ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Курс лекций

Содержание:

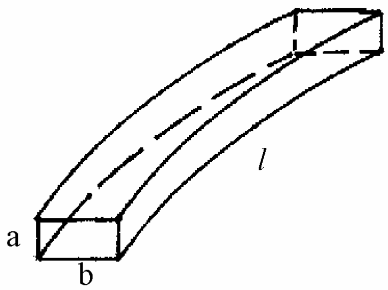
Содержание и задачи курса сопротивление материалов.

Сопромат – это наука об инженерных методах расчёта элементов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость.

Задачи проектирования – обеспечить условия жёсткости и устойчивости, с одновременным требованием экономичности и красоты.

Основные объекты расчёта сопромата – стержень, пластины, массивное тело.

Стержень: $\ell >> a, b$



Осью стержня называется линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений.

Если ось стержня кривая – то стержень ***криволинейный***; прямая – ***прямолинейный.*** Сопромат использует простые математические методы расчёта, с привлечением упрощений, гипотез и экспериментальных данных.

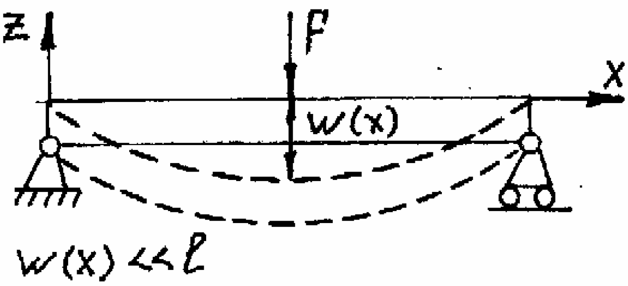
Основные гипотезы.

1. Гипотеза о сплошности: материал называется сплошным, т.е. он занимает сплошь объём, не учитывая молекулярное состояние, а также не учитывая камеры, пустоты.

2. Гипотеза об однородности: считаем, что в любой точке свойства одинаковы.

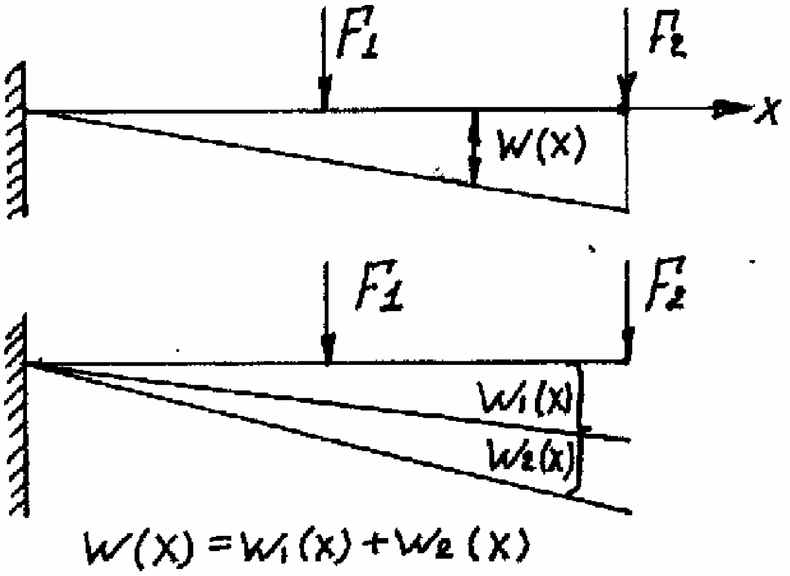
3. Гипотеза об изотопности: свойства материалов не зависят от направления.

4. Гипотеза о малых деформациях: считаем, что деформации малые по сравнению с размерами тела.



5. Гипотеза об абсолютной упругости: материал считается абсолютно упругим, если после удаления причин вызывающих деформации, они полностью исчезают.

Во многих случаях справедлив закон Гука(линейная связь между деформациями и силами). Используя закон Гука, а также гипотезу о малости деформаций, можем использовать принцип суперпозиции (закон сложения сил). Например, если на элемент конструкции действует несколько сил, то его можно рассчитать на каждую силу в отдельности, результат сложить.



Внешние силы.

Это результат взаимодействия нашего тела с другими телами. Внешние силы бывают ***поверхностные*** и ***объёмные.***

Поверхностные силы распределены по всей поверхности или по какой-то её части.

$\dim \varphi = \dfrac{H}{M^2}$

$\dim q = \dfrac{H}{M}$

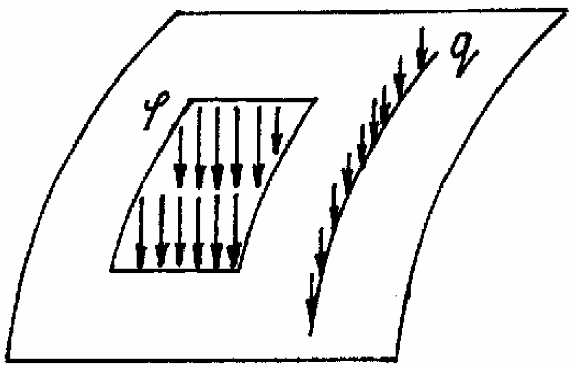
$\dim F = П$

$\dim M = H \cdot м$

$\dim m = \dfrac{H \cdot м}{м}$

φ - интенсивность;

q – погонная нагрузка.

