В целях минимизации расходов материальных ресурсов можно заменить двутавровое сечение стойки более рациональным сечением из двух швеллеров, соединенных планками на сварке (рис. 7.6, *б*). Подобрать сечения из двух швеллеров и сравнить результаты по площади с сечением из двутавра. Материал стоек – сталь Ст.3, расчетное сопротивление при растяжении $R = 1{,}9 \cdot 10^5$ кПа.

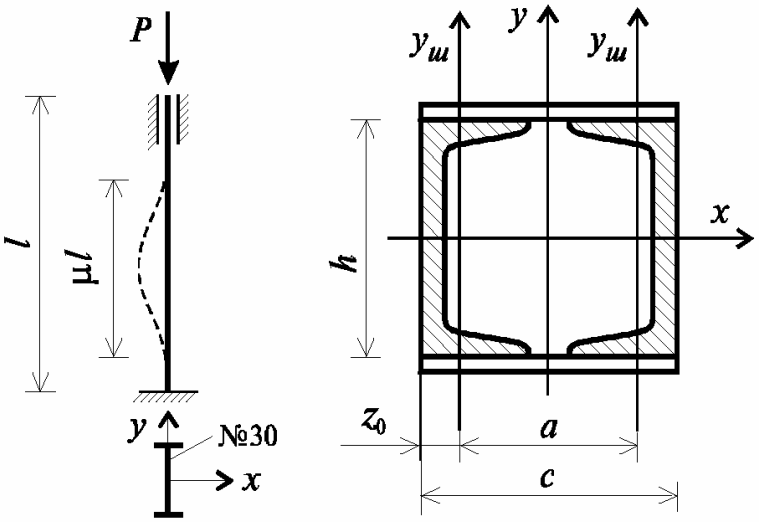


Рис. 7.6

Решение

1. *Расчет на устойчивость стойки из двутавра.* Проверка устойчивости сжатых стержней производится по формуле (7.19). Из сортамента ГОСТ 8239–72 выписываем необходимые данные для двутавра №30: $F = 46{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^2; $i_x = 0{,}123$ м; $i_y = 0{,}0269$ м.

Тогда из формулы (7.19) имеем:

$$P = \varphi F R. \qquad (7.20)$$

Для нахождения величины φ нужно знать максимальную гибкость стойки, которая определится из формулы

$$\lambda_{max} = \frac{l_0}{i_{min}},$$

где l_0 – приведенная (свободная) длина стойки, $l_0 = \mu l$. Здесь μ –коэффициент приведенной длины, зависящий от способа закрепления концов стойки (для нашего примера $\mu = 0{,}5$), l – длина стойки; i_{min} – минимальный радиус инерции сечения стойки (в данном случае – радиус инерции относительно оси y). Таким образом,

$$\lambda_{max} = \frac{0{,}5 \cdot 3}{0{,}0269} = 55{,}76.$$

По табл. 5 находим φ при $\lambda = 55{,}76$, интерполируя до третьего знака после запятой:

при $\lambda = 50$ $\varphi = 0{,}89$;

при $\lambda = 60$ $\varphi = 0{,}86$.

Поэтому при $\lambda = 55{,}76$

$$\varphi = 0{,}89 - \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10} 5{,}76 = 0{,}873.$$

Подставляя значения F, φ и R в формулу (7.20), получим допустимое значение сжимающей силы с точки зрения устойчивости рассматриваемой стойки:

$$P = 0{,}873 \cdot 46{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{5} = 771 \text{ кН}.$$

Преимуществом стойки из двутавра является простота конструкции и малая трудоемкость изготовления и монтажа, недостатком – неравная устойчивость в разных плоскостях.

2. *Подбор сечения стойки из двух швеллеров*. При рассмотрении этого вопроса составное сечение стойки следует рассматривать как цельное, и поэтому расчет приведенной гибкости можно не выполнять. Подбор составного сечения стойки будем производить путем последовательного приближения. Для этого задаемся произвольным значением φ, подбираем сечение и сопоставляем возникающие в нем напряжения с расчетным сопротивлением. Эта операция производится до тех пор, пока напряжение, возникающее в стойке, будет достаточно близким к расчетному сопротивлению (отклонение не должно превышать ± 5%).

Примем $\varphi = 0{,}6$. Из (7.20) определим требуемую площадь F сечения двух швеллеров:

$$F \geq 2F_{\text{øâ}} = \frac{P}{\varphi R} = \frac{771}{0{,}6 \cdot 1{,}9 \cdot 10^{5}} = 67{,}63 \cdot 10^{-4} \text{ì}^{2}; \quad F_{\text{øâ}} = 3{,}38 \cdot 10^{-3} \text{ì}^{2}.$$

По ГОСТ 8240–72 принимаем швеллер № 24а, для которого

$$F_{\text{øâ}} = 0{,}00329 \text{ ì}^{2}, \quad i_{X}^{\text{øâ}} = 0{,}0984 \text{ ì}, \quad i_{y}^{\text{øâ}} = 0{,}0267 \text{ ì}.$$

Для обеспечения равноустойчивости стойки из двух швеллеров нужно, чтобы гибкость ее была примерно одинаковой в обеих плоскостях. Для принятого сечения из двух швеллеров определим максимальную гибкость:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{\mu l}{i_{X}^{\text{øâ}}} = \frac{0{,}5 \cdot 3}{0{,}0984} = 15{,}24.$$

По табл. 5 находим значение φ для полученной гибкости:

при $\lambda = 10$ $\varphi = 0{,}99$;

при $\lambda = 20$ $\varphi = 0{,}97$.

Для $\lambda = 15{,}24$:

$$\varphi = 0{,}99 - \frac{0{,}99 - 0{,}97}{10} 5{,}24 = 0{,}979; \qquad F = 2F_{шв} = 0{,}00658 \text{ м}^2.$$

Определяем напряжение в стойке:

$$\sigma = \frac{Ð}{\varphi F} = \frac{771}{0{,}979 \cdot 65{,}8 \cdot 10^{-4}} = 119700 \text{ кПа} \le R.$$

Недонапряжение составляет

$$\frac{(190 - 119{,}7)}{190} \cdot 100\% = 37\% > 5\%.$$

Необходимо уменьшить сечение стойки. Принимаем стойку из швеллеров № 20 ($F_{шв} = 0{,}00234$ м^2; $i_x = 0{,}0807$ м). Определим гибкость:

$$\lambda = \frac{0{,}5 \cdot 3}{0{,}0807} = 18{,}59.$$

По табл. 5 для $\lambda = 18{,}59$ находим: $\varphi = 0{,}973$, и учитывая, что $F = 2F_{шв} = 0{,}00468$ м^2, получим:

$$\sigma = \frac{771}{0{,}973 \cdot 46{,}8 \cdot 10^{-4}} = 169300 \text{ кПа} \le R.$$

Недонапряжение составляет

$$\frac{(190 - 169{,}3)}{190} \cdot 100\% = 10{,}9\% > 5\%.$$

Принимаем стойку из швеллеров №18 ($F = 0{,}00207$ м^2; $i_x = 0{,}0724$ м), гибкость которой принимает значение:

$$\lambda = \frac{0{,}5 \cdot 3}{0{,}0724} = 20{,}72.$$

По табл. 5 для $\lambda = 20{,}72$ находим: $\varphi = 0{,}973$; $F = 0{,}0414$ м^2:

$$\sigma = \frac{771}{0{,}969 \cdot 41{,}4 \cdot 10^{-4}} = 192200 \text{ кПа}.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{(192{,}2-190)}{190}\cdot 100\% = 1{,}2\% < 5\%,$$ что допустимо.

Окончательно принимаем стойку из двух швеллеров №18. Из сортамента ГОСТ 8240–72 выписываем необходимые данные:

$I_x = 1090\cdot10^{-8}$ м^4, $I_y = 86\cdot10^{-8}$ м^4, $z_0 = 0{,}0194$ м, $h = 0{,}18$ м, $b = 0{,}07$ м.

Момент инерции поперечного сечения стойки из двух швеллеров относительно оси x: $I_X = 2I_X^{\text{ш}}$. Момент инерции составного сечения относительно оси y можно изменять, сближая или удаляя швеллеры один относительно другого. Определим расстояние между швеллерами из условия, что $I_y = 1{,}2\cdot I_x$. Из рис. 7.6, *б* имеем $c = a + 2\cdot z_0$, где a – расстояние между собственными осями y каждого из швеллеров. Тогда:

$$2\left(I_y^{\text{ш}} + F_{\text{ш}}\cdot 0{,}25\cdot a^2\right) = 1{,}2\cdot 2\cdot I_X^{\text{ш}},$$

отсюда

$$a = \sqrt{\frac{1{,}2I_X^{\text{ш}} - I_y^{\text{ш}}}{0{,}25\cdot F_{\text{ш}}}} = \sqrt{\frac{1{,}2\cdot 1090 - 86}{0{,}25\cdot 20{,}7}\cdot 10^{-4}} = 0{,}1537 \text{ м}.$$

Монтажное расстояние между швеллерами будет $c = a + 2\cdot z_0 = 0{,}1537 + 2\cdot 0{,}0194 = 0{,}1925$ м, принимаем $c = 0{,}192$ м. Сравнивая сечение из двух швеллеров с заданным двутавровым, видим, что площадь заданного сечения составляет $46{,}5\cdot10^{-4}$ м^2, а полученного из двух швеллеров – $41{,}4\cdot10^{-4}$ м^2. Таким образом, расход металла на стойку из двух швеллеров (без учета металла на соединительные планки) будет меньше в 46,5/41,4 = 1,12 раза, или на 12%, чем на стойку из одного двутавра.

Однако конструкция стойки из двух швеллеров трудоемка в изготовлении по сравнению со стойкой из двутавра. Экономическое преимущество подобранного сечения стойки, состоящего из двух швеллеров, по сравнению с двутавром, объясняется более рациональным распределением ее изгибных жесткостей в различных направлениях. Это приводит к выравниванию значений моментов инерции относительно главных центральных осей инерции сечения и тем самым, к равноустойчивости стойки в указанных направлениях.

Это положение является важным обстоятельством для разработки оптимальных конструктивных решений с позиции устойчивости.

8. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

8.1. Основные определения

В предыдущих разделах рассматривалось такое нагружение конструкций, когда прикладываемые усилия изменялись настолько медленно, что возможно было считать их *статическими*. В инженерной практике же часто встречаются случаи когда нагрузка достаточно быстро изменяет свое направление или величину. Такое нагружение называется *динамическим* и вызывает значительные силы инерции в сооружении, которые приводят к появлению дополнительных (к статическим) напряжений и деформаций.

Известны случаи, когда инженерные конструкции, рассчитанные с большим запасом прочности на статическую нагрузку, разрушались под действием сравнительно небольших динамических сил.

При изучении динамики упругих систем последние принято классифицировать, прежде всего, по числу их степеней свободы. Под *числом степеней свободы* понимается число независимых координат, определяющих положение материальных точек системы в произвольный момент времени.

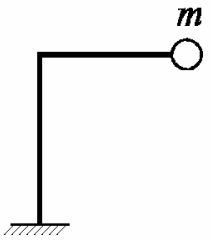


Рис. 8.1

Так для системы, изображенной на рис. 8.1, если пренебречь массой стержней, положение сосредоточенной массы m в плоскости чертежа полностью будет определяться двумя независимыми координатами – линейными перемещениями в вертикальном и горизонтальном направлениях. То есть рассматриваемая система будет иметь две степени свободы. Заметим что, так как во всех реальных системах масса конструкции распределена по их объему, поэтому любая произвольно взятая точка является материальной. Следовательно, для определения положения системы в произвольный момент времени, строго говоря, необходимо знать перемещения всех точек рассматриваемой системы. Откуда следует, что все реальные системы в точной постановке задачи, имеют бесконечное число степеней свободы, так как число материальных точек, принадлежащей любой реальной системы, равно бесконечности.

При исследовании колебаний упругих систем различают собственные (свободные) и вынужденные колебания. Под *собственными* колебаниями понимается движение системы при отсутствии внешних воздействий. Если колебание системы сопровождается действием внешних сил, то движение называется *вынужденным*.

Промежуток времени за который совершается полный цикл колебаний, носит название *периода* собственных или вынужденных колебаний, смотря по тому, о каких колебаниях идет речь. Период колебаний обозначается через T. Величина обратная T, называется *частотой колебаний*:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

и представляет собой число колебаний в течение одной секунды. В технике в большинстве случаев используется понятие круговой частоты ω, представляющей собой число колебаний за 2π секунд.

8.2. Колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 8.2. Пренебрегая массой и продольными деформациями консольного бруса, рассмотрим колебания массы m, закрепленной на свободном конце бруса, при действии силы $P(t)$, изменяющейся по гармоничному закону по времени t :

$$P(t) = P_0 \sin \omega t, \qquad (8.1)$$

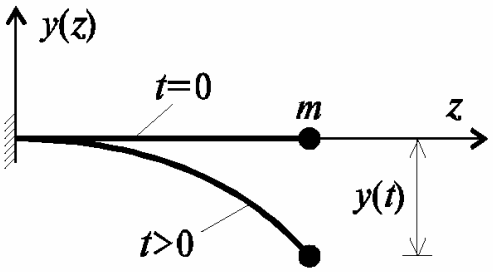


Рис. 8.2

где P_0 – амплитуда или максимальное значение силы $P(t)$, а ω –круговая частота ее изменения.

При составлении уравнения движения массы m введем в рассмот-рение силу инерции $P_{ин} = -m\,y''(t)$, силу сопротивления $P_c = -\alpha\,y'(t)$, всегда направленную против движения системы (где α –коэффициент затухания) и внешнюю силу $P(t)$. Перемещение $y(t)$ в любой момент времени можно определить из уравнения:

$$y(t) = \delta_{11}\left[P(t) - m\,y''(t) - \alpha\,y'(t)\right]. \qquad (8.2)$$

где δ_{11} – перемещение массы m по вертикали под действием вертикальной единичной силы.

Отметим, что природа сил сопротивления может быть результатом сопротивления внешней среды или внутреннего трения, возникающего в частицах материала конструкции при деформации системы. Принимаем обозначения:

$$\varphi^2 = \frac{1}{\delta_{11}\,m}; \quad n = \frac{\alpha}{2m}, \qquad (8.3)$$

где φ – частота собственных колебаний конструкции, n – коэффициент затухания. Тогда уравнения движения (8.2) принимает следующий вид:

$$y'' + 2n\,y' + \varphi^2 y = \frac{P_0}{m}\sin \omega t\,. \qquad (8.4)$$

Решение (8.4) при начальных условиях $t = 0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, с учетом $n < \varphi$, принимает вид:

$$y = A e^{-nt}\sin\left(\omega_1 t + \psi_1\right) + P_0\,\delta_{11}\,\beta\sin\left(\omega t - \psi_2\right). \qquad (8.5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$A = \sqrt{y_0 + \frac{y'_0}{\omega_1}}$ – амплитуда собственных колебаний системы; $\omega_1 =$

$= \sqrt{\varphi^2 - n^2}$ – собственная частота колебаний системы с учетом сил затухания; $\psi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi \cdot y_0}{y_0'}\right)$, $\psi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2n\omega}{\varphi^2 - \omega^2}\right)$ – сдвиг фазы по времени, возникающий при собственных и вынужденных колебаниях, соответственно;

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{\varphi^4}}} \qquad (8.6)$$

– называется коэффициентом динамичности, он показывает во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического перемещения, вызванного максимальным значением возмущающей статической силы.

График β в зависимости от отношения частот и параметра затухания n приведен на рис. 8.3. Откуда следует, что при $\omega \to \varphi$ $P_0 \cdot \delta_{11} \cdot \beta$, т.е. амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает, а при $n \to 0$, $\omega \to \varphi$, получаем $P_0 \cdot \delta_{11} \cdot \beta \to \infty$. Это явление носит название *резонанса*. При $n = 0$ выражение для β упрощается и принимает вид:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\varphi^2}}.$$

При больших t первое слагаемое из (8.5), описывающее свободные колебания системы, затухает и колебания системы описываются выражением:

$$y = P_0 \cdot \delta_{11} \cdot \beta \cdot \sin(\omega t - \psi_2). \qquad (8.7)$$

Заметим, что решение (8.5) при нулевых начальных условиях ($y_0 = y_0' = 0$), при любых значениях t описывается выражением (8.7).

При выполнении практических расчетов, при известном коэффициент β, легко определяется величина максимальных динамических напряжений и перемещений в упругих элементах заданной системы:

$$\sigma^{ДИН} = \sigma^{СТ} \cdot \beta; \; y^{ДИН} = y^{СТ} \cdot \beta;$$

$$y^{ДИН} = P_0 \cdot \delta_{11} \cdot \beta; \; y^{СТ} = P_0 \cdot \delta_{11},$$

где под $\sigma^{СТ}$, $y^{СТ}$ понимается то напряжение и перемещение соответственно, которые возникали бы в системе при статическом приложении максимального значения возмущающей силы величиной P_0.

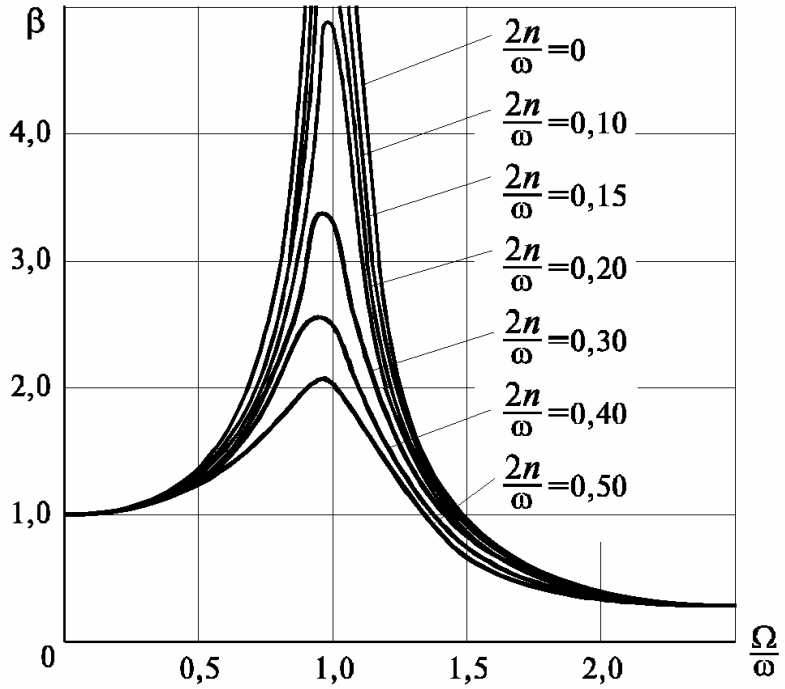


Рис. 8.3

В случае, если сопоставление частот ω и φ указывает на их опасную близость $\omega \approx \varphi$, т.е. опасность возникновения резонанса, путем конструктивных мероприятий добиваются изменения той или иной частоты. При этом, наиболее целесообразным является изменение частот в сторону увеличения отношения $\omega/\varphi > 1$ с тем условием, чтобы добиться наиболее заметного снижения коэффициента β.

8.3. Пример расчета (задача № 16)

Определить динамический прогиб и напряжения в опасных сечениях балок *KD* и *AB*, возникающих под действием работающего электромотора весом $G = 10$ кН (рис. 8.4, *а*). Вес неуравновешанных частей ротора $P = 1$ кН. Эксцентриситет вращающихся масс $e = 0{,}02$ м. Число оборотов ротора $n = 600$ об/мин. Массой балок в расчетах пренебречь. Поперечное сечение балок *KD* и *AB* состоит из двух двутавров №20 ($I_x = 1840 \cdot 10^{-8}$ м^4; $W_x = 184 \cdot 10^{-6}$ м^3). Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м^2.

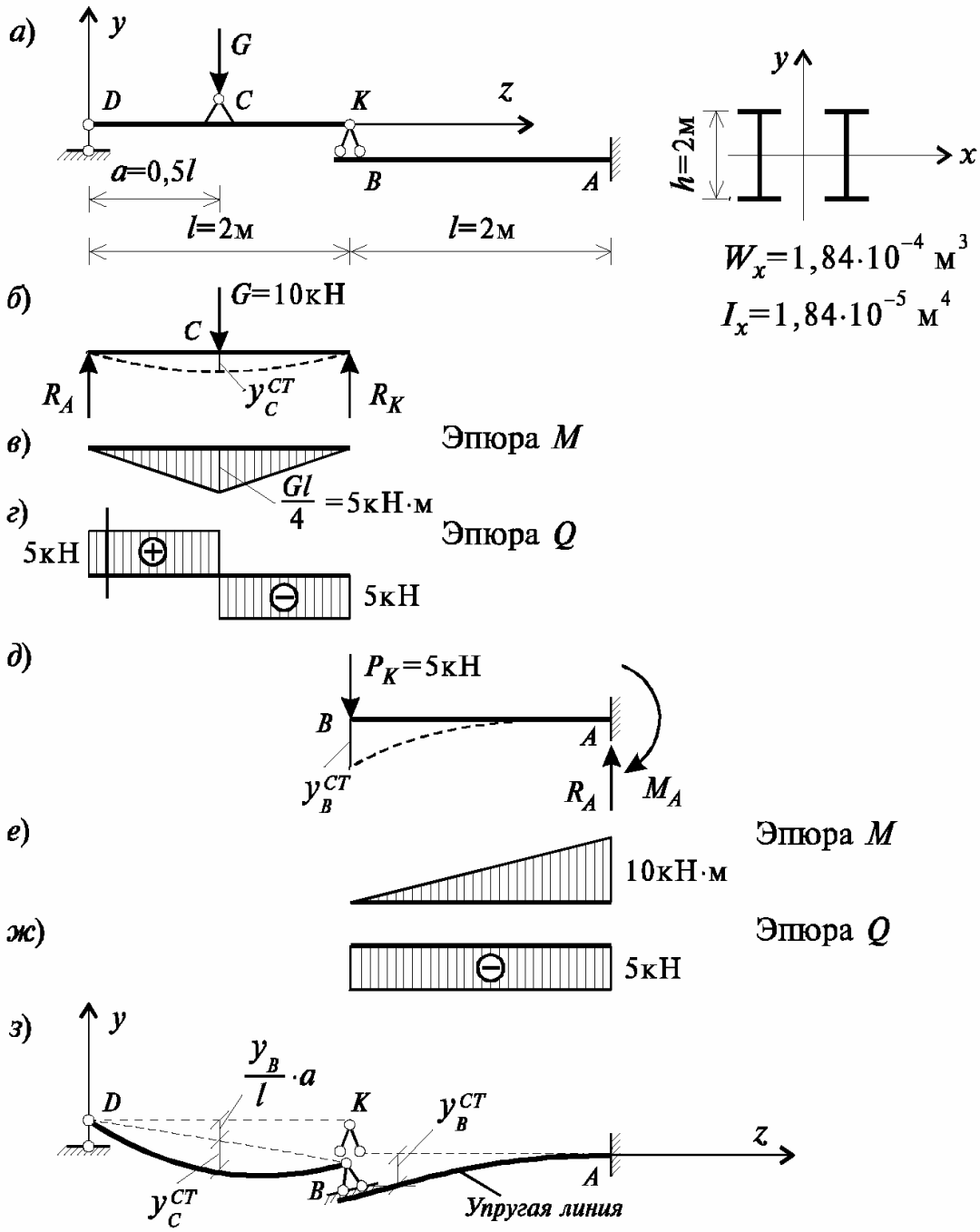


Рис. 8.4

Решение

1. *Определение статического прогиба в сечении C балки KD и статического напряжения в сечении y заделки A*. Из уравнений равновесия статики $\Sigma m_D = 0$ и $\Sigma m_K = 0$ найдем опорные реакции в балке *KD* (рис. 8.4, *б*):

$$R_D = R_{\hat{E}} = \frac{G}{2} = \frac{10}{2} = 5\,\text{кН}.$$

На балку AB в точке $B(K)$ опоры на консоль передается нагрузка $P = 5$ кН, равная по величине опорной реакции R_K, но обратная по направлению. Из уравнений $\Sigma m_A = 0$ и $\sum y = 0$ определяем реактивные усилия в заделке A балки AB: $M_A = 10$ кН·м; $R_A = 5$ кН. Определив опорные реакции в балках, строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для балок KD и AB (рис. 8.4, *в*, *г*, *е*, *ж*). Зная величины изгибающих моментов, возникающих в опасных сечениях балок, определяем статические напряжения в сечениях C и A:

$$\sigma_A^{CT} = \pm\frac{M_A}{2W_X} = \pm\frac{10}{2\cdot 184\cdot 10^{-6}} = \pm 2{,}717\cdot 10^4\ \text{кН/м}^2;$$

$$\sigma_C^{CT} = \pm\frac{M_C}{2W_X} = \pm\frac{5}{2\cdot 184\cdot 10^{-6}} = \pm 1{,}359\cdot 10^4\ \text{кН/м}^2.$$

Для определения статического прогиба в точке C балки KD вначале предполагаем, что эта балка опирается на абсолютно жесткое основание. Используя метод начальных параметров, составляем уравнение прогибов, приняв начало координат в сечении D.

$$EI_x y_C^{CT} = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z + \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{Q_0 z^3}{3!} - \frac{G(z-a)^3}{3!}\Bigg|_{z>a^3},$$

где $y_0 = 0$, $M_0 = 0$, $\varphi_0 \neq 0$, $Q_0 = R_D = \dfrac{G(l-a)}{l}$.

