ОПД.Ф.02.02 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное методическое пособие

Учебное пособие разработано в соответствии с Государственными образовательными стандартами РФ по дисциплине «Сопротивление материалов» и предназначено для студентов механических и технологических специальностей заочной (дистанционной) формы обучения и для преподавателей.

СОДЕРЖАНИЕ

1 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ 4
1.1 Цель преподавания дисциплины «Сопротивление материалов» 4
1.2 Лекционные занятия 5
1.3 Практические занятия 8
1.4 Лабораторные занятия 9
1.5 Содержание самостоятельной работы 10
Рекомендуемая литература 10
2 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 11
2.1 Общие методические указания 11
2.2 Указания о порядке выполнения контрольных работ 11
2.3 Задачи для контрольных работ 13
3 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМАМ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ 31
3.1 Статически определимые задачи на растяжение и сжатие 31
3.2 Статически неопределимые задачи на растяжение и сжатие 34
3.3 Элементы теории напряженного и деформированного состояния 36
3.4 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность и жесткость 38
3.5 Геометрические характеристики сечений 41
3.6 Расчет на прочность при прямом поперечном изгибе 45
3.7 Внецентренное растяжение и сжатие короткого бруса 50
3.8 Расчет вала при совместном действии изгиба с кручением 55
3.9 Устойчивость центрально сжатых стержней 61
3.10 Расчет статически неопределимых систем методом сил 67
3.11 Задачи динамики в сопротивлении материалов 71
3.12 Расчет на прочность при переменных напряжениях 74
4 ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ 77
ПРИЛОЖЕНИЯ 81

1 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Рабочая программа составлена на основании Государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования для специальностей механического и технологического профиля и включает все основные разделы дисциплины «Сопротивление материалов». Объем лекционных, практических и лабораторных занятий для студентов ***каждой специальности*** определяется соответствующими ***план-графиками*** учебного процесса, ***количеством контрольных работ*** и ***содержанием тем*** контрольных задач (см. таблицу раздела 2.2).

1.1 Цель преподавания дисциплины «Сопротивление материалов»

Цель курса – научить будущего инженера основам науки о прочности материалов и конструкций, подготовить к правильному выбору методов расчетов и рационального проектирования. Наряду с этим, курс сопротивления материалов является базой для изучения курсов деталей машин, основ конструирования, а также специальных конструкторских курсов.

Задачи курса – повысить качество расчетов и проектирования, дать теоретическую основу для разработки новых эффективных материалов и конструкций и тем самым способствовать повышению эффективности, качества, надежности и экономичности сооружений и конструкций машин.

Знания и умения, приобретаемые студентами после изучения курса.

Закончив изучение курса сопротивления материалов, студенты *должны знать*:

1. Основные задачи дисциплины.
2. Основные допущения в курсе о свойствах материалов, о форме элементов конструкций.
3. Сущность метода сечений для определения внутренних силовых факторов при различных нагружениях бруса
4. Основные характеристики механических свойств конструкционных материалов.
5. Теорию напряженного состояния.
6. Основы теории прочности. Основные понятия механики разрушения.
7. Геометрические характеристики сечений.
8. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении, кручении и изгибе, сложном нагружении.
9. Расчет статически неопределимых систем.
10. Расчет на устойчивость.
11. Основы расчета на прочность при циклических напряжениях.
12. Динамические расчеты элементов конструкций.

13. Основные правила безопасной работы в лаборатории механических испытаний. Правила оказания первой помощи при травмах и поражениях электрическим током.

14. Основную справочную литературу по курсу.

Уметь:

1. Пользоваться основной и справочной литературой по сопротивлению материалов.

2. Переходить от реальной конструкции к расчетной схеме.

3. Определять виды деформаций элементов конструкции, расчетные нагрузки.

4. Выполнять расчеты на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций при простых и сложных нагружениях в статически определимых и статически неопределимых системах.

5. Применять испытательную аппаратуру, правильно обрабатывать и представлять результаты обработки физического эксперимента.

1.2 Лекционные занятия

№ п/п	Наименование раздела или темы. Краткое содержание темы	Количество часов	Литература, разделы (параграфы)
1.	***Первый семестр*** **Введение.** Основные задачи курса. Прочность, жесткость и устойчивость как составные части механической надежности элементов конструкций. *Основные гипотезы* сопротивления материалов о деформируемом теле. *Внешние и внутренние силы. Метод сечений.* Общие понятия о напряжениях и деформациях. Реальная конструкция и ее расчетная схема. Схематизация форм деталей.	0,5	[1], §1.1 –1.6; [3], §1.2 – 1.5
2.	**Расчеты на растяжение и сжатие.** Элементы конструкций, работающих на растяжение и сжатие. Стержни, стержневые системы, формы, висячие конструкции. Напряжения в поперечных сечениях стержня. Продольные и поперечные деформации. *Закон Гука.* Модуль упругости, коэффициент Пуассона. Определение осевых перемещений сечений. Жесткость поперечного сечения при растяжении и сжатии. Расчет	1	[1], §2.1 – 2.8; [3], §3.1– 3.5

№ п/п	Наименование раздела или темы. Краткое содержание темы	Количество часов	Литература, разделы (параграфы)
	простейших статически неопределимых систем при растяжении и сжатии.		
3.	**Основные характеристики механических свойств конструкционных материалов.** Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали и ее характерные параметры. Условная и истинная диаграммы. Разгрузка, повторное нагружение. Понятие об упрочнении. *Пластическое и хрупкое разрушение материала.* Характеристики пластических свойств материалов. Условный предел текучести. Диаграммы сжатия различных конструкционных материалов. Понятие об изотропных и анизотропных телах. Композиционные материалы. Коэффициенты запаса.	0,5	[1], §3.1 – 3.5; [3], §3.6 – 3.10
4.	**Теория напряженного состояния.** *Понятие о напряженном состоянии.* Составляющие напряжений и их обозначение. Закон парности касательных напряжений. Главные площадки и главные напряжения. Чистый сдвиг. Закон Гука для сдвига. Модуль сдвига. *Потенциальная энергия деформации.* Обобщенный закон Гука. *Объемная деформация.* Удельная *потенциальная энергия упругой деформации, ее составляющая – энергия изменения формы.*	1	[1], §4.1 – 4.7; [3], §13.1 – 13.4, 13.6, 13.9
5.	**Основы теории прочности.** Назначение гипотез прочности. Гипотезы прочности для пластического состояния материала. Критерии текучести: наибольших касательных напряжений и энергии изменения формы. Критерий хрупкого разрушения (Мора).	1	[1], §5.1 – 5.4; [3], §14.1 – 14.5
6.	**Расчет на изгиб.** Типы опор. Определение реакций в опорах. Классификация видов изгиба. Нахождение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях балок при изгибе. Дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами и	1	[1], §7.1 – 7.6; [3], §6.1 – 6.4

№ п/п	Наименование раздела или темы. Краткое содержание темы	Количество часов	Литература, разделы (параграфы)
	внешней распределенной нагрузкой. Эпюры внутренних силовых факторов. Жесткость поперечного сечения балки при изгибе. Расчеты на прочность при изгибе. Подбор материала и *рациональных* поперечных *сечений* балок.		
7.	**Расчеты на кручение.** Кручение прямого стержня круглого сечения, угол закручивания. Жесткость при кручении. Главные напряжения. Расчет на прочность и жесткость. Статически неопределимые системы при кручении.	-	[1], §6.2 – 6.6; [3], §5.2 – 5.4
	Всего за первый семестр	5 час.	
8.	***Второй семестр*** **Определение перемещений при изгибе.** Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и его интегрирование. Жесткость поперечного сечения балки. Расчет балок на жесткость. *Интеграл Максвелла-Мора* и его вычисление графо-аналитическим методом (способ А.Н. Верещагина).	1	[2], §1.1 – 1.4; [3], §5.2 – 5.4
9.	**Статически неопределимые системы при изгибе.** Плоские рамы. Выбор основной системы. Применение метода сил.	1	[2], §6; [3], §9.1 – 9.3
10.	**Общий случай действия сил на стержень.** Косой изгиб. Нормальные напряжения при косом изгибе. Определение положения нулевой линии и опасных точек в поперечном сечении. Внецентренное растяжение и сжатие стержня. Расчет вала на изгиб с кручением. Применение критериев *текучести* или *хрупкого разрушения* при расчетах на прочность.	-	[2], §2, 3, 4; [3], §6.5 – 6.6
11.	**Устойчивость элементов конструкций.** Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Устойчивость прямолинейной формы сжатых стержней. Критическая сила. *Задача Эйлера*. Формула Ясинского. Практические расчеты на устойчи-	1	[2], §5; [3], §15.1 – 15.5

№ п/п	Наименование раздела или темы. Краткое содержание темы	Количество часов	Литература, разделы (параграфы)
	вость. Зависимость критических напряжений от гибкости стержня. *Рациональные формы сечения.*		
12.	**Основы расчета на прочность при напряжениях, переменных во времени.** Усталостные повреждения. Механизм усталостного разрушения. Понятие о статической теории усталостного разрушения. Характеристики сопротивления усталости. Кривые усталости. Факторы, влияющие на усталость. Меры повышения предела выносливости. Формула для коэффициента запаса. Совместное действие изгиба и кручения. Расчеты на прочность.	1	[2], §8; [3], §19.1 – 19.6
13.	**Динамические расчеты элементов конструкций.** Типы *динамических нагрузок*. Расчет с учетом *сил инерции*. Элементарная теория удара. Динамический коэффициент при ударе. Защита от ударов.	-	[2], §9.2 – 9.6; [3], §17.1 – 17.3
	Всего за второй семестр	3 часа	

1.3 Практические занятия

Порядковый номер, наименование темы или краткая характеристика практического занятия	Кол-во часов	Номер соответствующей темы лекционного материала	Литература, разделы (параграфы)
Первый семестр			
1. Геометрические характеристики плоских сечений.	2	[1], 8.1 – 8.6	[3], §4.1 – 4.6
2. Статически определимые и статически неопределимые задачи на растяжение и сжатие. Расчет на прочность.	2	[1], 2.1 – 2.4, 2.8	[3], §3.5
3. Прямой изгиб. Расчет балок на прочность по нормальным напряжениям.	2	[1], 7.4 – 7.6	[3], §6.3

Порядковый номер, наименование темы или краткая характеристика практического занятия	Кол-во часов	Номер соответствующей темы лекционного материала	Литература, разделы (параграфы)
4. Плоское напряженное состояние	1	[1], 4.1 – 4.4	[3], §13.3 – 13.6
5. Кручение вала круглого сечения. Статически определимые и статически неопределимые задачи. Расчет на прочность и жесткость.	1	[1], 6.3 – 6.5	[3], §5.1 –5.4
6. Гипотезы предельного состояния.	-	[1], 4.1- 4.7	[3], §4.1– 4.6
Всего за первый семестр	8 час.		
Второй семестр			
1. Статически неопределимые рамы.	2	[2], 7	[3], §9.1-9.4
2. Расчет вала на изгиб и кручение.	1	[2], 4	[3], §7.6
3. Расчет на устойчивость центрально сжатых стержней.	1	[2], 5	[3], §15.5
4. Расчет при напряжениях, переменных во времени.	2	[2], 8	[3], §19.6, 19.8
Всего за второй семестр	6 час.		

1.4 Лабораторные занятия

Порядковый номер, наименование темы лабораторного занятия. Уровень усвоения	Количество часов	Номер соответствующей темы лекционного материала	Литература, разделы (параграфы)
Первый семестр			
1. Испытание на растяжение образца из малоуглеродистой стали.	1	[1], 3.2	[6], §3.1
2. Испытание на сжатие образцов из различных материалов на сжатие.	1	[1], 3.3	[6], §3.2
3. Определение модуля упругости первого рода и коэффициента Пуассона.	1	[1], 2.3	[6], §3.4
4 Определение модуля сдвига при кручении.	1	[1], 6.5	[6], §3.3
Всего 4 часа			

Внимание! Все лабораторные работы выполняются в лаборатории «Сопротивление материалов» КемТИППа или, если это позволяет лабораторная база, в учебных лабораториях представительств вуза.

1.5 Содержание самостоятельной работы

Для развития навыков в самостоятельном решении технических задач предусмотрены контрольные работы по всем основным разделам курса. Число работ устанавливается в зависимости от учебного плана специальности, которой обучается студент. Количество контрольных работ и номера контрольных задач каждый студент выбирает в соответствии со своим шифром из таблицы раздела 2.2.

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Пирогов А.Н. Сопротивление материалов. Конспект лекций. Учебное пособие для студентов механических специальностей заочной (дистанционной) формы обучения. В 2-х ч. – Кемерово: КемТИПП, 2002. – Ч.1. – 94 с.
2. Яремчук А.И. Сопротивление материалов. Конспект лекций. Учебное пособие для студентов механических специальностей заочной (дистанционной) формы обучения. В 2-х ч. – Кемерово: КемТИПП, 2002. – Ч.2. – 68 с.

Дополнительная литература

3. Александров А. В. ,Потапов В.Д., Державин Б.Г. Сопротивление материалов. – М.: ВШ, 1995.
4. Беляев Н.И. Сопротивление материалов. – М.: ВШ, 1986.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: ВШ, 1986.
6. Пирогов А.Н., Грачев В.Н., Гутиков В.П. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. Учебное пособие. – Кемерово: КемТИПП, 1988. – 94 с.
7. Степин П.А. Сопротивление материалов. – М.: ВШ, 1998.

2 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций (сооружений и машин).

Инженеру любой специальности часто приходится производить расчеты на прочность. Неправильный расчет самой незначительной на первый взгляд детали может повлечь за собой очень тяжелые последствия, привести к разрушению конструкции в целом. При проведении расчетов на прочность необходимо стремиться к сочетанию надежности работы конструкции с минимальными затратами на ее изготовление, добиваться оптимальной прочности при наименьшем расходе материалов.

2.1 Общие методические указания

Сопротивление материалов – одна из сложных дисциплин, изучаемых в высших учебных заведениях. Занятия по этому курсу должны обязательно сопровождаться составлением конспекта и решением задач. Если при решении задач возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в пособиях указаниями и решениями, но совершенно необходимо научиться решать задачи самостоятельно.

Необходимо хорошо разбираться в тех чертежах, которыми сопровождаются выводы формул. Выдающийся русский ученый, отец русской авиации Н.Е. Жуковский писал: «Раз усвоенные геометрические образы, рисующие картину рассматриваемого явления, надолго западают в голову и живут в воображении изучающего».

После изучения каждой темы надо обязательно ответить на вопросы для **самоконтроля** – это способствует лучшему усвоению пройденного материала. До сдачи зачета (экзамена) необходимо выполнить контрольные работы и пройти лабораторный практикум. При проведении опытов необходимо оформить отчеты по лабораторным работам, следуя указаниям преподавателя.

2.2 Указания о порядке выполнения контрольных работ

Каждый студент выполняет то количество контрольных работ, которое предусмотрено учебным планом.

Номер варианта выбирается по общим правилам.

Номера задач, входящих в состав контрольных работ

Номер контрольной работы	Номера задач
1	1, 2, 3
2	4, 5, 6
3	7, 8, 9
4	10, 11, 12

1. Не следует приступать к выполнению контрольных заданий, не изучив соответствующего раздела и не решив самостоятельно рекомендованных задач.

2. В заголовке контрольной работы должны быть четко написаны: **номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента (полностью), специальность, шифр студента, дата отсылки работы.**

3. Каждую контрольную работу следует выполнять в особой тетради или в файле.

4. Перед решением каждой задачи надо написать полностью ее условие с числовыми данными, составить аккуратный эскиз в масштабе и указать на нем в числах величины, необходимые для расчета.

5. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие величины должны быть показаны в числах. Надо избегать многословных пояснений и пересказа конспекта или учебника; студент должен знать, что язык техники – формула и чертеж. При пользовании формулами или данными, отсутствующими в конспекте или в учебнике, необходимо кратко и точно указать источник (автор, название, издание, страницу, номер формулы).

6. Необходимо указывать единицы измерения всех величин и подчеркивать окончательные результаты.

7. Не следует вычислять большое число значащих цифр, вычисления должны соответствовать необходимой точности. Для инженерных расчетов обычно достаточно оставлять три значащие цифры.

8. При получении из института контрольной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и выполнить все сделанные ему указания. В случае требования рецензента следует в кратчайший срок послать ему выполненные на отдельных листах исправления, которые должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы. **Отдельно от работы исправления не рассматриваются.**

2.3 Задачи для контрольных работ

ЗАДАЧА 1

Стальной ступенчатый брус (E = $2 \cdot 10^5$ МПа) находится под действием продольных сил F (рис. 2.1). Требуется:

1. Определить внутренние продольные силы N на каждом участке и построить их эпюру.
2. Построить эпюру нормальных напряжений σ .
3. Определить полную абсолютную деформацию бруса.
4. Определить перемещение заданного сечения бруса I – I.

Данные взять в таблице 2.1.

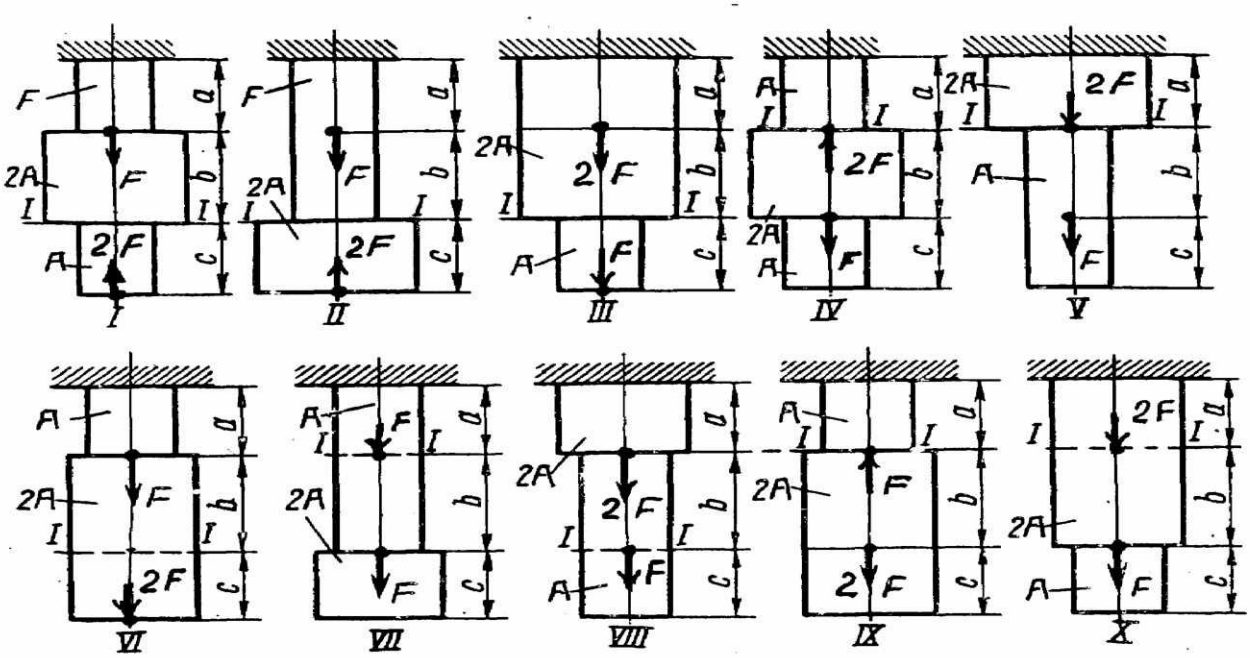


Рис. 2.1

ЗАДАЧА 2

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров (рис.2.2). Требуется:

1. Найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q.
2. Найти допускаемую нагрузку $Q_{ДОП}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях к допускаемому напряжению [σ] =160 МПа.

Данные взять из табл. 2.1.

Таблица 2.1

№ варианта	Схема по рис.2.1, 2.2, 2.3.	$A \cdot 10^4$ $м^2$	a	b	c	F, кН	Напряжение, МПа		
			м				σ_X	σ_Y	σ_Z
1	I	11	2,1	2,1	1,1	1,1	10	10	10
2	II	12	2,2	2,2	1,2	1,2	20	20	20
3	III	13	2,3	2,3	1,3	1,3	30	30	30
4	IV	14	2,4	2,4	1,4	1,4	40	40	40
5	V	15	2,5	2,5	1,5	1,5	50	50	50
6	VI	16	2,6	2,6	1,6	1,6	60	60	60
7	VII	17	2,7	2,7	1,7	1,7	70	70	70
8	VIII	18	2,8	2,8	1,8	1,8	80	80	80
9	IX	19	2,9	2,9	1,9	1,9	90	90	90
10	X	20	3,0	3,0	2,0	2,0	100	100	100

ЗАДАЧА 3

Стальной кубик (рис. 2.3) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти:

1. Главные напряжения и направления главных площадок.

2. Максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений.

3. Относительные деформации $\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z$.

4. Относительное изменение объема.

5. Удельную потенциальную энергию деформации.

Данные взять из таблицы 2.1.

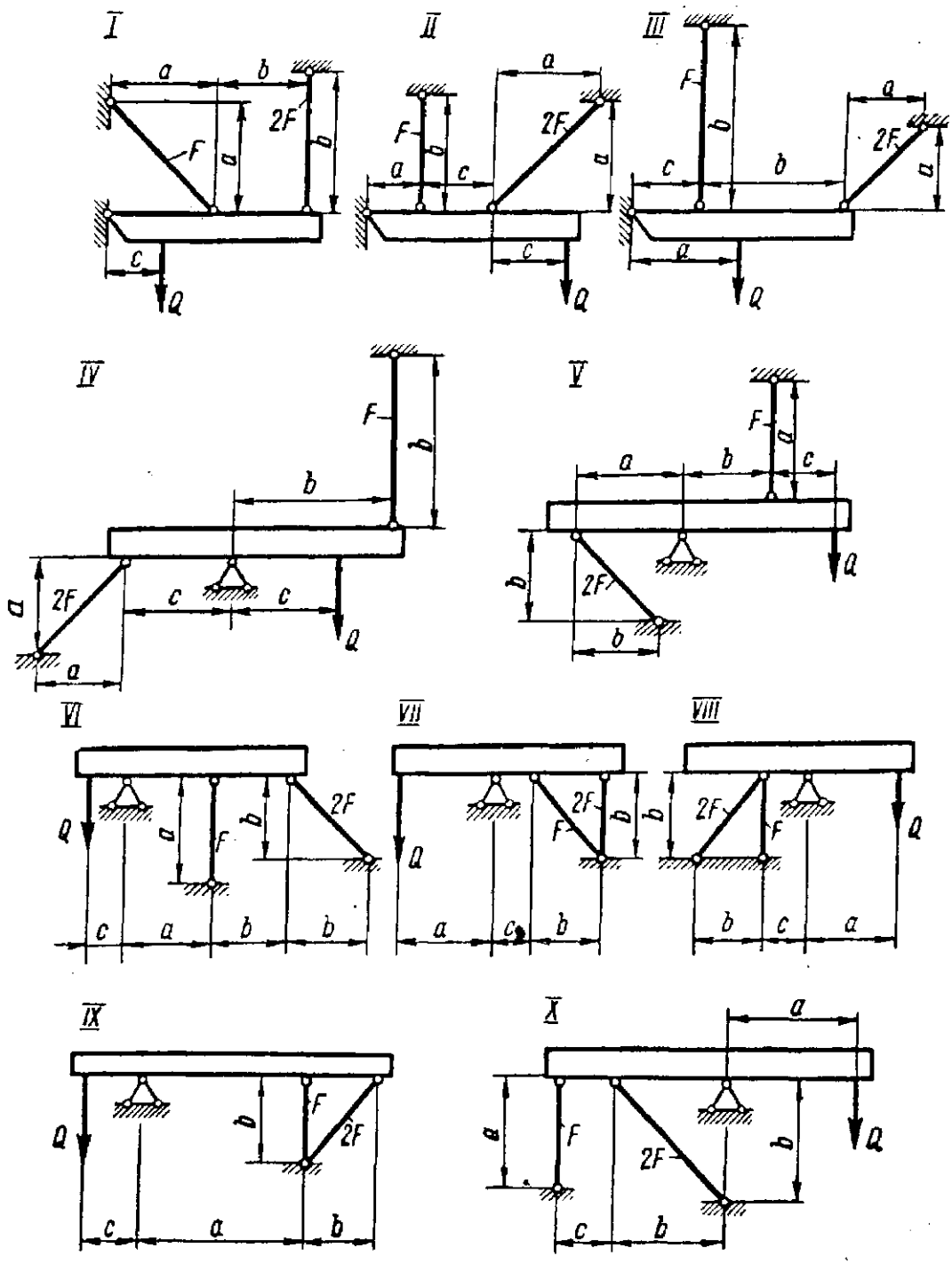


Рис. 2.2

ЗАДАЧА 4

К стальному валу приложены три известных момента: M_1, M_2, M_3 (рис. 2.4.). Требуется:

1. Установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю.

2. Для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов.

3. При заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его величину до ближайшей большей, соответственно равной: 30, 35, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм.

4. Построить эпюру углов закручивания.