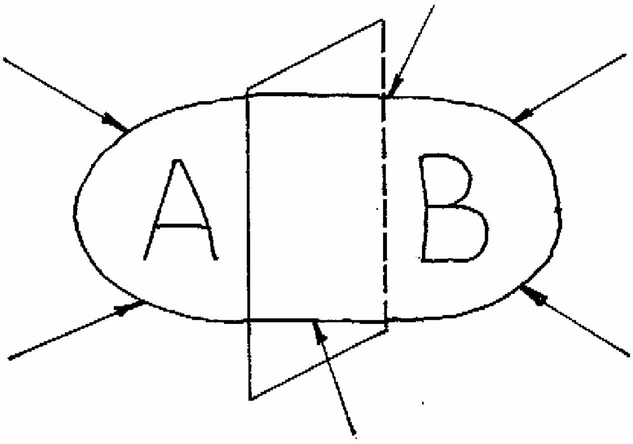


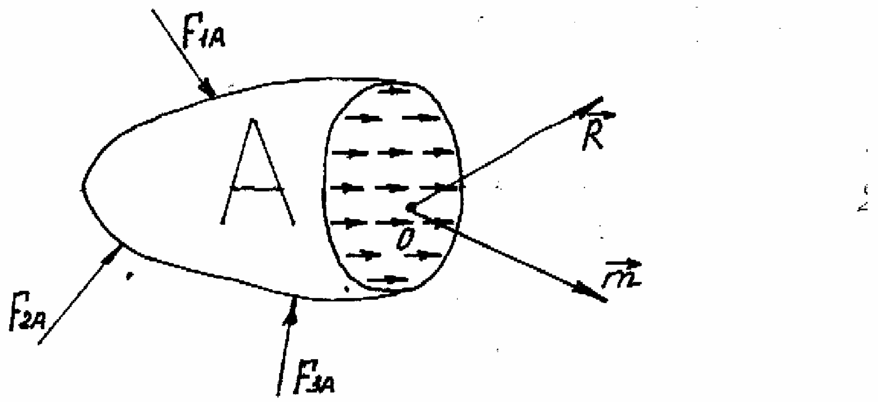
Объёмные нагрузки – это нагрузки, которые действуют по всему объёму (сила тяжести).

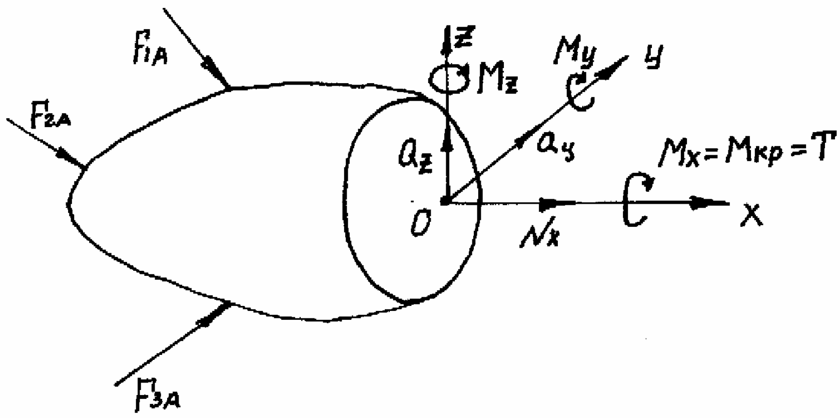
Внутренние силы – в сопромате учитывают только те внутренние силы, которые возникают в результате внешних нагрузок, считаем, что в нагруженном теле нет внутренних сил, используется метод сечений.

Метод сечений.

Рассмотрим тело, которое находится в равновесии с действием активных и реактивных нагрузок. В том месте, где необходимо определить внутренне усилие, мысленно рассекаем тела на две части, и одну из них (любую) отбрасываем (например, часть В). Действие части В на часть А заменим нагрузкой, которая будет распределена по всему сечению. Из теоретической механики известно, что любое распределённую нагрузку, можно заменить главным моментом и главным вектором сил, проведённым в одной точке, обычно к центру тяжести.







Введём декартовую систему координат: Ox перпендикулярно сечению, z, y лежат в плоскости сечения. Возложим главные моменты по осям координат z,y,x. Q_z,Q_y - поперечные силы; N_x - продольная сила; M_y,M_z - изгибающий момент; M_x - крутящий момент.

Так как часть А находится в равновесии, то для неё можно записать 6 независимых уравнений статики:

$$\sum x = 0$$
$$\sum y = 0$$
$$\sum z = 0$$
$$N_x + \sum_{i=1}^{n} (F_{iA})_x = 0$$
$$\sum mom_x = 0$$
$$\sum mom_y = 0$$
$$\sum mom_z = 0$$

Можем определить 6 уравнений (3 силы и 3 момента).

Построение эпюр в балках.

Балка – стержень, работающий на изгиб.

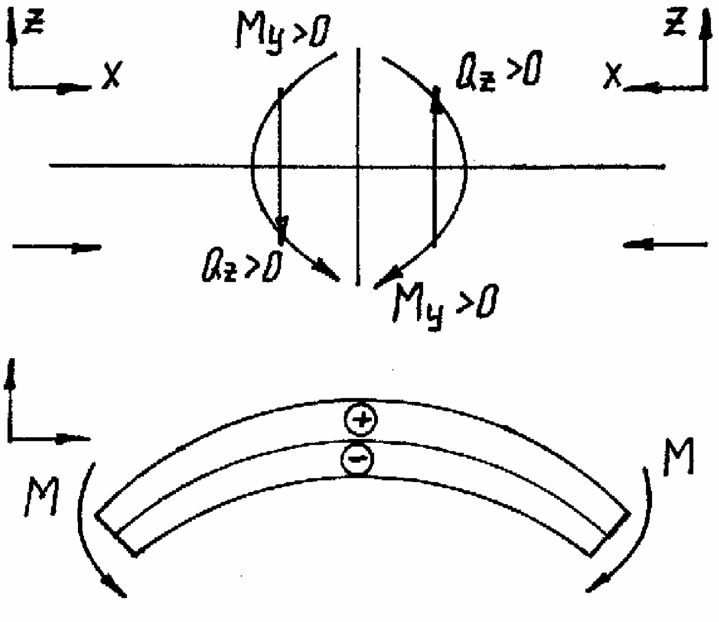
Изгиб – деформация, при которой возникают изгибающие моменты и поперечные силы.

Плоским изгибом называется изгиб, при котором внешние нагрузки лежат в одной плоскости (главной).

$M_y \neq 0; \;\; Q_z \neq 0; \;\; N_x = M_y = M_z = M_x = 0$

Эпюра – это график изменения внутренних усилий вдоль оси. Мы будем строить эпюре только при плоском изгибе.

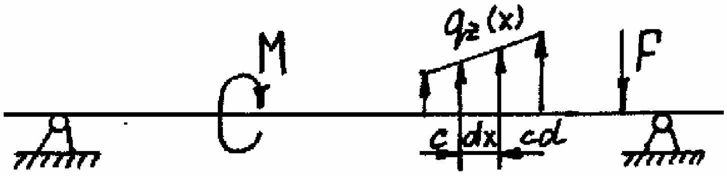
Правило знаков для M_y и M_z.