Для нахождения φ_0 составим уравнение прогиба для сечения K в котором прогиб равен нулю из условий закрепления:

$$\text{Å} I_X y_C^{CT} = \text{Å} I_X y_0 + \text{Å} I_X \varphi_0 l + \frac{Q_0 l^3}{6} - \frac{G(l-a)^3}{6} = 0.$$

Так как $y_0 = 0$, то, решая это уравнение, получим:

$$\varphi_0 = \frac{G(l-a)^3}{6EI_x l} - \frac{G(l-a)l}{6EI_x}.$$

Подставив найденное значение φ_0 в уравнение прогиба для сечения C, получим формулу для определения y_C^{CT} :

$$y_C^{CT} = -\frac{G\,a^2(l-a)^2}{3\cdot l\cdot E I_X} = \frac{10\cdot 1^2\cdot 1^2}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 10^8\cdot 2\cdot 1980\cdot 10^{-8}} = 0{,}00021\text{ м}.$$

Для вычисления полного перемещения сечения C с учетом характера опирания балки KD на консольную балку необходимо найти прогиб консольной балки AB от действия на нее силы $P_K = -R_K = 5$ кН. Для этого, приняв начало координат в сечении B балки AB, составим уравнение метода начальных параметров для определения прогиба на конце консоли. При начале координат в точке B консоли известными параметрами будут: $M_0 = M_B = 0$; $Q_0 = Q_B = -P_K = -5$ кН, а неизвестными $y_0 = y_B \neq 0$; $\varphi_0 = \varphi_B \neq 0$. Неизвестные начальные параметры y_0 и φ_0 определим из уравнений прогиба и угла поворота для сечения A. Из условия закрепления балки AB имеем при $z = l = 2$ м $y_A = \varphi_A = 0$.

Составим уравнения метода начальных параметров:

$$E I_X\,\varphi = E J_X\,\varphi_0 - \frac{P_K\,z^2}{2}; \qquad \text{(а)}$$

$$E I_X\,y = E J_X\,y_0 + E J_X\,\varphi_0\,z - \frac{P_K\,z^3}{3!}. \qquad \text{(б)}$$

Приравняв к нулю уравнение (а) при $z = l$ м, определяем φ_0:

$$\varphi_A = \varphi_0 = \frac{Р_К\,l^2}{2E I_X}.$$

Подставив найденное значение φ_0 в уравнение (б) и принимая $y = 0$ при $z = l$, получим выражение второго неизвестного начального параметра y_0, определяющего прогиб сечения B консольной балки AB:

$$Å I_X y_A = Å I_X y_0 + \frac{P_К\,l^3}{2} - \frac{P_К\,l^3}{6} = 0;$$

$$Å I_X y_0 = \frac{P_К\,l^3}{6} - \frac{P_К\,l^3}{2} = -\frac{P_К\,l^3}{3};$$

$$y_0 = y_B^{CT} = -\frac{P_К\,l^3}{3Å I_X} = -\frac{5\cdot 2^3}{3\cdot 2\cdot 10^8\cdot 2\cdot 1840\cdot 10^{-8}} = 0{,}00181\text{ м}.$$

Знак “минус” говорит о том, что конец консольной балки переместится вниз.

Определив прогиб y_B^{CT} и изобразив эпюру перемещений системы (рис. 8.4, *з*), вычислим величину полного перемещения сечения C по формуле:

$$y_C^{CT.\,\Pi\,\Pi\,\text{ЕЛ}} = y_C^{\tilde{N}T} + \frac{y_B^{CT}}{l}a = -0{,}00021 - \frac{0{,}00181 \cdot 1}{2} = -0{,}001115 \text{ м}.$$

2. *Определение динамического коэффициента и коэффициента эквивалентности.* Максимальное значение системы внешних сил принимает значение $G + \beta \cdot P_0$. Далее определяем коэффициент эквивалентности:

$$K_Д = \frac{G + P_0 \cdot \beta}{G} = 1 + \frac{P_0}{G} \cdot \beta,$$

где $Ð_0 = \frac{Ð}{g}\omega^2 e$ – амплитудное значение инерционной силы; $\beta = \frac{1}{1 - (\omega/\varphi)^2}$ – коэффициент динамичности. Здесь $\varphi = \sqrt{\frac{g}{y_C^{CT.\,\Pi\,\Pi\,\text{ЕЛ}}}}$ – частота собственных колебаний; $\omega = \frac{\pi n}{30}$ – частота возмущающей силы.

В рассматриваемом примере:

$$\varphi = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}001115}} \cong 93{,}8 \text{ 1/с}; \quad \omega = \frac{3{,}14 \cdot 600}{30} = 62{,}8 \text{ 1/с};$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{62{,}8}{93{,}8}\right)^2} = 1{,}81; \quad P_0 = \frac{1{,}0}{9{,}81}(62{,}8)^2 \cdot 0{,}002 = 0{,}804 \text{ кН};$$

$$Ê_Ä = 1 + \frac{0{,}804}{10} \cdot 1{,}81 = 1{,}145.$$

3. *Определение прогиба и напряжений.* Максимальное значение напряжения и прогиб, возникающие от совместного действия статических и динамических нагрузок, определяем по формулам:

$$\sigma_{\tilde{N}}^{Ä\text{È}\,\text{Í}} = \sigma_C^{\tilde{N}T}\, Ê_Ä = \pm 1{,}358 \cdot 10^4 \cdot 1{,}145 \approx \pm 1{,}5549 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2,$$

$$y_C^{Ä\text{È}\,\text{Í}\;\;\Pi\,\Pi\,\text{ЕЛ}} = y_{\tilde{N}}^{\tilde{N}T.\,\Pi\,\Pi\,\text{ЕЛ}}\, Ê_Ä = -0{,}001115 \cdot 1{,}145 = -0{,}00127 \text{ м}.$$

При коэффициенте $K_Д = 1{,}145$ найдем также напряжение в сечении A балки AB:

$$\sigma_Ä^{Ä\text{È}\,\text{Í}} = \pm 2{,}717 \cdot 10^4 \cdot 1{,}145 = \pm 3{,}11 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2.$$

Следовательно, полученное значение напряжения больше, чем напряжение в сечении C, где установлен электромотор. Итак, сечение в заделке в данном примере является наиболее опасным $\left(\sigma_A^{ÄÈÍ} > \sigma_C^{ÄÈÍ}\right)$, и, следовательно, это обстоятельство необходимо учитывать при проверке прочности составных конструкций.

С увеличением числа оборотов двигателя возрастают динамические напряжения и прогибы балок. Поэтому при проектировании конструкций не следует допускать наступления резонанса ($\omega = \varphi$), при котором может наступить разрушение конструкции.

8.4. Соударение твердого тела и системы с одной степенью свободы

Задача соударения различных механических систем часто встречается в инженерной деятельности в различных сферах, поэтому имеет большое практическое значение.

Взаимодействие тел, при котором за очень малый промежуток времени скачкообразно изменяются скорости взаимодействующих тел, называется *ударом*. В период взаимодействия соударяемых тел между ними развивается результирующая *контактная сила*. Хотя время действия контактной силы обычно очень мало и измеряется микро– или миллисекундами, она развивается очень быстро и принимает большие значения.

Задача соударения твердых деформируемых тел в механике, как правило, относится к классу *динамических контактных задач со смешанными граничными условиями*, содержащими в себе многие трудности математического порядка при их решении, которые не всегда могут быть преодолены простыми инженерными способами. Эти трудности в первую очередь связаны с определением с определением характера изменения функции напряжения в зоне контакта соударяемых тел по пространственным координатам и во времени. Большие сложности возникают и при учете волновых процессов, возникающих, как в зоне контакта, так и внутри соударяемых тел. Например, *дифракционных* волновых процессов по контуру в зоне контакта, и *интерференционных* явлений внутри соударяемых тел. Здесь существенное значение приобретает и учет фактора *рассеяния энергии*, трудно поддающийся анализу в данном случае.

Исходя из вышеизложенного, ниже при решении задач, применяется упрощенный инженерный подход, основанный на следующих упрощающих предпосылках.

При взаимодействии соударяемых тел они принимаются или идеально упругими, или абсолютно твердыми. Деформации в упругих соударяемых телах происходят мгновенно.

С применением энергетического подхода рассмотрим соударение падающего груза массой M с высоты h на систему с одной степенью свободы (рис. 8.5). Считаем, что масса балки m сосредоточена в месте соударения.

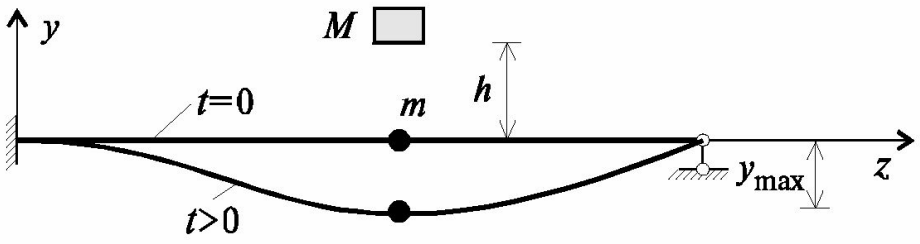


Рис. 8.5

Энергетический подход является наиболее предпочтительным в тех случаях, когда требуется определить только максимальные значения напряжений, динамических прогибов и не ставится задача определения законов движения заданной системы.

Составим энергетический баланс заданной системы в момент возникновения максимальных прогибов балки:

$$K_0 + \Pi = U + K, \tag{8.8}$$

где $\hat{E}_0 = \frac{\grave{I}\ v_0^2}{2} = \frac{M}{2} 2gh = M\,gh = Gh$ – кинетическая энергия падающего груза в момент соударения с балкой; $\Pi = (M + m)\cdot g\cdot y_{max}$ –работа внешних сил на перемещение y_{max}; $U = \frac{1}{2}\cdot\frac{y_{max}^2}{\delta_{11}}$ – потенциальная энергия деформации балки; K – кинетическая энергия системы при $y = y_{max}$.

Так как в состоянии наибольшего отклонения балки, $y = y_{max}$, $\dot{y} = 0$, то для указанного момента времени $K = 0$. С учетом вышеизложенного (8.8) принимает вид:

$$M\,gh + (M + m)\,gy_{max} = \frac{1}{2}\cdot\frac{y_{max}^2}{\delta_{11}}, \tag{8.9}$$

или

$$y_{max}^2 - 2\left(1 + \frac{m}{M}\right) M\,g\,\delta_{11}\,y_{max} - 2\delta_{11} M\,gh = 0. \tag{8.10}$$

Величина δ_{11} – прогиб, который получила бы балка под действием единичной статической силы, приложенной в месте удара. Следовательно,

$y^{CT} = Mg\delta_{11}$ представляет собой прогиб который получила бы балка под действием статически прикладываемой силы, равной весу падающего груза $G = Mg$. Тогда уравнение (8.10) можно представить в виде:

$$y_{\max}^2 - 2\left(1 + \frac{m}{M}\right) \cdot y^{CT} \cdot y_{\max} - 2y^{CT} \cdot h = 0 .$$

Из решения последнего уравнения получаем:

$$y_{\max} = y^{CT}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \cdot y^{CT}}}\right). \qquad (8.11)$$

Отсюда, учитывая, что коэффициент динамичности определяет во сколько раз максимальный прогиб при динамическом нагружении больше прогиба, возникающего при статическом характере приложения нагрузки, получим:

$$\beta = \frac{y_{\max}}{y^{CT}} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 y^{CT}}}\right]. \qquad (8.12)$$

Величина коэффициента динамичности β, как показывает выражение (8.12), зависит главным образом от жесткости рассматриваемой системы в направлении удара и от кинетической энергии падающего груза в момент соударения.

Для упругих систем динамические напряжения и остальные внутренние силовые факторы определяются по той же схеме, как и прогибы. Например, для напряжений, имеем:

$$\sigma^{ДИН} = \beta \cdot \sigma^{CT} . \qquad (8.13)$$

В тех случаях, когда масса балки m мала, по сравнению с массой груза M, из (8.12), принимая $m = 0$, получим:

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y^{CT}}} . \qquad (8.14)$$

В частности, если груз прикладывается на упругую систему мгновенно, тогда задавая $h = 0$ из (8.14), коэффициент динамичности принимает значение $\beta = 2$.

8.5. Пример расчета (задача № 17)

Груз $G = 1{,}2$ кН падает с высоты $h = 0{,}12$ м в точку C двутавровой балки KD, опирающейся на упругое сооружение, состоящее из двух балок AK и DM (рис. 8.6, *а*). Сечение балки KD–двутавр №18 ($I_x = 1290 \cdot 10^{-8}$ м^4; $W_x = 143 \cdot 10^{-6}$ м^3). Сечение балок AK и DM – двутавр №30 ($I_x = 7080 \cdot 10^{-8}$ м^4; $W_x = 472 \cdot 10^{-6}$ м^3). Длина балок $l = 1{,}2$ м. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м^2.

Определить динамические напряжения в опасных сечениях балок. Сравнить полученные напряжения с теми, которые появятся в балках, если балка KD будет опираться на абсолютно жесткое основание.

Решение

Из уравнений равновесия балки $\Sigma m_K = 0$ и $\Sigma m_D = 0$ находим опорные реакции R_K, R_D:

$$R_K = \frac{P(l-a)}{l} = \frac{1{,}2 \cdot (1{,}2 - 0{,}4)}{1{,}2} = 0{,}8 \text{ êÍ} \; ; \; R_D = \frac{Pa}{l} = \frac{1{,}2 \cdot 0{,}4}{1{,}2} = 0{,}4 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности найденных опорных реакций составляем уравнение равновесия $\Sigma y = 0$: $0{,}8 + 0{,}4 - 1{,}2 = 0$; $0 = 0$.

Затем строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для рассматриваемой балки KD и двух консольных балок AK и DM (рис. 8.6, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*).

1. *Определение полного статического прогиба сечения C балки KD*. С начала определим статический прогиб сечения C балки KD при опирании ее на абсолютно жесткое основание. Составим уравнение прогиба методом начальных параметров, приняв начало координат в сечении K:

$$EI_X y_{\tilde{N}}^{\tilde{N}T} = EI_X y_0 + EI_X \varphi_0 z + \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{Q_0 z^3}{3!}. \qquad (8.15)$$

При этом, $y_0 = 0$; $M_0 = 0$; $\varphi_0 \neq 0$; $Q_0 = R_K$. Для нахождения φ_0 используем условие отсутствия прогиба в сечении D $y_D = 0$. При $z = 1$ м имеем:

$$EI_X \varphi_0 l + \frac{R_K \cdot l^3}{6} - \frac{P(l-a)^3}{6} = 0; \quad \varphi_0 = \frac{P(l-a)^3}{6EI_X l} - \frac{P(l-a)l^3}{6EI_X l^2}.$$

Теперь, подставив найденное значение φ_0 в уравнение (8.15), получим формулу для определения прогиба сечения C:

$$y_C^{CT} = -\frac{Pa^2(l-a)^2}{3 \cdot l \cdot EI_x} = -\frac{1{,}2 \cdot 0{,}4^2 \cdot (1{,}2-0{,}4)^2}{3 \cdot 1{,}2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = -1{,}32 \cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

Для определения полного прогиба сечения C с учетом упругого характера опирания балки KD (рис. 8.6, *ж*) необходимо предварительно найти прогибы концов консольных балок AK и DM. Для этого воспользуемся формулой, полученной в задаче № 16:

$$y_K^{CT} = -\frac{R_K l^3}{3EI_x} = -\frac{0{,}8 \cdot 1{,}2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = -3{,}25 \cdot 10^{-5}\ \text{м};$$

$$y_D^{CT} = -\frac{R_D l^3}{3EI_x} = -\frac{0{,}4 \cdot 1{,}2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = -1{,}63 \cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

Эпюра перемещений для составной конструкции из балок изображена на рис. 8.6, *ж*. Величину полного перемещения сечения C балки с учетом перемещения его в результате смещения опор балки KD, опирающейся на консольные балки, определяем по формуле:

$$y_C^{CT.ПОЛН} = y_D^{CT} + \frac{\left(y_K^{CT} - y_D^{CT}\right)}{l}(l-a) + y_C^{CT} =$$

$$= -\left(1{,}63 + \frac{(-3{,}25+1{,}63)}{1{,}2} \cdot 0{,}8 - 1{,}32\right) \cdot 10^{-5} = -4{,}04 \cdot 10^{-5}.$$

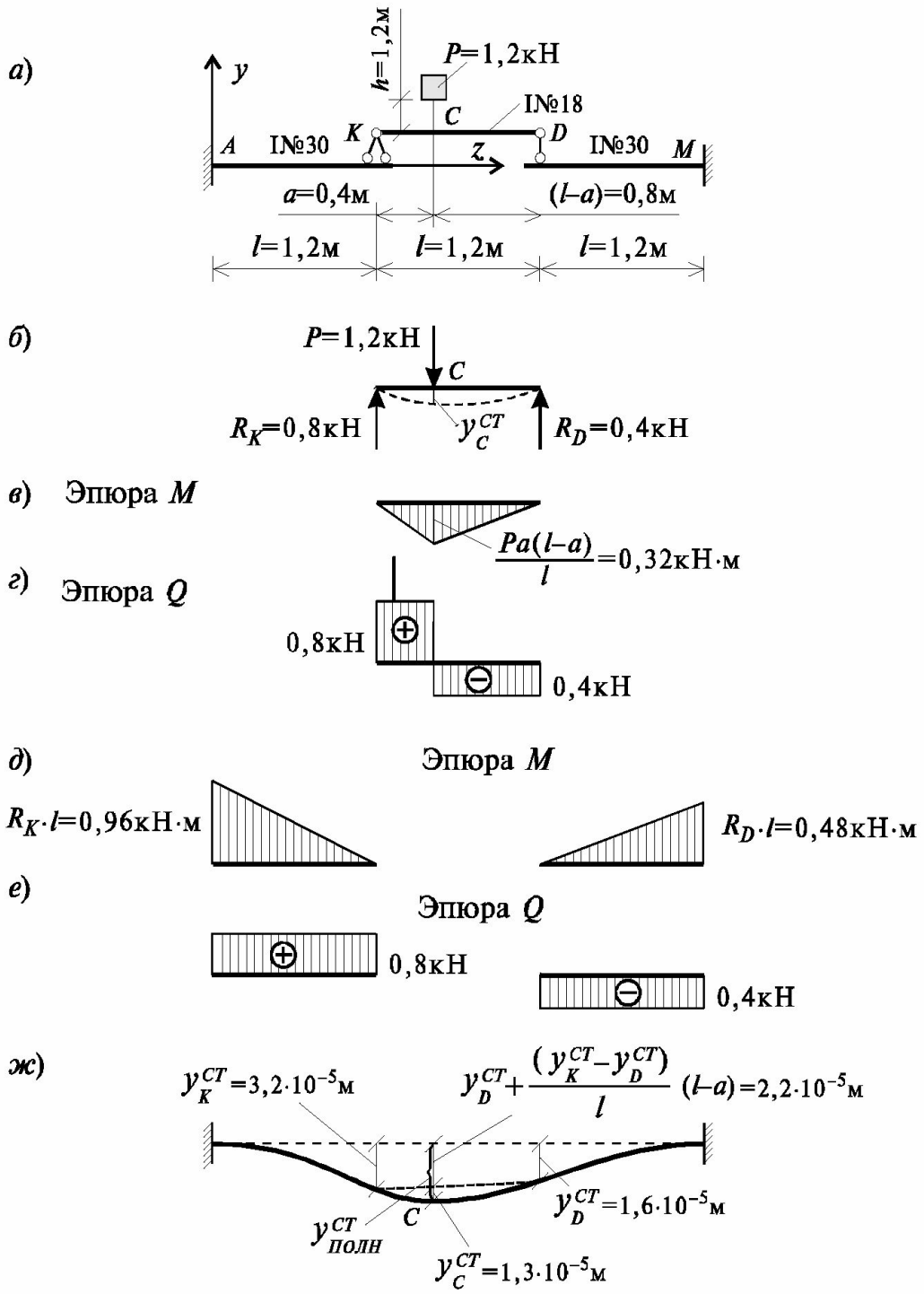


Рис. 8.6

2. *Определение динамических коэффициентов и напряжений.* Динамический коэффициент при падении груза G на бал-

ку KD, опирающуюся на консольные балки AK и DM, определяем по формуле:

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{\text{ст.дин}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0{,}12}{4{,}04 \cdot 10^{-5}}} = 1 + \sqrt{1 + 5940{,}6} \approx 78{,}10,$$

а при опирании балки KD на абсолютно жесткое основание –

$$\beta' = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_C^{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0{,}12}{1{,}32 \cdot 10^{-5}}} = 1 + \sqrt{1 + 18181{,}8} \approx 136{,}0.$$

Для вычисления динамических напряжений необходимо вначале определить статические напряжения, возникающие в сечении C:

$$\sigma_C^{ст} = \pm \frac{M_C}{W_x} = \pm \frac{0{,}32}{143 \cdot 10^{-6}} = \pm 2{,}2377 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2,$$

а затем динамические напряжения:

$$\sigma_{дин} = \beta \sigma_C^{ст}, \quad \sigma'^{дин}_C = \beta \sigma'^{ст}_C.$$

Динамические напряжения, возникающие в сечении C балки KD, опирающейся на консольные балки,

$$\sigma_{дин} = \pm 2{,}2377 \cdot 10^3 \cdot 78{,}1 = \pm 174{,}76 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2,$$

и динамические напряжения, возникающие в сечении C балки KD, опирающейся на абсолютно жесткое основание:

$$\sigma'^{дин}_C = \pm 2{,}2377 \cdot 10^3 \cdot 136 = \pm 304{,}36 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

Таким образом, если опоры лежат на абсолютно жестком основание, то в сечении C возникают динамические напряжения в $\frac{304{,}36}{174{,}79} \approx 1{,}7$ раза большие по величине. Статические напряжения, возникающие в сечении A:

$$\sigma_A^{ст} = \pm \frac{M_A}{W_x} = \pm \frac{0{,}96}{472 \cdot 10^{-6}} = \pm 2{,}0338 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

При динамическом коэффициенте $K_д = 78{,}1$, полученном в предположении упругого опирания балки KD в точках K и D, находим динамические напряжения в сечении A:

$$\sigma_A^{дин} = \pm 2{,}034 \cdot 10^3 \cdot 78{,}1 = \pm 158{,}85 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

Статическое и динамическое напряжения в сечении M балки DM:

$$\sigma_M^{ст} = \pm \frac{M_M}{W_x} = \pm \frac{0{,}48}{472 \cdot 10^{-6}} = \pm 1{,}0169 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

$$\sigma_M^{дин} = \pm 1{,}017 \cdot 10^3 \cdot 78{,}1 = \pm 79{,}42 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

Следовательно, вне зависимости от того, на какое основание опирается балка KD, опасное сечение находится в точке удара.

9. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

9.1. Основные характеристики цикла и предел усталости

Многие детали машин и механизмов, а также конструкции сооружений в процессе эксплуатации подвергаются циклически изменяющимся во времени воздействиям. Если уровень напряжений, вызванный этими воздействиями, превышает определенный предел, то в материале формируются необратимые процессы накопления повреждений, которые в конечном итоге приводят к разрушению системы.

Процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к разрушению, называется *усталостью*. Свойство материала противостоять усталости называется *выносливостью*.

Для раскрытия физической природы процесса усталостного разрушения в качестве примера рассмотрим ось вагона, вращающуюся вместе с колесами (рис. 9.1, *а*), испытывающую циклически изменяющиеся напряжения, хотя внешние силы и являются постоянными величинами. Происходит это в результате того, что части вращающейся оси оказываются попеременно то в растянутой, то в сжатой зонах.

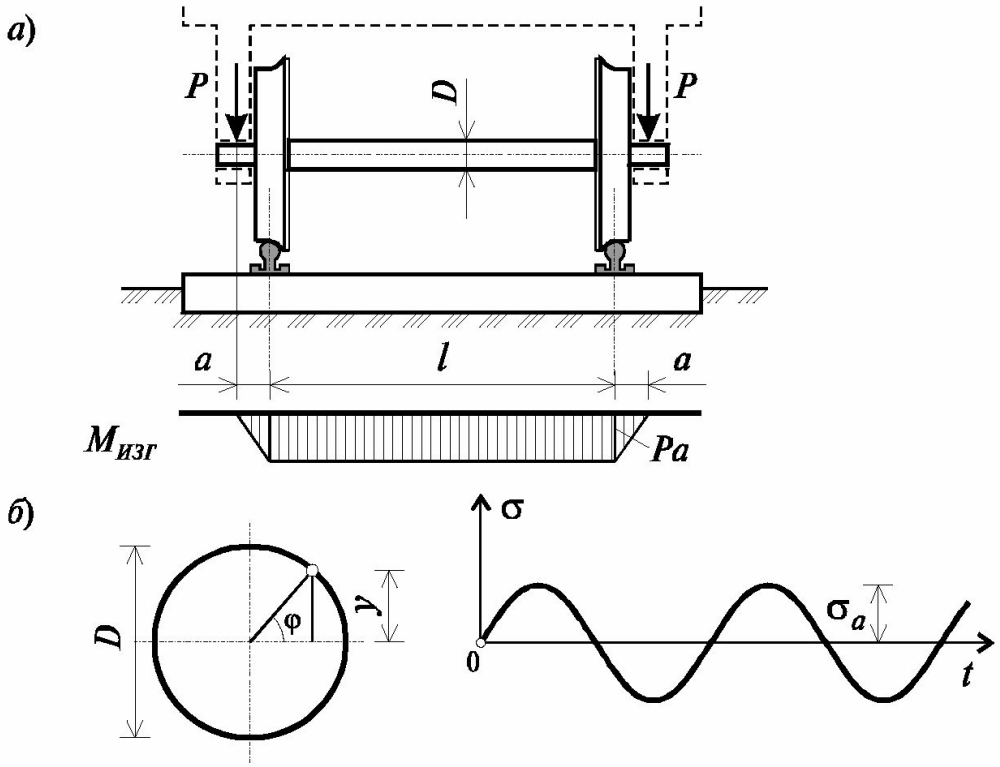


Рис. 9.1

В точке A (рис. 9.1, *б*) поперечного сечения оси вагона имеем:

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x},$$

где $y = (D/2)\cdot\sin\varphi$, $\varphi = \omega t$, а ω – круговая частота вращения колеса. Тогда:

$$\sigma = \frac{Pa}{I_x}\frac{D}{2}\sin\omega t.$$

Таким образом, нормальное напряжение σ в сечениях оси меняется по синусоиде с амплитудой:

$$\sigma_a = \frac{P_x D}{2I_x}.$$

Опыт показывает, что при переменных напряжениях после некоторого числа циклов может наступить разрушение детали (усталостное разрушение), в то время, как при том же неизменном во времени напряжении разрушения не происходит.