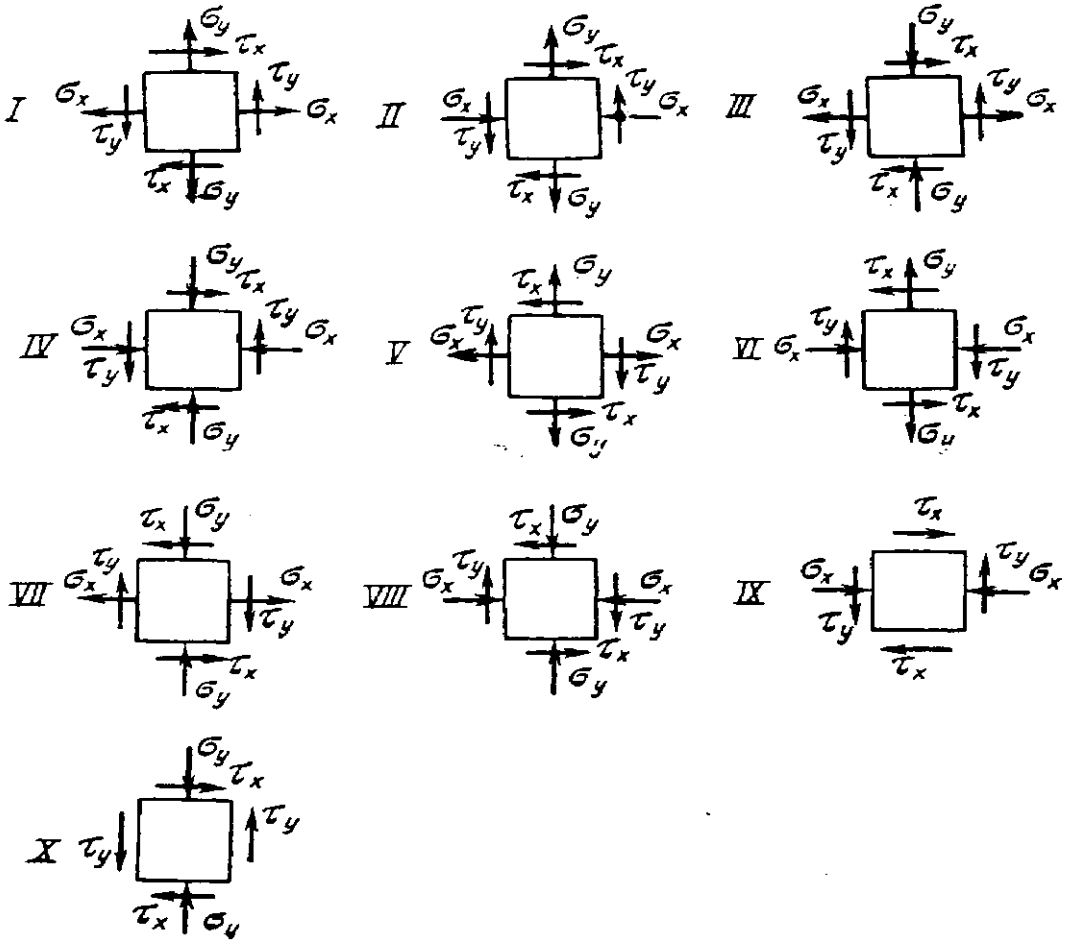


Рис. 2.3

Таблица 2.2

№ варианта	Схема по рис. 2.4.	Расстояния, м			Моменты, кН·м			$[\tau]$, МПа
		a	b	c	M_1	M_2	M_3	
1	I	1,1	1,1	1,1	11	11	11	35
2	II	1,2	1,2	1,2	12	12	12	40
3	III	1,3	1,3	1,3	13	13	13	45
4	IV	1,4	1,4	1,4	14	14	14	50
5	V	1,5	1,5	1,5	15	15	15	55
6	VI	1,6	1,6	1,6	16	16	16	60
7	VII	1,7	1,7	1,7	17	17	17	65
8	VIII	1,8	1,8	1,8	18	18	18	70
9	IX	1,9	1,9	1,9	19	19	19	75
10	X	2,0	2,0	2,0	20	20	20	80

5. Найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 пог. м).
Данные взять из табл. 2.2.

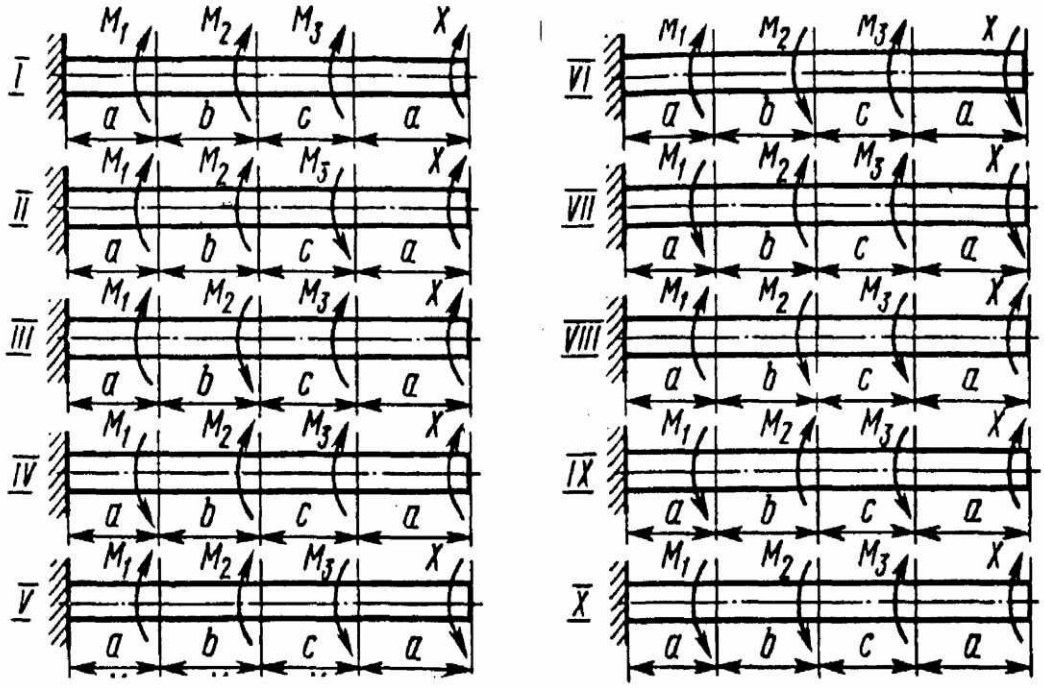


Рис. 2.4

ЗАДАЧА 5

Для заданного в табл. 2.3 поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка или из двутавра и равнобокого уголка, или швеллера и двутавра (рис. 2.5), требуется:

1. Определить положение центра тяжести.

2. Найти величины осевых (экваториальных) и центробежных моментов инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести (Z_C и Y_C).

3. Определить направление главных центральных осей (U и V).

4. Найти величины моментов инерции относительно главных центральных осей.

Указание: при расчете все необходимые данные следует брать из таблиц сортамента и ни в коем случае не заменять части профилей прямоугольниками.

Таблица 2.3

№ варианта	Тип сечения по рис. 2.5	Швеллер	Равнобокий уголок	Двутавр
1	I	14	80 х 80 х 8	12
2	II	16	80 х 80 х 6	14
3	III	18	90 х 90 х 8	16
4	IV	20	90 х 90 х 7	18
5	V	22	90 х 90 х 6	20а
6	VI	24	100 х 100 х 8	20
7	VII	27	100 х 100 х 10	22а
8	VIII	30	100 х 100 х 12	22
9	IX	33	125 х 125 х 10	24а
10	X	36	125 х 125 х 12	24

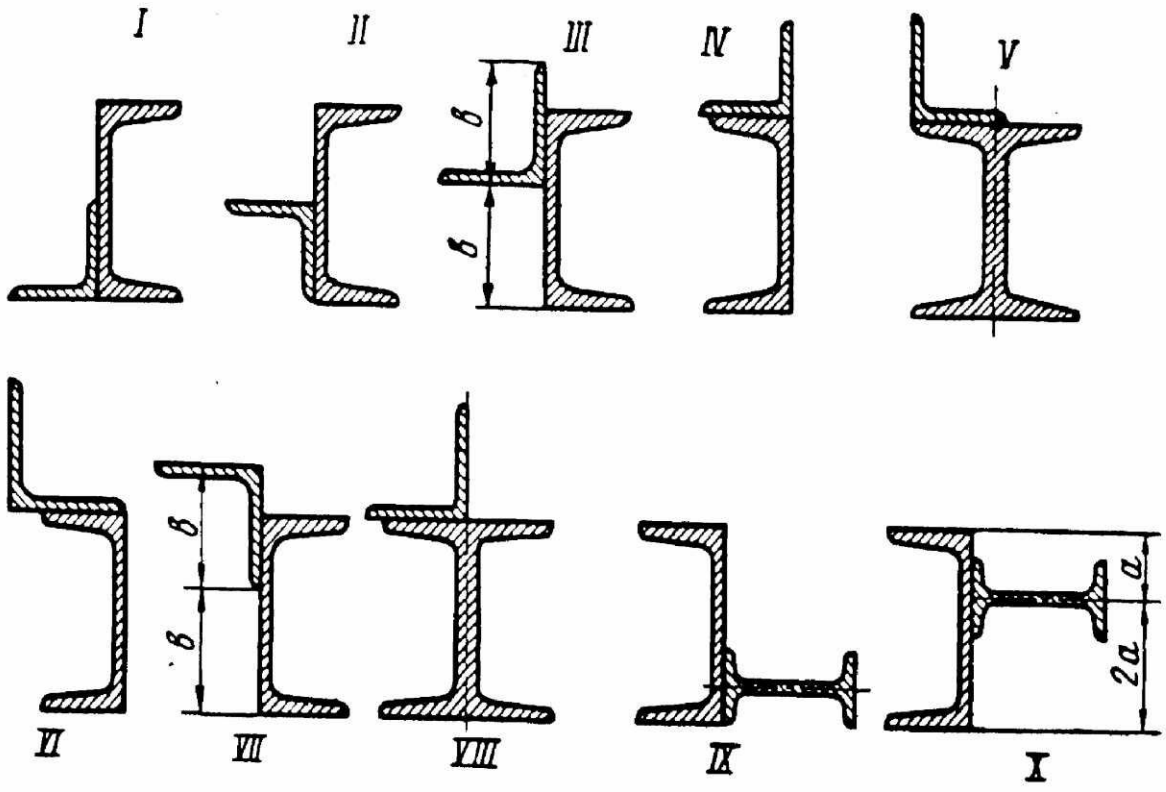


Рис. 2.5

ЗАДАЧА 6

Для заданных двух схем балок (рис. 2.6) требуется написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M, найти M_{max} и подобрать: а) для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma]$ = 8 МПа; б) для схемы (б) стальную балку двутаврого поперечного сечения при $[\sigma]$ = 160 МПа.

Данные взять из табл. 2.4.

Таблица 2.4

№ варианта	Схема по рис. 2.6	l_1	l_2	Расстояние в долях пролета $l_1 (l_2)$			M, кН·м	Сосредоточенная сила F, кН	q, кН/м
		м	м	a_1	a_2	a_3			
1	I	1,1	6	0,1	0,9	0,1	10	10	10
2	II	1,2	7	0,2	0,8	0,2	20	20	20
3	III	1,3	3	0,3	0,7	0,3	3	3	3
4	IV	1,4	4	0,5	0,6	0,4	4	4	4
5	V	1,5	5	0,7	0,5	0,5	5	5	5
6	VI	1,6	6	0,6	0,6	0,1	6	6	6
7	VII	1,7	7	1,0	0,7	0,2	7	7	7
8	VIII	1,8	8	0,8	0,8	0,3	8	8	8
9	IX	1,9	9	0,9	0,9	0,4	9	9	9
10	X	2,0	10	1,0	1,0	0,5	10	10	10

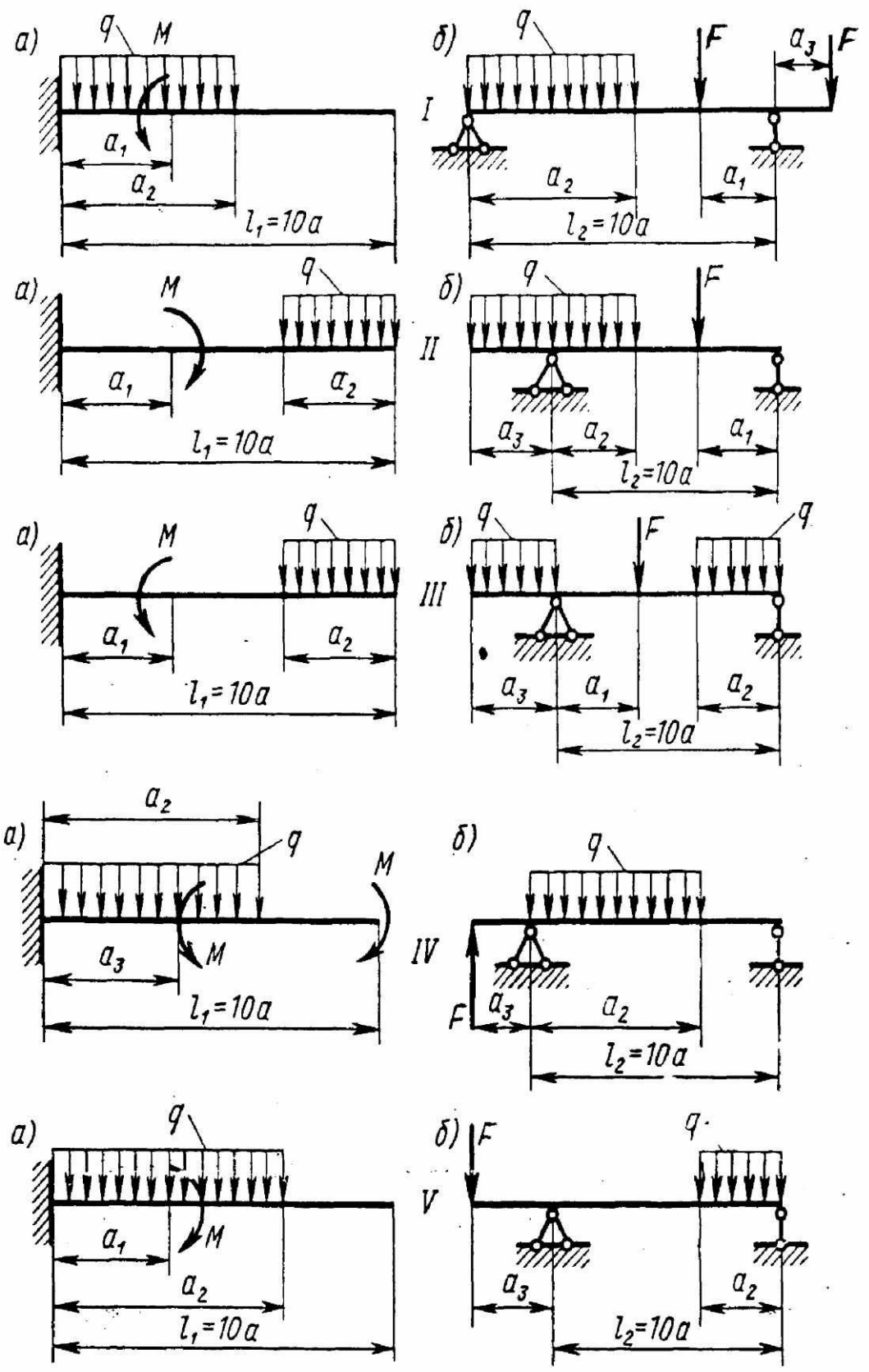

а)
q
M
a1
a2
l1=10a
б)
q
F
a3
F
I
a2
a1
l2=10a
а)
M
q
a1
a2
l1=10a
б)
q
F
II
a3
a2
a1
l2=10a
а)
M
q
a1
a2
l1=10a
б)
q
F
q
III
a3
a1
a2
l2=10a
а)
a2
q
M
a3
M
l1=10a
б)
q
IV
F
a3
a2
l2=10a
а)
q
M
a1
a2
l1=10a
б)
F
q
V
a3
a2
l2=10a

Рис. 2.6

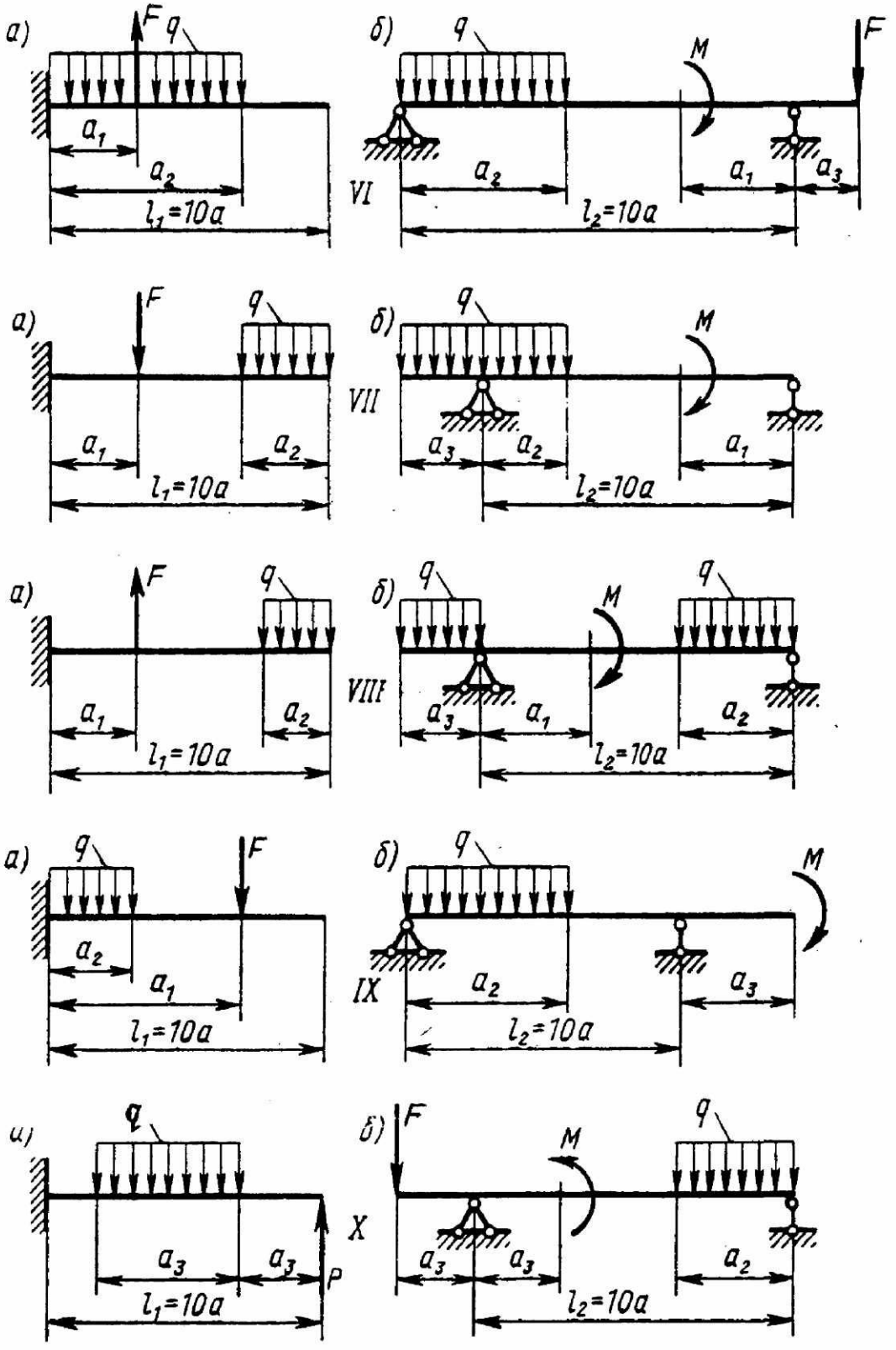


Рис. 2.6 (продолжение)

ЗАДАЧА 7

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 2.7, сжимается продольной силой F, приложенной в точке А.

Требуется:

1. Вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через F, и размеры сечения.

2. Найти допускаемую нагрузку F при заданных параметрах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_C]$ и на растяжение $[\sigma_P]$.

Данные взять из табл. 2.5.

Таблица 2.5

№ варианта	Схема по рис. 2.7	a	b	σ_C	σ_P
		см		МПа	
1	I	6	6	110	21
2	II	2	2	120	22
3	III	3	3	130	23
4	IV	4	4	140	24
5	V	5	5	150	25
6	VI	6	6	60	26
7	VII	2	2	70	27
8	VIII	3	3	80	28
9	IX	4	4	90	29
10	X	5	5	100	30

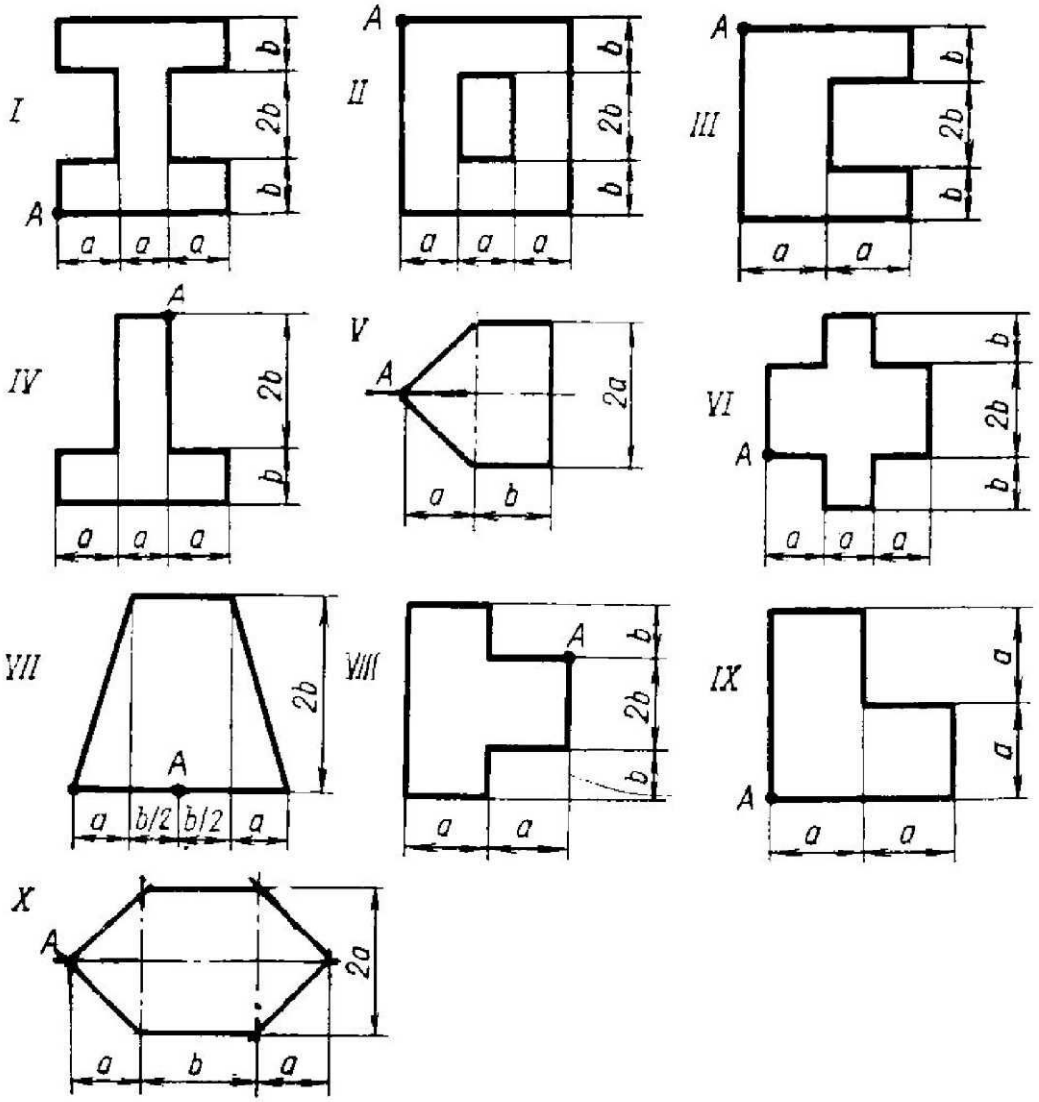


Рис. 2.7

ЗАДАЧА 8

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2 и каждый из них передает мощность $\frac{N}{2}$ (рис. 2.8).

Требуется:

1. Определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным величинам N и n.

2. Построить эпюру крутящих моментов M_{KP}.

3. Определить окружные усилия t_1 и t_2, действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2.

4. Определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям.

5. Определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать).

6. Построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил $M_{ГОР}$ и от вертикальных сил $M_{ВЕРТ}$.

7. Построить эпюру суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой: $M_{ИЗГ} = \sqrt{M_{ГОР} + M_{ВЕРТ}}$.

8. При помощи эпюр $M_{КР}$ (см. п. 2) и $M_{ИЗГ}$ (см. п. 7) найти опасное сечение и определить величину максимального расчетного момента (по третьей теории прочности).

9. Подобрать диаметр вала d при [σ] = 70 МПа и округлить его величину (см. задачу 4).

Внимание ! Студенты дистанционной формы обучения независимо от заданного варианта задачи принимают: значение угла α_1 равным 0 градусов (горизонтальная плоскость), а значение угла α_2 – девяносто градусам (вертикальная плоскость).

Данные взять из табл. 2.6.

Таблица 2.6

№ варианта	Схема по рис. 3.10	N, кВт	n, об/мин	a	b	c	D_1	D_2	$\alpha_1{}^0$	$\alpha_2{}^0$
				м						
1	I	10	100	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	10	10
2	II	20	200	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	20	20
3	III	30	300	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	30	30
4	IV	40	400	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	40	40
5	V	50	500	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	50	50
6	VI	60	600	1,6	1,6	1,6	0,6	0,6	60	60
7	VII	70	700	1,7	1,7	1,7	0,7	0,7	70	70
8	VIII	80	800	1,8	1,8	1,8	0,8	0,8	80	80
9	IX	90	900	1,9	1,9	1,9	0,9	0,9	90	90
10	X	100	1000	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0	0

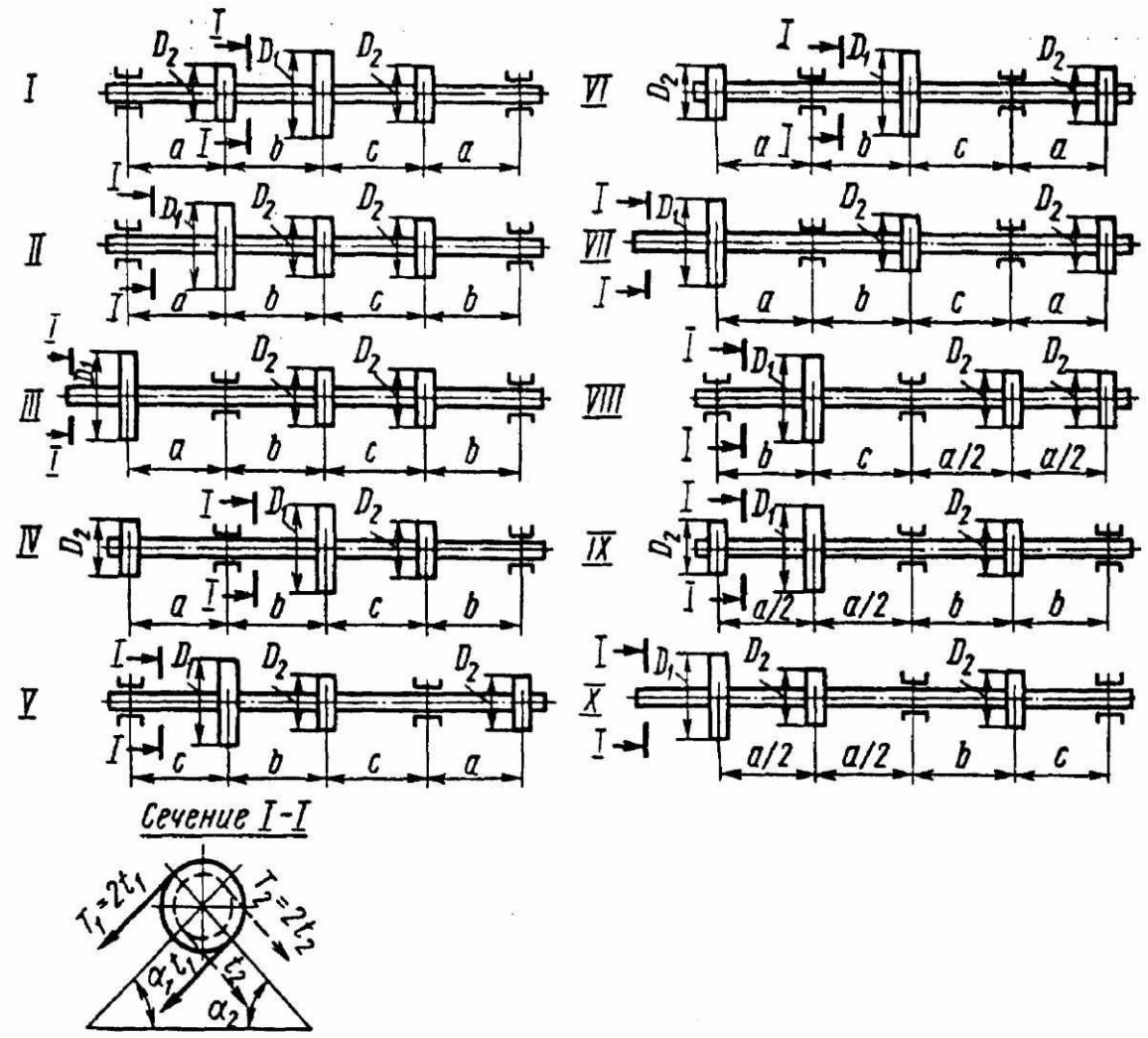


Рис. 2.8

ЗАДАЧА 9

Стальной стержень длиной l сжимается силой F.