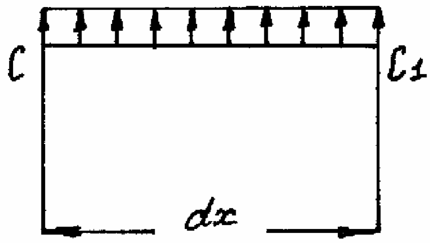
Если внешние нагрузки пытаются повернуть тело по часовой стрелке, то $Q_z > 0$. Изгибающие моменты будут положительны, если верхние волокна будут ***растягиваться***, отрицательные – ***сжиматься***.

Дифференциальные зависимости при изгибе балок.

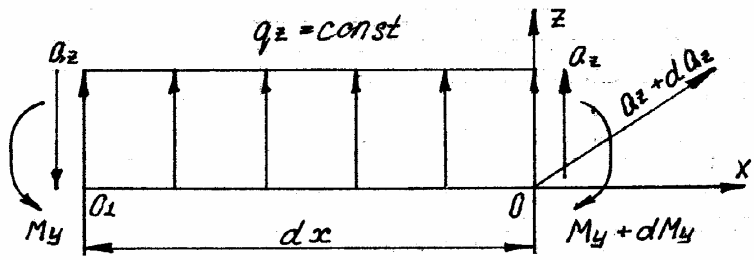
Они нужны как для построения, так и для проверки правильности построения эпюр. Рассмотрим балку, которая находится в равновесии под действием внешних нагрузок, включая реакции опор.



Выделим участок, где действует только распределённая нагрузка, бесконечной малой длины.



В виду малости dx, можно считать что $Q_z = const$. Действие отброшенных частей заменим силами, моментами.



Поскольку элемент dx, то мы для него можем записать уравнение равновесия:

$\sum z = 0$

$\sum momy = 0$

$$-Q_z + q_z dx + Q_z + dQ_z = 0; \qquad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z \ (1)$$

$$-M_y - Q_z dx + M_y + dM_y + \underbrace{q_z dx \frac{dx}{2}}_{=0} = 0$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \ (2); \qquad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z$$

Эти зависимости называются ***дифференциальными зависимостями при изгибе балок.***

$Q_z > 0 \ M_y \uparrow \ ; Q_z < 0 \ M_y \downarrow$

Если на участке поперечная сила будет положительна, то функция будет ***возрастающей***, если отрицательной, то функция будет ***убывающей.***

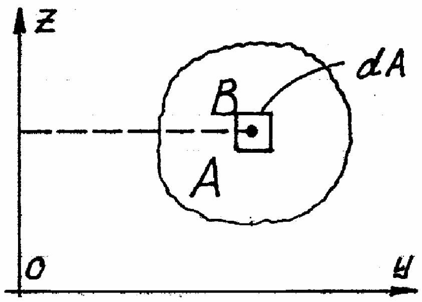
$Q_z(x) = 0$

$q_z = const \qquad Q_z(x) = -qx + c_2$

$$M_y(x) = -\frac{qx^2}{2} + c_3$$

Если в какой-то точке приложена сила, то на эпюре будет скачок на величину этой силы.

Геометрические характеристики плоских сечений.



$A = \iint\limits_A dA$ - площадь сечения.

$$\left.\begin{aligned} S_y &= \iint\limits_A z dA \\ S_z &= \iint\limits_A y dA \end{aligned}\right\} - \textit{статические моменты относительно } z \textit{ и } y$$

Если оси проходят через центры тяжести, то эти оси называются центральными. Относительно центральных осей статические моменты равны нулю.

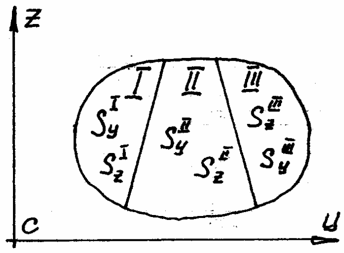
$$\left.\begin{aligned} S_y &= Z_c \cdot A \\ S_z &= Y_c \cdot A \end{aligned}\right\}(3)$$

Z_c, Y_c – *координаты центра тяжести*

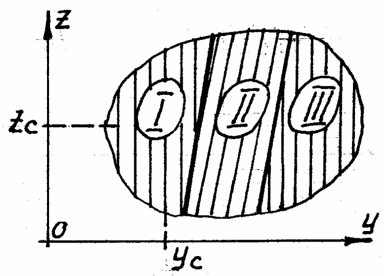
Свойства статических моментов.

$$\left.\begin{aligned} S_y &= S_y^1 + S_y^2 + S_y^3 \\ S_z &= S_z^1 + S_z^2 + S_z^3 \end{aligned}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{aligned} S_y &= S_y^1 - S_y^2 - S_y^3 \\ S_z &= S_z^1 - S_z^2 - S_z^3 \end{aligned}\right\}(4')$$



Учитывая (3) и (4) мы получим:



$$Z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{S_y^1 + S_y^2 + S_y^3 \ldots}{A_1 + A_2 + A_3 \ldots} = \frac{Z_{c_1} A_1 + Z_{c_2} A + Z_{c_3} A \ldots}{A_1 + A_2 + A_3 \ldots}$$

$$Y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{S_z^1 + S_z^2 + S_z^3 \ldots}{A_1 + A_2 + A_3 \ldots} = \frac{Y_{c_1} A_1 + Y_{c_2} A + Y_{c_3} A \ldots}{A_1 + A_2 + A_3 \ldots}$$

$$Z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{S_y^1 - S_y^2 - S_y^3 \ldots}{A_1 - A_2 - A_3 \ldots} = \frac{Z_{c_1} A_1 - Z_{c_2} A - Z_{c_3} A \ldots}{A_1 - A_2 - A_3 \ldots}$$

$$Y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{S_z^1 - S_z^2 - S_z^3 \ldots}{A_1 - A_2 - A_3 \ldots} = \frac{Y_{c_1} A_1 - Y_{c_2} A - Y_{c_3} A \ldots}{A_1 - A_2 - A_3 \ldots}$$

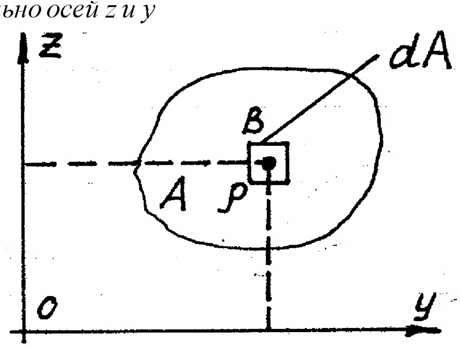
Моменты инерции плоских сечений.