Число циклов до момента разрушения зависит от величины σ_a, и меняется в широких пределах. При больших напряжениях для разрушения бывает достаточно 5÷10 циклов, а при меньших напряжениях разрушение может наступить при гораздо большем числе циклов или вообще не наступить.

Пусть напряжения изменяются по закону, представленному на рис. 9.2. Величина

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \qquad (9.1)$$

называется *коэффициентом асимметрии цикла*. В тех случаях, когда $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $R = -1$ и цикл называется *симметричным*. Если $\sigma_{min} = 0$ или $\sigma_{max} = 0$, то $R = 0$ и цикл называется *нулевым* или *пульсационным*. При простом растяжении или сжатии (когда $\sigma_{max} = \sigma_{min}$) $R = +1$. Циклы, имеющие одинаковый коэффициент асимметрии называются *подобными*.

Введем две следующие величины:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2},$$

где σ_m – средние напряжения цикла, σ_a – амплитуда цикла.

Тогда, в общем случае, цикл может быть представлен как сумма σ_m и напряжения, меняющегося по симметричному циклу с амплитудой σ_a, т.е. $\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin\omega t$.

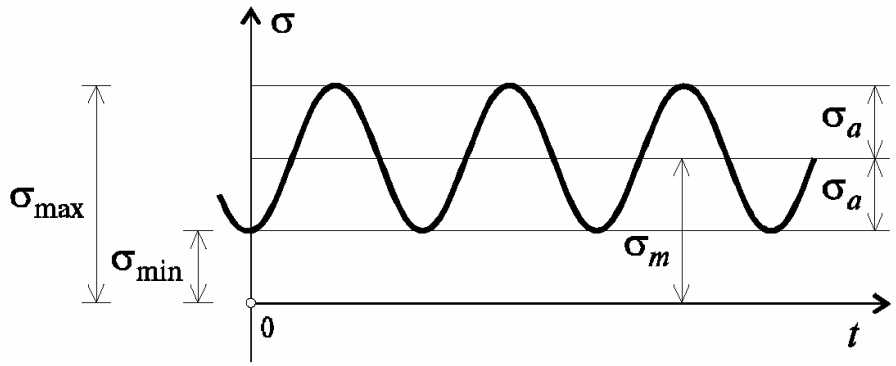


Рис. 9.2

Следует отметить, что не при всех периодически изменяющихся напряжениях происходит разрушение материала. Для этого напряжения должны превзойти некий предел – *предел усталости* или *выносливости*. Предел усталости – наибольшее значение максимального напряжения подобных циклов σ_{max} (или σ_{min}, если $|\sigma_{max}| < |\sigma_{min}|$), которое не вызывает усталостного разрушения материала при неограниченном количестве циклов нагружения.

Из определения следует, что предел усталости зависит от коэффициента асимметрии цикла и обозначается σ_R, где R – коэффициент асимметрии цикла. Экспериментально доказано, что наименьшее значение предел усталости принимает при симметричном цикле.

Для цветных металлов и для закаленных до высокой твердости сталей, так как они разрушаются при любом значении напряжений, вводится понятие условного предела усталости. За условный предел усталости принимается напряжение, при котором образец способен выдержать 10^8 циклов.

Обычно, для сталей, предел усталости при изгибе составляет $\sigma_{-1} \approx (0{,}4 \div 0{,}5)\,\sigma_{BP}$. Для высокопрочных сталей $\sigma_{-1} \approx (400 + 0{,}167\sigma_{BP})$ МПа. Для цветных металлов $\sigma_{-1} \approx (0{,}25 \div 0{,}5)\,\sigma_{BP}$. При кручении для обычных сталей имеем $\tau_{-1} \approx 0{,}56\,\sigma_{-1}$. Для хрупких металлов $\tau_{-1} \approx 0{,}8\,\sigma_{-1}$.

Естественно, что определить экспериментальным путем предел усталости для каждого из возможных значений коэффициента асимметрии цикла R невозможно. На практике поступают следующим образом: для нескольких характерных значений R находят предел усталости σ_R и строят диаграмму усталостной прочности материала (рис. 9.3), где по оси абсцисс откладываются значения среднего напряжения σ_m, а по оси ординат – амплитудного напряжения σ_a, предельных циклов.

Каждая пара значений σ_m и σ_a, характеризующая предельный цикл изображается точкой на этой диаграмме. Совокупность таких точек образует кривую AB (рис. 9.3), отделяющую безопасную область (содержащую начало координат) от области циклических разрушений. На рис. 9.3 точка A диаграммы соответствует пределу прочности при статическом нагружении, а т. B – при симметричном цикле нагружения. Любой из возможных циклов может быть изображен на этой диаграмме рабочей точкой (*Р.Т.*) с координатами (σ_m, σ_a) и в зависимости от того, в какую из областей попала точка можно судить о безопасности данного цикла.

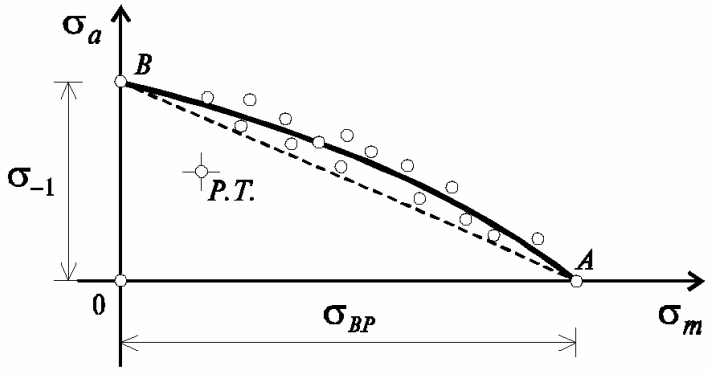


Рис. 9.3

9.2. Влияние концентраций напряжений, состояния поверхности и размеров детали на усталостную прочность

На величину предела усталости влияют многие факторы. Рассмотрим некоторые из них.

Одним из основных факторов, оказывающих существенное влияние на усталостную прочность, является *концентрация напряжений*. Основным показателем местных напряжений является коэффициент концентрации напряжений:

$$\hat{E}_T = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{[\,]}}, \qquad (9.2)$$

где σ_{max} – наибольшее местное напряжение, $\sigma_{ном}$ – номинальное напряжение. Например, для полосы с отверстием (рис. 9.4) от действия продольной силы P в кольцевых сечениях, имеем:

$$\sigma_{[\,]} = \frac{Ð}{F}.$$

Определенный по (9.2) коэффициент концентрации напряжений не учитывает многих реальных свойств материала (его неоднородность, пластичность и т. д.), в связи с чем, вводится понятие эффективного коэффициента концентрации K_{-1}.:

$$K_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}},$$

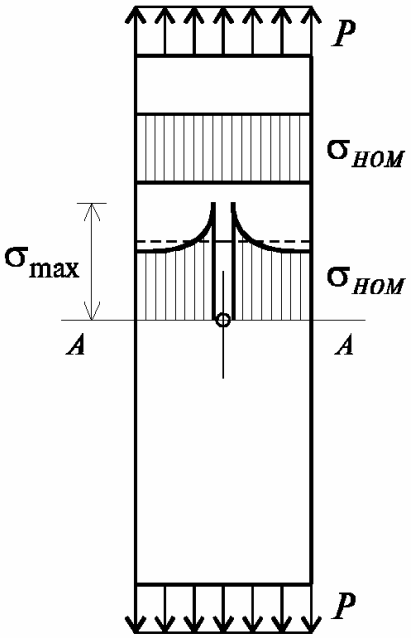


Рис. 9.4

где σ_{-1} – предел усталости при симметричном цикле на гладких образцах, σ'_{-1} – предел усталости при симметричном цикле на образцах с наличием концентрации напряжений.

Между K_T и K_{-1} существует следующая зависимость:

$$K_{-1} = 1 + q\,(K_T - 1), \qquad (9.3)$$

где q – коэффициент чувствительности материала к местным напряжениям, $q \approx 1$ – для высокопрочных сталей; $q = 0{,}6 \div 0{,}8$ – для конструкционных сталей.

При расчетах на усталостную прочность, особенности, связанные *с качеством обработки поверхности* детали, учитываются коэффициентом качества поверхности, получаемом при симметричных циклах нагружения:

$$\beta = \frac{\sigma_{-1n}}{\sigma_{-1}}, \qquad (9.4)$$

где σ_{-1} – предел усталостной прочности, полученный на испытаниях образцов, имеющих стандартную обработку поверхности, σ_{-1n} – предел выносливости рассматриваемой детали.

На рис. 9.5 приведены значения β в зависимости от качества обработки поверхности стального изделия и прочности материала σ_{BP}.

Прямая 1 относится к шлифованным образцам, 2 – к образцам с полированной поверхностью, 3 – к образцам, имеющим поверхность обработанную резцом, и наконец, 4 – к образцам поверхность которых обработана после проката.

Для учета *масштабного фактора* вводятся соответствующий коэффициент:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_{-1}}; \quad \varepsilon_\tau = \frac{\tau_{-1D}}{\tau_{-1}}. \qquad (9.5)$$

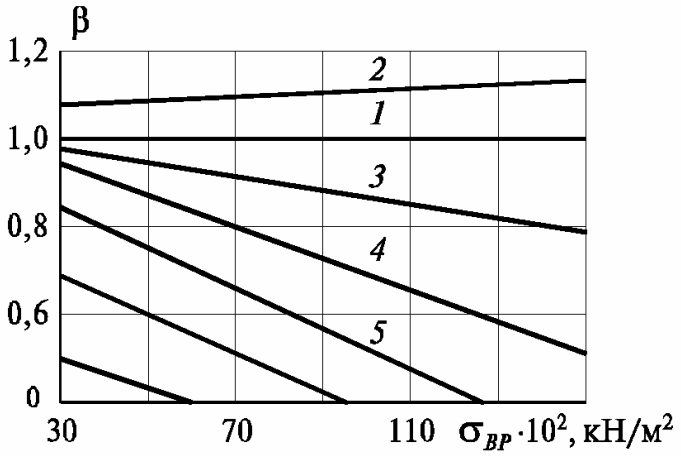


Рис. 9.5

где σ_{-1D}, τ_{-1D} – предел усталостной прочности рассматриваемой детали на растяжение и сдвиг, соответственно; σ_{-1}, τ_{-1} –предел усталостной прочности образца с диаметром d =(8 ÷ 12) · ·10^{-3} м.

Графики ε_σ, ε_τ изображены на рис. 9.6, где кривая *1* относится к углеродистой стали, *2* – к полированной стали, *3* – к полированной стали с наличием концентрации напряжений, *4* – к сталям, имеющим высокую степень концентраций напряжений.

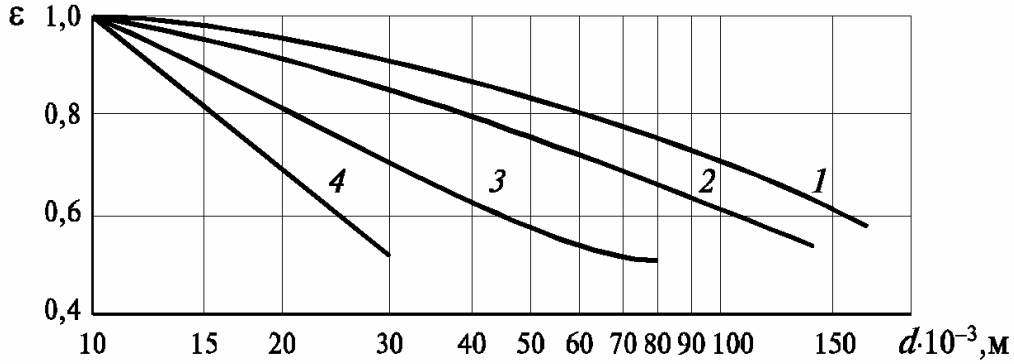


Рис. 9.6

9.3. Запас усталостной прочности и его определение

Сначала построим диаграмму усталостной прочности (часто, для простоты рассуждений предельную линию представляют в виде прямой) и покажем на ней рабочую точку M цикла (с координатами σ_m и σ_a) в случае, если рассматриваемый элемент испытывает только простое растяжение и сжатие (рис. 9.7).

Рассмотрим все те циклы, рабочие точки которых лежат на одной прямой (рис. 9.7) и для которых справедливо выражение $\sigma_a = = \sigma_m \operatorname{tg}\alpha$. С учетом (9.1) и после несложных преобразований можно получить, что:

$$R = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}.$$

где R – коэффициент асимметрии цикла.

Значит, можно сделать вывод о том, что все подобные циклы лежат на одной прямой. Тогда, под запасом усталостной прочности будем понимать отношение отрезка ON к отрезку OM (рис. 9.7):

$$n_R = \frac{ON}{OM}, \qquad (9.6)$$

где точка M соответствует действующему циклу, а точка N получается вследствие пересечения предельной прямой и продолжения отрезка OM (рис. 9.7).

Это отношение характеризует степень близости рабочих условий к предельным для данного материала. В частном случае при постоянных статических нагрузках $\sigma_a = 0$, данное определение запаса прочности совпадает с обычным.

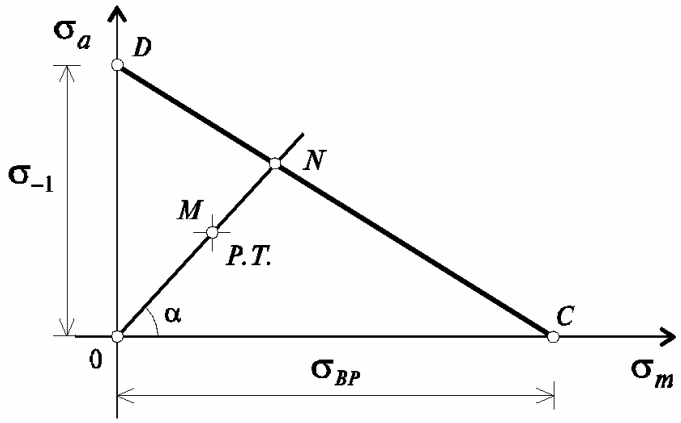


Рис. 9.7

Для определения n_{R_σ} (т.е. в ситуации когда действуют лишь нормальные напряжения) в инженерной практике применяется как графический, так и аналитический способ. При графическом способе строго по масштабу строится диаграмма предельных напряжений в системе координат σ_a и σ_m. Далее, на этой диаграмме наносится рабочая точка и определяется отношение величин отрезка ON и OM. Для определения расчетных зависимостей для n_{R_σ} воспользуемся условием подобия треугольников OND и OMK и получим:

$$n_{R_\sigma} = \frac{ON}{OM} = \frac{OD}{OK} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \dfrac{\sigma_{-1}\,\sigma_m}{\sigma_{BP}}}. \qquad (9.7)$$

Полученный коэффициент запаса соответствует идеальному образцу. Реальная же его величина зависит, как отмечалось выше, от геометрии, размеров и состояния поверхности образца, учитываемых коэффициентами K_{-1}, ε_σ и β, соответственно. Для этого необходимо предел усталости при симметричном нагружении уменьшить в $\frac{\beta\varepsilon_\sigma}{K_{-1}}$ раз, или, что тоже самое, амплитудное напряжение цикла увеличить в $\frac{K_{-1}}{\beta\varepsilon_\sigma}$ раз. И тогда (9.7) принимает вид:

$$n_{R_\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\hat{E}_Д\,\sigma_a + \frac{\sigma_{-1}\,\sigma_m}{\sigma_{BP}}}, \qquad (9.8)$$

где

$$K_Д = \frac{K_{-1}}{\beta\varepsilon_\sigma}. \qquad (9.9)$$

Аналогичным образом могут быть получены соотношения усталостной прочности и при чистом сдвиге. Эксперименты показывают, что диаграмма усталостной прочности для сдвига заметно отличается от прямой линии, свойственной простому растяжению–сжатию, и имеет вид кривой. В первом приближении эту кривую в координатных осях τ_a, τ_m можно представить в виде двух наклонных, как это изображено на рис. 9.8. Причем, если одна из них (ближняя к оси ординат) соответствует разрушению образца вследствие усталостных явлений, то другая – по причине наступления пластического состояния.

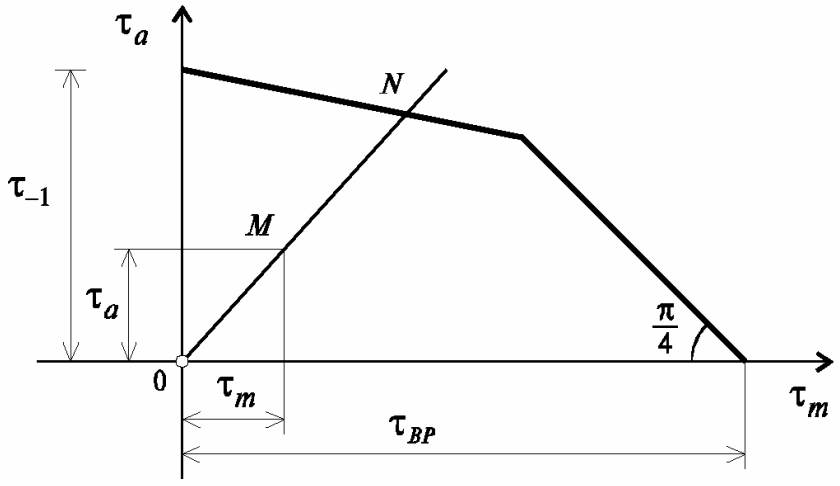


Рис. 9.8

В данном случае расчетная формула для n_{R_τ} записывается в виде

$$n_{R_\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_P \tau_a + \psi \tau_m}, \qquad (9.10)$$

где $\psi = \dfrac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}$ – эмпирическая величина, определенная на основе обработки экспериментальных данных.

При сложном напряженном состоянии, т.е. если в рабочей точке при действии внешних нагрузок одновременно возникают как нормальные, так и касательные напряжения, для вычисления n_R применяется следующая приближенная формула:

$$\frac{1}{n_R^2} = \frac{1}{n_{R_\sigma}^2} + \frac{1}{n_{R_\tau}^2}, \qquad (9.11)$$

где n_R – искомый коэффициент запаса усталостной прочности; n_{R_σ} – коэффициент запаса усталостной прочности в предположении, что касательные напряжения в рабочей точке отсутствуют; n_{R_τ} – коэффициент запаса прочности по усталости при предположении, что в рабочей точке нормальные напряжения отсутствуют.

Резюмируя заметим, как это было показано в настоящем разделе книги, в настоящее время в связи с тем, что физические основы теории твердого деформируемого тела недостаточно развиты, многие предпосылки современной теории усталостной прочности базируются на эмпирической основе. Отсутствие твердых предпосылок в теории выносливости, в современном виде лишает ее нужной строгости. Так как полученные эмпирические зависимости не являются универсальными, сами результаты расчетов являются достаточно приближенными. Однако указанные приближения оказываются допустимыми для решения инженерных задач.

9.4. Пример расчета (задача № 18)

Для цилиндрической клапанной пружины (рис. 9.9) двигателя внутреннего сгорания определить коэффициент запаса прочности аналитически и проверить его графически по диаграмме предельных амплитуд, построенной строго в масштабе.

Диаметр пружины $D = 0{,}04$ м, диаметр проволоки пружины $d = 0{,}004$ м. Сила, сжимающая пружину в момент открытия клапана, $P_{\max} = 0{,}240$ кН, в момент закрытия клапана – $P_{\min} = 0{,}096$ кН. Материал проволоки пружины – хромованадиевая сталь с механическими характеристиками, предел текучести $\tau_T = 900$ МПа, предел выносливости при сим-

метричном цикле τ_{-1} = 480 МПа, предел выносливости при нулевом (пульсирующем) цикле τ_0 = 720 МПа. Для проволоки пружины эффективный коэффициент концентрации напряжений k_τ = 1,05, коэффициент влияния качества обработки поверхности β = 0,84, коэффициент влияния абсолютных размеров поперечного сечения ε_τ = 0,96.

Решение

1. *Определение максимального* τ_{max} *и минимального* τ_{min} *напряжений в проволоке пружины и вычисление коэффициента асимметрии цикла R.* Для вычисления напряжений используем формулу:

$$\tau = k\frac{8PD}{\pi d^3},$$

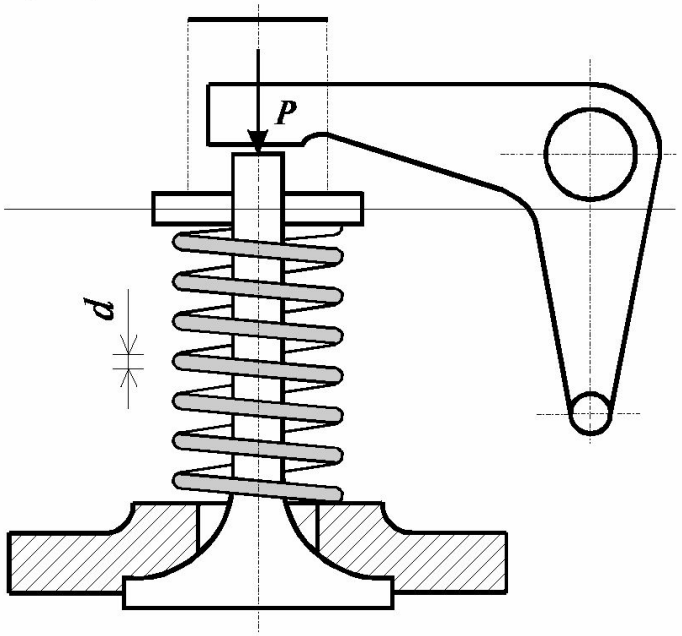


Рис. 9.9

где k – коэфф., учитывающий поперечную силу и неравномерность распределения напряжений от ее воздействия, а также влияние деформации изгиба вследствие кривизны витков пружины.

Этот коэффициент можно определить по приближенной формуле:

$$k = \frac{4C_n + 1}{4C_n - 4},$$

где $\tilde{N}_n = \frac{D}{d}$ – характеристика геометрии пружины. В данном примере $\tilde{N}_n = \frac{D}{d} = \frac{0{,}04}{0{,}004} = 10$, тогда $k = \frac{4 \cdot 10 + 1}{4 \cdot 10 - 4} = 1{,}14$.

Определим величины напряжений:

$$\tau_{max} = k\frac{8P_{max}D}{\pi d^3} = 1{,}14 \cdot \frac{8 \cdot 0{,}240 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3{,}14 \cdot 0{,}4^3 \cdot 10^{-6}} = 435{,}4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2,$$

$$\tau_{min} = k\frac{8P_{min}D}{\pi d^3} = 1{,}14 \cdot \frac{8 \cdot 0{,}096 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3{,}14 \cdot 0{,}4^3 \cdot 10^{-6}} = 174{,}210^3 \text{ кН/м}^2.$$

Коэффициент асимметрии цикла:

$$R = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} = \frac{174,2}{435,4} = 0,4 .$$

2. *Нахождение среднего* τ_m *и амплитудного* τ_a *напряжений цикла*. Найдем величину среднего и амплитудного напряжений цикла в зависимости от τ_{max} и τ_{min}:

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{435,4 + 174,2}{2} \cdot 10^3 = 304,8 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2,$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{435,4 - 174,2}{2} \cdot 10^3 = 130,6 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

3. *Определение коэффициента запаса прочности*. Деталь (пружина) может перейти в предельное состояние по усталости и по причине развития пластических деформаций. Коэффициент запаса прочности по усталости определяются по формулам (9.10):

$$n_{R_\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_P \tau_a + \psi \tau_m},$$

где τ_{-1} – предел выносливости при симметричном цикле; величины K_P и ψ определяются по зависимостям, приведенным в п.9.3:

$$\psi = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = \frac{2 \cdot 480 - 720}{720} = 0,333; \quad K_P = \frac{1,05}{0,84 \cdot 0,96} = 1,302 .$$

Коэффициент запаса усталостной прочности:

$$n_{R_\tau} = \frac{480 \cdot 10^3}{(1,302 \cdot 130,6 + 0,333 \cdot 304,8) \cdot 10^3} = 1,77 .$$

Коэффициент запаса по пределу текучести можно получить аналогичными рассуждениями, как и коэффициент запаса усталостной прочности, учитывая, что предельная прямая по текучести проходит под углом 45° к горизонту (рис. 9.8). В итоге:

$$n_T = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_m} = \frac{900 \cdot 10^3}{(130,6 + 304,8) \cdot 10^3} = 2,07 .$$

Так как, $1,77 < 2,07$, то коэффициент запаса прочности для пружины определяется усталостью и равен 1,77.