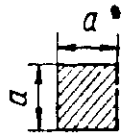
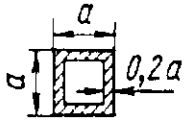
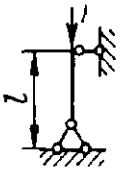
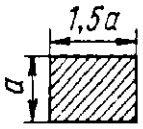
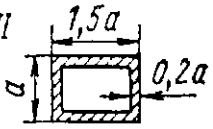
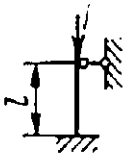
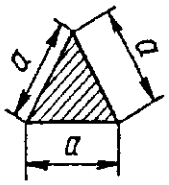
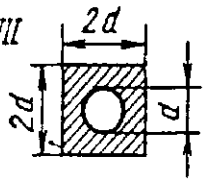
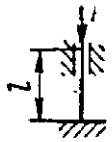
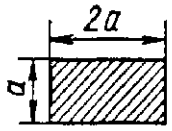
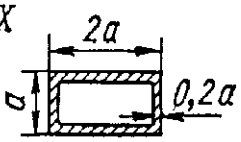
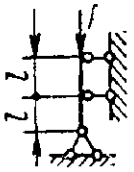
Требуется:

1. Найти размеры поперечного сечения при допускаемом напряжении на простое сжатие $[\sigma]$ = 160 МПа (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом φ = 0,5).

2. Найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Данные взять из табл. 2.7.

Таблица 2.7

№ варианта	P, кН	l, м	Схема закрепления концов стержня	Форма сечения стержня
1 2	100 200	2,1 2,2		I  VI 
3 4	300 400	2,3 2,4		II  VII 
5 6	500 600	2,5 2,6		III  VIII 
7 8	700 800	2,7 2,8		IV  IX 
9 10	900 1000	2,9 3,0		V X
	а	б	б	в

ЗАДАЧА 10

На рис. 2.9 изображена нагруженная в своей плоскости рама, вертикальные элементы которой имеют моменты инерции I, а горизонтальные элементы – kI; 1) установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему; 2) написать канонические уравнения; 3) построить эпюры M от единичных и от заданной нагрузки; 4) найти перемещения; 5) найти величины лишних неизвестных; 6) построить окончательные эпюры внутренних силовых факторов M, N и Q. Данные взять из табл. 2.8.

Таблица 2.8

№ варианта	Схема рамы	l	h	q, кН/м	k
		м			
1	I	11	2	15	1,1
2	II	12	3	20	1,2
3	III	3	4	30	1,3
4	IV	4	5	4	1,4
5	V	5	6	5	1,5
6	VI	6	2	6	1,6
7	VII	7	3	7	1,7
8	VIII	8	4	8	1,8
9	IX	9	5	9	1,9
10	X	10	6	10	2,0

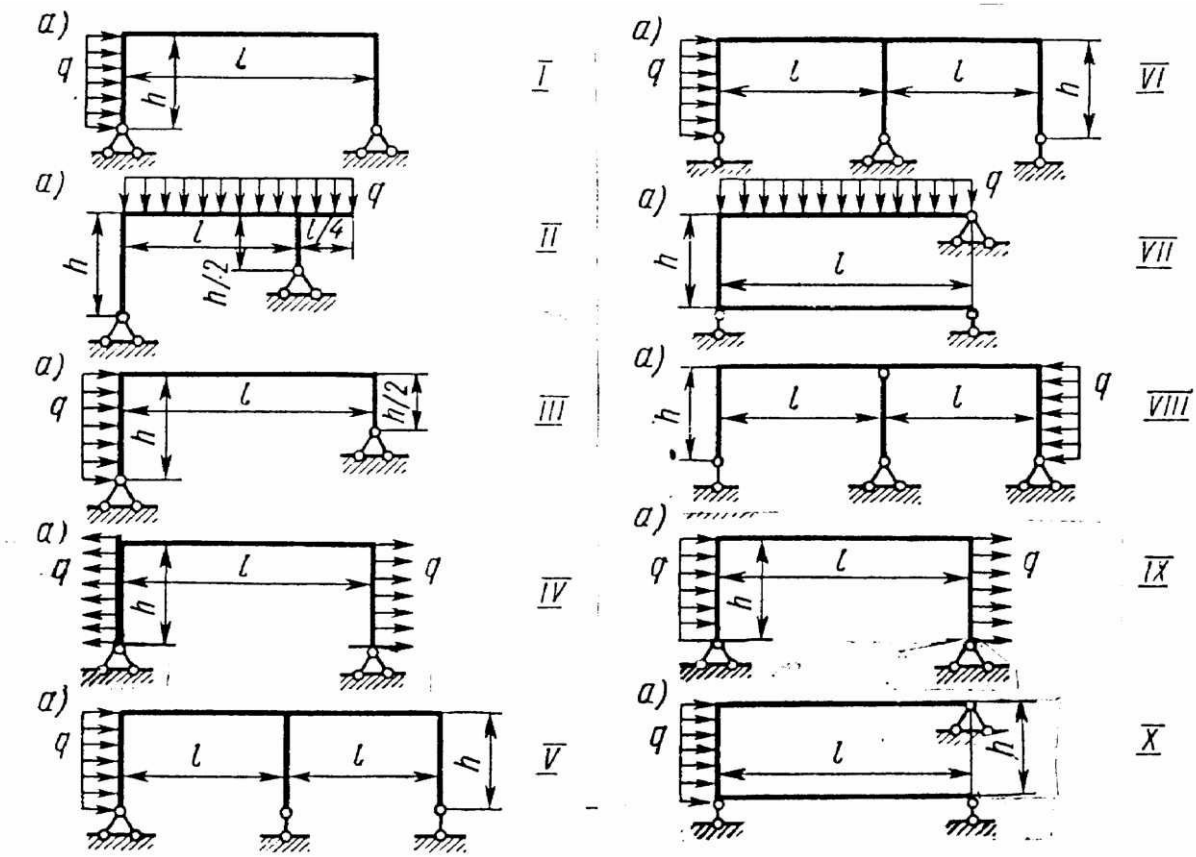


Рис. 2.9

ЗАДАЧА 11

На двух балках двутаврового сечения установлен двигатель весом Q (рис. 2.10), делающий n оборотов в минуту. Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя, равна H. Собственный вес балок и силы сопротивления можно не учитывать. Требуется найти:

1. Частоту собственных колебаний ω_0.
2. Частоту изменения возмущающей силы ω.
3. Коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{1-(\omega/\omega_0)^2}$$

(если коэффициент β, определимый по формуле, окажется отрицательным, то в дальнейшем расчете следует учитывать его абсолютную величину).

4. Динамический коэффициент

$$K_Д = 1 + \frac{f_H}{f_Q}\beta = 1 + \frac{H}{Q}\beta.$$

5. Наибольшее нормальное напряжение в балках

$$\sigma_Д = K_Д \sigma_{CT}.$$

Данные взять из табл. 2.9.

Таблица 2.9

№ варианта	Схема по рис. 2.10	№ двутавра	l, м	Q, кН	H, кН	n, об/мин
1	I	16	1,1	11	11	400
2	II	18	1,2	12	2	450
3	III	20а	1,3	13	3	500
4	IV	20	1,4	14	4	550
5	V	22а	1,5	15	5	600
6	VI	22	1,6	16	6	650
7	VII	24а	1,7	17	7	700
8	VIII	24	1,8	18	8	750
9	IX	27а	1,9	19	9	800
0	X	27	2,0	20	10	850

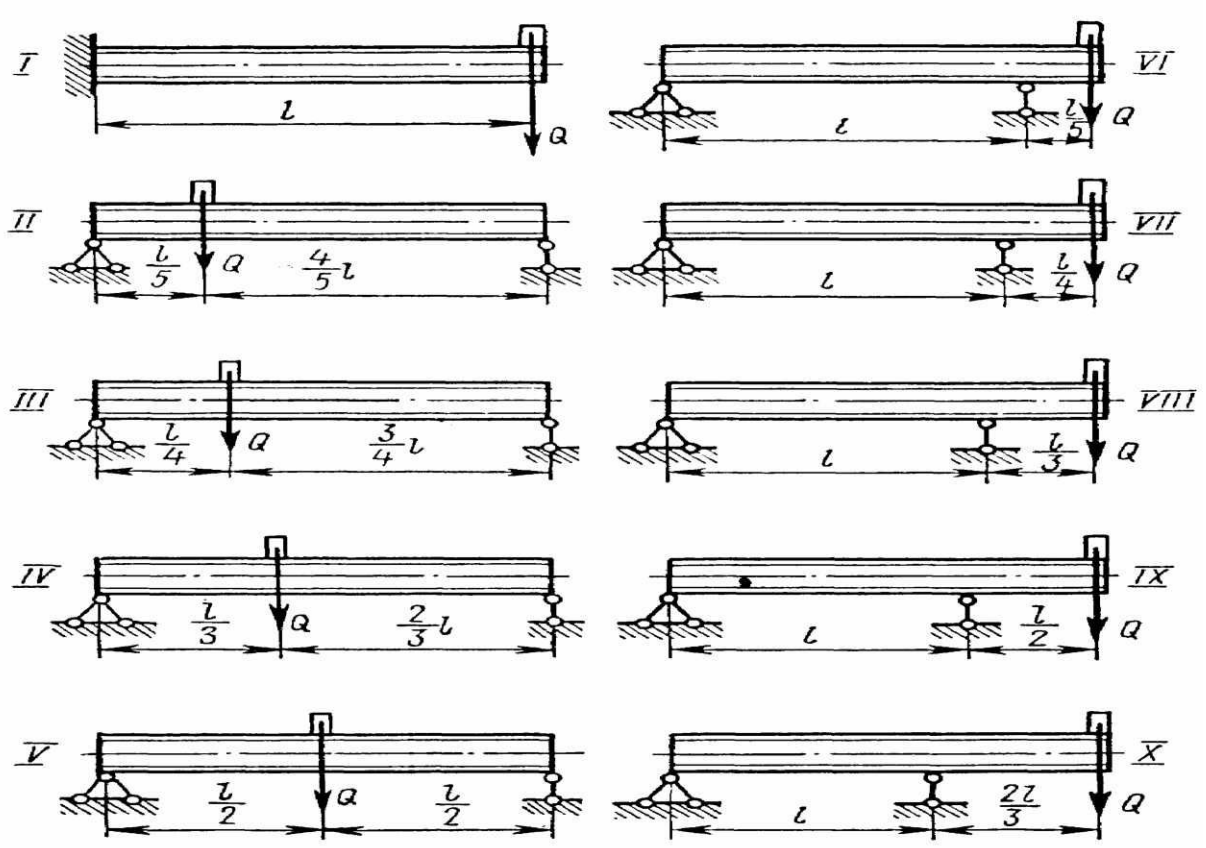


Рис. 2.10

ЗАДАЧА 12

В опасном сечении вала с диаметром d действует крутящий момент M_K и изгибающий момент $M_И$. Вал сделан из улеродистой стали (предел прочности которой равен σ_B, а предел текучести – σ_T) и не имеет резких переходов, выточек, канавок; поверхность его чисто обработана резцом.

Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимися по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения – по пульсирующему циклу (от нуля до максимального значения).

Коэффициенты напряжений и масштабные коэффициенты можно считать соответственно одинаковыми для нормальных и для касательных напряжений.

Данные взять из табл. 2.10.

Таблица 2.10

№ варианта	d, мм	M_K	$M_И$	σ_B	σ_T
		Н·м	Н·м	МПа	МПа
1	31	210	210	510	240
2	32	220	220	520	240
3	33	230	230	530	250
4	34	240	240	540	250
5	35	250	250	550	260
6	36	260	260	560	260
7	37	270	270	570	270
8	38	280	280	580	270
9	39	290	290	590	280
10	40	300	300	600	280

Порядок выполнения решения:

1) найти максимальные нормальные напряжения и максимальные касательные напряжения;

2) по эмпирическим формулам найти предел текучести при кручении и пределы выносливости при кручении и изгибе;

3) найти действительный коэффициент концентрации напряжений по формуле

$$K = 1{,}2 + 0{,}2(\sigma_B - 40)/110;$$

4) найти масштабный коэффициент по формуле:

$$\beta = 1{,}2 + 0{,}1(d - 3),$$

где d – в сантиметрах;

5) найти коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям;

6) найти общие коэффициенты запаса прочности по усталому разрушению и текучести.

3 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМАМ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольные работы выполняются по основным темам курса. В рассматриваемом разделе представлены примеры решения задач, позволяющие после их проработки самостоятельно решить контрольные задачи.

3.1 Статически определимые задачи на растяжение и сжатие

(к контрольной задаче № 1)

Пример № 1. Определить величину продольной силы в сечении I – I бруса, находящегося в равновесии, если F_1 = 20 кН = $2 \cdot 10^3$ кг, F_2 = 10 кН = $1 \cdot 10^3$ кг, F_3 = 10 кН = $1 \cdot 10^3$ кг, α = 60° (рис. 3.1).

Решение. Пользуясь методом сечений:

а) рассекаем брус по заданному сечению;

б) отбрасываем любую, например, правую часть (рис. 3.1, б);

в) заменяем ее действие на оставшуюся часть неизвестной продольной силой *N*, направив ее от сечения, т.е. предполагая, что продольная сила – растягивающая;

г) составляем условие равновесия и вычисляем *N*:

$$\sum Z = 0; \quad -F_1 + 2F_2 \cos\alpha + N = 0;$$

$$N = F_1 - 2F_2 \cos\alpha = 2 \cdot 10^3 \cos 60^0 = 1 \cdot 10^3 \text{ кг} = 10 \text{ кН},$$

т.е.

$$N = \sum_{i=1}^{n} F_i . \qquad (3.1)$$

Таким образом, продольная сила в поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций на его ось всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения.

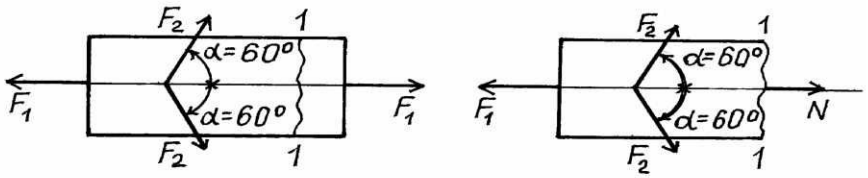


Рис. 3.1

Пример № 2. Построить эпюру продольных сил и вычислить диаметр стального короткого бруса, если F_1 = 40 кН = $4 \cdot 10^3$ кг, F_2 = 30 кН = $3 \cdot 10^3$ кг, F_3 = 80 кН = $8 \cdot 10^3$ кг; допускаемое напряжение на растяжение и сжатие принять $[\sigma]$ = 160 МПа = 1600 кг/см^2 (рис. 3.2).

Решение.

1. Используя формулу (3.1) из предыдущей задачи, для каждого из 3-х участков получим (рис. 3.2, а):

сечение 1 – 1 $N_1 = F_1$ = –4000 кг = –40 кН,

сечение 2 – 2 $N_2 = -F_1 + F_2$ = –4000 + 3000 = –1000 кг = –10 кН,

сечение 3 – 3 $N_2 = -P_1 + P_2 + P_3$ =–4000 + 3000 + 8000=7000кг = 70 кН.

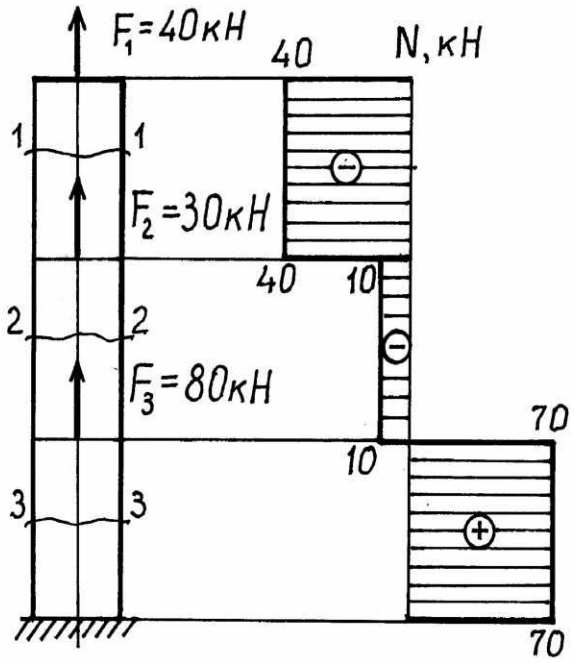


Рис. 3.2

2. Проводим рядом с брусом ось, параллельную его продольной оси, и, выбрав масштаб, откладываем по длине каждого участка найденные значения продольных сил N_1, N_2 и N_3, т.е. строим эпюру N (рис. 3.2, б).

3. Определяем опасное сечение – сечение, в котором нормальные напряжения максимальны (для пластичных материалов берем по абсолютной величине), т.е.

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A},$$

где A – площадь поперечного сечения бруса.

В нашем случае для всех трех участков площадь поперечного сечения A постоянна и по абсолютной величине $N_3 > N_2 > N_1$. Опасное сечение – любое сечение участка 3, где $N_{\max}$ = 7000 кг = 70 кН. Тогда из условия прочности на растяжение и сжатие для расчета площади поперечного сечения применим формулу

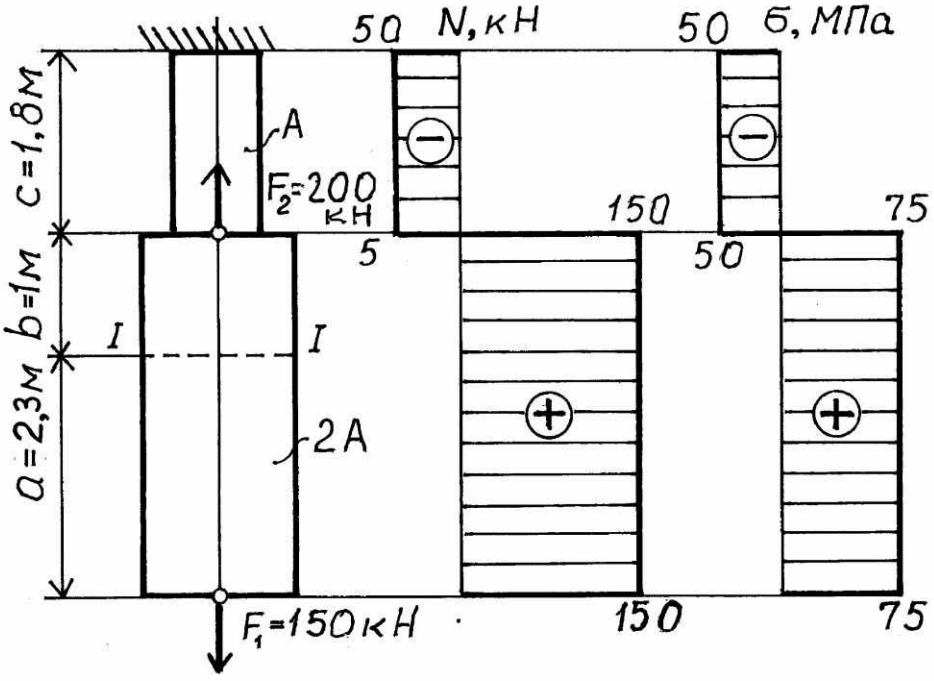
$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}; \quad A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Отсюда

$$d \geq \sqrt{\frac{4N_{\max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7000}{3{,}14 \cdot 1600}} = 2{,}36 \text{ см} = 2{,}36 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Пример № 3. Для стального ступенчатого бруса ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа $= 2 \cdot 10^6$ кг/см^2), нагруженного осевыми внешними силами $F_1 = 150$ кН $= 15 \cdot 10^3$ кг, $F_2 = 100$ кН $= 10 \cdot 10^3$ кг, при длине участков $a = 30$ см, $b = 20$ см, $c = 15$ см и площади поперечного сечения $A = 10$ см^2 требуется:

1. Определить внутренние продольные силы N и построить их эпюру.
2. Вычислить для каждого участка напряжения σ и построить их эпюру.
3. Выполнить полную абсолютную деформацию бруса и определить перемещение сечения I – I (рис. 3.3).



а) б) в)

Рис. 3.3

1. Определяем внутренние продольные силы. Имеем два силовых участка длиной ($a + b$) и c. Для первого участка, согласно (3.1), имеем

$N_1 = F_1 = 15 \cdot 10^3$ кг $= 150$ кН (растяжение);

для второго участка:

$N_2 = F_1 - F_2 = 15 \cdot 10^3 - 20 \cdot 10^3 = -5 \cdot 10^{-3}$ кг $= -50$ кН (сжатие).

Выбираем масштаб и строим эпюру N (рис. 3.3, б).

2. Вычисление нормальных напряжений выполняем по формуле согласно раздела 2.2.

На участках a и b площадь поперечного сечения одинакова и равна $2A$=20 см^2. Тогда

$$\sigma_{(a+b)} = \frac{N_1}{2A} = \frac{15 \cdot 10^3}{20} = 750 \text{ кг/см}^2 = 75 \text{ МПа};$$

на участке c:

$$\sigma_C = \frac{N_2}{A} = \frac{-5 \cdot 10^3}{10} = -500 \text{ кг/см}^2 = -50 \text{ МПа}.$$

Выбираем масштаб и строим эпюру σ (рис. 3.3, в).

2. Полная деформация бруса:

$$\Delta l = \Delta l_{(a+b)} + \Delta l_c = \frac{N_1(a+b)}{E2A} + \frac{N_2 c}{EA} = \frac{15 \cdot 10^3 (30+20)}{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 20} - \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 15}{2 \cdot 10^6 \cdot 10} =$$

$= 0{,}00973 - 0{,}00375 = 0{,}00562$ см $= 0{,}0562 \cdot 10^{-3}$ м.

3. Поскольку верхнее сечение защемлено, то перемещение заданного сечения I – I численно будет равно абсолютной деформации участков бруса b и c, т.е.

$$\Delta l_I = \Delta l_b + \Delta l_c = \frac{N_1 b}{E2A} + \frac{N_2 c}{EA} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 20}{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10} - 0{,}00375 = 0{,}00375 \text{ см} = 0{,}0375 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

3.2 Статически неопределимые задачи на растяжение и сжатие

(к контрольной задаче № 2)

Пример № 4. Для абсолютно жесткого бруса, опирающегося на шарнирно неподвижную опору и прикрепленного к двум стержням (рис. 3.4), требуется:

1. Найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q.

2. Найти допускаемую нагрузку $Q_{доп}$, если $[\sigma]$= 160 МПа =1600 кг/см^2, $l_1 = l_2 = l = 2$ м, $a = b = c = 2$ м, $A_1 = A_2 = 10$ см^2, $\alpha = 45°$.

Решение.

1. Найдем усилия в стержнях, выразив их через неизвестную силу Q.

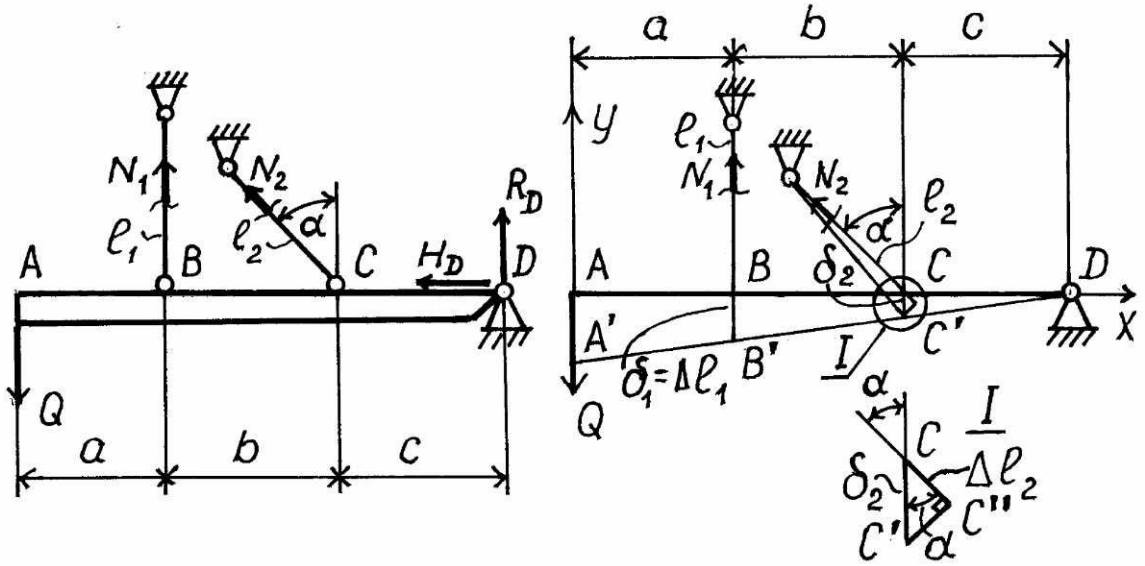
Составим уравнения статического равновесия (рис. 3.4, а):

$$\sum x = 0; \quad -N_2 \cos\alpha - H_D = 0; \tag{3.2}$$

$$\sum y = 0; \quad N_1 + N_2 \sin\alpha + R_D - Q = 0; \tag{3.3}$$

$$\sum m_D = 0; \quad Q(a+b+c) - N_1(b+c) - N_2 c \sin\alpha = 0. \tag{3.4}$$

Задача один раз статически неопределима, т.к. имеет четыре неизвестных (N_1, N_2, R_D, H_D) и три уравнения статического равновесия. Составим дополнительное уравнение.



а) б)

Рис. 3.4

Условие совместности перемещений получим, представив систему в деформированном состоянии – положение $A'B'C'D$ (рис. 3.4, б). Из подобия треугольников $\Delta BB'D$ и $\Delta CC'D$ следует:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{b+c}{c}\ , \tag{3.5}$$

но $\delta_1 = \Delta l_1$, а из треугольника $\Delta CC'C''$ $\delta_2 = \dfrac{\Delta l_2}{\cos\alpha}$.