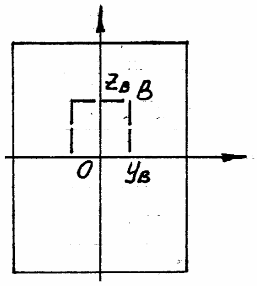
$$\left.\begin{array}{l} I_y = \iint\limits_A z^2 dA \ \ (5) \\ I_z = \iint\limits_A y^2 dA \ \ (6) \end{array}\right\} \textit{моменты инерции относительно осей } z \textit{ и } y$$

$$\left.\begin{array}{l} I_{zy} = \iint\limits_A zydA \\ I_{yz} = \iint\limits_A yzdA \end{array}\right\} (7) \textit{ центробежный момент}$$

$$I_\rho = \iint\limits_A \rho^2 dA \ (8) - \textit{статический момент}$$

$$I_\rho = I_y + I_z \ (9) \qquad \rho^2 = z^2 + y^2$$





Если одна из осей будет являться осью симметрии, то момент будет равен нулю.

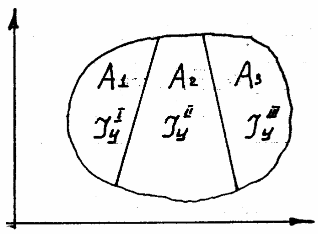
$I_{zy} = 0$ (*каждая точка симметрична*).

Свойства аддиативности моментов инерции.

$$I_y = I_y^1 \pm I_y^2 \pm I_y^3 \ldots \ (10)$$

$$I_z = I_z^1 \pm I_z^2 \pm I_z^3 \ldots \ (11)$$

$$I_{zy} = I_{zy}^1 \pm I_{zy}^2 \pm I_{zy}^3 \ldots \ (12)$$



Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей координат.

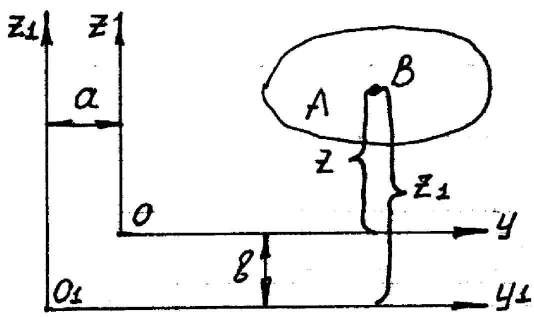
$$z_1 = z + b$$

$$I_{y_1} = \iint\limits_A z_1^2 dA = \iint\limits_A (z+b)^2 dA$$

$$\iint\limits_A z^2 dA + 2b \iint\limits_A zdA + b^2 \iint\limits_A dA$$

$$I_{y_1} = I_y + 2bS_y + b^2 A$$

$$I_{z_1} = I_z + 2aS_z + a^2 A \ (13)$$



$$I_{y_1} = \iint\limits_A y_1 z_1 dA = \iint\limits_A (z+b)(y+a)dA = I_{zy} + aS_y + bS_z + abA \ \ (14)$$

Если оси являются центральными, то оси моментов будут иметь вид:

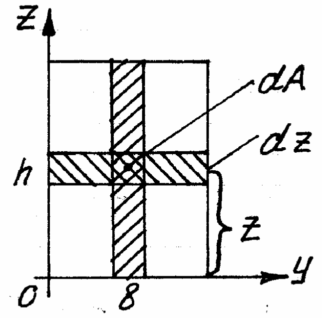
$$I_z = I_z + a^2 * A$$

$$I_y = I_y + b^2 * A$$

$$I_{zy} = I_{czc} + a * b * A$$

Вычисление моментов инерции для некоторых простейших фигур.

а) Прямоугольника:



I_y, I_z, I_{zy}

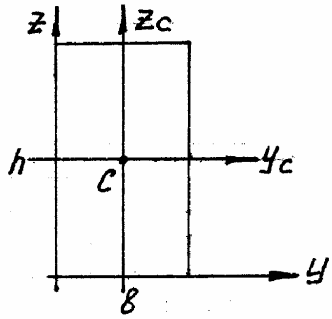
$dA = bdz$

$$I_y = \iint\limits_A z^2 dz = \int\limits_0 bz^2 dz = \left.\frac{bz^3}{3}\right|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_z = \frac{b^3 h}{3}; I_{zy} = \int\limits_0^h \int\limits_0^b zydydz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^h \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^b = \frac{b^2 h^2}{4}$$

$$I_{y_c} = I_y - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{z_c} = \frac{hb^3}{12}$$



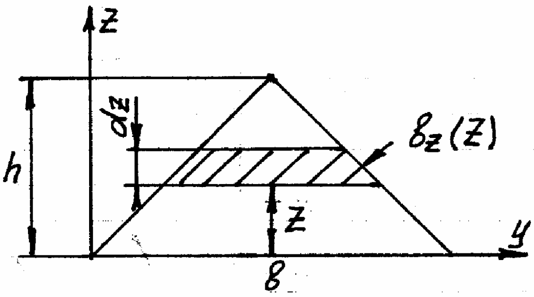
б) Треугольника:

$$I_y = \iint\limits_A z^2 dA = \int\limits_0^h z^2 \frac{(h-z)b}{h} dz = \frac{bh^3}{12}$$

$dA = b(z)dz$

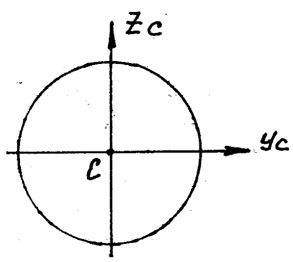
$$\frac{b(z)}{b} = \frac{h-z}{h}$$

$$b(z) = \frac{(h-z)b}{h}$$

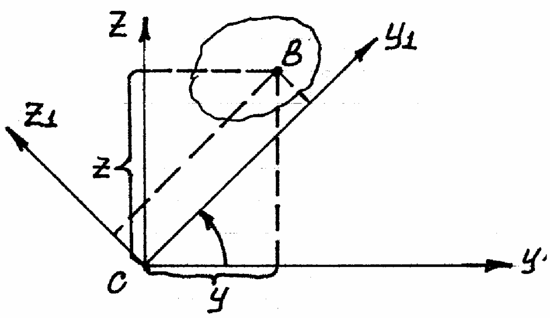


в) Круга:

$$I_{z_c} = I_{y_c} = \frac{\pi R^4}{4}$$



Изменение моментов инерции при повороте осей координат.