Для анализа рассмотрим ситуацию, когда в момент закрытия клапана на него действует сжимающая сила $P_{min} = 0,18$ кН. Тогда имеем:
минимальное значение напряжения:

$$\tau_{min} = 1{,}14 \cdot \frac{8 \cdot 0{,}180 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3{,}14 \cdot 0{,}4^3 \cdot 10^{-6}} = 326{,}6 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2;$$

среднее напряжение

$$\tau_m = \frac{435{,}4 + 326{,}6}{2} \cdot 10^3 = 381{,}0 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2;$$

амплитудное напряжение

$$\tau_{à} = \frac{435{,}4 - 326{,}6}{2} \cdot 10^3 = 54{,}4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2;$$

коэффициент запаса прочности по усталости

$$n_{R_\tau} = \frac{480 \cdot 10^3}{(1{,}302 \cdot 54{,}4 + 0{,}333 \cdot 381{,}0) \cdot 10^3} = 2{,}43;$$

коэффициент запаса прочности по пределу текучести

$$n_T = \frac{900 \cdot 10^3}{(54{,}4 + 381{,}0) \cdot 10^3} = 2{,}07.$$

Так как 2,07 < 2,43, то коэффициент запаса выбирается по пределу текучести и принимается равным 2,07.

10. ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

10.1. Напряженное состояние в точке. Уравнения равновесия

Чтобы охарактеризовать напряженное состояние в произвольной точке тела, находящегося в равновесном состоянии в общем случае нагружения, выделим в ее окрестности некоторый объем в виде элементарного параллелепипеда, грани которого перпендикулярны координатным осям (рис. 10.1).

Если размеры параллелепипеда уменьшать, он будет стягиваться в эту точку. В пределе (dx, dy, $dz \to 0$) все грани параллелепипеда пройдут через рассматриваемую точку и напряжения на соответствующих плоскостях параллелепипеда могут рассматриваться как напряжения в исследуемой точке.

Полное напряжение, возникающее на площадке параллелепипеда может быть разложено на три составляющие, одну по нормали к площадке и две в ее плоскости.

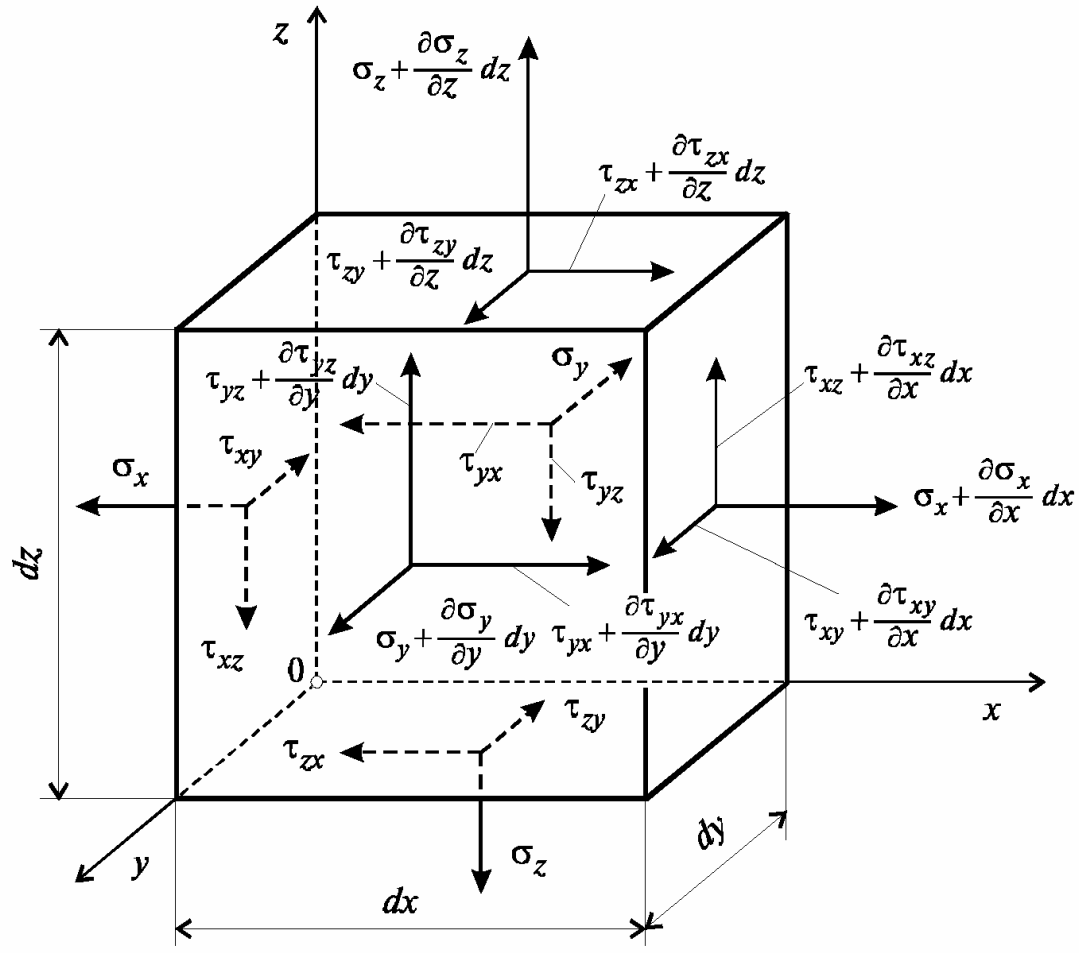


Рис. 10.1

Нормальное и касательное напряжение обозначаются через σ и τ, соответственно, с двумя индексами: σ_{xx}, σ_{yy},..., τ_{zx}. Первый индекс соответствует координатной оси, перпендикулярной к площадке на которой действует данное напряжение, а второй – оси, вдоль которой оно направлено. Поскольку, у нормальных напряжений оба индекса одинаковы, то для них применяют и одномерную индексацию: $\sigma_{xx} = \sigma_x$, $\sigma_{yy} = \sigma_y$, и $\sigma_{zz} = \sigma_z$. Ориентация осей является произвольной.

Правило знаков примем следующее: если внешняя нормаль к площадке совпадает по направлению с положительным направлением соответствующей оси, то напряжение считается положительным, если оно направлено вдоль положительного направления оси, вдоль которой оно действует. Так, на рис. 10.1 все напряжения положительные.

Из трех условий равновесия параллелепипеда в виде суммы моментов относительно координатных осей достаточно просто получить важные утверждения, что

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \qquad (10.1)$$

То есть, на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны по величине и направлены обе либо к ребру, либо от него. Это утверждение – *закон парности касательных напряжений*, сформулированный в общем виде.

Рассматривая же равновесие параллелепипеда в виде суммы сил по направлениям координатных осей, и отбрасывая величины второго порядка малости, легко получить дифференциальные уравнения его равновесия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \gamma_x = 0; \\
&\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \gamma_y = 0; \qquad (10.2) \\
&\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \gamma_z = 0,
\end{aligned}$$

где γ_x, γ_y, γ_z – составляющие объемных сил вдоль координатных осей.

С учетом закона парности касательных напряжений (10.1), уравнения (10.2) содержат шесть неизвестных напряжений: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}. Поскольку количество уравнений равновесия статики (10.2), меньше, чем количество неизвестных напряжений, то в общем случае задача определения напряженного состояния в произвольной точке сплошной среды нагруженного тела, является статически неопределимой.

10.2. Определение напряжений на произвольной площадке. Главные оси и главные напряжения

Из напряженного тела в окрестности произвольной точки выделим элементарный объем в виде тетраэдра (рис. 10.2).

Ориентация площадки в пространстве задается направляющими косинусами нормали v к ней – $l = \cos(x, v)$, $m = \cos(y, v)$, $n = \cos(z, v)$.

Вектор полного напряжения на произвольной площадке abc спроецируем на оси x, y и z. Обозначим эти проекции через $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$. Обозначая площадь треугольников abc, $a0b$, $b0c$, $a0c$ через dF, dF_x, dF_y, dF_z, соответственно будем иметь:

$$dF_x = dF \cdot l; \quad dF_y = dF \cdot m; \quad dF_z = dF \cdot n. \qquad (10.3)$$

Проецируя все силы, действующие на выделенный элемент, последовательно на оси x, y, z и с учетом (10.3) получим:

$$\begin{aligned} X &= \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n; \\ Y &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n; \\ Z &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \qquad (10.4)$$

Выразим нормальное напряжение σ_v на наклонной площадке через X, Y, Z:

$$\sigma_v = X \cdot l + Y \cdot m + Z \cdot n\,. \qquad (10.5)$$

Отсюда, с учетом (10.3) получим

$$\sigma_v = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{yz} \cdot m \cdot n + 2\tau_{zx} \cdot n \cdot l + 2\tau_{xy} \cdot l \cdot m\,. \qquad (10.6)$$

Рассмотрим множество секущих площадок произвольной ориентации, проходящих через исследуемую точку. По нормали к каждой площадке отложим отрезок $r = f(\sigma_v)$, координаты конца вектора которого будут следующими:

$$x = r \cdot l; \quad y = r \cdot m; \quad z = r \cdot n.$$

Исключая из (10.6) направляющие косинусы, получим

$$\sigma_v \cdot r^2 = \sigma_x \cdot x^2 + \sigma_y \cdot y^2 + \sigma_z \cdot z^2 + 2\tau_{yz} \cdot yz + 2\tau_{xy} \cdot xy + 2\tau_{xz} \cdot xz\,. \qquad (10.7)$$

Принимая обозначение

$$r^2 = \frac{k}{|\sigma_v|},$$

где k – произвольная постоянная, из (10.6) получим:

$$\sigma_x \cdot x^2 + \sigma_y \cdot y^2 + \sigma_z \cdot z^2 + 2\tau_{yz} \cdot yz + 2\tau_{xy} \cdot xy + 2\tau_{xz} \cdot xz = k. \qquad (10.8)$$

Из курса аналитической геометрии известно, что (10.8) представляет собой уравнение поверхности второго порядка в системе координат x, y, z. Следовательно путем поворота системы координат уравнение (10.8) можно преобразовать таким образом, чтобы попарные произведения исчезли, или иначе говоря коэффициенты попарных произведений принимали нулевые значения.

Это значит, что в произвольной точке напряженного тела существует такое положение системы координат x, y, z, в которой касательные напряжения τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} равны нулю.

Такие оси называются *главными осями*. Соответствующие им взаимно перпендикулярные площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на них – *главными напряжениями*. Принимаются такие обозначения: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Если в окрестности рассматриваемой точки определены положение главных площадок и главные напряжения, то существенно упрощается система уравнений (10.4). Они принимают вид:

$$X = \sigma_1 \cdot l; \quad Y = \sigma_2 \cdot m;$$
$$Z = \sigma_3 \cdot n.$$

Так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, то получим:

$$\frac{X^2}{\sigma_1^2} + \frac{Y^2}{\sigma_2^2} + \frac{Z^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

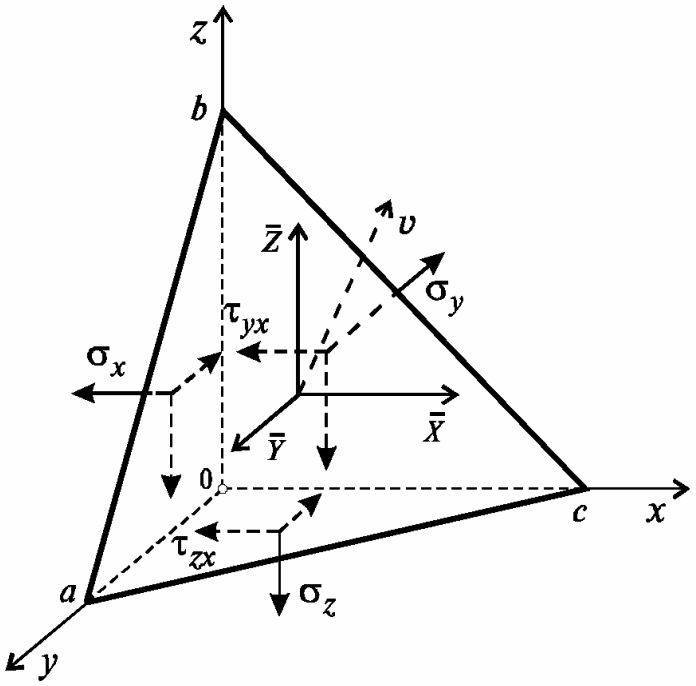


Рис. 10.2

Следовательно, геометрическое место концов вектора полного напряжения $P(X, Y, Z)$ образует эллипсоид, полуосям которого являются главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 (рис. 10.3). Полученный эллипсоид носит название *эллипсоида напряжений*. В случае равенства двух главных напряжений эллипсоид принимает форму тела вращения. Тогда каждая плоскость, проходящая через ось вращения становится главной. В случае, если все три главных напряжения равны между собой, то эллипсоид принимает форму сферы и в исследуемой точке все плоскости являются главными.

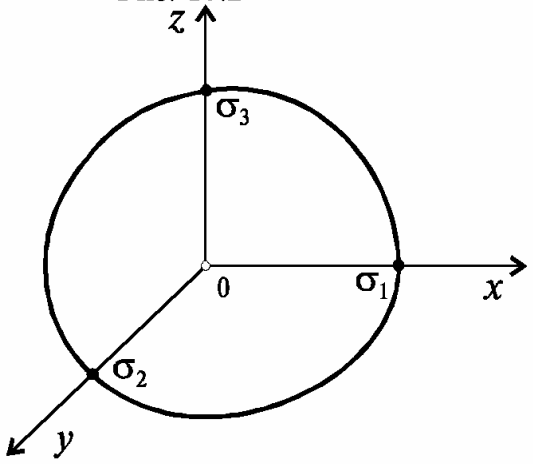


Рис. 10.3

Рассмотрим как определяются величины главных напряжений через заданные значения шести компонентов напряжений σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

в произвольной системе координат x, y, z. Возвращаясь к рис. 10.2, предполагаем, что наклонная площадка является главной.

Обозначая полное напряжение на этой площадке через S можем записать:

$$X = S \cdot l;\ Y = S \cdot m;\ Z = S \cdot n. \tag{10.9}$$

Соотношения (10.4) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} S \cdot l &= \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n; \\ S \cdot m &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n; \\ S \cdot n &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n; \end{aligned} \tag{10.10}$$

или

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - S) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0; \\ &\tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - S) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = 0; \\ &\tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - S) \cdot n = 0. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Так как, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, следовательно, l, m, n одновременно не могут быть равны нулю. Для того, чтобы система однородных уравнений (10.11) относительно l, m, n имела бы решение, отличное от нулевого, необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - S & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - S & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - S \end{vmatrix} = 0. \tag{10.12}$$

Отсюда

$$S^3 - S^2 I_1 + S I_2 - I_3 = 0, \tag{10.13}$$

где

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_2 = \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \tag{10.14}$$

Все три корня уравнения (10.13) являются вещественными и определяют значения главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3. Коэффициенты I_1, I_2, I_3 назы-

ваются *инвариантами напряженного состояния* и их значения не зависят от выбранной системы координат x, y, z.

Для определения положения главных площадок необходимо вычислить значения направляющих косинусов следующим образом. В два из трех уравнений системы (10.11) подставляются значения главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3, а в качестве третьего используется равенство $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Если $I_3 = 0$ очевидно, что один из корней уравнения (10.7) также будет равен нулю. В этом случае напряженное состояние является плоским или двухосным. В частности, напряженное состояние чистого сдвига представляет собой двухосное напряженное состояние, для которого имеется $\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$.

Если $I_2 = I_3 = 0$ то из уравнения (10.13) очевидно, что имеет место два нулевых корня и только одно из главных напряжений отлично от нуля. Напряженное состояние в этом случае называется одноосным. Данное обстоятельство имеет место при простом сжатии или растяжении бруса или при чистом изгибе.

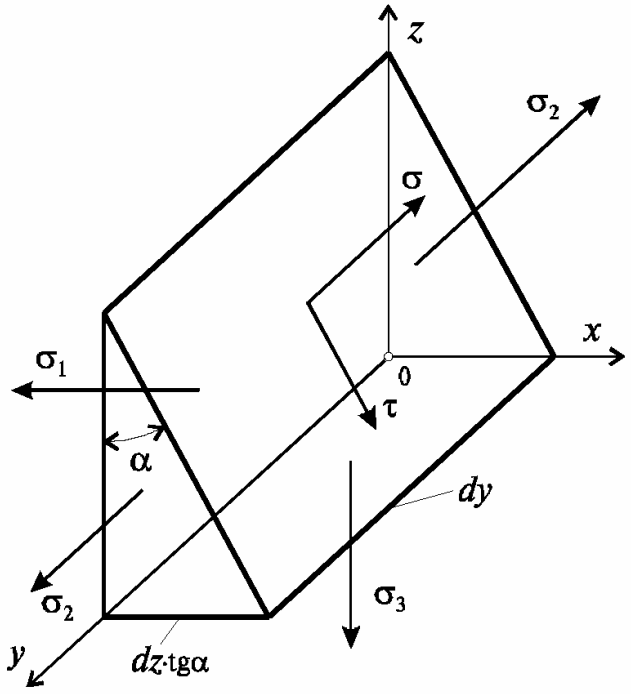


Рис. 10.4

На практике, если имеется сложное напряженное состояние, для выполнения расчетов на прочность необходимо выразить напряжения, действующие на произвольной площадке, проходящей через данную точку, через главные напряжения. С этой целью рассмотрим равновесие призмы, показанной на рис. 10.4.

Проецируя все силы, действующие на призму, на оси, совпадающие с векторами σ и τ (рис. 10.4), получим:

$$\sigma\, dy \frac{dz}{\cos\alpha} = \sigma_1\, dy\, dz \cos\alpha + \sigma_3\, dy\, dz \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha;$$

$$\tau\, dy \frac{dz}{\cos\alpha} = \sigma_1\, dy\, dz \sin\alpha - \sigma_3\, dy\, dz \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha.$$

Эти выражения можно преобразовать к виду:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha;$$
$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha. \qquad (10.15)$$

Рассматривая совместно полученные выражения для σ и τ, можно получить следующее выражение:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2.$$

В системе координат σ, τ это уравнение окружности. Полученный круг называется кругом Мора или круговой диаграммой напряженного состояния. В заключение заметим, что при $\alpha = \pi/4$ имеет место:

$$\tau = \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

10.3. Деформированное состояние в точке. Геометрические уравнения и уравнения неразрывности

Происходящие при нагружении тела перемещения его точек можно задать при помощи совокупности трех функций (см. п.1.5): $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ и $w(x,y,z)$, определяющих перемещения вдоль координатных осей x, y и z, соответственно. Достаточно просто можно показать, что деформации (линейные и угловые) выражаются через функции перемещений, (в случае малых перемещений, которые рассматриваются в сопротивлении материалов):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (10.16)$$

где ε_i – линейная деформация вдоль i–той оси координат, γ_{ij} –угловая деформация в плоскости $i0j$ ($i, j = x, y, z$) (см. рис. 10.1).

Правило знаков принимается следующее: для линейных деформаций – растяжению соответствует положительная деформация; для угловых деформаций положительное ее значение соответствует уменьшению прямого угла между положительными направлениями осей. По аналогии с напряженным состоянием, здесь также имеются *главные деформации* и главные площадки деформирования, которые являются инвариантами, независящими от осей координат.

Принятая в механике деформируемого тела гипотеза о сплошности среды, выражающаяся, в частности, в том, что в одну и ту же точку пространства не могут придти две материальные точки, равно, как и не допускается разрывов среды, находит свое воплощение в уравнениях неразрывности деформаций. Как видно из (10.16), шесть компонентов деформаций выражаются через три функции перемещений – следовательно между ними существует определенная связь в виде:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x\, \partial z}; \qquad (10.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x\, \partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\, \partial y}.$$

Убедиться в верности (10.17) можно просто – достаточно подставить в них выражения (10.16). В случае плоской задачи, за исключением первого уравнения системы (10.17), остальные уравнения превращаются в тождество.

В заключение заметим, что в каждой точке среды деформируемого тела всегда существуют три взаимно перпендикулярные плоскости, которые не испытывают сдвигов. Координатные оси, которые образуют эти плоскости, называются *главными осями деформируемого состояния*.

Линейные деформации по главным осям называются *главными деформациями* и нормируются в порядке $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ с учетом их знака, причем знак “плюс” относится к тем деформациям, которые вызваны в результате растяжения, и наоборот, знак “минус” относится к деформациям сжатия.

Заметим, что для изотропного тела, свойства которого не зависят от направлений координатных осей, главные оси напряжений и деформаций совпадают.

10.4. Физические уравнения теории упругости для изотропного тела. Обобщенный закон Гука

Для получения полной системы уравнений, описывающих напряженное и деформированное состояние тела, необходимо располагать равенствами, связывающими напряжения и деформации. В эти равенства должны входить параметры, характеризующие физические свойства материалов. Поэтому они называются физическими уравнениями механики сплошной среды.

Составим аналитическое выражение обобщенного закона Гука, справедливого для идеально упругого изотропного тела. Для этого воспользуемся принципом независимости действия сил. Рассмотрим раздельно силы, возникающие на гранях элементарного параллелепипеда (рис. 10.1). При малых деформациях, действие касательных напряжений вызывает только формоизменение, а от действия нормальных напряжений происходит изменение линейных размеров выделенного элемента. Учитывая данное обстоятельство, для трех угловых деформаций получаем:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \tag{10.18}$$

где G – модуль сдвига материала.

Линейная деформация по оси x, обусловленная напряжением σ_x, будет равна $\frac{\sigma_{\tilde{o}}}{\hat{A}}$. Напряжениям σ_y, σ_z соответствуют деформации по оси x обратного знака, равные $-\mu\frac{\sigma_y}{E}$ и $-\mu\frac{\sigma_z}{E}$, соответственно (здесь μ – коэффициент Пуассона). Следовательно

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - -\mu\frac{\sigma_z}{E}.$$

Аналогично можно определить относительные удлинения ребер параллелепипеда (рис. 10.1), перпендикулярных осям y и z. Записывая для ε_y и ε_z аналогичные уравнения окончательно получим:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right];$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]; \qquad (10.19)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right].$$

Отсюда, получим выражение для объемной деформации

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right). \qquad (10.20)$$

Полученные соотношения (10.18 – 10.19) являются аналитическим выражением обобщенного закона Гука для упругого изотропного тела.

10.5. Возможные способы решения задач теории упругости

В общем случае искомыми величинами в задачах теории упругости являются функции перемещений, компоненты напряженного и деформированного состояний среды. Следовательно, в каждой точке тела подлежат определению 15 величин: три компоненты смещений – u, v и w; шесть компонент напряжений – σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} и τ_{yz}; шесть компонент деформаций – ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}.

Очевидно, что для решения задачи в общем случае необходимо 15 уравнений, связывающих искомые величины, которые выполнялись бы не только внутри заданного тела, но и на его границе.

Полученные выражения (10.2), (10.16), (10.18), (10.19) образуют такую систему. Для однозначного решения задачи необходимо задание условий на контуре тела – граничных условий. Эти условия могут быть заданы в виде заранее определенных компонент напряжений (статические граничные условия) или компонент перемещений (кинематические граничные условия) или же комбинации тех и других (смешанные граничные условия).

Если заданы граничные условия и требуется оценить напряженно–деформированное состояние заданного тела, то такая задача называется *прямой* задачей теории упругости. Если же по заданным функциям напряженно–деформированное состояния рассматриваемого тела требуется найти граничные условия им соответствующие, то такая задача называется *обратной* задачей теории упругости.

Решение прямой задачи теории упругости можно вести разными способами. Если в качестве неизвестных принять функции перемещений – u, v и w, то полную система уравнений (10.2), (10.16), (10.18), (10.19) можно све-

сти к следующим трем дифференциальным уравнениям относительно этих функций:

$$\begin{aligned}
(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\,\nabla^2 u + \gamma_x &= 0;\\
(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\,\nabla^2 v + \gamma_y &= 0;\\
(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\,\nabla^2 w + \gamma_z &= 0,
\end{aligned} \qquad (10.21)$$

где $\lambda = \dfrac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$; $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнения (10.21) называются уравнениями Ляме. Граничные условия также необходимо выразить через перемещения. В итоге контурные напряжения запишутся через перемещения в следующем виде:

$$P_{xv} = \lambda e \cos(v,x) + G\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(v,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(v,y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(v,z)\right] +$$

$$+ G\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(v,x) + \frac{\partial v}{\partial x}\cos(v,y) + \frac{\partial w}{\partial x}\cos(v,z)\right];$$

$$P_{yv} = \lambda e \cos(v,y) + G\left[\frac{\partial v}{\partial x}\cos(v,x) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(v,y) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(v,z)\right] +$$

$$+ G\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(v,x) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(v,y) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(v,z)\right]; \qquad (10.22)$$

$$P_{zv} = \lambda e \cos(v,y) + G\left[\frac{\partial w}{\partial x}\cos(v,x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(v,y) + \frac{\partial w}{\partial z}\cos(v,z)\right] +$$

$$+ G\left[\frac{\partial u}{\partial z}\cos(v,x) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(v,y) + \frac{\partial w}{\partial z}\cos(v,z)\right].$$

Если же в качестве неизвестных принять компоненты напряженного состояния в произвольной точке тела – σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} и τ_{yz}, то к уравнениям равновесия (10.2) нужно присоединить уравнения совместности деформаций (10.17) и закон Гука (10.18–10.19). В результате совместного рассмотрения такой системы дифференциальных уравнений получаются так называемые уравнения Бельтрами:

$$(1+G)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} = 0; \quad (1+G)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x\,\partial y} = 0;$$

$$(1+G)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} = 0; \quad (1+G)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y\,\partial z} = 0; \qquad (10.23)$$

$$(1+G)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} = 0; \quad (1+G)\nabla^2\tau_{xz} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x\,\partial z} = 0.$$

где I_1 – первый инвариант напряженного состояния в точке.

Произвольные постоянные, получаемые в результате интегрирования уравнений (10.23), находятся при учете граничных условий, выраженных в следующем виде:

$$X = \sigma_x \cos(v, x) + \tau_{xy} \cos(v, y) + \tau_{xz} \cos(v, z);$$

$$Y = \tau_{xy} \cos(v, x) + \sigma_y \cos(v, y) + \tau_{yz} \cos(v, z);$$

$$Z = \tau_{xz} \cos(v, x) + \tau_{zy} \cos(v, y) + \sigma_z \cos(v, z).$$

где X, Y, Z – компоненты полного напряжения на границе.