Подставив δ_1 и δ_2 в (3.5), получим:

$$\frac{\Delta l_1 \cos\alpha}{\Delta l_2} = \frac{b+c}{c} \quad \text{или} \quad \Delta l_1 = \frac{b+c}{c\cos\alpha}\Delta l_2. \tag{3.6}$$

Из закона Гука $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 l_1}{EA_1}$, $\Delta l_2 = \dfrac{N_2 l_2}{EA_2}$.

Тогда (3.6) примет вид: $\dfrac{N_1 l_1}{EA_1} = \dfrac{b+c}{c\cos\alpha} \cdot \dfrac{N_2 l_2}{EA_2}$.

Подставив исходные данные, получим:

$$N_1 = 2{,}83 N_2\,. \tag{3.7}$$

Решая совместно (3.4) и (3.7), вычисляем N_2:

$$6Q - 4(2{,}83N_2) - 1{,}41N_2 = 0;\ N_2 = 0{,}47Q;$$

из (3.4): $N_1 = 2{,}83Q$; $N_2 = 1{,}33Q$.

Определим напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{1{,}33Q}{10} = 0{,}133Q;\ \ \sigma_1 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0{,}47Q}{10} = 0{,}047Q. \qquad (3.8)$$

2. Определим допускаемую нагрузку $Q_{доп}$. Так как в нашем случае $\sigma_1 > \sigma_2$, то, приравняв $\sigma_1 = [\sigma]$, получим с учетом (3.8):

$$0{,}133Q_{доп} = [\sigma],$$

$$Q_{доп} = \frac{[\sigma]}{0{,}133} = \frac{1600}{0{,}133} = 12 \cdot 10^3 \text{ кг} = 120 \text{ кН}. \qquad (3.9)$$

3.3 Элементы теории напряженного и деформированного состояния

(к контрольной задаче № 3)

Пример № 5. Для элементарного объема (рис. 3.5), находящегося под действием сил, создающих плоское напряженное состояние, требуется вычислить:

1) главные напряжения и положение главных площадок;

2) максимальные касательные напряжения, если σ_x=40 МПа=400 кг/см^2, σ_y=20 МПа =200 кг/см^2, τ = 10 МПа=100 кг/см^2.

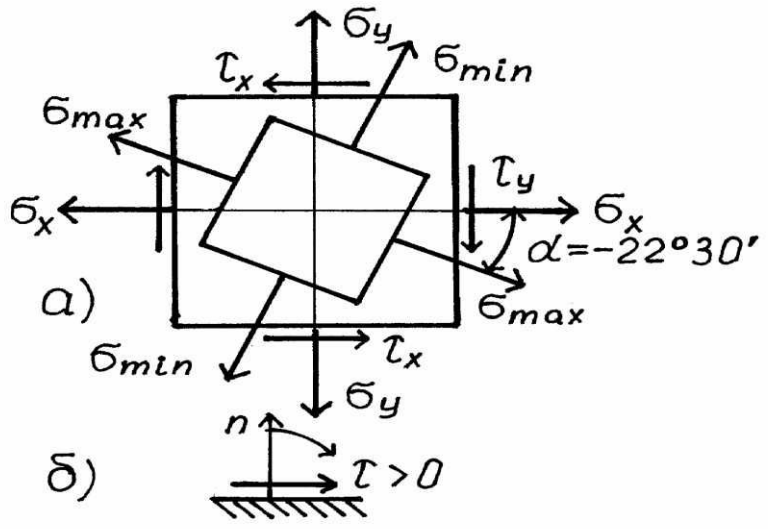


Рис. 3.5

1. Вычисляем главные напряжения по формуле:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_y^2} =$$

$$= \frac{400 + 200}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(400 - 200)^2 + 4(100)^2} = 300 \pm 141 \text{кг/см}^2.$$

$\sigma_{max} = 441$ кг/см^2 = 44,1 Мпа; $\sigma_{min} = 159$ кг/см^2 = 1,59 МПа.

Учитывая, что между главными напряжениями существует зависимость $\sigma_1 > \sigma_Z > \sigma_3$, получим $\sigma_1 = \sigma_{max} = 44{,}1$ МПа; $\sigma_Z = \sigma_{min} = 1{,}59$ МПа; $\sigma_3 = 0$.

Положение главных площадок определяем по формуле:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2\tau_y}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2 \cdot 100}{200 - 400} = -1; \quad \alpha_0 = -22{,}5°.$$

Знак перед $\tau_y > 0$ принимают согласно правилу (рис. 3.5, б).

Учитывая, что положительный угол отсчитывается от оси против часовой стрелки, а отрицательный – по часовой стрелке, откладываем от направления напряжения σ_x углы $\alpha_0 = -22{,}5°$ и $\frac{\pi}{2} + \alpha_0 = (90° - 22{,}5)°$ и, проведя оси, строим на этих осях главные площадки и показываем главные напряжения (рис. 3.5, а).

При этом $\sigma_1 = \sigma_{max}$ направлено в тот квадрант, где касательные напряжения τ_x и τ_y сходятся к ребру.

2. Вычислим максимальные касательные напряжения по формуле:

$$\tau_{max} = \pm\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \pm\frac{441 - 159}{2} = \pm 141 \text{ кг/см}^2 = \pm 14{,}1 \text{ МПа}.$$

Пример № 6. Стальной кубик (рис. 3.6) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние. Требуется найти:

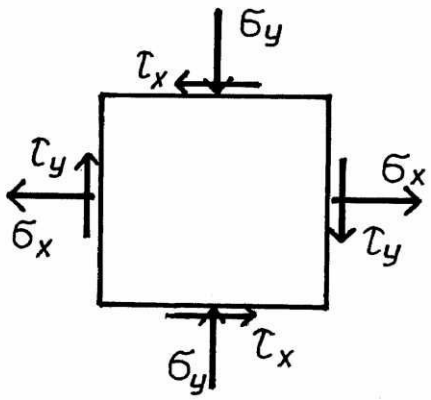


Рис. 3.6

1) относительные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и ε_Z;

2) относительное изменение объема;

3) удельную потенциальную энергию деформации, если $\sigma_x = 50$ МПа = =500 кг/см^2, $\sigma_y = 40$ МПа = 400 кг/см^2, $\tau_y = 20$ МПа = 200 кг/см^2. Модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа = $=2 \cdot 10^6$ кг/см^2, модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа = $8 \cdot 10^5$ кг/см^2.

Решение.

1. Рассчитаем относительные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и ε_Z. Примем для стали коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$. Учтем, что, согласно рис. 3.6, $\sigma_x = +500$ кг/см^2, $\sigma_y = -400$ кг/см^2, $\sigma_Z = 0$, $\tau_x = -200$ кг/см^2, $\tau_y = +200$ кг/см^2, $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см^2, $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см^2. Тогда получим, используя формулу обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_Z)\right] = \frac{1}{2\cdot 10^6}\left[500 - 0{,}3(-400+0)\right] = 0{,}31\cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_Z)\right] = \frac{1}{2\cdot 10^6}\left[-400 - 0{,}3(500+0)\right] = -0{,}275\cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E}\left[\sigma_Z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{2\cdot 10^6}\left[0 - 0{,}3(500-400)\right] = -0{,}015\cdot 10^{-3}.$$

2. Вычислим относительное изменение объема по формуле

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_Z = (0{,}31 - 0{,}275 - 0{,}015)\cdot 10^{-3} = 0{,}020\cdot 10^{-3}$$

или

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_Z) = \frac{1-2\cdot 0{,}3}{2\cdot 10^6}(500 - 400 + 0) = 0{,}020\cdot 10^3.$$

3. Вычислим удельную потенциальную энергию деформации для двухосного напряженного состояния ($\sigma_Z = 0$) по формуле:

$$U = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_x}{2G} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2\cdot 10^6}\left(500^2 + (-400)^2 - 2\cdot 0{,}3\cdot 500\cdot(-400) + \frac{(-200)^2}{2\cdot 8\cdot 10^5}\right) = 0{,}157\ \frac{\text{кг}\cdot\text{см}}{\text{см}^3} =$$

$$= 0{,}157\cdot 10^5\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

3.4 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность и жесткость

(к контрольной задаче № 4)

Пример № 7. Для заданного вала, находящегося в равновесии и нагруженного, как показано на рис. 3.7, построить эпюру крутящих моментов, если M_1 = 2000 Нм = 200 кг·м, M_2 = 2500 Нм = 250 кг·м, M_3 = 1000 Нм = 100 кг·м, M_4 = 1500 Нм = 150 кг·м, a = 1 м.

Решение. Вспомним правило знаков: внутренний крутящий момент M_Z в произвольном сечении бруса положителен, если внешний крутящий момент стремится повернуть отсеченную часть вала против часовой стрелки, если смотреть со стороны сечения.

Применим метод сечения, учитывая, что внутренний крутящий момент в произвольном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, приложенных к валу по одну сторону от этого сечения, т.е.:

$$T_Z = \sum_{i=1}^{n} M_i. \qquad (3.10)$$

Разобьем вал на три участка, проведем произвольные сечения I, II и III и стрелками укажем направление взгляда на оставшуюся часть вала. Тогда, используя зависимость (4.1), получим:

участок АВ: $T_{Z_1} = -M_1 = -200$ кг·м $= -2 \cdot 10^{-3}$ Нм;

участок ВС: $T_{Z_2} = -M_3 + M_4 = -100 + 150 = +50$ кг·м $= 0{,}5 \cdot 10^3$ Нм;

участок СД: $T_{Z_3} = M_4 = 150$ кг·м $= 1{,}5 \cdot 10^3$ Нм.

Выбираем масштаб и строим эпюру M_Z. Для проверки используем правило: в сечениях вала, где приложены внешние крутящие моменты, на эпюре M_Z возникают скачки на величину этих моментов и в их направлении.

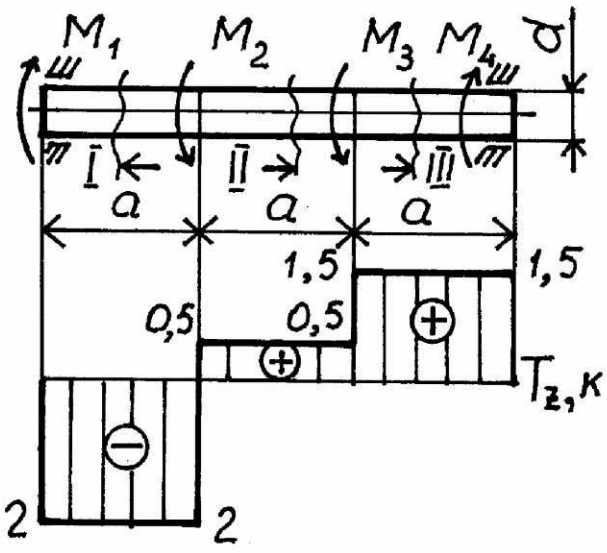


Рис. 3.7

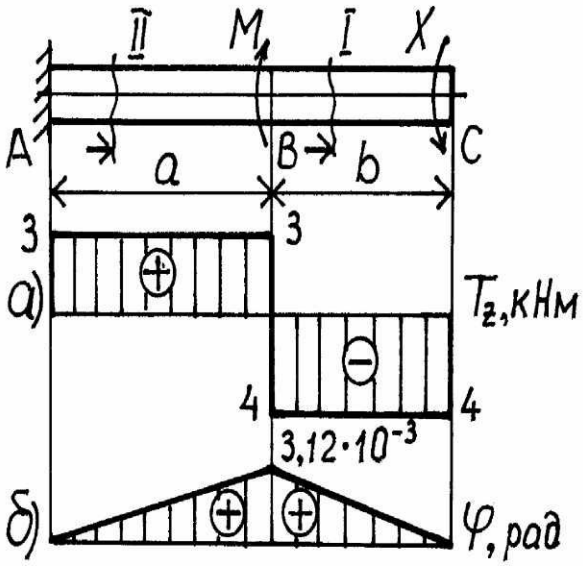


Рис. 3.8

Пример № 8. Проверить прочность стального вала, показанного на рис. 3.7, если его диаметр $d = 65$ мм, а $[\tau] = 40$ МПа.

Решение. Находим опасное сечение (сечение, в котором $|M_{Z\max}|$). Это любое поперечное сечение на участке АВ, где $|M_Z| = 200$ кг·м.

Согласно формуле условия прочности на кручение, получим:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{Z\max}}{W_\rho} \le [\tau] \qquad (3.11)$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{T_{Z\max}}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{200 \cdot 10^2}{\frac{3{,}14 \cdot 6{,}5^3}{16}} = 370 \text{ кг/см}^2 = 37 \text{ МПа}.$$

Прочность вала обеспечена.

Пример № 9. К стальному валу ($G = 8 \cdot 10^4$ МПа $= 8 \cdot 10^5$ кг/см^2) приложен крутящий момент $M = 7 \cdot 10^3$ Нм $= 700$ кг·м (рис. 3.8).

Требуется:

1. Установить, при каком значении момента X угол поворота концевого сечения вала равен нулю.

2. Построить эпюру крутящих моментов с учетом найденного значения X.

3. Определить диаметр вала, если $[\tau]$ = 80 МПа = 800 кг/см^2.

4. Построить эпюру углов закручивания.

5. Найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м), если a = 2 м = 200 см, b = 1,5 м = 150 см.

Решение.

1. Вал имеет два участка AB и BC. Проводим сечения I и II и определяем для каждого участка внутренний крутящий момент, начиная от свободного правого конца вала, чтобы не определять реактивный момент в заделке. Используя зависимость (3.10), получим:

участок CB: $T_{Z_1} = -X$;

участок BA: $T_{Z_2} = -X + M = 700 - X.$ (3.12)

Угол закручивания φ определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{T_Z l}{G I_\rho}. \tag{3.13}$$

Если вал имеет n участков, то угол закручивания его конечных сечений равен алгебраической сумме углов закручивания каждого i-го участка, т.е.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_{Zi} l_i}{G_i I_{\rho_i}}. \tag{3.14}$$

Тогда, учитывая условие рассматриваемого пункта о том, что угол поворота сечения C относительно A равен нулю, запишем с учетом (3.13) и (3.14):

$$\varphi_{CA} = 0\,;\ \varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = 0\,;$$

$$\varphi_{CA} = \frac{T_{Z_1} b}{G I_\rho} + \frac{T_{Z_2} a}{G I_\rho} = 0.$$

Подставив из (3.12) значения T_{Z_1} и T_{Z_2}, получим после преобразований:

$$-Xb + (700 - X)a = 0\,;\quad X = 400 \text{ кг·м}.$$

2. Строим эпюру крутящих моментов на основании (3.12) и (3.15):

$$T_{Z_1} = -X = -400 \text{ кг·м} = -4 \cdot 10^3 \text{ Нм},$$

$$T_{Z_2} = -X + M = -400 + 700 = 300 \text{ кг·м} = 3 \cdot 10^3 \text{ Нм}.$$

Выбираем масштаб и строим эпюру T_Z (рис. 3.8, а). Для ее проверки используем правило, представленное в примере № 7.

3. Определяем диаметр вала из расчета на прочность. Опасное сечение на участке СВ: $|T_{Z\max}|$ = 4·10^3 Нм = 400 кг·м. Определяем диаметр вала по формуле, полученной из условия прочности (3.11):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{Z\max}}{\pi[\tau]}} \quad \text{или} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{T_{Z\max}}{0{,}2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{400\cdot 10^2}{0{,}2\cdot 800}} = 6{,}3 \text{ см} = 63\cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Согласно стандартному ряду, округляем : d = 70 мм.

4. Строим эпюру углов закручивания. Идем от неподвижного сечения вала А. Угол поворота сечения В относительно сечения А, согласно формуле (3.13):

$$\varphi_{BA} = \frac{M_{Z_2} a}{GI_\rho} = \frac{300\cdot 10^2 \cdot 200}{8\cdot 10^5 \cdot 240{,}1} = 3{,}12\cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$I_\rho = 0{,}1d^4 = 0{,}1\cdot 7^4 = 240{,}1 \text{ см}^4.$$

Аналогично:

$$\varphi_{CB} = \frac{T_{Z_1} b}{GI_\rho} = \frac{-400\cdot 10^2 \cdot 150}{8\cdot 10^5 \cdot 240{,}1} = -3{,}12\cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Выбираем масштаб. На эпюре углов закручивания (рис. 3.8, б) под сечением В откладываем значение $\varphi_{BA} = 3{,}12\cdot 10^{-3}$ рад и соединяем полученную точку с началом координат. Затем под сечением С откладываем $\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_{CB}$ = 3,12·10^{-3} – 3,12·10^{-3} = 0 и строим эпюру φ на участке СВ. Эпюра φ в сечении С пришла в ноль. Это говорит о том, что условие пункта 1 задачи выполнено и значение момента X найдено правильно.

5. Определяем наибольший относительный угол закручивания θ. Для каждого участка получим, поделив угол закручивания на его длину:

$$\theta_{BA} = \frac{\varphi_{BA}}{a} = \frac{3{,}12\cdot 10^{-3}}{2} = 1{,}56\cdot 10^3 \text{ рад/м};$$

$$\theta_{CB} = \frac{\varphi_{CB}}{b} = \frac{-3{,}12\cdot 10^{-3}}{1{,}5} = -2{,}08\cdot 10^{-3} \text{ рад/м};$$

Отсюда $\theta_{\max} = |\theta_{CB}| = 2{,}08\cdot 10^{-3}$ рад/м.

3.5 Геометрические характеристики сечений

(к контрольной задаче №5)

Пример № 9. Для поперечного сечения (рис. 3.9), состоящего из двутавра №10 и равнобокого уголка 50х50х5 мм, требуется:

1) определить положение центра тяжести сечения;

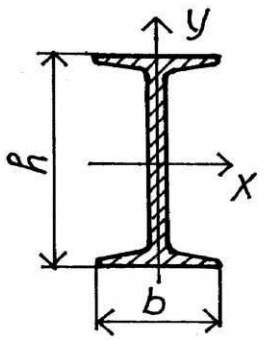
2) найти центральные осевые и центробежный моменты инерции сечения;

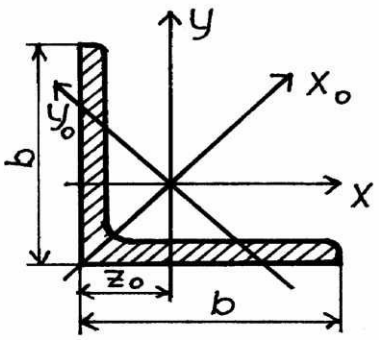
3) определить направление главных центральных осей инерции сечения (U и V);

4) вычислить главные центральные моменты инерции сечения.

Решение. Выписываем из таблиц сортамента прокатных профилей (см. ПРИЛОЖЕНИЯ 1 и 2) необходимые для расчета данные:

I. Двутавр №10 (ГОСТ 8239-56); уголок равнобокий 50х50х5 (ГОСТ 8509-57).





F_1	$F = 12$ см^2	A_2	$A = 4{,}8$ см^2
h_1	$b = 5{,}5$ см	b_2	$b = 5$ см
b_1	$h = 10$ см	$x_{0_2} = y_{0_2}$	$Z_0 = 1{,}42$ см
I_{X_1}	$I_X = 198$ см^4	$I_{x_2} = I_{y_2}$	$I_x = 11{,}2$ см^4
I_{Y_1}	$I_{Y_1} = 17{,}9$ см^4		$I_{x_0} = 17{,}8$ см^4
			$I_{y_0} = 4{,}63$ см^4

Примечание: слева от вертикальной черты для каждого профиля проставляем при решении задачи обозначения геометрических параметров, принятые нами в соответствии с чертежом (рис. 3.9).

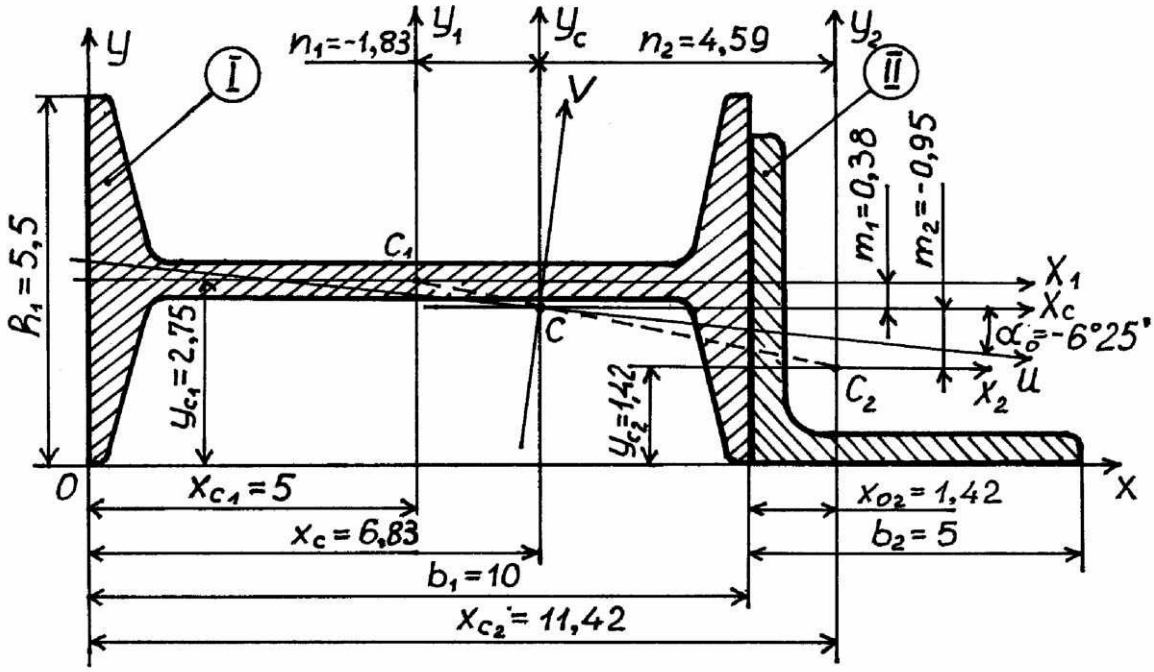


Рис. 3.9

1. Вычерчиваем в масштабе сечение. Для определения положения центра тяжести составного сечения обозначим двутавр – I и равнобокий уголок – II и проведем собственные центральные оси X_1, Y_1 и X_2, Y_2. Проводим вспомогательные оси X, Y. Тогда координаты центра тяжести сечений I и II относительно осей X, Y:

$$X_{C_1} = \frac{b_1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ см}; \; Y_{C_1} = \frac{h_1}{2} = \frac{5{,}5}{2} = 2{,}75 \text{ см};$$

$$X_{C_2} = b_1 + X_{0_2} = 10 + 1{,}42 = 1{,}14 \text{ см}; \; Y_{C_2} = Y_{0_2} = 1{,}42 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести всего сечения

$$X_C = \frac{\sum S_Y}{\sum A} = \frac{A_1 X_{C_1} + A_2 X_{C_2}}{A_1 + A_2} = \frac{12 \cdot 5 + 4{,}8 \cdot 11{,}42}{12 + 4{,}8} = 6{,}83 \text{ см};$$

$$Y_C = \frac{\sum S_X}{\sum A} = \frac{A_1 Y_{C_1} + A_2 Y_{C_2}}{A_1 + A_2} = \frac{12 \cdot 275 + 4{,}8 \cdot 1{,}42}{12 + 4{,}8} = 2{,}37 \text{ см}.$$

где $A_1 = 12$ см^2; $A_2 = 4{,}8$ см^2 – площади поперечных сечений.

Наносим эти размеры на чертеж и через полученный центр тяжести С проводим центральные оси X_C и Y_C. Проверяем правильность вычислений: центр тяжести составного сечения должен лежать на линии, соединяющей центры тяжести первого и второго сечений.

2. Вычисляем центральные осевые и центробежный моменты инерции составного сечения. Воспользуемся формулами для определения моментов инерции при параллельном переносе осей:

$$I^I_{x_C} = I_{x_1} + m_1^2 A_1; \; I^{II}_{x_C} = I_{x_2} + m_2^2 A_2;$$

$$I^I_{y_C} = I_{y_1} + n_1^2 A_1; \; I^{II}_{y_C} = I_{y_2} + n_2^2 A_2; \qquad (3.16)$$

$$I^I_{x_C y_C} = I_{x_1 y_1} + m_1 n_1 A_1; \; I^{II}_{x_C y_C} = I_{x_2 y_2} + m_2 n_2 A_2.$$

где m_1, m_2 – расстояние между параллельными осями X_1 и X_C, X_2 и X_C соответственно;

n_1, n_2 – расстояние между параллельными осями Y_1 и Y_C, Y_2 и Y_C соответственно.

На основании данных чертежа получим:

$m_1 = Y_C - Y_{C_1} = 2{,}75 - 2{,}37 = 0{,}38$ см;

$m_2 = -(Y_C - Y_{C_2}) = -(2{,}27 - 1{,}42) = -0{,}95$ см;

$n_1 = -(X_C - X_{C_1}) = -(6{,}83 - 5) = -1{,}83$ см;

$n_2 = X_{C_2} - X_C = 11{,}42 - 6{,}83 = 4{,}59$ см.

Вычисляем центральные осевые моменты инерции всего сечения, равные сумме моментов инерции фигур, составляющих это сечение, с учетом формулы (3.16):

$$I_{x_C} = I^I_{x_C} + I^{II}_{x_C} = (I_{x_1} + m_1^2 A_1) + (I_{x_2} + m_2^2 A_2) = (17{,}9 + 0{,}38^2 \cdot 12) +$$

$$+ (11{,}2 + (-0{,}95)^2 \cdot 4{,}8) = 19{,}63 + 15{,}53 = 352 \text{ см}^4; \qquad (3.17)$$

$$I_{y_C} = I^I_{y_C} + I^{II}_{y_C} = (I_{y_1} + n_1^2 A_1) + (I_{y_2} + n_2^2 A_2) = (198 + (-1{,}83)^2 \cdot 12) +$$

$$+ (11{,}2 + 4{,}59^2 \cdot 4{,}8) = 238{,}2 + 111{,}9 = 350{,}1 \text{ см}^4. \qquad (3.18)$$

Центробежный момент инерции составного сечения вычисляем с учетом формул (3.16) аналогично:

$$I^I_{x_C y_C} = I^I_{x_C y_C} + I^{II}_{x_C y_C} = (I_{x_1 y_1} + m_1 n_1 A_1) + (I_{x_2 y_2} + m_2 n_2 A_2) =$$

$$= (0 + 0{,}38 \cdot (-1{,}83) \cdot 12) + (-6{,}58 + (-0{,}95) \cdot 4{,}59 \cdot 4{,}8) = (-8{,}34) + (-27{,}5) =$$

$$= -35{,}8 \text{ см}^4. \qquad (3.19)$$

В этой формуле для двутавра, являющегося симметричным сечением относительно собственных центральных осей, центробежный момент инерции $I_{x_1 y_1} = 0$, т.к. эти оси – главные центральные оси двутавра. Для равнобокого уголка ($\alpha = 45^\circ$):

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{17{,}8 - 4{,}63}{2} \sin(-2 \cdot 45^\circ) = -6{,}58 \text{ см}^4.$$

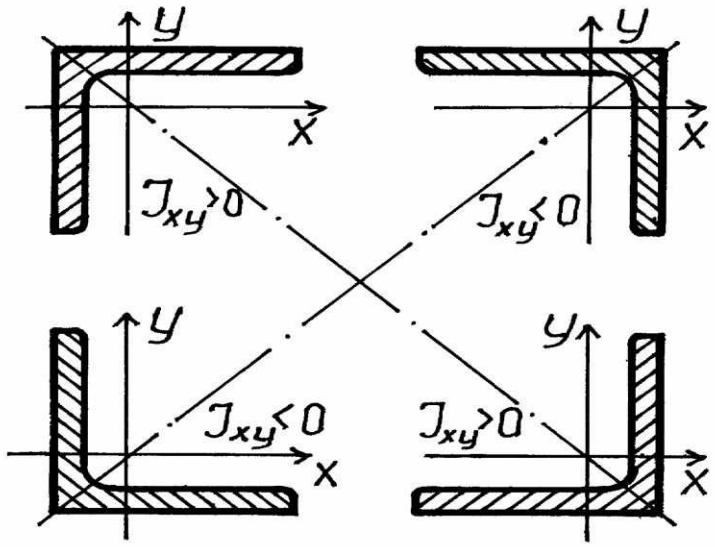


Рис. 3.10

Знак I_{xy} при различных положениях равнобоких и неравнобоких уголков выбирается согласно рис. 3.10. В нашем случае берется знак минус.