I_z, I_y, I_{zy}

$I_{y_1}, I_{z_1}, I_{z_1y_1} = ?$

$z_1 = z*\cos\alpha - y*\sin\alpha$

$y_1 = y*\cos\alpha + z*\sin\alpha$

$$I_{y_1} = \iint_A z_1^2 dA = \iint_A (z*\cos\alpha - y*\sin\alpha)^2 dA =$$

$$= \iint_A (z^2*\cos^2\alpha - 2z*y*\cos\alpha*\sin\alpha + y^2*\sin^2\alpha) dA =$$

$$= I_y*\cos^2\alpha + I_z*\sin^2\alpha - I_{zy}*\sin 2\alpha$$

$$I_{y_1} = I_y*\cos^2\alpha + I_z*\sin^2\alpha - I_{zy}*\sin 2\alpha \quad (15)$$

$$I_{z_1} = \iint_A y_1^2 dA = I_z*\cos^2\alpha + I_y*\sin^2\alpha + I_{zy}*\sin 2\alpha \quad (16)$$

$$I_{z_1y_1} = \iint_A y_1*z_1 dA = \iint_A (z*\cos\alpha - y*\sin\alpha)*(y*\cos\alpha + z*\sin\alpha) dA =$$

$$= \iint_a (z*y*\cos^2\alpha + z^2*\cos\alpha*\sin\alpha - y*z*\sin^2\alpha) dA =$$

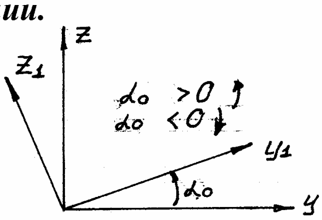
$$I_{zy}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(I_y - I_z)*\sin 2\alpha \quad (17)$$

$$(15)+(16) = I_{y_1} + I_{z_1} = I_z + I_y = const$$

Главные оси и главный момент инерции.

Момент инерции, при повороте осей, измеряются и при некотором угле α, экстремальные значения достигают максимума.

Оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются ***главными осями инерции.***



$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha} = 0$$

$$-2I_y\cos\alpha\cdot\sin\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot I_z - 2I_{zy}\cos 2\alpha = 0$$

$$-2I_{z_1y_1} = 0$$

Относительно главных осей центробежный момент равен нулю.

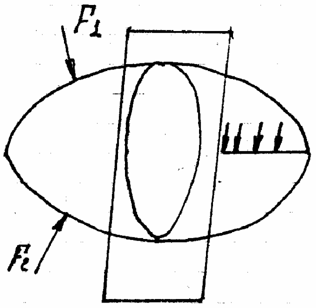
$$tg\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} \ (18); \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}arctg\frac{2I_{zy}}{I_z - I_i} \ (19)$$

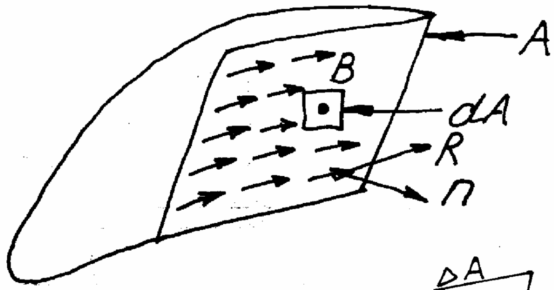
Чтобы определить моменты инерции воспользуемся формулами (15) и (16). Оси, проходящие через центры тяжести, называются ***главными центральными осями.***

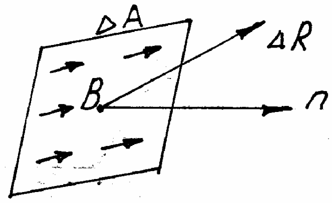
Положение главных осей находим из (19), а значение по формуле:

$$I_u = I_{y_c}\cos^2\alpha_0 + I_{z_c}\sin^2\alpha_0 - I_{z_x y_c}\sin 2\alpha_0 \quad (15')$$
$$I_v = I_{z_c}\cos^2\alpha_0 + I_{y_c}\sin^2\alpha_0 + I_{z_x y_c}\sin 2\alpha_0 \quad (16')$$
$$I_{uv} = 0 \ (17')$$

Понятие о напряжениях.

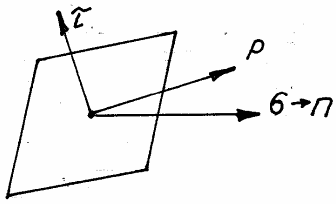






$P_{n\,ср.} = \dfrac{\Delta\vec{R}}{\Delta A}$ – *среднее напряжение на площадке* ΔA *в направлении* $\vec{n}$

$\vec{P}_n = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta\vec{R}}{\Delta A}$ – *полное напряжение*

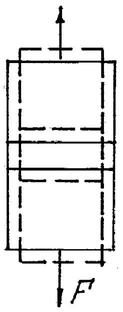


$\dim \vec{P} = \dfrac{Н}{м^2} = Па$

$МПа = 10^6\,Па$

Осевое растяжение, сжатие прямолинейных стержней.

Растяжение, сжатие – это деформация, при которой в поперечном сечении возникает только продольная сила. Будем считать, что при осевом растяжении, сжатии справедлива гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений).