10.6. Теория предельных напряженных состояний

При действии внешних сил материал конструкции может находиться в различных механических состояниях. При невысоких уровнях напряжений материал пребывает в упругом состоянии. При значительных напряжениях в материале обнаруживаются заметные остаточные деформации и он переходит в пластическое состояние. Затем, при дальнейшем увеличении внешних сил происходит образование местных трещин, и наступает его разрушение. Механическое состояние материала в точке зависит в первую очередь от напряженного состояния в ней. С целью определения прочности материалов вводится понятие *предельное напряженное состояние*.

Для пластичного материала предельным обычно считается, напряженное состояние, которое соответствует возникновению заметных остаточных деформаций, а для хрупкого – такое, при котором начинается разрушение материала.

Для выполнения расчетов на прочность вводятся понятия коэффициента *запаса прочности* и *эффективное напряжение*.

Коэффициент запаса при данном напряженном состоянии это число, показывающее во сколько раз следует одновременно увеличить все компоненты тензора напряжений, чтобы оно стало предельным.

Эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$ – это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равно опасно с заданным.

Для пластичных материалов критерием наступления предельного состояния принимается состояние, при котором максимальные касательные напряжения достигают некоторого предельного значения:

$$\sigma_{экв} = 2\,\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_3 . \qquad (10.24)$$

Гипотеза максимальных касательных напряжений, приемлемая для пластичных материалов, обнаруживает заметные погрешности для материалов, имеющих различные механические характеристики при сжатии и растяжении.

В таких случаях применяется энергетическая гипотеза, согласно которой предельное состояние в точке наступает тогда, когда выражение

$$U_{ô} = \frac{1+\mu}{6Å}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] \qquad (10.25)$$

принимает некоторое заранее заданное значение. Это предельное значение для $U_{оФ}$ определяется следующим образом. Для простого растяжения выражение (10.25) принимает вид:

$$U_{ô} = \frac{1+\mu}{6Å}2\sigma^2 .$$

В сложном напряженном состоянии $U_{оФ}$ принимает значение

$$U_{ô} = \frac{1+\mu}{6Å}2\sigma^2_{ýÊÂ} . \qquad (10.26)$$

При совместном рассмотрении (10.25) и (10.26) получим:

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$ или

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2+\left(\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)}.$$

10.7. Плоская задача в декартовых координатах

На практике различают два вида плоской задачи – плоскую деформацию и обобщенное плоское напряженное состояние.

В случае плоской деформации линейные деформации вдоль одной из координатных осей, например, оси z отсутствуют, а напряжения имеются $\varepsilon_{zz} = 0$; $\sigma_{zz} \neq 0$. Примером плоской деформации может служить деформация длинной стенки постоянного сечения, в случаях когда внешние нагрузки расположены в плоскостях, перпендикулярных оси z, где ось z направлена вдоль стенки.

Примером обобщенного плоского напряженного состояния может служить напряженно–деформированное состояние тонкой пластины, в случае, когда внешние нагрузки приложены по ее контуру и равномерно распределены по толщине пластины рис. 10.5.

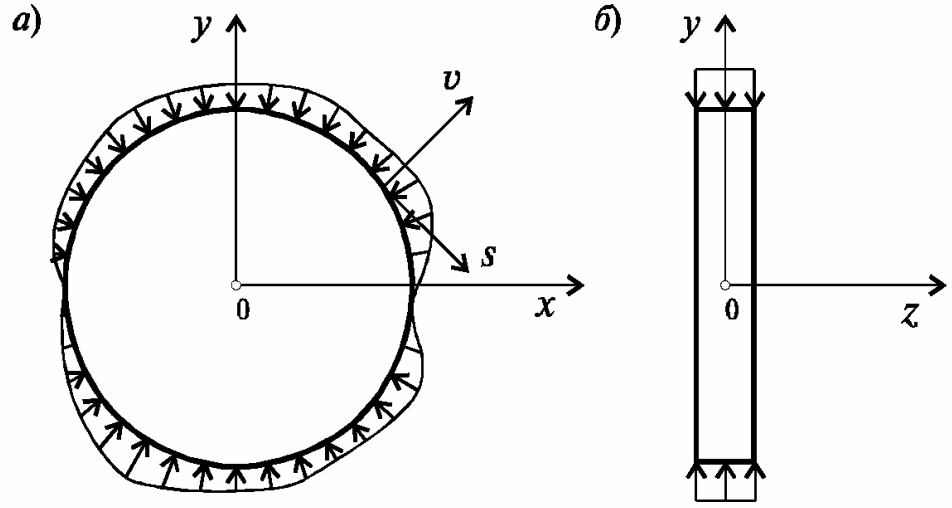


Рис. 10.5

Расположим начало системы координат x, y, z в серединной плоскости пластины, а ось z направим перпендикулярно к ней, тогда будем иметь: $\varepsilon_{zz} \neq 0$; $\sigma_{zz} = 0$.

Плоская задача теории упругости, как и объемная задача, может быть решена как в перемещениях, так и в напряжениях.

Здесь рассмотрим решение плоской задачи обобщенного напряженного состояния в напряжениях допуская, что объемной силой является собственный вес, постоянный для всех точек тела. Пусть γ_y – вес единицы объема

тела. В данном случае искомыми величинами являются следующие три компонента вектора напряжений σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy}. Предполагая, что $\sigma_{zz} = 0$ и все производные по оси z равны нулю, основные уравнения теории упругости значительно упростятся и примут вид:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \gamma_y = 0; \end{aligned} \qquad (10.27)$$

уравнения неразрывности деформации

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y}; \qquad (10.28)$$

физические уравнения, т.е. закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}\right); \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}\right); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \qquad (10.29)$$

В результате совместного рассмотрения этих выражений получим:

$$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \qquad (10.30)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Следовательно, решение краевой задачи теории упругости в напряжениях, в случае обобщенного плоского напряженного состояния, упрощается и сводится к решению уравнения (10.30) с учетом граничных условий, заданных на контуре тела:

$$X = \sigma_{xx} \cos(x, v) + \tau_{xy} \cos(y, v);$$

$$Y = \tau_{yx} \cos(x, v) + \sigma_{yy} \cos(y, v),$$

где v – внешняя нормаль к площадке; X, Y – компоненты полного напряжения на границе по осям x и y.

Решение плоской задачи теории упругости значительно упрощаются с использованием функции напряжений Эри $\varphi(x, y)$, выбранной таким образом, чтобы уравнения равновесия (10.27) превращались бы в тождества, т.е.:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} + \gamma_y x. \qquad (10.31)$$

Подставляя первые два выражения (10.31) в (10.30) получим:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \qquad (10.32)$$

Таким образом, решение плоской задачи в напряжениях сводится к решению уравнения (10.32) с учетом заданных в напряжениях граничных условий.

10.8. Пример расчета (задача № 19)

Определить главные напряжения и направления главных площадок, если напряженное состояние в точке задано следующими компонентами: σ_{xx}= 50 МПа, σ_{yy}= –20 МПа, σ_{zz} = 30 МПа, τ_{xy}= = –10 МПа, τ_{yz} = 10 МПа, τ_{zx}= 10 МПа.

Решение

1. В соответствии с (10.14) определяем инварианты заданного напряженного состояния:

$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 50 - 20 + 30 = 60$ МПа;

$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 50\cdot(-20) +$

$+ (-20)\cdot 30 + 30\cdot 50 - 10^2 - 10^2 - 10^2 = -400$ МПа.

$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} =$

$= 50\cdot(-20)\cdot 30 - 50\cdot 10^2 - (-20)\cdot 10^2 - 30 - 10^2 + 2\cdot(-10)\cdot 10\cdot 10 = -38000$ МПа.

2. Определяем коэффициенты уравнения (10.13). Если сделать замену неизвестного $S = \sigma = x + \frac{1}{3} I_1$, то из (10.13) получаем приведенное уравнение:

$$x^3 + p x + q = 0,$$

где $p = I_2 - \frac{1}{3} I_1^2;\ q = -\frac{2}{27} I_1^3 + \frac{1}{3} I_1 I_2 - I_3.$

$$p = -400 - \frac{60^2}{3} = -1600, \quad q = -\frac{2 \cdot 60^3}{27} + \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 400 + 3800 = 14000.$$

Определим дискриминант приведенного уравнения:

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1600}{3}\right)^3 + \left(\frac{14000}{2}\right)^2 = -102{,}7 \cdot 10^6 < 0.$$

Так как дискриминант отрицателен, значит все корни приведенного уравнения вещественные.

3. Вычисление величин главных напряжений. Для решения приведенного уравнения применим формулу Кардано:

$$x_1 = 2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}\cos\frac{\varphi}{3};\ x_2 = 2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right);\ x_3 = 2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right),$$

где

$$\cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{\left|\frac{p^3}{27}\right|}} = -\frac{14000}{2\sqrt{\left|\frac{(-1600)^3}{27}\right|}} = -0{,}5683 \rightarrow \varphi = 124{,}63°;$$

$\cos(\varphi/3) = \cos(41{,}54°) = 0{,}7484$; $\cos(\varphi/3 + 2\pi/3) = -0{,}9486$; $\cos(\varphi/3 + 4\pi/3) = 0{,}2$;

$$x_1 = 2\sqrt{|1600/3|} \cdot 0{,}7484 = 34{,}57;\ x_2 = 2\sqrt{|1600/3|} \cdot (-0{,}9486) = -43{,}81;$$

$$x_3 = 2\sqrt{|1600/3|} \cdot 0{,}2 = 9{,}22.$$

Окончательно получим:

$\sigma_1 = 34{,}57 + 60/3 = 54{,}57$ МПа;

$\sigma_2 = -43{,}81 + 60/3 = -23{,}8$ МПа;

$\sigma_3 = 9{,}22 + 60/3 = 29{,}22$ МПа.

Проверка правильности вычисления главных напряжений: так как I_1, I_2 и I_3 – инварианты, значит их значения постоянны. Ранее были получены их

значения в заданной системе координат. Сейчас же найдем их значения в главной системе координат:

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 54{,}57 - 23{,}8 + 29{,}22 = 59{,}99$ МПа;

$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = 54{,}57\cdot(-23{,}8) - 23{,}8\cdot 29{,}22 + 29{,}22\cdot 54{,}57 =$

$= -400{,}2$ МПа;

$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 54{,}57\cdot(-23{,}8)\cdot 29{,}22 = -37950$ МПа.

Результаты вычислений I_1, I_2 и I_3 в рамках допустимых отклонений совпадают с результатами, полученными в п. 1 решения.

4. Определяем направляющие косинусы главных площадок. Система уравнений для определения l_1, m_1, n_1 имеет следующий вид:

$$(50 - 54{,}57)\,l_1 - 10\,m_1 + 10\,n_1 = 0;$$

$$-10\,l_1 - (20 + 54{,}57)\,m_1 + 10\,n_1 = 0;$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1.$$

Решение этой системы: $l_1 = -0{,}9334$; $m_1 = 0{,}0785$; $n_1 = -0{,}3486$. Условия проверки выполняются: $(-0{,}9334)^2 + (-0{,}3486)^2 + 0{,}0785^2 \cong 1$.

Система уравнений для определения l_2, m_2, n_2 имеет следующий вид:

$$(50 + 23{,}81)\,l_2 - 10\,m_2 + 10\,n_2 = 0;$$

$$-10\,l_2 + (-20 + 23{,}81)\,m_2 + 10\,n_2 = 0;$$

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1.$$

Решение этой системы: $l_2 = -0{,}159$; $m_2 = 0{,}965$; $n_2 = -0{,}2086$. Условия проверки выполняются: $0{,}159^2 + 0{,}965^2 + (-0{,}2086)^2 \cong 1$.

Система уравнений для определения l_3, m_3, n_3 имеет следующий вид:

$$(50 - 29{,}22)\,l_3 - 10\,m_3 + 10\,n_3 = 0;$$

$$-10\,l_3 + (-20 - 29{,}22)\,m_3 + 10\,n_3 = 0;$$

$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1.$$

Решение этой системы: $l_3 = 0{,}5515$; $m_3 = 0{,}4328$; $n_3 = -0{,}7132$. Условия проверки выполняются: $0{,}5515^2 + 0{,}4328^2 + (-0{,}7132)^2 \cong 1$.

10.9. Пример расчета (задача № 20)

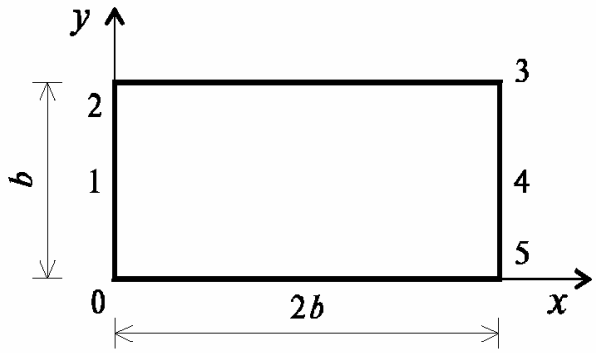


Рис. 10.6

Дана прямоугольная невесомая пластина (рис. 10.6), по кромкам которой действуют внешние силы, равномерно распределенные по ее толщине, равной единице. Под действием этих сил в пластине возникает обобщенное напряженное состояние, описываемое функцией напряжений в виде полинома четвертой степени

$$\varphi = 2bx^3 - 3x^2y^2 + y^4.$$

Требуется:

1. Проверить возможность существования такой функции напряжений;
2. По функции напряжений найти выражения компонентов напряжений;
3. Выяснить характер распределенных по кромкам пластины внешних сил, под действием которых имеет место данная система напряжений, и построить эпюры напряжений;
4. По полученным эпюрам напряжений, принимая их за эпюры распределенной внешней нагрузки, произвести проверку равновесия пластины.

Решение

1. *Проверить возможность существования такой функции напряжений.* Для выполнения проверки существования заданной функции напряжений выполним ее дифференцирование:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 6bx^2 - 6xy^2; \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 12bx - 6y^2; \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} = 12b; \quad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -6x^2y + 4y^3; \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -6x^2 + 12y^2; \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} = 24y; \quad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = 24;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = -12xy; \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y} = -12y; \quad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = -12.$$

Подставив четвертые производные в бигармоническое уравнение (10.32), видим, что оно удовлетворяется: $0 + 2(-12) + 24 = 0$. Следовательно, напряженное состояние пластины, выраженное зааной функцией напряжений, возможно.

2. *По функции напряжений найти выражения компонентов напряжений.* Компоненты напряжений, действующих по кромкам пластины, равны:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -6x^2 + 12y^2; \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 12bx - 6y^2; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 12xy.$$

3. *Выяснить характер распределенных по кромкам пластины внешних сил, под действием которых имеет место данная система напряжений, и построить эпюры напряжений.* Используя функциональные компоненты напряжений в пластине, построим соответствующие эпюры напряжений по контуру пластины на каждой ее боковой стороне.

Сторона 0–1–2 ($x = 0$, $0 \le y \le b$). На этой грани действуют напряжения $\sigma_{xx} = 12y^2$; $\tau_{xy} = 0$:

$y = 0$	(точка 0)	$\sigma_{xx} = 0$,	$\tau_{xy} = 0$,
$y = b/2$	(точка 1)	$\sigma_{xx} = 3b^2$,	$\tau_{xy} = 0$,
$y = b$	(точка 2)	$\sigma_{xx} = 12b^2$,	$\tau_{xy} = 0$.

Сторона 2–3 ($0 \le x \le 2b$, $y = b$). На этой грани действуют напряжения $\sigma_{yy} = 12bx - 6b^2$; $\tau_{xy} = 12bx$:

$x = 0$	(точка 2)	$\sigma_{yy} = -6b^2$,	$\tau_{xy} = 0$,
$x = 2b$	(точка 3)	$\sigma_{yy} = 18b^2$,	$\tau_{xy} = 24b^2$.

Сторона 3–4–5 ($x = 2b$, $0 \le y \le b$). На этой грани действуют напряжения $\sigma_{xx} = -24b^2 + 12y^2$; $\tau_{xy} = 24by$:

$y = 0$	(точка 5)	$\sigma_{xx} = -24b^2$,	$\tau_{xy} = 0$,
$y = b/2$	(точка 4)	$\sigma_{xx} = -21b^2$,	$\tau_{xy} = 12b^2$,
$y = b$	(точка 3)	$\sigma_{xx} = -12b^2$,	$\tau_{xy} = 24b^2$.

Сторона 0–5 ($0 \le x \le 2b$, $y = 0$). На этой грани действуют напряжения $\sigma_{yy} = 12bx$; $\tau_{xy} = 0$:

$x = 0$	(точка 0)	$\sigma_{yy} = 0$,	$\tau_{xy} = 0$,
$x = 2b$	(точка 5)	$\sigma_{yy} = 24b^2$,	$\tau_{xy} = 0$.

По полученным результатам строим эпюры σ_{xx}, σ_{yy} и τ_{xy}, которые приведены на рис. 10.7.

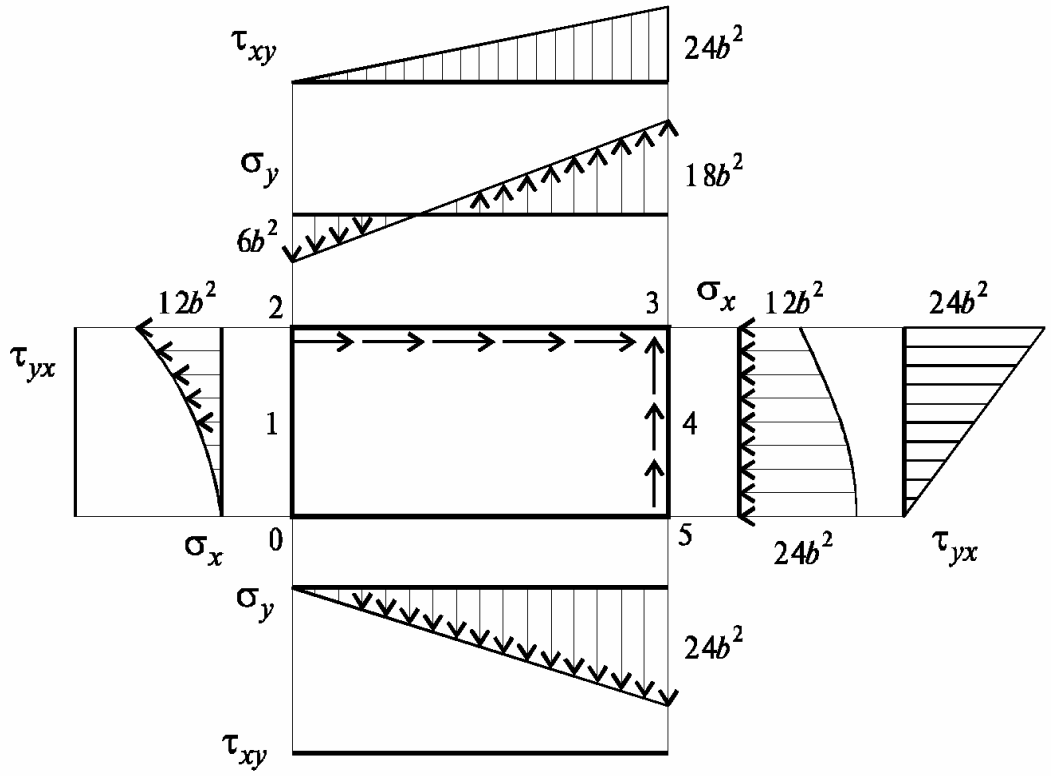


Рис. 10.7

4. *По полученным эпюрам напряжений, принимая их за эпюры распределенной внешней нагрузки, произвести проверку равновесия пластины.* Выполним проверку равновесия пластины. Для этой цели найдем равнодействующие внешних сил, действующих по кромкам пластины (рис. 10.8):

Подсчет значений равнодействующих сил (рис. 10.8):

$$R_x^{0-2} = \int_0^b \sigma_{xx} dy = \int_0^b 12y^2 dy = 4y^3\Big|_0^b = 4b^3; \quad R_y^{0-2} = \int_0^b \tau_{xy} dy = 0;$$

$$R_x^{2-3} = \int_0^{2b} \tau_{yx} dx = \int_0^{2b} 12bx\, dx = 6bx^2\Big|_0^{2b} = 24b^3;$$

$$R_y^{2-3} = \int_0^{2b} \sigma_{yy} dx = \int_0^{2b} \left(12bx - 6b^2\right) dx = \left(6bx^2 - 6b^2 x\right)\Big|_0^{2b} = 12b^3;$$

$$R_x^{3-5} = \int_0^b \sigma_{xx} dy = \int_0^b \left(-24b^2 + 12y^2\right) dy = \left(-24b^2 y + 4y^3\right)\Big|_0^b = -20b^3;$$

$$R_y^{3-5} = \int_0^b \tau_{xy} dy = \int_0^b 24by\, dy = 12by^2\Big|_0^b = 12b^3;$$

$$R_y^{0-5} = \int_0^{2b} \sigma_{yy} dx = \int_0^{2b} 12bx\,dx = 6bx^2\Big|_0^{2b} = 24b^3; \quad R_x^{0-5} = \int_0^{2b} \tau_{yx} dx = 0.$$

Далее определяются статические моменты площадей эпюры нормальных напряжений, действующих по кромкам пластины, относительно координатных осей x и y, с целью вычисления координат точек приложения равнодействующих сил от нормальных напряжений:

$$S_x^{0-2} = \int_0^{b} \sigma_{xx} y dy = \int_0^{b} 12y^3 dy = 3y^4\Big|_0^{b} = 3b^4;$$

$$S_y^{2-3} = \int_0^{2b} \sigma_{yy} x dx = \int_0^{2b} \left(12bx - 6b^2\right) x\,dx = \left(4bx^3 - 3b^2x^2\right)\Big|_0^{2b} = 20b^4;$$

$$S_x^{3-5} = \int_0^{b} \sigma_{xx}\, y dy = \int_0^{b} \left(-24b^2 + 12y^2\right) y\,dy = \left(-12b^2y^2 + 3y^4\right)\Big|_0^{b} = -9b^4;$$

$$S_y^{0-5} = \int_0^{2b} \sigma_{yy} x dx = \int_0^{2b} 12bx^2 dx = 4bx^3\Big|_0^{2b} = 32b^4.$$

Расстояния от точек действия результирующих нормальных сил до соответствующих координатных осей принимают следующие значения (рис. 10.8):

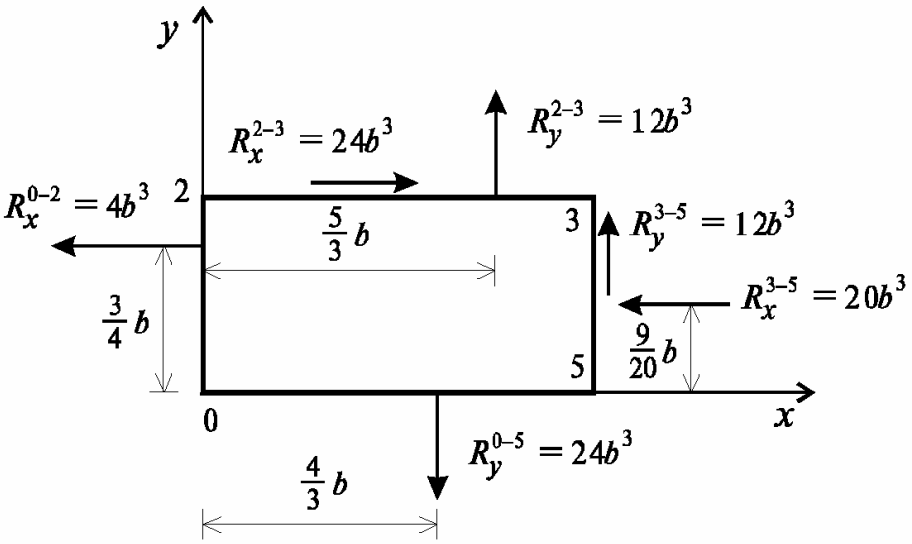


Рис. 10.8

$$y^{0-2} = \frac{S_x^{0-2}}{R_x^{0-2}} = \frac{3b^4}{4b^3} = \frac{3}{4}b; \qquad x^{2-3} = \frac{S_y^{2-3}}{R_y^{2-3}} = \frac{20b^4}{12b^3} = \frac{5}{3}b;$$

$$y^{3-5} = \frac{S_X^{3-5}}{R_X^{3-5}} = \frac{-9b^4}{-20b^3} = \frac{9}{20}b; \quad x^{0-5} = \frac{S_y^{0-5}}{R_y^{0-5}} = \frac{32b^4}{24b^3} = \frac{4}{3}b.$$

В заключении, проверим условия нахождения пластины в равновесном состоянии:

$$\sum x = -R_X^{0-2} + R_X^{2-3} + R_X^{3-5} = -4b^3 + 24b^3 - 20b^3 \equiv 0;$$

$$\sum y = R_y^{2-3} + R_y^{3-5} - R_y^{0-5} = 12b^3 + 12b^3 - 24b^3 \equiv 0;$$

$$\sum M(3) = R_X^{0-2} \cdot \left(b - y^{0-2}\right) + R_y^{2-3} \cdot \left(2b - x^{2-3}\right) - R_X^{3-5} \cdot \left(b - y^{3-5}\right) -$$

$$-R_y^{0-5} \cdot \left(2b - x^{0-5}\right) = 4b^3 \cdot \left(b - \frac{3}{4}b\right) + 12b^3 \cdot \left(2b - \frac{5}{3}b\right) + 20b^3 \cdot \left(b - \frac{9}{20}b\right) -$$

$$-24b^3 \cdot \left(2b - \frac{4}{3}b\right) = b^4 + 4b^4 + 11b^4 - 16b^4 \equiv 0.$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, следовательно, пластина находится в равновесном состоянии.