3.Определим направление главных центральных осей на основании вычислений по формулам (3.17), (3.18) и (3.19):

$$tg2\alpha_0 = \frac{2I_{x_C y_C}}{I_{y_C} - I_{x_C}} = \frac{2(-35{,}8)}{350{,}1 - 35{,}2} = -0{,}2274;$$

$$2\alpha_0 = -12^\circ 48'; \quad \alpha_0 = -6^\circ 24'.$$

Угол $\alpha_0 < 0$, поэтому угол $\alpha_0 = -6^\circ 24'$ отложим от оси X_C в направлении часовой стрелки и проведем главную ось U, а ей перпендикулярно – главную ось V (рис. 3.9).

4. Вычислим значения главных центральных моментов инерции

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_{y_C} + I_{x_C}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{y_C} + I_{x_C})^2 + 4I_{x_C y_C}^2} =$$

$$= \frac{35{,}2 + 350}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(350 + 35{,}2)^2 + 4(-35{,}8)^2} = 192{,}6 \pm 161{,}4 \text{ см}^4;$$

$I_{\max} = 354$ см^4 $= 354 \cdot 10^{-8}$ м^4;

$I_{\min} = 31{,}2$ см^4 $= 31{,}2 \cdot 10^{-8}$ м^4.

Положение оси U ($I_{\min}$) легко определить, т.к. эта ось, во-первых, пересекает сечение по наибольшему протяжению и, во-вторых, располагается ближе к той центральной оси инерции (оси X_C), относительно которой центральный момент инерции имеет меньшую величину, т.е. ($I_{x_C} < I_{y_C}$).

Таким образом $I_V = I_{\min} = 31{,}2 \cdot 10^{-8}$ м^4,

$I_U = I_{\max} = 354$ см^4 $= 354 \cdot 10^{-8}$ м^4.

Проверка: а) $I_{x_C} + I_{y_C} = I_V + I_U$;

$I_{x_C} + I_{y_C} = 35{,}2 + 350 \approx 385$ см^4;

$I_V + I_U = 31{,}2 + 354 = 385{,}2$ см^4.

II. Т.к. оси V и U главные, то должно выполняться условие равенства нулю центробежного момента инерции, вычисленного относительно главных осей V и U, т.е. $I_{UV} = 0$. Тогда при $\alpha_0 = -6°25'$ получим:

$$I_{UV} = \frac{I_{x_C} - I_{y_C}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + I_{x_C y_C} \cos 2\alpha_0 =$$

$$= \frac{35{,}2 - 350}{2}(-0{,}2217) + (-35{,}8)0{,}9751 = 34{,}89 - 34{,}91 \approx 0.$$

где $\sin 2\alpha_0 = \sin 2(-6°24') = -0{,}2217$,

$\cos 2\alpha_0 = \cos 2(-6°24') = 0{,}9751$.

3.6 Расчет на прочность при прямом поперечном изгибе

(к контрольной задаче № 6)

Пример № 11. Для заданной расчетной схемы двухопорной балки (рис. 3.11) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать стальную балку двутаврового поперечного сечения, если $P = 20$ кн $= 2$ т, $M =$ $= 20$ кнм $= 2$ тм, $q = 1{,}5$ кн/м $= 1{,}5$ т/м, $a_1 = 1$ м, $a_2 = 2$ м, $l = 4$ м, $[\sigma] = 160$ МПа $=$ $= 1600$ кг/см^2.

Решение.

1. Вычерчиваем балку в масштабе, наносим все нагрузки и размеры и определяем опорные реакции R_A и R_C, используя уравнение статического равновесия:

$$\sum m_C = 0;\ -R_A \cdot l + ql\frac{l}{2} + P(l - a_1) + M = 0;$$

$$R_A = \frac{q\frac{l^2}{2} + P(l - a_1) + M}{l} = \frac{1{,}5\frac{4^2}{2} + 2(4-1) + 2}{4} = 5 \text{ т.}$$

$$\sum m_A = 0;\ R_C l - Pa_1 - ql\frac{l}{2} + M = 0;$$

$$R_C = \frac{Pa_1 + q\frac{l^2}{2} - M}{l} = \frac{2 \cdot 1 + 1{,}5\frac{4^2}{2} - 2}{4} = 3 \text{ т.}$$

Проверка: $\sum y = 0;\ R_A - ql - P + R_C = 0;$ 5 - 1,5·4 - 2 + 3 = 0

Наносим вычисленные значения реакций R_A и R_C на расчетную схему.

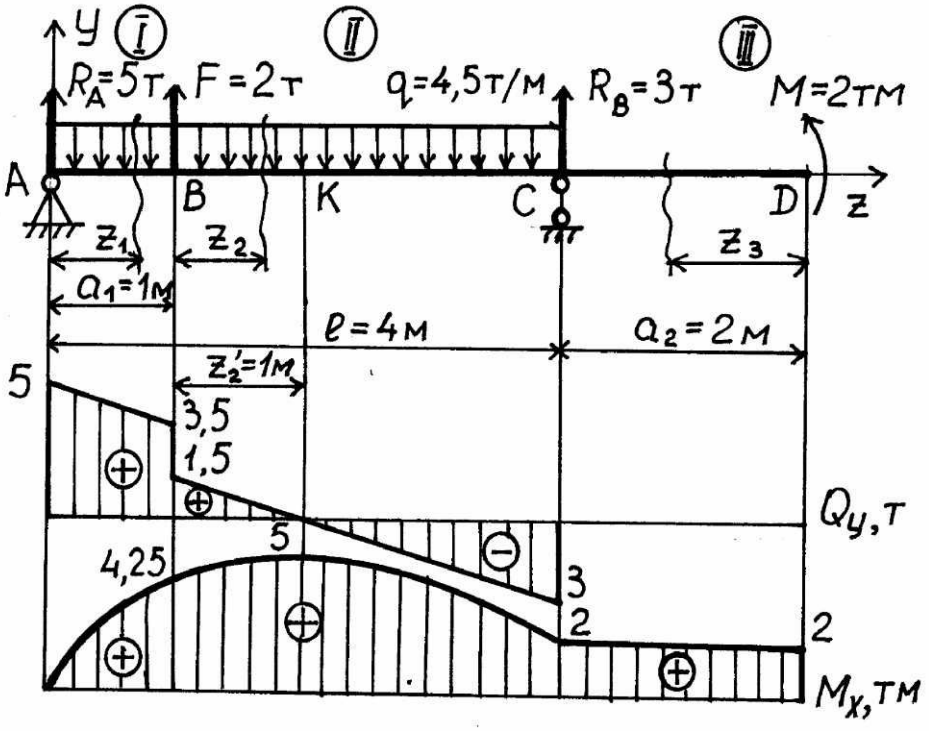


Рис. 3.11

2. Запишем для каждого участка I, II, III балки уравнения для Q_y и M_x и, выбрав масштаб, построим их эпюры. Для этого применим метод сечений. На каждом участке проводим произвольные сечения и выбираем начало координат: для участка I – в точке A, для участка II – в точке B, для участка III – в точке D. Произвольные сечения каждого участка связываем с выбранным началом отсчета координат Z_1, Z_2 и Z_3. Тогда для каждого участка получим:

Участок I ($0 \le Z_1 \le a_1$ = 1 м).

$$Q_y = R_A - qZ_1;\ M_x = R_A Z_1 - qZ_1\frac{Z_1}{2}.$$

При составлении уравнения для M_x считаем, что равнодействующая (qZ_1) от равномерно распределенной нагрузки q приложена посередине рассматриваемого участка длиной Z_1, и тогда плечо ее равно $Z_1 / 2$.

При $Z_1 = 0$; $Q_y = 5$ т, $M_x = 0$.

При $Z_1 = 1$ м; $Q_y = 5 - 1{,}5 \cdot 1 = 3{,}5$ т, $M_x = 5 \cdot 1 - 5 \cdot \frac{1^2}{2} = 4{,}25$ тм.

Участок II ($0 \le Z_1 \le (l - a_1) = 3$м).

$$Q_y = R_A - qa_1 - P - qZ_2;$$

$$M_x = R_A(a_1 + Z_2) - qa_1\left(\frac{a_1}{2} + Z_2\right) - PZ_2 - qZ_2\frac{Z_2}{2}.$$

При составлении уравнений для Q_y и M_x для участка II видим, что q, приложенная на участке a_1, не зависит от Z_2 (отсчет начинается от точки В).

При $Z_2 = 0$; $Q_y = 5 - 1{,}5 \cdot 1 - 2 = 1{,}5$ т, $M_x = 5 \cdot 1 - 1{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}25$ тм.

При $Z_2 = 3$ м; $Q_y = 5 - 1 \cdot 2 - 1{,}5 \cdot 3 = -3$ тм.

$$M_x = 5 \cdot (1 + 3) - 1{,}5 \cdot 1\left(\frac{1}{2} + 3\right) - 2 \cdot 3 - 1{,}5 \cdot \frac{3^2}{2} = 2 \text{ тм}.$$

Построив эпюру Q_y для этого участка, видим, что она меняет знак с (+) на (–). Исследуем на экстремум:

$$\frac{dM_x}{dZ} = Q = 0;\ R_A - qa_1 - P - qZ_2';$$

$$Z_2' = \frac{R_A - qa_1 - P}{q} = \frac{5 - 1{,}5 \cdot 1 - 2}{1{,}5} = 1 \text{ м}.$$

При $Z_2' = 1$ м, $M_x = 5 \cdot (1 + 1) - 1{,}5 \cdot 1\left(\frac{1}{2} + 1\right) - 2 \cdot 1 - 1{,}5 \cdot \frac{1^2}{2} = 5$ тм.

Откладываем от точки В $Z_2' = 1$ м, где $Q_y = 0$, на эпюре изгибающих моментов откладываем $M_x = 5$ тм и через полученные три точки проводим параболу – эпюру M_x.

Участок III ($0 \le Z_3 \le a_3 = 2$ м).

$Q_y = 0$; $M_x = M = 2$ тм.

Выбираем масштаб, строим эпюры (рис. 3.11) и проверяем их правильность.

2. Определяем опасное сечение балки – сечение, в котором изгибающий момент принимает максимальное значение по абсолютной величине, если, как в нашем случае, материл балки пластичный.

Опасное сечение K, где $M_{x_{\max}} = 5$ тм.

Для подбора сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} \le [\sigma] \qquad (3.20)$$

получим формулу проектировочного расчета:

$$W_x \ge \frac{M_{x_{\max}}}{[\sigma]} = \frac{5 \cdot 10^5}{1600} = 312,5 \text{ см}^3.$$

По сортаменту двутавровых балок (ГОСТ 8239-89) подбираем ближайший больший профиль – двутавр № 24а с осевым моментом сопротивления $W_x' = 317$ см^3.

Максимальные рабочие напряжения будут равны, согласно формулы (3.20),

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_{x_{\max}}}{W_x'} = \frac{5 \cdot 10^5}{317} = 1577 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2.$$

Недонапряжение составит:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma'_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{1577 - 1600}{1600} 100\% = -1,44\ \%.$$

Допустимые пределы отклонения $\Delta\sigma = \pm 5\ \%$.

Пример № 12. Для заданной расчетной схемы консольной балки (рис. 3.12) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать деревянную балку круглого поперечного сечения, если $P = 10$ кн $= 1$ т, $M = 20$ кнм $= 2$ тм, $q = 10$ кн/м $= 1$ т/м, $a_1 = 1,5$ м, $a_2 = 2$ м, $l = 3$ м, $[\sigma] = 8$ МПа $= 80$ кг/см^2.

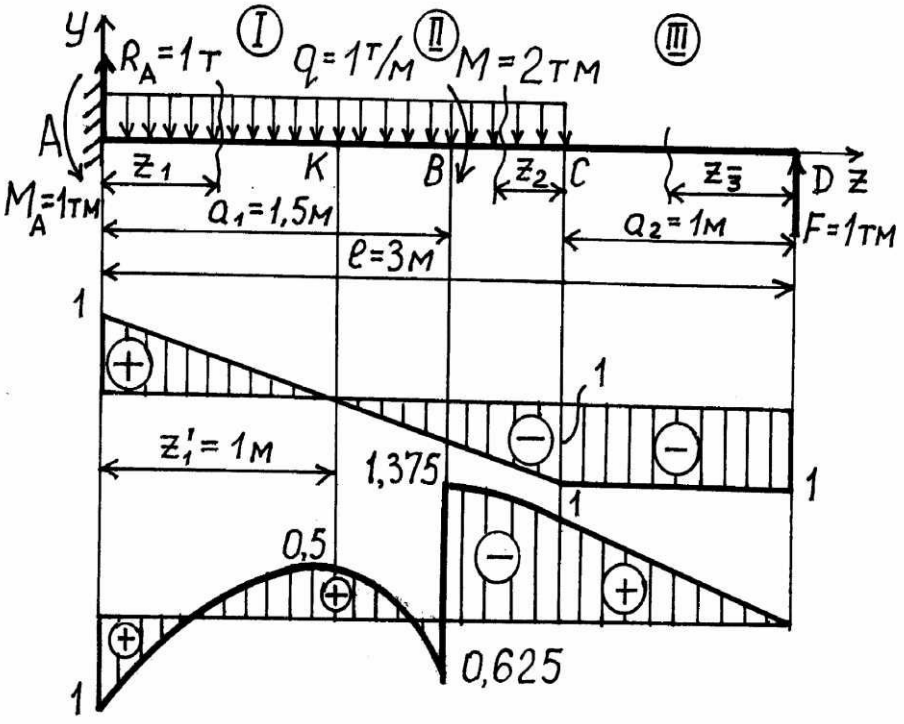


Рис. 3.12

Решение.

1. Вычерчиваем расчетную схему балки в масштабе, наносим все нагрузки и размеры. Для консольной балки можно не определять опорные реакции R_A и M_A, но для исключения ошибок при построении эпюр и облегчения контроля их правильности мы будем рекомендовать определять их, используя уравнения статического равновесия:

$$\sum m_A = 0;\ M_A - q\frac{a_2^2}{2} - M + Pl = 0;$$

$$M_A = q\frac{a_2^2}{2} + M - Pl = 1\cdot\frac{2^2}{2} + 2 - 1\cdot 3 = 1 \text{ тм.}$$

$$\sum m_C = 0;\ M_A - R_A a_2 + q\frac{a_2^2}{2} - M + P\cdot(l - a_2) = 0;$$

$$R_A = \frac{M_A + q\frac{a_2^2}{2} - M + (l - a_2)}{a_2} = \frac{1 + 1\frac{2^2}{2} - 2 + 1(3-2)}{2} = 1\text{т.}$$

Проверка: $\sum y = 0;\ R_A - qa_2 + P = 0;$ 1 - 1·2 +1 = 0.

Наносим вычисленные значения R_A и M_A на чертеж.

2. Разбиваем балку на участки I, II, III, на каждом участке проводим произвольные сечения и, выбрав для каждого участка начало координат, наносим на чертеж расстояния Z_1, Z_2 и Z_3.

Составляем для каждого участка уравнения для Q_y и M_x и строим эпюры.

Участок I: $0 \le Z_1 \le a_1 = 1{,}5$ м.

$$Q_y = R_A - qZ_1;\ M_x = R_A Z_1 - qZ_1\frac{Z_1}{2}.$$

При $Z_1 = 0$; $Q_y = 1$ т, $M_x = -1$ тм.

При $Z_1 = 1{,}5$ м; $Q_y = 1 - 1\cdot 1{,}5 = 0{,}5$ т,

$$M_x = -1 + 1\cdot 1{,}5 - 1\frac{1{,}5^2}{2} = -0{,}625 \text{ тм.}$$

Построив эпюру Q_y, видим, что она меняет знак (+) на (–). Следовательно, на этом участке M_x принимает экстемальное значение – максимум. Исследуем на экстремум:

$$\frac{dM_x}{dZ} = Q_y = 0;\ R_A - qZ_1' = 0;\ \ Z_1' = \frac{R_A}{q} = \frac{1}{1} = 1 \text{ м.}$$

При $Z_1' = 1$ м; $M_x = -1 + 1\cdot 1 - 1\frac{1^2}{2} = 0{,}5$ тм.

По полученным трем точкам строим параболу – эпюру M_x.

Участок II: $0 \le Z_1 \le 0{,}5$ м.

$$Q_y = -P - qZ_2;$$

$$M_x = P(Z_2 + (l - a_2)) - qZ_2 \frac{Z_2}{2}.$$

При $Z_2 = 0$; $Q_y = -1$ т, ; $M_x = 1(0 + (3 - 2)) = 1$ тм.

При $Z_2 = 0{,}5$ м; $Q_y = -1 + 1 \cdot 0{,}5 = -0{,}5$ т,

$$M_x = 1(0{,}5 + (3 - 2)) - 1\frac{0{,}5^2}{2} = 1{,}375 \text{ тм}.$$

Участок III: $0 \le Z_3 \le (l - a_2) = 1$ м.

$$Q_y = -P = 1 \text{ т}; \; M_x = PZ_3.$$

При $Z_3 = 0$; $M_x = 0$.

При $Z_3 = 1$ м; $M_x = 1 \cdot 1 = 1$ тм.

3. Определяем опасное сечение и подбираем диаметр балки. Опасное сечение в точке В справа, где $M_{x_{\max}} = 1{,}375$ тм.

Тогда из условия прочности (3.20), учитывая, что осевой момент сопротивления для круглого сечения $W_x \approx 0{,}1d^3$, получим для подбора диаметра d балки формулу:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{M_{x_{\max}}}{0{,}1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}375 \cdot 10^5}{0{,}1 \cdot 80}} = 25{,}8 \text{ см}.$$

Округляем диаметр в большую сторону до целого числа, т.е. $d = 26$ см $= 26 \cdot 10^{-2}$ м. Тогда максимальные рабочие напряжения согласно (3.20) будут равны

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_{x_{\max}}}{W'_x} = \frac{1{,}375 \cdot 10^5}{1758} = 78{,}2 \text{ кг/см}^2 < [\sigma] = 80 \text{ кг/см}^2,$$

где $W'_x = 0{,}1 \cdot 26^3 = 1758$ см^3.

Недонапряжение составит

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma'_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{78{,}2 - 80}{80} 100\% = -2{,}25\ \% < \pm 5\ \%.$$

Расчет окончен.

3.7 Внецентренное растяжение и сжатие короткого бруса

(к контрольной задаче № 7)

Сложным сопротивлением называют такой вид сопротивления стержней, когда мы имеем дело с комбинацией простейших деформаций.

В поперечном сечении внецентренно сжатого бруса возникают нормальные напряжения σ, которые определяются следующей формулой:

$$\sigma = -\frac{F}{A}\left(1+\frac{y_F y}{i_x^2}+\frac{x_F x}{i_y^2}\right), \qquad (3.21)$$

где F – приложенная нагрузка (Н);

A – площадь поперечного сечения колонны (м^2);

i_x, i_y – радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей (м);

x_F, y_F – координаты точки приложения продольной силы (м);

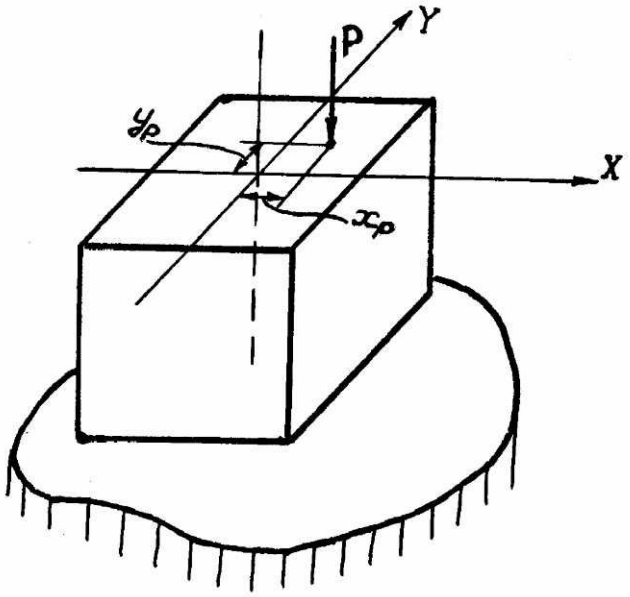


Рис. 3.13

x, y – координаты точки сечения, в которой определяется напряжение (м).

Максимальные нормальные напряжения возникают в точках сечения наиболее удаленных от нулевой (нейтральной) линии. На самой же линии нормальные напряжения равны нулю. Поэтому если в уравнении (3.21) принять σ=0, то мы получим уравнение нулевой линии:

$$1+\frac{y_F y_0}{i_x^2}+\frac{x_F x_0}{i_y^2}=0, \qquad (3.22)$$

здесь x_0, y_0 – координаты точек нулевой линии.

Уравнение (3.22) – это уравнение прямой, не проходящей через начало координат. Если в этом уравнении принять x_0 = 0, то получим величину отрезка, который нулевая линия отсекает на оси y; если же принять y_0 = 0, то получим величину отрезка, который нулевая линия отсекает на оси x, т.е.:

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F}, y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F}. \qquad (3.23)$$

Пример № 13. В сечении, указанном на рис. 3.14 и принадлежащем внецентренно сжатой колонне, определить наиболее опасные точки и напряжения в них. Сжимающая сила F = 200 кН = 20 т приложена в точке A.

Решение. Так как оси x и y являются осями симметрии, то они главные центральные оси.

Наиболее опасными точками будут точки, в которых возникают максимальные нормальные напряжения, а это точки, наиболее удаленные от нулевой линии. Следовательно, нам необходимо сначала определить положение нулевой линии. Записываем уравнение нулевой линии (3.22).

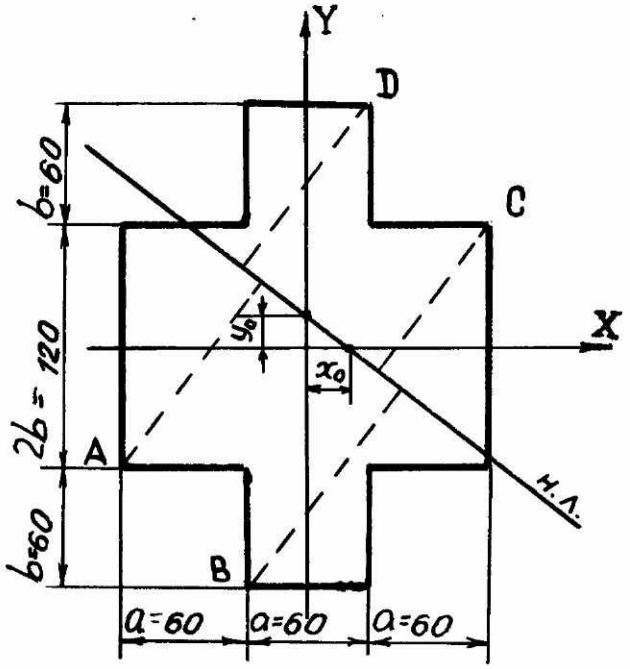


Рис. 3.14

В нашем случае координаты точки приложения силы следующие (см. рис. 3.14):

$$x_F = -90 \text{ мм} = -0{,}09 \text{ м};$$

$$y_F = -60 \text{ мм} = -0{,}06 \text{ м}.$$

Квадраты радиусов инерции i_x и i_y определяются так:

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A},\ i_y^2 = \frac{J_y}{A}, \qquad (3.24)$$

здесь J_x и J_y – осевые моменты инерции относительно главных центральных осей X и Y.

Определение осевых моментов инерции – см. конспект лекций [1], раздел 8 «Геометрические характеристики сечений». Для нашего сечения будем иметь:

$$J_x = \frac{a\cdot(4b)^3}{12} + \frac{a(2b)^3}{12}2 = \frac{0{,}06\cdot 0{,}24^3}{12} + \frac{0{,}06\cdot 0{,}12^3}{12}\cdot 2 = 864\cdot 10^{-7}\text{ м}^4;$$

$$J_y = \frac{2b(3a)^3}{12} + \frac{a\cdot a^3}{12}2 = \frac{0{,}12\cdot 0{,}18^3}{12} + \frac{0{,}06\cdot 0{,}06^3}{12}\cdot 2 = 604\cdot 10^{-7}\text{ м}^4.$$

Площадь всего сечения будет равна

$$A = 3a\cdot 2b + a\cdot a\cdot 2 = 0{,}018\cdot 0{,}12 + 0{,}06\cdot 0{,}06\cdot 2 = 288\cdot 10^{-4}\text{ м}^2,$$

и тогда квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{863\cdot 10^{-7}}{288\cdot 10^{-4}} = 2{,}996\cdot 10^{-3}\text{ м}^2;\ \ i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{604\cdot 10^{-7}}{288\cdot 10^{-4}} = 2{,}097\cdot 10^{-3}\text{ м}^2.$$

По формулам (3.23) определим отрезки, которые нулевая линия отсекает на осях X и Y:

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{2{,}097\cdot 10^{-3}}{-0{,}09} = 23{,}3\cdot 10^{-3}\text{ м};$$

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{2{,}996\cdot 10^{-3}}{-0{,}06} = 49{,}9\cdot 10^{-3}\text{ м}.$$

Отложим эти отрезки на координатных осях, получим точки, в которых нулевая линия пересекает координатные оси. Через эти точки проводим прямую (см. рис. 3.14). Видим, что наиболее удаленные точки – это точка B в зоне отрицательных напряжений и точка D в зоне положительных напряжений.

Определим напряжения в этих точках. По формуле (3.21) имеем:

$$\sigma_B = -\frac{F}{A}\left(1+\frac{y_F y_B}{i_x^2}+\frac{x_F x_B}{i_y^2}\right);$$

На основании чертежа (рис. 3.14) получим:

$y_B = -0{,}12$ м; $x_B = -0{,}03$ м.