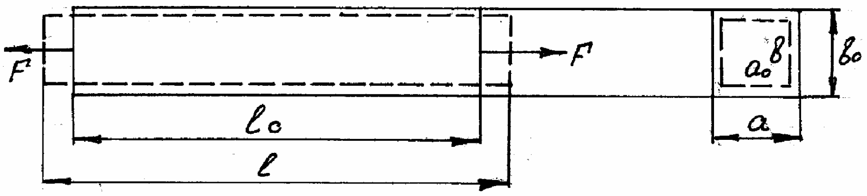


Сечения плоские и параллельные между собой до деформации остаются параллельными, и после деформации, изменяются только расстояния меду ними.

Поскольку справедлива гипотеза Бернулли, то напряжения в сечениях будут распределяться по сечению равномерно, за исключением участков в близи приложения внешних нагрузок (***принцип Сен-Венана).***

$$\delta = \frac{N}{A}$$

Продольные и поперечные деформации.



$\Delta l = l - l_0$ – *абсолютная деформация*

$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ – *относительная продольная деформация*

$\varepsilon_a = \dfrac{a - a_0}{a}$ – *продольная деформация*

$\varepsilon_b = \dfrac{b - b_0}{b_0}$ – *относительная продольная деформация*

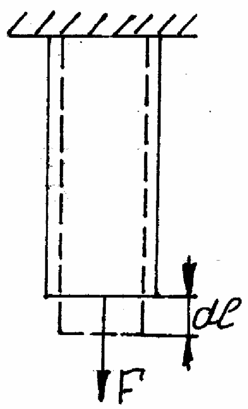
Если $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon'$

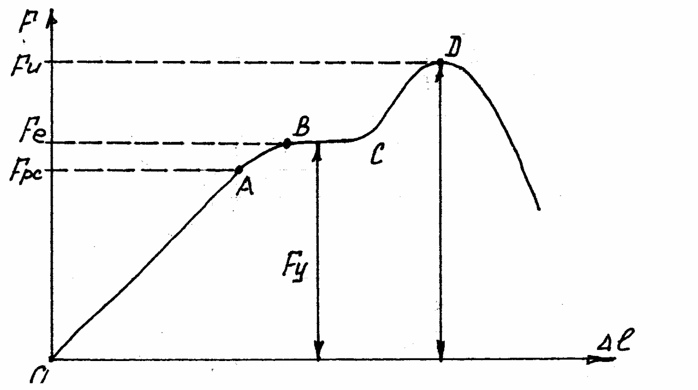
$\varepsilon = -\nu\varepsilon'$

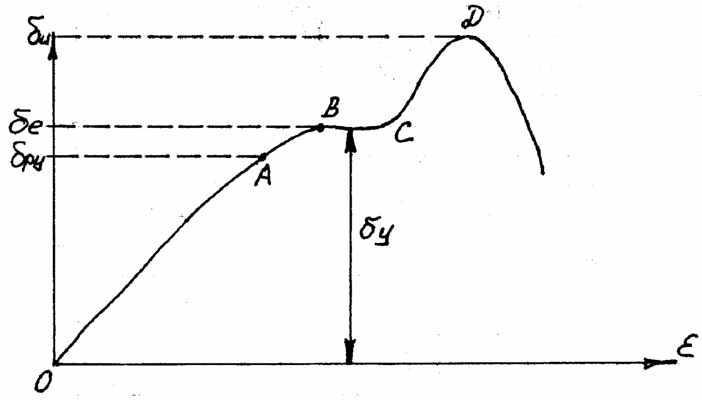
ν – *коэффициент Пуассона*

Связь между напряжениями и деформациями. Закон Гука.

Для каждого материала существует определённая зависимость между напряжениями и деформациями. Они определяются экспериментально.







$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$

$\delta = \dfrac{F}{A}$

$\delta = E \cdot \varepsilon$ – *закон Гука*

E – *модуль Юнга(модуль упругости, зависит от материала)*

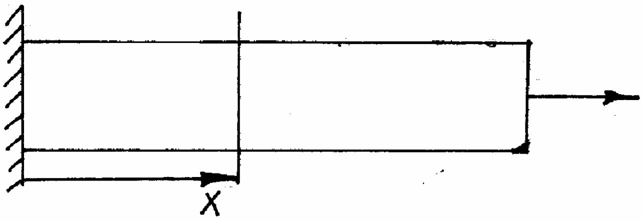
δ_e – *придел упругости(максимальное напряжение, после снятия которого материал принимает первоначальную форму)*

δ_y – *приделтекучести(напряжение, при достижении которго материал начинает течь)*

$\delta_и$ – *придел прочности.(условное напряжение, которое может выдержать материал)*

Всё это – прочностные характеристики.

Перемещение поперечного сечения стержня.



Используя закон Гука $\delta = \varepsilon \cdot E$ и $\delta = \dfrac{N}{A}$ можно получить:

$$\Delta l(x) = \int_0^x \frac{N_x(x)dx}{E(x)A(x)} - \text{другая форма закона Гука}$$

Если $\dfrac{N_x}{E_x} = const$, то $\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}$ (EA – жёсткость стержня).

Расчет на прочность и жёсткость стержня.

$$\text{растяжение} \left\{ \begin{matrix} \max\left|\delta^{p}_{adm}\right| \le \delta^{p}_{adm} \\ \max\left|\delta^{c}_{adm}\right| \le \delta^{c}_{adm} \end{matrix} \right\} \text{сжатие}$$

$$\max|\delta| \le \delta_{adm} - \text{условие прочности}$$

$$\delta_{adm} = \frac{\delta_0}{k} (k - \text{коэффициент запаса})$$

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_{ш} & - \text{ для прочного} \\ \delta_{y} & - \text{ для хрупкого} \end{cases}$$

$$|\Delta l| \le \Delta l_{adm}; \qquad \varepsilon \le \varepsilon_{adm}$$

Статически неопределимые системы.

Статически неопределимая система **–** это система, в которой усилия нельзя определить только при помощи уравнений статики.

Мы должны записать уравнение совместной деформации.

Разность между количеством неизвестных, которые необходимые определить, и числом независимых уравнений статики, называется ***степень статической неопределимости.*** Степень статической неопределимости равняется количеству добавочных уравнений (***уравнения совместной деформации***).

Для того чтобы записать эти добавочные уравнения нужно рассмотреть всевозможные комбинации деформации элементов системы, чтобы система оставалась кинематически неизменимой.