10.10. Основы теории пластичности

При испытании образцов обнаруживаются следующие основные особенности характера деформирования материалов при их нагружении. *Упругость* – после разгрузки образец полностью восстанавливает свои первоначальные размеры. При этом, если в процессе нагружения связь между напряжениями и деформациями является линейной, то материал называется *линейно–упругим* или *идеально упругим*. В противном случае, то есть, если между напряжениями и деформациями связь обнаруживается нелинейной, то материал называется *нелинейно упругим*.

Теория, в которой в качестве физических соотношений применяются линейные соотношения между напряжениями и деформациями, т.е. закон Гука, называется *теорией идеальной упругости*. Теория, в которой закон Гука заменяется некоторыми нелинейными соотношениями (ввиду их многообразия), называется *нелинейной теорией упругости*.

Физические соотношения теории упругости позволяют описать напряженно–деформированное состояние нагруженного тела до определенных пределов их нагружения, называемой *пределом упругости*. При напряжениях, превышающих предел упругости, после разгрузки наблюдаются заметные остаточные деформации. Свойство материалов относительно неспособности восстанавливать первоначальные размеры образцов после их разгрузки за счет возникновения остаточных деформаций, называется *пластичностью*.

Физические соотношения, взятые в основу теории, позволяющие определить переход напряженно–деформированного состояния от упругой стадии к упруго–пластической и описать процесс деформирования тела с учетом пластических свойств материалов, называются *теорией пластичности*.

Учет пластических свойств материалов является чрезвычайно важным этапом в плане совершенствования методов расчета конструкций. Если конструкции из хрупких материалов вплоть до стадии разрушения при действии внешних сил не развивают заметных пластических деформаций, то для конструкций из пластических материалов основные деформации формируются именно за счет возникновения пластических деформаций. Так например, полные деформации, соответствующие концу площадки текучести на реальной диаграмме, для многих материалов в 30 – 40 раз превышают деформации, соответствующие концу линейного участка.

В настоящее время существуют две теории пластичности. Их различие заключается в конкретной записи физических соотношений. Что же касается двух других основных соотношений механики сплошной среды – уравнений равновесия (10.1), (10.2), и соотношений, устанавливающих взаимосвязь между перемещениями и деформациями (10.16), то они идентичны в обеих теориях пластичности и имеют тот же вид, что и в теории упругости.

В *деформационной теории пластичности*, разработанной А.А. Ильюшиным, взамен закона Гука устанавливаются новые соотношения между напряжениями и деформациями.

Во второй теории – *теории течения*, физические соотношения связывают напряжения с приращениями деформаций или скоростями деформаций.

Как показывают экспериментальные исследования, деформационная теория пластичности справедлива при относительно небольших пластических деформациях для простого нагружения, т.е. когда все внешние нагрузки изменяются пропорционально во времени.

Теория течения является эффективным при изучении процессов, связанных с возникновением больших деформаций и при сложном нагружении, т.е. когда нагрузки, прикладываемые к телу, изменяются во времени независимо друг от друга.

Здесь ограничимся рассмотрением только деформационной теории пластичности.

Процесс деформирования материалов можно условно разделить на две стадии. Начальная стадия – *упругое деформирование*. Компоненты тензоров напряжений и деформаций при этом связаны законом Гука. (10.18)–(10.19). Для реальных инженерных задач, связанных с определением напряженно–деформированного состояния тела, как в упругой, так и в

упруго-пластической стадии деформирования, предварительно необходимо установить: во–первых, условие перехода от упругой стадии деформирования к пластической стадии и, во–вторых, установить физические зависимости во второй стадии деформирования.

Условия перехода от упругого состояния к пластическому могут быть определены по формулам одной из гипотез предельного состояния.

Как это было изложено в п. 10.6, наиболее приемлемыми являются гипотезы *максимальных касательных напряжений* и *энергии формоизменения*. При этом, для построения соотношений пластичности гипотеза энергии формоизменения является наиболее приемлемой, согласно которой переход из упругого состояния в пластическое происходит тогда, когда величина

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2+\left(\sigma_{xx}-\sigma_{zz}\right)^2+\left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)}, \quad (10.30)$$

называемая интенсивностью напряжений, достигает определенной величины, равной пределу текучести материала σ_T при одноосном напряженном состоянии, т.е.

$$\sigma_i = \sigma_T. \quad (10.31)$$

С учетом физических соотношений (10.18) и (10.19) выражение (10.30) принимает вид:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i, \quad (10.32)$$

где принято обозначение:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)}\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)^2+\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{zz}\right)^2+\left(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2\right)}, \quad (10.33)$$

называемое *интенсивностью деформаций*.

Следовательно, соотношение (10.32), следует рассматривать как одну из форм выражения обобщенного закона Гука.

Выражения интенсивности напряжений и интенсивности деформаций, записанные через главные напряжения и деформации можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_1-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2},\\ \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{2\cdot\left(1+\mu\right)}\cdot\sqrt{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_3\right)^2+\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)^2}.\end{aligned} \quad (10.34)$$

В основу деформационной теории пластичности заложены следующие гипотезы.

Первая гипотеза устанавливает связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (рис. 10.9), и гласит, что она не зависит от вида напряженного состояния, т.е.

$$\sigma_i = E(\varepsilon_i)\,\varepsilon_i, \qquad (10.35)$$

где $E(\varepsilon_i)$ – является переменной величиной и зависит от значения ε_i. Соотношения (10.35) являются едиными для всех видов напряженного состояния.

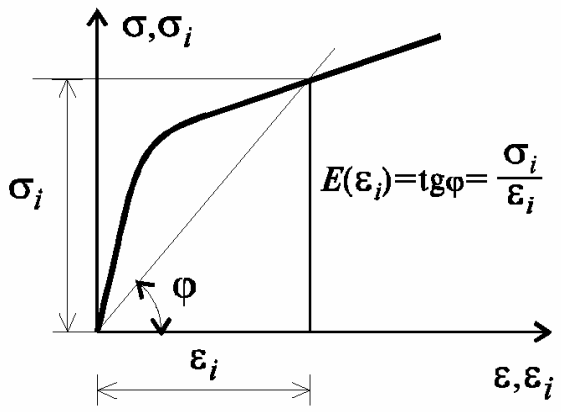


Рис. 10.9

Согласно второй гипотезе – изменение объема $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ является чисто упругой. Это положение хорошо согласуется с экспериментальными данными, так как при всестороннем сжатии в материалах заметных пластических деформаций не обнаруживается.

При деформировании материалов пластические деформации, как правило, существенно больше упругих и, учитывая, что объемная деформация e является величиной порядка упругих удлинений, поэтому принимается, что при пластическом деформи-ровании изменение объема пренебрежительно мало. На основании этого положения вводится гипотеза, что в пластической стадии деформирования материал считается несжимаемым. Откуда следует, что в пластической стадии деформирования можно коэффициент Пуассона принимать равным $\mu = 0{,}5$.

Сначала определим физические соотношения при одноосном растяжении, когда

$$\sigma_{xx} = \sigma, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$
$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\mu\varepsilon, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Из (10.30) и (10.33), соответственно получим $\varepsilon_i = \varepsilon$ и $\sigma_i = \sigma$, что подтверждает первое положение теории, что аналитическое выражение (10.35) едино для всех видов напряженного состояния. Данное обстоятельство позволяет определить переменный модуль деформирования $E(\varepsilon_i) = \dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$ по диаграмме $\sigma \sim \varepsilon$, т.е. $E(\varepsilon_i) = \; = E(\varepsilon) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$.

В заключение, аналогично соотношениям (10.18)–(10.19) запишем физические соотношения между напряжениями и деформациями при пластической стадии деформирования тела:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_{xx} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right]; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_{yy} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right];$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_{zz} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right]; \qquad (10.36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy}; \quad \gamma_{xz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xz}; \quad \gamma_{yz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{yz},$$

здесь $G\left(\varepsilon_i\right) = \dfrac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$ является модулем деформации при сдвиге, который определяется следующим образом:

$$G\left(\varepsilon_i\right) = \frac{E\left(\varepsilon_i\right)}{2\left(1+\mu\right)} = \frac{1}{3}E\left(\varepsilon_i\right) = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}. \qquad (10.37)$$

Приведенные физические соотношения деформационной теории пластичности являются справедливыми при простых нагружениях, т.е. только в тех случаях, когда все внешние силы на всех этапах нагружения во времени изменяются пропорционально. В данном случае заметим, что главные оси напряженного состояния при изменении внешних сил сохраняют свое направление независимо от стадии деформирования.

10.11. Пример расчета (задача № 21)

Для трехстержневой системы (рис. 10.10, *а*) при условии, что диаграмма растяжения для стержней имеет участок упрочнения (рис. 10.10, *б*), при следующих исходных данных: $\alpha = 30°$; $l = 1{,}0$ м; $F = 2\cdot10^{-4}$ м^2 – площади поперечных сечений стержней; $E = 2\cdot10^8$ кН/м^2 – модуль упругости материалов стержней; $\sigma_T = = 2{,}5\cdot10^5$ кН/м^2 – предел упругости материала; $\sigma_B = 3{,}9\cdot10^5$ кН/м^2 – временное сопротивление; $\varepsilon_B = 0{,}02$ – значение деформации, соответствующее напряжению σ_B, требуется:

1. Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_1$, при котором в наиболее напряженном стержне напряжения достигают предела упругости;

2. Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_2$, при котором все элементы заданной системы переходят в пластическую стадию деформирования;

3. Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_3$, при котором в наиболее напряженном стержне напряжения достигают значения, равного временному сопротивлению σ_B, т.е. при дальнейшем увеличении силы P происходит разрушение заданной системы;

4. Рассматривая систему (рис. 10.10, *а*) при отсутствии среднего стержня в процессе ее нагружения, определить абсолютные и относительные удлинения элементов системы, и внешней силы $P = P_4$, при котором в ее элементах напряжения достигают значения, равного временному сопротивлению σ_B.

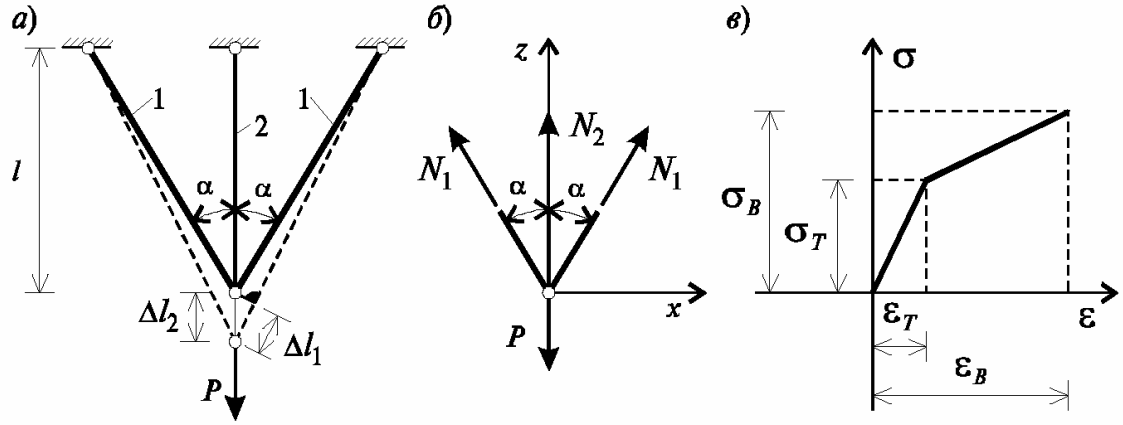


Рис. 10.10

Решение

1. *Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_1$, при котором в наиболее напряженном стержне напряжения достигают предела упругости.* Заданная система (рис. 10.10, *а*) один раз статически неопределима. Применяя метод сечений (рис. 10.10, *б*) и составляя уравнения равновесия статики, последовательно можем определить:

$$\sum x = N_1 \sin\alpha - N_1 \sin\alpha \equiv 0;$$

$$\sum y = N_2 + 2N_1 \cos\alpha - P = 0,$$

или

$$N_2 + 2N_1 \cos\alpha = P. \qquad (10.38)$$

Согласно деформированной схеме, изображенной на рис. 10.10, *а*, из геометрических соображений, уравнения для определения относительных деформаций записываются в виде:

$$\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha}. \qquad (10.39)$$

С учетом $\Delta l_1 = \varepsilon^{(1)} l_1$, $\Delta l_2 = \varepsilon^{(2)} l_2$, и принимая во внимание, что на первом этапе нагружения все элементы заданной системы деформируются согласно закону Гука, т.е. $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, получим:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{N_1 l}{EF\cos\alpha}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF}. \tag{10.40}$$

С учетом (10.40) из (10.38) и (10.39) можно получить следующую замкнутую систему уравнений относительно усилий N_1 и N_2:

$$2N_1\cos\alpha + N_2 = P;$$
$$N_1 = N_2\cos^2\alpha.$$

Откуда определяются:

$$N_1 = \frac{\cos^2\alpha}{1+2\cdot\cos^3\alpha}P; \quad N_2 = \frac{1}{1+2\cdot\cos^3\alpha}P. \tag{10.41}$$

Для выражения напряжения в среднем в элементах заданной системы имеем:

$$\sigma^{(1)} = \frac{N_1}{F} = \frac{\cos^2\alpha}{F\left(1+2\cos^3\alpha\right)}P;$$
$$\sigma^{(2)} = \frac{N_2}{F} = \frac{1}{F\left(1+2\cos^3\alpha\right)}P. \tag{10.42}$$

Откуда следует, что $\sigma^{(2)} > \sigma^{(1)}$. Следовательно, в процессе нагружения сначала средний стержень переходит в пластическую стадию деформирования, а затем боковые стержни, т.е. при всех нагружения средний стержень, вплоть до стадии разрушения заданной системы, будет наиболее напряженным.

Принимая в (10.42), что $\sigma^{(2)} = \sigma_T$ и $P = P_1$, окончательно получим:

$$P_1 = \sigma_T F\left(1+2\cos^3\alpha\right) = 2{,}5\cdot10^5\cdot2\cdot10^{-4}\cdot\left(1+2\cdot0{,}866^3\right) = 119{,}5 \text{ кН}.$$

Абсолютные удлинения стержней принимают значения:

$$\Delta l_1 = \varepsilon^{(1)} l_1 = \frac{\sigma^{(1)}}{E} l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{\cos^2\alpha\, P_1 l}{EF\left(1+2\cos^3\alpha\right)\cos\alpha} =$$

$$= \frac{0{,}866^2\cdot119{,}5\cdot1{,}0}{2\cdot10^8\cdot2\cdot10^{-4}\cdot\left(1+2\cdot0{,}866^3\right)\cdot0{,}866} = \frac{89{,}62}{7{,}96\cdot104} = 11{,}26\cdot10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_2 = \varepsilon^{(2)} l_2 = \frac{\sigma^{(2)}}{E} l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF} = \frac{P_2 l}{EF\left(1+2\cos^3\alpha\right)} =$$

$$= \frac{119{,}5\cdot1{,}0}{2\cdot10^8\cdot2\cdot10^{-4}\cdot\left(1+2\cdot0{,}866^3\right)} = 12{,}5\cdot10^{-4} \text{ м}.$$

Относительные удлинения стержней принимают значения:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_1 \cdot \cos\alpha}{l} = \frac{11{,}26 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}866}{1{,}0} = 9{,}75 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{12{,}5 \cdot 10^{-4}}{1{,}0} = 12{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

2. *Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_2$, при котором все элементы заданной системы переходят в пластическую стадию деформирования*. Физические уравнения взамен закона Гука в случае, когда стержни переходят в пластическую стадию деформирования, т.е. при $\sigma_T \le \sigma \le \sigma_B$, $\varepsilon_T \le \varepsilon \le \varepsilon_B$, в данном случае записываются в виде:

$$\sigma - \sigma_T = E_1 (\varepsilon - \varepsilon_T), \qquad (10.43)$$

которое представляет собой уравнение прямой линии, описывающей диаграмму деформирования в области пластических деформаций (рис. 10.10, *в*).

В начале по очевидным соотношениям определяется значение деформаций ε_T, соответствующее началу пластической стадии деформирования стержней и модуля деформаций в пластической стадии их деформирования:

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{2{,}5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^8} = 12{,}5 \cdot 10^{-4};$$

$$E_1 = \frac{\sigma_B - \sigma_T}{\varepsilon_B - \varepsilon_T} = \frac{3{,}9 \cdot 10^5 - 2{,}5 \cdot 10^5}{200 \cdot 10^{-4} - 12{,}5 \cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}4 \cdot 10^5}{187{,}5 \cdot 10^{-4}} = 0{,}75 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2.$$

Заметим, что на данном этапе нагружения, т.е. когда $P_1 \le P \le \le P_2$, боковые элементы заданной системы деформируются упруго, а средний элемент – будет находиться в пластическом состоянии.

Учитывая, что при $P = P_2$ будем иметь $\sigma^{(2)} = \sigma_T$, $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_T$, последовательно определим значения усилий и абсолютное удлинение в боковых стержнях при их переходе в пластическую стадию деформирования:

$$N_1 = \sigma^{(1)} F = \sigma_T F = 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 50 \text{ кН};$$

$$\Delta l_1 = \varepsilon_T l_1 = \varepsilon_T \frac{l}{\cos\alpha} = \frac{\sigma_T}{E} \frac{l}{\cos\alpha} = \frac{2{,}5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^8} \cdot \frac{1{,}0}{0{,}866} = 1{,}443 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Учитывая выражения (10.39) и (10.43) определяется значение абсолютного и абсолютного удлинения, а также усилия в среднем стержне, в момент перехода боковых стержней в пластическую стадию их деформирования:

$$\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha} = \frac{1{,}443 \cdot 10^{-3}}{0{,}866} = 1{,}667 \cdot 10^{-3}\ \text{м};$$

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{1{,}667 \cdot 10^{-3}}{1{,}00} = 1{,}667 \cdot 10^{-3}\ \text{м};$$

$$N_2 = \sigma^{(2)} F = \left[\sigma_T + E_1\left(\varepsilon^{(2)} - \varepsilon_T\right)\right] F =$$

$$= \left[2{,}5 \cdot 10^5 + 0{,}75 \cdot 10^7 \cdot \left(1{,}667 - 1{,}25\right) \cdot 10^{-3}\right] \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 50{,}63\ \text{кН}.$$

Далее из уравнения равновесия (10.38) вычисляется величина внешней силы $P = P_2$:

$$P_2 = N_2 + 2N_1 \cos\alpha = 50{,}63 + 2 \cdot 50 \cdot 0{,}866 = 137{,}23\ \text{кН}.$$

3. *Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_3$, при котором в наиболее напряженном стержне напряжения достигают значения, равного временному сопротивлению σ_B, т.е. при дальнейшем увеличении силы P происходит разрушение заданной системы.* Сначала вычисляем значения удлинений в боковых стержнях, при достижении в среднем стержне предельных напряжений и деформаций $\sigma^{(2)} = \sigma_B$, $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_B$.

Учитывая, что $\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha$; $l_1 = \dfrac{l}{\cos\alpha}$, получим:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l} \cos^2\alpha = \varepsilon^{(2)} \cos^2\alpha = \varepsilon_B \cos^2\alpha = 0{,}02 \cdot 0{,}866^2 = 0{,}015 > \varepsilon_T.$$

Таким образом, к моменту разрушения среднего стержня ($\sigma^{(2)} = = \sigma_B$, $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_B$) боковые стержни также находятся в пластической стадии деформирования. Напряжения в боковых стержнях, в момент разрушения среднего стержня, принимают значения:

$$\sigma^{(1)} = \sigma_T + E_1\left(\varepsilon^{(1)} - \varepsilon_T\right) = 2{,}5 \cdot 10^5 + 0{,}75 \cdot 10^7 \cdot \left(150 \cdot 10^{-4} - 12{,}5 \cdot 10^{-4}\right) =$$

$$= 2{,}5 \cdot 10^5 + 1{,}05 \cdot 10^5 = 3{,}55 \cdot 10^5\ \text{кН/м}^2.$$

Для определения величины внешней силы $P = P_3$, т.е. значения силы в момент разрушения среднего стержня из уравнения равновесия (10.38) имеем:

$$P_2 = N_2 + 2N_1 \cos\alpha = \sigma^{(2)} F + 2\sigma^{(1)} F \cos\alpha = \left(\sigma_B + 2\sigma^{(1)} \cos\alpha\right) F =$$

$$= \left(3{,}9 \cdot 10^5 + 2 \cdot 3{,}55 \cdot 10^5 \cdot 0{,}866\right) \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 200{,}97 \text{ кН}.$$

Как показывают результаты расчетов, для перехода среднего стержня в пластическую стадию деформирования необходима была внешняя сила $P = P_1 = 119{,}5$ кН, а для его разрушения – $P = P_3 = = 200{,}97$ кН.

На основании полученных результатов можно заметить, что если бы мы ограничивались только учетом упругой стадии работы конструкции, т.е. $P \le P_1$, то несущая способность заданной системы оценивалась бы как $P = P_1 = 119{,}5$ кН.

Как показали расчеты, учет пластической стадии работы позволил выявить дополнительные резервы несущей способности заданной системы, т.к. величина разрушающей силы заданной системы в действительности равна $P = P_3 = 200{,}97$ кН.

В заключении определим величины абсолютных удлинений стержней в момент разрушения среднего стержня:

$$\Delta\bar{l}_1 = \varepsilon^{(1)} l_1 = \varepsilon^{(1)} \frac{l}{\cos\alpha} = 0{,}015 \frac{1{,}0}{0{,}866} = 0{,}0173 \text{ м};$$

$$\Delta\bar{l}_2 = \varepsilon^{(2)} l = \varepsilon_B l = 0{,}02 \cdot 1{,}0 = 0{,}02 \text{ м}.$$

Легко определить во сколько раз абсолютные удлинения стержней возросли за счет возникновения пластических деформаций по отношению к их абсолютным удлинениям в момент перехода среднего стержня от упругой к пластической стадии деформирования:

$$n_1 = \frac{\Delta\bar{l}_1}{\Delta l_1} = \frac{0{,}0173}{0{,}001126} = 15{,}4 \text{ раз};$$

$$n_2 = \frac{\Delta\bar{l}_2}{\Delta l_2} = \frac{0{,}02}{0{,}00125} = 16 \text{ раз}.$$

4. *Рассматривая систему* (рис. 10.10, *а*) *при отсутствии среднего стержня в процессе ее нагружения, определить абсолютные и относительные удлинения элементов системы, и внешней силы* $P = P_4$, *при котором в ее элементах напряжения достигают значения, равного временному сопротивлению* σ_B. Исключая средний стержень, система превращается из статически неопределимой в статически определимую. Применяя метод сечений, легко установить, что уравнения равновесия в данном случае принимают следующий вид:

$$2N_1 \cos\alpha = P. \qquad (10.44)$$

В конце упругой стадии работы элементов заданной системы имеем, что $\sigma^{(1)} = \sigma_T$, $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_T$. С учетом данного обстоятельства последовательно определим значение усилия N_1, абсолютное удлинение стержней и величину силы $P = P_1$, соответствующих концу упругой стадии работы данной системы:

$$N_1 = \sigma_T F = 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 50\,\text{кН};$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF\cos\alpha} = \frac{50 \cdot 1{,}0}{2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}866} = 14{,}43 \cdot 10^{-4}\,\text{м};$$

$$P_1 = 2N_1 \cos\alpha = 2 \cdot 50 \cdot 0{,}866 = 86{,}6\,\text{кН}.$$

При дальнейшем нагружении системы, то есть при $P > P_1 = = 86{,}6$ кН, элементы данной системы переходят в пластическую стадию деформирования. Последовательно определим значение внутренних усилий, абсолютных удлинений и величину разрушающей силы $P = P_2$, при достижении напряжений и деформаций предельных значений. Т.е. при $\sigma^{(2)} = \sigma_B$, $\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_B$:

$$N_1 = \sigma_B F = 3{,}9 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 78{,}0\,\text{кН};$$

$$\Delta l_1 = \varepsilon_B \frac{l}{\cos\alpha} = 0{,}02 \cdot \frac{1{,}0}{0{,}866} = 2{,}31 \cdot 10^{-2}\,\text{м};$$

$$P_2 = 2N_1 \cos\alpha = 2 \cdot 78 \cdot 0{,}866 = 135{,}1\,\text{кН}.$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы.

Как и для трехстержневой статически неопределимой системы, так и для двухстержневой статически определимой системы, учет пластических деформаций позволил выявить дополнительные резервы систем по несущей способности. Если бы мы ограничились только упругим расчетом, расчетная несущая способность двухстержневой системы была бы равна $P = P_1 = 86{,}6$ кН. А за счет учета упруго–пластической работы элементов системы, как было показано, несущая способность будет исчерпана при $P = P_2 = = 135{,}1$ кН, т.е. при нагрузке в 1,56 раза больше, чем при упругом расчете.

Далее заметим, что за счет удаления одного среднего элемента из исходной системы, несущая способность и жесткость системы, соответственно, уменьшилась в $\frac{200{,}96}{135} = 1{,}49$ и в $\frac{\Delta l_1 \cos\alpha}{\Delta l_2} =$

$= \frac{2{,}31 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}866}{12{,}5 \cdot 10^{-4}} = 16$ раз.

11. ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ

1.1. Теория тонких пластин

Под оболочкой понимается тело, одно из измерений которого, называемое толщиной, значительно меньше двух других. Геометрическое место точек, равностоящих от обеих поверхностей оболочки, носит название *срединной поверхности*. Если срединная поверхность оболочки является плоскостью, то такую оболочку называют пластиной (рис. 11.1.).