Тогда $$\sigma_B = -\frac{200}{288\cdot10^{-4}}\left(1+\frac{(-0{,}06)\cdot(-0{,}12)}{2{,}996\cdot10^{-3}}+\frac{(-0{,}09)\cdot(-0{,}03)}{2{,}097\cdot10^{-3}}\right)=$$

$$= -5{,}39\cdot10^4 \text{ кН/м}^2 = -53{,}9 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_D = -\frac{F}{A}\left(1+\frac{y_F y_D}{i_x^2}+\frac{x_F x_D}{i_y^2}\right);$$

$y_D = 0{,}12$ м; $x_D = 0{,}03$ м.

$$\sigma_D = -\frac{200}{288\cdot10^{-4}}\left(1+\frac{(-0{,}06)\cdot0{,}12}{2{,}996\cdot10^{-3}}+\frac{(-0{,}09)\cdot0{,}03}{2{,}097\cdot10^{-3}}\right) = 1{,}86\cdot10^4 \text{ кН/м}^2 =$$

$= 18{,}6$ МПа.

Пример № 14. Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 3.15 , сжимается продольной силой F, приложенной в точке A.

Требуется:

1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через F и размеры сечения; $a = 40$ мм, $b = 60$ мм;

2) найти допускаемую нагрузку F при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_C] = 100$ МПа и на растяжение $[\sigma_P] = 30$ МПа.

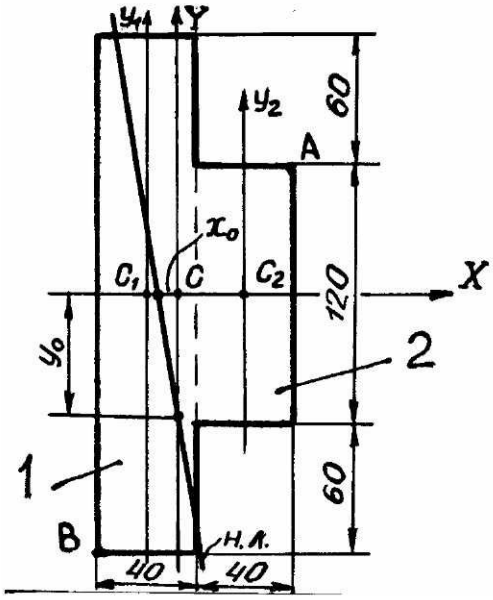


Рис. 3.15

Решение. Выше указывалось, что геометрические характеристики в расчетных формулах берутся относительно главных центральных осей, поэтому определим центр тяжести сечения. Ось X является осью симметрии, и следовательно, она проходит через центр тяжести, поэтому нам достаточно найти его местоположение на этой оси. Разобьем сечение на два составных (1 и 2) и выберем вспомогательные оси xy_1. Запишем координаты центров тяжести C_1 и C_2 в этих осях.

Будем иметь C_1 (0,0); C_2(0,04; 0), тогда

$$x_C = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 0{,}04 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}12}{0{,}04 \cdot 0{,}24 + 0{,}04 \cdot 0{,}12} = 0{,}0133 \text{ м};\ y_C = 0.$$

Итак, в осях xy_1 центр тяжести всего сечения имеет координаты $C(0{,}0133;\ 0)$. Проводим через центр тяжести сечения ось Y, перпендикулярную оси X. Оси X и Y и будут главными центральными осями сечения.

Определим положение нулевой линии. Для этого воспользуемся уравнением (3.23)

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F}, \qquad y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F}.$$

Координаты точки приложения силы (точки A) будут следующие: x_F = =(0,02 – 0,0133) + 0,04 = 0,0467 м; y_F = 0,06 м;

Квадраты радиусов инерции определим, как и в примере № 13, по формулам (3.24):

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A}, \qquad i_y^2 = \frac{J_y}{A}.$$

$$J_x = \frac{a \cdot (4b)^3}{12} + \frac{a(2b)^3}{12} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}24^3}{12} + \frac{0{,}04 \cdot 0{,}12^3}{12} = 517 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4,$$

$$J_y = \frac{4b^3 \cdot a}{12} + n^2(a \cdot 4b) = \frac{0{,}24 \cdot 0{,}04^3}{12} + 0{,}0133^2 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}24 + \frac{0{,}04^3 \cdot 0{,}12}{12} +$$
$$+ 0{,}0267^2 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}12 = 69 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4,$$

где $n = x_C = 0{,}0133$ м;

$$A = a \cdot 4b + a \cdot 2b = 0{,}04 \cdot 0{,}24 + 0{,}04 \cdot 0{,}12 = 144 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{517 \cdot 10^{-7}}{144 \cdot 10^{-4}} = 3{,}59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \qquad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{69 \cdot 10^{-7}}{144 \cdot 10^{-4}} = 0{,}48 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

и тогда, согласно формуле (3.23), получим отрезки, отсекаемые нейтральной осью на главных осях инерции X и Y соответственно:

$$x_0 = -\frac{0{,}48 \cdot 10^{-3}}{467 \cdot 10^{-4}} = -10{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad y_0 = -\frac{3{,}59 \cdot 10^{-3}}{0{,}06} = -59{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Откладываем x_0 на оси x, а y_0 на оси y и проводим через полученные точки нулевую линию (рис. 3.15). Видим, что наиболее удаленные точки сечения от нулевой линии – это точка A в сжатой зоне и точка B в растянутой зоне. Координаты этих точек следующие: A (0,0467; 0,06); B (– 0,0333; –0,12). Определим по формуле (3.21) напряжения в этих точках, выразив их через F.

$$\sigma_A = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_F y_A}{i_x^2} + \frac{x_F x_A}{i_y^2}\right) = -\frac{F}{144 \cdot 10^{-4}}\left(1 + \frac{0{,}06 \cdot 0{,}06}{3{,}59 \cdot 10^{-3}} + \frac{0{,}0467 \cdot 0{,}0467}{0{,}48 \cdot 10^{-3}}\right) =$$
$$= -451{,}6F,$$

$$\sigma_B = -\frac{F}{A}\left(1+\frac{y_F y_B}{i_x^2}+\frac{x_F x_B}{i_y^2}\right) = -\frac{F}{144\cdot 10^{-4}}\left(1-\frac{0{,}06\cdot 0{,}12}{3{,}59\cdot 10^{-3}}-\frac{0{,}0467\cdot 0{,}0333}{0{,}48\cdot 10^{-3}}\right) =$$
$$= -291{,}7F.$$

Напряжение в точке A не должно превышать допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma_C]$, а напряжение в точке B не должно превышать допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_P]$, т.е. должны выполняться условия:

$$\sigma_A \le [\sigma_C], \quad \sigma_B \le [\sigma_P],$$

или

$$451{,}6F \le 100 \text{ (а)}, \quad 291{,}7F \le 30 \text{ (б)}.$$

Из (а): $F \le \frac{100}{451{,}6} = 0{,}221$ МН = 221 кН;

из (б): $F \le \frac{30}{291{,}7} = 0{,}103$ МН = 103 кН.

Чтобы одновременно удовлетворить условие прочности и в растянутой и в сжатой зонах колонны, мы должны взять в качестве допускаемой нагрузки меньшую из двух полученных, т.е. $[F]$ = 103 кН.

3.8 Расчет вала при совместном действии изгиба с кручением

(к контрольной задаче №8)

При известной мощности, передаваемой на вал, и числе оборотов вала n скручивающий момент, действующий на вал, определяется так:

$$M_K = K\frac{N}{n}. \tag{3.25}$$

Если мощность N задается в лошадинных силах, а число оборотов n – в об/мин, то K = 716,2 и

$$M_K = 716{,}2\frac{N}{n} \text{ (кГм)}. \tag{3.26}$$

Если мощность N задается в кВт, а число оборотов n – в об/мин, то K = =973,6 и

$$M_K = 973{,}6\frac{N}{n} \text{ (кГм)}. \tag{3.27}$$

Если мощность N задается в кВт, а число оборотов – в рад/с (обычно в этом случае число оборотов обозначается ω), то K = 1 и

$$M_K = \frac{N}{\omega} \text{ (кНм)}. \tag{3.28}$$

Пример № 15. Шкив с диаметром D_1 = 1 м и углом наклона ветвей к горизонту α_1 =40° делает n = 600 об/мин и передает мощность N_1 = 60 кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр $D_2 = D_3$ = 0,8 м и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2=60°, и каждый из них передает мощность $N_1 = N_2 = N_3/2$ (рис. 3.16, а). Требуется подобрать диаметр вала при [σ] = 700 кГс/см^2 = 70 МПа.

1. Выясним, какие виды деформации испытывает вал.

Для этого усилия, которые приложены к шкиву (например, шкиву с диаметром D_1) приведем к оси вала (рис. 3.17). Перенос усилий $2t_1$ и t_1 к оси вала требует приложения таких же усилий в противоположном направлении. Тогда усилия, перечеркнутые одной чертой, образуют пару с моментом $M_1^{'} = 2t_1 D_1/2$, а усилия, перечеркнутые двумя чертами, образуют пару с моментом $M_1^{''} = t_1 D_1/2$. Суммарно эти моменты дают скручивающий момент

$$M_{1K} = M_1^{'} - M_1^{''} = \frac{2t_1 D_1}{2} - \frac{t_1 D_1}{2} = t_1 \frac{D_1}{2}.$$

Кроме того, на вал передается усилие, действующее перпендикулярно оси вала и по величине равное $F_1 = 2t_1 + t_1 = 3t_1$. Скручивающий момент M_{1K} вызывает деформацию кручения, а усилие F_1 – деформацию изгиба. Таким образом, имеем совместное действие изгиба с кручением, и следовательно, для подбора диаметра необходимо использовать гипотезы прочности. Так как вал изготовлен из пластичного материала, воспользуемся третьей гипотезой прочности, согласно которой

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_u^2 + T_Z^2}}{0{,}1[\sigma]}}. \qquad (3.26)$$

Анализируя эту формулу видим, что нам необходимо определить скручивающие моменты, передаваемые на вал каждым шкивом, и выяснить характер распределения крутящих моментов по длине вала, т.е. построить эпюру крутящих моментов (эп. T_Z). Кроме того, для выяснения характера распределения изгибающих моментов по длине вала, т.е. для построения эпюры изгибающих моментов (эп. M_u) нам необходимо определить усилия, которые действуют на вал перпендикулярно оси вала. Имея эп. T_Z и эп. M_u, мы сможем выяснить, в каком сечении совместное действие изгиба и кручения наиболее опасно, т.е. для какого сечения выражение $\sqrt{M_u^2 + T_Z^2}$ будет наибольшим в формуле (3.26). Для этого опасного сечения мы и подберем диаметр.

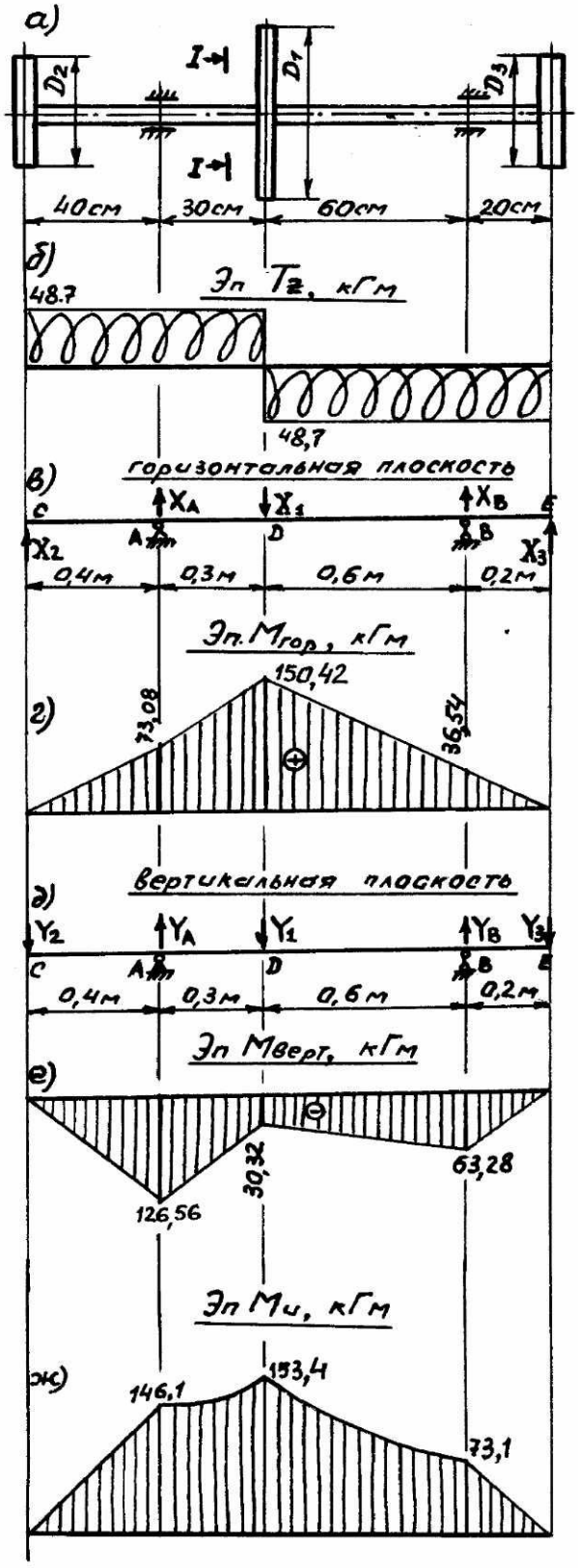


Рис. 3.16

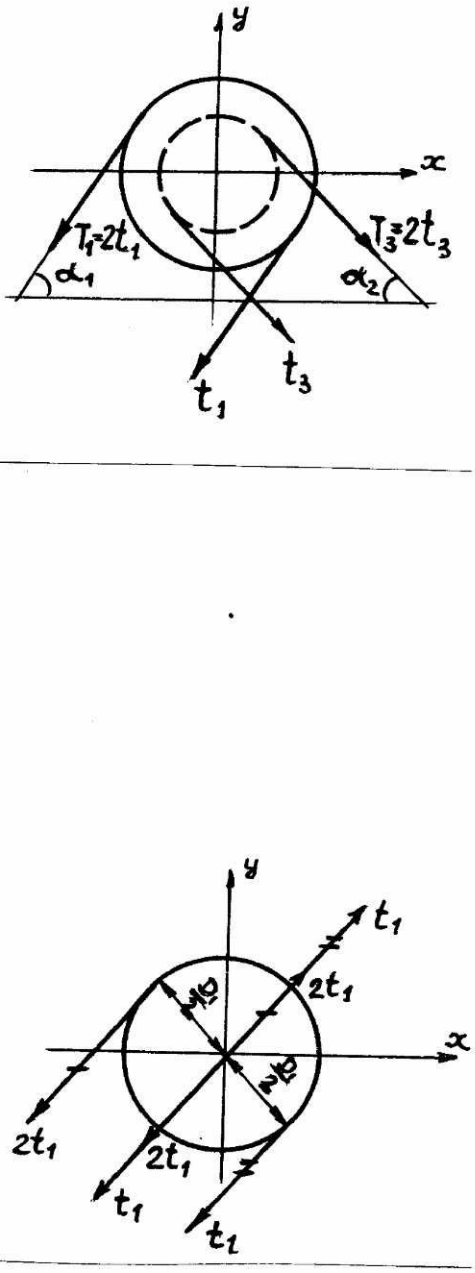


Рис. 3.17

Решение.

1. Определим по формуле (3.24) скручивающие моменты, передаваемые шкивами на вал:

$$T_{Z_1} = 973{,}6\frac{N_1}{n} = 973{,}6\frac{60}{600} = 97{,}4 \text{ кГм} = 974\cdot10^{-3} \text{ кНм},$$

$$T_{Z_2} = 973{,}6\frac{N_2}{n} = 973{,}6\frac{30}{600} = 48{,}7 \text{ кГм} = 487\cdot10^{-3} \text{ кНм}.$$

2. По полученным данным строим эпюру крутящих моментов. Так как знак крутящего момента выбирается произвольно, то примем крутящий момент, возникающий от действия скручивающего момента T_{Z_2} положительным. Тогда эп. T_Z будет иметь вид, указанный на рис. 3.16, б.

3. Определим окружные усилия t_1, t_2 и t_3, воспользовавшись выводом, полученным в пункте 1 настоящей задачи:

$$M_{1K} = t_1\frac{D_1}{2}, \text{ отсюда}$$

$$t_1 = \frac{2M_{1K}}{D_1} = \frac{2\cdot97{,}4}{1} = 194{,}8 \text{ кГ} = 1{,}95 \text{ кН}.$$

Аналогично $t_2 = t_3 = \frac{2M_{2K}}{D_2} = \frac{2\cdot48{,}7}{0{,}8} = 121{,}8$ кГ = 1,22 кН.

4. Определим давления на вал:

а) горизонтальная плоскость

$F_1 = 3t_1 = 3\cdot194{,}8 = 584{,}4$ кГс = 5,84 кН; (см. пункт 1 настоящей задачи);

б) вертикальная плоскость

$F_2 = F_3 = 3t_1 = 3\cdot121{,}8 = 365{,}4$ кГс = 3,65 кН.

5. Так как усилия F_1 и F_2 действуют в разных плоскостях, то спроектируем их на горизонтальную и вертикальную оси (рис. 3.18, а, б).

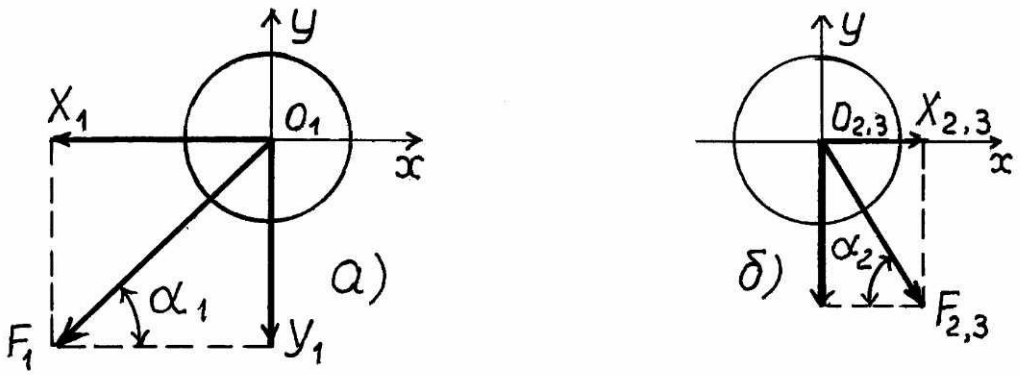


Рис. 3.18

$X_1 = -F\cos\alpha_1 = -584{,}4\cos 40^0 = -584{,}4 \cdot 0{,}766 = -447{,}6$ кГ $= -4{,}48$ кН,

$Y_1 = -F\sin\alpha_1 = -584{,}4\sin 40^0 = -584{,}4 \cdot 0{,}643 = -375{,}8$ кГ $= -3{,}76$ кН,

$X_2 = X_3 = F_2\cos\alpha_2 = 365{,}4\cos 60^0 = 365{,}4 \cdot 0{,}5 = 182{,}7$ кГ $= 1{,}83$ кН,

$Y_2 = Y_3 = -F_2\sin 60^0 = -365{,}4 \cdot 0{,}87 = -316{,}4$ кГ $= -3{,}16$ кН.

Примечание: пункт 5 не выполняют студенты дистанционной формы обучения, т.к. углы наклона ветвей к горизонту для них принимаются $\alpha_1 = 0°$; $\alpha_2 = 90°$.

6. Построим эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил (эп. $M_{ГОР}$) и от вертикальных сил (эп. $M_{ВЕРТ}$). Рассмотрим горизонтальную плоскость. Для этого представим вал как балку на двух опорах (опоры ставим в местах установки подшипников) и нагрузим ее силами, действующими в горизонтальной плоскости. Так как силы X_1 и X_2, X_3 имеют разные знаки, то и приложить на балку их надо так, чтобы они действовали в разные стороны. Например, X_1 направить вниз, а X_2 и X_3 – вверх (см. рис. 3.16, в) или наоборот, для решения задачи это несущественно.

Определим реакции опор X_A и X_B (рис. 3.16, в):

$\sum M_A = 0$; $-X_2 \cdot 0{,}4 - X_1 \cdot 0{,}3 + X_B \cdot 0{,}9 + X_3 \cdot 1{,}1 = 0$;

$$X_B = \frac{182{,}7 \cdot 0{,}4 + 447{,}6 \cdot 0{,}3 - 182{,}7 \cdot 1{,}1}{0{,}9} = 7{,}1 \text{ кГ} = 71 \cdot 10^{-3} \text{ кН}.$$

$\sum M_B = 0$; $-X_2 \cdot 1{,}3 - X_A \cdot 0{,}9 + X_1 \cdot 0{,}6 + X_3 \cdot 0{,}2 = 0$;

$$X_A = \frac{-182{,}7 \cdot 1{,}3 + 447{,}6 \cdot 0{,}6 + 182{,}7 \cdot 0{,}2}{0{,}9} = 75{,}1 \text{ кГ} = 751 \cdot 10^{-3} \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum X = 0;\ 182{,}7 + 75 - 447{,}6 + 7 + 182{,}7 = 0;$$

$$447{,}6 - 447{,}6 = 0.$$

Определим изгибающие моменты в сечениях C, A, D, B, E, т.е. на границах силовых участков

$M_C = 0$; $M_A = 182{,}7 \cdot 0{,}4 = 73{,}1$ кГм $= 0{,}731$ кНм;

$M_D = 182{,}7 \cdot 0{,}7 + 75{,}1 \cdot 0{,}3 = 150{,}4$ кГм $= 1{,}5$ кНм;

$M_E = 0$; $M_B = 182{,}7 \cdot 0{,}2 = 36{,}5$ кГм $= 0{,}365$ кНм.

По полученным результатам строим эпюру $M_{ГОР}$ (рис. 3.16, г). Аналогично рассмотрим вертикальную плоскость. Покажем вал как балку на двух опорах и нагрузим ее силами Y_1, Y_2 и Y_3 (рис. 3.16, д).

Определим реакции опор Y_A и Y_B:

$\sum M_A = 0$; $Y_2 \cdot 0{,}4 - Y_1 \cdot 0{,}3 + Y_B \cdot 0{,}9 - Y_3 \cdot 1{,}1 = 0$,

$$Y_B = \frac{-316{,}4 \cdot 0{,}4 + 375{,}8 \cdot 0{,}3 + 316{,}4 \cdot 1{,}1}{0{,}9} = 371{,}4 \text{ кГ} = 3{,}714 \text{ кН}.$$

$\sum M_B = 0$; $Y_2 \cdot 1{,}3 - Y_A \cdot 0{,}9 + Y_1 \cdot 0{,}6 - Y_3 \cdot 0{,}2 = 0$,

$$У_A = \frac{316,4 \cdot 1,3 + 375,8 \cdot 0,6 - 316,4 \cdot 0,2}{0,9} = 637,2 \text{ кГ} = 6,372 \text{ кН}.$$

Проверка:

$\sum У = 0$; –316,4 + 637,2 – 375,8 + 371,4 – 316,4 = 0,

1008,6 – 1008,6 = 0.

Определим изгибающие моменты в сечениях C, A, D, B, E.

$M_C = 0$; $M_A = -316,4 \cdot 0,4 = -126,6$ кГм = – 1,266 кНм;

$M_D = -316,4 \cdot 0,7 + 637,2 \cdot 0,3 = -30,3$ кГм = – 0,303 кНм;

$M_E = 0$; $M_B = -316,4 \cdot 0,2 = -63,3$ кГм = –0,633 кНм.

По полученным результатам строим эпюру $M_{ВЕРТ}$ (рис. 3.16, е).

7. На основании эпюр $M_{ГОР}$ и $M_{ВЕРТ}$ строим эпюру суммарного момента M. Суммарный момент в любом сечении вала можно определить как геометрическую сумму моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 3.19).

$M = \sqrt{M_Г^2 + M_B^2}$, тогда $M_C = 0$;

$M_A = \sqrt{73,1^2 + 126,6^2} = 146,1$ кГм = 1,46 кНм,

$M_D = \sqrt{150,4^2 + 30,3^2} = 153,4$ кГм = 1,53 кНм,

$M_B = \sqrt{36,5^2 + 63,3^2} = 73,1$ кГм = 0,73 кНм,

$M_E = 0$.

Суммарная эпюра будет прямолинейной на тех участках вала, где $M_{ГОР}$ и $M_{ВЕРТ}$ одновременно убывают или одновременно возрастают (по абсолютной величине). На тех участках где $M_{ГОР}$ возрастает, а $M_{ВЕРТ}$ убывает (или наоборот), эпюра суммарных моментов будет очерчиваться кривой линией без экстремумов. Эпюра суммарных моментов показана на рис. 3.16, ж.

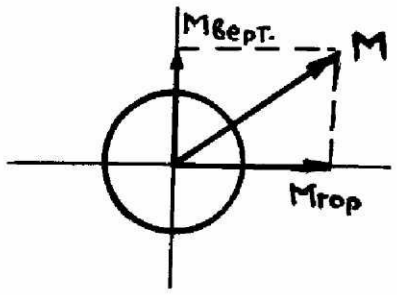


Рис. 3.19

8. Определим опасное сечение. Таковым, очевидно, будет сечение в месте посадки шкива с диаметром D_1, т.к. здесь мы имеем максимальный суммарный момент M_u = 153,4 кГм и T_K = 48,7 кГм (по кручению все сечения вала равноопасны, т.к. во всех сечениях крутящий момент одинаков).

9. Определим диаметр вала по формуле (3.26), взятой из конспекта [2]:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(153,4^2 + 48,7^2) \cdot 10^4}}{0,1 \cdot 700}} = \sqrt[3]{\frac{160,9 \cdot 10^2}{0,1 \cdot 700}} = 6,13 \text{ см}.$$

Округляем диаметр до стандартной величины в большую сторону d = 70 мм.

3.9 Устойчивость центрально сжатых стержней

(к контрольной задаче № 9)

Критическая нагрузка при расчете на устойчивость аналогична разрушающей нагрузке при расчете на прочность. Если мы хотим создать известный запас устойчивости, должно быть соблюдено условие:

$$F \le [F], \qquad [F] = \frac{F_{KP}}{K_y}, \tag{3.27}$$

где F – действующая нагрузка;

F_{KP} – критическая нагрузка;

$[F]$ – допускаемая нагрузка;

K_Y – коэффициент запаса устойчивости, для стали обычно берут $K_Y = 1{,}7 \div 3$.

Критическая сила определяется или по формуле Эйлера:

$$F_{KP} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2} \tag{3.31}$$

или по формуле Ясинского: $$F_{KP} = F(a - b\lambda), \tag{3.32}$$

где E – модуль Юнга;

$J_{\min}$ – осевой момент инерции поперечного сечения, минимальный;

μ – коэффициент приведения длины, зависящий от способа крепления концов стержня. Значения коэффициента μ в формулах (3.31) и (3.32) в зависимости от способа закрепления приведены в таблице 3.1;

l – длина стержня;

a и b – эмпирические коэффициенты Ясинского (для стали имеют следующие значения: a = 310 МПа, b = 1,14 МПа);

λ – гибкость стойки, определяемая по формуле

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}, \tag{3.33}$$

где $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$ – минимальный радиус инерции.