Порядок решения статически неопределимой системы.

1. Решаем статическую задачу (записываем уравнения статики) и определяем степень статической неопределённости.
2. Геометрическая задача (записываем уравнения совместной деформации).

3. Физическая задача (на основе уравнения закона Гука записываем связь между деформацией и усилиями).
4. Решаем все эти уравнения совместно.

Отличие СНС от статически определимых систем.

В СНС при изменении температуры, возникают температурные напряжения.

В СНС могут существовать усилия, которые возникают вследствие не точности изготовления конструкции при дальнейшем монтаже.

В СНС во всех элементах конструкции нельзя одновременно получить напряжение равное допускаемому.

Учёт неточности изготовления.

Вследствие неточности изготовления, при сборке элементов конструкции возникают монтажные напряжения.

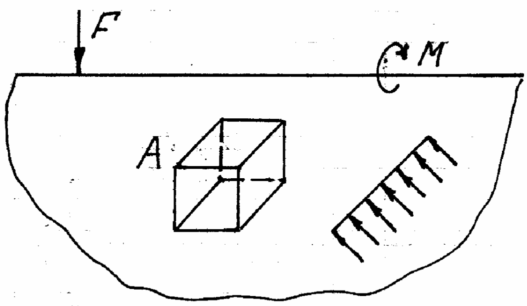
Полный расчёт статически неопределимой системы.

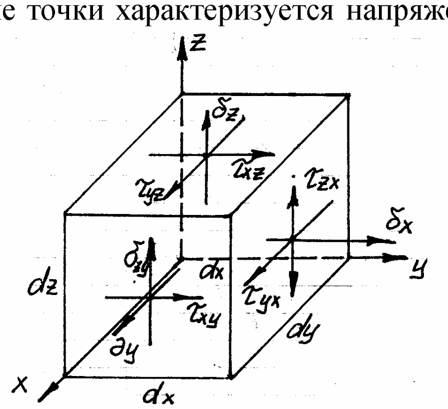
Существует два способа решения:

1. на этапе записи уравнений совместной деформации, мы учитываем все три фактора;
2. учитываем сначала действие от внешних нагрузок, температуры, неточности изготовления, потом используем принцип суперпозиции: $N = N^F + N^{\Delta t} + N^{\Delta}$.

Напряжённо-деформированное состояние точки.

Напряжённым состоянием точки, называется совокупность всех напряжений, действующих на всевозможные площадки, проведённые через эту точку. Однако можно показать, что напряженноё состояние точки характеризуется напряжением, действующим на трёх любых площадках.



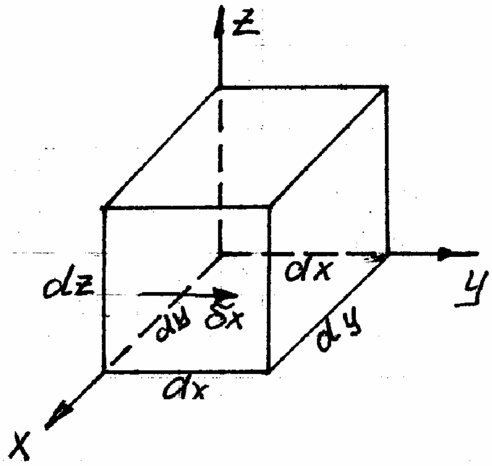


Нормальные напряжения совпадают с нормалью площадки $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

Напряжения в точке характеризуется ***тензором напряжения:***

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Тензор имеет девять состояний. Однако не все девять компонентов являются независимыми. Покажем это.



Запишем уравнение статики: сумма моментов всех сил на оси $xyz = 0$.

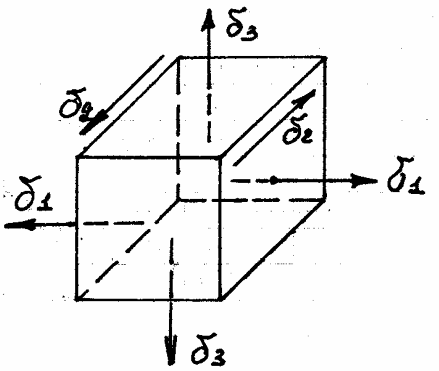
$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Закон парности касательных напряжений.

Касательные напряжения направлены на взаимно перпендикулярных площадках к линии пересечения и равны между собой.

Главные площадки и главные напряжения.

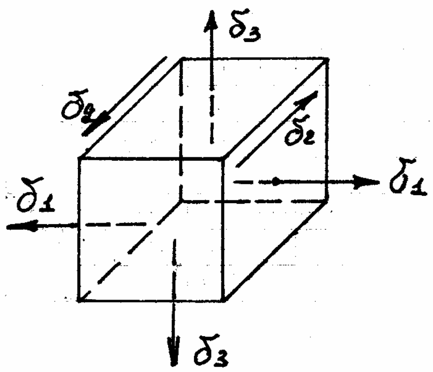


При изменении ориентации граней параллелепипеда, будут меняться и напряжения на гранях. Всегда можно найти в любой точке как минимум три площадки, где касательное напряжение будет равно нулю. Площадки, на которых касательное напряжение равно нулю, называются ***главными.*** При этом главные напряжения достигают экстремальных значений. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Если только одно из главных напряжений отличается от 0, то такое состояние ***одноосное или линейное***; если два – ***плоское***, если три – ***объёмное.***

Деформации при объёмно-обобщённом состоянии.

Если в окрестности точки какой-то точке выделим малый параллелепипед, то на его грани будут действует касательное напряжение.



Рассмотрим параллелепипед, на который действует главное напряжение.