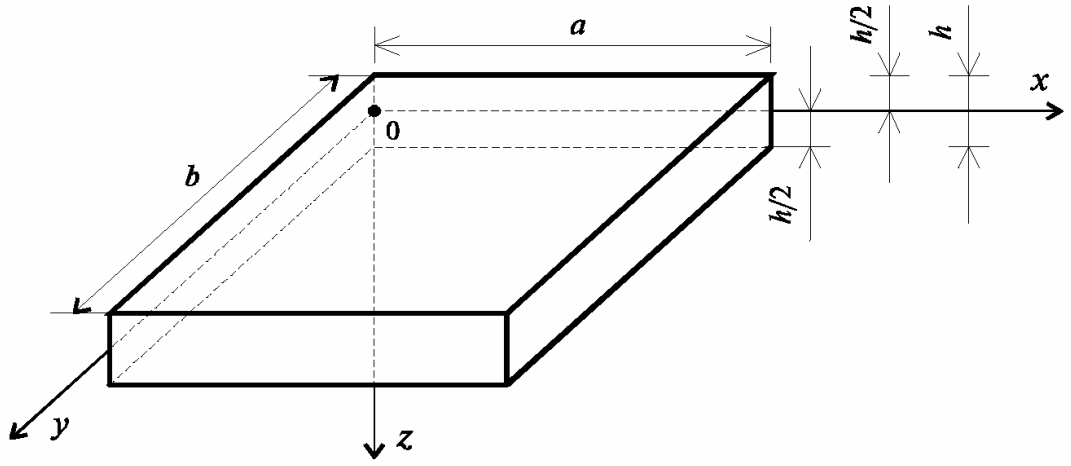


Рис. 11.1

Предполагаем, что на поверхности пластины действует распределенная нагрузка интенсивностью $q = q(x, y)$. Для вывода диф-ференциального

уравнения изогнутой поверхности пластинки выделим из ее состава бесконечно малый элемент с размерами dx, dy, h, где h – толщина пластины. Выделенный элемент с указанными внутренними усилиями изображен на рис. 11.2. Определим внутренние усилия в пластине следующим образом.

Для этого отметим характерную для пластин особенность обозначения изгибающих моментов отличны от тех, что приняты в балках, а именно: M_x – изгибающий момент на площадке с нормалью параллельной оси x; аналогично, M_y – изгибающий момент на площадке с нормалью параллельной оси y; M_{xy} – крутящий момент относительно оси x, действующий в плоскости параллельной оси y; M_{yx} – крутящий момент относительно оси y, действующий в плоскости параллельной оси x (см. рис. 10.2). Различие между Q_x и Q_y состоит в том, что интегрирование ведется по площадке с нормалью параллельной оси x, в первом случае, и по площадке с нормалью параллельной оси y во втором. С учетом изложенного выражения усилий записываются в следующем виде:

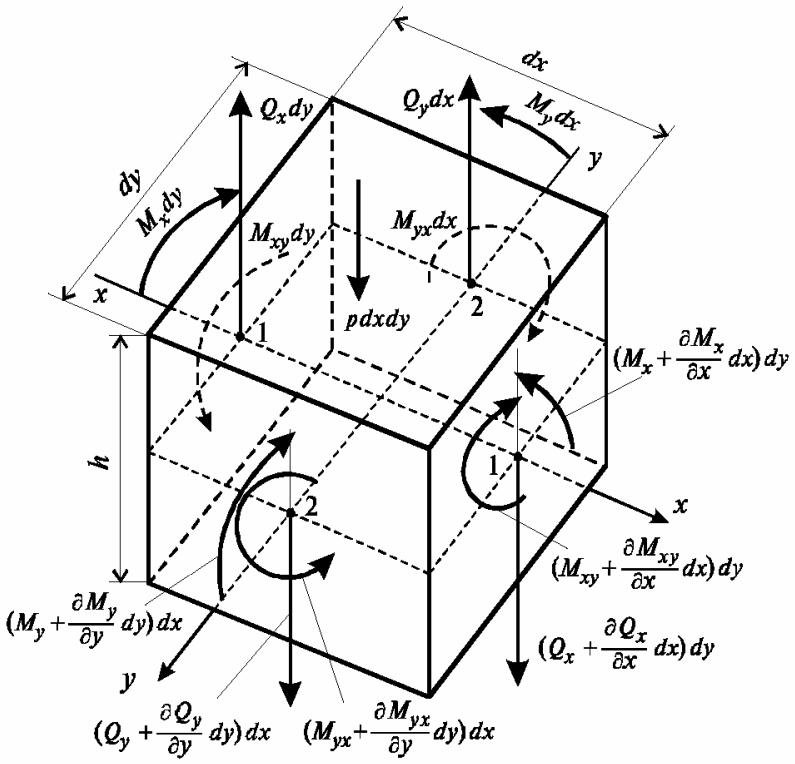


Рис. 11.2

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\,dz;$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\,dz;$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\,dz;$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\,dz;$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\,dz.$$

Проецируя все силы, приложенные к элементу пластинки на вертикальную ось z, из условия равновесия получим:

$$q\,dx\,dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\,dy + \frac{\partial Q_y}{dy} dx\,dy = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \qquad (11.1)$$

Далее, составляя условия равновесия в форме суммы моментов относительно координатных осей x и y, и пренебрегая малыми величинами второго порядка, получим:

$$\begin{aligned} Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}; \\ Q_x &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x}. \end{aligned} \qquad (11.2)$$

Подставляя выражения Q_x и Q_y из (11.2) в (11.1), получим:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \qquad (11.3)$$

Очевидно, что для определения трех величин M_x, M_y и M_{xy} одного уравнения (11.3) недостаточно. Для решения задачи необходимо выразить моменты через прогибы пластинки. С этой целью для тонких пластинок вводится следующие допущения:

1. Отрезок нормали к срединной поверхности при изгибе остается прямым и перпендикулярным к срединной поверхности. Это допущение носит название *гипотезы прямых нормалей*.

2. Величины σ_z и ε_z пренебрежимо малы и в расчете не учитываются.

Поскольку, мы предположили, что $\varepsilon_z = 0$, то

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

следовательно, прогиб пластины w не зависит от координаты z, то есть $w = w(x, y)$.

Пользуясь сделанными предположениями, выразим перемещение точек пластины вдоль осей x и y, соответственно, u и v через их прогиб w.

Согласно рис. 11.3. можно записать:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (11.4)$$

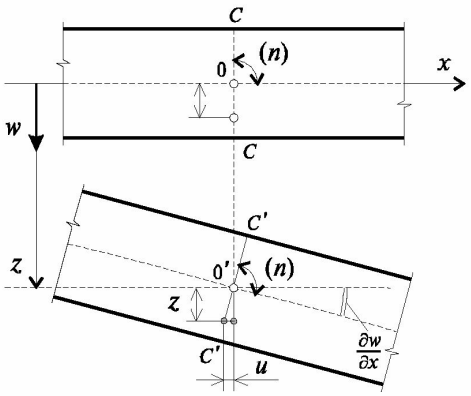


Рис. 11.3

Нормаль к срединной поверхности пластинки $(C-C)$ согласно гипотезе прямых нормалей и в деформируемом состоянии пластинки $\left(C'-C'\right)$ остается перпендикулярной к искривленной поверхности. Аналогичным образом получим:

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (11.5)$$

Закон Гука в данном случае преобразуется к виду:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{E\,z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{E\,z}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{E\,z}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \qquad (11.6)$$

Выражения для изгибающих моментов с учетом (11.6) принимают вид:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xx}\,z\,dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{yy}\,z\,dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \qquad (11.7)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}\,z\,dz = -(1-\mu)\,D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},$$

где $D = \dfrac{E\,h^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость пластины.

Пользуясь соотношениями (11.2) и (11.7), выражения для поперечных сил можно записать следующим образом:

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w;$$
$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w, \qquad (11.8)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Согласно (11.7) величины моментов определяются через один искомый параметр – прогиб пластины w (x, y). Следовательно, подставляя выражение (11.7) в (11.3), окончательно получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \qquad (11.9)$$

Выражение (11.9) – известное дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины, полученное Софи Жермен и опубликованное Лагранжом в 1811 году.

11.2. Пример расчета (задача № 22)

В рассмотрим эллиптическую пластинку, жестко заделанную по контуру и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 11.4). При a = 1,3 м, b = 1,0 м, h = 0,18 м, q = 300 кН/м^2, γ = 1/6, $E = 2\cdot10^8$ кН/м^2, требуется:

1. Определить прогиб пластины в ее середине;
2. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в пластине по направлениям главных диаметров контура;
3. В точке C с координатами (a/2, b/2) определить изгибающие моменты M_x, M_y и крутящий момент M_{xy}.

Решение

Выберем начало координат в центре пластинки и запишем уравнение контура (в нашем случае – уравнение эллипса):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (11.10)$$

При жесткой заделке во всех контурных точках (11.10) должны выполняться следующие граничные условия: $w = 0$; $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$,

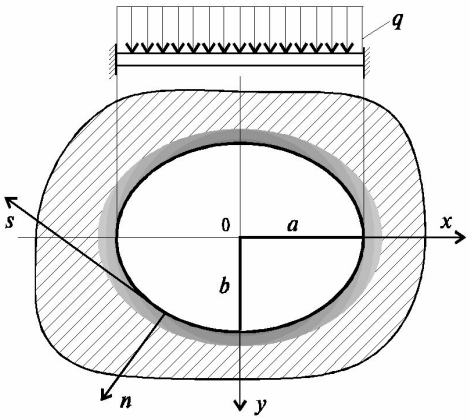


Рис. 11.4

где n и s – нормаль и касательная к контуру пластины, соответственно. Нетрудно убедиться, что этим условиям удовлетворяет функция

$$w = c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2, \quad (11.11)$$

где c – прогиб в центре пластинки.

Действительно в результате дифференцирования функции w по n получим:

$$\frac{dw}{dn} = 2c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\cdot\frac{d}{dn}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

. (11.12)

Но поскольку, на основании (11.10) в контурных точках

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1,$$

то выражения (11.11) и (11.12) на контуре обращаются в нуль. Аналогично можно доказать, что условие $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$ также выполняется на контуре.

Проверим, удовлетворяет ли выбранная функция w основному дифференциальному уравнению (11.9). Вычислим частные производные

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{24\tilde{n}}{a^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{24\tilde{n}}{b^4}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} = \frac{8c}{a^2 b^2}.$$

и подставим их в (11.9). Результатом будет выражение

$$c\left(\frac{24}{a^4}+\frac{16}{a^2 b^2}+\frac{24}{b^4}\right) = \frac{q}{D}.$$

Очевидно, что оно справедливо в случае, если q = const, а прогиб в центре будет равен

$$c = \frac{q}{D\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4}\right)}. \qquad (11.13)$$

Выражения изгибающих моментов M_x и M_y и крутящего момента M_{xy} в произвольной точке пластинки в соответствии с (11.7) будут иметь вид:

$$M_x = -4\tilde{n}D\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{\mu}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1\right)\right];$$

$$M_y = -4\tilde{n}D\left[\frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{\mu}{a^2}\left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]; \qquad (11.14)$$

$$M_{xy} = -\frac{8\tilde{n}D}{a^2 b^2}(1-\mu)\,x\,y.$$

Моменты на концах малой полуоси ($x = 0$, $y = \pm b$) согласно (11.14) будут равны:

$$M_x = -\frac{8\mu c D}{b^2}; \quad M_y = -\frac{8cD}{b^2}; \quad M_{xy} = 0. \qquad (11.15)$$

В точках, расположенных на концах большой полуоси ($x = \pm a$, $y = 0$) моменты равны:

$$M_x = -\frac{8cD}{a^2}; \quad M_y = -\frac{8\mu cD}{a^2}; \quad M_{xy} = 0. \qquad (11.16)$$

И, наконец, в центре пластины ($x = y = 0$) моменты равны:

$$M_x = 4cD\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2}\right); \quad M_y = 4cD\left(\frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2}\right); \quad M_{xy} = 0. \qquad (11.17)$$

В данном случае имеем:

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)} = \frac{2\cdot 10^8 \cdot 0{,}18^3}{12\left(1-\frac{1}{36}\right)} \approx 10^5 \text{ кН·м};$$

$$\tilde{n} = \frac{q}{D\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4}\right)} = \frac{300}{10^5\left[\frac{24}{1{,}3^4} + \frac{16}{1{,}3^2 \cdot 1^2} + \frac{24}{1^4}\right]} = 7{,}16\cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Для точки $C(0{,}5a;\ 0{,}5b)$ выражения $\left(\frac{3x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$ и $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{3y^2}{b^2}-1\right)$ равны нулю, следовательно: $M_x^{\tilde{N}}=0;\quad M_y^{\tilde{N}}=0;$

$$M_{xy}^{\tilde{N}}=-\frac{8\tilde{n}D}{a^2b^2}(1-\mu)\frac{a}{2}\frac{b}{2}=-\frac{8\cdot 7{,}16\cdot 10^{-5}\cdot 10^5}{1{,}3\cdot 1}\cdot\frac{5\cdot 1{,}3\cdot 1}{6\cdot 2\cdot 2}=-11{,}93\frac{\hat{e}\acute{I}\cdot\grave{i}}{\grave{i}}.$$

Для построения эпюр M_x и M_y достаточно найти их значения в трех точках по осям эллипса, так как вдоль них эти функции имеют параболический характер изменения, для этого воспользуемся формулами (11.15) ÷ (11.17):

$$M_y^{(E,D)}=-\frac{8\cdot 7{,}16\cdot 10^{-5}\cdot 10^5}{1^2}=-57{,}28\frac{\hat{e}\acute{I}\cdot\grave{i}}{\grave{i}};$$

$$M_x^{(A,B)}=-\frac{8\cdot 7{,}16\cdot 10^{-5}\cdot 10^5}{1{,}3^2}=-33{,}89\frac{\hat{e}\acute{I}\cdot\grave{i}}{\grave{i}};$$

$$M_y^0=4\cdot 7{,}16\cdot 10^{-5}\cdot 10^5\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{6\cdot 1{,}3^2}\right)=31{,}46\frac{\hat{e}\acute{I}\cdot\grave{i}}{\grave{i}};$$

$$M_x^0=4\cdot 7{,}16\cdot 10^{-5}\cdot 10^5\left(\frac{1}{1{,}3^2}+\frac{1}{6\cdot 1^2}\right)=21{,}72\frac{\hat{e}\acute{I}\cdot\grave{i}}{\grave{i}}.$$

При построении эпюр следует помнить, что $M_x^C=M_y^C=0$. Величины поперечных сил вдоль координатных осей могут быть вычислены по формуле (11.8)

$$Q_x=-\frac{8cD}{a^4b^2}\left(3b^2+a^2\right)x;\quad Q_y=-\frac{8cD}{a^2b^4}\left(3a^2+b^2\right)y.$$

В данном случае $Q_y^E=205{,}74\frac{\hat{e}\acute{I}}{\grave{i}};\quad Q_y^D=-205{,}74\frac{\hat{e}\acute{I}}{\grave{i}}.$ Аналогично $Q_x^A=122{,}28\frac{\hat{e}\acute{I}}{\grave{i}};\ Q_x^B=-122{,}28\frac{\hat{e}\acute{I}}{\grave{i}}.$

По данным вычислений построены эпюры M_x, M_y, Q_x и Q_y (рис. 11.5). Поскольку из условий равновесия пластинки следует, что

$$\frac{dQ_x}{dx}+\frac{dQ_y}{dy}=-q,$$

то в данном случае легко сделать проверку графически. Действительно,

$$\frac{dQ_x}{dx} = \frac{Q_x^B}{a}; \quad \frac{dQ_y}{dy} = \frac{Q_y^D}{b}; \quad \frac{Q_x^B}{a} + \frac{Q_y^D}{b} = -q,$$

где $Q_x^B = -122{,}28$ кН/м (с эпюры Q_x), $Q_y^D = -205{,}74$ кН/м (с эпюры Q_y), $q = 300{,}0$ кН/м (по условию), тогда:

$$-\frac{122{,}28}{1{,}3} - \frac{205{,}74}{1} = -300{,}0.$$

Таким образом, задача решена правильно.

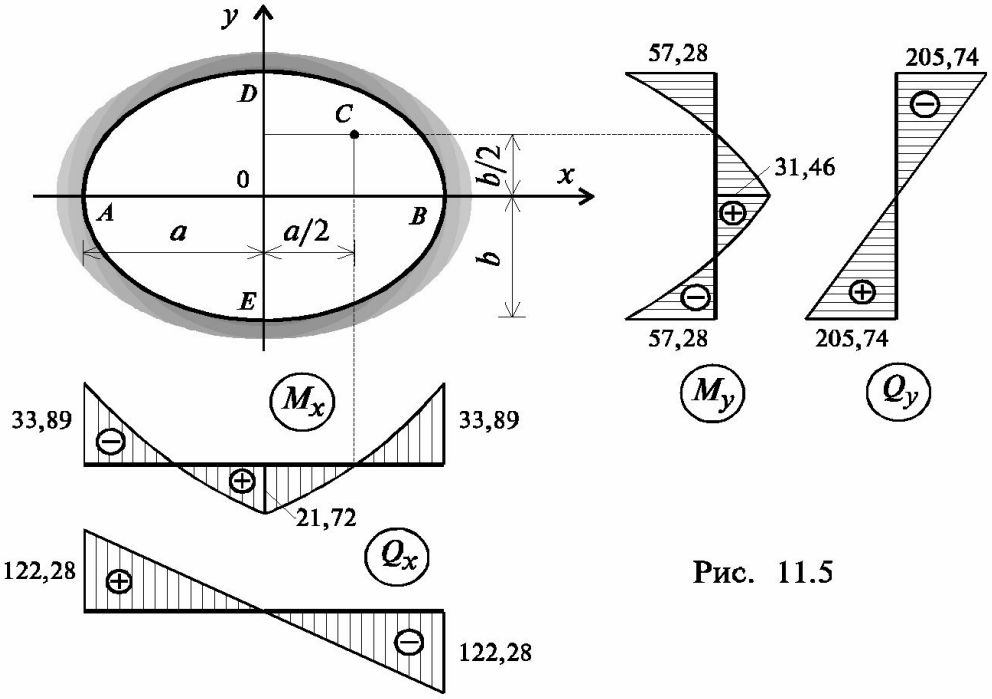


Рис. 11.5

11.3. Прочность толстостенной цилиндрической оболочки при действии внутреннего и внешнего давлений

Рассмотрим однородное тело цилиндрической формы в цилиндрической системе координат ρ, φ, z (рис. 11.6, *а*) при действии внутреннего p_a и внешнего давления p_b, которые являются осесимметричными нагрузками и вдоль оси z являются постоянными величинами (рис. 11.6, *б*).

Радиальное перемещение произвольно взятой точки обозначим через u. Величина u в данном случае является функцией только от текущего радиуса ρ.

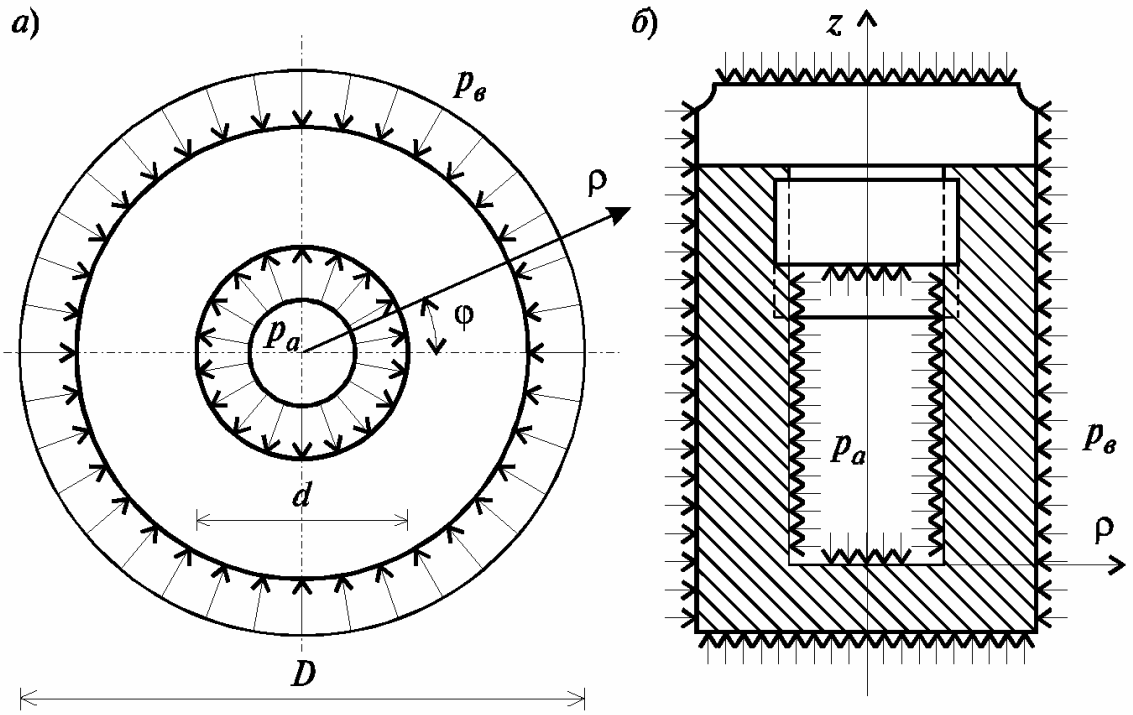


Рис. 11.6

Обозначим ε_r и ε_φ относительное удлинение в цилиндре в радиальном и окружном направлении и выразим их через перемещение u. Рассмотрим элементарный отрезок $AB = d\rho$, выделенный в радиальном направлении до и после нагружения цилиндра (рис. 11.7, *а*). Для определения ε_φ достаточно рассмотрения рис. 11.7, *б*.

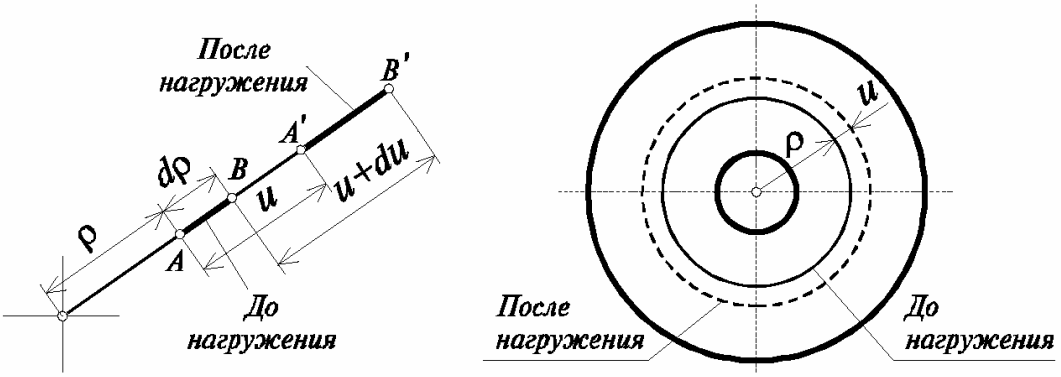


Рис. 11.7

С учетом принятых обозначений и формы деформирования цилиндра получим:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{2\pi(\rho + u) - 2\pi\rho}{2\pi\rho} = \frac{u}{\rho}. \qquad (11.18)$$

Для изучения напряженного состояния выделим из цилиндра элемент в форме криволинейного шестигранника (рис. 11.8). В осевых сечениях цилиндра из условий симметрии касательные напряжения отсутствуют и сохраняются только нормальные окружные напряжения σ_φ.

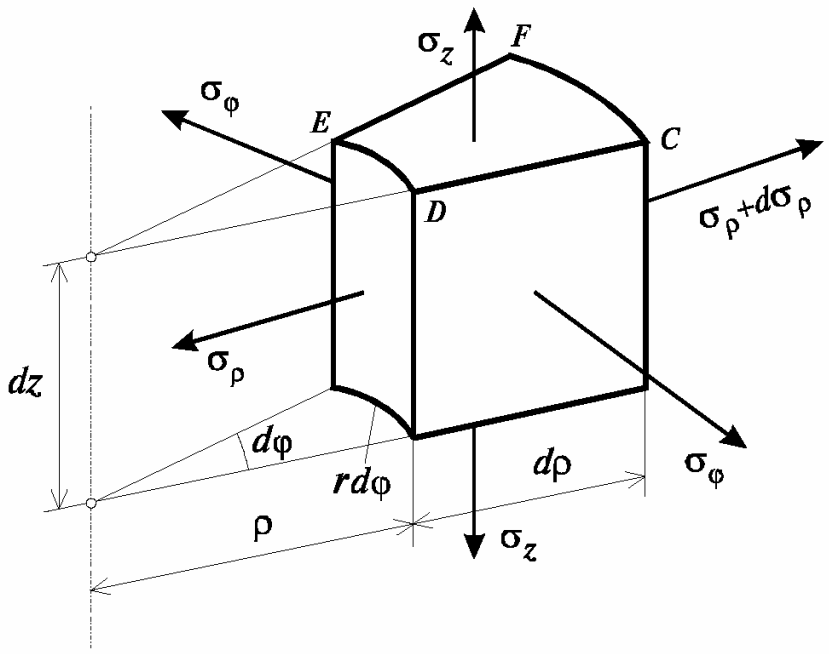


Рис. 11.8

Поскольку в поперечных и радиальных сечениях касательные напряжения также отсутствуют, следовательно, площадки в поперечном, радиальном и тангенциальном направлениях являются главными площадками, а напряжения σ_z, σ_ρ, σ_φ являются главными напряжениями.