В зависимости от гибкости стойки применяют или формулу Эйлера (3.31), или формулу Ясинского (3.32). Так, если гибкость стойки больше или равна предельной гибкости, т.е. $\lambda \ge \lambda_{ПРЕД}$, то для определения критической силы применяют формулу (3.28). В свою очередь предельная гибкость определяется так:

$$\lambda_{ПРЕД} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{ПЦ}}}, \tag{3.34}$$

где $\sigma_{ПЦ}$ – предел пропорциональности материала стойки.

Если же гибкость стойки меньше предельной, а напряжения не превышают предела текучести, то для определения критической силы применяют формулу (3.32).

Таблица 3.1

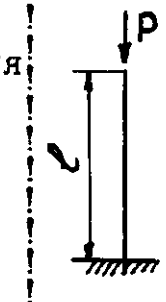
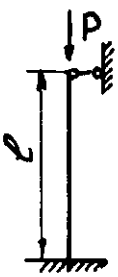
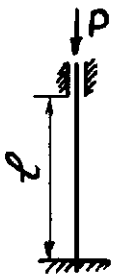
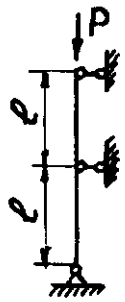
Способ закрепления концов стержня					
μ	2	I	0,7	0,5	I

Таблица 3.2

Гибкость	φ для				
	сталей: Ст. 1, Ст. 2, Ст. 3, Ст. 4.	сталей Ст. 5	стали повышенного качества	чугуна	дерева
1	2	3	4	5	6
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,37	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Часто возникает необходимость в первую очередь определять не критическую силу, а по заданной нагрузке выбрать поперечное сечение стойки так, чтобы удовлетворялось условие устойчивости. Для этого служит формула, справедливая при любой гибкости:

$$\sigma = \frac{A}{F} \le \varphi[\sigma_C], \qquad (3.35)$$

где φ – коэффициент понижения основного допускаемого напряжения на сжатие.

Значения коэффициента φ в зависимости от гибкости приведены в таблице 3.2.

Пример № 16. Определить критическую силу для стального стержня ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) прямоугольного сечения (рис. 3.20), если размеры сечения: b=0,06 м, h = 0,1 м, длина стержня l = 3,5 м.

Решение. Определяем гибкость по формуле (3.33): $\lambda = \dfrac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$.

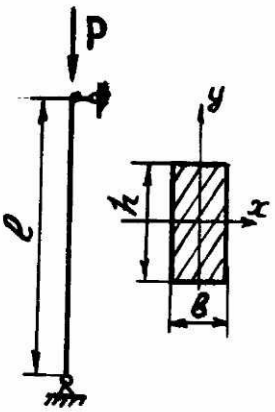


Рис. 3.20

Вычисляем $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{J_{\min}}{A}} =$

$$= \sqrt{\frac{h \cdot b^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{0{,}06}{\sqrt{12}} = 0{,}0173 \text{ м}.$$

Коэффициент приведения длины μ=1 (см. табл. 3.1). Тогда $\lambda = \dfrac{3{,}5}{0{,}0173} \approx 202$.

Вычисляем предельную гибкость для стали по формуле (3.34)

$$\lambda_{ПРЕД} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{ПЦ}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Так как $\lambda > \lambda_{ПРЕД}$, то критическую силу надо считать по формуле Эйлера (3.31):

$$F_{КР} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 180 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 3{,}5)^2} = 289{,}7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 290 \text{ кН},$$

где $J_{\min} = \dfrac{b^3 h}{12} = \dfrac{0{,}06^3 \cdot 0{,}1}{12} = 180 \cdot 10^{-8}$ м^4.

Расширим эту задачу и определим критическое напряжение:

$$\sigma_{КР} = \frac{F_{КР}}{A} = \frac{F_{КР}}{bh} = \frac{290 \cdot 10^3}{0{,}06 \cdot 0{,}1} = 48{,}3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48{,}3 \text{ МПа}.$$

Таким образом, при гибкости стержня λ = 202 критическим оказалось напряжение, не только значительно меньшее предела пропорциональности

($\sigma_{ПЦ}$ = 200 МПа), но в три с лишним раза меньше допускаемого напряжения ($[\sigma]$ = 160 МПа).

Пример № 17. Стальной стержень длиной l = 3 м сжимается силой F = =500 кН (рис. 3.21). Требуется: 1) найти размеры поперечного сечения при допускаемом напряжении на простое сжатие $[\sigma]$ = 160 МПа; 2) найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

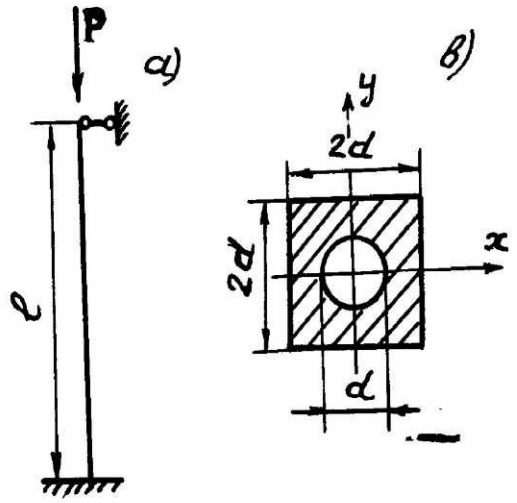


Рис. 3.21

Решение. Из формулы (3.35) имеем

$$A \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]}.$$

Так как здесь ни площадь F, ни коэффициент снижения допускаемого напряжения φ неизвестны, то расчет будем вести методом последовательного приближения.

В первом приближении, зная, что коэффициент φ принимает значения от нуля до единицы, зададимся значением φ_1 = 0,5. Чтобы на каждом этапе проводить меньше рутинной работы, выразим гибкость стойки λ через площадь сечения A, т.е.

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}.$$

Минимальный момент инерции:

$$J_{\min} = \frac{(2d)^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{16d^4}{12} - \frac{3{,}14d^4}{64} = 1{,}28d^4.$$

Площадь поперечного сечения составного сечения

$$A = 4d^2 - \frac{\pi d^2}{4} = 4d^2 - \frac{3{,}14d^2}{4} = 3{,}215d^2. \qquad (3.36)$$

Откуда

$$d = \sqrt{\frac{A}{3{,}215}}. \qquad (3.37)$$

Минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{1{,}28d^4}{3{,}215d^2}} = 0{,}66d = 0{,}66\sqrt{\frac{A}{3{,}215}}.$$

Тогда для гибкости стойки получим формулу

$$\lambda = \frac{0{,}7 \cdot 3\sqrt{3{,}215}}{0{,}66\sqrt{A}} = \frac{5{,}73}{\sqrt{A}}. \qquad (3.38)$$

Первое приближение. φ_1 = 0,5. Определим площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{500 \cdot 10^6}{0{,}5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 6{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2.$$

Определяем гибкость стойки по формуле (3.38)

$$\lambda = \frac{5{,}73}{\sqrt{6{,}25 \cdot 10^{-3}}} = 72{,}5.$$

Обратимся к таблице 3.2 и уточним значение коэффициента φ (обозначим его φ_1') в соответствии с полученной гибкостью $\lambda = 72{,}5$. Так как точно для этой гибкости значения коэффициента нет, определим его воспользовавшись правилом линейного интерполирования. Делается это следующим образом: выпишем значения коэффициентов φ (из второго столбца (табл. 3.2) для сталей Ст.1, Ст.2, Ст.3, Ст.4, соответствующих гибкостям $\lambda = 70$ и $\lambda = 80$:

λ	φ
70	0,81
80	0,75

Замечаем, что при изменении λ на 10 единиц значение φ изменилось на 0,06. Наша же гибкость отличается от $\lambda = 70$ на 2,5 единицы. Какое изменение φ приходится на эти 2,5 единицы, мы не знаем и обозначим через x.

Итак, составляем пропорцию 10: 2,5 = 0,06 : x. Отсюда:

$$x = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}06}{10} \approx 0{,}02.$$

Таким образом, при изменении λ на 2,5 единицы φ изменяется на 0,02. Тогда $\varphi_1' = 0{,}81 - 0{,}02 = 0{,}79$.

Сравниваем φ_1 и φ_1'

$$\Delta\varphi_1 = \frac{|\varphi_1 - \varphi_1'|}{\varphi_1} \cdot 100\% = \frac{|0{,}5 - 0{,}79|}{0{,}5} \cdot 100\% = 58\%.$$

Допускается расхождение не более, чем на 5%; у нас же значительно больше 5%, поэтому переходим ко второму приближению:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}79}{2} = 0{,}645.$$

Второе приближение. Определим площадь поперечного сечения

$$A = \frac{500 \cdot 10^3}{0{,}645 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2.$$

Определяем гибкость стойки

$$\lambda = \frac{5{,}73}{\sqrt{4{,}85 \cdot 10^{-3}}} = 82{,}3.$$

Обращаемся к таблице 3.2 и уточняем значение φ_2. Действуем точно так же, как на первом этапе приближения.

$$\frac{10}{2,3}=\frac{0,06}{x},\ x=\frac{2,3\cdot 0,06}{10}=0,01.$$

$$\varphi_2^{'}=0,75-0,01=0,74.$$

Сравним φ_2 и $\varphi_2^{'}$

$$\Delta\varphi_2=\frac{|0,645-0,74|}{0,645}\cdot 100\%=14,7\%>5\%.$$

Переходим к третьему приближению.

$$\varphi_3=\frac{\varphi_2+\varphi_2^{'}}{2}=\frac{0,645+0,74}{2}=0,7.$$

Третье приближение. Определим площадь поперечного сечения

$$A=\frac{500\cdot 10^3}{0,7\cdot 160\cdot 10^6}=4,46\cdot 10^{-3}\ \text{м}^2.$$

Определяем гибкость стойки

$$\lambda=\frac{5,73}{\sqrt{4,46\cdot 10^{-3}}}=85,6.$$

Обращаемся к таблице 3.2 и уточняем значение φ_3.

$$\frac{10}{5,6}=\frac{0,06}{x},\ x=\frac{5,6\cdot 0,06}{10}\approx 0,03,$$

$$\varphi_3^{'}=0,75-0,03=0,72.$$

Сравним φ_3 и $\varphi_3^{'}$:

$$\Delta\varphi_3=\frac{|0,7-0,72|}{0,7}\cdot 100\%=2,86\%<5\%.$$

Отличие $\Delta\varphi$ в пределах допустимого.

Принимаем стойку площадью $A = 4,46\cdot 10^{-3}$ м^2. Размер d этой стойки определим из формулы (3.37):

$$d=\sqrt{\frac{F}{3,215}}=\sqrt{\frac{4,46\cdot 10^{-3}}{3,215}}=0,0373\ \text{м},$$

а гибкость $\lambda = 85,6$.

Определим величину критической силы.

В примере № 16 мы определили предельную гибкость для стали $\lambda_{ПРЕД}=100$. Таким образом, гибкость нашей стойки $\lambda = 85,6$ меньше предельной, и следовательно, критическую силу надо определять по формуле Ясинского (3.29):

$$F_{КР}=A(a-b\lambda)=4,46\cdot 10^{-3}(310-1,14\cdot 85,6)\cdot 10^6=948\ \text{кН}.$$

Определим коэффициент запаса устойчивости на основании формулы (3.27):

$$K_У=\frac{F_{КР}}{F}=\frac{948}{500}=1,90.$$

3.10 Расчет статически неопределимых систем методом сил

(к контрольной задаче № 10)

Пример № 18. Для заданной статически неопределимой рамы (рис. 3.22, а) при заданных размерах и нагрузках вертикальные элементы которой имеют осевой момент инерции J_x горизонтальные – $2J_x$, требуется: 1) установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему; 2) написать канонические уравнения; 3) построить эпюры от единичной силы и заданных нагрузок; 4) найти перемещения; 5) найти величину лишних неизвестных; 6) построить окончательные эпюры N, Q и M.

Решение.

1. Для заданной системы устанавливаем *степень статической неопределимости*: имеются *четыре* неизвестных: R_A, H_A, R_B и H_B (рис. 3.22, а) и *три* уравнения статики: $\Sigma X = 0$; $\Sigma У = 0$; $\Sigma M = 0$. Тогда степень статической неопределимости (ССН) будет равна:

$$\text{ССН} = n - y = 4 - 3 = 1,$$

где n – число неизвестных; y – число уравнений статики, которые можно составить для заданной рамы.

Следовательно, для решения необходимо составить одно дополнительное уравнение – *условие совместности перемещений*, о чем будет сказано ниже.

Выбираем основную систему. Для этого отбрасываем одну «лишнюю», с точки зрения статики, связь H_B и заменяем ее на неизвестную X_1 (рис. 3.22, б).

2. Составляем условие совместности перемещений – каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0, \qquad (3.36)$$

выражающее мысль, что перемещение точки В – точки приложения «лишней» неизвестной X_1 по ее направлению, вызванное этой неизвестной, и перемещение этой же точки в том же направлении, вызванное внешними нагрузками, равно нулю.

3. Построение эпюр. 3.1. Построение эпюры от единичной силы $\overline{X_1} = 1$, приложенной вместо неизвестной силы X_1. Определение опорных реакций (3.22, в):

$$\Sigma X = 0;\ \overline{X_1} - \overline{H_A} = 0;\ \overline{H_A} = \overline{X_1} = 1;$$

$$\Sigma M_A = 0;\ -\overline{R_B} \cdot l + \overline{X_1} \cdot l = 0;\ \overline{R_B} = \overline{X_1} = 1.$$

$$\sum M_C = 0;\ -\overline{R_A} \cdot l + \overline{X_1} \cdot l = 0;\ \overline{R_A} = \overline{X_1} = 1.$$

Проверка: $\Sigma У = 0;\ \overline{R_A} - \overline{R_B} = 0.$

$$1 - 1 = 0.$$

Построение единичной эпюры: Участок АС: $0 \le z \le l$.

$$M_{x_1} = \overline{R_A} \cdot z;\ \text{при } z = 0,\ M_{x_1} = 0;\ z = l;\ M_{x_1} = R_A \cdot l = l.$$

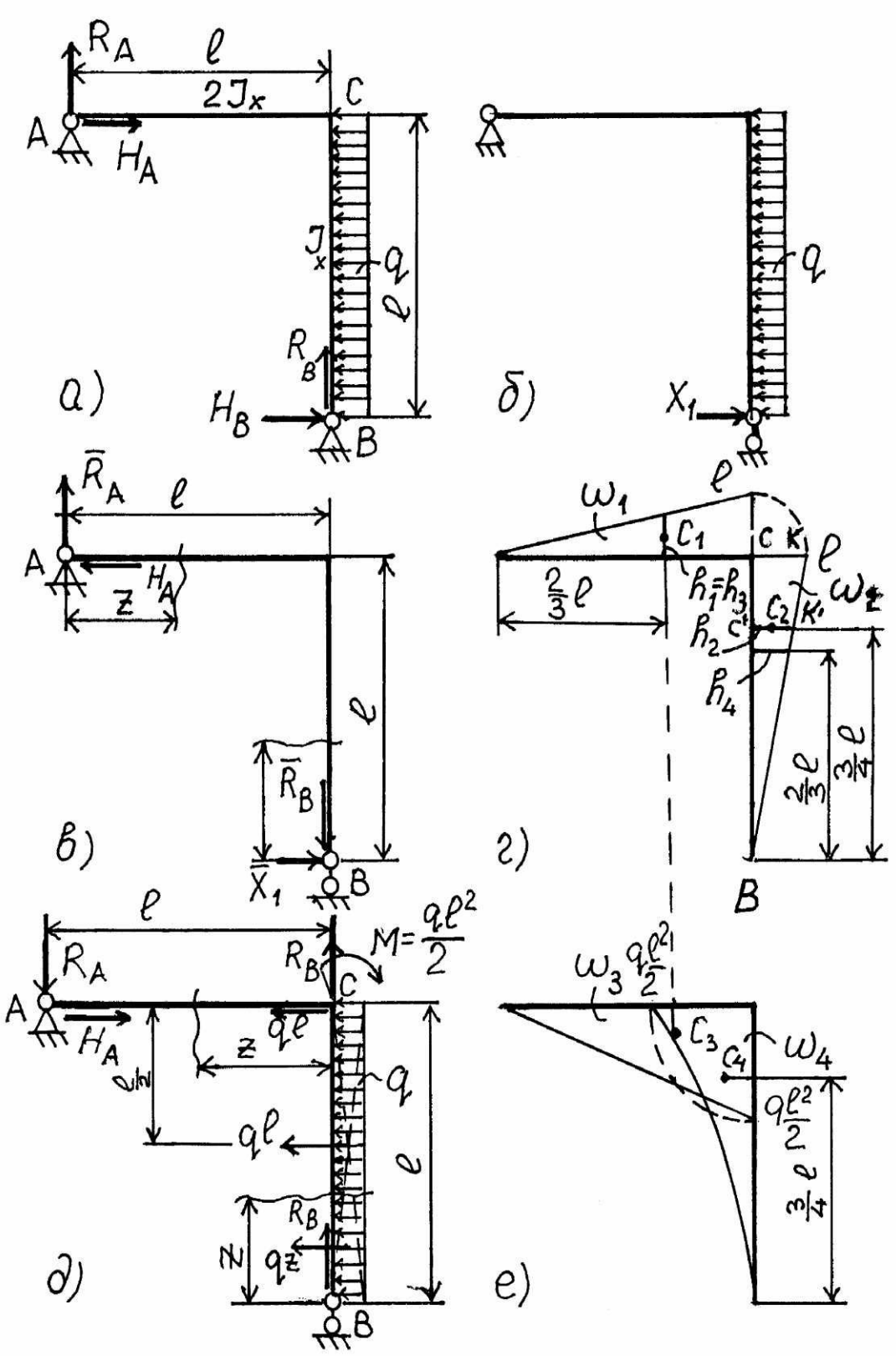

а)
б)
в)
г)
д)
е)
A
B
C
K
R_A
H_A
H_B
R_B
$\bar{R}_A$
$\bar{R}_B$
X_1
$\bar{X}_1$
$2J_x$
J_x
q
ℓ
z
$M=\frac{q\ell^2}{2}$
$q\ell$
$q\frac{\ell^2}{2}$
$q\frac{z^2}{2}$
ω_1
ω_2
ω_3
ω_4
C_1
C_2
C_3
C_4
$h_1=h_3$
h_2
h_4
$\frac{2}{3}\ell$
$\frac{3}{4}\ell$
$\frac{1}{2}\ell$

Рис. 3.22

Участок BC: $0 \le z \le l$;

$$M_{x_1} = x \cdot z;$$

$$z = 0,\ M_{x_1} = 0;\ z = l,\ M_{x_1} = l.$$

Выбираем масштаб и строим единичную эпюру (рис. 3.22, г).

3.2. Построение эпюры от заданной нагрузки. Определение опорных реакций от заданных нагрузок (рис. 3.22, д):

$$\Sigma X = 0;\ H_A - ql = 0;\ H_A = ql.$$

$$\Sigma M_A = 0;\ R_B \cdot l - ql^2/2 = 0;\ R_B = ql/2.$$

$$\Sigma M_B = 0;\ R_A \cdot l - ql^2/2 = 0;\ R_A = ql/2.$$

Проверка: $\Sigma Y = 0;\ -R_A + R_B = 0;$

$$-ql/2 + ql/2 = 0.$$

Построение грузовой эпюры. Участок BC: $0 \le z \le l$;

$$M_x = -qz \cdot z/2 = -qz^2/2;$$

$$z = 0,\ M_x = 0;\ z = l,\ M_x = ql^2/2.$$

Участок CB: $0 \le z \le l$.

Приводим все силы к узлу C: равнодействующая от распределенной нагрузки ql при приведении к узлу C даст в этом узле силу ql и момент M_1 от силы ql с плечом $l/2$, т.е. $M_1 = ql^2/2$. Реакция опоры B является скользящим вектором, и поэтому R_B просто переместится в точку C (рис. 3.22, д).

Тогда имеем: $M_x = -M_1 + R_A \cdot z$;

$$z = 0,\ M_x = -M_1 = -ql^2/2;$$

$$z = l,\ M_x = -ql^2/2 + ql^2/2 = 0.$$

Выбираем масштаб и строим грузовую эпюру (рис. 3.22, е).

Проверка: на концах элементов A и B значения изгибающих моментов равны нулю; в узле C моменты на обоих элементах равны друг другу, т.е. узел C должен находиться в равновесии.

4. Определяем перемещения δ_{11} и Δ_{1P} по способу Верещагина.

4.1. Определяем перемещение δ_{11} перемножением единичной эпюры саму на себя (рис. 3.22, г):

$$\delta_{11} = \frac{\omega_1 h_1}{E(2J_x)} + \frac{\omega_2 h_2}{EJ_x} = \frac{\left(\frac{1}{2} l \cdot l\right)\frac{2}{3} l}{E(2J_x)} + \frac{\left(\frac{1}{2} l \cdot l\right)\frac{2}{3} l}{EJ_x} = \frac{l^3}{2EJ_x}. \qquad (3.40)$$

При этом для вычисления δ_{11} и Δ_{1P} используем данные Приложения 4. Например, из подобия треугольников BCK и $BC'K'$ имеем для нахождения ординаты h треугольника, у которого центр тяжести имеет координату $z_C = 3l/4$. Тогда имеем

$$h_4/l = (3l/4)/l;\ \text{отсюда}\ h_4 = 3l/4.$$

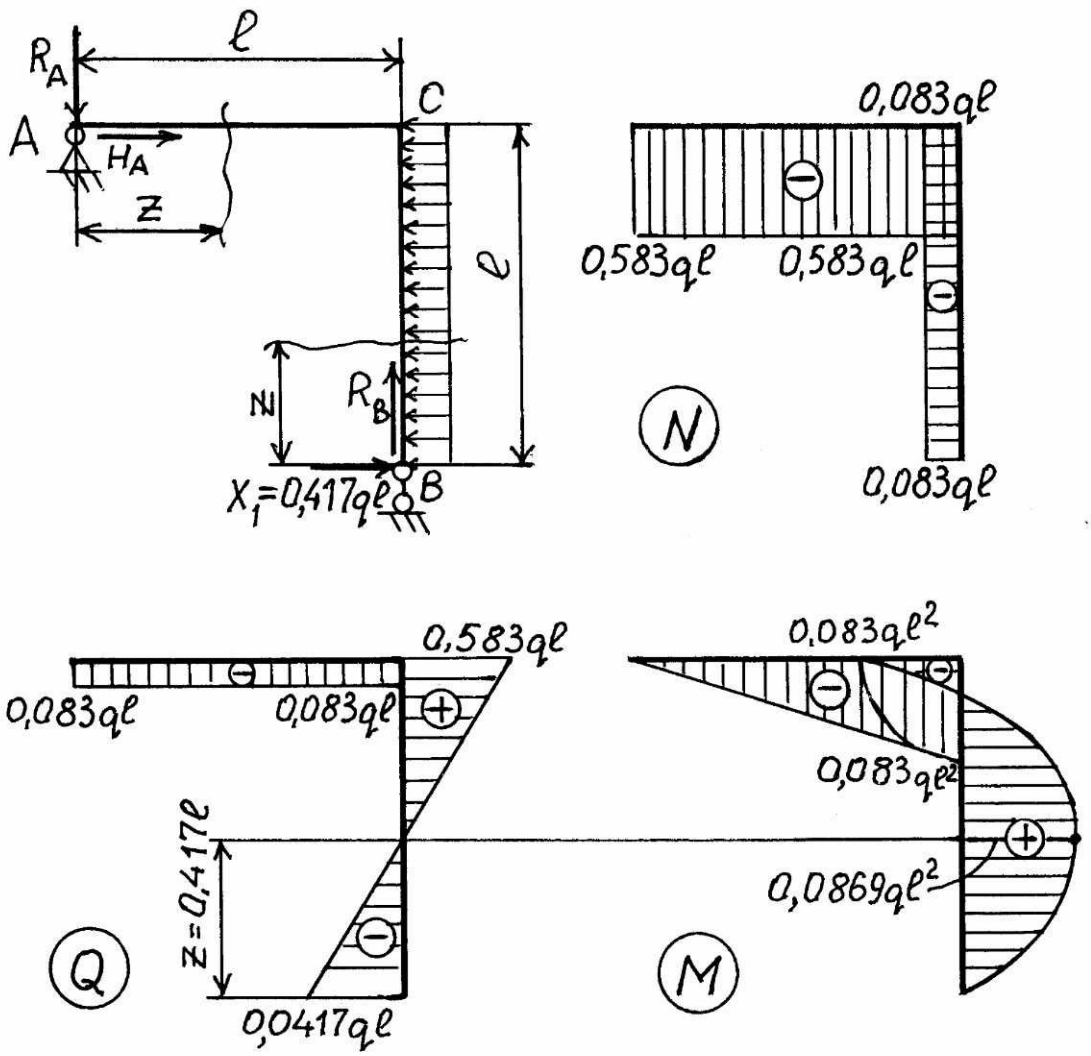


Рис. 3.23

4.2. Определение перемещения Δ_{1F} выполняем перемножением эпюры от заданных нагрузок M_{x_F} на единичную эпюру M_{x_1}:

$$\frac{\omega_3 h_3}{E(2J_x)}+\frac{\omega_4 h_4}{EJ_x}=\frac{-\left(\frac{1}{2}\frac{ql^2}{2}\cdot l\right)\frac{2}{3}l}{E(2J_x)}+\frac{-\left(\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2}\cdot l\right)\frac{3}{4}l}{EJ_x}=-\frac{5ql^4}{24EJ_x}. \qquad (3.41)$$

Определение лишней неизвестной. Подставив выражения (3.40) и (3.41) в (3.39) получим:

$$\frac{l^3}{E(2J_x)}X_1-\frac{5ql^4}{24EJ_x}=0.$$

Тогда: $X_1=5ql/12=0{,}417ql$. (3.42)

Статическая неопределимость раскрыта.

5. Построение окончательных эпюр N, Q и M.

С учетом значения X_1 определяем опорные реакции и строим эпюры (рис. 3.23).

$$\Sigma X = 0;\ H_A + X_1 - ql = 0;\ H_A = -X_1 + ql = -0{,}417ql = 0{,}583ql.$$

$$\sum M_A = 0;\ -\frac{ql^2}{2} + X_1 l + R_B l = 0;\ R_B = \frac{\frac{ql^2}{2} - 0{,}417ql^2}{l} = 0{,}083ql.$$

$$\Sigma M_C = 0;\ X_1 l - ql\frac{l}{2} + R_A l = 0;\ R_A = \frac{-X_1 l + \frac{ql^2}{2}}{l} = 0{,}083ql.$$

Проверка: $\Sigma Y = 0;\ -R_A + R_B = 0;$

$$-0{,}083\ ql + 0{,}083\ ql = 0.$$

Построение эпюр N, Q и M.

Участок АС: $0 \le z \le l$.