Определим относительные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Направления действия главных напряжений $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - называется ***главными деформациями.***

Для определения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ используем принцип суперпозиции:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) - \textit{деформация действующая в направлении } 1$$

$$\varepsilon_1(\sigma_1) - \textit{деформация от } \sigma_1 \textit{ в направлении } 1$$

$$\varepsilon_1(\sigma_2) - \textit{деформация от } \sigma_1 \textit{ в направлении } 2$$

$$\varepsilon_1(\sigma_3) - \textit{деформация от } \sigma_1 \textit{ в направлении } 3$$

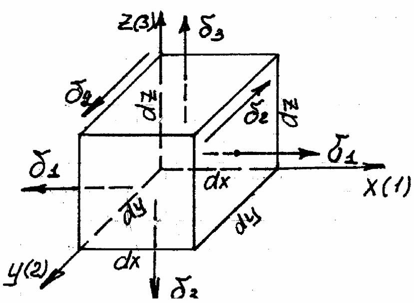
$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1(\sigma_1) &= \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu)(\sigma_2 + \sigma_3) \\
\varepsilon_1(\sigma_2) &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu)(\sigma_1 + \sigma_3) \\
\varepsilon_1(\sigma_3) &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu)(\sigma_1 + \sigma_2)
\end{aligned}\right\} \textit{обобщённый закон Гука для всех осей}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu)(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu)(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu)(\sigma_y + \sigma_x)$$

Объёмные деформации.



dx, dy, dz – *длины сторон до деформации*

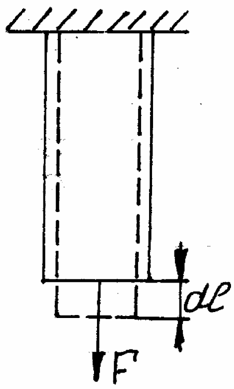
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta(dx)}{dx}; \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}; \varepsilon_3 = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

$$\Delta_1 = \varepsilon_1 \cdot dx; \Delta_2 = \varepsilon_2 \cdot dy; \Delta_3 = \varepsilon_3 \cdot dz$$

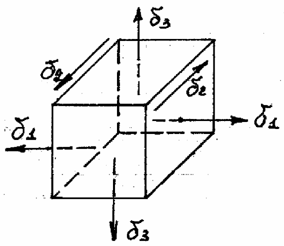
$$V = (dx + \Delta_1)\cdot(dy + \Delta_2)\cdot(dz + \Delta_3) = V_0(1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2)\cdot(1+\varepsilon_3)$$

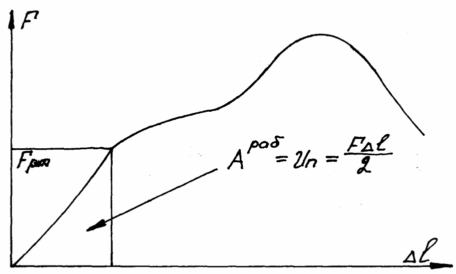
$$\theta = \frac{V - V_0}{V_0}$$

Потенциальная энергия деформации.



В результате упругого деформирования твёрдого тела происходит накопление энергии. Эта энергия высвобождается в результате разрушения тела и называется ***потенциальной энергией.***





Мы работаем в рамках закона Гука. Поскольку у нас ускорение и скорость малы, то изменение кинетической энергии можно пренебречь, следовательно, работа будет равна потенциальной работе.

На гранях его действуют только главные напряжения. При действии главных напряжений, потенциальную энергию можно вычислить как суперпозицию:

$$dU = \delta_1 dl_2 dl_3 \frac{\varepsilon_1 dl_1}{2} + \delta_2 dl_1 dl_2 \frac{\varepsilon_2 dl_2}{2} + \delta_3 dl_3 dl_2 \frac{\varepsilon_3 dl_3}{2}$$

$$dU = dl_1 dl_2 dl_3 \frac{\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2 + \delta_3\varepsilon_3}{2} = \underbrace{dV}_{\text{первоначальный объём}} \cdot \frac{\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2 + \delta_3\varepsilon_3}{2}$$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{\delta_1\varepsilon_1 + \delta_2\varepsilon_2 + \delta_3\varepsilon_3}{2}$$ (1) (*потенциальная энергия на единицу объёма*; *удельная потенциальная энергия*)

(1) с учётом (*) можно записать следующим образом:

$$U = \frac{1}{2E}\left[\left(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\right)\left(\delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \delta_2\delta_3\right)\right] \quad (2)$$

$U = [Па]$

Удельную потенциальную энергию можно представить как: $U = U_И + U_Ф$

Не трудно показать, что:

$$U_И = \frac{1-2\nu}{6E}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2$$

$$U_Ф = U - U_И = \frac{1+\nu}{3E}(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - \delta_1\delta_2 - \delta_1\delta_3 - \delta_2\delta_3)$$

Теория прочности.

Теории прочности необходимы для выработки критериев, которые позволяют оценить состояние материала, когда начинается разрушение. При одноосном растяжении, сжатии всё просто, мы проводим эксперименты на растяжение и сжатие, и на основе их мы получаем критерии. При плоском и объёмном напряжённом состоянии, количество таких экспериментов было бы очень большое. Задача теории прочности, на основе опытов полученных из опытов растяжения, сжатия были получены критерии безопасной работы материала.

Первая теория прочности (теория максимальных, нормальных напряжений).

$$\max|\delta| < \delta_{adm}$$

$$\delta_{adm} = \frac{\delta_0}{K}$$

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_И - \text{для хрупкого материала} \\ \delta_У - \text{для текучего материала} \end{cases}$$

K – *коэффициент запаса*

Максимальные напряжения должны быть меньше допускаемых напряжений, при которых материал разрушается.

Вторая теория прочности (теория наибольшей относительной деформации).

Относительные деформации не должны превосходить предел значений, при которых происходит разрушение материала.

$$\max|\varepsilon| = \varepsilon_1 \le \varepsilon_{adm}$$

$$\delta_1 - \nu(\delta_2 + \delta_3) \le \delta_{adm}$$

Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений).

Касательные напряжения не должны превосходить предельных значений, чтобы материал не разрушался.

$$\max|I| \le \tau_{adm}$$

$$\delta_1 - \delta_3 \le \delta_{adm}$$

Четвёртая теория прочности (энергетическая теория прочности).

Удельная потенциальная энергия не должна превосходить максимальных значений.

$$U_{\Phi} = U_{\Phi adm}$$

$$\frac{1+\nu}{3E}\left[\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - \delta_1\delta_2 - \delta_1\delta_3 - \delta_2\delta_3\right] \le \frac{1+\nu}{3E}\delta_{adm}^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\delta_1\delta_3)^2 + (\delta_1 - \delta_2) + (\delta_2 - \delta_3)^2} \le \delta_{adm}$$