Проецируя силы, действующие на выделенный элемент (рис. 11.8), на радиальное направление, получим следующее условие равновесия:

$$(\sigma_\rho + d\sigma_\rho)(\rho + d\rho)d\varphi dz - \sigma_\rho \rho d\varphi dz - \sigma_\varphi d\rho d\varphi dz = 0,$$

откуда

$$\sigma_\rho + \frac{d\sigma_\rho}{d\rho}\rho - \sigma_\varphi = 0. \qquad (11.19)$$

Остальные уравнения равновесия для элемента выполняются тождественно.

Закон Гука в данном случае принимает вид:

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{Å}[\sigma_\rho - \mu(\sigma_\varphi + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{Å}[\sigma_\varphi - \mu(\sigma_\rho + \sigma_z)]. \qquad (11.20)$$

Деформация по направлению z отсутствует, из предположения, что цилиндр бесконечно длинный, т.е. $\varepsilon_z = 0$

Выражение напряжений в осевом направлении определяется самостоятельно, если учесть, что в поперечных сечениях цилиндра с площадью $F = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ действует продольная сила:

$$N_z = -\frac{\pi}{4}(p_в D^2 - p_a d^2).$$

Следовательно,

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} = \frac{p_a d^2 - p_в D^2}{D^2 - d^2}. \qquad (11.21)$$

Из (11.20) с учетом (11.18) выражения для напряжений σ_φ и σ_ρ принимают вид:

$$\sigma_\rho = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \mu\frac{u}{\rho}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z;$$
$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{\rho} + \mu\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z. \qquad (11.22)$$

Тогда уравнение равновесия (11.19) с учетом (11.22) примет окончательный вид:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} = 0. \qquad (11.23)$$

Решение (11.23) записывается в виде:

$$u = c_1\rho + \frac{c_2}{\rho}, \qquad (11.24)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий задачи:

при $\rho = \frac{d}{2}$; $\sigma_\rho = -p_a$; $\rho = \frac{D}{2}$; $\sigma_\rho = -p_b$. (11.25)

Подставляя выражение u из (11.24) в выражение σ_ρ из (11.22) с учетом граничных условий (11.25) получим:

$$c_1 = \frac{1-\mu}{E}\cdot\frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{p_a d^2 - p_в D^2}{D^2 - d^2} - \frac{\mu}{E}\sigma_z;$$
$$c_2 = \frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{1}{1-\mu}\cdot\frac{D^2 d^2}{4(D^2 - d^2)}\cdot(p_в - p_а). \qquad (11.26)$$

В результате совместного рассмотрения (11.22), (11.24) и (11.26) выражения для напряжения примут окончательный вид:

$$\sigma_\rho = \frac{p_à d^2 - p_â D^2}{D^2 - d^2} - \frac{D^2 d^2}{4\left(D^2 - d^2\right)} \frac{(p_à - p_â)}{\rho^2};$$
$$\sigma_\varphi = \frac{p_à d^2 - p_â D^2}{D^2 - d^2} + \frac{D^2 d^2}{4\left(D^2 - d^2\right)} \frac{(p_à - p_â)}{\rho^2}. \qquad (11.27)$$

Рассмотрим случай нагружения цилиндра только внутренним давлением, тогда принимая $p_в = 0$, из (11.21) и (11.27) получим:

$$\sigma_z = \frac{p_a d^2}{D^2 - d^2};$$
$$\sigma_\rho = \frac{p_a d^2}{D^2 - d^2}\left(1 - \frac{D^2}{4\rho^2}\right); \qquad (11.28)$$
$$\sigma_\varphi = \frac{p_a d^2}{D^2 - d^2}\left(1 + \frac{D^2}{4\rho^2}\right).$$

Анализ выражений (11.28) показывает, что $\sigma_\varphi > \sigma_z > \sigma_\rho$ Следовательно $\sigma_\varphi = \sigma_1$; $\sigma_z = \sigma_2$; $\sigma_\rho = \sigma_3$. Выражение интенсивности напряжения в данном случае принимает вид:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2}.$$

Из (11.28), учитывая, что

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\varphi). \qquad (11.28')$$

получим

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_\rho). \qquad (11.29)$$

Предположим, что цилиндр изготовлен из неупрочняющегося материала для которого условие пластичности выражается в следующем виде:

$$\sigma_i = \sigma_T, \qquad (11.30)$$

где σ_T – предел текучести материала цилиндра.

Подставляя (11.29) в (11.30) получим условия пластичности для данного случая:

$$\sigma_\varphi - \sigma_\rho = 2K, \qquad (11.31)$$

где $K = \dfrac{\sigma_m}{\sqrt{3}}$.

Из анализа выражений напряжений (11.28) следует вывод, что наибольшее значение напряжение σ_φ принимает при $\rho = d/2$, т.е. на внутренней границе цилиндра. Следовательно, по мере увеличения внутреннего давления в пластическое состояние будут сначала переходить внутренние, а затем и более близкие к внешней границе слои материала.

Для определения значения давления, при котором слои на внутренней границе цилиндра, т.е. при $\rho = d/2$, переходят в пластическое состояние, воспользуемся условием пластичности (11.31), подставляя в него выражение напряжений из (11.28):

$$p_a = p_m = \frac{\sigma_{\grave{o}}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{D^2 - d^2}{D^2}. \qquad (11.32)$$

По мере дальнейшего роста внутреннего давления зона пластичных деформаций от внутренней поверхности распространяется в сторону наружной поверхности.

Для случая когда все поперечное сечение оболочки находится в пластическом состоянии рассматривается условие равновесия (11.18) и условие пластичности (11.31) и тогда:

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = \frac{2K}{\rho}. \qquad (11.33)$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим:

$$\sigma_\rho = 2K\left(\ln\rho + C\right). \qquad (11.34)$$

Постоянная интегрирования C определяется из граничных условий задачи:

$$\rho = D/2;\ \sigma_\rho = 0. \qquad (11.35)$$

Подставляя (11.34) в (11.35), определим: $C = -\ln\dfrac{D}{2}$. Следовательно, из (11.34) окончательно получим:

$$\sigma_\rho = -2K\ln\frac{D}{2\rho}. \qquad (11.36)$$

Из условия пластичности (11.31) будем иметь

$$\sigma_\varphi = 2K\left(1 - \ln\frac{D}{2\rho}\right). \qquad (11.37)$$

Выражение для σ_z принимает вид:

$$\sigma_z = K\left(1 - 2\ln\frac{D}{2\rho}\right). \qquad (11.38)$$

Величину внутреннего давления, при действии которого вся оболочка переходит в пластическое состояние, обозначим $p_a = P_{ПР}$ и получим из граничных условий задачи при $\rho = d/2$ $P_{ПР} = \sigma_\rho$ Следовательно, из (11.36) получим:

$$P_{ПР} = 2K\ln\frac{D}{d}.$$

11.4. Пример расчета (задача №23)

Для толстостенной стальной трубы, имеющей внутренний диаметр d = 0,03 м и наружный диаметр D = 0,18 м, и изготовленной из пластичного материала с σ_T = 250 МПа и с коэффициентом Пуассона μ = 0,5, требуется:

1. Определить давление p_T, при котором в материале трубы начнется пластическое деформирование;

2. Определить предельное внутреннее давление $p_{ПР}$, при котором весь материал будет находиться в пластическом состоянии;

3. Построить эпюры распределения напряжений σ_ρ, σ_φ, σ_z по толщине стенки для двух состояний трубы, рассмотрены в п. 1 и 2;

4. Определить допускаемое значение давления $p_a = p_{ДОП}$ при коэффициенте запаса прочности n = 1,5.

Решение

1. По формуле (11.32) определяем давление, при котором на внутренней поверхности трубы появятся пластические деформации:

$$p_{\text{т}} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{D^2 - d^2}{D^2} = \frac{250}{1{,}73}\cdot\frac{0{,}18^2 - 0{,}03^2}{0{,}18^2} = 140{,}5\ \text{МПа}.$$

2. С учетом того, что $p_a = p_T$, из (11.28) определяем напряжения, соответствующие началу пластического течения:

$$\sigma_z = \frac{p_a d^2}{D^2 - d^2} = \frac{140{,}5\cdot 0{,}03^2}{0{,}18^2 - 0{,}03^2} = 4{,}014\ \text{МПа};$$

$$\sigma_\rho = \frac{p_a d^2}{D^2 - d^2}\left(1 - \frac{D^2}{4\rho^2}\right) = 4{,}014\cdot\left(1 - \frac{0{,}18^2}{4\rho^2}\right);$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p_a d^2}{D^2 - d^2}\left(1 + \frac{D^2}{4\rho^2}\right) = 4{,}014 \cdot \left(1 + \frac{0{,}18^2}{4\rho^2}\right).$$

Данные для числовых расчетов сводим в табл. 6.

Таблица 6

$\rho \cdot 10^{-2}$, м	σ_φ	σ_ρ
1,5	148,5	–140,5
3	40,1	–32
6	13,0	–5,0
9,5	8,0	0

Эпюры напряжений σ_ρ, σ_φ, σ_z для упругого состояния материала трубы приведены на рис. 11.9, *а*.

Рассмотрим теперь предельное состояние трубы, когда весь материал трубы находится в пластическом состоянии. Предельное давление в этом случае определяется по формуле $p_{ПР} = 2K \ln \frac{D}{d} = 2\frac{250}{1{,}73} \ln 6 = 517{,}8$ МПа.

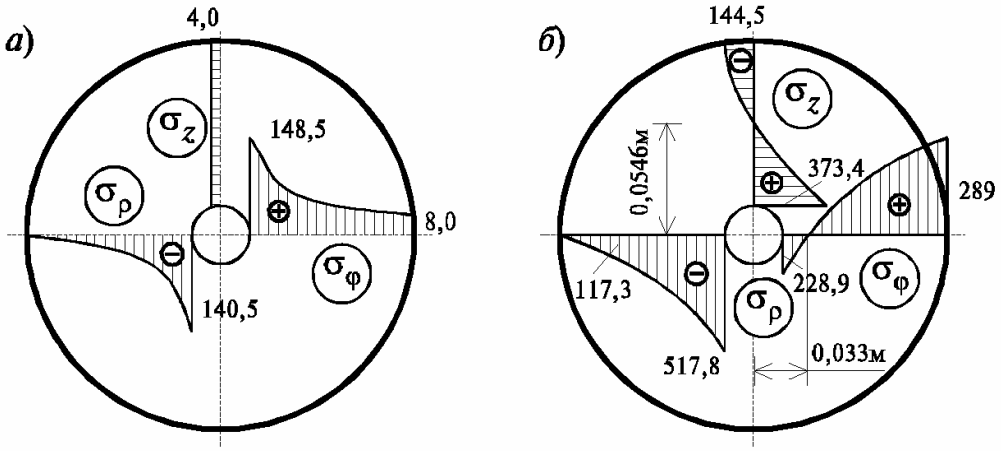


Рис. 11.9

3. Для определения напряжений σ_ρ, σ_φ, σ_z воспользуемся формулами (11.36), (11.37), (11.38):

$$\sigma_\rho = -2\frac{250}{1{,}73} \ln \frac{0{,}18}{2\rho} = -289 \ln \frac{0{,}09}{\rho}; \sigma_\varphi = 289\left(1 - \ln \frac{0{,}09}{\rho}\right);$$

$$\sigma_z = 144{,}5\left(1 - 2\ln \frac{0{,}09}{\rho}\right).$$

Данные для числовых расчетов сводим в табл. 7

Таблица 7

$\rho \cdot 10^{-2}$, м	σ_ρ	σ_φ	σ_z
1,5	–517,8	–228,9	–373,4
3	–317,6	–28,6	–173,1
6	–117,5	–171,7	27,2
9	0	289,0	144,5

Для более точного построения эпюр σ_φ и σ_z определим точки, в которых указанные напряжения равны нулю:

для эпюры σ_φ

$$1 - \ln\frac{0,09}{\rho} = 0 \rightarrow \ln\frac{0,09}{\rho} = 1 \rightarrow \frac{0,09}{\rho} = 2,718 \rightarrow \rho = 3,31 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

для эпюры σ_z

$$1 - 2\ln\frac{0,09}{\rho} = 0 \rightarrow \ln\frac{0,09}{\rho} = 0,5 \rightarrow \rho = 5,46 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

4. Эпюры напряжений σ_ρ, σ_φ, σ_z приведены на рис. 11.9, *б*. Допускаемое значение внутреннего давления определяется из условия $p_{ДОП} = p_{ПР}/n$: $p_{ДОП} = 517,8/1,5 = 345,2$ МПа.

12. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ, ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТЫ

Для углубленного усвоения курса, ниже по тематике каждого вышеизложенного раздела, последовательно приводятся вопросы для самопроверки уровня полученных знаний и задач для самостоятельной и контрольных работ.

Чтобы обладать аппаратом настоящей дисциплины, студент должен после изучения соответствующего раздела курса самостоятельно решать множество задач и обязательно проверять правильность полученных результатов, аналогично тому как это было сделано в учебнике при выполнении методических примеров расчетов.

Исходные данные по каждому семейству задач изложены ниже в табличной форме по столбцам. Это представляет возможность путем вариации исходных величин по строкам формировать очень большое число задач по данному семейству.

Тем самым и преподавателям дисциплины представляется возможность использовать предложенный материал в качестве заданий для выполнения контрольных работ. Рекомендуется исходные данные для индивидуальных заданий на контрольные работы взять из приведенных далее таблиц исходных данных в строгом соответствии с шифром студента. При этом необходимо три последние цифры своего шифра студента написать дважды над буквами: *а, б, в, г, д, е*.

Например, при шифре 98-ПГС-7468 это будет выглядеть так:

4 6 8 4 6 8

а б в г д е

Тогда число над буквой *а* указывает номер строки, где расположено числовое значение соответствующей исходной данной из столбца *а* и т.д.

12.1. Введение - вопросы для самопроверки

1.1. Перечислите основные задачи предмета сопротивление материалов.
1.2. Что такое расчетная схема объекта?
1.3. Укажите геометрические признаки стержня, оболочки и массивного тела.
1.4. Что такое сосредоточенная сила, распределенная нагрузка и момент?
1.5. Какие усилия включают в себя полная система внешних сил?
1.6. Перечислите внутренние силовые факторы.
1.7. Поясните суть метода сечений.
1.8. Перечислите простые виды сопротивление стержня.
1.9. Дайте определение понятия «напряжения» и какие виды напряжения вы знаете.
1.10. Поясните, что такое линейная и угловая деформация.

1.11. Сформулируйте закон Гука и принцип независимости действия внешних сил.
1.12. Что такое упругое тело?

12.2. Растяжение и сжатие

а) **Вопросы для самопроверки**

2.1. Дайте определение равновесного состояния стержня называемого простым растяжением или сжатием.
2.2. Что такое принцип Сен-Венана? Дайте пояснение на конкретном примере.
2.3. Какое правило знаков принято для усилия и напряжения, возникающих при простом сжатии и растяжении?
2.4. Дайте определение статически определимых и неопределимых систем.
2.5. Поясните физический смысл модуля первого рода.
2.6. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
2.7. Что такое пластичность?
2.8. Что такое предел прямопропорциональности, предел упругости и предел текучести?
2.9. Что такое хрупкость и перечислите хрупкие материалы?
2.10. Перечислите основные принципы расчета инженерных конструкций.

12.3. Геометрические характеристики поперечных сечений бруса

а) **Вопросы для самопроверки**

3.1. Что такое статический момент сечения?
3.2. Дайте определение центральной оси сечения.
3.3. Дайте определение центра тяжести сечения.
3.4. Что такое осевые моменты инерции сечения?
3.5. Что такое центробежный момент инерции сечения?
3.6. Что такое полярный момент инерции сечения?
3.7. Что такое главные оси инерции сечения?
3.8. Дайте определение главных моментов инерции сечения.
3.9. Дайте определение радиусов инерции сечения.
3.10. Чему равен статический момент инерции составного сечения?
3.11. Чему равны моменты инерции составного сечения?

12.4. Кручение

а) **Вопросы для самопроверки**

4.1. Какой вид сопротивления бруса называется кручением?
4.2. Какие усилия и напряжения возникают при кручении в поперечных сечениях стержня.
4.3. Почему аппарат сопротивления материалов неприемлем при расчете равновесного состояния бруса некруглого поперечного сечения при кручении?
4.4. Дайте геометрическую трактовку определению тонкостенного бруса.
4.5. Укажите характер распределения напряжения в тонкостенном брусе открытого и закрытого профиля по толщине стенки.

12.5. Изгиб

а) **Вопросы для самопроверки**

5.1. Какой вид равновесного состояния стержня называется изгибом.
5.2. Дайте определения чистого и поперечного изгиба соответственно.
5.3. Поясните физическую суть шарнирно-подвижного характера опирания.
5.4. Поясните физическую суть шарнирно-неподвижного характера опирания.
5.5. Поясните физическую суть жесткой заделки.
5.6. Поясните правило принятия знаков для изгибающего момента и поперечной силы.
5.7. Поясните суть основных дифференциальных соотношений теории изгиба.
5.8. Запишите формулу по определению нормальных напряжений, возникающих в поперечных сечениях при чистом и поперечном изгибе.
5.9. Запишите формулу Журавского Д.И.
5.10. Поясните суть и предназначения метода начальных параметров.
5.11. Поясните суть формы равновесного состояния называемой косым изгибом.
5.12. Дайте определение формы равновесного состояния называемой внецентренным сжатием или растяжением.
5.13. Что такое ядро сечения.
5.14. Дайте определение нейтральной линии.
5.15. Дайте определение первой, второй и третьей теории прочности соответственно.
5.16. Какая стержневая система называется рамой?

12.6. Расчет статически неопределимых систем методом сил

а) **Вопросы для самопроверки**

6.1. Какие стержневые системы называются фермами?
6.2. Какие стержневые системы называются рамами?
6.3. Дайте определение системы называемых плоскими.
6.4. Дайте определение систем называемых плоско-пространст-венными.
6.5. Дайте определение систем называемых пространственными.
6.6. Дайте определения статически определимых и статически неопределимых систем.
6.7. Какие функции выполняет метод Мора?
6.8. Поясните правило Верещагина.
6.9. Поясните суть метода сил.
6.10. Какие требования возлагаются к основной системе метода сил?

12.7. Устойчивость прямых стержней

а) **Вопросы для самопроверки**

7.1. Дайте определение понятия критическое состояние системы.
7.2. Дайте определение понятия потери устойчивости системы.
7.3. Какие величины внешних сил называются критическими?
7.4. В чем заключается суть задачи Эйлера?
7.5. Какие закономерности обнаруживаются между различными формами потери устойчивости систем?
7.6. Зависит ли величина критических значений внешних сил от характера закрепления стержня?
7.7. От каких факторов зависит гибкость стержней?
7.8. В зависимости от величины гибкости дайте квалификацию стержней.

12.8. Динамические задачи

а) Вопросы для самопроверки

8.1. Дайте определения предмета статической и динамической теории механических систем.
8.2. Перечислите примеры динамических нагрузок.
8.3. Дайте определение понятия числа степеней свободы заданной системы.
8.4. Дайте определение свободного колебания системы.
8.5. Дайте определения вынужденного колебания системы.
8.6. Дайте определение периода собственных и вынужденных колебаний системы.
8.7. Поясните физическую суть фазовой и круговой частоты системы.
8.8. Поясните физический смысл коэффициента динамичности.
8.9. Какие системы называются системами с дискретными параметрами.
8.10. Укажите число свободы реальных систем и дайте соответствующие пояснения.
8.11. Дайте определение системы с одной степенью свободы.
8.12. Какие явления называются резонансом?
8.13. Какое явление называется ударом?

12.9. Прочность при цилиндрических нагрузках

а) **Вопросы для самопроверки**

9.1. Какие процессы называются усталостью?
9.2. Поясните свойство материалов называемое выносливостью.
9.3. Поясните суть коэффициента асимметрии цикла.
9.4. Какие нагрузки называются циклическими?
9.5. Перечислите основные факторы оказывающие влияние на усталостную прочность образцов.
9.6. Дайте определение коэффициента запаса усталостной прочности.

9.7. Зависит ли диаграмма усталостной прочности от вида напряженного состояния изделия?
9.8. Что вы понимаете под термином «коэффициент концентрации напряжений»?
9.9. Что вы понимаете под термином «коэффициент качества обработки поверхности изделия»?
9.10. Что Вы понимаете под термином «коэффициент масштабного фактора»?

12.10. Основы теории упругости и пластичности

а) **Вопросы для самопроверки**

10.1. Дайте определения тензора напряжений и тензора деформаций соответственно.
10.2. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
10.3. Дайте определение относительно знаков компонента тензора напряжений.
10.4. Дайте определение главным площадкам, главным осям и главным напряжениям.
10.5. Что собой представляет эллипсоида напряжений?

10.6. Какие величины называются инвариантами напряжений и почему?
10.7. Перечислите все три группы уравнения теории упругости.
10.8. Поясните физический смысл уравнений неразрывности.
10.9. Сформулируйте обобщенный закон Гука через интенсивность напряжений и деформаций.
10.10. Перечислите возможные способы решения задач теории упругости.
10.11. Дайте определения прямой и обратной задач теории упругости.
10.12. Дайте определение теории предельных напряженных состояний.
10.13. Дайте определение эквивалентного или эффективного напряжения.
10.14. Перечислите виды плоской задачи.
10.15. Перечислите теории пластичности и дайте соответствующие пояснения.
10.16. Перечислите основные гипотезы взятые за основу деформационной теории пластичности.

12.11. Пластины и оболочки

а) **Вопросы для самопроверки**

11.1 Какие геометрические формы называются пластинами и оболочками?
11.2 Перечислите основные гипотезы взятые за основу тонких пластин.
11.3 Сформулируйте уравнения Софи Жермена.
11.4 Укажите направления главных площадок цилиндрического тела при осесимметричном и постоянном вдоль оси характере напряжения.
11.5 Сформулируйте задачу Ляме.
11.6 Укажите положения опасных площадок, принадлежащих цилиндрическому телу при действии внутреннего и внешнего давления соответственно.

УКАЗАНИЯ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЕДИНИЦ МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЫ *СИ* В ЗАДАЧАХ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Наиболее часто встречающиеся в Сопротивлении материалов единицы Международной системы, установленные Государ-ственным стандартном России, приведены в табл. А.

Таблица А

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенное обозначение единиц измерения
	Основные единицы	
Длина	Метр	м
Масса	Килограмм	кг
Время	Секунда	с
	Дополнительные единицы	
Плоский угол	Радиан	рад
	Производные единицы	
Частота	Герц	Гц
Угловая скорость (угловая частота)	Радиан на секунду	рад/с
Скорость	Метр на секунду	м/с
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	$м/с^2$
Площадь	Метр в квадрате	$м^2$
Статический момент сечения (объем)	Метр в кубе	$м^3$
Осевой момент инерции площади сечения	Метр в четвертой степени	$м^4$
Плотность	Килограмм на метр в кубе	$кг/м^3$
Сила	Ньютон	Н
Удельный вес	Ньютон на метр в кубе	$Н/м^3$
Напряжение, давление, нагрузка, распределенная по поверхности	Паскаль	Па
Погонная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м
Момент силы	Ньютон-метр	Н·м
Работа и энергия	Джоуль	Дж
Мощность	Ватт	Вт
Динамический момент инерции	Килограмм-метр в квадрате	$кг·м^2$

Некоторые основные и производные единицы, имеющие специальные названия (м, с, Гц, Н, Па, Дж, Вт), и окончательных результатах расчетов можно увеличивать или уменьшать, используя для этого приставки, указанные в табл. Б.

Таблица Б

Приставка	Сокращенное обозначение	Множитель
Тера	Т	10^{12}
Гига	Г	10^{9}
Мега	М	10^{6}
Кило	к	10^{3}
Гекто	г	10^{2}
Дека	да	10^{1}
Деци	д	10^{-1}
Санти	с	10^{-2}
Милли	м	10^{-3}
Микро	мк	10^{-6}
Нано	н	10^{-9}
Пико	п	10^{-12}

Среди производных единиц с большой буквы пишутся те, которые образованы от фамилий ученых (Гц, Н, Па и т.д.).

Производные единицы связаны с основными, например:
$1Н = 1кг \cdot 1м/1с^2$; $1Па = 1Н/1м^2$; 1Дж=1Н·1м; 1Вт=1Дж/1с.

Приведем пример использования указанных выше приставок. Модуль упругости для стали $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$Па $= 2{,}1 \cdot 10^{10}$ даПа $= 2{,}1 \cdot 10^{9}$ гПа $= 2{,}1 \cdot 10^{8}$ кПа $= 2{,}1 \cdot 10^{5}$ МПа $= 0{,}21 \cdot 10^{3}$ ГПа = 0,21 ТПа.

В некоторых задачах по сопротивлению материалов в исходных данных используются внесистемные единицы, например обороты в минуту или сантиметр в четвертой степени и т.д. Это связано с тем, что на многих работающих сейчас электродвигателях, создающих динамическую нагрузку, обозначено именно количество оборотов в минуту, а в действующих сортаментах на прокат даны геометрические характеристики пока еще в единицах, производных от сантиметра. Переход от этих единиц к системным очевиден. Например:

$$1см^4 = 1(10^{-2}\,м)^4 = 1 \cdot 10^{-8}\,м^4;$$

$$300\ об/мин = 5\ об/с = 5 \cdot 2\pi\ Гц.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.* Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.

2. *Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.* Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 572 с.

3. *Дарков А.В., Шапиро Г.С.* Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975. – 654 с.

4. *Минин Л.С., Окопный Ю.А., Радин В.П., Хроматов В.Е.* Сборник задач по курсу «Механика материалов и конструкций».- М.: МЭИ, 1998. - 303 с.

5. *Смирнов А.Ф. и др.* Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975. – 480 с.

6. *Саргсян А.Е.* Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. – М.: АСВ, 1998. – 240с.

7. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1970. – 544с.