$N = -H_A = -0{,}583ql;\ Q = -R_A = -0{,}083\ ql;\ M = -R_A z,$

$z - 0;\ M = 0;\ z - l;\ M = -0{,}083\ ql^2.$

Участок ВС: $0 \le z \le l$.

$$N = -R_B = -0{,}083\ ql; \quad Q = -X_1 + qz; \quad M = X_1 z - \frac{qz^2}{2};$$

$$z - 0; \quad Q = -X_1 = -0{,}417ql; \quad M = 0.$$

$$z - l; \quad Q = -0{,}417ql + ql = 0{,}583ql; \quad M = 0{,}417ql \cdot l - \frac{ql^2}{2} = -0{,}083ql^2.$$

На участке BC эпюра Q пересекает элемент (стержень) и меняет знак с (+) на (−), следовательно, на эпюре M в этом сечении – экстремум максимум.

Исследование на экстремум:

$$Q = 0;\ -X_1 + qz = 0;$$

$$z = \frac{X_1}{q} = \frac{0{,}417ql}{q} = 0{,}417l;$$

$$M_{\max} = 0{,}417ql \cdot 0{,}417l - \frac{q}{l}(0{,}417l)^2 = 0{,}0869ql^2.$$

Выбираем масштаб и строим окончательные эпюры N, Q и M.

3.11 Задачи динамики в сопротивлении материалов

(к контрольной задаче № 11)

Пример № 19. На двух балках двутаврового сечения №16 (рис. 3.24) установлен двигатель весом Q = 2,1 т, делающий n = 400 об/мин. Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя, равна H = 1,1 т. Собственный вес балок и силы сопротивления можно не учитывать. Требуется найти: 1) частоту собственных колебаний ω_0; 2) частоту изменения возмущающей силы ω; 3) коэффициент

нарастания колебаний $\beta = 1/\left(1-\omega^2/\omega_0^2\right)$ (если коэффициент β, определяемый по этой формуле, окажется отрицательным, то в дальнейшем расчете следует учитывать его абсолютную величину); 4) динамический коэффициент $K_Д = 1 + H_\beta / Q$; 5) наибольшее нормальное напряжение в балках $\sigma_Д = K_Д \cdot \sigma_{CT}$.

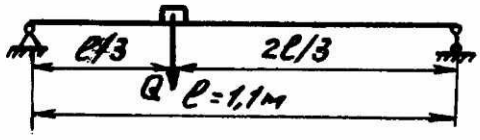


Рис. 3.24

1. Определим частоту собственных колебаний ω_0. Для упругих систем с одной степенью свободы без учета собственной массы ω_0 определяется по формуле:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{y_{CT}}},$$

где y_{CT} – перемещение точки приложения веса двигателя при статическом действии этого веса;

g – ускорение силы тяжести, 981 см/с^2.

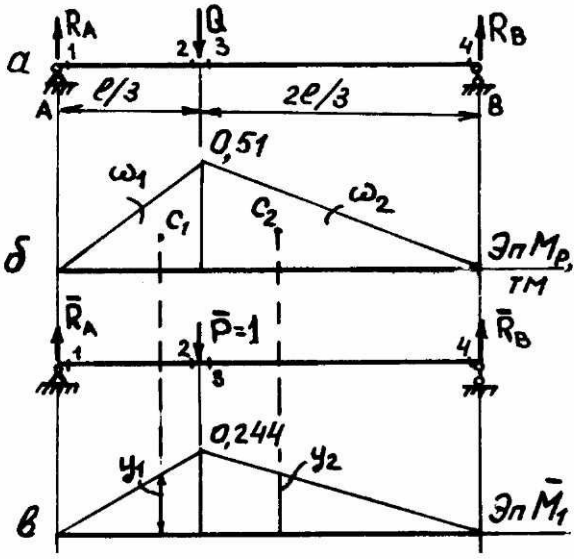


Рис. 3.25

Определим y_{CT}, воспользовавшись методом сил.

Строим эпюру M_F (грузовую): Определим реакции опор (рис. 3.25) от действия силы Q: $\sum M_B = 0$;

$$-R_A l + Q\frac{2l}{3} = 0, \quad R_A = \frac{2}{3}Q,$$

$$\sum M_A = 0; \; -Q\frac{l}{3} + lR_B = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{3}Q.$$

Применив метод характерных сечений 1, 2, 3, 4, получим:

$$M_1 = 0, \; M_2 = M_3 = R_A\frac{l}{3} = \frac{2}{3}Q\frac{l}{3} = \frac{2}{9}\cdot 2{,}1\cdot 1{,}1 = 0{,}51 \text{ тм}, \; M_4 = 0.$$

Строим грузовую эпюру.

Определим реакции опор от действия единичной силы $\overline{F} = 1$:

$$\sum M_A = 0; \; -\overline{F}\frac{l}{3} + \overline{R}_B l = 0; \; \overline{R}_B = \frac{1}{3}.$$

$$\sum M_B = 0; \; -\overline{R}_A l + \overline{F}\frac{2}{3}l = 0; \; \overline{R}_A = \frac{2}{3}.$$

Строим эпюру $\overline{M}_1$ (единичную):

$M_1 = 0$; $M_2 = M_3 = \overline{R}_A \cdot \frac{l}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} = \frac{2}{9} l =$ 0,244; $M_4 = 0$, (рис. 3.25, в)

и вычислим статический прогиб, используя способ Верещагина:

$$y_{CT} = \sum \frac{\Omega_i y_i}{EJ_x},$$

где Ω_i – площади составляющих грузовой эпюры;

y_i – ординаты единичной эпюры под центрами тяжести составляющих площадей грузовой эпюры;

$E = 2 \cdot 10^6$ кГс/см^2 – модуль Юнга;

J_x – осевой момент инерции сечения.

Для двух балок двутаврового сечения №16 $J_x = 2 \cdot 873$ см^4 (см. Приложение 1).

$$y_{CT} = \frac{1}{EJ_x}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot 0{,}51 \cdot 10^5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}244 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2l}{3} \cdot 0{,}51 \cdot 10^5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}244\right) = \frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 873} \times$$

$$\times \left(\frac{110}{2 \cdot 3} 0{,}51 \cdot 10 \frac{52}{3} 0{,}244 + \frac{2 \cdot 110}{2 \cdot 3} 0{,}51 \cdot 10 \frac{52}{3} 0{,}244\right) = 0{,}013 \text{ см},$$

тогда $$\omega_0 = \sqrt{\frac{981}{0{,}013}} = 274 \text{ 1/с}.$$

2. Определим частоту изменения возмущающей силы:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 400}{30} = 41{,}9 \text{ 1/с}.$$

3. Определим коэффициент нарастания колебаний:

$$\beta = \frac{1}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{1}{1 - 41{,}9^2 / 274^2} = 1{,}024.$$

4. Определим динамический коэффициент

$$K_Д = 1 + H \cdot \beta / Q = 1 + 1{,}1 \cdot 1{,}024 / 2{,}1 = 1{,}54.$$

5. Определим наибольшее нормальное динамическое напряжение в балке

$$\sigma_Д = K_Д \cdot \sigma_{CT} = K_Д \frac{M_{\max}}{W},$$

где $M_{\max}$ максимальный изгибающий момент при действии силы Q статически, т.е. $M_{\max} = M_{F,\max} = 0{,}51$ тм (рис. 3.25, б);

W_x – момент сопротивления сечения. Для двух балок двутаврового сечения №16 $W = 2 \cdot 109$ (см^3) (см. Приложение 1). Окончательно получим:

$$\sigma_Д = 1{,}54 \frac{0{,}51 \cdot 10^5}{2 \cdot 109} = 360 \text{ кГс/см}^2 = 36 \text{ МПа}.$$

3.12 Расчет на прочность при переменных напряжениях

(к контрольной задаче № 12)

Теории прочности, разработанные и достаточно проверенные на опытах при постоянных напряжениях, непосредственно не применимы к случаю переменных напряжений. В настоящее время этот вопрос еще недостаточно разрешен. Практически в расчетах при плоском напряженном состоянии, характеризуемом нормальным напряжением σ и касательным напряжением τ, для определения коэффициента запаса прочности используется следующая зависимость:

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n_\sigma^2}+\frac{1}{n_\tau^2}, \tag{3.43}$$

где n – искомый коэффициент запаса;

n_σ, n_τ – коэффициенты запаса в предположении, что действуют соответственно только нормальные напряжения σ или только касательные напряжения τ, которые определяются по формулам:

$$n_\sigma=\frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{K_\sigma}{\beta_\sigma\cdot\varepsilon_\sigma}\sigma_a+\psi_\sigma\sigma_m},\quad n_\tau=\frac{\tau_{-1}}{\dfrac{K_\tau}{\beta_\tau\cdot\varepsilon_\tau}\tau_a+\psi_\tau\tau_m}, \tag{3.44}$$

где σ_a, σ_m – амплитудное и среднее напряжения рабочего цикла;

σ_{-1} – предел выносливости материала при симметричном цикле изменения нормальных напряжений;

ψ_σ коэффициент влияния ассиметрии цикла;

K_σ эффективный коэффициент концентрации напряжений;

ε_σ масштабный коэффициент;

β_σ коэффициент состояния поверхности.

Аналогично для коэффициента по касательным напряжениям n_τ.

Из уравнения (3.43) находится искомый коэффициент запаса:

$$n=\frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2+n_\tau^2}}. \tag{3.45}$$

Пример № 20. В опасном сечении вала с диаметром d = 35 мм действуют крутящий момент M_K = 250 Нм и изгибающий момент M_u = 260 Нм. Вал сделан из углеродистой стали (предел прочности которой равен σ_B = 550 МПа, а предел текучести σ_T = 260 МПа) и не имеет резких переходов, выточек, канавок; поверхность его чисто обработана резцом. Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимися по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения – по пульсирующему циклу.

Коэффициенты концентрации напряжений и масштабные коэффициенты можно считать одинаковыми для нормальных и для касательных напряжений.

Решение.

1. Определим максимальные нормальные и максимальные касательные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_x} = \frac{M_u \cdot 32}{\pi d^3} = \frac{260 \cdot 32}{3{,}14 \cdot 0{,}035^3} = 61{,}8 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2 = 61{,}8 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P} = \frac{M_K \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{250 \cdot 16}{3{,}14 \cdot 0{,}035^3} = 29{,}7 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2 = 29{,}7 \text{ МПа}.$$

2. По эмпирическим формулам [4] определим механические характеристики материала:

– предел текучести при кручении:

$$\tau_T^K = 0{,}6\sigma_T = 0{,}6 \cdot 260 = 156 \text{ МПа};$$

– предел выносливости на кручение при симметричном цикле:

$$\tau_{-1}^K = 0{,}6\sigma_B = 0{,}22 \cdot 550 = 121 \text{ МПа};$$

– предел выносливости на изгиб при симметричном цикле:

$$\tau_{-1}^{II} = 0{,}4\sigma_B = 0{,}4 \cdot 550 = 220 \text{ МПа}.$$

3. Коэффициент концентрации напряжений определим по формуле:

$$K_\sigma = K_\tau = 1{,}2 + 0{,}2\frac{\sigma_B - 400}{1100} = 1{,}2 + 0{,}2\frac{550 - 400}{1100} = 1{,}227.$$

4. Масштабный коэффициент определим по формуле:

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = 1{,}2 + 0{,}1(d - 3), \qquad \text{где } d \text{ – в сантиметрах.}$$

5. Коэффициент состояния поверхности берем (см. Приложение 5)

$$\beta_\sigma = \beta_\tau = 0{,}9.$$

6. Определим коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям по формуле (3.45):

$$n_\sigma = \frac{220}{\frac{1{,}227}{0{,}9 \cdot 1{,}25}61{,}8 + 0} = 3{,}26.$$

($\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \sigma_{\max} = 61{,}8$ МПа, так как имеем симметричный цикл).

По касательным напряжениям $\psi_\tau = 0$ (см. Приложение 6).

Так как касательные напряжения меняются по пульсирующему циклу, то $\tau_a = \tau_m = \frac{\tau_{\max}}{2} = \frac{29{,}7}{2} = 14{,}85$ МПа.

Тогда по формуле (3.45): $n_\tau = \frac{121}{\frac{1{,}227}{0{,}9 \cdot 1{,}25} \cdot 14{,}85 + 0} = 7{,}47.$

Из (3.45) получим $n = \dfrac{3{,}24 \cdot 7{,}47}{\sqrt{3{,}24^2 + 7{,}47^2}} = 2{,}97.$

8. Коэффициенты запаса n_σ и n_τ по отношению к пределу текучести равны $n_\sigma = \dfrac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \dfrac{260}{61{,}8} = 4{,}21$; $n_\tau = \dfrac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \dfrac{156}{29{,}7} = 5{,}25.$

Общий коэффициент запаса прочности по текучести согласно (3.45): $n = \dfrac{4{,}21 \cdot 5{,}25}{\sqrt{4{,}21^2 + 5{,}25^2}} = 3{,}28.$

Таким образом, принимаем коэффициент запаса по выносливости $n = 2{,}97$, т.к. он ниже коэффициента запаса по текучести.

4 ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы основные задачи дисциплины «Сопротивление материалов»?
2. Что называется прочностью, жесткостью и устойчивостью элемента конструкции?
3. Какие деформации называются упругими и какие пластическими (остаточными)?
4. Что называется упругостью твердого тела?
5. Как классифицируются нагрузки, действующие на сооружения?
6. Сформируйте основные гипотезы и допущения, принимаемые в сопротивлении материалов.
7. Что такое брус, пластинка и оболочка?
8. В чем сущность метода сечений?
9. Охарактеризуйте внутренние силовые факторы (внутренние усилия), возникающие в поперечном сечении бруса при его нагружении.
10. Что называется напряжением в данной точке сечения? Какова его размерность?
11. Что такое нормальные и касательные напряжения? Как они действуют в рассматриваемых сечениях твердого тела?
12. Что такое абсолютная и относительная деформации? Какова размерность каждой из них?
13. Что называется продольной силой в сечении бруса?
14. Что называется эпюрами продольных сил и нормальных напряжений? Как они строятся?
15. Как формулируется и как записывается закон Гука при растяжении (сжатии)?
16. Что такое модуль упругости материала? Какова его размерность?
17. Что называется жесткостью сечения бруса при растяжении (сжатии)?
18. Что понимают под коэффициентом Пуассона? Каковы пределы его изменения для различных материалов?
19. Какой вид имеет диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали?
20. Что называется пределами: пропорциональности, упругости, текучести, прочности?
21. Что понимают под условным пределом текучести?
22. Назовите основные характеристики прочности материала.
23. Какими показателями характеризуется степень пластичности материала? Как они определяются?
24. Что называется допускаемым напряжением материала? Каково его значение в вопросе прочности конструкции?

25. Почему допускаемое напряжение должно быть ниже предела пропорциональности данного материала?

26. Что называют коэффициентом запаса прочности?

27. Какие факторы влияют на выбор величины допускаемого напряжения и коэффициента запаса прочности?

28. Напишите расчетное уравнение прочности на растяжение и сжатие. Объясните его смысл.

29. Напишите формулы, по которым: а) проверяется действительное напряжение в сечении бруса; б) подбирается площадь поперечного сечения; в) определяется величина допустимой нагрузки при заданном сечении бруса.

30. Какие задачи на растяжение и сжатие называются статически неопределимыми? Какова методика их решения?

31. Что понимают под напряженным состоянием в точке нагруженного тела?

32. Назовите компоненты напряженного состояния? Сформулируйте закон парности касательных напряжений.

33. Назовите виды напряженного состояния в точке.

34. Какие напряжения называются главными? Как они обозначаются?

35. Какие площадки нагруженного тела называют главными?

36. Напишите формулы для вычисления главных напряжений и определения положения главных площадок при плоском напряженном состоянии.

37. На каких площадках при плоском напряженном состоянии возникают наибольшие нормальные напряжения? Наибольшие касательные?

38. Что понимают под сдвигом? Чистым сдвигом?

39. Сформулируйте и запишите закон Гука при сдвиге?

40. Запишите формулу обобщенного закона Гука при сдвиге?

41. Запишите формулу для потенциальной энергии упругого деформирования.

42. По какой формуле вычисляется удельная потенциальная энергия формоизменения?

43. Гипотезы прочности. Их назначение. Понятие о эквивалентных напряжениях.

44. Вторая гипотеза прочности. Назначение. Недостатки.

45. Третья гипотеза прочности. Назначение. Недостатки.

46. Гипотеза удельной потенциальной энергии формоизменения. Область применения.

47. Критерий хрупкого разрушения Мора.

48. Кручение. Определение внутреннего крутящего момента. Построение его эпюры.

49. Напряжения в вале круглого сечения.

50. Расчет на прочность при кручении. Три типа задач.

51. Какова рациональная форма стержня при кручении? Почему?

52. Определение угла закручивания при кручении. Что называют жесткостью сечения на кручение?

53. Каков порядок решения статически неопределимых задач на кручение?

54. Как вычислить координаты центра тяжести составного сечения?

55. Что понимают под осевым, полярным и центробежным моментами инерции? Их свойства, размерность.

56. Как вычислить моменты инерции при параллельном переносе осей для составного сечения?

57. Какие оси называют главными осями сечения? Как определить их положения?

58. Как вычислить главные центральные моменты инерции?

59. Напишите формулы для вычисления осевых моментов инерции для прямоугольника, круга, треугольника.

60. Изгиб бруса. Что понимают под прямым, косым, чистым, поперечным изгибом?

61. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе?

62. Как вычисляется изгибающий момент в поперечном сечении бруса? Каково правило знаков изгибающего момента?

63. Как вычисляется поперечная сила в поперечном сечении балки? Каково правило знаков поперечной силы?

64. Как формулируются и записываются дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки?

65. Что такое эпюры поперечных сил и изгибающих моментов? Как и для чего они строятся?

66. Как изменяется величина поперечной силы в сечении, соответствующем точке приложения внешней сосредоточенной силы? Изменяется ли величина изгибающего момента в этом сечении?

67. Как изменяется величина изгибающего момента в сечении, в котором к балке приложен внешний сосредоточенный момент? Изменяется ли величина поперечной силы в этом сечении?

68. Что такое нейтральный слой и нейтральная ось балки и как они расположены?

69. По какой формуле определяются нормальные напряжения в поперечном сечении балки при изгибе и как они меняются по высоте балки? Покажите эпюру напряжений.

70. Что называется жесткостью сечения при изгибе?

71. Что называют осевым моментом сопротивления сечения? Какова его размерность и физическая сущность?

72. Напишите условие прочности при изгибе. Какие три типа задач можно решать по этому условию?

73. Какие сечения балок являются рациональными? Почему?

74. Перемещения при изгибе. Вывод дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Пример его интегрирования.

75. Обобщенные силы и обобщенные перемещения. Работа упругих сил.

76. Потенциальная энергия при упругом деформировании в общем случае нагружения бруса.

77. Вывод формулы интеграла Мора. Пример применения.

78. Вывод формулы Верещагина. Пример применения.

79. Решение статически определимых рам. Построение эпюр N, Q и M. Узловые проверки.

80. Решение статически неопределимых рам. Канонические уравнения метода сил. Порядок расчета. Проверка.

81. Определение напряжений при внецентренном растяжении – сжатии бруса.

82. Определение положения нейтральной линии, опасных точек поперечного сечения бруса при внецентренном растяжении – сжатии.

83. Расчет на прочность при кручении с изгибом. Анализ напряженного состояния.

84. Формы равновесия центрально сжатых стержней. Критическая и допускаемая нагрузки. Коэффициент запаса устойчивости.

85. Вывод формулы Эйлера. Коэффициент приведения длины стойки.

86. Пределы применимости формулы Эйлера. Диаграмма критических напряжений для стали. Формула Ясинского.

87. Практический расчет на устойчивость (условия устойчивости). Вывод коэффициента продольного изгиба. Методика проектировочного расчета стойки.

88. Расчет на прочность с учетом сил инерции.

89. Расчет при центральном и поперечном ударе. Частные случаи.

90. Циклические напряжения. Виды циклов. Характеристики циклов. Физическая природа явления усталостного разрушения.

91. Понятие предела выносливости и его получение (кривая Велера).

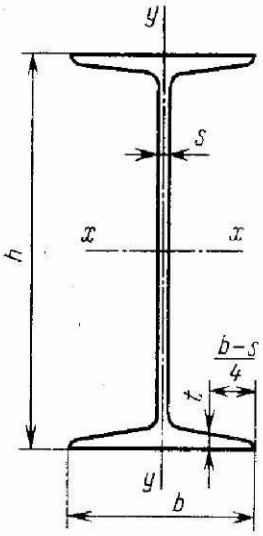
92. Факторы, влияющие на предел выносливости. Меры повышения выносливости материалов.

93. Расчет на выносливость при симметричном и ассимметричном циклах нагружения при совместном действии кручения и изгиба

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239—89)

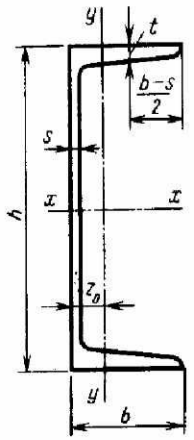


h — высота двутавра;
b — ширина полки;
s — толщина стенки;
t — средняя толщина полки;
A — площадь поперечного сечения;
J — момент инерции;
W — момент сопротивления;
S — статический момент полусечения;
i — радиус инерции.

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A, см^2	J_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
		h	b	s	t								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Приложение 2

Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240–89)

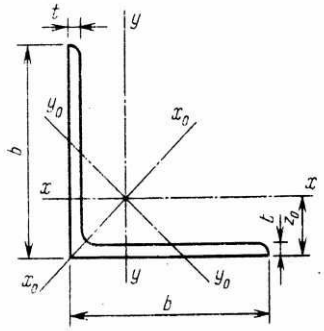


h — высота швеллера;
b — ширина полки;
s — толщина стенки;
t — средняя толщина полки;
A — площадь поперечного сечения;
J — момент инерции;
W — момент сопротивления;
S — статический момент полусечения;
i — радиус инерции;
z_0 — расстояние от оси y до наружной грани стенки.

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A, см^2	J_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	z_0, см
		h	b	s	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Приложение 3

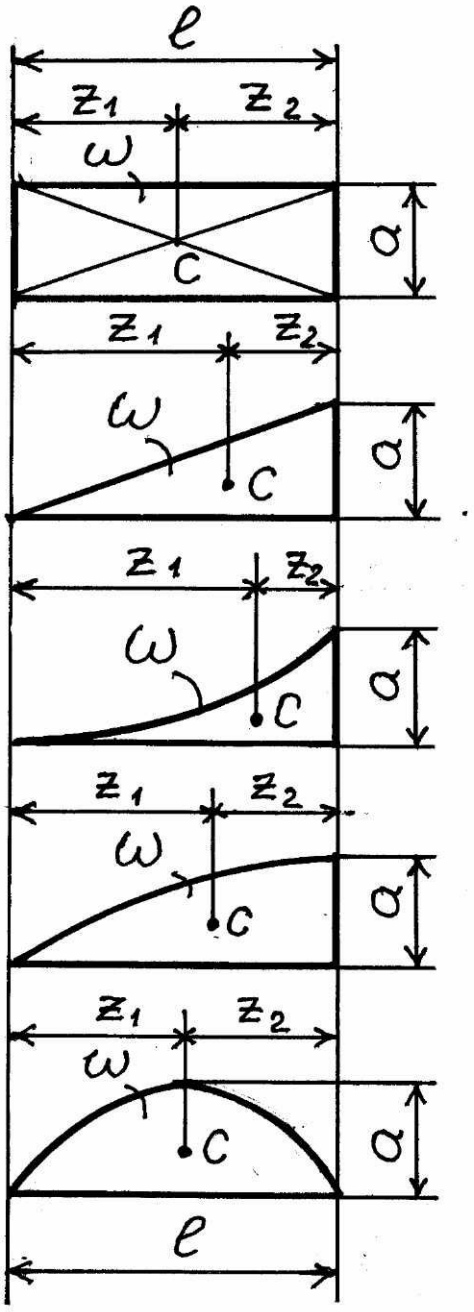
Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509—86)



b — ширина полки;
t — толщина полки;
A — площадь поперечного сечения;
J — момент инерции;
i — радиус инерции;
J_{xy} — центробежный момент инерции;
z_0 — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

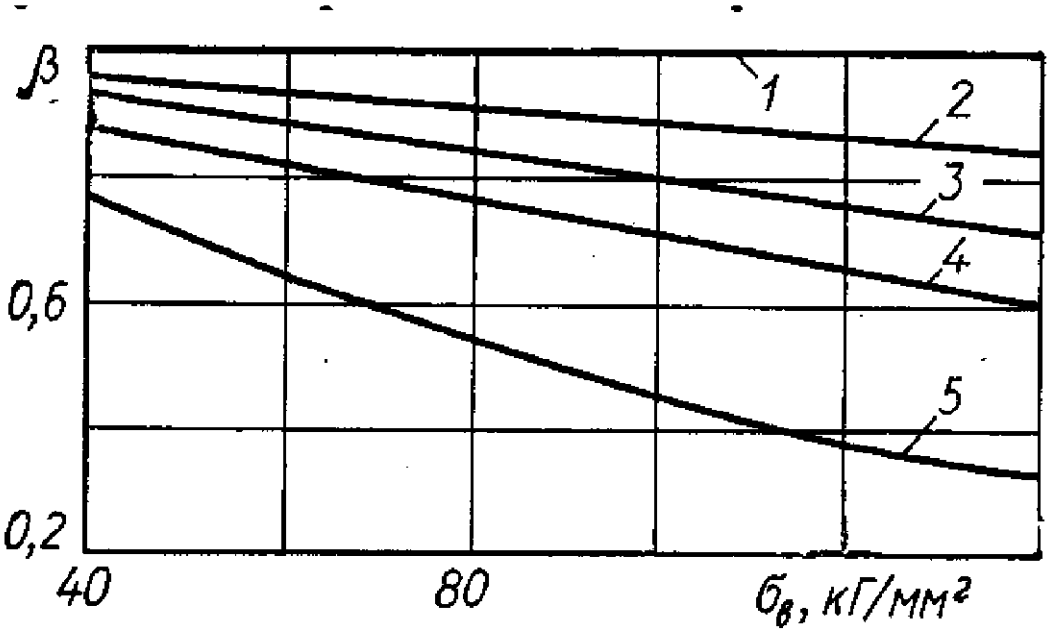
Номер уголка	Маса 1 м уголка, кг	Размеры, мм		A, см^2	J_x, см^4	i_x, см	J_{x_0max} см^4	i_{x_0max}, см	J_{y_0min}, см^4	i_{y_0min}, см	$\lvert J_{xy}\rvert$, см^4	z_0, см
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53

Приложение 4



ω	z_1	z_2
ℓa	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{\ell}{2}$
$\frac{\ell a}{2}$	$\frac{2\ell}{3}$	$\frac{\ell}{3}$
$\frac{\ell a}{3}$	$\frac{3\ell}{4}$	$\frac{\ell}{4}$
$\frac{2\ell a}{3}$	$\frac{5\ell}{8}$	$\frac{3\ell}{8}$
$\frac{2\ell a}{3}$	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{\ell}{2}$

Приложение 5



Приложение 6

Ψ°	α	β	Ψ°	α	β
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000